

Tutoraggio Ricerca Operativa 2021/2022

3. Programmazione Lineare: Metodo del Simplexso e Metodo grafico

Aurora Rossi, Alice Raffaele, Romeo Rizzi

Università degli Studi di Verona

19 maggio 2022

Un problema di *Programmazione Lineare* (PL) ha la seguente forma:

$$\begin{array}{ll}\min \text{ o } \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle **variabili di decisione**, $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei **termini noti**, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei **coefficienti** delle variabili nell'espressione della funzione obiettivo.

Forma canonica e forma standard

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Canonica

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Standard

Le due formulazioni sono equivalenti ma il passaggio da una all'altra potrebbe cambiare il numero di vincoli e di variabili.

Regole da seguire:

- Passaggio da “min” a “max”, cambiando il segno di c^T ;
- Cambio dei segni dei vincoli da “ \leq ” a “ $=$ ”, introducendo **variabili di slack**: $a_i^T x \geq b_i \rightarrow a_i^T x + s_i = b_i$, con $s_i \geq 0$;
- Variabili libere: se x_i è libera in segno, allora si definisce $x_i = x_i^+ - x_i^-$, con $x_i^+, x_i^- \geq 0$ e si aggiornano i vincoli dove appariva x_i .

- **PL Intera (ILP)**: quando tutte le variabili devono assumere valore intero;
- **PL Mista Intera (MILP)**: quando alcune variabili sono intere e altre continue;
- **PL Binaria (0-1)**: quando tutte le variabili assumono valore 0 o 1.

Geometria della Programmazione Lineare

- **Poliedro (convesso)**: intersezione di un numero finito di semispazi affini o iperpiani;
- **Regione ammissibile**: insieme di soluzioni ammissibili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano tutte le disequazioni lineari \rightarrow È un poliedro;
- **Politopo**: poliedro limitato;
- **Vertice o Punto estremo**: un punto \mathbf{x} di un poliedro P che non può essere espresso come combinazione convessa di altri due punti del poliedro, i.e., non esistono $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ e $\lambda \in (0, 1)$ tali che $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$;
- Ogni poliedro ha un **numero finito di vertici**;
- **Teorema di Minkowski-Weyl**: ogni punto di un politopo P può essere ottenuto come combinazione convessa dei suoi vertici \rightarrow
Se la regione ammissibile di un problema di PL è un politopo limitato, allora esiste almeno un vertice ottimo per P .

Vertici e soluzioni di base

- La soluzione ottima di un problema di PL è un vertice: possiamo considerarne uno a caso e iterare lungo gli altri vertici, spostandoci su uno adiacente, finché non troviamo l'ottimo;
- **Base di A** : una collezione di m colonne linearmente indipendenti di A , indicata con B ;
- **Variabili di base e fuori base**: \mathbf{x}_B e \mathbf{x}_N

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ può essere scritto come } B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

- Quando $\mathbf{x}_N = 0$, $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ è la **soluzione di base** associata alla base B e può essere:
 - *ammissibile (feasible)*, se $B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$;
 - *degenere*, se $B^{-1}\mathbf{b}$ una o più componenti nulle.
- Un punto \mathbf{x} del poliedro $P := \{\mathbf{x} \geq 0 : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ è un **vertex** se e solo se \mathbf{x} è una soluzione ammissibile di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Il metodo del Simplexso

Come risolvere un problema di PL?

- Elencando tutti i possibili vertici, i.e., tutte le soluzioni di base del problema \rightarrow Numero di vertici = $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;
- Cerchiamo di migliorare un po' questo approccio:
 - Verifichiamo l'ottimalità della soluzione corrente in qualche modo;
 - Spostiamoci da una soluzione di base ammissibile a un'altra con un valore migliore della funzione obiettivo.
- **Metodo del Simplexso** ideato da George Dantzig nel 1947:
 - Uso di tableau/dizionari;
 - Esercizio nelle slides successive;
 - Vedere anche: <https://www.youtube.com/watch?v=XK26I9eoSl8> e https://www.hec.ca/en/cams/help/topics/The_steps_of_the_simplex_algorithm.pdf

Esercizio sul Simplexso

Consideriamo il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Mettiamo il sistema in forma standard introducendo le variabili di slack:

$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ & -2x_1 + x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1 - x_2 + s_3 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & s_1, s_2, s_3 \geq 0\end{array}$$

