۱

اصول بنیادی شمارش

بندهای ۱.۱ و ۲.۱

۱. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع، ۵ + ۸ یعنی ۱۳ امکان برای برندهٔ احتمالی وجود دارد.

ب) چون هشت نامزد از حزب A و پنج نامزد از حزب B حضور دارند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، ۵ × ۸ یعنی ۴۰ جفت از نامزدهای حزبهای مخالف مقابل هم قرار می‌گیرند.

پ) در قسمت (الف) قاعدهٔ حاصل‌جمع و در قسمت (ب) قاعدهٔ حاصل‌ضرب به‌کار می‌رود.

۲. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب ۵ × ۵ × ۵ × ۵ × ۵ یعنی $۵^۶$ پلاک اتومبیل وجود دارد که در آنها دو نماد اول حرف صدا دارند و چهار نماد بعدی از رقمهای زوج تشکیل شده‌اند.

۳. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، ۲ × ۳ × ۱۲ × ۴ یعنی ۲۸۸ بیوک متمایز می‌توان ساخت.

ب) از این تعداد، ۲ × ۳ × ۱ × ۴ یعنی ۲۴ تا آبی‌اند.

۴. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد فهرستهای انتخاباتی برابر است با

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = P(۱۰, ۴) = ۵۰۴۰$$

ب) (یک) ۷ × ۸ × ۹ × ۳ یعنی ۱۵۱۲ فهرست وجود دارد که در آنها یک پزشک برای ریاست درنظر گرفته شده است.

(دو) در (۵ × ۶ × ۷ × ۳) × ۴ یعنی در ۲۵۲۰ تا از فهرستها فقط یک پزشک وجود دارد.

(سه) در ۴ × ۵ × ۶ × ۷ یعنی در ۸۴۰ تا از فهرستها هیچ پزشکی را برای هیچ‌یک از پستهای چهارگانهٔ هیأت رئیسه درنظر نگرفته‌اند. درنتیجه، در ۸۴۰ − ۵۰۴۰ یعنی در ۴۲۰۰ تا از فهرستها دست‌کم یک پزشک هست.

۵. براساس اطلاعات داده شده به‌وسیلهٔ این دو خانم و بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌بینیم که ۲ × ۱۰ × ۱۰ × ۱ × ۲ × ۲ یعنی ۸۰۰ شمارهٔ اتومبیل مختلف باید بررسی شوند.

۶. الف) در اینجا با جایگشتهای ۸تایی (نخستین ۸ نفری که به خط پایان می‌رسند) از ۳۰ شئ (دونده‌ها) سروکار داریم. بنابراین، می‌توان جایزه‌ها را به $P(۳۰, ۸)$، یعنی $\frac{۳۰!}{۲۲!}$ طریق اعطا کرد.

Scanned by CamScanner

ب) دو شرکت‌کنندهٔ موردنظر به ۶ طریق می‌توانند بین سه دوندهٔ نخستی باشند که به خط پایان می‌رسند. به‌ازای هر یک از این ۶ طریق، $P(۲۸,۶)$ طریق برای ۶ نفر دیگر (از ۸ نفر نخست) وجود دارد که به خط پایان برسند. بنابراین، اگر بنا باشد دو شرکت‌کنندهٔ موردنظر بین سه دوندهٔ نخست باشند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۶ \times P(۲۸,۶)$ طریق برای اعطای جایزه‌ها وجود دارد.

۷. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۲^۹$ امکان وجود دارد.

۸. الف) اگر قیدی درکار نباشد، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب !۱۲ طریق برای پردازش برنامه‌ها وجود دارد.

ب) اگر بنا باشد نخست هر چهار برنامهٔ اولویت‌دار پردازش شوند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب (!۸)(!۴) طریق برای پردازش برنامه‌ها وجود دارد.

پ) اگر نخست هر چهار برنامهٔ دارای اولویت اول و در آخر هر سه برنامهٔ دارای کمترین اولویت پردازش شوند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب (!۳)(!۵)(!۴) طریق برای پردازش برنامه‌ها وجود دارد.

۹. الف) $۱۶۸ = (۱۲)(۱۴)$.

ب) $۱۸۱۴۴ = (۱۸)(۶)(۱۲)(۱۴)$.

پ) $۷۳۱۵۶۶۰۸ = (۱۲)(۱۴)(۱۲)(۱۴)(۳)(۶)(۱۸)(۸)$.

۱۰. یکی از این ترتیبها، مثلاً ۳ کتاب در یک قفسه و ۱۲ کتاب در قفسهٔ دیگر، را درنظر می‌گیریم. این کار را به !۱۵ طریق می‌توان انجام داد. درحقیقت، برای هر تقسیمبندی این ۱۵ کتاب بین قفسه‌ها (به‌طوری که هیچ قفسه‌ای تهی نباشد) !۱۵ طریق برای چیدن آنها در قفسه‌ها داریم. چون ۱۴ طریق برای تقسیم کتابها بین قفسه‌ها (به‌طوری‌که، هیچ قفسه‌ای تهی نباشد) وجود دارد، تعداد کل راههای چیدن این کتابها در قفسه‌ها، با توجه به قید یاد شده، برابر با (!۱۵)(۱۴) است.

۱۱. الف) چهار جاده از شهر A به شهر B و سه جاده از شهر B به شهر C وجود دارد؛ پس بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۱۲ = ۳ \times ۴$ جاده از A به C وجود دارد که از B می‌گذرند. چون دو جادهٔ مستقیم نیز از A به C داریم، پس به $۱۴ = ۲ + ۱۲$ طریق می‌توان از A به C رفت.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) و با توجه به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌بینیم که $۱۹۶ = ۱۴ \times ۱۴$ سفر رفت و برگشتی متفاوت (از A به C و سپس بازگشت به A) می‌توان ترتیب داد.

پ) تعداد سفرهای رفت و برگشتی مطلوب برابر با ۱۳×۱۴ یعنی ۱۸۲ است.

۱۲. (۱) a, c, t (۲) a, t, c (۳) c, a, t (۴) c, t, a (۵) t, a, c (۶) t, c, a

۱۳. الف) $۸! = P(۸,۸)$ ب) !۷ پ) !۶

۱۴. الف) $P(۷,۲) = \frac{۷!}{(۷-۲)!} = \frac{۷!}{۵!} = ۷ \times ۶ = ۴۲$

ب) $P(۸,۴) = \frac{۸!}{(۸-۴)!} = \frac{۸!}{۴!} = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = ۱۶۸۰$

پ) $P(۱۰,۷) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۷)!} = \frac{۱۰!}{۳!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۶۰۴۸۰۰$

ت) $P(۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = \frac{۱۲!}{۹!} = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ = ۱۳۲۰$

Scanned by CamScanner

۱۵. a، b، c و d را باید در جاهایی بگذاریم که در زیر با x مشخص شده‌اند:

$$e\,\underline{x}\,e\,\underline{x}\,e\,\underline{x}\,e\,\underline{x}\,e$$

بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، !۴ طریق برای انجام این کار وجود دارد.

۱۶. الف) اگر تکرار مجاز باشد، $۴۰^{۲۵}$ پیام متمایز وجود دارد.

ب) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $(۴۰^{۲})(۳۰^{۲۳}) = ۴۰ \times ۳۰ \times ۳۰ \times \ldots \times ۳۰ \times ۳۰ \times ۴۰$ پیام وجود دارد.

۱۷. با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب و قاعدهٔ حاصل‌جمع، تعداد شناسه‌های متمایز برابر است با

$$۲۶ + ۲۶(۳۶) + ۲۶(۳۶)^{۲} + \cdots + ۲۶(۳۶)^{۷} - ۳۶ = (۲۶)\sum_{i=۰}^{۷} ۳۶^{i} - ۳۶$$

۱۸. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۶ \times ۴ \times ۵ \times ۵$ یعنی ۶۰۰ طریق وجود دارد.

۱۹. الف) $۷! = ۵۰۴۰$

ب) $۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = (۴!)(۳!) = ۱۴۴$

پ) $(۳!)(۵)(۴!) = ۷۲۰$ ت) $(۳!)(۴!)(۲) = ۲۸۸$

۲۰. برای حروف MASSACHUSETTS، $\frac{۱۳!}{۲!۴!۲!}$ یعنی (!۱۱) $\binom{۱۳}{۸}$ ترتیب وجود دارد، درحالی‌که برای حروف PENNSYLVANIA، $\frac{۱۲!}{۳!۲!}$ یعنی !۱۱ ترتیب وجود دارد. بنابراین، ترتیبهای حاصل از حروف MASSACHUSETTS بیش از یک برابرونیم ترتیبهای حاصل از حروف PENNSYLVANIA است.

۲۱. الف) چون سه I وجود دارد، تعداد ترتیبها برابر با $\frac{۸!}{۳!}$ یعنی ۶۷۲۰ است.

ب) در اینجا شش نماد V، S، T، N، G و III را به !۶ یعنی ۷۲۰ طریق مرتب می‌کنیم.

۲۲. روی هم $\frac{۱۵!}{۲!۲!۲!}$ ترتیب برای حروف واژهٔ POLYUNSATURATED وجود دارد. شش حرف صدادار O، U، A، U، A و E در این واژه هست. این شش حرف صدادار را می‌توان به $\frac{۶!}{۲!۲!}$ یعنی ۱۸۰ طریق مرتب کرد، ولی فقط در یکی از اینها ترتیب حضور آنها حفظ شده است. در نتیجه، تعداد ترتیبهایی که در آنها ترتیب حضور حروف صدادار حفظ می‌شود برابر است با $\binom{۹۱}{۴} = \left(\frac{۱۵!}{۲!۲!۲!}\right)\left(\frac{۱}{۱۸۰}\right)$.

۲۳. الف) $\frac{۱۲!}{۳!۲!۲!۲!}$ ب) $\underset{(\text{برای حالت GA})}{\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}} + \underset{(\text{برای حالت AG})}{\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}}$

پ) یکی از حالتهایی را که در آن همهٔ حروف صدادار کنار یکدیگرند درنظر می‌گیریم: OIOOIA، L، C، G، L، C و S. این هفت نماد را می‌توان به $\frac{۷!}{۲!۲!}$ طریق مرتب کرد. چون A، I، I، O، O و O می‌توانند به $\frac{۶!}{۳!۲!}$ طریق مرتب شوند، تعداد ترتیبهایی که در آنها همهٔ حروف صدادار کنار یکدیگرند برابر است با $\left(\frac{۶!}{۳!۲!}\right)\left(\frac{۷!}{۲!۲!}\right)$.

Scanned by CamScanner

۲۴. حالت ۱: (رقم یکان میلیون ۵ است) $\frac{6!}{2!}$

حالت ۲: (رقم یکان میلیون ۶ است) $\frac{6!}{2!2!}$

حالت ۳: (رقم یکان میلیون ۷ است) $\frac{6!}{2!2!}$

روی‌هم $6! = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6!}{2!}\right)$ یعنی ۷۲۰ تا از این نوع عددهای صحیح مثبت وجود دارد.

۲۵. جواب برابر است با تعداد طرق مرتب کردن ۱۲ شیء، ۴ تا از نوع اول، ۳ تا از نوع دوم، ۲ تا از نوع سوم و ۳ تا از نوع چهارم. تعداد این طرق برابر است با

$$\frac{12!}{4!3!2!3!} = 277200$$

۲۶. $P(n+1,r) = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} = \frac{n+1}{n+1-r}\cdot\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n+1}{n+1-r}\cdot P(n,r)$

۲۷. الف) $n = 10$ ب) $n = 5$

پ) $\frac{2n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \Longrightarrow 2n(n-1)+50 = 2n(2n-1)$

$$\Longrightarrow n^2 = 25 \Longrightarrow n = 5$$

۲۸. هر چنین مسیری از $(0,0)$ به $(7,7)$ یا از $(2,7)$ به $(9,14)$ ترتیبی از ۷ تا R و ۷ تا U است. $\frac{14!}{7!7!}$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد.

به‌طورکلی، به‌ازای هر دو عدد صحیح نامنفی m و n و به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b، تعداد این نوع مسیرها از (a,b) به $(a+m,b+n)$ برابر است با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

۲۹. الف) هر مسیر از دو H، یک V و هفت A تشکیل شده است. $\frac{10!}{2!1!7!}$ طریق برای مرتب کردن این ۱۰ حرف وجود دارد و این تعداد مسیرها را به‌دست می‌دهد.

ب) $\frac{10!}{2!1!7!}$

پ) اگر a، b و c سه عدد دلخواه و m، n و p سه عدد صحیح نامنفی باشند، آنگاه تعداد مسیرهای موردنظر از (a,b,c) به $(a+m,b+n,c+p)$ برابر است با $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$.

۳۰. الف) «حلقهٔ For» ۱۲ بار برای i اجرا می‌شود، درحالی‌که حلقه‌های مربوط به j و k، به ترتیب، $10-5+1=6$ و $15-8+1=8$ بار اجرا می‌شوند. درنتیجه، مقدار counter پس از اجرای این قطعه برنامهٔ پاسکال برابر است با

$$0 + 12(1) + 6(2) + 8(3) = 48$$

ب) در حقیقت با سه وظیفه روبه‌رو هستیم: T_1، T_2 و T_3. هر بار که دستورالعملهای حلقهٔ i انجام می‌گیرند وظیفهٔ T_1 تحقق می‌پذیرد. به‌همین ترتیب، هر تکرار حلقه‌های j و k، به‌ترتیب، به تحقق وظایف T_2 و T_3 منجر می‌شوند. بنابراین، مقدار نهایی متغیر صحیح counter از قاعدهٔ حاصل‌جمع نتیجه می‌شود.

Scanned by CamScanner

۳۱. (الف) و (ب) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، حکم Writeln

$$۱۲ \times ۶ \times ۸ = ۵۷۶$$

بار اجرا می‌شود.

۳۲. الف) تعداد جناسهای مقلوب پنج حرفی برابر است با $۱ \times ۱ \times ۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶$ یعنی $۲۶^۳$. برای حالت شش حرفی $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶$ یعنی $۲۶^۳$ جناس مقلوب وجود دارد.

ب) اگر هیچ حرفی بیش از دو بار ظاهر نشود، تعداد جناسهای مقلوب پنج حرفی یا شش حرفی برابر است با

$$۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰$$

۳۳. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۹$ یعنی ۱۳۶۰۸۰ عدد صحیح شش رقمی وجود دارد که صدگان هزار آنها صفر نیست و رقم تکراری نیز ندارند.

ب) اگر تکرار ارقام مجاز باشد، ۹×۱۰^۵ تا از این نوع عددهای صحیح شش رقمی وجود دارد.

(یک)(الف) $(۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱) + (۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴) = ۶۸۸۰۰$

(برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۰ است) (برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۲، ۴، ۶ یا ۸ است)

(ب) اگر تکرار رقمها مجاز باشد، $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۵$ یعنی ۴۵۰۰۰۰ عدد صحیح زوج شش رقمی وجود دارد.

(دو)(الف) $(۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱) + (۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱) = ۲۸۵۶۰$

(برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۰ است) (برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۵ است)

(ب) $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۲ = ۱۸۰۰۰۰$

(سه) این حقیقت را به‌کار می‌بریم که هر عدد صحیح وقتی بر ۴ بخش‌پذیر است که عدد صحیح دو رقمی حاصل از یکان و دهگان آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

(الف) $(۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۶) + (۷ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱۶) = ۳۳۶۰۰$

(دو رقم یکان و دهگان به‌صورت ۰۴، ۰۸، ۲۰، ۴۰، ۶۰ یا ۸۰ هستند) (دو رقم یکان و دهگان به‌صورت ۱۲، ۱۶، ۲۴، ۲۸، ۳۲، ۳۶، ۴۸، ۵۲، ۵۶، ۶۴، ۶۸، ۷۲، ۷۶، ۸۲، ۹۲ یا ۹۶ هستند)

(ب) $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۲۵ = ۲۲۵۰۰۰$

۳۴. الف) به‌ازای عددهای صحیح مثبت n و k به‌طوری‌که $n = ۳k$ تعداد طرق مرتب کردن n شئ $x_۱$، $x_۱$، $x_۱$، $x_۲$، $x_۲$، $x_۲$، ...، x_k، x_k، x_k برابر $\frac{n!}{(۳!)^k}$ است. پس $\frac{n!}{(۳!)^k}$ باید عددی صحیح باشد.

ب) اگر n و k دو عدد صحیح مثبت باشند به‌طوری‌که $n = mk$، آنگاه $\frac{n!}{(m!)^k}$ عددی صحیح است.

۳۵. الف) با توجه به وجود دو انتخاب برای هر پرسش، $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ طریق برای پاسخ دادن به امتحان وجود دارد.

ب) این بار برای هر پرسش ۳ انتخاب وجود دارد و بنابراین، تعداد طرق پاسخ دادن $۳^{۱۰}$ است.

Scanned by CamScanner

۳۶. $\underset{(\text{دو ۷ و دو ۳})}{\frac{۴!}{۲!۲!}} + \underset{(\text{دو ۷ و یک ۳})}{(۲)\left(\frac{۴!}{۲!}\right)} + \underset{(\text{دو ۷ و بدون ۳})}{\frac{۴!}{۲!}} + \underset{(\text{یک ۷ و دو ۳})}{(۲)\left(\frac{۴!}{۲!}\right)} + \underset{(\text{یک ۷ و یک ۳})}{۴!} + \underset{(\text{بدون ۷})}{\frac{۴!}{۲!}}$

بنابراین، ۱۰۲ تا از این نوع عددهای صحیح چهار رقمی وجود دارد.

۳۷. الف) !۶

ب) فرض کنیم A و B آن دو نفری باشند که اصرار دارند کنار هم بنشینند. دراین صورت تعداد ترتیبهای موردنظر برابر است با

$$\underset{\substack{(\text{A در طرف}\\ \text{راست B است})}}{۵!} + \underset{\substack{(\text{B در طرف}\\ \text{راست A است})}}{۵!} = ۲(۵!)$$

۳۸. الف) A را می‌نشانیم. دو حالت پیش می‌آید. (۱) یک نفر در طرف چپ A و هم ضلع با A وجود دارد. تعداد این نوع ترتیبها !۷ است. (۲) یک نفر در طرف راست A و هم ضلع با A وجود دارد. این !۷ ترتیب دیگر به‌دست می‌دهد. بنابراین، ۲(!۷) امکان وجود دارد.

ب) ۷۲۰۰

پ) ۵۷۶۰

۳۹. الف) $۱۶۵۲۲ = ۱۲۸^۲ + ۱۲۸ + ۱۰$ بلوک؛ ۸۴۵۹۲۶۴ بایت.

ب) $۲۱۱۳۶۷۴ = ۱۲۸^۳ + ۱۲۸^۲ + ۱۲۸ + ۱۰$ بلوک؛ ۱۰۸۲۲۰۱۰۸۸ بایت.

۴۰.

```
Program Factorial (Input, Output);
(*Finds n factorial for an integer n >=0.*)
Var
  I, N,   Factorial: Integer;
Begin
  Writeln ('Input integer n.');
  Read (N);
  Writeln ('The value of n is', N:0);
  If N < 0 Then
    Writeln ('The factorial is not defined for n = ', N:0)
  Else If ((N=0) Or (N=1)) Then
  Writeln ('For n =', N:0, ' the value of n factorial is 1.')
  Else
    Begin
      Factorial := 1;
      For I := 2 To N Do
        Factorial := I*Factorial;
      Writeln ('For n = ', N:0, ' the value of n factorial is ', Factorial:0)
    End;
End.
```


Scanned by CamScanner

.۴۱

```
Program Permutations (Input, Output);
(* Finds P(n,r), the number of permutations of n distinct objects taken r at a time,
for n >= r >= 0. *)
Var
    I, N, R, Perm: Integer;
Begin
    Writeln ('Input the values of the integers n and r.');
    Read (N,R);
    Writeln ('The values of n and r are ', N:0,' and ', R:0, ', respectively.');
    If (((N < 0) Or (R < 0)) Or (R > N)) Then
        Writeln ('The value of P(n,r) is not defined for n = ',
            N:0,' and r = ', R:0, '.')
    Else If R = 0 Then
        Writeln ('The value of P(n,0) for n = ', N:0, ' is 1.')
        Else
            Begin
                Perm := 1;
                    For I := N Downto N-R+1 Do
                      Perm := I*Perm;
                    Writeln ('For n = ', N:0, ' and r = ', R:0, ' the value of P(n,r) is ',
                      Perm:0)
                End;
End.
```

.۴۲

```
Program  Sum __ of __ fact (output);
Var
      i,j,k,sum: integer;
      factorial: array [0..9] of integer;
Begin
      factorial [0] := 1;

      For i := 1 to 9 do
            factorial [i] :=i * factorial [i-1];

      For i := 1 to 9 do
            For j := 0 to 9 do
                  For k := 0 to 9 do
                        Begin
                              sum := factorial [i] + factorial [j] + factorial [k];
                              If (100 * i + 10 * j + k) = sum then
                                    writeln ((100*i + 10 * j + k) : 0)
                        End;
End.
```

پاسخ ۱۴۵ است چون $(۱!) + (۴!) + (۵!) = ۱ + ۲۴ + ۱۲۰ = ۱۴۵$

Scanned by CamScanner

بند ۳.۱

۱. $\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!(۶-۲)!} = \frac{۶!}{۲!۴!} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$

a b	b c	c e
a c	b d	c f
a d	b e	d e
a e	b f	d f
a f	c d	e f

۲. در اینجا ترتیب نقش ندارد و این دانشجو می‌تواند به $\binom{۱۲}{۵}$ یعنی به ۷۹۲ طریق انتخاب خود را به‌عمل آورد.

۳. الف) $C(۱۰,۴) = \frac{۱۰!}{۴!۶!} = \frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۲۱۰$

ب) $\binom{۱۲}{۷} = \frac{۱۲!}{۷!۵!} = \frac{۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} = ۷۹۲$

پ) $C(۱۴,۱۲) = \frac{۱۴!}{۱۲!۲!} = \frac{۱۳ \times ۱۴}{۱ \times ۲} = ۹۱$

ت) $\binom{۱۵}{۱۰} = \frac{۱۵!}{۱۰!۵!} = \frac{۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} = ۳۰۰۳$

۴. الف) $۲^۶ - ۱ = ۶۳$ ب) $\binom{۶}{۳} = ۲۰$ پ) $\binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۶} = ۳۱$

ت) $\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$

۵. الف) تعداد جایگشتهای ۳تایی برای پنج حرف m، r، a، f و t برابر است با

$$P(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$$

ب) تعداد ترکیبهای ۳تایی برای پنج حرف m، r، a، f و t برابر است با

$$C(۵,۳) = \frac{۵!}{۳!(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$$

این ترکیبها عبارت‌اند از

a,f,m	a,f,r	a,f,t	a,m,r	a,m,t
a,r,t	f,m,r	f,m,t	f,r,t	m,r,t

۶.
$$\binom{n}{۲} + \binom{n-۱}{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(n)(n-۱) + \left(\frac{۱}{۲}\right)(n-۱)(n-۲)$$
$$= \left(\frac{۱}{۲}\right)(n-۱)[n+(n-۲)] = \left(\frac{۱}{۲}\right)(n-۱)(۲n-۲) = (n-۱)^۲$$

۷. الف) $\binom{۲۰}{۱۲}$ ب) $\binom{۱۰}{۶}\binom{۱۰}{۶}$

پ) $\sum_{i=۱}^{۵} \binom{۱۰}{۲i}\binom{۱۰}{۱۲-۲i} = \underset{(۱۰\ \text{زن})}{\binom{۱۰}{۲}\binom{۱۰}{۱۰}} + \underset{(۲\ \text{زن})}{\binom{۱۰}{۴}\binom{۱۰}{۸}} + \cdots + \underset{(۲\ \text{زن})}{\binom{۱۰}{۱۰}\binom{۱۰}{۲}}$

Scanned by CamScanner

ت) $\binom{10}{7}\binom{10}{5} + \binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{9}\binom{10}{3} + \binom{10}{10}\binom{10}{2} = \sum_{i=7}^{10}\binom{10}{i}\binom{10}{12-i}$

(۷ زن) (۸ زن) (۹ زن) (۱۰ زن)

ث) $\sum_{i=8}^{10}\binom{10}{i}\binom{10}{12-i}$

۸. الف) $\binom{13}{5}\binom{4}{1}$ ب) $\binom{48}{1}\binom{4}{4}$ پ) $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{48}{1}$ ت) $\binom{4}{2}\binom{4}{3}$

ث) $\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}$ ج) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} = ۳۷۴۴$

چ) $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{48}{1}\binom{44}{1}}{2}$ (تقسیم بر ۲ از این جهت لازم است که تمایزی در ترتیب انتخاب دو مهرهٔ دیگر وجود ندارد.) نتیجه برابر است با

$$\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{3}\binom{13}{1} = ۳۷۴۴ - \binom{48}{2}\binom{4}{3}\binom{13}{1} = ۵۴۹۱۲$$

ح) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\binom{44}{1}$

۹. الف) $\binom{8}{2}$ ب) $\binom{8}{4}$ پ) $\binom{8}{6}$ ت) $\binom{8}{8} + \binom{8}{7} + \binom{8}{6}$

۱۰. $\binom{12}{5}$؛ $\binom{10}{3}$

۱۱. الف) $\binom{10}{7} = ۱۲۰$ ب) $\binom{8}{5} = ۵۶$

پ) $\binom{2}{1}\binom{6}{6} + \binom{4}{2}\binom{6}{5} + \binom{4}{3}\binom{6}{2} = (15)(4) + (6)(6) + (1)(4) = ۱۰۰$

(هر شش تای نخست) (پنج تا از شش تای نخست) (چهار تا از شش تای نخست)

۱۲. الف) (یک) $\binom{6}{2}(3)$ (دو) $(3)\left[\binom{6}{2} + 6\right]$

ب) (یک) $(3)^2\binom{6}{2}$ (دو) $(3)^2\left[\binom{6}{2} + 6\right]$

۱۳. الف) سه کتاب اول را می‌توان به $\binom{12}{3}$ طریق انتخاب کرد. سه‌تای بعدی را به $\binom{9}{3}$ طریق، سه‌تای سوم را به $\binom{6}{3}$ طریق و سه‌تای چهارم را به $\binom{3}{3}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. درنتیجه، این ۱۲ کتاب را می‌توان به $\binom{3}{3}\binom{6}{3}\binom{9}{3}\binom{12}{3}$ یعنی $\frac{12!}{(3!)^4}$ طریق توزیع کرد.

ب) $\binom{12}{2}\binom{8}{4}\binom{2}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{(4!)^2(2!)^2}$

۱۴. الف) $\binom{7}{2} = ۲۱$ ب) $4\binom{7}{2} = ۸۴$ پ) $2\binom{7}{3} = ۷۰$

۱۵. حروف M، I، I، I، P، P، I را می‌توان به $\frac{7!}{4!2!}$ طریق مرتب کرد. در هر یک از این ترتیبها هشت مکان (یکی در آغاز ترتیب، یکی در پایان و شش تا بین حروف) برای قرار دادن چهار S غیرمتوالی هست. به $\binom{8}{4}$ طریق می‌توان چهار تا از این مکانها را انتخاب کرد. بنابراین، تعداد کل این ترتیبها برابر است با $\frac{7!}{4!2!} \times \binom{8}{4}$.

۱۶. از $\binom{n}{11} = ۱۲۳۷۶$ نتیجه می‌شود که $n = ۱۷$.

۱۷. الف) دو نقطهٔ متمایز یک خط تعیین می‌کنند. با ۱۵ نقطه، که هیچ سه‌تای آنها همخط نباشند، $\binom{15}{2}$ خط ممکن می‌توان رسم کرد.

Scanned by CamScanner

ب) $\binom{۲۵}{۳}$ مثلث یا صفحه و $\binom{۲۵}{۴}$ چهاروجهی وجود دارد.

۱۸. الف) $$\sum_{i=۱}^{۶}(i^۲+۱) = (۱^۲+۱)+(۲^۲+۱)+(۳^۲+۱)+(۴^۲+۱)+(۵^۲+۱)+(۶^۲+۱)$$
$$= ۲+۵+۱۰+۱۷+۲۶+۳۷ = ۹۷$$

ب) $$\sum_{j=-۲}^{۲}(j^۳-۱) = [(-۲)^۳-۱]+[(-۱)^۳-۱]+(۰^۳-۱)+(۱^۳-۱)+(۲^۳-۱)$$
$$= -۹-۲-۱+۰+۷ = -۵$$

پ) $$\sum_{i=۰}^{۱۰}[۱+(-۱)^i] = ۲+۰+۲+۰+۲+۰+۲+۰+۲+۰+۲ = ۱۲$$

ت) $$\sum_{j=۰}^{۴}(۳^j-۲^j) = (۱-۱)+(۳-۲)+(۹-۴)+(۲۷-۸)+(۸۱-۱۶)$$
$$= ۰+۱+۵+۱۹+۶۵ = ۹۰$$

ث) $$\sum_{k=۲}^{۴}(-۱)^k = (-۱)^۲+(-۱)^۳+(-۱)^۴ = ۱-۱+۱ = ۱$$

ج) $$\sum_{k=n}^{۲n}(-۱)^k = [(-۱)^n+(-۱)^{n+۱}]+[(-۱)^{n+۲}+(-۱)^{n+۳}]$$
$$+\cdots+[(-۱)^{۲n-۱}+(-۱)^{۲n}] = ۰+۰+\cdots+۰ = ۰$$

چ) $$\sum_{i=۱}^{۶}i(-۱)^i = -۱+۲-۳+۴-۵+۶ = ۳$$

۱۹. الف) $\sum_{i=۱}^{۱۷}\frac{۱}{i}$ ب) $\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k!}$ پ) $\sum_{i=۱}^{۷}i^۲$

ت) $\sum_{j=۱}^{۷}(-۱)^{j-۱}j^۳ = \sum_{k=۱}^{۷}(-۱)^{k+۱}k^۳$ ث) $\sum_{i=۰}^{n}\frac{i+۱}{n+i}$

ج) $\sum_{i=۰}^{n}\frac{n+i}{(۲i)!}$ چ) $\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\left[\frac{n+i}{(۲i)!}\right]$

۲۰. الف) $\frac{۱۰!}{۴!۳!۳!}$ ب) $\binom{۱۰}{۱۰}+۲\times\binom{۱۰}{۹}+۲^۲\times\binom{۱۰}{۸}$

پ) $\underset{\text{(دو ۲، هشت ۰)}}{\binom{۱۰}{۲}}+\underset{\text{(دو ۱، یک ۲، هفت ۰)}}{\binom{۸}{۱}\binom{۱۰}{۲}}+\underset{\text{(چهار ۱، شش ۰)}}{\binom{۱۰}{۴}}$

۲۱. الف) $۲۲۰ = \underset{\text{(یک ۳، نه ۰)}}{\binom{۱۰}{۱}}+\underset{\text{(دو ۱، یک ۲، هفت ۰)}}{\binom{۹}{۲}\binom{۱۰}{۱}}+\underset{\text{(سه ۱، هفت ۰)}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ب) $۷۰۵ = \binom{۹}{۱}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۹}{۲}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۳}$

Scanned by CamScanner

پ) $\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{2i} \times 2^{10}$. در حقیقت، تعداد زوجی از مکانها را برای ۰ و ۲ اختیار کنید. به‌ازای هر $0 \le i \le 5$، این عمل به $\binom{10}{2i}$ طریق صورت می‌گیرد. اکنون برای هر یک از این $2i$ مکان دو انتخاب وجود دارد. برای هر یک از $10 - 2i$ مکان باقیمانده نیز دو انتخاب وجود دارد که عبارت‌اند از ۱ و ۳.

