

Tutoraggio Ricerca Operativa 2020/2021

10. Sottosequenza crescente più lunga (Programmazione Dinamica)

Aurora Rossi, Alice Raffaele, Romeo Rizzi

Università degli Studi di Verona

05 maggio 2021

TE 18 febbraio 2020 - Esercizio 4

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali:

34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47	

Sfruttiamo una tabella di Programmazione Dinamica per rispondere alle varie richieste dell'esercizio:

- Sottoproblemi: le sottosequenze possibili di varie lunghezze, da 1 a n ;
- Vale la seguente relazione:

$$L[i] = \begin{cases} 1 + \max\{L[j]\}, & \text{per } 0 < j < i \text{ e } s[j] < s[i] \\ 1 & \text{se non esiste tale } j \end{cases}$$

La tabella ha tre righe: la centrale è occupata dai numeri della sequenza; nella riga sotto scriveremo i risultati dei vari sottoproblemi leggendo la sequenza da sinistra a destra; nella riga sopra invece procederemo al contrario, partendo dalla fine.

Esercizio 4 (I)

- ① Trovare una sottosequenza **crescente** che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

Il numero più alto che leggiamo sia sopra sia sotto è 9 e ce n'è più di uno
→ Ci sono soluzioni ottime multiple. Una di queste è:

34 - 42 - 44 - 49 - 52 - 63 - 69 - 79 - 81

Esercizio 4 (II)

- 2 Una sequenza è detta una *N-sequenza*, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga *N-sequenza* che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

- Ripensamento: a un certo punto i possiamo avere un numero minore del precedente e da lì in poi ricominciare a crescere;
- Solo il numero in prima posizione e quello nella i non rispettano la regola di essere strettamente crescenti del numero che li precede:
 - In una sottosequenza tradizionale tale regola implica anche che valga per tutti gli altri precedenti;
 - Nella *N-sequenza*, non avendo precedenti, 34 è un'eccezione; invece 43 è il nostro ripensamento, eccezione per definizione.

Esercizio 4 (III)

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

- E' come se la sequenza di numeri fosse divisa in due, a un certo punto i , e per ottenere una massima N -sequenza si spezzasse in due il problema: massimizzando prima e dopo i ;
- A questo punto, come fare a capire qual è l'elemento i ?
- Proviamo a massimizzare prima la stringa da 1 a $i-1$: converrebbe perciò considerare la prima sottosequenza di lunghezza massima (ossia 9), che si ottiene con 34 - 42 - 44 - 49 - 52 - 63 - 69 - 79 - 81.
- L'elemento i sarebbe quindi il numero 43; a questo punto possiamo calcolare la più lunga sottosequenza crescente nel sottoproblema rimasto, ottenendo 5 come lunghezza:

43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	1	3	4	3	4	5	3

- La N -sottosequenza sarebbe lunga $9+5 = 14$.

Esercizio 4 (IV)

- In questo caso siamo fortunati e il risultato è giusto, ma sarebbe più corretto procedere considerando anche la prima riga;
- Infatti noi vogliamo massimizzare **allo stesso tempo** la sottosequenza da 1 a $i-1$ e quella da i alla fine;
- Non è detto che partendo dalla soluzione migliore della richiesta 1 si arrivi sempre alla soluzione ottima che sia una N -sequenza;
- Come possiamo fare?
 - Sfruttiamo sia la prima sia l'ultima riga;
 - Gli 1 nella prima riga: vuol dire che lì c'è stata un'interruzione e si è dovuti ripartire;
 - Nella riga sotto, per quel numero avremo un numero 'alto', nel senso che quello successivo sarà per forza più basso;
 - Sommiamo il numero rosso in posizione $i - 1$ con quello verde in posizione i e cerchiamo la somma massima: avremo ottenuto così il nostro elemento i .
- Nell'esercizio in questione, la somma massima ($9+5$) si ottiene con $i = 17$ e il valore dell' i -esimo elemento è 43.

Esercizio 4 (V)

- 3 Trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- Il 40 è il secondo elemento partendo da 34;
- Rifaccio i conti per la sottosequenza di numeri dal 40 in poi, ottenendo:

40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	2	3	3	4	5	2	3	1	4	5	4	5	6	4

- Quindi la soluzione alla richiesta ha lunghezza 7 e vale:

34 - 40 - 43 - 46 - 48 - 64- 73

Esercizio 4 (VI)

- 4 Trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

- Per risolvere questo punto, è sufficiente scartare i primi quattro elementi e guardare nella prima riga il numero più alto;
- In questo caso, abbiamo due soluzioni ottime entrambe lunghe 6, e una è la seguente:

41 - 52 - 63 - 69 - 79 - 81

Esercizio 4 (VII)

- 5 Trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	3	5	2	7	8	6	8	9	6

- Si tolgono gli elementi indicati e si ricompila la tabella, ottenendo una soluzione con lunghezza 9:

34 - 42 - 44 - 49 - 52 - 60 - 61 - 64 - 73

Esercizio 4 (VIII)

- 6 Fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.
- Se due numeri nella sequenza hanno lo stesso numero assegnato nell'ultima riga, vuol dire che il secondo non è più grande del primo;
- Possiamo quindi costruire delle sottosequenze decrescenti mettendo assieme tutti gli elementi che hanno lo stesso numero;
- Otteniamo quindi 9 sottosequenze decrescenti, così composte:
 $\{34\}$ - $\{42, 41, 40, 38\}$ - $\{44, 43\}$ - $\{49, 45\}$ - $\{52, 46\}$ -
 $\{63, 60, 54, 48, 47\}$ - $\{69, 66, 61\}$ - $\{86, 79, 64\}$ - $\{81, 80, 73\}$