Esercizio sul Simplexso - Problema a origine ammissibile

- Osserviamo in primis che il problema è **a origine ammissibile**: tutti i termini noti sono maggiori o uguali a zero;
- Ciò ci consente di partire dalla soluzione iniziale data dall'origine, ossia $x_1 = x_2 = 0$, dove la funzione obiettivo vale 0;
- x_1 e x_2 sono quindi *fuori base*, mentre s_1 , s_2 e s_3 sono *in base*;
- Vediamo come impostare il tableau:

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	Coefficienti della matrice A					Termini noti
s2						
s3						
	Coefficienti della funzione obiettivo (coefficienti di costo ridotto)					Valore opposto funzione obiettivo

Esercizio sul Simplexso - Tableau 1

Ecco il primo tableau:

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	2	1	1	0	0	4
s2	-2	1	0	1	0	2
s3	1	-1	0	0	1	1
	3	2	0	0	0	0

Nota: le colonne delle variabili in base formano sempre la matrice identità.

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	2	1	1	0	0	4
s2	-2	1	0	1	0	2
s3	1	-1	0	0	1	1
	3	2	0	0	0	0

Esercizio sul Simplexso - Tableau 1 e coefficienti di costo ridotto

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	2	1	1	0	0	4
s2	-2	1	0	1	0	2
s3	1	-1	0	0	1	1
	3	2	0	0	0	0

Osserviamo che il coefficiente di costo ridotto (c.c.r):

- di una variabile in base è pari a zero \rightarrow Questa variabile, essendo già in base, non può più migliorare/peggiore la funzione obiettivo;
- di una variabile fuori base non è zero \rightarrow Rappresenta quanto potrebbe migliorare/peggiore la funzione obiettivo per ogni unità della variabile considerata, se portata in base.

Qual è la variabile più *promettente* da fare entrare in base a questo punto?

Esercizio sul Simplexso - Variabile entrante

- La variabile più promettente è x_1 , perché il suo coefficiente di costo ridotto è il più alto;
- Fin quando vi sarà anche una sola variabile fuori base avente coefficiente di costo ridotto positivo non nullo, allora non avremo raggiunto l'ottimo → Smetteremo di iterare soltanto quando tutte le variabili fuori base avranno c.c.r. negativi.

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	2	1	1	0	0	4
s2	-2	1	0	1	0	2
s3	1	-1	0	0	1	1
	3	2	0	0	0	0

x_1 diventa quindi la nostra *variabile entrante*, ma al posto di quale?

Esercizio sul Simplexso - Variabile uscente e pivot

- La variabile uscente si determina con la **regola dei rapporti minimi**: una volta scelta la variabile entrante j , si calcola il rapporto $\frac{b_i}{a_{i,j}}$, per ogni vincolo i e si sceglie quello più piccolo ma positivo:
 - $i = 1 : \frac{4}{2} = 2$
 - $i = 2 : \frac{2}{-2} = -1$
 - $i = 3 : \frac{1}{1} = 1$
- In questo caso, si ottiene il valore minimo con la riga di s_3 , che è selezionata per essere la variabile uscente;
- L'elemento $a_{3,1} = 1$ è detto **pivot**.

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	2	1	1	0	0	4
s2	-2	1	0	1	0	2
s3	1	-1	0	0	1	1
	3	2	0	0	0	0

Esercizio sul Simplexso - Tableau 2 e riga pivot

- Sostituiamo s_3 con x_1 e iniziamo a comporre il nuovo tableau;
- Si divide tutta la riga del pivot per l'elemento pivot stesso (in questo caso, valendo 1, non bisogna far nulla);
- Otteniamo di nuovo la matrice identità per le colonne delle variabili in base e mettiamo a zero i loro c.c.r.

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	0		1	0		
s2	0		0	1		
x1	1	-1	0	0	1	1
	0		0	0		

Esercizio sul Simplexso - Tableau 2 e altre righe

- Dobbiamo ora ricostruire i valori delle altre celle eseguendo operazioni di riga e sfruttando la riga pivot;
- Nella prima riga, $a_{1,1}$ valeva 2, mentre ora deve valere 0 \rightarrow Alla prima riga del tableau precedente bisogna togliere due volte la riga pivot;
- Così otteniamo i seguenti valori:

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	0	3	1	0	-2	2
s2	0		0	1		
x1	1	-1	0	0	1	1
	0		0	0		

Esercizio sul Simplexso - Tableau 2 e c.c.r.