۲۲. الف) به $\binom{8}{3}$ طریق می‌توان سه رأس از بین A، B، C، D، E، F، G و H انتخاب کرد. بنابراین، $\binom{8}{3}$ یعنی ۵۶ مثلث محاطی متمایز وجود دارد.

ب) رأس A را درنظر بگیرید. مثلثهای متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آنها روبه‌روی زاویهٔ A است عبارت‌اند از $\triangle HAB$، $\triangle GAC$ و $\triangle FAD$. چون به‌ازای هر یک از رأسها سه تا از این مثلثها به‌دست می‌آوریم، ۲۴ مثلث متساوی‌الساقین متمایز وجود دارد.

پ) $\binom{8}{4}$ یعنی ۷۰ چهارضلعی.

ت) ۲ مربع؛ ۴ مستطیل که مربع نیستند.

ث) $\binom{8}{5}$ یعنی ۵۶ پنج ضلعی.

ج) تعداد کل چندضلعیها عبارت است از

$$\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = 2^8 - \left[\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}\right]$$
$$= 256 - (1+8+28) = 219$$

۲۳. اگر ضلعهای n ضلعی را هم به‌کار ببریم $\binom{n}{3}$ مثلث وجود دارد. به‌ازای $n \ge 4$، در nتا از این $\binom{n}{3}$ مثلث دو ضلع از n ضلعی و در $n(n-4)$ تا از آنها فقط یک ضلع از n ضلعی به‌کار رفته است. بنابراین، اگر نتوان ضلعهای n ضلعی را به‌کار برد، دراین صورت به‌ازای $n \ge 4$، $\binom{n}{3} - n - n(n-4)$ مثلث وجود دارد.

۲۴. الف) از قاعدهٔ حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود که $4 \times 4 \times 6 = 96$ جمله در بسط کامل

$$(a+b+c+d)(e+f+g+h)(u+v+w+x+y+z)$$

وجود دارد.

ب) جمله‌های bvx و egu جمعوندهایی از این بسط نیستند.

۲۵. الف) $\binom{12}{9}$

ب) $(2^3)\binom{12}{9}$

پ) فرض کنیم $a = 2x$ و $b = -3y$. بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای، ضریب a^9b^3 در بسط $(a+b)^{12}$ برابر است با $\binom{12}{9}$. ولی $\binom{12}{9}a^9b^3 = \binom{12}{9}(2x)^9(-3y)^3 = \binom{12}{9}(2^9)(-3)^3x^9y^3$. بنابراین، ضریب x^9y^3 عبارت است از $\binom{12}{9}(2^9)(-3)^3$.

۲۶.
$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$

Scanned by CamScanner

$$= \left(\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\right)\left(\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\right)\left(\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\right)\cdots\left(\frac{n_k!}{n_k!0!}\right)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

۲۷. الف) $\binom{4}{1,1,2} = 12$

ب) $\binom{4}{0,1,1,2} = 12$

پ) $\binom{4}{1,1,2}(2)(-1)(-1)^2 = -24$

ت) $\binom{4}{0,1,1,2}(-2)(3)^2 = -216$

ث) $\binom{8}{2,2,1,2}(2)^3(-1)^2(3)(-2)^2 = 161280$

۲۸. الف) $\binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{10!}{(2!)^5} = 113400$

ب) $\binom{12}{2,2,2,2,4}(2)^2(-1)^2(3)^2(1)^2(-2)^2 = \left[\frac{12!}{(2!)^3(4!)}\right](2)^2(3)^2(2)^2$

$= 7185024000$

پ) $\binom{12}{0,2,2,2,2,4}(1)^2(-2)^2(1)^2(5)^2(3)^2 = \left[\frac{12!}{(0!)(2!)^3(4!)}\right](2)^2(5)^2(3)^2$

$= 10103940000$

۲۹. در هریک از قسمتهای (الف) تا (ث) به جای متغیرها ۱ بگذارید و نتیجه را محاسبه کنید.

الف) 2^3 ب) 2^{10} پ) 3^{10} ت) 4^5 ث) 4^{10}

۳۰. $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n^2-n)+2n}{2} = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right] + n = \binom{n}{2} + n$

۳۱.

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} + \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1)^2 + (2n)!(n)(n+1)}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!(2n+2)(n+1) + (2n)!(n)(2n+2)}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!(2n+2)(2n+1)}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

۳۲. الف) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \frac{2^n}{n!}$

ب) $\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = \frac{1}{n!} \times 0 = 0$

Scanned by CamScanner

۳۳.
$$n\binom{m+n}{m} = n\frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(m+n)!}{m!(n-1)!} = (m+1)\frac{(m+n)!}{(m+1)(m!)(n-1)!}$$
$$= (m+1)\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!} = (m+1)\binom{m+n}{m+1}$$

۳۴. این مجموع عبارت است از بسط دو جمله‌ای $(1+2)^n = 3^n$

۳۵. الف)
$$1 = \left[(1+x)-x\right]^n = (1+x)^n - \binom{n}{1}x^1(1+x)^{n-1}$$
$$+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n$$

ب) $1 = \left[(2+x)-(x+1)\right]^n$ پ) $2^n = \left[(2+x)-x\right]^n$

۳۶. $\sum_{i=0}^{50}\binom{50}{i}8^i = (1+8)^{50} = 9^{50} = (3^2)^{50} = 3^{100}$. بنابراین، $x = 3$.

۳۷. الف)
$$\sum_{i=1}^{3}(a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = a_3 - a_0$$

ب)
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})$$
$$+ (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

پ)
$$\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$
$$\left(\frac{1}{101} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{102} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{102} - \frac{1}{2} = \frac{1-51}{102} = \frac{-50}{102} = \frac{-25}{51}$$

۳۸. الف)
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=3}^{7} ij = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=3}^{7} ij\right) = \sum_{i=1}^{2}(3i + 4i + 5i + 6i + 7i)$$
$$= 25\sum_{i=1}^{2} i = 25(1+2+3+4) = 250 \left(= \sum_{j=3}^{7}\sum_{i=1}^{2} ij\right)$$

ب)
$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=1}^{3}(i+j+1) = \sum_{i=0}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4}(i+j+1)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{4}\left[(i+1+1) + (i+2+1) + (i+3+1) + (i+4+1)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{4}(4i+14) = (0+14) + (4+14) + (8+14) + (12+14) + (16+14)$$
$$= 110 = 4\sum_{i=0}^{4} i + 5(14) = 4\sum_{i=0}^{4} i + \sum_{j=1}^{2} 6 = 24$$

Scanned by CamScanner

ب)

$$\sum_{j=۱}^{۴}\sum_{i=۰}^{۳} i = \sum_{j=۱}^{۴}\left(\sum_{i=۰}^{۳} i\right) = \sum_{j=۱}^{۴}(۰+۱+۲+۳)$$

$$= \sum_{j=۱}^{۴} ۶ = ۲۴$$

.۳۹

```
Program Combinations (Input, Output);
(*Finds C(n,r), the number of combinations of n distinct objects taken r at a time,
for n > =r > =0.*)
Var
  I,N,R, Fact1, Fact2, Max, Min, Comb: Integer;
Begin
   Writeln ('Input the values of the integers n and r.');
   Read (N,R);
   Writeln ('The values of n and r are ', N:0, ' and ', R:0, ', respectively.');
   If (((N < 0) or (R < 0)) or (R > N)) then
       Writeln ('The value of C(n,r)is not defined for ',
          'n = ', N:0, ' and r = ', R:0, '.')
   Else if R = 0 then
      Writeln ('The value of C(n,0) for n = ', N:0, ' is 1.')
      Else
         Begin
            Fact1 := 1;
            Fact2 := 1;
            If N - R> = R then
              Begin
                 Max := N - R;
                 Min := R
              End
            Else
              Begin
                 Max := R;
                 Min := N - R
              End;
            For I := N downto Max + 1 do
              Fact1 := I* Fact1;
            For J := 1 to Min do
              Fact2 := J* Fact2;
            Comb := Fact1 div Fact2;
            Writeln ('For n = ', N:0, ' and r = ',
                R: 0, ' the value of C(n,r) is ', Comb:0, '.')

         End;
End.
```


Scanned by CamScanner

۴۰. الف)

```
Program Selection2 (Input, Output);
(*Finds all selections of size 2 from the objects 1,2,3,4,5, and 6.*)
Var
   I,J: Integer;
Begin
   For I := 1 to 5 do
      For J := I + 1 to 6 do
         Writeln (I:0, '    ', J:0)
End.
```

ب)

```
Program Selection3 (Input, Output);
(* Finds all selections of size 3 from the objects 1,2,3,4,5, and 6. *)
Var
   I,J,K: Integer;
Begin
   For I := 1 to 4 do
      For J := I + 1 to 5 do
         For K := J + 1 to 6 do
            Writeln (I:0, '    ', J:0, '    ', K:0)
End.
```

بند ۴.۱

۱. فرض کنیم به‌ازای $۱ \le i \le ۵$، x_iها تعداد سکه‌های دریافتی این پنج کودک باشند.

الف) تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰$ برابر است با $\binom{۵+۱۰-۱}{۱۰} = \binom{۱۴}{۱۰}$. در اینجا $n = ۵$ و $r = ۱۰$.

ب) اگر به هر کودک یک سکه بدهیم، معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۵$، $x_i \ge ۰$، $۱ \le i \le ۵$، حاصل می‌شود. $\binom{۵+۵-۱}{۵}$ یا $\binom{۹}{۵}$ طریق برای توزیع پنج سکهٔ باقیمانده وجود دارد.

پ) فرض‌کنیم $x_۵$ تعداد سکه‌های داده شده به بزرگترین کودک باشد. تعداد جوابهای

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰$$

$x_i \ge ۰$، $۱ \le i \le ۴$، $x_۵ \ge ۲$، برابر است با تعداد جوابهای $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۸$، $y_i \ge ۰$، $۱ \le i \le ۵$، که این هم برابر است با $\binom{۵+۸-۱}{۸} = \binom{۱۲}{۸}$.

۲. فرض کنیم x_iها، $۱ \le i \le ۵$، تعداد آب‌نباتهای دریافتی این پنج کودک باشند، که در آن $x_۱$ تعداد آب‌نباتهای کوچکترین کودک است.

$x_۱ = ۱$: $x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۴$. در اینجا $\binom{۱۴+۱-۱}{۱۴}$ یا $\binom{۱۷}{۱۴}$ توزیع وجود دارد.

Scanned by CamScanner

$x_1 = 2 : x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$. در اینجا تعداد توزیعها $\binom{13+12-1}{12}$ یا $\binom{16}{12}$ است. بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع جواب مطلوب $\binom{16}{12} + \binom{17}{12}$ است.

۳. $\binom{23}{20} = \binom{20+2-1}{20}$ ب) $\binom{22}{12} = \binom{12+21-1}{12}$

۴. الف) $\binom{31}{12}$

پ) ۳۱ طریق برای انتخاب ۱۲ بستنی از یک نوع وجود دارد. بنابراین، $31 - \binom{22}{12}$ طریق برای سفارش ۱۲ بستنی، که حداقل از دو نوع متفاوت باشند، وجود دارد.

۵. الف) 2^5

ب) برای هر یک از n شیء متمایز دو انتخاب وجود دارد. اگر یکی از آنها انتخاب نشود، در این صورت یکی از n شیء یکسان را برمی‌گزینیم. بنابراین، 2^n انتخاب ممکن nتایی وجود دارد.

۶. $\binom{22}{12}\binom{12}{2,2,2}$ ب) $\binom{21}{28} = \binom{28+2-1}{28}$

۷. الف) $\binom{35}{32} = \binom{32+3-1}{32}$ ت) ۱

پ) $\binom{11}{8} = \binom{8+2-1}{8}$

ث) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$، $x_i \geq -2$، $1 \leq i \leq 4$. فرض کنیم $y_i = x_i + 2$، $1 \leq i \leq 4$. در این صورت تعداد جوابهای مسألهٔ مفروض با تعداد جوابهای معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 40$، $y_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 4$، یکی است. این تعداد برابر است با $\binom{23}{20} = \binom{20+4-1}{20}$

ج) $\binom{6}{3} - \binom{21}{28} = \binom{3+2-1}{3} - \binom{28+2-1}{28}$، که در آن جملهٔ $\binom{6}{3}$ تعداد جوابهای مقید به $x_4 \geq 26$ را به‌دست می‌دهد.

۸. شیرینیهای شکلاتی را می‌توان به $\binom{7}{5} = \binom{5+3-1}{5}$ طریق توزیع کرد. $\binom{6}{3} = \binom{3+2-1}{3}$ طریق برای توزیع شیرینیهای ژله‌دار وجود دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $\binom{6}{3}\binom{7}{5}$ طریق برای توزیع شیرینیها با شرایط بیان شده وجود دارد.

۹. $$230230 = \binom{n+20-1}{20} = \binom{n+19}{20} \Longrightarrow n = 7$$

۱۰. در اینجا می‌خواهیم تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$، $x_i \geq 3$، $1 \leq i \leq 6$، را بیابیم. (به‌ازای هر $1 \leq i \leq 6$، x_i تعداد دفعاتی را که وجه i نقطه‌ای می‌نشیند نشان می‌دهد.) این تعداد برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 82$، $y_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 6$. درنتیجه، جواب عبارت است از $\binom{87}{82} = \binom{82+6-1}{82}$.

۱۱. الف) $\binom{12}{5} = \binom{5+10-1}{5}$

ب) $\binom{8}{2} + 3\binom{9}{2} + 3\binom{10}{2} + \binom{11}{5} = \binom{2+7-1}{2} + 3\binom{2+7-1}{2} + 3\binom{4+7-1}{4} + \binom{5+7-1}{5}$

در این مجموع، جمعوند اول مربوط به حالتی است که هیچ‌یک از رقمهای ۱، ۳ یا ۷ حضور نداشته باشد،

Scanned by CamScanner

جمعوند دوم مربوط به حالتی است که دقیقاً یکی از رقمهای ۱، ۳ یا ۷ یک‌بار حضور داشته باشد، جمعوند سوم مربوط به حالتی است که دقیقاً دو تا از این رقمها هرکدام یک‌بار حضور یابند و جمعوند چهارم مربوط به حالتی است که هر سه رقم حضور داشته باشند.

۱۲. الف) تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 < 40$، $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 5$ با تعداد جوابهای

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 \leq 39$$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 + x_6 = 39$، $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 5$ یکی است و این برابر است با تعداد جوابهای $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 6$. تعداد جوابهای معادلهٔ اخیر $\binom{6+39-1}{39} = \binom{44}{39}$ است.

ب) فرض کنیم $y_i = x_i + 3$، $1 \leq i \leq 5$، و نابرابری $y_1 + y_2 + \cdots + y_5 \leq 54$، $y_i \geq 0$، را درنظر می‌گیریم. مانند روش قسمت (الف) می‌بینیم که $\binom{6+52-1}{52} = \binom{59}{52}$ جواب وجود دارد.

۱۳. الف) $\binom{2+2-1}{2} = \binom{7}{2}$

ب) $\sum_{i=0}^{3} \binom{9-2i}{7-2i} = \underbrace{\binom{3+1-1}{1}}_{\text{(ظرف ۲ هفت گلوله دارد)}} + \underbrace{\binom{3+3-1}{3}}_{\text{(ظرف ۲ پنج گلوله دارد)}} + \underbrace{\binom{3+5-1}{5}}_{\text{(ظرف ۲ سه گلوله دارد)}} + \underbrace{\binom{3+7-1}{7}}_{\text{(ظرف ۲ یک گلوله دارد)}}$

۱۴. الف) $(2)^2(3)^2\binom{8}{2,2,1,0,1}$

ب) هر یک از جمله‌های این بسط به‌صورت $v^a w^b x^c y^d z^e$ است، که در آن a، b، c، d و e پنج عدد صحیح نامنفی با مجموع ۸ هستند. بنابراین، $\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8}$ جمله وجود دارد.

۱۵. یکی از این نوع توزیعها، مثلاً توزیعی را که در هر قفسه شش کتاب می‌گذارد، درنظر بگیرید. !۲۴ طریق برای این رویداد وجود دارد. می‌بینیم که برای هر نوع توزیع دیگر کتابها نیز !۲۴ طریق وجود دارد.

تعداد توزیعها برابر است با تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$. این تعداد با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$$

یکی است. [به‌ازای هر $1 \leq i \leq 4$، $y_i + 1 = x_i$.]

بنابراین، $\binom{23}{20} = \binom{4+20-1}{20}$ تا از این نوع توزیع کتاب وجود دارد و در نتیجه، این ۲۴ کتاب را می‌توان به $(24!)\binom{23}{20}$ طریق در این چهار قفسه چنان چید که در هر قفسه دست‌کم یک کتاب باشد.

۱۶. برای معادلهٔ (۱)، تعداد جوابهای صحیح نامنفی $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{19} = n - 19$، $w_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 19$، را لازم داریم. این تعداد برابر است با $\binom{19+(n-19)-1}{(n-19)} = \binom{n-1}{n-19}$. تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ (۲) برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{62} = n - 64$$

Scanned by CamScanner

این تعداد برابر است با $\binom{n-1}{n-62} = \binom{(62+(n-62))-1}{(n-62)}$.

بنابراین، $\binom{n-1}{63} = \binom{n-1}{n-62}$ و $\binom{n-1}{n-19} = \binom{n-1}{63}$ و $n - 19 = 63$. درنتیجه، $n = 82$.

ب) 5^{12}

۱۷. الف) $\binom{16}{12} = \binom{5+12-1}{12}$

۱۸. $\binom{16}{12}\binom{11}{7}\binom{16}{12} = \binom{9}{5}\binom{5+12-1}{12}\binom{5+7-1}{7}\binom{5+12-1}{12}\binom{5+5-1}{5}$

۱۹. الف) $\binom{29}{25}^3(5)$؛ ب) بزرگترین کودک می‌تواند در هر یک از چهار حالت زیر ۲۰ سنت بگیرد:

(یک) (سکهٔ ده سنتی، سکهٔ پنج سنتی، پنج سکهٔ یک پنی): دراین صورت سکه‌های دیگر به $4\binom{23}{20} = \binom{20-1+4}{20}$ طریق بین کودکان دیگر توزیع می‌شوند. دراین رابطه، عدد ۴ تعداد طرق توزیع سکهٔ بیست و پنج سنتی بین کودک دیگر و عدد $\binom{23}{20}$ تعداد طرق توزیع ۲۰ سکهٔ یک پنی باقیمانده بین آنهاست.

(دو) (سکهٔ ده سنتی، ده سکهٔ یک پنی): دراین صورت $4^2\binom{18}{15} = \binom{15-1+2}{15}(4)^2$ طریق برای توزیع پنج سنتی، سکهٔ بیست و پنج سنتی و ۱۵ سکهٔ یک پنی باقیمانده بین چهار کودک دیگر وجود دارد.

(سه) (سکهٔ پنج سنتی، پانزده سکهٔ یک پنی): $\binom{13}{10}(4)^2$ توزیع.

(چهار) (۲۰ سکهٔ یک پنی): $4^3\binom{8}{5}$ توزیع.

اگر بزرگترین کودک ۲۵ سنت بگیرد، پنج حالت پیش می‌آید. بنابراین، تعداد کل طرق توزیع سکه‌ها به‌طوری بزرگترین کودک ۲۰ یا ۲۵ سنت بگیرد عبارت است از

$$\left[4\binom{23}{20} + \underbrace{4^2\binom{18}{15} + 4^2\binom{13}{10} + 4^2\binom{8}{5}}_{\text{(برای ۲۰ سنت)}}\right] + \left[4^2\binom{28}{25} + \underbrace{4\binom{18}{15} + 4^2\binom{13}{10} + 4^2\binom{8}{5} + 4^2}_{\text{(برای ۲۵ سنت)}}\right]$$

۲۰. الف) $\binom{8}{6} = \binom{6+3-1}{6}$ جواب برای $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ و $\binom{32}{31} = \binom{31+2-1}{31}$ جواب برای

$$x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 31$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 7$، $x_i \ge 0$، وجود دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این جفت معادلات $\binom{32}{31}\binom{8}{6}$ جواب دارند.

ب) $\binom{32}{31}\binom{5}{2}$

۲۱. دراینجا $r = 4$ حلقهٔ تودرتوی For وجود دارد؛ پس $1 \le m \le k \le j \le i \le 20$. اکنون مسأله عبارت است از انتخابهای $r = 4$ تایی از یک گردایهٔ $n = 20$ شیئی به‌طوری‌که تکرار مجاز است. بنابراین، حکم Writeln $\binom{23}{3} = \binom{20+3-1}{3}$ بار اجرا می‌شود.

۲۲. دراینجا $r = 3$ حلقهٔ تودرتوی For وجود دارد و $1 \le i \le j \le k \le 15$. اکنون مسأله عبارت است

Scanned by CamScanner

انتخابهای $r = ۳$ تایی از یک گردایهٔ $n = ۱۵$ شیئی به‌طوری‌که تکرار مجاز است. بنابراین، گزارهٔ

$$\text{counter} := \text{counter} + ۱$$

$\binom{۱۷}{۳} = \binom{۱۵+۳-۱}{۳}$ بار اجرا می‌شود و مقدار نهایی متغیر counter برابر است با $\binom{۱۷}{۳} + ۱۰ = ۶۹۰$.

۲۳. قطعهٔ *Begin-End*، $\binom{۱۲}{۳} = \binom{۱۰+۳-۱}{۳} = ۲۲۰$ بار اجرا می‌شود. پس از اجرای این قطعه، مقدار متغیر sum عبارت است از $\sum_{i=۱}^{۲۲۰} i = \frac{۲۲۰ \times ۲۲۱}{۲} = ۲۴۳۱۰$.

۲۴.

$$\binom{n+۲}{۳} = \sum_{i=۱}^{n} \binom{i+۱}{۲} \Longrightarrow \frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(i+۱)i \Longrightarrow$$

$$\frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} i \Longrightarrow \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} - \frac{(n+۱)n}{۴} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = n(n+۱)\left[\frac{n+۲}{۳} - \frac{۱}{۲}\right] = n(n+۱)\left[\frac{۲n+۴-۳}{۶}\right] = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

۲۵. الف) قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را، که در آن i، j، k، m، n و sum متغیرهایی صحیح‌اند، درنظر می‌گیریم.

```
sum := 0;
For i := 1 to n do
   For j := 1 to i do
      For k :=1 to j do
         For m := 1 to k do
            sum := sum + 1;
```

پس از اجرای این قطعه، مقدار sum برابر است با $\binom{n+۳}{۳}$، یعنی تعداد طرق انتخاب i، j، k و m از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ به‌طوری‌که تکرار مجاز باشد و $۱ \le m \le k \le j \le i \le n$.

به‌ازای هر مقدار i، حلقه‌های For برای j، k و m به $\binom{i+۲}{۳}$ بار اجرای حکم sum := sum + ۱ منجر می‌شوند. درنتیجه، $\binom{n+۳}{۳} = \sum_{i=۱}^{n} \binom{i+۲}{۳}$.

ب) از تمرین ۲۴ می‌دانیم که $\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{۱}{۶}(n)(n+۱)(۲n+۱)$. این رابطه را در مرحلهٔ ۴ از محاسبات زیر به‌کار می‌بریم.

$$(۱)\binom{n+۳}{۴} = \sum_{i=۱}^{n}\binom{i+۲}{۳}$$

$$(۲)\left(\frac{۱}{۴!}\right)(n+۳)(n+۲)(n+۱)(n) = \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۶}\right)(i+۲)(i+۱)(i)$$

$$(۳)\left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۳)(n+۲)(n+۱)(n) = \sum_{i=۱}^{n}(i^۳ + ۳i^۲ + ۲i)$$

Scanned by CamScanner

$$(۴)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۳)(n+۲)(n+۱)(n) = \sum_{i=۱}^{n} i^۳ + (۳)\left(\frac{۱}{۶}\right)(n)(n+۱)(۲n+۱) + (۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)(n+۱)(n)$$

$$(۵)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۱)(n)\left[(n+۳)(n+۲) - ۲(۲n+۱) - ۴\right] = \sum_{i=۱}^{n} i^۳$$

$$(۶)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۱)(n)\left[n^۲ + ۵n + ۶ - ۴n - ۶\right] = \sum_{i=۱}^{n} i^۳$$

$$(۷)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۱)^۲ n^۲ = \sum_{i=۱}^{n} i^۳$$

۲۶. r انتخاب برای شیء اول وجود دارد. برای شیء دوم $r+۱$ انتخاب وجود دارد، زیرا هنگام گذاشتن این شئ در ظرف حاوی شیء اول، می‌توان آن را روی یا زیر شیء اول گذاشت. به همین ترتیب، $r+۲$ انتخاب برای شیء سوم، ...، و $r+(n-۱)$ انتخاب برای شیء nاُم وجود دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$(r)(r+۱)(r+۲)\cdots(r+n-۱) = P(r+n-۱, r-۱)$$

توزیع وجود دارد.

۲۷. الف) در هر ظرف یک شئ بگذارید. دراین صورت $m-n$ شیءِ یکسان برای گذاشتن در n ظرف متمایز وجود دارد. بنابراین، $\binom{n+(m-n)-۱}{m-n} = \binom{m-۱}{m-n} = \binom{m-۱}{n-۱}$ توزیع به‌دست می‌آید.

ب) در هر ظرف r شئ بگذارید. دراین صورت $m-rn$ شیءِ باقی‌مانده را می‌توان به

$$\binom{n+(m-rn)-۱}{m-rn} = \binom{m-۱+(۱-r)n}{m-rn} = \binom{m-۱+(۱-r)n}{n-۱}$$

طریق بین n ظرف متمایز توزیع کرد.

۲۸.

```
Program Solutions1 (Input, Output);
Var
   X1,X2: Integer;
Begin
   For X1 := 0 to 10 do
      For X2 := 0 to 10 - X1 do
         Writeln ('X1 = ', X1:0, ' X2= ', X2:0, ' X3= ', 10 - X1 - X2:0)
End.
```


Scanned by CamScanner

```
Program Solutions2 (Input, Output);
Var
   X1, X2, X3: Integer;
Begin
   For X1 := 0 to 15 do
      For X2 := 0 to 15 - X1 do
         For X3 := 0 to 15 -X1 - X2 do
            Writeln (' X1= ', X1:0, 'X2 = ', X2:0, ' X3 = ', X3:0, ' X4 = ',
               15 - X1 - X2 - X3:0)
End.
```

۳۰. به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ فرض‌کنیم $y_i = x_i + 2 \ge 0$. در این صورت تعداد جوابهای صحیح $x_1+x_2+x_3+x_4 = 4$، $x_i \ge -2$، $1 \le i \le 4$، برابر است با تعداد جوابهای صحیح $y_1+y_2+y_3+y_4 = 12$، $y_i \ge 0$، $1 \le i \le 4$.
این مطلب را در برنامهٔ زیر به‌کار می‌بریم.

```
Program Selections3 (Input, Output);
Var
   X1, X2, X3: Integer;
Begin
   For X1 := 0 to 12 do
      For X2 := 0 to 12 - X1 do
         For X3 := 0 to 12 - X1 - X2 do
            Writeln ('X1 = ', X1 - 2:0, 'X2 = ', X2 - 2:0, ' X3 = ', X3 - 2:0,
               ' X4 = ', 12 - X1 - X2 - X3 - 2:0)
End.
```

تمرینات تکمیلی

۱. $\binom{7}{6}\binom{4}{3} + \binom{7}{4}\binom{4}{2} + \binom{7}{2}\binom{4}{1}$

۲. الف) 5^9 ب) 5×4^8 پ) 3×2^8

۳. الف) $\sum_{i=1}^{8} 36^i$ ب) $\sum_{i=1}^{6} 36^i$ پ) $(36^2)\sum_{i=1}^{8} 51^i$

۴. الف) $\binom{25}{2}^3$

ب) $\binom{25}{2}^3 + 6\binom{25}{1}\binom{25}{2}\binom{25}{3} + 3\binom{25}{1}^2\binom{25}{4}$

(دو سرود از هر کتاب) (یک سرود از یک کتاب، دو سرود از کتاب دوم و سه سرود از کتاب سوم) (چهار سرود از یک کتاب و یک سرود از هر یک از دو کتاب دیگر)

۵. الف) 10^{25}

Scanned by CamScanner

ب) برای پرچم اول ۱۰ انتخاب وجود دارد. برای پرچم دوم ۱۱ انتخاب وجود دارد: روی نُه دیرکی که پرچم ندارند و روی دیرکی که پرچم اول بر آن نصب شده است بالا یا پایین پرچم اول. ۱۲ انتخاب برای پرچم سوم، ۱۳ انتخاب برای پرچم چهارم، ... و ۳۴ انتخاب برای پرچم آخر (یعنی ۲۵اُم) وجود دارد. بنابراین، تعداد ترتیبهای ممکن $\frac{۳۴!}{۹!}$ است.

پ) !۲۵ طریق برای مرتب کردن پرچمها وجود دارد. اگر بین هر دو پرچم را یک مکان تلقی کنیم، به‌ازای هر ترتیب ۲۴ مکان به‌دست می‌آید. انتخاب ۹ تا از این مکانها، توزیعی از پرچمها را بین ۱۰ دیرک به‌طوری‌که، با توجه به ترتیب، هر دیرک حداقل یک پرچم داشته باشد، به‌دست می‌دهد. بنابراین، $\binom{۲۴}{۹}(۲۵!)$ از این ترتیبها وجود دارد.

۶. الف) هر ۴۵ نقش و هر ۴۶ مکانی را که این نقشها تعیین می‌کنند درنظر می‌گیریم: (۱) یک مکان در طرف چپ نقش اول. (۲) یک مکان بین نقش iاُم و نقش $(i+۱)$اُم، که در آن $۱ \le i \le ۴۴$. (۳) یک مکان در طرف راست نقش ۴۵اُم (یعنی آخرین نقش). برای پاسخ دادن به پرسش مطرح شده باید ۱۵ تا از این ۴۶ مکان را انتخاب کنیم. این را می‌توانیم به $\binom{۴۶}{۱۵}$ طریق انجام دهیم.

ب) روش دیگری برای حل مسأله این است که فرض کنیم به‌ازای هر $۱ \le i \le ۱۵$، x_i تعداد نقشهایی را نشان دهد که در طرف چپ خط iاُم قرار گرفته‌اند. فرض کنیم $x_{۱۶}$ تعداد نقشهای واقع در طرف راست خط ۱۵اُم باشد، دراین‌صورت جواب مسأله برابر است با تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_{۱۵} + x_{۱۶} = ۴۵$$

که در آن $x_۱ \ge ۰$، $x_{۱۶} \ge ۰$ و به‌ازای هر $۲ \le i \le ۱۵$، $x_i > ۰$. این تعداد برابر است با تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_{۱۵} + y_{۱۶} = ۳۱$$

که در آن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۱۶$، $y_i \ge ۰$. درنتیجه، جواب مسأله عبارت است از

$$\binom{۱۶+۳۱-۱}{۳۱} = \binom{۴۶}{۳۱} = \binom{۴۶}{۱۵}$$

۷. الف) $C(۱۲,۸)$ ب) $P(۱۲,۸)$

۸. $\binom{n}{r}(۳^{n-r})$

۹. $\frac{۷!}{۲!}$ طریق برای مرتب کردن هفت نماد OE، W، N، N، D، R و G وجود دارد. در هر ترتیب ۶ مکان برای I، به طوری‌که کنار حرف صداداری قرار نگیرد، وجود دارد. بنابراین، تعداد این ترتیبها $۶ \times \frac{۷!}{۲!}$ است. سه حرف صدادار را می‌توان (با توجه به ترتیب) به شش طریق به‌صورت یک جفت و یک حرف تنها درآورد. درنتیجه، تعداد کل ترتیبهای موردنظر $۶^۲ \times \frac{۷!}{۲!}$ است.

۱۰. !۶ هرگاه مایع نخست بتواند هریک از شش مایع مفروض باشد؛ !۵ هرگاه مایع نخست از قبل مشخص شده باشد.

Scanned by CamScanner

۱۱. الف) دو قطعه وجود دارد که فقط از لحاظ اندازه با قطعهٔ مفروض متفاوت‌اند. چهار تا فقط از لحاظ رنگ، یکی فقط از لحاظ جنس و پنج تا فقط از لحاظ شکل با قطعهٔ مفروض متفاوت‌اند. روی‌هم $۲+۲+۱+۵ = ۱۲$ قطعه وجود دارد که دقیقاً از نظر یک ویژگی با قطعهٔ مربعی چوبی قرمز کوچک مفروض متفاوت‌اند.

ب) $\binom{۴}{۲} = ۶$ طریق برای انتخاب دو ویژگی متفاوت وجود دارد. هر یک از این جفتها را باید جداگانه در نظر گرفت.

(یک) جنس، اندازه: $۲ \times ۱ = ۲$ تا از این نوع قطعه‌ها وجود دارد.

(دو) جنس، رنگ: این دو ویژگی $۴ \times ۱ = ۴$ تا از این نوع قطعه‌ها به‌دست می‌دهند.

(سه) جنس، شکل: $۵ \times ۱ = ۵$ تا از این نوع قطعه‌ها برای این دو ویژگی به‌دست می‌آوریم.

(چهار) اندازه، رنگ: در اینجا $۴ \times ۲ = ۸$ قطعه به‌دست می‌آوریم.

(پنج) اندازه، شکل: این دو ویژگی $۲ \times ۵ = ۱۰$ تا از این نوع قطعه‌ها به ما می‌دهند.

(شش) رنگ، شکل: $۴ \times ۵ = ۲۰$ تا از این نوع قطعه‌ها برای این دو ویژگی وجود دارد.

روی هم $۲ + ۴ + ۵ + ۸ + ۱۰ + ۲۰ = ۴۹$ تا از قطعه‌های متعلق به مجموعهٔ کل قطعه‌ها وجود دارند که دقیقاً از نظر دو ویژگی با قطعهٔ شش ضلعی پلاستیکی آبی بزرگ متفاوت‌اند.

۱۲. چون «R» هجدهمین حرف الفباست، حروف اول و دوم را می‌توان به $\binom{۱۷}{۲} = \frac{۱۷ \times ۱۶}{۲} = ۱۳۶$ طریق انتخاب کرد.

یا

چون «R» هجدهمین حرف الفباست، ببینیم وقتی حرف دوم حرف دلخواهی بین «B» و «Q» است چه روی می‌دهد. اگر «Q» حرف دوم باشد ۱۶ حالت ممکن برای حرف اول وجود دارد. اگر «P» حرف دوم باشد ۱۵ انتخاب ممکن وجود دارد. اگر به همین ترتیب به طرف «B»، که در آنجا فقط یک انتخاب (یعنی «A») برای حرف اول وجود دارد، پیش برویم می‌بینیم که تعداد کل انتخابها عبارت است از

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۵ + ۱۶ = \frac{۱۶ \times ۱۷}{۲} = ۱۳۶$$

۱۳. تعداد ترتیبهای خطی این ۱۰ اسب برابر است با $\frac{۱۰!}{۴!۳!۳!}$. هر ترتیب دایره‌ای ۱۰ ترتیب خطی را نشان می‌دهد؛ پس $\frac{۱۰!}{۴!۳!۳!} \times \frac{۱}{۱۰}$ طریق برای مرتب کردن اسبها در چرخ‌فلک وجود دارد.

۱۴. الف) $P(۱۶, ۱۲)$ ب) $\binom{۱۲}{۲} P(۱۵, ۱۰)$

۱۵. الف) (یک) $\binom{۲}{۲} + \binom{۲}{۲}\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۲}$

(دو) $\binom{۷}{۲} + \binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲} + \binom{۸}{۲} = \binom{۲+۲-۱}{۲} + \binom{۲+۲-۱}{۲}\binom{۵+۲-۱}{۲} + \binom{۵+۲-۱}{۲}$

(سه) $\binom{۸}{۲} + \binom{۶}{۲}\binom{۵}{۲} + \binom{۷}{۲} - ۹$

ب) (یک) $\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۳} + \binom{۲}{۳}\binom{۵}{۱}$ (دو) و (سه) $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳} + \binom{۶}{۳}\binom{۵}{۱} = \binom{۵}{۱}\binom{۲+۳-۱}{۳} + \binom{۵+۳-۱}{۳}\binom{۲}{۱}$

Scanned by CamScanner

۱۶. الف) اگر قیدی در کار نباشد، سرپرست اقامتگاه می‌تواند به ۴۷۹۰۰۱۶۰۰ = !۱۲ طریق انتخابهای خود را به عمل آورد.

ب) دو دستیار ارشد اولی و دومی را می‌توان به ۱۲ = ۳ × ۴ طریق و سپس ۱۰ دستیار دیگر را می‌توان به !۱۰ طریق جای داد. درنتیجه، سرپرست اقامتگاه می‌تواند در این حالت یکی از ۴۳۵۴۵۶۰۰ = (!۱۰)۱۲ انتخاب ممکن را به عمل آورد.

پ) فرض‌کنیم دستیار ارشد سوم در طبقهٔ اول و دستیار ارشد چهارم در طبقهٔ سوم جای گیرند. این را به ۵۸۰۶۰۸۰۰ = (!۱۰) × ۴ × ۴ طریق می‌توان انجام داد. ۶ = ۲ × ۳ طریق برای جای دادن این دو نفر در دو طبقهٔ مختلف وجود دارد؛ بنابراین، در این حالت ۳۴۸۳۶۴۸۰۰ = [(!۱۰) × ۴ × ۴] × (۲ × ۳) امکان داریم.

راه‌حل دیگری برای قسمت (پ) این است که بگوییم با توجه به قسمت (ب)، می‌توان به

$$۳ \times [۱۲(!۱۰)] = ۱۳۰۶۳۶۸۰۰$$

طریق دستیاران ارشد سوم و چهارم را در یک طبقه جای داد و در نتیجه، جواب مطلوب عبارت است از

$$(!۱۲) - [(۳)(۱۲)(!۱۰)] = ۳۴۸۳۶۴۸۰۰$$

ت) در اینجا فقط سه حالت وجود دارد که هر یک از آنها به (!۱۰) × ۴ × ۴ انتخاب منجر می‌شود. بنابراین، جواب عبارت است از ۱۷۴۱۸۲۴۰۰ = (!۱۰) × ۴ × ۴ × ۳.

ث) در این قسمت از مسأله باید شش حالت در نظر بگیریم. هر حالت به (!۹) × ۴ × ۴ × ۴ انتخاب منجر می‌شود. درنتیجه، سرپرست اقامتگاه می‌تواند با توجه به قید یاد شده یکی از ۱۳۹۳۴۵۹۲۰ = (!۹) × ۴ × ۴ × ۴ × ۶ انتخاب ممکن را به عمل آورد.

۱۷. الف) برای هر عدد صحیح چهار رقمی با رقمهای صعودی، چهار رقم متمایز داریم که می‌توان آنها را فقط به یک طریق مرتب کرد. این چهار رقم را به ۱۲۶ = $\binom{۹}{۴}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. همین چهار رقم را می‌توان چنان مرتب کرد که رقمهای عدد چهار رقمی حاصل نزولی باشند.

برای تکمیل راه‌حل مسأله باید تعداد عددهای صحیح چهاررقمی‌ای را به‌دست آوریم که رقم یکان آنها ۰ و رقمهای آنها نزولی است. تعداد چنین عددهایی ۸۴ = $\binom{۹}{۳}$ است.

درنتیجه، ۳۴۳ = $\binom{۹}{۳}$ + $\binom{۹}{۴}$۲ تا از این نوع عددهای صحیح چهار رقمی وجود دارد.

ب) به‌ازای هر عدد صحیح چهاررقمی با رقمهای غیرنزولی، چهار رقم غیرصفر با مجاز بودن تکرار داریم. این چهار رقم را می‌توان به $\binom{۱۲}{۴}$ = $\binom{۹+۴-۱}{۴}$ طریق انتخاب کرد. همین چهار رقم یک عدد صحیح چهار رقمی با رقمهای غیرصعودی نیز به‌دست می‌دهند. بنابراین، تا اینجا ۹ − $\binom{۱۲}{۴}$۲ تا از عددها

چهاررقمی مورد نظر را در اختیار داریم. (علت اینکه ۹ تا کم شده است این است که در $\binom{۱۲}{۲}$۲، نه عدد صحیح ۱۱۱۱، ۲۲۲۲، ۳۳۳۳، ...، ۹۹۹۹ را دوبار شمرده‌ایم.)

هنوز عددهای صحیح چهاررقمی با رقمهای غیرصعودی‌ای راکه در آنها رقم یکان ۰ است نشمرده‌ایم. $\binom{۱۲}{۲} - ۱ = \binom{۱۰+۳-۱}{۳} - ۱$ تا از این عددهای چهاررقمی وجود دارد. (۱ را از این جهت کم کرده‌ایم که نمی‌خواهیم ۰۰۰۰ به‌حساب آید.)

بنابراین، $۲\binom{۱۲}{۲} + \binom{۱۲}{۳} - ۱] = [۲\binom{۱۲}{۲} + \binom{۱۲}{۳}] - ۱۰ = ۱۲۰۰$ تا از این نوع عددهای صحیح چهاررقمی وجود دارد.

۱۸. الف) $\binom{۵}{۲,۱,۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲(-۳)^۲ = \frac{۱۳۵}{۲}$

ب) هر جملهٔ بسط به‌صورت $x^{n_۱}y^{n_۲}z^{n_۳}$ است، که در آن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۳$، n_i عددی صحیح و نامنفی است و $n_۱ + n_۲ + n_۳ = ۵$. درنتیجه، $\binom{۷}{۵} = \binom{۳+۵-۱}{۵}$ جمله وجود دارد.

پ) به‌جای x، y و z، ۱ بگذارید. در این صورت مجموع همهٔ ضرایب این بسط برابر است با

$$\left(\frac{۱}{۲} + ۱ - ۳\right)^۵ = \left(\frac{-۳}{۲}\right)^۵$$

۱۹. الف) نخست شخص A را پشت میز بنشانید. پنج مکان متمایز برای A وجود دارد (مثلاً هریک از مکانهای مشخص شده با A، B، C، D و E در شکل ۱-۱۰ (الف)). سپس نه نفر دیگر را در اطراف A بنشانید. این کار را می‌توان به !۹ طریق انجام داد؛ پس (!۹)۵ طریق برای نشستن این ۱۰ نفر وجود دارد.

ب) سه طریق متمایز برای نشاندن A و B وجود دارد، که در آنها A و B مقابل یکدیگر و در طرف ضلع بزرگتر میز قرارگیرند. در این صورت می‌توان هشت نفر دیگر را به !۸ طریق متفاوت کنار میز نشاند. بنابراین، تعداد کل ترتیبها (!۸)(۳) است.

۲۰. الف) تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$ برابر است با $\binom{۸}{۶} = \binom{۳+۶-۱}{۶}$. با توجه به $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$ و $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۵$، تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۴ + x_۵ = ۹$ برابر است با $\binom{۱۰}{۹} = \binom{۲+۹-۱}{۹}$. تعداد جوابهای جفت معادلهٔ مفروض $\binom{۱۰}{۹}\binom{۸}{۶}$ است.

ب) فرض کنیم $۰ \le k \le ۶$. تعداد جوابهای $x_۱ + x_۲ + x_۳ = k$ برابر است با $\binom{k+۲}{k} = \binom{۳+k-۱}{k}$. برای حل $x_۴ + x_۵ \le ۱۵ - k$، معادلهٔ $x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۵ - k$ را با فرض $x_۴, x_۵, x_۶ \ge ۰$ درنظر می‌گیریم. تعداد جوابهای این معادله برابر است با $\binom{۱۷-k}{۱۵-k} = \binom{۳+۱۵-k-۱}{۱۵-k}$. تعداد کل جوابها $\sum_{k=۰}^{۶}\binom{k+۲}{k}\binom{۱۷-k}{۱۵-k}$ است.

۲۱. به‌ازای هر $۱ \le i \le ۵$ فرض کنیم x_i تعداد سیبهایی باشد که کودک iاُم گرفته است. تعداد جوابهای $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۲$، $x_i \ge ۰$، $۱ \le i \le ۵$، برابر است با $\binom{۱۶}{۱۲} = \binom{۵+۱۲-۱}{۱۲}$. به چند طریق کودک نخست

Scanned by CamScanner

می‌تواند ۸ سیب یا بیشتر بگیرد؟ پاسخ عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1+x_2+\cdots+x_5=4$، که این هم برابر است با $\binom{8}{4}=\binom{5+4-1}{4}$. برای حالتهایی نیز که کودکان شمارهٔ ۲، ۳، ۴ و ۵ بیشتر از ۷ سیب بگیرند همین جواب به‌دست می‌آید. بنابراین، $5\binom{8}{4}-\binom{16}{12}$ توزیع وجود دارد که در آنها هیچ کودکی بیشتر از ۷ سیب نمی‌گیرد.

۲۲. الف) A باید دور ۵ و دقیقاً دو تا از چهار دور قبلی را ببرد. این کار به $\binom{4}{2}$ طریق صورت می‌گیرد. چون در هر دور هفت حالت ممکن برای امتیازها وجود دارد، تعداد طرق مثبت امتیازها $7^5\binom{4}{2}$ است.

ب) در اینجا A می‌تواند به $\binom{3}{2}$ طریق در چهار دور پیروز شود و تعداد طرق ثبت نتایج $7^4\binom{3}{2}$ است. بنابراین، اگر A در چهار یا پنج دور پیروز شود، نتایج را می‌توان به $\left[7^5\binom{4}{2}+7^4\binom{3}{2}\right]$ طریق ثبت کرد. چون B هم می‌تواند برنده باشد، جواب نهایی برابر است با $2\left[7^5\binom{4}{2}+7^4\binom{3}{2}\right]$.

۲۳. اگر ردیفی از k تا ۱ در آغاز دنباله باشد، مکان $(k+1)$اُم با یک ۰ پر می‌شود و $\frac{(n+r-k-1)!}{(n-k)!(r-1)!}$ طریق برای مرتب کردن $(n-k)$ تا ۱ و $(r-1)$ تا ۰ باقیمانده وجود دارد. اگر این k تا ۱ در انتهای دنباله قرار گیرند همین جواب به‌دست می‌آید. در همهٔ حالتهای دیگر، ردیفی از k تا ۱ همراه با یک ۰ در چپ و یک ۰ در طرف راست ردیف وجود دارد. به این ترتیب $(n-k)$ تا ۱ و $(r-2)$ تا ۰ باقی می‌مانند که می‌توانند به $\frac{(n+r-k-2)!}{(n-k)!(r-2)!}$ طریق مرتب شوند. این $n+r-k-2$ نماد، $n+r-k-2+1$ مکان برای دنبالهٔ kتایی از ۱ها همراه با دو ۰ در دو طرف آن به‌دست می‌دهند. بنابراین، روی‌هم

$$\frac{2(n+r-k-1)!}{(n-k)!(r-1)!}+\frac{(n+r-k-1)!}{(n-k)!(r-2)!}$$

ترتیب وجود دارد.

۲۴. به $\binom{n}{r}$ طریق می‌توان r شئ از n شئ را انتخاب کرد. به‌محض انتخاب r شئ، می‌توان آنها را به $(r-1)!$ طریق روی یک دایره مرتب کرد. بنابراین، برای n شئ $\binom{n}{r}(r-1)!$ ترتیب دایره‌ای rتایی وجود دارد.

۲۵. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}(1)^0-\binom{n}{1}(1)^1+\binom{n}{2}(1)^2-\binom{n}{3}(1)^3+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}(1)^n$$

درنتیجه، $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$

۲۶. الف) $\frac{7!}{3!}$ ب) $5!$ پ) $\binom{5}{3}(4!)$

۲۷. الف) این دانشجو می‌تواند قفسهٔ کتابخانه را به

$$P(20,12)=\frac{20!}{8!}=(20)(19)(18)\ldots(11)(10)(9)$$

طریق پر کند.

Scanned by CamScanner

ب) این دانشجو می‌تواند نه کتاب دیگر را به $\binom{۱۲}{۹}$ طریق انتخاب کند. او سپس می‌تواند این نه کتاب و هر سه کتاب دربارهٔ تنیس را به !۱۲ طریق در قفسهٔ کتابخانه مرتب کند. در نتیجه، $(۱۲!)\binom{۱۲}{۹}$ تا از ترتیبهای قسمت (الف) حاوی هر سه کتاب دربارهٔ تنیس هستند.

۲۸. پس از اجرای این قطعه برنامهٔ پاسکال، مقدار counter عبارت است از

$$۱۰ + (۱۲ - ۱ + ۱)(r - ۱ + ۱)(۲) + \left[۳ + ۴ + \cdots + (s - ۳ + ۱)\right](۴) + (۱۲ - ۳ + ۱)(۶) +$$

$$(t - ۷ + ۱)(۸) = ۱۰ + (۱۲)(r)(۲) + \left[\frac{۱}{۲}(s - ۳ + ۱)(s - ۳ + ۲) - ۲ - ۱\right](۴) + (۱۰)(۶) +$$

$$(t - ۶)(۸) = ۲۲ + ۲۴r + ۸t + ۲(s - ۲)(s - ۱) - ۱۲ = ۱۴ + ۲۴r + ۸t + ۲s(s - ۳)$$

۲۹. الف) در تجزیهٔ ۱۷، تعداد ۱ها باید عددی فرد بین ۱ و ۱۷، یا خود ۱۷، باشد. برای $(۲k + ۱)$ تا ۱، که در آن $۰ \le k \le ۸$، $۲k + ۲$ مکان برای انتخاب با تکرار وجود دارد. اندازهٔ انتخاب برابر است با تعداد ۲ها، که این هم برابر است با $\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[۱۷ - (۲k + ۱)\right] = ۸ - k$. این انتخاب را می‌توان به $\binom{۲k+۲+(۸-k)-۱}{۸-k} = \binom{۹+k}{۸-k}$ طریق انجام داد و بنابراین، جواب عبارت است از $\sum_{k=۰}^{۸}\binom{۹+k}{۸-k} = ۲۵۸۴$.

ب) در تجزیهٔ ۱۸، تعداد ۱ها باید زوج باشد: $۲k$ به‌ازای $۰ \le k \le ۹$. اگر $۲k$ تا ۱ وجود داشته باشد، $۲k + ۱$ مکان برای $\left(\frac{۱}{۲}\right)(۱۸ - ۲k) = ۹ - k$ تا ۲، با تکرار، وجود خواهد داشت. این انتخاب را می‌توان به $\binom{۲k+۱+(۹-k)-۱}{۹-k} = \binom{۹+k}{۹-k}$ طریق انجام داد و جواب برابر است با $\sum_{k=۰}^{۹}\binom{۹+k}{۹-k} = ۴۱۸۱$.

پ) اگر n فرد باشد، فرض کنیم $n = ۲k + ۱$، که در آن $k \ge ۰$. تعداد طرق نوشتن n به‌صورت مجموع مرتبی از ۱ها و ۲ها برابر است با $\sum_{i=۰}^{k}\binom{k+۱+i}{k-i}$.

اگر n زوج باشد، فرض کنیم $n = ۲k$، که در آن $k \ge ۱$. در این حالت جواب عبارت است از $\sum_{i=۱}^{k}\binom{k+i}{k-i}$.

۳۰. الف) (یک)

$$\underset{(\text{یک ۳})}{۱} + \underset{(\text{سه ۳})}{۱} + \underset{(\text{پنج ۳})}{۱} = ۳$$

(دو)

$$\underset{(\text{یک ۳})}{\binom{۸}{۱}} + \underset{(\text{سه ۳})}{\binom{۷}{۳}} + \underset{(\text{پنج ۳})}{\binom{۶}{۵}}$$

ب) (یک)

$$\underset{(\text{بدون ۳})}{۱} + \underset{(\text{دو ۳})}{۱} + \underset{(\text{چهار ۳})}{۱} + \underset{(\text{شش ۳})}{۱} = ۴$$

(دو)

$$\underset{(\text{بدون ۳})}{\binom{۹}{۰}} + \underset{(\text{دو ۳})}{\binom{۸}{۲}} + \underset{(\text{چهار ۳})}{\binom{۷}{۴}} + \underset{(\text{شش ۳})}{\binom{۶}{۶}}$$

۳۱. الف) تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ مفروض برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$y_۱ + y_۲ + \cdots + y_r = n - r$$

Scanned by CamScanner

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 3$، $y_i \ge 0$. تعداد این جوابها $\binom{n-1}{n-3} = \binom{n-1}{3-1} = \binom{3+(n-3)-1}{n-3}$ است.

ب) روی‌هم $\sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$ طریق وجود دارد.

۳۲. الف) $9 - 2 = 7$ حرکت افقی و $5 - 1 = 4$ حرکت قائم وجود دارد. ۴ تا H و ۷ تا V را می‌توان به $\frac{11!}{4!7!}$ طریق مرتب کرد.

ب) چون هر حرکت قطری جای یک حرکت افقی و یک حرکت قائم را می‌گیرد، تعداد حرکتهای قطری عددی بین ۰ و ۴ یا خود ۰ و ۴ است. حالتهای ممکن به‌صورت زیرند:

(۰ تا D): ۴ تا H، ۷ تا V: $\frac{11!}{4!7!}$

(یک D): ۳ تا H، ۶ تا V: $\frac{10!}{1!3!6!}$

(۲ تا D): ۲ تا H، ۵ تا V: $\frac{9!}{2!2!5!}$

(۳ تا D): یک H، ۴ تا V: $\frac{8!}{3!1!4!}$

(۴ تا D): ۰ تا H، ۳ تا V: $\frac{7!}{4!0!3!}$

جواب مطلوب برابر است با مجموع این نتایج، یعنی $\sum_{i=0}^{4} \frac{(11-i)!}{i!(4-i)!(7-i)!}$.

۳۳. الف) $\frac{11!}{7!4!}$

ب) $\left(\frac{4!}{3!1!}\right)\left(\frac{4!}{2!2!}\right) - \left(\frac{11!}{7!4!}\right)$

پ)

(برای قسمت الف) $\left(\frac{11!}{7!4!}\right) + \left(\frac{10!}{6!3!1!}\right) + \left(\frac{9!}{5!2!2!}\right) + \left(\frac{8!}{4!1!3!}\right) + \left(\frac{7!}{3!0!4!}\right)$

(برای قسمت ب) $\left[\left(\frac{11!}{7!4!}\right) + \left(\frac{10!}{6!3!1!}\right) + \left(\frac{9!}{5!2!2!}\right) + \left(\frac{8!}{4!1!3!}\right) + \left(\frac{7!}{3!0!4!}\right)\right] - \left\{\left[\left(\frac{4!}{2!2!}\right) + \left(\frac{3!}{1!1!1!}\right) + \left(\frac{2!}{2!}\right)\right] \times \left[\left(\frac{4!}{3!1!}\right) + \left(\frac{3!}{2!1!}\right)\right]\right\}$

۳۴. الف) تعداد مسیرها برابر است با تعداد ترتیبهای سه U و چهار L. این تعداد عبارت است از $\frac{7!}{4!3!} = 35$.

ب) در اینجا باید شش U و یک L را مرتب کنیم و این کار را می‌توان به $\frac{7!}{6!1!} = 7$ طریق انجام داد.

پ) از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که $35 - 7 = 28$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد.

ت) برای رفتن از $(1,1)$ به $(8,2)$، ترتیبی متشکل از ۴ تا U و دو تا D لازم است و تعداد این ترتیبها $\binom{7}{2} = 35$ است. از این ۳۵ مسیر، تعداد آنهایی که بر محور x مماس‌اند یا آن‌را قطع می‌کنند برابر است با $\binom{7}{5} = 21$.

Scanned by CamScanner

بنابراین، فقط ۲۱ − ۳۵ مسیر از این نوع از (۱، ۱) به (۸، ۲) وجود دارد که هرگز بر محور x مماس نیستند و آن را قطع نمی‌کنند.

ث) در اینجا ما مسیرهای خاصی را از (۱، ۱) به (۱۴، ۴) می‌خواهیم که در آنها حرکتها به‌صورت زیرند:

اگر ورقهٔ $(n+1)$اُم به نام دانشجوی اول باشد، $(m,n) \to (m+1, n+1)$.

اگر ورقهٔ $(n+1)$اُم به نام دانشجوی دوم باشد، $(m,n) \to (m+1, n-1)$.

این مسیرها همانهایی هستند که هرگز بر محور افقی (یا x) مماس نیستند و آن را قطع نمی‌کنند. به‌طورکلی، در اینجا جفت مرتبی مانند (m,n) بر این امر دلالت دارد که m ورقهٔ رأی‌گیری خوانده شده است و دانشجوی اول n رأی بیشتر دارد. تعداد طرق خواندن ورقه‌های رأی‌گیری با توجه به شرایط قید شده برابر است با

$$\binom{۱۳}{۸} - \binom{۱۳}{۹} = ۱۲۸۷ - ۷۱۵ = ۵۷۲$$

Scanned by CamScanner

۲

اصول بنیادی منطق

بند ۱.۲

۱. جمله‌های قسمتهای (الف)، (ت)، (ث) و (ح) گزاره‌اند.

۲. گزاره‌های قسمتهای (الف)، (ت) و (ح) گزاره‌های اولیه‌اند.

۳. چون $p \to q$ نادرست است، ارزش راستی p برابر با ۱ و ارزش راستی q برابر با ۰ است. در نتیجه، ارزشهای راستی گزاره‌های مرکب مفروض عبارت‌اند از

الف) ۰ ب) ۰ پ) ۱ ت) ۰

۴. الف) $r \to q$ ب) $q \to p$ پ) $(s \wedge r) \to q$

۵. الف) اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه متساوی‌الساقین است.