- Facciamo lo stesso analogo procedimento per le altre due righe:

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	0	3	1	0	-2	2
s2	0	-1	0	1	2	4
x1	1	-1	0	0	1	1
	0		0	0		

- La stessa cosa vale pure per i c.c.r. : quello di x_1 deve passare da 3 a 0, quindi togliamo tre volte la riga pivot dalla riga dei c.c.r. nel tableau precedente e otteniamo il Tableau 2

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	0	3	1	0	-2	2
s2	0	-1	0	1	2	4
x1	1	-1	0	0	1	1
	0	5	0	0	-3	-3

Esercizio sul Simplexso - Tableau 2 e test di ottimalità

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	0	3	1	0	-2	2
s2	0	-1	0	1	2	4
x1	1	-1	0	0	1	1
	0	5	0	0	-3	-3

- **Variabili in base:** s_1 , s_2 e x_1 e valgono rispettivamente 2, 4 e 1;
- **Variabili fuori base:** x_2 e s_3 e sono tutte nulle;
- **Funzione obiettivo:** $3 = 3 \cdot 1$;
- **Siamo all'ottimo?** No, perché il c.c.r. di x_2 è ancora positivo:
 - x_2 potrebbe dare un contributo di 5 per ogni unità \rightarrow Iteriamo ancora e l'unica variabile che ha senso fare entrare è proprio x_2 ;
 - s_3 ha c.c.r. negativo e, tra l'altro, è appena uscito: scegliendo lui, ritorneremmo al tableau precedente.

Esercizio sul Simplexso - Tableau 3 e variabile entrante, variabile uscente e pivot

- Applichiamo di nuovo la regola dei rapporti minimi: stavolta la variabile uscente è s_1 e l'elemento pivot è $a_{1,2}$;

	x1	x2	s1	s2	s3	
s1	0	3	1	0	-2	2
s2	0	-1	0	1	2	4
x1	1	-1	0	0	1	1
	0	5	0	0	-3	-3

- Dividiamo la riga pivot per 3:

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/3	0	-2/3	2/3
s2						
x1						

Esercizio sul Simplexso - Tableau 3 e ricostruzione altre righe

- Otteniamo di nuovo la matrice identità con le colonne di x_2 , s_2 e x_1 e riempiamo la tabella facendo operazioni di riga come prima::

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/3	0	-2/3	2/3
s2	0	0	1/3	1	4/3	14/3
x1	1	0	1/3	0	1/3	5/3
	0	0		0		

- Aggiorniamo la riga dei c.c.r. e della funzione obiettivo, che varrà $\frac{19}{3}$:

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/3	0	-2/3	2/3
s2	0	0	1/3	1	4/3	14/3
x1	1	0	1/3	0	1/3	5/3
	0	0	5/3	0	1/3	19/3

Esercizio sul Simplexso - Tableau 3 e test di ottimalità

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/3	0	-2/3	2/3
s2	0	0	1/3	1	4/3	14/3
x1	1	0	1/3	0	1/3	5/3
	0	0	-5/3	0	1/3	-19/3

- **Variabili in base:** x_2 , s_2 e x_1 e valgono rispettivamente $2/3$, $14/3$ e $5/3$;
- **Variabili fuori base:** s_1 e s_3 e sono tutte nulle;
- **Funzione obiettivo:** $\frac{19}{3} = 3 \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}$;
- **Siamo all'ottimo?** Ancora no, perché il c.c.r. di s_3 è positivo.

Esercizio sul Simplexso - Tableau 4 e variabile entrante, uscente e pivot

- La variabile entrante è s_3 , che prende il posto di s_2 :

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/3	0	-2/3	2/3
s2	0	0	1/3	1	4/3	14/3
x1	1	0	1/3	0	1/3	5/3
	0	0	-5/3	0	1/3	-19/3

- Dividiamo la riga pivot per $4/3$ e recuperiamo la matrice identità come prima:

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1			0	
s3	0	0	1/4	3/4	1	7/2
x1	1	0			0	
	0	0			0	

Esercizio sul Simplexso - Tableau 4 e ricostruzione altre righe

- Calcoliamo tutte le altre righe del tableau:

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/2	1/2	0	3
s3	0	0	1/4	3/4	1	7/2
x1	1	0	1/4	-1/4	0	1/2
	0	0			0	

- Aggiorniamo i c.c.r. e la funzione obiettivo:

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/2	1/2	0	3
s3	0	0	1/4	3/4	1	7/2
x1	1	0	1/4	-1/4	0	1/2
	0	0	-7/4	-1/4	0	-15/2

Esercizio sul Simplexso - Tableau 4 e soluzione ottima

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	1/2	1/2	0	3
s3	0	0	1/4	3/4	1	7/2
x1	1	0	1/4	-1/4	0	1/2
	0	0	-7/4	-1/4	0	-15/2

- **Variabili in base:** x_2 , s_3 e x_1 e valgono rispettivamente 3, $7/2$ e $1/2$;
- **Variabili fuori base:** s_1 e s_2 e sono tutte nulle;
- **Funzione obiettivo:** $\frac{15}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3$;
- **Siamo all'ottimo?** Sì, perché tutti i c.c.r. delle variabili fuori base sono negativi.