ب) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، آنگاه متساوی‌الاضلاع نیست.

پ) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر سه زاویهٔ برابر داشته باشد.

ت) مثلث ABC متساوی‌الساقین است ولی متساوی‌الاضلاع نیست.

ث) اگر مثلث ABC سه زاویهٔ برابر داشته باشد، آنگاه متساوی‌الساقین است.

۶. الف) درست (۱) ب) درست (۱)

پ) نادرست (۰) ت) درست (۱)

۷. الف) اگر هر روز تمرین کنید، آنگاه شانس خوبی برای برنده شدن در مسابقهٔ تنیس خواهید داشت.

پ) اگر بهمن مجاز باشد بر موتورسیکلت هومن سوار شود، آنگاه باید کلاه ایمنی را بر سر گذارد.

۸.

p	q	$p \vee q$	(الف) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$	$p \to q$	$q \to p$	(ت) $(p \to q) \to (q \to p)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

Scanned by CamScanner

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	(ث) $[p \wedge (p \to q)] \to q$	(ج)	(چ)
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰

p	q	r	$q \to r$	(ب) $p \to (q \to r)$	$p \to q$	(پ) $(p \to q) \to r$	(ح)
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۹. گزاره‌های (الف)، (ث)، (ج) و (ح) راستگو هستند.

۱۰.

p	q	r	$\overbrace{p \to (q \to r)}^{s}$	$\overbrace{(p \to q) \to (p \to r)}^{t}$	$s \to t$
۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

۱۱. الف) $۲^۵ = ۳۲$ ب) ۲^n

۱۲. الف) وقتی $(p \wedge q) \wedge r$ درست (۱) و $s \vee t$ نادرست (۰) است، $[(p \wedge q) \wedge r] \to (s \vee t)$ نادرست است.
بنابراین، p، q و r باید درست (۱) و s و t باید نادرست (۰) باشند.

۱۳. الف) $p : ۰$؛ $r : ۰$؛ $s : ۰$

ب) ارزش راستی گزارهٔ s باید ۱ باشد، ولی گزارهٔ p، مانند گزارهٔ r، می‌تواند دارای ارزش راستی ۰ یا ۱ باشد.

Scanned by CamScanner

۱۴. الف) $n = ۹$ ب) $n = ۱۸$

۱۵. الف) $m = ۳$، $n = ۶$ ب) $m = ۳$، $n = ۹$ پ) $m = ۱۸$، $n = ۹$

ت) $m = ۴$، $n = ۹$ ث) $m = ۴$، $n = ۹$ ج) $m = ۴$، $n = ۹$

چ) $m = ۴$، $n = ۱۹$

۱۶. الف) $۱۰^۲ - ۱۰ = ۹۰$ ب) $۲۰^۲ - ۲۰ = ۳۸۰$

پ) $(۱۰)(۲۰) - ۱۰ = ۱۹۰$ ت) $(۲۰)(۱۰) - ۱۰ = ۱۹۰$

۱۷. ۲۷

۱۸. الف) بله ب) بله پ) خیر ت) خیر

۱۹. حالتهای ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

(یک) فرض کنید گزارهٔ اول یا گزارهٔ دوم گزارهٔ درست باشد. دراین صورت گزاره‌های (۳) و (۴) نادرست و بنابراین، نقیض آنها درست‌اند. با توجه به (۳) می‌بینیم که دختر کوچکتر آن تکه از کلوچه را نخورده است، درحالی که از (۴) نتیجه می‌گیریم که دختر کوچکتر آن را واقعاً خورده است.

(دو) اکنون فرض کنیم گزارهٔ (۳) تنها گزارهٔ درست باشد. بنابراین، گزاره‌های (۳) و (۴) دیگر ناقض هم نیستند. ولی اکنون گزارهٔ (۲) نادرست است و پسر کوچکتر و دختر کوچکتر را (به ترتیب، با توجه به گزاره‌های (۲) و (۳)) مجرم می‌شناسیم.

(سه) سرانجام، آخرین امکان را در نظر می‌گیریم، یعنی حالتی که گزارهٔ (۴) گزارهٔ درست باشد. باز هم گزاره‌های (۳) و (۴) ناقض یکدیگر نیستند و در اینجا با توجه به گزارهٔ (۲) درمی‌یابیم که پسر کوچکتر مجرم است.

بند ۲.۲

۱. الف) (یک)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(دو)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(سه)

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$\neg r \to (p \to q)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب)

$[p \to (q \vee r)] \iff [\neg r \to (p \to q)]$ با توجه به (سه) در قسمت (الف)

$\iff [\neg r \to (\neg p \vee q)]$ بنابر قاعدهٔ دوم جایگذاری و $(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$

$\iff [\neg(\neg p \vee q) \to \neg\neg r]$ بنابر قاعدهٔ اول جایگذاری و اینکه به‌ازای هر دو گزارهٔ اولیهٔ s و t، $(s \to t) \iff (\neg t \to \neg s)$

$\iff [(\neg\neg p \wedge \neg q) \to r]$ بنابر قانون دمورگان، نقیض مضاعف و قاعدهٔ دوم جایگذاری.

$\iff [(p \wedge \neg q) \to r]$ بنابر نقیض مضاعف و قاعدهٔ دوم جایگذاری.

۲.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱

۳. الف) به‌ازای هر گزارهٔ اولیه مانند s، $s \vee \neg s \iff T$. به‌جای هر s گزارهٔ $p \vee (q \wedge r)$ را بگذارید و نتیجهٔ مطلوب از قاعدهٔ اول جایگذاری حاصل می‌شود.

ب) به‌ازای هر دو گزارهٔ اولیه مانند s و t داریم $(s \to t) \iff (\neg t \to \neg s)$. به‌جای هر s گزارهٔ $p \vee q$ و به‌جای هر t گزارهٔ r را بگذارید و نتیجهٔ مطلوب از قاعدهٔ اول جایگذاری حاصل می‌شود.

پ) به‌ازای هر سه گزارهٔ اولیهٔ a، b و c، قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$ بیان می‌کند که

$$a \vee (b \wedge c) \iff (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

اگر قاعدهٔ اول جایگذاری را همراه با جایگذاریهای $[(p \vee q) \to r]$ به‌جای a، s به‌جای b و t به‌جای c به‌کار ببریم، گزارهٔ مفروض راستگوست.

Scanned by CamScanner

۴. (۱) $[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg r] \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge T_{\circ} \Longleftrightarrow p \wedge q$

(۲) $[p \wedge q) \vee \neg q] \Longleftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q) \Longleftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge T_{\circ} \Longleftrightarrow p \vee \neg q$

بنابراین، گزارهٔ مفروض به‌صورت $(p \vee \neg q) \to s$ یا $(q \to p) \to s$ ساده می‌شود.

۵. الف) رضا مطالعه را مقدم بر رهبری تیمهای دانشکده قرار داد ولی (با وجود این) به مدارج تحصیلی خوبی نرسید.

ب) آرمان تکالیف ریاضی خود را انجام نمی‌دهد یا مژگان درسهای پیانوی خود را تمرین نمی‌کند.

پ) آرین به تعطیلات رفت و از مسافرت با هواپیما نترسید، ولی (با وجود این) به او خوش نگذشت.

ت) هومن درس پاسکال را با نمرهٔ قبولی گذراند و پروژهٔ ساختمان داده‌ها را به پایان رساند، ولی در پایان ترم فارغ‌التحصیل نشد.

۶. الف) $\neg[p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)] \Longleftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow$

$(\neg q \wedge \neg r) \vee [\neg p \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \Longleftrightarrow (\neg q \wedge \neg r) \vee [T_{\circ} \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))] \Longleftrightarrow$

$(\neg q \wedge \neg r) \vee [\neg p \vee (q \wedge \neg r)] \Longleftrightarrow \neg p \vee [(\neg q \vee q) \wedge \neg r] \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg r$

ب) $\neg[(p \wedge q) \underset{\neg}{\to} r] \Longleftrightarrow \neg[\neg(p \wedge q) \vee r] \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge \neg r$

پ) $p \wedge (q \vee \neg r)$ ت) $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

۷. الف)

p	q	$(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q))$	$p \wedge q$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱

ب) $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee (p \vee q)) \Longleftrightarrow p \vee q$

۸. الف) $q \to p \Longleftrightarrow \neg q \vee p$؛ پس $(q \to p)^d \Longleftrightarrow \neg q \wedge p$

ب) $p \to (q \wedge r) \Longleftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$؛ پس $[p \to (q \wedge r)]^d \Longleftrightarrow \neg p \wedge (q \vee r)$

پ) $(p \to q) \wedge (q \to p) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$؛ پس $p \leftrightarrow q$

$(p \leftrightarrow q)^d \Longleftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

ت) $p \veebar q \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$؛ پس $(p \veebar q)^d \Longleftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$.

۹. الف) اگر امروز روزکارگر[1] باشد، آنگاه فردا سه‌شنبه است. (درست)

عکس نقیض: اگر فردا سه‌شنبه نباشد، آنگاه امروز روزکارگر نیست. (درست)

عکس: اگر فردا سه‌شنبه باشد، آنگاه امروز روزکارگر است.

وارون: اگر امروز روزکارگر نباشد، آنگاه فردا سه‌شنبه نیست.

۱ـ درکشورهای ایالات متحد امریکا و کانادا، اولین دوشنبهٔ ماه سپتامبر روزکارگر است.ـم.

هر دوشنبهٔ دلخواه سال، غیر از روزکارگر، را درنظر بگیرید. بنابراین، هم عکس نادرست است هم وارون؛ ولی، به‌ازای هر روز دیگر، عکس و وارون هر دو درست‌اند.

ب) اگر $۳ > -۱$ و $۱۰ = ۷ + ۳$، آنگاه $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱$. (درست)

عکس: اگر $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱$، آنگاه $۳ > -۱$ و $۱۰ = ۷ + ۳$. (درست)

وارون: اگر $۳ \geq -۱$ یا $۱۰ \neq ۷ + ۳$، آنگاه $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) \neq -۱$. (درست)

عکس نقیض: اگر $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) \neq -۱$، آنگاه $۳ \geq -۱$ یا $۱۰ \neq ۷ + ۳$.

پ) اگر بهمن در نیوانگلند زندگی کند، آنگاه بهمن در ایالت ورمونت زندگی می‌کند.

عکس نقیض: اگر بهمن در ایالت ورمونت زندگی نکند، آنگاه بهمن در نیوانگلند زندگی نمی‌کند.

اگر بهمن در ورمونت یا در جایی خارج از نیوانگلند زندگی کند، آنگاه هم استلزام مفروض درست است و هم عکس نقیض آن. اگر بهمن در جایی در نیوانگلند غیر از ورمونت زندگی کند، آنگاه هم استلزام مفروض نادرست است هم عکس نقیض آن.

عکس: اگر بهمن در ایالت ورمونت زندگی کند، آنگاه بهمن در نیوانگلند زندگی می‌کند. (درست)

وارون: اگر بهمن در نیوانگلند زندگی نکند، آنگاه بهمن در ایالت ورمونت زندگی نمی‌کند. (درست)

۱۰. الف) درست ب) درست پ) درست ت) درست

۱۱. الف) $(q \to r) \vee \neg p$ ب) $(\neg q \vee r) \vee \neg p$

۱۲. عکس: اگر بهمن به بازی بسکتبال رفته باشد، آنگاه کارش را به پایان رسانده است و برف نمی‌بارد.

وارون: اگر بهمن کارش را به پایان نرسانده باشد یا برف نبارد، آنگاه بهمن به بازی بسکتبال نخواهد رفت.

عکس نقیض: اگر بهمن به بازی بسکتبال نرود، آنگاه کارش را به پایان نرسانده است یا برف می‌بارد.

نقیض: یا بهمن کارش را به پایان نرسانده است یا برف می‌بارد یا بهمن به بازی بسکتبال می‌رود.

۱۳.

	z	شکل ۱.۲ (الف)	شکل ۱.۲ (ب)
الف)	۲	۲۰	$۱۰ + ۱ = ۱۱$
ب)	۶	۲۰	$۱۰ + ۵ = ۱۵$
پ)	۹	۲۰	$۱۰ + ۸ = ۱۸$
ت)	۱۰	۲۰	$۱۰ + ۹ = ۱۹$
ث)	۱۵	۲۰	$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$
ج)	$n > ۱۰$	۲۰	$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$

۱۴.

p	q	$p \veebar q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg(p \leftrightarrow q)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰

Scanned by CamScanner

۱۵.

p	q	r	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)]$	$[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)]$
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱

۱۶. الف)

p	q	$p \wedge q$	$q \to (p \wedge q)$	$p \to [q \to (p \wedge q)]$
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

ب) به‌جای هر p گزارهٔ $p \vee q$ را بگذارید. در این صورت، بنابر قاعدهٔ اول جایگذاری، راستگوی $(p \vee q) \to [q \to [(p \vee q) \wedge q]]$ را داریم: چون بنابر قوانین جذب داریم $(p \vee q) \wedge q \Longleftrightarrow q$، درنتیجه $(p \vee q) \to [q \to q] \Longleftrightarrow T_{\circ}$.

پ)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$q \to (p \wedge q)$	$(p \vee q) \to [q \to (p \wedge q)]$
۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

بنابراین، گزارهٔ مفروض راستگو نیست. اگر کوشش کنیم قاعدهٔ دوم جایگذاری را دربارهٔ نتیجهٔ قسمت (الف) به‌کار ببریم، باید به‌جای اولین p، گزارهٔ $p \vee q$ را بگذاریم. ولی این کار به پیدایش یک گزارهٔ راستگو منجر نمی‌شود؛ زیرا این عمل کاربرد معتبری از این قاعدهٔ جایگذاری نیست (چراکه p و $p \vee q$ منطقاً هم‌ارز نیستند).

۱۷. الف) $\neg p \Longleftrightarrow (p \mid p)$

ب) $p \vee q \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow (\neg p \mid \neg q) \Longleftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q)$

پ) $p \wedge q \Longleftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \mid q) \Longleftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$

ت) $p \to q \Longleftrightarrow \neg p \vee q \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow (p \mid \neg q) \Longleftrightarrow p \mid (q \mid q)$

ث) $p \to q \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Longleftrightarrow t \wedge u \Longleftrightarrow (t \mid u) \mid (t \mid u)$ که در آن t به‌جای $p \mid (q \mid q)$ و u به جای $q \mid (p \mid p)$ گذاشته شده است.

۱۸. الف) $\neg p \Longleftrightarrow (p \mid p)$

ب) $p \vee q \Longleftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(p \mid q) \Longleftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$

پ) $p \wedge q \Longleftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg\neg q \Longleftrightarrow (\neg p \mid \neg q) \Longleftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q)$

ت) $p \to q \Longleftrightarrow \neg p \vee q \Longleftrightarrow (\neg p \mid q) \mid (\neg p \mid q) \Longleftrightarrow [(p \mid p) \mid q] \mid [(p \mid p) \mid q]$

ث) $p \to q \Longleftrightarrow (r \mid r) \mid (s \mid s)$، که در آن r به‌جای $[(p \mid p) \mid q] \mid [(p \mid p) \mid q]$ و s به‌جای $[(q \mid q) \mid p] \mid [(q \mid q) \mid p]$ گذاشته شده است.

۱۹.

p	q	$\neg(p \mid q)$	$(\neg p \mid \neg q)$	$\neg(p \mid q)$	$(\neg p \mid \neg q)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

۲۰. الف)

	دلایل
$[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q$	
$\Longleftrightarrow [p \vee (q \wedge \neg q)] \vee q$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\Longleftrightarrow (p \vee F_{\circ}) \vee q$	$q \wedge \neg q \Longleftrightarrow F_{\circ}$ (قانون وارون)
$\Longleftrightarrow p \vee q$	$p \vee F_{\circ} \Longleftrightarrow p$ (قانون همانی)

ب)

	دلایل
$\neg(p \vee q) \wedge [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]$	
$\Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [\neg q \vee (\neg p \wedge q)]$	قانون تعویض‌پذیری $\vee$
$\Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)]$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge T_{\circ}]$	$\neg q \vee q \Longleftrightarrow T_{\circ}$ (قانون وارون)
$\Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$	قانون همانی
$\Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg(q \wedge p)$	قوانین دمورگان
$\Longleftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (q \wedge p)]$	قوانین دمورگان
$\Longleftrightarrow \neg[(q \wedge p) \wedge (p \vee q)]$	قانون تعویض‌پذیری $\wedge$
$\Longleftrightarrow \neg[q \wedge [p \wedge (p \vee q)]]$	قانون شرکت‌پذیری $\wedge$
$\Longleftrightarrow \neg(q \wedge p)$	قانون جذب

پ)

	دلایل
$(p \to q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$	
$\Longleftrightarrow (p \to q) \wedge \neg q$	قانون جذب (و قانون تعویض‌پذیری $\vee$)
$\Longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q$	$p \to q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$
$\Longleftrightarrow \neg q \wedge (\neg p \vee q)$	قانون تعویض‌پذیری $\wedge$
$\Longleftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Longleftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee F_{\circ}$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow \neg q \wedge \neg p$	قانون همانی
$\Longleftrightarrow \neg(q \vee p)$	قوانین دمورگان

Scanned by CamScanner

۲۱. الف)

	دلایل
$p \vee [p \wedge (p \vee q)]$	
$\Longleftrightarrow p \vee p$	قانون جذب
$\Longleftrightarrow p$	قانون خودتوانی $\vee$

ب)

	دلایل
$p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$	
$\Longleftrightarrow (p \vee q) \vee [\neg(p \vee q) \wedge r]$	قوانین دمورگان
$\Longleftrightarrow [(p \vee q) \vee \neg(p \vee q)] \wedge (p \vee q \vee r)$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\Longleftrightarrow T_{\circ} \wedge (p \vee q \vee r)$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow p \vee q \vee r$	قانون همانی

پ)

	دلایل
$[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)]$	
$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	$s \rightarrow t \Longleftrightarrow \neg s \vee t$
$\Longleftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	قوانین دمورگان
$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	قانون نقیض مضاعف
$\Longleftrightarrow p \wedge q$	قانون جذب

ت)

	دلایل
$p \wedge [(\neg q \rightarrow (r \wedge r)) \vee \neg[q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))]]$	
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg[q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))]]$	قانون خودتوانی $\wedge$
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg[q \vee (r \wedge (s \vee \neg s))]]$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee (r \wedge T_{\circ}))]$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee r)]$	قانون همانی
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg\neg q \vee r) \vee \neg(q \vee r)]$	$t \rightarrow u \Longleftrightarrow \neg t \vee u$
$\Longleftrightarrow p \wedge [(q \vee r) \vee \neg(q \vee r)]$	قانون نقیض مضاعف
$\Longleftrightarrow p \wedge T_{\circ}$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow p$	قانون همانی

۲۲. الف)

$$[p \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q)] \vee [(r \vee t \vee \neg r) \wedge \neg q] \Longleftrightarrow [p \wedge (\neg r \vee T_{\circ})] \vee [(T_{\circ} \vee t) \wedge \neg q]$$
$$\Longleftrightarrow (p \wedge T_{\circ}) \vee (T_{\circ} \wedge \neg q) \Longleftrightarrow p \vee \neg q$$

ب) با توجه به قانون جذب،

$$[p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)] \wedge [(p \wedge r \wedge t) \vee t] \Longleftrightarrow p \wedge t$$

بند ۳.۲

۱. الف)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \rightarrow r$
۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

اعتبار این استدلال از نتایج آخرین سطر حاصل می‌شود. (می‌توان هفت سطر اول را نادیده گرفت.)

ب)

p	q	r	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg r$	$\neg p \vee \neg q$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰

اعتبار این استدلال از نتایج سطرهای ۱، ۲ و ۵ از این جدول حاصل می‌شود. می‌توان نتایج پنج سطر دیگر را نادیده گرفت.

پ)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg q$	$p \vee r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱

دو ستون آخر این جدول ارزش را درنظر بگیرید. می‌بینیم که وقتی ارزش راستی $[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg q$ برابر با ۱ است، ارزش راستی $p \vee r$ نیز ۱ است. در نتیجه،

$$[[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg q] \Rightarrow p \vee r$$

(سطرهایی از این جدول که برای تشخیص اعتبار استدلال نقش قاطع دارند عبارت‌اند از سطرهای ۲، ۵ و ۶. می‌توان سطرهای ۱، ۳، ۴، ۷ و ۸ را نادیده گرفت.)

۲. الف)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

Scanned by CamScanner

ب)

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۱

پ)

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$
۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۱

ت)

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$\overbrace{(p \vee q) \to r}^{s}$	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to s$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۳. الف) اگر ارزش راستی p برابر با ۰ باشد، ارزش راستی $p \wedge q$ نیز چنین است.

ب) اگر ارزش راستی $p \vee q$ برابر با ۰ باشد، ارزش راستی p (و q) نیز برابر با ۰ است.

پ) اگر ارزش راستی q برابر با ۰ باشد، آنگاه بدون توجه به ارزش راستی p، ارزش راستی $[(p \vee q) \wedge \neg p]$ برابر با ۰ است.

ت) ارزش راستی گزارهٔ $q \vee s$ فقط وقتی ۰ است که ارزش راستی هر یک از دو گزارهٔ q و s برابر با ۰ باشد. دراین صورت وقتی ارزش راستی p برابر با ۰ است ارزش راستی $(p \to q)$ برابر با ۱ است؛ وقتی ارزش راستی r برابر با ۰ است، ارزش راستی $(r \to s)$ برابر با ۱ است. بنابراین، $(p \vee r)$ باید دارای ارزش راستی ۰ باشد، نه ۱.

ث) وقتی ارزش راستی هر دو گزارهٔ p و r برابر با ۱ است، ارزش راستی $(\neg p \vee \neg r)$ برابر با ۰ است. دراین صورت، برای آنکه ارزش راستی $(p \to q)$ و $(r \to s)$ برابر با ۱ باشد، q و s الزاماً دارای ارزش راستی ۱ هستند. ولی، این به ارزش راستی ۰ برای $(\neg q \vee \neg s)$ منجر می‌شود.

۴. الف) رؤیا دختر بیژن شمعهای اتومبیل را معاینه خواهد کرد. (قاعدهٔ قیاس استثنایی)

ب) آرین مسألهٔ نخست را درست حل نکرد. (قاعدهٔ نقیض انتزاع)

پ) این یک حلقهٔ repeat – until است. (قاعدهٔ قیاس استثنایی)

ت) بهمن عصر تلویزیون تماشا کرد. (قاعدهٔ نقیض انتزاع)

ث) گیتا عکسهای هومن را پاره کرد. (قاعدهٔ نقیض انتزاع)

۵. الف) قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

ب) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ عکس)

پ) قاعدهٔ نقیض انتزاع

ت) قاعدهٔ قیاس فصلی

ث) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ وارون)

ج) قانون قیاس صوری

۶. الف)

	مراحل	دلایل
(۱)	$q \wedge r$	مقدمه
(۲)	q	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۳)	$q \vee r$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ تفصیل فصلی

در نتیجه، $(q \wedge r) \to (q \vee r)$ راستگوست یا $q \wedge r \Rightarrow q \vee r$.

ب) انتساب ارزشهای راستی ۰ : p، ۱ : q و ۰ : r را درنظر بگیرید. به‌ازای این انتسابها، ارزش راستی $[p \wedge (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)]$ برابر با ۱ است، درحالی‌که ارزش راستی $[p \wedge (q \vee r)] \vee \neg[p \vee (q \vee r)]$ برابر با ۰ است. بنابراین، $P \to P_1$ راستگو نیست یا $P \not\Rightarrow P_1$.

۷.

(۱)و(۲)		مقدمه
(۳)		مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۴)		مقدمه
(۵)		مرحلهٔ(۴)و$(q \to \neg r) \Longleftrightarrow (\neg\neg q \to \neg r) \Longleftrightarrow (r \to \neg q)$
(۶)		مراحل (۳) و (۵) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۷)		مقدمه
(۸)		مراحل (۶) و (۷) و قاعدهٔ قیاس فصلی
(۹)		مرحلهٔ (۸) و قاعدهٔ تفصیل فصلی

Scanned by CamScanner

۸.

(۱) مقدمه

(۲) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۳) مقدمه

(۴) مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۵) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۶) مراحل (۴) و (۵) و قانون ترکیب عطفی

(۷) مقدمه

(۸) مرحلهٔ (۷) و $[\neg(s \vee t) \to \neg r] \Longleftrightarrow [r \to (s \vee t)]$

(۹) مرحلهٔ (۸) و قوانین دمورگان

(۱۰) مراحل (۶) و (۹) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۱۱) مقدمه

(۱۲) مرحلهٔ (۱۱) و $[\neg r \to \neg(\neg p \vee q)] \Longleftrightarrow [(\neg p \vee q) \to r]$

(۱۳) مرحلهٔ (۱۲) و قوانین دمورگان و قانون نقیض مضاعف

(۱۴) مراحل (۱۰) و (۱۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۱۵) مرحلهٔ (۱۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

۹. الف)

(۱) مقدمه (نقیض حکم)

(۲) مرحلهٔ (۱) و $\neg(\neg q \to s) \Longleftrightarrow \neg(\neg\neg q \vee s) \Longleftrightarrow \neg(q \vee s) \Longleftrightarrow \neg q \wedge \neg s$

(۳) مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۴) مقدمه

(۵) مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۶) مقدمه

(۷) مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۸) مراحل (۶) و (۷) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

(۹) مقدمه

(۱۰) مراحل (۸) و (۹) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۱۱) مراحل (۵) و (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

(۱۲) مرحلهٔ (۱۱) و روش برهان خلف

ب)

(۱) $p \to q$ مقدمه

(۲) $\neg q \to \neg p$ مرحلهٔ (۱) و $(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

(۳) $p \vee r$ مقدمه

(۴) $\neg p \to r$ مرحلهٔ (۳) و $(p \vee r) \Longleftrightarrow (\neg p \to r)$

(۵) $\neg q \to r$ مراحل (۲) و (۴) و قانون قیاس صوری

(۶) $\neg r \vee s$ مقدمه

(۷) $r \to s$ مرحلهٔ (۶) و $(\neg r \vee s) \Longleftrightarrow (r \to s)$

(۸) $\therefore \neg q \to s$ مراحل (۵) و (۷) و قانون قیاس صوری

پ)

(۱) $\neg p \leftrightarrow q$ مقدمه

(۲) $(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$ مرحلهٔ (۱) و $(\neg p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)]$

(۳) $\neg p \to q$ مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۴) $q \to r$ مقدمه

(۵) $\neg p \to r$ مراحل (۳) و (۴) و قانون قیاس صوری

(۶) $\neg r$ مقدمه

(۷) $\therefore p$ مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

۱۰. الف)

(۱) $p \wedge \neg q$ مقدمه

(۲) p مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۳) r مقدمه

(۴) $p \wedge r$ مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

(۵) $\therefore (p \wedge r) \vee q$ مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ تفصیل فصلی

ب)

(۱) $p, p \to q$ مقدمات

(۲) q مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۳) $\neg q \vee r$ مقدمه

(۴) $q \to r$ مرحلهٔ (۳) و $\neg q \vee r \Longleftrightarrow (q \to r)$

(۵) $\therefore r$ مراحل (۲) و (۴) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

پ)

(۱) $p \to q, \neg q$ مقدمات

(۲) $\neg p$ مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

(۳) $\neg r$ مقدمه

Scanned by CamScanner

(۴)	$\neg p \wedge \neg r$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۵)	$\therefore \neg(p \vee r)$	مرحلهٔ (۴) و قوانین دمورگان

ت)

(۱)	$r, r \to \neg q$	مقدمات
(۲)	$\neg q$	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۳)	$p \to q$	مقدمه
(۴)	$\therefore \neg p$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

ث)

(۱)	p	مقدمه
(۲)	$\neg q \to \neg p$	مقدمه
(۳)	$p \to q$	مرحلهٔ (۲)و$(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
(۴)	q	مراحل (۱) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۵)	$p \wedge q$	مراحل (۱) و (۴) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۶)	$p \to (q \to r)$	مقدمه
(۷)	$(p \wedge q) \to r$	مرحلهٔ (۶) و $[p \to (q \to r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$
(۸)	$\therefore r$	مراحل (۵) و (۷) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

ج)

(۱)	$p \wedge q$	مقدمه
(۲)	p	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۳)	$p \to (r \wedge q)$	مقدمه
(۴)	$r \wedge q$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۵)	r	مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۶)	$r \to (s \vee t)$	مقدمه
(۷)	$s \vee t$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۸)	$\neg s$	مقدمه
(۹)	$\therefore t$	مراحل (۷) و (۸) و قاعدهٔ قیاس فصلی

چ)

(۱)	$\neg s, p \vee s$	مقدمات
(۲)	p	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ قیاس فصلی
(۳)	$p \to (q \to r)$	مقدمه
(۴)	$q \to r$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۵)	$t \to q$	مقدمه
(۶)	$t \to r$	مراحل (۴) و (۵) و قانون قیاس صوری

(۷)	$\therefore \neg r \to \neg t$	مرحلهٔ (۶)و$(t \to r) \Longleftrightarrow (\neg r \to \neg t)$

ح)

(۱)	$\neg p \vee r$	مقدمه
(۲)	$p \to r$	مرحلهٔ (۱)و$(p \to r) \Longleftrightarrow (\neg p \vee r)$
(۳)	$\neg r$	مقدمه
(۴)	$\neg p$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۵)	$p \vee q$	مقدمه
(۶)	$\neg p \to q$	مرحلهٔ (۵)و$(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \to q) \Longleftrightarrow (\neg\neg p \vee q)$
(۷)	$\therefore q$	مراحل (۴) و (۶) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

۱۱. الف) $p: ۱$ $q: ۰$ $r: ۱$

ب) $p: ۰$ $q: ۰$ $r: ۱$ یا ۰

$p: ۰$ $q: ۱$ $r: ۱$

پ) $p, q, r: ۱$ $s: ۰$

ت) $p, q, r: ۱$ $s: ۰$

۱۲. الف) بهروز استاد راهنما می‌شود : p

بهروز تلاش می‌کند : q

بهروز افزایش حقوق دارد : r

بهروز اتومبیل نو می‌خرد : s

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \to r \\ r \to s \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg q \end{array}$$

(۱)	$\neg s$	مقدمه
(۲)	$r \to s$	مقدمه
(۳)	$\neg r$	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۴)	$(p \wedge q) \to r$	مقدمه
(۵)	$\neg(p \wedge q)$	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۶)	$\therefore \neg p \vee \neg q$	مرحلهٔ (۵) و $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Scanned by CamScanner

ب) آرین به میدان اسب‌دوانی می‌رود : p

رؤیا عصبانی می‌شود : q

آرمان تمام شب را بازی می‌کند : r

مژگان عصبانی می‌شود : s

رضا مطلع می‌شود : t

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ (q \vee s) \to t \\ \neg t \\ \hline \therefore \neg p \wedge \neg r \end{array}$$

(۱)	$\neg t$	مقدمه
(۲)	$(q \vee s) \to t$	مقدمه
(۳)	$\neg(q \vee s)$	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۴)	$\neg q \wedge \neg s$	مرحلهٔ (۳) و $\neg(q \vee s) \Longleftrightarrow \neg q \wedge \neg s$
(۵)	$\neg q$	مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۶)	$p \to q$	مقدمه
(۷)	$\neg p$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۸)	$\neg s$	مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۹)	$r \to s$	مقدمه
(۱۰)	$\neg r$	مراحل (۸) و (۹) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۱۱)	$\therefore \neg p \wedge \neg r$	مراحل (۷) و (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

پ) آریا به جلسهٔ سه‌شنبه صبح می‌رود : p

آریا سه‌شنبه صبح زود بیدار می‌شود : q

آریا دوشنبه شب به مهمانی می‌رود : r

آریا بعد از ساعت ۱۱ شب (دوشنبه شب) به خانه باز می‌گردد : s

آریا با کمتر از هفت ساعت خواب سر کار حاضر می‌شود : t

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ (s \wedge q) \to t \\ \neg t \\ \hline \therefore \neg r \vee \neg p \end{array}$$

(۱)	$(s \wedge q) \to t$	مقدمه
(۲)	$\neg t$	مقدمه
(۳)	$\neg(s \wedge q)$	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۴)	$\neg s \vee \neg q$	مرحلهٔ (۳) و $\neg(s \wedge q) \Longleftrightarrow \neg s \vee \neg q$
(۵)	$p \to q$	مقدمه
(۶)	$r \to s$	مقدمه
(۷)	$\therefore \neg r \vee \neg p$	مراحل (۵)، (۶) و (۴) و قاعدهٔ ذوالوجهین مخرب

ت) احتمال باران آمدن هست : p

ریحانه نوار قرمز دور سرش را گم می‌کند : q

ریحانه چمنهای باغچه را نمی‌چیند : r

دما بالای ۸۰ درجهٔ فارنهایت است : s

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \to r \\ s \to \neg p \\ s \wedge \neg q \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

انتساب ارزشهای راستی زیر مثالی نقض برای رد اعتبار این استدلال به‌دست می‌دهد: p : ۰، q : ۰، r : ۱، s : ۱.

بند ۴.۲

۱. الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست
ث) نادرست ج) درست چ) نادرست ح) نادرست
خ) نادرست

۲. الف) (یک) درست (دو) نادرست (سه) درست
(چهار) درست (پنج) درست (شش) نادرست

ب) تنها مقداری برای x که از گزارهٔ باز $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ گزارهٔ درستی می‌سازد مقدار ۲ است.

پ) کوچکترین پنج عدد صحیح مثبتی که از $p(x) \to [\neg q(x) \wedge r(x)]$ گزارهٔ درستی می‌سازند عبارت‌اند از ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶.

۳. گزاره‌های (الف)، (پ) و (ث) درست و گزاره‌های (ب)، (ت) و (ج) نادرست‌اند.

۴. الف) هر چندضلعی یا چهارضلعی است یا مثلث (ولی نه هر دو). (درست، البته نسبت به عالم مورد بحث.)

Scanned by CamScanner

ب) هر مثلث متساوی‌الساقین متساوی‌الاضلاع است. (نادرست)

پ) مثلثی وجود دارد که یکی از زاویه‌های داخلی آن بزرگتر از ۱۸۰° است. (نادرست)

ت) اگر همهٔ زاویه‌های یک چهارضلعی برابر باشند، آنگاه این چندضلعی یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. (نادرست)

ث) همهٔ زاویه‌های یک مثلث برابرند اگر و فقط اگر آن مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. (درست)

ج) چهارضلعی‌ای وجود دارد که مستطیل نیست. (درست)

چ) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. (درست)

ح) اگر همهٔ ضلعهای یک چندضلعی برابر باشند، آنگاه این چندضلعی یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. (نادرست)

خ) اگر همهٔ ضلعهای یک چهارضلعی برابر باشند، آنگاه این چهارضلعی یک مربع است. (نادرست)

د) چهارضلعی‌ای وجود دارد که یکی از زاویه‌های داخلی آن بزرگتر از ۱۸۰° است. (درست)

ذ) مثلثی وجود ندارد که یک زاویهٔ داخلی بزرگتر از ۱۸۰° داشته باشد. (درست)

ر) اگر همهٔ زاویه‌های داخلی یک چندضلعی برابر باشند، آنگاه این چندضلعی مثلث متساوی‌الاضلاع یا مستطیل است. (درست، البته نسبت به عالم مورد بحث.)

۵.

الف) $\exists x[m(x) \wedge c(x) \wedge j(x)]$ درست

ب) $\exists x[s(x) \wedge c(x) \wedge \neg m(x)]$ درست

پ) $\forall x[c(x) \rightarrow (m(x) \veebar p(x))]$ نادرست

ت) $\forall x[(g(x) \wedge c(x)) \rightarrow \neg p(x)]$ درست

یا

$\forall x[(p(x) \wedge c(x)) \rightarrow \neg g(x)]$

یا

$\forall x[(g(x) \wedge p(x)) \rightarrow \neg c(x)]$

ث) $\forall x[(c(x) \wedge s(x)) \rightarrow (p(x) \veebar c(x))]$ درست

ج) $\exists x[g(x) \wedge \neg m(x) \wedge \neg p(x)]$

یا

$\exists x[g(x) \wedge \neg(m(x) \vee p(x))]$ درست

۶. الف) درست ب) درست پ) نادرست

ت) درست ث) نادرست ج) نادرست

۷. الف)

(یک) $\exists x q(x)$

(دو) $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$

(سه) $\forall x[q(x) \rightarrow \neg t(x)]$

(چهار) $\forall x[q(x) \rightarrow \neg t(x)]$

(پنج) $\exists x[q(x) \wedge t(x)]$

(شش) $\forall x[(q(x) \wedge r(x)) \rightarrow s(x)]$

ب) گزاره‌های (یک)، (چهار) و (پنج) درست‌اند. گزاره‌های (دو) و (سه) نادرست‌اند: $x = ۱۰$ مثالی نقض برای هر یک از این گزاره‌ها به‌دست می‌دهد.

پ) (یک) اگر x مجذورکامل باشد، آنگاه $x > ۰$.

(دو) اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه x زوج است.

(سه) اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه x بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

(چهار) عدد صحیحی وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی مجذورکامل نیست.

ت) (یک) فرض کنید $x = ۰$. (سه) فرض کنید $x = ۲۰$.

۸. الف) درست ب) نادرست: به‌ازای $x = ۱$، $q(x)$ درست و $p(x)$ نادرست است.

پ) درست ت) درست ث) درست

ج) درست چ) درست ح) درست

خ) درست د) نادرست: به‌ازای $x = -۱$، $(p(x) \vee q(x))$ درست و $r(x)$ نادرست است.

۹. الف) (یک) درست (دو) نادرست ($x = ۳$ را درنظر بگیرید.)

(سه) درست (چهار) درست

ب) (یک) درست (دو) نادرست ($x = ۳$ را درنظر بگیرید.)

(سه) درست (چهار) درست

پ) (یک) درست (دو) درست

(سه) درست (چهار) نادرست (به‌ازای $x = ۲$ یا $x = ۵$، ارزش راستی $p(x)$ برابر با ۱ و ارزش راستی $r(x)$ برابر با ۰ است.)

۱۰. الف) $\forall m, n\ A[m, n] > ۰$

ب) $\forall m, n\ ۰ < A[m, n] \leq ۷۰$

پ) $\exists m, n\ A[m, n] > ۶۰$

ت) $\forall m\ [(۱ \leq n < ۱۹) \rightarrow (A[m, n] < A[m, n+۱])]$

ث) $\forall n\ [(۱ \leq m < ۹) \rightarrow (A[m, n] < A[m+۱, n])]$

Scanned by CamScanner

ج) $\forall 1 \le m, i \le 3 \forall 1 \le n, j \le 20 [((m,n) \ne (i,j)) \to (A[m,n] \ne A[i,j])]$

چ) $\forall 1 \le m \le 8 \forall m \le i, j \le m+2 \forall 1 \le k, l \le 10 [((i,k) \ne (j,l)) \to (A[i,k] \ne A[j,l])]$

ح) $\forall 1 \le m \le 9 [\sum_{j=1}^{20} A[m,j] + 20 = \sum_{j=1}^{20} A[m+1,j]]$

۱۱. الف) هر دو متغیر x و y مقیدند. متغیر آزاد وجود ندارد.

ب) متغیر x آزاد است، درحالی‌که متغیرهای y و z مقیدند.

پ) متغیرهای x و y مقیدند. متغیر z آزاد است.

ت) متغیر x مقید و متغیر y آزاد است.

۱۲. الف) (یک) نادرست (دو) نادرست، زیرا ۷ عدد ۳ را نمی‌شمارد.

(سه) درست (چهار) درست (پنج) اگر $x = 0$ گزاره نادرست است.

(شش) اگر $x = 0$، گزاره نادرست است. (هفت) درست

(هشت) نادرست (اگر $y = 0$، آن‌گاه $x \ne 0$؛ اگر $y \ne 0$، فرض کنید $x = 2y$.)

(نه) نادرست (مثلاً فرض کنید $x = 2$ و $y = -2$.)

(ده) درست

ب) اکنون گزاره‌های (پنج)، (شش) و (نه) درست‌اند (زیرا عالم عوض شده است).

پ) (یک) درست (دو) درست (سه) درست

(چهار) نادرست (به‌ازای هر y، $x = 2y$ را درنظر بگیرید.)

۱۳. الف) $p(2,5) \vee p(3,5) \vee p(5,5)$

ب) $p(2,3) \wedge p(3,3) \wedge p(5,3)$

پ) $p(2,2) \wedge p(2,3) \wedge p(2,5)$

ت) $[p(2,2) \vee p(2,3) \vee p(2,5)] \vee [p(3,2) \vee p(3,3) \vee p(3,5)] \vee [p(5,2) \vee p(5,3) \vee p(5,5)]$

ث) $[p(2,2) \wedge p(2,3) \wedge p(2,5)] \wedge [p(3,2) \wedge p(3,3) \wedge p(3,5)] \wedge [p(5,2) \wedge p(5,3) \wedge p(5,5)]$

ج) $[p(2,2) \vee p(3,2) \vee p(5,2)] \wedge [p(2,3) \vee p(3,3) \vee p(5,3)] \wedge [p(2,5) \vee p(3,5) \vee p(5,5)]$

۱۴. گزاره‌های (الف)، (ب)، (ث)، (ج) و (چ) گزاره‌های منطقاً هم‌ارزند و هریک از آنها را می‌توان با $\forall n[q(n) \to p(n)]$ بیان کرد. گزاره‌های (پ)، (ح) و (خ) نیز با یکدیگر منطقاً هم‌ارزند و هر یک از این سه گزاره را می‌توان با $\forall n[p(n) \to q(n)]$ بیان کرد. گزارهٔ (ت) با هیچ‌یک از هشت گزارهٔ دیگر منطقاً هم‌ارز نیست.

۱۵. الف) نقیض پیشنهادی صحیح و گزارهٔ درستی است.

ب) نقیض پیشنهادی غلط است. صورت صحیح نقیض چنین است: به‌ازای هر دو عدد صحیح گویای x و y، مجموع $x + y$ عددی گویاست. این صورت صحیح نقیض، گزارهٔ درستی است.

پ) نقیض پیشنهادی صحیح، ولی گزاره‌ای نادرست است. گزارهٔ اصلی درست است.

ت) نقیض پیشنهادی غلط است. صورت صحیح نقیض چنین است: به‌ازای هر دو عدد صحیح x و y، اگر x و y فرد باشند، آن‌گاه xy زوج است. گزارهٔ اصلی درست است.

ث) نقیض پیشنهادی غلط است. صورت صحیح نقیض چنین است: عدد گویایی وجود دارد که مجذور آن گنگ است. گزارهٔ اصلی درست است.

۱۶. الف) رشتهٔ اصلی یکی از دانشجویان کلاس درس پاسکال استاد خرسند، نه علوم کامپیوتر است نه ریاضیات.

ب) اگر دانشجویی درکلاس درس پاسکال استاد خرسند باشد، آن‌گاه رشتهٔ اصلی این دانشجو تاریخ نیست یا، هیچ‌یک از دانشجویانی که رشتهٔ اصلیشان تاریخ است، دانشجوی کلاس درس پاسکال استاد خرسند نیست.

پ) هیچ‌یک از دانشجویان کلاس درس پاسکال استاد خرسند همهٔ مقاله‌های پژوهشی او را دربارهٔ ساختمان داده‌ها نخوانده است یا، هیچ‌یک از دانشجویانی که همهٔ مقاله‌های پژوهشی استاد خرسند را دربارهٔ ساختمان داده‌ها خوانده است درکلاس درس پاسکال او ثبت‌نام نکرده است.

۱۷. الف) عدد صحیحی مانند n وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر نیست ولی زوج است (یعنی فرد نیست).

ب) به‌ازای عدد صحیحی مانند m، m^2 فرد و m زوج است (یعنی فرد نیست).

پ) اعداد صحیحی مانند k، m و n وجود دارند به‌طوری‌که $k - m$ و $m - n$ فردند و $k - n$ نیز فرد است.

ت) به‌ازای عددی حقیقی مانند x، $x^2 > 16$ ولی $-4 \le x \le 4$ (یعنی $x \le -4$ و $x \ge 4$).

ث) عددی حقیقی مانند x وجود دارد به‌طوری‌که $|x - 3| < 7$ و یا $x \le -4$ یا $x \ge 10$.

۱۸. الف) $\forall x[\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$

ب) $\exists x[\neg p(x) \vee q(x)]$

پ) $\exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$

ت) $\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg r(x)]$

۱۹. الف) گزاره: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m > n$، آن‌گاه $m^2 > n^2$. (درست)

عکس: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m^2 > n^2$، آن‌گاه $m > n$. (درست)

وارون: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m \le n$، آن‌گاه $m^2 \le n^2$. (درست)

عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m^2 \le n^2$، آن‌گاه $m \le n$. (درست)

ب) گزاره: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a > b$، آن‌گاه $a^2 > b^2$. (نادرست. فرض کنید $a = 1$ و $b = -2$.)

عکس: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a^2 > b^2$، آن‌گاه $a > b$. (نادرست. فرض کنید $a = -5$ و $b = 3$.)

وارون: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a \le b$، آن‌گاه $a^2 \le b^2$. (نادرست. فرض کنید $a = -5$ و $b = 3$.)

عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a^2 \le b^2$، آن‌گاه $a \le b$. (نادرست. فرض کنید $a = 1$ و $b = -2$.)

پ) گزاره: به‌ازای هر سه عدد صحیح m، n و p، اگر m عدد n و n عدد p را بشمارد، آن‌گاه m عدد p را می‌شمارد. (درست)

Scanned by CamScanner

عکس: به‌ازای هر دو عدد صحیح m و p، اگر m عدد p را بشمارد، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح n نتیجه می‌شود که m عدد n و n عدد p را می‌شمارد. (نادرست. فرض کنید $m = ۱$، $n = ۲$ و $p = ۳$.)

وارون: به‌ازای هر سه عدد صحیح m، n و p، اگر m عدد n یا n عدد p را نشمارد، آنگاه m عدد p را نمی‌شمارد. (نادرست. فرض کنید $m = ۱$، $n = ۲$ و $p = ۳$.)

عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح m و p، اگر m عدد p را نشمارد، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح n نتیجه می‌شود که m عدد n یا n عدد p را نمی‌شمارد. (درست)

ت) گزاره: $\forall x[(x > ۳) \to (x^۲ > ۹)]$ (درست)

عکس: $\forall x[(x^۲ > ۹) \to (x > ۳)]$ (نادرست. فرض کنید $x = -۵$.)

وارون: $\forall x[(x \leq ۳) \to (x^۲ \leq ۹)]$ (نادرست. فرض کنید $x = -۵$.)

عکس نقیض: $\forall x[(x^۲ \leq ۹) \to (x \leq ۳)]$ (درست)

ث) گزاره: هر عدد صحیحی که بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد بر ۴ نیز بخش‌پذیر است. (درست)

عکس: هر عدد صحیحی که بر ۴ بخش‌پذیر باشد بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر است. (نادرست. عدد صحیح ۸ را درنظر بگیرید.)

وارون: اگر عدد صحیحی بر ۱۲ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه بر ۴ بخش‌پذیر نیست. (نادرست. عدد صحیح ۸ را درنظر بگیرید.)

عکس نقیض: اگر عدد صحیحی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد آنگاه بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست. (درست)

ج) گزاره. $\forall x[(x^۲ + ۴x - ۲۱ > ۰) \to [(x > ۳) \vee (x < -۷)]]$ (درست)

عکس: $\forall x[[(x > ۳) \vee (x < -۷)] \to (x^۲ + ۴x - ۲۱ > ۰)]$ (درست)

وارون: $\forall x[(x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰) \to [(x \leq ۳) \wedge (x \geq -۷)]]$ یا

$\forall x[(x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰) \to (-۷ \leq x \leq ۳)]$ (درست)

عکس نقیض: $\forall x[[(x \leq ۳) \wedge (x \geq -۷)] \to (x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰)]$ یا

$\forall x[(-۷ \leq x \leq ۳) \to (x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰)]$ (درست)

۲۰. برای هر یک از پاسخهای زیر این امکان وجود دارد که جای استلزام مفروض و عکس نقیض آن را عوض کرد. اگر این کار انجام گیرد، باید جای عکس و وارون متناظر را نیز عوض کرد.

الف) استلزام: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۲۱ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۷ بخش‌پذیر است. (درست)

عکس: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۷ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۲۱ بخش‌پذیر است. (نادرست. عدد صحیح مثبت ۱۴ را درنظر بگیرید.)

وارون: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۲۱ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه بر ۷ بخش‌پذیر نیست. (نادرست. عدد صحیح مثبت ۱۴ را درنظر بگیرید.)

عکس نقیض: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه بر ۲۱ بخش‌پذیر نیست. (درست)

ب) استلزام: اگر شخصی خوشحال باشد، آنگاه یک کیف بزرگ حاوی اوراق بهادار دارد.

عکس: اگر شخصی یک کیف بزرگ حاوی اوراق بهادار داشته باشد، آنگاه این شخص خوشحال است.

وارون: اگر شخصی خوشحال نباشد، آنگاه کیف بزرگی حاوی اوراق بهادار ندارد.

عکس نقیض: اگر شخصی کیف بزرگی حاوی اوراق بهادار نداشته باشد، آنگاه این شخص خوشحال نیست.

پ) استلزام: اگر ماری مارکبرا باشد، آنگاه این مار خطرناک است.

عکس: اگر ماری خطرناک باشد، آنگاه این مار، مارکبراست.

وارون: اگر ماری مارکبرا نباشد، آنگاه این مار خطرناک نیست.

عکس نقیض: اگر ماری خطرناک نباشد، آنگاه این مار، مارکبرا نیست.

ت) استلزام: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر $z^۲$ حقیقی باشد، آنگاه z حقیقی است. (نادرست. فرض کنید $z = i$.)

عکس: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر z حقیقی باشد، آنگاه $z^۲$ حقیقی است. (درست)

وارون: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر $z^۲$ حقیقی نباشد، آنگاه z حقیقی نیست. (درست)

عکس نقیض: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر z حقیقی نباشد، آنگاه $z^۲$ حقیقی نیست. (نادرست. فرض کنید $z = i$.)

۲۱. الف) درست ب) نادرست پ) نادرست
ت) درست ث) درست ج) نادرست

۲۲. الف) درست ب) نادرست پ) درست
ت) درست ث) درست ج) درست

۲۳. الف) $\forall a \exists b[a + b = b + a = ۰]$

ب) $\exists u \forall a[au = ua = a]$

پ) $\forall a \neq ۰ \exists b[ab = ba = ۱]$

ت) گزارهٔ قسمت (ب) درست باقی می‌ماند، ولی به‌ازای این عالم جدید، گزارهٔ قسمت (پ) دیگر درست نیست.

۲۴. الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۲۵. الف) $\exists x \exists y[(x > y) \wedge (x - y \leq ۰)]$

ب) $\exists x \exists y[(x > ۰) \wedge (y = \log_{۱۰} x) \wedge x \neq ۱۰^y]$

پ) $\exists x \exists y[(x < y) \wedge \forall z[x \geq z \vee z \geq y]]$

ت) $\exists x \exists y[(|x| = |y|) \wedge (y \neq \pm x)]$

ث) $[\forall x \forall y((x > ۰) \wedge (y > ۰))] \wedge [\forall z(xz \leq y)]$

۲۶. الف) (یک) $\forall x[x \neq ۰ \to \exists! y(xy = ۱)]$

(دو) $\forall x \forall y \exists! z(z = x + y)$

(سه) $\forall x \exists! y(y = ۳x + ۷)$

ب) (یک) نادرست (دو) درست

Scanned by CamScanner

پ) (یک) درست (دو) درست

ت) وقتی عالم مورد بحث عبارت باشد از اعداد صحیح ۰، ۱ و ۲، گزارهٔ p درست است. برای عالم متشکل از ۲، ۳ و ۴، این گزاره نادرست است.

۲۷. $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} \neq L \iff \exists \epsilon > ۰ \forall k > ۰ \exists n[(n > k) \wedge |\frac{r}{n} - L| \geq \epsilon]$

بند ۵.۲

۱. گرچه می‌توانیم بنویسیم ۴ + ۴ + ۴ + ۱۶ = ۱ + ۱ + ۱ + ۲۵ = ۲۸، ولی راهی برای بیان ۲۸ به‌صورت مجموع حداکثر سه مجذور کامل وجود ندارد.

۲. گرچه ۱ + ۱ + ۱ = ۳ و ۱ + ۴ = ۵، ولی وقتی به ۷ می‌رسیم مشکلی پیش می‌آید. می‌توانیم بنویسیم ۱ + ۱ + ۱ + ۴ = ۷، ولی نمی‌توانیم ۷ را به‌صورت مجموع سه مجذور کامل یا کمتر بنویسیم. [در مورد عددهای صحیح ۱۵ و ۲۳ نیز مشکل داریم.]

۳. می‌بینیم که

۵۰ = ۲۵ + ۲۵	۴۰ = ۳۶ + ۴	۳۰ = ۲۵ + ۴ + ۱
۵۲ = ۳۶ + ۱۶	۴۲ = ۲۵ + ۱۶ + ۱	۳۲ = ۱۶ + ۱۶
۵۴ = ۲۵ + ۲۵ + ۴	۴۴ = ۳۶ + ۴ + ۴	۳۴ = ۲۵ + ۹
۵۶ = ۳۶ + ۱۶ + ۴	۴۶ = ۳۶ + ۹ + ۱	۳۶ = ۳۶
۵۸ = ۴۹ + ۹	۴۸ = ۱۶ + ۱۶ + ۱۶	۳۸ = ۳۶ + ۱ + ۱

۴.

۲۸ = ۲۳ + ۵	۱۶ = ۱۳ + ۳	۴ = ۲ + ۲
۳۰ = ۱۷ + ۱۳	۱۸ = ۱۳ + ۵	۶ = ۳ + ۳
۳۲ = ۱۹ + ۱۳	۲۰ = ۱۷ + ۳	۸ = ۳ + ۵
۳۴ = ۱۷ + ۱۷	۲۲ = ۱۷ + ۵	۱۰ = ۵ + ۵
۳۶ = ۱۹ + ۱۷	۲۴ = ۱۷ + ۷	۱۲ = ۷ + ۵
۳۸ = ۱۹ + ۱۹	۲۶ = ۱۹ + ۷	۱۴ = ۷ + ۷

۵. الف) عدد حقیقی π عددی صحیح نیست.

ب) سپیده نظام طبقه‌بندی کتابخانهٔ ملی را می‌داند.

پ) همهٔ مدیران اداری می‌دانند چگونه از اختیارات خود استفاده کنند.

ت) چهارضلعی $MNPQ$ چهار زاویهٔ برابر ندارد.

ث) بهنام از خوردن جگر سیاه اجتناب می‌کند.

۶. الف) معتبر. این استدلال از قاعدهٔ تخصیص و قاعدهٔ قیاس استثنایی نتیجه می‌شود.

ب) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ عکس).

پ) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ وارون).

ت) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ عکس).

۷. الف) وقتی گزارهٔ $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ درست باشد، حداقل یک عنصر مانند c از عالم مورد بحث وجود دارد به‌طوری که $p(c) \vee q(c)$ درست است. بنابراین، ارزش راستی حداقل یکی از دو گزارهٔ $p(c)$ و $q(c)$ برابر با ۱ است؛ پس دستکم یکی از دو گزارهٔ $\exists xp(x)$ و $\exists xq(x)$ درست است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $\exists xp(x) \vee \exists xq(x)$ درست است و $\exists x[p(x) \vee q(x)] \Longrightarrow \exists xp(x) \vee \exists xq(x)$. برعکس، اگر $\exists xp(x) \vee \exists xq(x)$ درست باشد، دراین صورت به‌ازای عنصرهایی مانند a و b از عالم مورد بحث، ارزش راستی دستکم یکی از دو گزارهٔ $p(a)$ و $q(b)$ برابر با ۱ است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنیم ارزش راستی $p(a)$ برابر با ۱ باشد. دراین صورت ارزش راستی $p(a) \vee q(a)$ برابر با ۱ است؛ پس $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ گزارهٔ درستی است و $\exists xp(x) \vee \exists xq(x) \Longrightarrow \exists x[p(x) \vee q(x)]$.

ب) نخست ببینیم چه‌وقت گزارهٔ $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ درست است. این وضعیت زمانی روی می‌دهد که به‌ازای هر a از عالم مورد بحث، $p(a) \wedge q(a)$ درست باشد. دراین صورت به‌ازای هر a از عالم، $p(a)$ (و نیز $q(a)$) درست است؛ پس گزاره‌های $\forall xp(x)$ و $\forall xq(x)$ درست‌اند. بنابراین، گزارهٔ $\forall xp(x) \wedge \forall xq(x)$ درست است و $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Longrightarrow \forall xp(x) \wedge \forall xq(x)$. برعکس، فرض کنیم $\forall xp(x) \wedge \forall xq(x)$ گزارهٔ درستی باشد. دراین صورت هر دو گزارهٔ $\forall xp(x)$ و $\forall xq(x)$ درست‌اند: اکنون فرض کنیم c عنصر دلخواهی از عالم مورد بحث باشد. دراین صورت هر سه گزارهٔ $p(c)$، $q(c)$ و $p(c) \wedge q(c)$ درست‌اند. چون c به دلخواه انتخاب شده بود، نتیجه می‌شود که گزارهٔ $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ درست است و $\forall xp(x) \wedge \forall xq(x) \Longrightarrow \forall x[p(x) \wedge q(x)]$.

۸. الف) فرض کنیم گزارهٔ $\forall xp(x) \vee \forall xq(x)$ درست باشد. همچنین، بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد گزارهٔ $\forall xp(x)$ نیز درست است. دراین صورت به‌ازای هر c از عالم مفروض، $p(c)$ و $p(c) \vee q(c)$ درست‌اند. بنابراین، $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ درست است و $\forall xp(x) \vee \forall xq(x) \Longrightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$.

ب) برای عالم همهٔ اعداد صحیح غیرصفر فرض کنیم

$$p(x) : x > ۰ \quad \text{و} \quad q(x) : x < ۰$$

دراین صورت $\forall xp(x)$ و $\forall xq(x)$ نادرست‌اند؛ پس $\forall xp(x) \vee \forall xq(x)$ نادرست است، درحالی‌که $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ درست است.

۹. (۱) مقدمه

(۲) مقدمه

(۳) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ تخصیص

(۴) مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ تخصیص

(۵) مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۶) مراحل (۵) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۷) مرحلهٔ (۶) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۸) مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۹) مراحل (۷) و (۸) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

Scanned by CamScanner

(۱۰) مرحلهٔ (۹) و قاعدهٔ تعمیم.

۱۰. (۴) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ تخصیص

(۵) مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۶) مقدمه

(۷) مرحلهٔ (۶) و قاعدهٔ تخصیص

(۸) مرحلهٔ (۷) و $\neg q(a) \vee r(a) \Longleftrightarrow q(a) \to r(a)$

(۹) مراحل (۵) و (۸) و قاعدهٔ قیاس استثنایی (یا قاعدهٔ انتزاع)

(۱۰) مقدمه

(۱۱) مرحلهٔ (۱۰) و قاعدهٔ تخصیص

(۱۲) مرحلهٔ (۱۱) و $s(a) \to \neg r(a) \Longleftrightarrow \neg\neg r(a) \to \neg s(a) \Longleftrightarrow r(a) \to \neg s(a)$

(۱۳) مراحل (۹) و (۱۲) و قاعدهٔ قیاس استثنایی (یا قاعدهٔ انتزاع)

۱۱. گزاره‌های باز زیر را درنظر بگیرید:

$w(x)$: x برای این اتحادیهٔ اعتباری کار می‌کند

$\ell(x)$: x فرمهای وام را می‌نویسد

$c(x)$: x کوبول می‌داند

$q(x)$: x کواترو می‌داند

فرض کنیم r رامین و i یاسمن را نشان دهد.