Esercizio sul Simplexso - Tutte le iterazioni

Sequenza dei vertici/soluzioni di base visitate:

- ① $\mathbf{x} = (0, 0, 4, 2, 1)$, funzione obiettivo = 0;
- ② $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 4, 0)$, funzione obiettivo = 3;
- ③ $\mathbf{x} = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{14}{3}, 0)$, funzione obiettivo = $\frac{19}{3}$;
- ④ $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, 3, 0, 0, \frac{7}{2})$, funzione obiettivo = $\frac{15}{2}$.

- **Loop tra variabili entranti e uscenti:**

- Per evitare di continuare a ciclare facendo entrare e uscire le stesse variabili, cioè senza visitare nuove soluzioni, si applica la *regola di Bland*: si scelgono variabile entrante e variabile uscente preferendo, fra le opzioni possibili, quelle con gli indici più piccoli;
- In questo modo, il Simplexso converge in al più $\binom{n}{m}$ iterazioni (complessità comunque esponenziale);

- **Soluzione illimitata:**

- Tutti i coefficienti della colonna della variabile entrante sono ≤ 0 ;

- **Soluzioni ottime multiple:**

- Una volta raggiunto l'ottimo, facendo entrare una variabile in base la funzione obiettivo non peggiora;

- **Soluzione impossibile:**

- Regione ammissibile vuota;
- Il problema non è a origine ammissibile e non si riesce a trovare un'altra soluzione da cui far partire il metodo del Simplexso (lo vedremo nella prossima esercitazione con il *metodo delle due fasi*).

Si consideri il problema di PL appena risolto con il metodo del Simplexso:

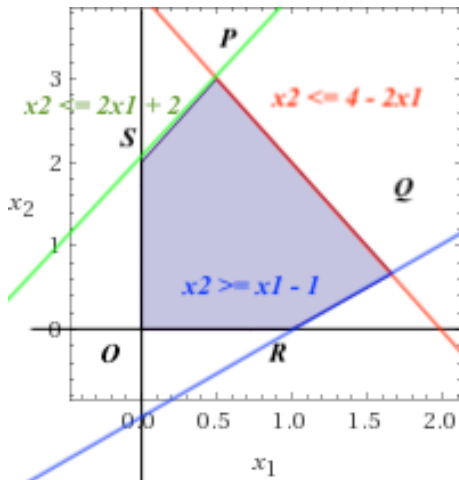
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 1 Risolverlo con il **metodo grafico**, specificando il valore della funzione obiettivo e delle variabili all'ottimo.

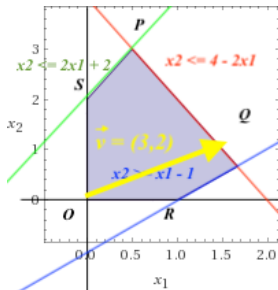
Nota: il problema si presenta in forma canonica, non standard.

TE 31/07/2017, es. 7 - Metodo grafico (II)

Rappresentiamo i tre vincoli nel piano (x_1, x_2) : la loro intersezione rappresenta la regione ammissibile:



- La regione ammissibile ha cinque vertici:
 - $O = x_1 \geq 0 \cap x_2 \geq 0$;
 - $P = \text{vinc}_1 \cap \text{vinc}_2$;
 - $Q = \text{vinc}_1 \cap \text{vinc}_3$;
 - $R = \text{vinc}_3 \cap x_1 \geq 0$;
 - $S = \text{vinc}_2 \cap x_2 \geq 0$.
- La funzione obiettivo può essere vista come una fascio di rette che si muovono nella direzione in cui la funzione è massimizzata: (3, 2)



- La soluzione ottima è data dal punto $P = (\frac{1}{2}, 3)$, l'ultimo vertice raggiunto dalla famiglia di linee rette;
- Qui, la funzione obiettivo vale $\frac{15}{2}$.



Matteo Fischetti, *Introduction to Mathematical Optimization*, Kindle Direct Publishing, 2019

<https://www.amazon.it/Introduction-Mathematical-Optimization-Matteo-Fischetti/dp/1692792024>



Robert J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Springer Nature, 4th edition, 2013

<https://www.springer.com/gp/book/9781461476290>