استدلال مفروض به‌صورت زیر در قالب نمادها بیان می‌شود:

$$\begin{array}{l} \forall x[w(x) \to c(x)] \\ \forall x[(w(x) \wedge \ell(x)) \to q(x)] \\ w(r) \wedge \neg q(r) \\ q(i) \wedge \neg c(i) \\ \hline \therefore \neg \ell(r) \wedge \neg w(i) \end{array}$$

	مراحل	دلایل
(۱)	$\forall x[w(x) \to c(x)]$	مقدمه
(۲)	$q(i) \wedge \neg c(i)$	مقدمه
(۳)	$\neg c(i)$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۴)	$w(i) \to c(i)$	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ تخصیص
(۵)	$\neg w(i)$	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۶)	$\forall x[(w(x) \wedge \ell(x)) \to q(x)]$	مقدمه
(۷)	$w(r) \wedge \neg q(r)$	مقدمه

(۸)	$\neg q(r)$	مرحلهٔ (۷) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۹)	$(w(r) \wedge \ell(r)) \to q(r)$	مرحلهٔ (۶) و قاعدهٔ تخصیص
(۱۰)	$\neg(w(r) \wedge \ell(r))$	مراحل (۸) و (۹) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۱۱)	$w(r)$	مرحلهٔ (۷) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۱۲)	$\neg w(r) \vee \neg \ell(r)$	مرحلهٔ (۱۰) و قانون دمورگان
(۱۳)	$\neg \ell(r)$	مراحل (۱۱)، (۱۲) و قاعدهٔ قیاس فصلی
(۱۴)	$\therefore \neg \ell(r) \wedge \neg w(i)$	مراحل (۱۳) و (۵) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

۱۲. الف) برهان: چون k و ℓ هر دو زوج‌اند می‌توان نوشت $k = 2c$ و $\ell = 2d$، که در آن c و d اعدادی صحیح‌اند. این مطلب از تعریف ۸.۲ نتیجه می‌شود. دراین صورت، بنابر قانون پخش‌پذیری ضرب نسبت به جمع برای اعداد صحیح، داریم $k + \ell = 2c + 2d = 2(c + d)$. در نتیجه، چون $c + d$ عددی صحیح است، بنابر تعریف ۸.۲ از $k + l = 2(c + d)$ معلوم می‌شود که $k + \ell$ زوج است.

ب) برهان: مانند قسمت (الف)، می‌نویسیم $k = 2c$ و $\ell = 2d$، که در آن c و d دو عدد صحیح‌اند. دراین صورت، بنابر قوانین تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری ضرب اعداد صحیح، داریم $k\ell = (2c)(2d) = 2(2cd)$، که در آن $2cd$ عددی صحیح است. چون $2cd$ عددی صحیح است، از تعریف ۸.۲ نتیجه می‌شود که $k\ell$ زوج است.

۱۳. الف) عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند k و ℓ، اگر k و ℓ هر دو فرد نباشند، آنگاه $k\ell$ فرد نیست. یا، به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند k و ℓ، اگر حداقل یکی از دو عدد k و ℓ زوج باشد، آنگاه $k\ell$ زوج است.

برهان: می‌توانیم بدون کاستن از کلیت فرض کنیم k زوج است. دراین صورت، با توجه به تعریف ۸.۲، به‌ازای عدد صحیحی مانند c داریم $k = 2c$. بنابر قانون شرکت‌پذیری ضرب اعداد صحیح داریم $k\ell = (2c)\ell = 2(c\ell)$ و $k\ell$ عددی صحیح است. در نتیجه، باز هم بنابر تعریف ۸.۲، $k\ell$ زوج است.

[توجه داشته باشید که این نتیجه نیازی به هیچ فرضی دربارهٔ عدد صحیح ℓ ندارد.]

ب) عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح k و ℓ، اگر k و ℓ هر دو زوج یا هر دو فرد نباشند، آنگاه $k + \ell$ فرد است. یا، به‌ازای هر دو عدد صحیح k و ℓ، اگر یکی از دو عدد k و ℓ فرد و دیگری زوج باشد، آنگاه $k + \ell$ فرد است.

برهان: می‌توانیم بدون کاستن از کلیت فرض کنیم k زوج و ℓ فرد است. دراین صورت، بنابر تعریف ۸.۲، می‌توان نوشت $k = 2c$ و $\ell = 2d + 1$، که در آن c و d دو عدد صحیح‌اند. اکنون می‌بینیم که، بنابر قانون شرکت‌پذیری جمع و قانون پخش‌پذیری ضرب نسبت به جمع در اعداد صحیح، داریم

$$k + \ell = 2c + (2d + 1) = 2(c + d) + 1$$

که در آن $c + d$ عددی صحیح است. با توجه به تعریف ۸.۲ می‌بینیم که از $k + \ell = 2(c + d) + 1$ نتیجه می‌شود که $k + \ell$ فرد است.

۱۴. برهان: چون n فرد است، با توجه به تعریف ۸.۲، به‌ازای عدد صحیحی مانند a می‌توانیم بنویسیم $n = 2a + 1$.

Scanned by CamScanner

دراین صورت

$$n^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$$

که در آن $2a^2 + 2a$ عددی صحیح است. باز هم از تعریف ۸.۲ نتیجه می‌شود که n^2 فرد است.

۱۵. برهان: فرض کنیم به‌ازای عدد صحیحی مانند n، n^2 فرد باشد ولی n فرد نباشد. دراین صورت n زوج است و بنابر تعریف ۸.۲، به‌ازای عدد صحیحی مانند a می‌توانیم بنویسیم $n = 2a$. در نتیجه، بنابر قوانین تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری ضرب اعداد صحیح، داریم

$$n^2 = (2a)^2 = (2a)(2a) = (2 \times 2)(a \times a)$$

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $n^2 = 2(2a^2)$، که در آن $2a^2$ عددی صحیح است. این به معنی آن است که n^2 زوج است. به این ترتیب، به تناقض رسیده‌ایم، زیرا اکنون n^2 هم فرد است (فرض اولیه) و هم زوج است. این تناقض از این فرض نادرست که n فرد نیست به‌دست آمد. بنابراین، به‌ازای هر عدد صحیح مانند n نتیجه می‌گیریم که

$$(n \text{ فرد است}) \Longrightarrow (n^2 \text{ فرد است})$$

۱۶. دراینجا باید دو نتیجه را ثابت کنیم: (یک) اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است؛ و (دو) اگر n زوج باشد، آنگاه n^2 زوج است.

برهان (یک): با استفاده از روش مبتنی‌بر عکس نقیض، فرض کنیم n زوج نباشد، یعنی فرض کنیم n فرد باشد. دراین صورت، به‌ازای عدد صحیحی مانند a، داریم

$$n^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$$

که در آن $2a^2 + 2a$ عددی صحیح است. بنابراین، n^2 فرد است (یا، n^2 زوج نیست).

برهان (دو): اگر n زوج باشد، دراین صورت به‌ازای عدد صحیحی مانند c داریم $n = 2c$. بنابراین، با توجه به قوانین شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری ضرب اعداد صحیح، داریم

$$n^2 = (2c)^2 = (2c)(2c) = 2\big(c(2c)\big) = 2\big((c \cdot 2)c\big) = 2\big((2c)c\big) = 2(2c^2)$$

چون $2c^2$ عددی صحیح است، پس n^2 زوج است.

۱۷. برهان:

(۱) چون n فرد است، به‌ازای عدد صحیحی مانند a داریم $n = 2a + 1$. دراین صورت

$$n + 11 = (2a+1) + 11 = 2a + 12 = 2(a+6)$$

که در آن $a + 6$ عددی صحیح است. از تعریف ۸.۲، نتیجه می‌شود که $n + 11$ زوج است.

(۲) اگر $n + 11$ زوج نباشد، دراین صورت فرد است و به‌ازای عدد صحیحی مانند b داریم $n + 11 = 2b + 1$. بنابراین،

$$n = (2b+1) - 11 = 2b - 10 = 2(b-5)$$

که در آن $b - 5$ عددی صحیح است. از تعریف ۸.۲ نتیجه می‌شود که n زوج است، یعنی n فرد نیست.

(۳) دراین حالت، علاوه‌بر فرض مسأله، یعنی فرد بودن n، فرض کنیم که $n + 11$ زوج نباشد. بنابراین، $n + 11$ فرد است. پس به‌ازای عدد صحیحی مانند b می‌توانیم بنویسیم $n + 11 = 2b + 1$. دراین صورت، به‌ازای عدد صحیح $b - 5$ داریم $n = 2(b-5)$. اکنون از تعریف ۸.۲ نتیجه می‌شود که n زوج است. ولی اکنون که n هم زوج است (این را ثابت کردیم) هم فرد (بنابر فرض اولیه) به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین، فرض ما نادرست بوده است و نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر عدد صحیح فرد مانند n، $n + 11$ زوج است.

۱۸. برهان: [دراینجا برهان مستقیم را ارائه می‌کنیم.] چون m و n مجذورکامل‌اند، می‌توانیم به‌ازای دو عدد صحیح (مثبت) مانند a و b بنویسیم $m = a^2$ و $n = b^2$. دراین صورت، بنابر قوانین شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری ضرب اعداد صحیح، می‌بینیم که

$$mn = (a^2)(b^2) = (aa)(bb) = \big((aa)b\big)b = \big(a(ab)\big)b = \big((ab)a\big)b = (ab)(ab) = (ab)^2$$

بنابراین، mn نیز مجذورکامل است.

۱۹. این نتیجه در حالت کلی درست نیست. مثلاً، $m = 4 = 2^2$ و $n = 1 = 1^2$ دو عدد صحیح مثبت و مجذورکامل‌اند، ولی $m + n = 2^2 + 1^2 = 5$ مجذورکامل نیست.

۲۰. فرض کنیم $m = 9 = 3^2$ و $n = 16 = 4^2$. دراین صورت $m + n = 25 = 5^2$. پس نتیجه درست است.

۲۱. برهان: برای اثبات نتیجهٔ موردنظر، درستی عکس نقیض آن را (که با خود حکم منطقاً هم‌ارز است) ثابت خواهیم کرد.

نقیض حکم مفروض را درنظر می‌گیریم؛ یعنی فرض کنیم $x < 50$ و $y < 50$. دراین صورت از $x < 50$ و $y < 50$ نتیجه می‌شود که $x + y < 50 + 50 = 100$ و به این ترتیب، نقیض فرض به‌دست می‌آید. اکنون از این روش غیرمستقیم اثبات (یعنی روش مبتنی‌بر عکس نقیض) نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

تمرینات تکمیلی

۱.

p	q	r	s	$q \wedge r$	$\neg(s \vee r)$	$\overbrace{[(q \wedge r) \to \neg(s \vee r)]}^{t}$	$p \leftrightarrow t$
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰

Scanned by CamScanner

۲. الف)

p	q	r	$p \to q$	$\neg p \to r$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) اگر p، آن‌گاه q، در غیراین صورت r.

۳. الف)

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \to r$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) انتساب ارزشهای راستی ۰ : p، ۰ : q و ۰ : r به ارزش راستی ۱ برای $[p \to (q \to r)]$ و ۰ برای $[(p \to q) \to r]$ منجر می‌شود. در نتیجه، این گزاره‌ها منطقاً هم‌ارز نیستند.

۴. $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ ، پس

$$\neg(p \to q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

۵. چون $p \vee \neg q \Longleftrightarrow \neg\neg p \vee \neg q \Longleftrightarrow \neg p \to \neg q$ ، می‌توانیم گزارهٔ مفروض را به‌صورت زیر بیان کنیم:

(۱) اگر آرین درسهای پیانو را تمرین نکند، آن‌گاه نمی‌تواند به سینما برود.

چون $p \vee \neg q \Longleftrightarrow \neg q \vee p \Longleftrightarrow q \to p$ ، می‌توانیم گزارهٔ مفروض را به‌صورت زیر نیز بیان کنیم:

(۲) اگر آرین قرار است به سینما برود باید درسهای پیانو را تمرین کند.

۶. الف) $p \to (q \wedge r)$

عکس: $(q \wedge r) \to p$

وارون: $[\neg p \to (\neg q \vee \neg r)] \Longleftrightarrow [\neg p \to \neg(q \wedge r)]$

عکس نقیض: $[\neg(q \wedge r) \to \neg p] \Longleftrightarrow [(\neg q \vee \neg r) \to \neg p]$

ب) $(p \vee q) \to r$

عکس: $r \to (p \vee q)$

وارون: $[\neg(p \vee q) \to \neg r] \Longleftrightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r]$

عکس نقیض: $[\neg r \to \neg(p \vee q)] \Longleftrightarrow [\neg r \to (\neg p \wedge \neg q)]$

۷. الف) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (F_{\circ} \vee p) \wedge p$

ب) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (F_{\circ} \vee p) \wedge p$

$\Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge p)$ — $F_{\circ} \vee p \Longleftrightarrow p$

$\Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge p$ — قانون خودتوانی $\wedge$

$\Longleftrightarrow p \wedge (\neg p \vee \neg q)$ — قانون تعویض‌پذیری $\wedge$

$\Longleftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$ — قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$

$\Longleftrightarrow F_{\circ} \vee (p \wedge \neg q)$ — $p \wedge \neg p \Longleftrightarrow F_{\circ}$

$\Longleftrightarrow p \wedge \neg q$ — $F_{\circ}$ عنصر همانی برای $\vee$ است

۸. الف) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge s)$

ب) چون $\neg p \vee (q \wedge \neg r \wedge s) \Longleftrightarrow p \to (q \wedge \neg r \wedge s)$ ، بنابراین،

$$[p \to (q \wedge \neg r \wedge s)]^d \Longleftrightarrow \neg p \wedge (q \vee \neg r \vee s)$$

پ) $[(p \vee F_{\circ}) \vee (q \wedge T_{\circ})] \wedge [r \vee s \vee F_{\circ}]$

۹. الف) عکس نقیض ب) وارون پ) عکس نقیض

ت) وارون ث) وارون ج) عکس نقیض

چ) عکس

۱۰. الف)

p	q	r	$q \to \neg r$	$p \wedge (q \to \neg r)$	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee r$	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰

با توجه به نتایج ستونهای ۵ و ۸ از این جدول، نتیجه می‌شود که

$$[p \wedge (q \to \neg r)] \Longleftrightarrow [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)]$$

Scanned by CamScanner

ب)

	دلایل
$p \wedge (q \to \neg r)$	
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee \neg r)$	$(q \to \neg r) \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$ و قانون دوم جایگذاری.
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg r)$	قانون نقیض مضاعف
$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)$	قانون دمورگان

۱۱.

p	q	r	$p \uparrow q$	$(p \uparrow q) \uparrow r$	$q \uparrow r$	$p \uparrow (q \uparrow r)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱

با توجه به ستونهای ۵ و ۷ می‌بینیم که $p \uparrow (q \uparrow r) \not\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow r$

۱۲. الف)

p	q	r	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow r$	$q \downarrow r$	$p \downarrow (q \downarrow r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

با توجه به ستونهای ۵ و ۷ می‌بینیم که $p \downarrow (q \downarrow r)$ و $(p \downarrow q) \downarrow r$ منطقاً هم‌ارز نیستند.

ب)

p	q	r	$q \downarrow r$	$p \uparrow (q \downarrow r)$	$p \uparrow q$	$p \uparrow r$	$(p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow r)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱

نتایج ستونهای ۵ و ۸ نشان می‌دهند که $p \mid (q \mid r) \not\Leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid r)$

پ)

p	q	r	$q \mid r$	$p \mid (q \mid r)$	$p \mid q$	$p \mid r$	$(p \downarrow q) \mid (p \downarrow r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱

از ستونهای ۵ و ۸ در این جدول ارزش نتیجه می‌شود که $p \mid (q \mid r) \Leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid r)$

۱۳. (۱)

p	q	r	$p \xrightarrow{1} q$	$q \xrightarrow{1} r$	$(p \xrightarrow{1} q) \wedge (q \xrightarrow{1} r)$	$p \xrightarrow{1} r$	$[(p \xrightarrow{1} q) \wedge (q \xrightarrow{1} r)] \xrightarrow{1} (p \xrightarrow{1} r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

Scanned by CamScanner

جدول بالا نشان می‌دهد که گزارهٔ $[(p \xrightarrow{1} q) \wedge (q \xrightarrow{1} r)] \xrightarrow{1} (p \xrightarrow{1} r)$ راستگو نیست.

(۲) انتساب ارزشهای راستی $p : 0$، $q : 1$ و $r : 0$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت ارزشهای راستی زیر را می‌یابیم:

$$p \xrightarrow{2} q : 0 \qquad q \xrightarrow{2} r : 0 \qquad p \xrightarrow{2} r : 1$$

$$[(p \xrightarrow{2} q) \wedge (q \xrightarrow{2} r)] \xrightarrow{2} (p \xrightarrow{2} r) : 0$$

درنتیجه، گزارهٔ $[(p \xrightarrow{2} q) \wedge (q \xrightarrow{2} r)] \xrightarrow{2} (p \xrightarrow{2} r)$ راستگو نیست.

(۳) برای آخرین حالت فرض کنیم ارزش راستی هریک از سه گزارهٔ p، q و r برابر با 0 باشد. دراین صورت هر سه گزارهٔ $(p \xrightarrow{3} q)$، $(q \xrightarrow{3} r)$ و $(p \xrightarrow{3} r)$ یک ارزش راستی دارند که آن هم 0 است. بنابراین، ارزش راستی گزارهٔ $[(p \xrightarrow{3} q) \wedge (q \xrightarrow{3} r)] \xrightarrow{3} (p \xrightarrow{3} r)$ نیز 0 است؛ پس این گزاره راستگو نیست.

۱۴. اثبات با برهان خلف

(۱)	$\neg(p \to s)$	مقدمه (نقیض حکم)
(۲)	$p \wedge \neg s$	مرحلهٔ (۱)، $(p \to s) \iff \neg p \vee s$، قوانین دمورگان و قانون نقیض مضاعف
(۳)	p	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۴)	$p \to q$	مقدمه
(۵)	q	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ انتزاع
(۶)	r	مقدمه
(۷)	$q \wedge r$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۸)	$(q \wedge r) \to s$	مقدمه
(۹)	s	مراحل (۷) و (۸) و قاعدهٔ انتزاع
(۱۰)	$\neg s$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۱۱)	$s \wedge \neg s (\iff F_0)$	مراحل (۹) و (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۲)	$\therefore p \to s$	مراحل (۱) و (۱۱) و روش اثبات به‌وسیلهٔ برهان خلف

روش ۲

(۱)	$(q \wedge r) \to s$	مقدمه
(۲)	$r \to (q \to s)$	$r \to (q \to s) \iff (q \wedge r) \to s$
(۳)	r	مقدمه
(۴)	$q \to s$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۵)	$p \to q$	مقدمه
(۶)	$\therefore p \to s$	مراحل (۴) و (۵) و قانون قیاس صوری

روش ۳

(۱)	$(q \wedge r) \to s$	مقدمه
(۲)	$\neg s \to \neg(q \wedge r)$	مرحلهٔ (۱) و به‌ازای هر دو گزارهٔ اولیهٔ u و v، $u \to v \iff \neg v \to \neg u$ و قاعدهٔ اول جایگذاری.
(۳)	$s \vee \neg(q \wedge r)$	مرحلهٔ (۲) و به‌ازای هر دو گزارهٔ اولیهٔ u و v، $u \to v \iff \neg u \vee v$ و قاعدهٔ اول جایگذاری. همچنین، $\neg\neg s \iff s$.
(۴)	$(s \vee \neg q) \vee \neg r$	مرحلهٔ (۳)، قانون دمورگان و قانون شرکت‌پذیری $\vee$
(۵)	r	مقدمه
(۶)	$s \vee \neg q$	مراحل (۴) و (۵) و قانون قیاس فصلی
(۷)	$q \to s$	مرحلهٔ (۶) و $s \vee \neg q \iff \neg q \vee s \iff q \to s$
(۸)	$p \to q$	مقدمه
(۹)	$\therefore p \to s$	مراحل (۷) و (۸) و قانون قیاس صوری

روش ۴ (دراین روش فرض می‌کنیم p مقدمه باشد و s را به عنوان نتیجه به‌دست می‌آوریم.)

(۱)	p	مقدمه(ی فرضی)
(۲)	$p \to q$	مقدمه
(۳)	q	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۴)	r	مقدمه
(۵)	$q \wedge r$	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۶)	$(q \wedge r) \to s$	مقدمه
(۷)	$\therefore s$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

۱۵. الف)

p	q	r	$p \veebar q$	$(p \veebar q) \veebar r$	$q \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱

از نتایج ستونهای (۵) و (۷) نتیجه می‌شود که $[p \veebar (q \veebar r)] \iff [(p \veebar q) \veebar r]$

Scanned by CamScanner

ب) گزاره‌های مفروض منطقاً هم‌ارز نیستند. انتساب ارزشهای راستی ۱ : p، ۰ : q و ۰ : r مثالی نقض به‌دست می‌دهد.

پ) اگر ارزش راستی هر سه گزارهٔ p، q و r برابر با ۰ باشد، آنگاه $p \to (q \veebar r)$ درست و $(p \to q) \veebar (p \to r)$ نادرست است؛ پس استلزام مفروض استلزام منطقی نیست.

۱۶. الف) جمعه هوا سرد است : p

آریا نیم‌تنهٔ چرمی خود را می‌پوشد : q

جیبهای نیم‌تنهٔ چرمی تعمیر شده‌اند : r

$$\begin{array}{l} p \to (r \to q) \\ p \wedge \neg r \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

این استدلال نامعتبر است. انتساب ارزشهای راستی ۱ : p، ۱ : q، ۰ : r و ۱ : s یکی از مثالهای نقض ممکن را به‌دست می‌دهد.

ب) قرار داد به سر خواهد رسید : p

در ماه بهمن پنجره‌های جدید خانه نصب می‌شوند : q

ریحانه روز اول اسفند به خانهٔ جدید نقل‌مکان می‌کند : r

ریحانه اجارهٔ اسفند آپارتمان خود را می‌پردازد : s

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \to r \\ \neg r \to s \\ q \vee s \\ \hline \therefore \neg s \end{array}$$

این استدلال نامعتبر است. انتساب ارزشهای راستی ۰ : p، ۰ : q، ۰ : r و ۱ : s یکی از مثالهای نقض ممکن را به‌دست می‌دهد.

۱۷. الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) درست

ث) درست ج) نادرست چ) نادرست ح) نادرست

خ) نادرست د) درست

۱۸. الف) $\forall a \exists b\ 0 < b < a$ ب) $\exists! a\ a^2 = a$ پ) $\forall a \exists! b\ ab = ba = 1$

۳

نظریهٔ مجموعه‌ها

بند ۱.۳

۱. همهٔ آنها یک مجموعه‌اند.

۲. همهٔ گزاره‌ها، جز گزارهٔ قسمت (ج)، درست‌اند.

۳. همهٔ گزاره‌ها، جز گزاره‌های قسمتهای (ب) و (ت)، درست‌اند.

۴. همهٔ گزاره‌ها، جز گزاره‌های قسمتهای (الف) و (ب)، درست‌اند.

۵. الف) $\{0, 2\}$

ب) $\left\{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 5\frac{1}{5}, 7\frac{1}{7}\right\}$

پ) $\{0, 2, 12, 36, 80\}$

ت) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{56}, \frac{1}{90}, \frac{1}{132}\right\}$

۶. الف) درست ب) درست پ) درست

ت) نادرست ث) درست ج) نادرست

۷. الف) $\forall x\ [x \in A \to x \in B] \wedge \exists x\ [x \in B \wedge x \notin A]$

ب) $\exists x\ [x \in A \wedge x \notin B] \vee \forall x\ [x \notin B \vee x \in A]$

۸. الف) $2^7 - 128$

Scanned by CamScanner

۸

اصل شمول و طرد

بند ۱.۸

۱. الف) عدد n بر ۲ بخش‌پذیر است: c_1

عدد n بر ۳ بخش‌پذیر است: c_2

عدد n بر ۵ بخش‌پذیر است: c_3

$$N(c_1) = \left\lfloor \frac{2000}{2} \right\rfloor = 1000 \text{ ،} N(c_2) = \left\lfloor \frac{2000}{3} \right\rfloor = 666 \text{ ،} N(c_3) = \left\lfloor \frac{2000}{5} \right\rfloor = 400$$

$$N(c_1c_2) = \left\lfloor \frac{2000}{2\times 3} \right\rfloor = 333 \text{ ،} N(c_2c_3) = \left\lfloor \frac{2000}{3\times 5} \right\rfloor = 133 \text{ ،} N(c_1c_3) = \left\lfloor \frac{2000}{2\times 5} \right\rfloor = 200$$

و $N(c_1c_2c_3) = \left\lfloor \frac{2000}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 66$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3) = 2000 - (1000 + 666 + 400) + (333 + 200 + 133) - 66 = 534$$

ب) فرض می‌کنیم c_1، c_2 و c_3 مانند قسمت (الف) باشند. فرض می‌کنیم c_4 این شرط را نشان دهد که n بر ۷ بخش‌پذیر است. در این صورت $N(c_4) = 285$، $N(c_1c_4) = 142$، $N(c_2c_4) = 95$، $N(c_3c_4) = 57$، $N(c_1c_2c_4) = 47$، $N(c_1c_3c_4) = 28$، $N(c_2c_3c_4) = 19$ و $N(c_1c_2c_3c_4) = 9$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = 2000 - (1000 + 666 + 400 + 285) + (333 + 200 + 133 + 142 + 95 + 57) - (66 + 47 + 28 + 19) + 9 = 458$$

پ) $534 - 458 = 76$

۲. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$

الف) $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 4$. $\binom{19-1+4}{19} = \binom{22}{19}$

ب) به‌ازای $1 \le i \le 4$ فرض می‌کنیم $c_i : x_i \ge 84$. در این صورت

$$N(c_i) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 : \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11}, 1 \le i \le 4$$

$$N(c_i c_j) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 : \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3}, 1 \le i < j \le 4$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = N - S_1 + S_2 = \binom{22}{19} - 4\binom{14}{11} + 6\binom{6}{3}$$

پ) تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$، که در آن $0 \le x_1 \le 5$، $0 \le x_2 \le 6$، $0 \le x_3 \le 7$ و $3 \le x_4 \le 8$، برابر است با تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$، که در آن $0 \le x_1 \le 5$، $0 \le x_2 \le 6$، $0 \le x_3 \le 4$ و $0 \le x_4 \le 5$. به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ شرط c_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1 : x_1 \ge 6,\ c_2 : x_2 \ge 7,\ c_3 : x_3 \ge 5 \text{ و } c_4 : x_4 \ge 6$$

در این صورت $N = \binom{13+4-1}{13} = \binom{16}{13}$،

$$N(c_1), N(c_2) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 : \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$$

$$N(c_3) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 : \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$$

$$N(c_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 : \binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8}$$

$$N(c_1c_2) = 1$$

$$N(c_1c_3) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 : \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$$

$$N(c_1c_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 : \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1}$$

$$N(c_2c_3) = \binom{4}{1}, N(c_2c_4) = 1, N(c_3c_4) = \binom{5}{2}$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{16}{13} - \left[2\binom{10}{7} + \binom{9}{6} + \binom{11}{8}\right] + 2\left[1 + \binom{4}{1} + \binom{5}{2}\right]$$

۳. فرض می‌کنیم c_1 بر این شرط دلالت کند که این ۱۱ حرف شامل دو حضور متوالی جفت IN باشد. شرطهای c_2، c_3، c_4 و c_5 و c_6 را نیز، به ترتیب، برای حضور جفتهای متوالی NI، IO، OI، NO و ON تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$N = S_0 = \frac{11!}{(2!)^3}$$

$$N(c_1) = \frac{9!}{(2!)^3},\ S_1 = \binom{6}{1}\left[\frac{9!}{(2!)^3}\right]$$

$$N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_5) = N(c_3c_4) = N(c_3c_5) = N(c_4c_6) =$$

$$N(c_5c_6) = 0,\ N(c_1c_2) = \frac{7!}{2!},\ S_2 = 6 \times \frac{7!}{2!},\ S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$$

در نتیجه، تعداد ترتیبهایی که در شرطهای مفروض صدق می‌کنند برابر است با

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5\bar{c}_6) = S_0 - S_1 + S_2 = \frac{11!}{(2!)^3} - \binom{6}{1}\left[\frac{9!}{(2!)^3}\right] + 6 \times \frac{7!}{2!}$$

$$= 49896000 - 5443200 + 151200 = 44604000$$

۴. تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داشته باشیم $-5 \le x_i \le 10$، برابر است با تعداد جوابهای صحیح $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 39$، $0 \le y_i \le 15$. به‌ازای هر $1 \le i \le 4$، فرض می‌کنیم $c_i : y_i \ge 16$ در این صورت

$$N(c_i),\ 1 \le i \le 4 : y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 23 : \binom{4+23-1}{23} = \binom{26}{23}$$

$$N(c_ic_j),\ 1 \le i < j \le 4 : y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 : \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{42}{39} - \binom{4}{1}\binom{26}{23} + \binom{4}{2}\binom{10}{7}$$

۵. فرض می‌کنیم x (در مبنای ۱۰) به‌صورت $x_1x_2\ldots x_7$ نوشته شود. در این صورت، پاسخ مسأله عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 31$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 7$ داریم $0 \le x_i \le 9$.

اگر $1 \le j \le 7$، فرض می‌کنیم c_j بر این شرط دلالت کند که $x_1, x_2, \ldots, x_7$ یک جواب صحیح $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 31$ است که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 7$، $x_i \ge 0$ ولی $x_j > 9$ (یا $x_j \ge 10$).

$N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح $y_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7 = 21$ است، که در آن $y_1 \ge 0$ و به‌ازای هر $2 \le i \le 7$، $x_i \ge 0$. در این صورت $N(c_1) = \binom{27}{21}$ و $S_1 = \binom{7}{1}\binom{27}{21}$.

$N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح $y_1 + y_2 + x_3 + \cdots + x_7 = 11$ است، که در آن $y_1, y_2 \ge 0$ و به‌ازای هر $3 \le i \le 7$، $x_i \ge 0$. می‌بینیم که $N(c_1c_2) = \binom{17}{11}$ و $S_2 = \binom{7}{2}\binom{17}{11}$. به‌همین ترتیب، ملاحظه می‌کنیم که $S_3 = \binom{7}{3}\binom{7}{1}$ و $S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = 0$. چون $N = S_0 = \binom{27}{21}$، پس

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\ldots\bar{c}_7) = \binom{27}{21} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}\binom{7}{1}$$

۶. الف) در اینجا در جستجوی تعداد جوابهای صحیح (نامنفی)

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{12} = 80$$

هستیم که در آن، به‌ازای هر $1 \le i \le 12$، $0 \le y_i \le 15$. برای تعیین نتیجهٔ مطلوب، اصل شمول و طرد

Scanned by CamScanner

را به‌کار می‌بریم. به‌ازای $1 \le j \le 12$، فرض می‌کنیم c_j بر شرط زیر دلالت کند:

$N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح (نامنفی) $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{12} = 64$ است. بنابراین $N(c_1) = \binom{12+62-1}{62} = \binom{75}{62}$ و $S_1 = \binom{12}{1}\binom{76}{62}$.

$N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح (نامنفی) $y_1' + y_2' + y_3 + \cdots + y_{12} = 48$ است. درنتیجه $N(c_1c_2) = \binom{12+28-1}{28} = \binom{59}{28}$ و $S_2 = \binom{12}{2}\binom{59}{28}$.

به‌همین ترتیب می‌بینیم که

$$N(c_1c_2c_3) = \binom{12+32-1}{32} = \binom{43}{32} \qquad S_3 = \binom{12}{3}\binom{43}{32}$$

$$N(c_1c_2c_3c_4) = \binom{12+16-1}{16} = \binom{27}{16} \qquad S_4 = \binom{12}{4}\binom{27}{16}$$

$$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = \binom{12+0-1}{0} = \binom{11}{0} \qquad S_5 = \binom{12}{5}\binom{11}{0}$$

و $S_6 = S_7 = S_8 = \cdots = S_{11} = S_{12} = 0$.

بنابراین، پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\binom{91}{80} - \binom{12}{1}\binom{75}{64} + \binom{12}{2}\binom{59}{48} - \binom{12}{3}\binom{43}{32} + \binom{12}{4}\binom{27}{16} - \binom{12}{5}\binom{11}{0}$$

ب) در اینجا با واحدهای ۵ امتیازی سر و کار داریم. بنابراین، در جستجوی تعداد طرقی برای امتیاز دادن هستیم که در آن، به هر پرسش دست‌کم ۲ امتیاز (از ۵ امتیاز)، ولی نه بیشتر از ۵ امتیاز، داده شود. به این ترتیب، پاسخ مطلوب عبارت است از تعداد جوابهای صحیح (نامنفی) $z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{12} = 16$ که در آن، به‌ازای هر $1 \le i \le 12$ داریم $0 \le z_i \le 3$ (۱۶، تعداد واحدهای ۵ امتیازی است). با محاسبه‌ای نظیر محاسبهٔ قسمت (الف) می‌بینیم که پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\binom{12+16-1}{16} - \binom{12}{1}\binom{12+12-1}{12} + \binom{12}{2}\binom{12+8-1}{8} - \binom{12}{3}\binom{12+4-1}{4} + \binom{12}{4}\binom{12+0-1}{0}$$

$$= \binom{27}{16} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{19}{8} - \binom{12}{3}\binom{15}{4} + \binom{12}{4}\binom{11}{0}$$

۷. برای هر یک از توزیعهای این ۱۵ نهال !۱۵ ترتیب وجود دارد. درنتیجه، برای پاسخ دادن به این پرسش باید تعداد جوابهای صحیح مثبت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ را، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $1 \le x_i \le 4$، بدانیم.

تعداد این جوابها برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $0 \le y_i \le 3$. [در اینجا به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ قرار داده‌ایم $y_i + 1 = x_i$]. به‌ازای $1 \le i \le 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$، $y_i \ge 4$ (یا $y_i > 3$) و به‌ازای هر $1 \le j \le 5$ و $j \ne i$، $y_j \ge 0$. در این صورت $N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 6$ است. [در اینجا $z_1 + 4 = y_1$ و به‌ازای هر $2 \le i \le 5$، $z_i = y_i$]. این تعداد برابر است با $\binom{10}{6}$ و بنابراین، $S_1 = \binom{5}{1}\binom{10}{6}$.

اگر $1 \le i < j \le 5$، $N(c_ic_j)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 2$ است. [در اینجا، $w_i + 4 = y_i$، $w_j + 4 = y_j$ و به‌ازای هر $1 \le k \le 5$ و $k \ne i, j$، $w_k = y_k$]. این تعداد برابر است با $\binom{6}{2}$ و بنابراین، $S_2 = \binom{5}{2}\binom{6}{2}$.

محاسبات مشابهی نشان می‌دهد که $S_3 = S_4 = S_5 = 0$ و بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = S_0 - S_1 + S_2 = \binom{5+10-1}{10} - \binom{5}{1}\binom{10}{6} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}$$

$$= \binom{14}{10} - \binom{5}{1}\binom{10}{6} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}$$

درنتیجه، گل‌فروش می‌تواند ۲۵ نهال را با توجه به شرطهای مفروض به

$$(15!)\left[\binom{14}{10} - \binom{5}{1}\binom{10}{6} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}\right]$$

طریق بچیند.

۸. پاسخ مطلوب عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $0 \le x_i \le 3$. به‌ازای $1 \le i \le 4$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که x_1، x_2، x_3، x_4 جوابی است که در آن $x_i \ge 4$. در این صورت $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{12}{9} - \binom{4}{1}\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}$.

۹. فرض می‌کنیم c_1 بر این امر دلالت کند که ترتیب مورد بحث شامل الگوی spin است. همین‌طور فرض می‌کنیم c_2، c_3 و c_4، به ترتیب، شرطهای مربوط به الگوهای game، path و net باشند. در این صورت، $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = 26! - [3(23!) + 24!] - (20! + 21!)$.

۱۰. فرض می‌کنیم a، b، c، d، e و f این شش روستا را نشان دهند. به‌ازای هر $1 \le i \le 6$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که سیستمی از جاده‌های دو طرفه به ترتیب، موجب تنهایی روستای a، b، c، d، e و f می‌شود. دراین صورت

$N(c_1) = 2^{10}$، $S_1 = \binom{6}{1}2^{10}$، $N(c_1c_2) = 2^8$، $S_2 = \binom{6}{2}2^8$، $N(c_1c_2c_3) = 2^6$، $S_3 = \binom{6}{3}2^6$، $N(c_1c_2c_3c_4) = 2^4$، $S_4 = \binom{6}{4}2^4$، $N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^2$، $S_5 = \binom{6}{5}2^2$ و $S_6 = 1$.

بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5\bar{c}_6) = 2^{15} - \binom{6}{1}2^{10} + \binom{6}{2}2^8 - \binom{6}{3}2^6 + \binom{6}{4}2^4 - \binom{6}{5}2^2 + \binom{6}{6}(1)$$

Scanned by CamScanner

۱۱. $[6^8 - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{1}]/6^8$

۱۲. $10^9 - \binom{3}{1}(9^9) + \binom{3}{2}(8^9) - \binom{3}{3}(7^9)$

۱۳. فرض می‌کنیم شرطهای c_1، c_2 و c_3 عبارت باشند از

c_1: هر سه x باهم‌اند، c_2: هر سه y باهم‌اند؛ c_3: هر سه z با هم‌اند. دراین صورت،

$$N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = \frac{7!}{(3!)^3}, N = \frac{9!}{(3!)^3}$$

به‌ازای هر $1 \le i < j \le 3$، $N(c_i c_j) = \frac{5!}{3!}$ و $N(c_1 c_2 c_3) = 3!$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3) = \frac{9!}{(3!)^3} - 3 \times \frac{7!}{(3!)^3} + 3 \times \frac{5!}{3!} - 3!$$

۱۴. در اینجا می‌خواهیم تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ را به‌دست آوریم، که در آن به‌ازای $i = 1, 2, 3, 4$، $1 \le x_i \le 20$.

این تعداد با تعداد جوابهای صحیح

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 46 \qquad (*)$$

که در آن به‌ازای هر $i = 1, 2, 3, 4$، $0 \le y_i \le 19$، یکی است.

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ $(*)$ باشد که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $y_i \ge 0$. دراین صورت $N = S_0 = |S| = \binom{4+26-1}{26} = \binom{29}{26}$. شرطهای c_1، c_2، c_3 و c_4 را دربارهٔ عنصرهای S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به‌ازای هر $i = 1, 2, 3, 4$ شرط c_i برای امر دلالت دارد که $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S$، ولی $y_i > 19$ (یا $y_i \ge 20$).

دراین صورت

$$N(c_i) = \binom{4+26-1}{26} = \binom{29}{26}, \quad 1 \le i \le 4$$

$$N(c_i c_j) = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}, \quad 1 \le i < j \le 4$$

$$N(c_i c_j c_k) = 0, \quad 1 \le i < j < k \le 4$$

و $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$. در نتیجه،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \binom{49}{46} - \binom{4}{1}\binom{29}{26} + \binom{4}{2}\binom{9}{6}$$

$$= 18424 - 4 \times 3654 + 6 \times 84 = 4312$$

بنابراین، احتمال اینکه این انتخاب شامل دست‌کم یک نفر از هر یک از چهار گروه باشد برابر است با $4312/\binom{29}{26} = \frac{4312}{18424} \doteq 0/234$.

۱۵. دراینجا باید تعداد جوابهای صحیح

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

را که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $1 \le x_i \le 6$، بیابیم.

اگر $1 \le i \le 5$، فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که y_1، y_2، y_3، y_4 و y_5 جوابی برای $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$ است به‌طوری که به‌ازای هر $1 \le j \le 5$ و $j \ne i$ داریم $y_j \ge 0$، ولی $y_i \ge 6$. دراین صورت تعداد جوابهای صحیح

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $0 \le y_i \le 5$، برابر است با $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5)$.

دراینجا N تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$ را نشان می‌دهد. این تعداد برابر است با $\binom{19}{15} = \binom{5+15-1}{15}$. [بنابراین، $S_0 = \binom{19}{15}$.]

برای تعیین $N(c_1)$ باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 9$$

را که در آن به‌ازای هر $i \ne 1$ داریم $z_i = y_i$ و $y_1 = z_1 + 6$، بیابیم. در نتیجه، $N(c_1) = \binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9}$ و $S_1 = \binom{5}{1}\binom{13}{9}$.

برای $N(c_1 c_2)$ باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 3$$

را که در آن به‌ازای هر $i = 3, 4, 5$ داریم $w_i = y_i$ و $y_1 = w_1 + 6$ و $y_2 = w_2 + 6$، تعیین کنیم. این تعداد برابر است با $\binom{7}{3} = \binom{5+3-1}{3}$ و درنتیجه، $S_2 = \binom{5}{2}\binom{7}{3}$.

چون $S_3 = S_4 = S_5 = 0$، پس

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = S_0 - S_1 + S_2 = \binom{19}{15} - \binom{5}{1}\binom{13}{9} + \binom{5}{2}\binom{7}{3}$$

$$= 3876 - 5 \times 715 + 10 \times 35$$

$$= 3876 - 3575 + 350 = 651$$

دراینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid 1 \le x_i \le 6 \text{ ، } 1 \le i \le 5 \text{ به‌ازای هر}\}$.

چون $|S| = 6^5 = 7776$، پس احتمال اینکه مجموع پنج پرتاب برابر با ۲۰ شود عبارت است از

$$\frac{651}{7776} \doteq 0/08372$$

۱۶. به‌ازای هر $1 \le i \le 7$، فرض می‌کنیم c_i بر این وضعیت دلالت کند که دوست iاُم ریحانه با او بر سر میز ناهار

Scanned by CamScanner

بوده است. در این صورت

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_7) = 84 - \binom{7}{1}(35) + \binom{7}{2}(16) - \binom{7}{3}(8) + \binom{7}{4}(4) - \binom{7}{5}(2) + \binom{7}{6}(1) - \binom{7}{7}(0) = 0$$

درنتیجه، ریحانه همیشه با دوستی بر سر میز ناهار بوده است.

۱۷. الف) ۳۲ ب) ۹۶ پ) ۳۲۰۰

۱۸. الف) $2593 \times 2 = 5186$ و $\frac{2592}{2593} \times \frac{1}{2} \times 5186 = 2592 = \phi(5186)$.

ب) $19 \times 13 \times 7 \times 3 = 5187$ و بنابراین،

$$\phi(5187) = 5187 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} \times \frac{12}{13} \times \frac{18}{19} = 2 \times 6 \times 12 \times 18 = 2592$$

پ) $1297 \times 2^2 = 5188$ و $\frac{1296}{1297} \times \frac{1}{2} \times 5188 = 2592 = \phi(5188)$. بنابراین،

$$\phi(5186) = \phi(5187) = \phi(5188)$$

۱۹. الف) 2^{n-1} ب) $2^{n-1}(p-1)$

۲۰. از $\phi(n)$ فرد نتیجه می‌شود که $n = 2$.

۲۱. الف) $\phi(6000) = \phi(2^4 \times 3 \times 5^3) = 6000\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 1600$

ب) $6000 - 1600 - 1 = 4399$ (عدد ۱ را به‌خاطر ۶۰۰۰ کم کرده‌ایم.)

۲۲. برهان: $\phi(n^m) = (n^m)\prod_{p|n^m}\left(1-\frac{1}{p}\right)$. ولی به‌ازای هر عدد اول مانند p، از لم ۳.۴ نتیجه می‌شود که اگر $p|n^m$، آن‌گاه $p|n$. بنابراین،

$$\phi(n^m) = (n^m)\prod_{p|n^m}\left(1-\frac{1}{p}\right) = (n^{m-1})\left[n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right] = n^{m-1}\phi(n)$$

۲۳. $\phi(17) = \phi(32) = \phi(48) = 16$.

۲۴. برای آنکه $\phi(n)$ توانی از ۲ باشد باید یکی از حالتهای زیر پیش آید:

(۱) $n = 2^k$، که در آن $k \geq 1$،

(۲) $n = p_1p_2\cdots p_t$، که در آن $t \geq 1$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq t$ عدد اول p_i به‌صورت $2^{k_i} + 1$ است، یا

(۳) $n = 2^k p_1p_2\cdots p_t$، که در آن $k \geq 1$، $t \geq 1$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq t$ عدد اول p_i به‌صورت $2^{k_i} + 1$ است.

۲۵. اگر عدد ۴ عدد $\phi(n)$ را بشمارد، در این صورت یکی از حالتهای زیر باید روی دهد:

(۱) n بر ۸ بخش‌پذیر باشد،

(۲) n بر دو (یا بیشتر از دو) عدد اول فرد متمایز بخش‌پذیر باشد،

(۳) n بر یک عدد اول فرد p (مانند ۵، ۱۳ و ۱۷) بخش‌پذیر باشد و عدد ۴ عدد $p - 1$ را بشمارد، و

(۴) n بر ۴ (و نه بر ۸) و دست‌کم بر یک عدد اول فرد بخش‌پذیر باشد.

۲۶. (۱) قطعه برنامهٔ زیر را بعد از سطر Read(n) درج کنید:

```
If n = 2 then
   Writeln ('For n = 2 there is only one number that is less
      than 2 and relatively prime to it.')
Else
   Begin
```

(۲) سطر زیر را درج کنید:

```
Writeln (' and relatively prime to it.')
```

۲۷. الف) اگر عدد n بر عدد اولی مانند p بخش‌پذیر باشد، اجرای حلقهٔ While عدد n را به حاصل‌ضرب همهٔ عاملهای p موجود در n تقسیم می‌کند. حلقهٔ اول برای $p = 2$ است. حلقهٔ بعدی برای $p = 3$ و حلقهٔ سوم برای عددهای اول $p > 3$ است.

ب) هنگام کارکردن با عددهای اول، بعد از $p = 5$، دیگر بررسی عددهای صحیح زوج به‌عنوان نامزدهای احتمالی برای عددهای اول معنی ندارد.

بند ۲.۸

۱. $E_0 = 768$، $E_1 = 205$، $E_2 = 40$، $E_3 = 10$، $E_4 = 0$ و $E_5 = 1$.

$$\sum_{i=0}^{5} E_i = 1024 = N$$

۲. الف) فرض کنیم c_1 بر این شرط دلالت کند که در ترتیبی از ARRANGEMENT هر دو A کنار هم‌اند. شرطهای c_2، c_3 و c_4 را نیز، به ترتیب، برای هر دو E، هر دو N و هر دو R تعریف می‌کنیم. $N = \frac{11!}{(2!)^4} = 2494800$. به‌ازای $1 \leq i \leq 4$، $N(c_i) = \frac{10!}{(2!)^3} = 453600$. به‌ازای $1 \leq i < j \leq 4$، $N(c_ic_j) = \frac{9!}{(2!)^2} = 90720$.

به‌ازای $1 \leq i < j < k \leq 4$، $N(c_ic_jc_k) = \frac{8!}{2!} = 20160$. $N(c_1c_2c_3c_4) = 7! = 5040$.

$$S_1 = \binom{4}{1}(453600) = 1814400 \qquad S_2 = \binom{4}{2}(90720) = 544320$$

$$S_3 = \binom{4}{3}(20160) = 80640 \qquad S_4 = \binom{4}{4}(5040) = 5040$$

(یک) $E_2 = S_2 - \binom{3}{1}S_3 + \binom{3}{2}S_4 = 544320 - (3)(80640) + (6)(5040) = 332640$

(دو) $L_2 = S_2 - \binom{3}{1}S_3 + \binom{3}{1}S_4 = 398160$

ب) (یک) $E_3 = S_3 - \binom{4}{1}S_4 = 60480$ (دو) $L_3 = S_3 - \binom{4}{2}S_4 = 65520$

۳. فرض می‌کنیم c_1 به وقوع Eهای متوالی در ترتیب دلالت کند. c_2، c_3، c_4 و c_5 را به‌طور مشابهی، به ترتیب، برای Nها، Oها، Rها و Sهای متوالی تعریف می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

الف)

$$S_1 = \binom{5}{1}\left[\frac{13!}{(2!)^2}\right] \text{ ، } N(c_1) = \frac{13!}{(2!)^2}$$

$$S_2 = \binom{5}{2}\left[\frac{12!}{(2!)^3}\right] \text{ ، } N(c_1c_2) = \frac{12!}{(2!)^3}$$

$$S_3 = \binom{5}{3}\left[\frac{11!}{(2!)^2}\right] \text{ ، } N(c_1c_2c_3) = \frac{11!}{(2!)^2}$$

$$S_4 = \binom{5}{4}\left(\frac{10!}{2!}\right) \text{ ، } N(c_1c_2c_3c_4) = \frac{10!}{2!}$$

$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 9! = S_5$. بنابراین، $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = 1286046720$.

ب) $E_2 = S_2 - \binom{2}{1}S_3 + \binom{3}{2}S_4 - \binom{5}{4}S_5 = 350179200$

پ) $L_3 = S_3 - \binom{3}{1}S_4 + \binom{4}{1}S_5 = 74753280$

۴. به‌ازای $1 \le i \le 7$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که i در برد f قرار ندارد. در این صورت تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ که در آن $|f(A)| = 4$ برابر است با

$$E_4 = S_3 - \binom{4}{1}S_4 + \binom{5}{2}S_5 - \binom{6}{3}S_6 + \binom{7}{4}S_7 = \binom{7}{3}4^{10} - \binom{4}{1}\binom{7}{4}3^{10}$$
$$+ \binom{5}{2}\binom{7}{5}2^{10} - \binom{6}{3}\binom{7}{6}1^{10} + \binom{7}{4}\binom{7}{7}0^{10} = 286448200$$

یادداشت: با استفاده از اعداد استرلینگ نوع دوم، نتیجه عبارت است از $\binom{7}{4}4!S(10,4) = 286448200$.

$$L_3 = S_3 - \binom{3}{2}S_4 + \binom{4}{2}S_5 - \binom{3}{2}S_6 + \binom{6}{2}S_7$$
$$= \binom{7}{3}4^{10} - \binom{3}{2}\binom{7}{4}3^{10} + \binom{4}{2}\binom{7}{5}2^{10} - \binom{5}{2}\binom{7}{6}1^{10}$$

۵. در اینجا $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$. با استفاده از ایده‌های قسمت اول برای به‌دست آوردن $|f(A)| = 2$ به E_4 و برای به‌دست آوردن $|f(A)| \le 2$ به L_3 نیاز داریم.

۶. به‌ازای $1 \le i \le 10$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که حرف iاُم در جای عادی خود قرار گیرد. دراین صورت $N(c_1c_2c_3c_4) = 6!$ و $S_4 = \binom{10}{4}(6!)$. به‌همین ترتیب، به‌ازای هر $1 \le i \le 5$، $S_i = \binom{10}{i}(i!)$.

$$E_4 = S_4 - \binom{5}{1}S_5 + \binom{6}{2}S_6 - \binom{7}{3}S_7 + \binom{8}{4}S_8 - \binom{9}{5}S_9 + \binom{10}{6}S_{10}$$

$$L_4 = S_4 - \binom{4}{3}S_5 + \binom{5}{3}S_6 - \binom{6}{3}S_7 + \binom{7}{3}S_8 - \binom{8}{3}S_9 + \binom{9}{3}S_{10}$$

۷. الف) فرض می‌کنیم c_1 بر نبودن کارت سفید، c_2 بر نبودن کارت آبی، c_3 بر نبودن کارت قرمز و c_4 بر نبودن کارت سیاه دلالت کنند. در این صورت، به‌ازای $1 \le i \le 4$ داریم $N(c_i) = \binom{39}{13}$، به‌ازای $1 \le i < j \le 4$ داریم $N(c_ic_j) = \binom{26}{13}$، به‌ازای $1 \le i < j < k \le 4$ داریم $N(c_ic_jc_k) = \binom{13}{13}$ و $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$.

بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{52}{13} - \binom{4}{1}\binom{39}{13} + \binom{4}{2}\binom{26}{13} - \binom{4}{3}\binom{13}{13}$$

احتمال اینکه این ۱۳ کارت شامل دست‌کم یک کارت از هر رنگ باشد برابر است با $\frac{N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)}{\binom{52}{13}}$.

ب) $E_1 = S_1 - \binom{2}{1}S_2 + \binom{3}{2}S_3 - \binom{4}{3}S_4 = \binom{4}{1}\binom{39}{13} - 2\binom{4}{2}\binom{26}{13} + 3\binom{4}{3}\binom{13}{13} = 0$

احتمال اینکه دقیقاً یکی از رنگها نباشد برابر است با $E_1/\binom{52}{13}$.

پ) $E_2 = S_2 - \binom{3}{1}S_3 = \binom{4}{2}\binom{26}{13} - 3\binom{4}{3}\binom{13}{13}$. احتمال اینکه دقیقاً دو تا از رنگها نباشند برابر است با $E_2/\binom{52}{13}$.

۸. ب) $E_{t-1} = S_{t-1} - tS_t$ ، $L_{t-1} = L_t + E_{t-1}$

پ) $L_{t-1} = L_t + E_{t-1} = S_t + S_{t-1} - tS_t = S_{t-1} - (t-1)S_t = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2}S_t$

ت) $L_m = L_{m+1} + E_m$

ث) $L_t = S_t$ ، $L_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2}S_t$

فرض می‌کنیم

$$L_{k+1} = S_{k+1} - \binom{k+1}{k}S_{k+2} + \binom{k+2}{k}S_{k+3} - \cdots + (-1)^{t-k-1}\binom{t-1}{k}S_t$$

$$L_k = L_{k+1} + E_k = \left[S_{k+1} - \binom{k+1}{k}S_{k+2} + \binom{k+2}{k}S_{k+3} - \cdots + (-1)^{t-k-1}\binom{t-1}{k}S_t\right] + \left[S_k - \binom{k+1}{1}S_{k+1} + \binom{k+2}{2}S_{k+2} - \cdots + (-1)^{t-k}\binom{t}{t-k}S_t\right]$$

به‌ازای $1 \le r \le t-k$، ضریب S_{k+r} برابر است با

$$(-1)^{r-1}\binom{k+r-1}{k} + (-1)^r\binom{k+r}{r} = (-1)^{r-1}\left[\frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} - \frac{(k+r)!}{k!r!}\right] =$$

$$(-1)^{r-1}\left[\frac{r(k+r+1)! - (k+r)!}{k!r!}\right] = (-1)^{r-1}\frac{(k+r-1)!(-k)}{k!r!}$$

$$= (-1)^r\binom{k+r-1}{k-1}$$

Scanned by CamScanner

درنتیجه، $L_k = S_k - \binom{k}{k-1}S_{k+1} + \binom{k+1}{k-1}S_{k+2} - \cdots + (-1)^{t-k}\binom{t-1}{k-1}S_t$.

بند ۳.۸

۱. به‌ازای $1 \le i \le 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که $2i$ در مکان $2i$ است.
دراین صورت، $N = 10!$، به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $N(c_i) = 9!$، به‌ازای هر $1 \le i < j \le 5$ داریم

$$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 5!\,,\ \ldots\,,\ N(c_ic_j) = 8!$$

بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = 10! - \binom{5}{1}9! + \binom{5}{2}8! - \binom{5}{3}7! + \binom{5}{4}6! - \binom{5}{5}5!$$

۲. الف) فقط دو پریش با این ویژگی وجود دارد: ۲۳۱۵۴ و ۳۱۲۵۴

ب) در اینجا چهار تا از این نوع پریشها وجود دارد:

(یک) ۲۳۱۵۴۶ (دو) ۲۳۱۶۴۵ (سه) ۳۱۲۵۴۶ (چهار) ۳۱۲۶۴۵

۳. تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ برابر است با

$$\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 5\times4\times3 - 5\times4 + 5 - 1$$
$$= 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

۴. $5040 = 7!$ جایگشت برای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ وجود دارد. بین این جایگشتها، تعداد پریشها برابر است با

$$7!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) = 1854$$

درنتیجه، $5040 - 1854 = 3186$ جایگشت برای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ داریم که پریش نیستند.

۵. الف) $7! - d_7 \doteq (7!)e^{-1})$ ب) $d_{26} \doteq (26!)e^{-1}$

۶. الف) $(d_2)^2 = 9^2 = 81$ تا از این نوع پریشها وجود دارد.

ب) در این حالت $(4!)^2 = 24^2 = 576$ پریش به‌دست می‌آوریم.

۷. فرض می‌کنیم $n = 5 + m$. در این صورت $11660 = d_5 \times d_m = 44(d_m)$ و بنابراین، $d_m = 265 = d_6$
درنتیجه، $n = 11$.

۸. الف) $(4!)d_2 \doteq (4!)^2e^{-1}$ ب و پ) $\dfrac{2\times3^2\times6}{(4!)^2e^{-1}}$

۹. $(10!)d_{10} \doteq (10!)^2(e^{-1})$

۱۰. الف) (یک) $\dfrac{dn}{n!}$ (دو) $\dfrac{n(d_{n-1})}{n!}$ (سه) $1 - \dfrac{d_n}{n!}$ (چهار) $\dfrac{\binom{n}{r}d_{n-r}}{n!}$

ب) (یک) e^{-1} (دو) e^{-1} (سه) $1 - e^{-1}$ (چهار) $\dfrac{1}{r!}\times e^{-1}$

۱۱. الف) $(d_{10})^2$

ب) به‌ازای $1 \le i \le 10$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که نفر iام وسایل خود را بگیرد.
دراین صورت $N = (10!)^2$، به‌ازای $1 \le i \le 10$ داریم $N(c_i) = (9!)^2$، به‌ازای $1 \le i < j \le 10$
داریم $N(c_ic_j) = (8!)^2$ و غیره. بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_{10}) = (10!)^2 - \binom{10}{1}(9!)^2 + \binom{10}{2}(8!)^2 - \cdots + (-1)^{10}\binom{10}{0}(0!)^2$$

۱۲. الف) $(12!)d_{12}$ ب) $(12!)\binom{12}{6}d_6$

۱۳. به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، تعداد کل جایگشتهای ۱، ۲، ۳، ...، n برابر است با $n!$. هر یک از این جایگشتها شامل k عنصر است که پریشان شده‌اند (یعنی، k عنصر مانند x_1، x_2، ...، x_k در $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ وجود دارد به‌طوری که x_1 در مکان x_1 نیست، x_2 در مکان x_2 نیست، ...، و x_k در مکان x_k نیست) و شامل $n-k$ عنصر است که ثابت نگاه داشته شده‌اند (مقصود هر $n-k$ عنصر y_1، y_2، ...، y_{n-k} متعلق به $\{1, 2, 3, \ldots, n\} - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ است که چنان‌اند که y_1 در مکان y_1 است، y_2 در مکان y_2 است، ...، و y_{n-k} در مکان y_{n-k} است).
این $n-k$ عنصر ثابت را می‌توان به $\binom{n}{n-k}$ طریق انتخاب کرد و سپس k عنصر دیگر می‌توانند به d_k طریق پریشان شوند. بنابراین، $\binom{n}{n-k}d_k = \binom{n}{k}d_k$ جایگشت برای ۱، ۲، ۳، ...، n وجود دارد که در هر یک از آنها $n-k$ عنصر ثابت‌اند (و k عنصر پریشان شده‌اند). وقتی k از ۰ تا n تغییر می‌کند همهٔ $n!$ جایگشت مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ را با توجه به تعداد k عنصر پریشان شدهٔ آنها به‌دست می‌آوریم. درنتیجه،

$$n! = \binom{n}{0}d_0 + \binom{n}{1}d_1 + \binom{n}{2}d_2 + \cdots + \binom{n}{n}d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

۱۴. الف) به‌ازای $1 \le i \le n-1$ فرض می‌کنیم c_i بر وقوع الگوی $i(i+1)$ در ترتیب خطی دلالت کند.
دراین صورت،

$$N(c_i) = (n-1)!,\ 1 \le i \le n-1$$

$$N(c_ic_j) = (n-2)!,\ 1 \le i < j \le n-1$$

$$N(c_ic_jc_k) = (n-3)!,\ 1 \le i < j < k \le n-1, \ldots,$$

$$N(c_1c_2\cdots c_{n-1}) = (n-(n-1))!$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_{n-1}) = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)!$$
$$- \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-(n-1))!$$

Scanned by CamScanner

ب)

$$d_n + d_{n-1} = \left[n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!\right] + \left[(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \binom{n-1}{2}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}((n-1)-(n-1))!\right]$$

ضریب $(n-k)!$ در $d_n + d_{n-1}$ برابر است با

$$(-1)^k\binom{n}{k} + (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} = (-1)^{k-1}[[(n-1)!/[(k-1)!(n-k)!]] - [n!/[k!(n-k)!]]]$$
$$= (-1)^{k-1}[[k(n-1)! - n!]/[k!(n-k)!]]$$
$$= (-1)^{k-1}(n-1)![(k-n)/[k!(n-k)!]]$$
$$= (-1)^k(n-1)!/[k!(n-k-1)!] = (-1)^k\binom{n-1}{k}$$

۱۵. $\binom{n}{0}(n-1)! - \binom{n}{1}(n-2)! + \binom{n}{2}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(0!) + (-1)^n\binom{n}{n}$

۱۶. الف) $\frac{11088}{10!} \doteq 0/003$ ب) $\frac{13264}{10!} \doteq 0/004$

بندهای ۴.۸ و ۵.۸

۱. این نتایج از شمردن مکانهای ممکن برای تعداد رخهای مطلوب در هر یک از صفحات شطرنجی، به‌دست می‌آیند.

۲. صفحه‌ای شطرنجی درنظر بگیرید که از ۱۰ مربع واقع در امتداد یک قطر تشکیل شده است به‌طوری که در هر سطر و هر ستون فقط یک مربع وجود دارد.

۳. الف) $\binom{8}{0} + \binom{8}{1}8x + \binom{8}{2}(8\times 7)x^2 + \binom{8}{3}(8\times 7\times 6)x^3 + \binom{8}{4}(8\times 7\times 6\times 5)x^4 + \cdots + \binom{8}{8}(8!)x^8 = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}P(8,i)x^i$

ب) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}P(n,i)x^i$

۴. $r(C_1,x) = 1 + 4x + 3x^2 = r(C_2,x)$

۵. الف) (یک) $(1+2x)^2$ (دو) $1 + 8x + 14x^2 + 4x^3$

(سه) $1 + 9x + 25x^2 + 21x^3$ (چهار) $1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$

ب) اگر صفحهٔ C از n پله تشکیل شده باشد و هر پله دارای k بلوک باشد، در این صورت $r(C,x) = (1+kx)^n$.

۶. این k مکان سطری را به $\binom{m}{k}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. به‌تدریج که از سطر ۱ به سطر ۲، ... به سطر m می‌رویم، برای نخستین سطری که رخ دارد n انتخاب ستونی وجود دارد. برای دومین سطر از این نوع $n-1$

انتخاب ستونی وجود دارد، ...، و سرانجام برای سطر حاوی رخ kاُم $n-k+1$ انتخاب ستونی وجود دارد. درنتیجه، k رخ را می‌توان به

$$\binom{m}{k}(n)(n-1)\cdots(n-k+1) = (k!)\binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

طریق روی C مرتب کرد به‌طوری که هیچ‌یک نتواند دیگری را بزند.

۷.

	APL	BASIC	PL/1	Pascal	FORTRAN
(۱) نفر اول					
(۲) نفر دوم					
(۳) نفر سوم					
(۴) نفر چهارم					
(۵) نفر پنجم					

$$r(C,x) = (1+4x+3x^2)(1+4x+2x^2) = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 6x^4$$

به‌ازای $1 \le i \le 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که زبانی به نفر iاُم نسبت داده شده است که او می‌خواهد از آن اجتناب کند. در این صورت

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = 5! - 8(4!) + 21(3!) - 20(2!) + 6(1!) = 20$$

۸. عامل ضرب $(6!)$ به این سبب لازم است که دنباله‌های مرتب را می‌شمریم.

۹. الف) ۲۰ ب) $\frac{3}{10}$

۱۰. $r(C,x) = (1+4x+2x^2)\cdot(1+3x+x^2)\cdot(1+x)$
$= 1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5$

	۱	۵	۲	۴	۶	۳
۱						
۵						
۳						
۴						
۲						
۶						

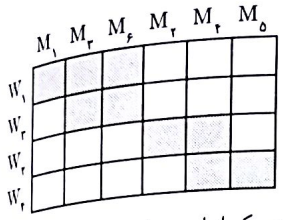
به‌ازای $1 \le i \le 6$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که پس از شش بار ریختن تاسها، هر شش مقدار روی هر دو تاس قرمز و سبز بنشینند، ولی عدد i روی تاس قرمز با عددی از تاس سبز جفت شود که جزء عددهای ممنوعه است. در این صورت

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_6) = [6! - 8(5!) + 22(4!) - 25(3!) + 12(2!) - 2(1!) + 0(0!)] = 160$$

احتمال اینکه هر یک از شش مقدار روی هر دو تاس قرمز و سبز نشسته باشد برابر است با $\frac{6!\times 160}{(28)^6} \doteq 0/00024$.

Scanned by CamScanner

۱۱. $r(C,x) = (1+5x+4x^2)(1+4x+3x^2)$
$= 1+9x+27x^2+31x^3+12x^4$



به‌ازای $1 \le i \le 4$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که هر یک از این چهار مهره، به استثنای مهرهٔ iاُم، با پیچ مناسبی جفت شده باشد. دراین صورت

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = (6\times5\times4\times3) - 9(5\times4\times3) + 27(4\times3) - 31(3) + 12 = 63$$

تمرینات تکمیلی

۱. فقط باید مقسوم‌علیه‌های ۲، ۳ و ۵ را بررسی کنیم. فرض می‌کنیم c_1 بخش‌پذیری بر ۲، c_2 بخش‌پذیری بر ۳ و c_3 بخش‌پذیری بر ۵ را نشان دهند. دراین صورت،

$$N = 500, \qquad N(c_1) = \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor = 250, \qquad N(c_2) = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = 166$$

$$N(c_3) = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100, \qquad N(c_1c_2) = \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = 83, \qquad N(c_1c_3) = \left\lfloor \frac{500}{10} \right\rfloor = 50$$

$$N(c_2c_3) = \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor = 33, \qquad N(c_1c_2c_3) = \left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor = 16$$

بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3) = 500 - (250+166+100) + (83+50+33) - 16 = 134$$

۲. فرض می‌کنیم $n = n_1n_2n_3n_4n_5n_6$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 6$ داریم $0 \le n_i \le 9$. درپی آنیم که $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6 \le 37$. بنابراین، پاسخ این مسأله عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7 = 37$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 6$ داریم $0 \le n_i \le 9$ و $0 \le n_7 \le 37$.

به‌ازای $1 \le i \le 6$ شرط c_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: n_1، n_2، n_3، n_4، n_5، n_6، n_7 یک جواب صحیح نامنفی

$$n_1+n_2+\cdots+n_7 = 37$$

است، ولی $n_i > 9$ (یا $n_i \ge 10$).

$$S_0 = N = \binom{7+37-1}{37} = \binom{43}{37}$$

$N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_7 = 27$ است (که دراینجا $x_1+10 = n_1$ و به‌ازای هر $2 \le i \le 7$، $x_i = n_i$). بنابراین، $N(c_1) = \binom{7+27-1}{27} = \binom{33}{27}$ و $S_1 = \binom{6}{1}\binom{33}{27}$. تعداد $N(c_1c_2)$ جوابهای صحیح نامنفی $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_7 = 17$ است (که دراینجا $y_1+10 = n_1$، $y_2+10 = n_2$ و به‌ازای هر $3 \le i \le 7$، $y_i = n_i$). این تعداد برابر است با $\binom{7+17-1}{17} = \binom{23}{17}$ و بنابراین، $S_2 = \binom{6}{2}\binom{23}{17}$.

$N(c_1c_2c_3)$ برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_7 = 7$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 3$ داریم $z_i + 10 = n_i$ و به‌ازای هر $4 \le i \le 7$ داریم $z_i = n_i$. بنابراین، $N(c_1c_2c_3) = \binom{7+7-1}{7} = \binom{13}{7}$ و $S_3 = \binom{6}{3}\binom{13}{7}$.

چون $S_4 = S_5 = S_6 = 0$، پاسخ مسأله عبارت است از

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\cdots\bar{c}_6) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6$$

$$= \binom{43}{37} - \binom{6}{1}\binom{33}{27} + \binom{6}{2}\binom{23}{17} - \binom{6}{3}\binom{13}{7} = 930931$$

۳. برای هر توزیع این ۲۴ توپ (بین چهار قفسهٔ مفروض) $\frac{24!}{(6!)^4}$ ترتیب ممکن وجود دارد. بنابراین، باید بدانیم با توجه به شرطهای مفروض به چند طریق می‌توان این توپها را توزیع کرد. تعداد طرق توزیع برابر است با تعداد جوابهای صحیح

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 24$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $2 \le x_i \le 7$.

این هم برابر است با تعداد جوابهای صحیح

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 16$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $0 \le y_i \le 5$. [دراینجا به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ قرار داده‌ایم $y_i + 2 = x_i$.]

به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ شرط c_i را به این صورت تعریف می‌کنیم که y_1، y_2، y_3 و y_4 یک جواب

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 16$$

است، که در آن $y_i > 5$ (یا $y_i \ge 6$) و به‌ازای هر $1 \le j \le 4$ به‌طوری که $j \ne i$، $y_j \ge 0$. دراین صورت، مثلاً $N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$w_1+w_2+w_3+w_4 = 10$$

است. [دراینجا $w_1 + 6 = y_1$ و به‌ازای هر $i = 2,3,4$، $w_i = y_i$.] بنابراین، $N(c_1) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$ و $S_1 = \binom{4}{1}\binom{13}{10}$. استدلالهای مشابهی نشان می‌دهند که $N(c_1c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$، $S_2 = \binom{4}{2}\binom{5}{2}$ و $S_3 = S_4 = 0$. درنتیجه، تعداد توزیعها با توجه به شرطهای مفروض عبارت است از

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{19}{16} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{7}{4}$$

Scanned by CamScanner

و این ۲۴ توپ را می‌توان در قفسه‌ها به

$$\frac{۲۴!}{(۶!)^۴}\left[\binom{۱۹}{۱۶}-\binom{۴}{۱}\binom{۱۳}{۱۰}+\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۴}\right]$$

طریق مرتب کرد.

۴. الف) در اینجا $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰\}$ و $N=S_۰=۱۰۰۰$. شرطهای $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ را دربارهٔ عنصرهای S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$c_۱$: $n\in S$ و n مجذور کامل است

$c_۲$: $n\in S$ و n مکعب کامل است

$c_۳$: $n\in S$ و n توان چهارم کامل است

در این صورت $N(c_۱)=۳۱$، $N(c_۲)=۱۰$، $N(c_۳)=۵$، $N(c_۱c_۲)=۳$، $N(c_۱c_۳)=N(c_۲)=۵$، $N(c_۲c_۳)=۱$ و $N(c_۱c_۲c_۳)=N(c_۲c_۳)=۱$. در نتیجه،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳)=S_۰-S_۱+S_۲-S_۳=۱۰۰۰-(۳۱+۱۰+۵)+(۳+۵+۱)-۱$$
$$=۱۰۰۰-۴۶+۹-۱=۹۶۲$$

ب) این بار $S=\{۱,۲,۳,\dots,۳۰۰۰\}$ و $N=S_۰=۳۰۰۰$. در این قسمت، شرطهای $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ دربارهٔ عنصرهای S به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$c_۱$: $n\in S$ و n مجذور کامل است

$c_۲$: $n\in S$ و n مکعب کامل است

$c_۳$: $n\in S$ و n توان پنجم کامل است

در این صورت، $N(c_۱)=۵۴$، $N(c_۲)=۱۴$، $N(c_۳)=۴$، $N(c_۱c_۲)=۳$، $N(c_۱c_۳)=۲$، $N(c_۲c_۳)=۱$ و $N(c_۱c_۲c_۳)=۱$. در نتیجه،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳)=S_۰-S_۱+S_۲-S_۳=۳۰۰۰-(۵۴+۱۴+۴)+(۳+۲+۱)-۱$$
$$=۳۰۰۰-۷۲+۶-۱=۲۹۳۳$$

۵. به‌ازای هر $۱\le i\le ۷$ فرض می‌کنیم شرط c_i بر وقوع الگوی $i(i+۱)$ دلالت کند. شرط وقوع الگوی ۸۱ را با $c_۸$ نشان می‌دهیم. به‌ازای $۱\le i\le ۸$ داریم $N(c_i)=۷!$، به‌ازای $۱\le i<j\le ۸$ داریم $N(c_ic_j)=۶!$ و غیره. بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\cdots\bar{c}_۸)=۸!-\binom{۸}{۱}۷!+\binom{۸}{۲}۶!-\binom{۸}{۳}۵!+\cdots+(-۱)^۸\binom{۸}{۷}۱!=۱۲۸۳۲$$

۶. الف) دیوارهای اتاق را (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نشان‌گذاری می‌کنیم. فرض می‌کنیم شرط $c_۱$ بر این دلالت کند که دیوارهای ۱ و ۲ یک رنگ دارند. شرط $c_۲$ بر این دلالت می‌کند که دیوارهای ۲ و ۳ یک رنگ دارند. به همین ترتیب، شرطهای $c_۳$ و $c_۴$ را تعریف می‌کنیم، درحالی که شرط $c_۵$ بر این دلالت می‌کند که دیوارهای ۵ و ۱ یک رنگ دارند. اکنون می‌بینیم که $N=k^۵$، به‌ازای هر $۱\le i\le ۵$ داریم $N(c_i)=k^۴$، به‌ازای هر $۱\le i<j\le ۵$ داریم $N(c_ic_j)=k^۳$، به‌ازای هر $۱\le i<j<\ell\le ۵$ داریم $N(c_ic_jc_\ell)k^۲$، به‌ازای هر $۱\le i<j<\ell<m\le ۵$ داریم $N(c_ic_jc_\ell c_m)=k$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵)=k$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵)=k^۵-\binom{۵}{۱}k^۴+\binom{۵}{۲}k^۳-\binom{۵}{۳}k^۲+\binom{۵}{۴}k-\binom{۵}{۵}k$$

ب) به‌ازای $k=۱,۲$، نتیجهٔ بالا برابر با ۰ است. به‌ازای $k=۳$، نتیجهٔ بالا برابر با ۳۰ است.

پ) تعداد طرق رنگ‌آمیزی دیوارهای یک اتاق شش دیواری، به‌طوری‌که هر دو دیوار مجاور رنگ متفاوتی داشته باشند، برابر است با

$$k^۶-\binom{۶}{۱}k^۵+\binom{۶}{۲}k^۴-\binom{۶}{۳}k^۳+\binom{۶}{۴}k^۲-\binom{۶}{۵}k+\binom{۶}{۶}k$$

این نتیجه به‌ازای $k=۱$ برابر با ۰ و به‌ازای $k=۲$ برابر با ۲ است.

۷. به‌ازای $۱\le i\le ۵$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که در یک ترتیب مفروض، دو همشهری iاُم کنار هم بنشینند. در این صورت $N=۹!$، $N(c_۱)=۲(۸!)$، $S_۱=\binom{۵}{۱}(۲)(۸!)$، $N(c_۱c_۲)=۲^۲(۷!)$ و $S_۲\binom{۵}{۲}(۲^۲)(۷!)$. [فرض کنیم X و Y، به‌ترتیب، دو همشهری اول و دوم و E، F، G، H، I و J شش نفر دیگر را نشان دهند. می‌توانیم X، Y، E، F، G، H، I و J را به !۷ طریق روی یک دایره مرتب کنیم. چون هر یک از دو طرف X و Y یک زوج را نشان می‌دهد، $(۲^۲)(۷!)$ طریق برای نشاندن این ۱۰ نفر پشت میز وجود دارد به‌طوری که هم دو همشهری اول کنار هم باشند (که به دو طریق صورت می‌گیرد) و هم دو همشهری دوم (این هم به دو طریق صورت می‌گیرد).] $N(c_۱c_۲c_۳)=۲^۳(۶!)$، $S_۳=\binom{۵}{۳}(۲^۳)(۶!)$، $N(c_۱c_۲c_۳c_۴)=۲^۴(۵!)$، $S_۴=\binom{۵}{۴}(۲^۴)(۵!)$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵)=۲^۵(۴!)$. در نتیجه،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵)=۹!-\binom{۵}{۱}(۲)(۸!)+\binom{۵}{۲}(۲^۲)(۷!)-\binom{۵}{۳}(۲^۳)(۶!)+\binom{۵}{۴}(۲^۴)(۵!)$$
$$-\binom{۵}{۵}(۲^۵)(۴!)$$

۸. $E_m=S_m-\binom{m+۱}{m}S_{m+۱}+\binom{m+۲}{m}S_{m+۲}-\cdots+(-۱)^{i-m}\binom{i}{m}S_i-\cdots+(-۱)^{n-m}\binom{n}{m}S_n$. $S_i=\binom{n}{i}\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\binom{s-۲r}{r}\cdots\binom{s-(i-۱)r}{r}(n-i)^{s-ir}$، که در آن $\binom{n}{i}$ تعداد طرق انتخاب i ظرف (از n ظرف متمایز ممکن) را، که هر یک از آنها دقیقاً حاوی r عنصر باشد، نشان می‌دهد. به‌ازای هر یک از i ظرف متمایز، حاصل‌ضرب $\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\cdots\binom{s-(i-۱)r}{r}$ تعداد طرق انتخاب r شیء متمایز را نشان می‌دهد. سرانجام،

Scanned by CamScanner

حضور عامل $(n-i)^{s-ir}$ به این سبب است که هر یک از $s-ir$ شیء دیگر را می‌توانیم از هر یک از $n-i$ ظرف دیگر انتخاب کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\binom{s-2r}{r}\cdots\binom{s-(i-1)r}{r}=\frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}$$

$$(-1)^{i-m}\binom{i}{m}S_i=(-1)^{i-m}\binom{i}{m}\binom{n}{i}\frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}(n-i)^{s-ir}$$

$$=(-1)^{i-m}\frac{i!}{m!(i-m)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}(n-i)^{s-ir}$$

$$=(-1)^m\frac{n!s!}{m!}\left[(-1)^i(n-i)^{s-ir}/(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i\right]$$

و $E_m=(-1)^m\frac{n!s!}{m!}\sum_{i=m}^{n}(-1)^i\frac{(n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i}$.

۹. تعداد کل ترتیبها برابر است با $T=\frac{13!}{(2!)^5}$.

الف) $S_2=\binom{5}{2}\left[\frac{10!}{(2!)^2}\right]$، $S_3=\binom{5}{3}\left(\frac{9!}{2!}\right)$، $S_4=\binom{5}{4}(8!)$ و S_5

$$E_2=\left[S_2-\binom{4}{1}S_3+\binom{5}{2}S_5\right]\Big/T$$

ب) $E_4=\left[S_4-\binom{5}{1}S_5\right]$ و $E_5=S_5$ پاسخ مطلوب برابر است با $\left[T-(E_4+E_5)\right]/T$.

۱۰. فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که در ترتیب مفروض، هر چهار w کنار هم باشند. شرطهای c_2، c_3 و c_4 را نیز به همین ترتیب برای هر چهار x، هر چهار y و هر چهار z تعریف می‌کنیم. می‌بینیم که $N=\frac{16!}{(4!)^4}$، به‌ازای هر $1\le i\le 4$ داریم $N(c_i)=\frac{13!}{(4!)^3}$، به‌ازای هر $1\le i<j\le 4$ داریم $N(c_ic_j)=\frac{10!}{(4!)^2}$، به‌ازای هر $1\le i<j<k\le 4$ داریم $N(c_ic_jc_k)=\frac{7!}{4!}$ و $N(c_1c_2c_3c_4)=4!$. بنابراین،

$$N(\bar c_1\bar c_2\bar c_3\bar c_4)=\frac{16!}{(4!)^4}-\binom{4}{1}\left[\frac{13!}{(4!)^3}\right]+\binom{4}{2}\left[\frac{10!}{(4!)^2}\right]-\binom{4}{3}\left(\frac{7!}{4!}\right)+\binom{4}{4}(4!)$$

۱۱. الف) $\binom{n-m}{r-m}=\binom{n-m}{n-r}$

ب) فرض می‌کنیم $A=\{x_1,x_2,\dots,x_m,y_{m+1},\dots,y_n\}$. به‌ازای هر $1\le i\le m$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که r عنصر، $r\ge m$، از A انتخاب شده است و x_i در این انتخاب حضور ندارد. در این صورت $N=\binom{n}{r}$، به‌ازای هر $1\le i\le m$ داریم $N(c_i)=\binom{n-1}{r}$ و $S_1=\binom{m}{1}\binom{n-1}{r}$، به‌ازای هر $1\le i<j\le m$ داریم $N(c_ic_j)=\binom{n-2}{r}$ و $S_2=\binom{m}{2}\binom{n-2}{r}$ و غیره. بنابراین،

$$\binom{n-m}{n-r}=N(\bar c_1\bar c_2\cdots\bar c_m)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$$

۱۲. الف) شرطهای c_i، $1\le i\le 5$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

c_1 : a و b یک رنگ دارند

c_2 : b و c یک رنگ دارند

c_3 : b و e یک رنگ دارند

c_4 : c و e یک رنگ دارند

c_5 : c و d یک رنگ دارند

در این صورت $N=\lambda^5$، به‌ازای هر $1\le i\le 5$ داریم $N(c_i)=\lambda^4$، به‌ازای هر $1\le i<j\le 5$ داریم $N(c_ic_j)=\lambda^3$، $N(c_2c_3c_4)=\lambda^3$ و به‌ازای اندیسهای دیگر $1\le i<j<k\le 5$ داریم $N(c_ic_jc_k)=\lambda^2$، $N(c_1c_2c_3c_4)=N(c_2c_3c_4c_5)=\lambda^2$،

$$N(c_1c_2c_3c_5)=N(c_1c_2c_4c_5)=N(c_1c_3c_4c_5)=\lambda$$

و $N(c_1c_2c_3c_4c_5)=\lambda$. بنابراین

$$N(\bar c_1\bar c_2\bar c_3\bar c_4\bar c_5)=\lambda^5-5\lambda^4+10\lambda^3-(\lambda^3+9\lambda^2)+(2\lambda^2+3\lambda)-\lambda=\lambda^5-5\lambda^4+9\lambda^3-7\lambda^2+2\lambda$$

این نتیجه به‌ازای $\lambda=1,2$ برابر با ۰ است. وقتی $\lambda=3$، این نتیجه مثبت است و بنابراین عدد رنگی برابر با ۳ است.

ب) گرافی رسم کنید که هر رأس آن متناظر با یکی از اتاقها باشد. اگر دو اتاق درگاه مشترکی داشته باشند یالی بین رأسهای متناظر آنها وصل کنید.

به این ترتیب، گراف شکل ۱۴۰۸ (الف) حاصل می‌شود و پاسخ مطلوب عبارت است از

$$6^5-5(6^4)+9(6^3)-7(6^2)+2(6)=3000$$

۱۳. برهان:

الف) اگر n زوج باشد، بنابر قضیهٔ بنیادی حساب (قضیهٔ ۱۱۰۴) می‌توانیم بنویسیم $n=2^km$، که در آن $k\ge 1$ و m فرد است. در این صورت $2n=2^{k+1}m$ و

$$\phi(2n)=(2^{k+1})\left(1-\frac{1}{2}\right)\phi(m)=2^k\phi(m)=2(2^k)\left(\frac{1}{2}\right)\phi(m)$$

$$=2\left[2^k\left(1-\frac{1}{2}\right)\phi(m)\right]=2\left[\phi(2^km)\right]=2\phi(n)$$

ب) وقتی n فرد است می‌بینیم که $\phi(2n)=(2n)\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$، که در این حاصل‌ضرب،

Scanned by CamScanner

همهٔ عددهای اول فردی به‌کار رفته‌اند که n را می‌شمارند. (اگر $n = 1$، آن‌گاه $\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ برابر با ۱ است.) ولی

$$(2n)\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \phi(n)$$

۱۴. برهان: فرض می‌کنیم $a = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\dots p_t^{m_t}$ و $b = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_t^{n_t}$، که در آن $p_1, p_2, \dots, p_t$ اعداد اول متمایزند و $m_1, m_2, \dots, m_t, n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbf{N}$. در این صورت،

$$c = \gcd(a,b) = p_1^{\min\{m_1,n_1\}}p_2^{\min\{m_2,n_2\}}\dots p_t^{\min\{m_t,n_t\}}$$

بنابراین،

$$\phi(ab)\phi(c) = \left[p_1^{m_1+n_1}p_2^{m_2+n_2}\dots p_t^{m_t+n_t}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)\right]$$
$$\prod_{\substack{1\le i\le t\\ \min\{m_i,n_i\}\neq 0}} p_i^{\min\{m_i,n_i\}}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

و

$$\phi(a)\phi(b)c = \left[\prod_{\substack{1\le i\le t\\ m_i\neq 0}} p_i^{m_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]\left[\prod_{\substack{1\le i\le t\\ n_i\neq 0}} P_i^{n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]\left[\prod_{1\le i\le t} p_i^{\min\{m_i,n_i\}}\right]$$

به‌ازای $1 \le i \le t$ تحقیق می‌کنیم که $\phi(ab)\phi(c)$ و $\phi(a)\phi(b)c$ حاوی عاملهای یکسانی متشکل از عدد اول p_i هستند. در این صورت ثابت خواهد شد که $\phi(ab)\phi(c) = \phi(a)\phi(b)c$. حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم:

(۱) $\min\{m_i, n_i\} = 0$: فرض می‌کنیم $0 = m_i < n_i$. (برای $0 = n_i < m_i$ نیز استدلال مشابهی خواهیم داشت.) در این صورت در $\phi(ab)\phi(c)$، عامل $p_i^{n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ و در $\phi(a)\phi(b)c$، عامل $p_i^{n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ را می‌یابیم.

(۲) $\min\{m_i, n_i\} = m_i > 0$: (برای $0 < n_i \le m_i$ نیز استدلال مشابهی خواهیم داشت.) در اینجا در $\phi(ab)\phi(c)$، جملهٔ $p_i^{m_i+n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)p_i^{m_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ و در $\phi(a)\phi(b)c$، جملهٔ

$$p_i^{m_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)p_i^{n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)p_i^{m_i} = p_i^{m_i+n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)p_i^{m_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

را می‌یابیم.

۹

توابع مولد

بند ۱.۹

۱. تعداد جوابهای صحیح معادلات مفروض برابر است با

الف) ضریب x^{20} در $(1+x+x^2+\dots+x^7)^4$.

ب) ضریب x^{20} در $(1+x^2+x^4+\dots+x^{20})^2(1+x+x^2+\dots+x^{20})$ یا در

$$(1+x+x^2+\dots)^2(1+x^2+x^4+\dots)^2$$

پ) ضریب x^{30} در $(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+\dots+x^8)^4$.

ت) ضریب x^{30} در $(1+x+x^2+\dots+x^{30})^3(1+x^2+x^4+\dots+x^{30})(x+x^3+x^5+\dots+x^{29})$

یا در $(1+x+x^2+\dots)^3(1+x^2+x^4+\dots)(x+x^3+x^5+\dots)$

۲. الف) $(1+x+x^2+\dots+x^{25})^5$ یا $(1+x+x^2+\dots)^5$

ب) $x^5(1+x+x^2+\dots)^5$ یا $(x+x^2+\dots+x^{25})^5$

پ) $x^{10}(1+x+x^2+\dots)^5$ یا $(x^2+x^3+\dots+x^{25})^5$

ت) $(1+x+x^2+\dots)^2(x^{10}+x^{11}+x^{12}+\dots)$ یا $(1+x+x^2+\dots+x^{25})^2(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{25})$

ث) $(x^{10}+x^{11}+\dots)^2$ یا $(1+x+x^2+\dots)^3$ یا $(1+x+x^2+\dots+x^{15})^3(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{25})^3$

۳. الف) تابع مولد عبارت است از $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^6$ یا $(1+x+x^2+x^3+\dots)^6$. [در هر مورد، تعداد طرق انتخاب ۱۰ مهره برابر است با ضریب x^{10}.]

ب) تابع مولد عبارت است از $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^r)^n$ یا $(1+x+x^2+x^3+\dots)^n$. [در هر مورد، تعداد طرق انتخاب r شیء برابر است با ضریب x^r.]

۴. الف) عامل اول تعداد سکه‌های یک تومانی و عامل دوم تعداد سکه‌های پنج تومانی را به‌دست می‌دهد.

ب) $f(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)$

Scanned by CamScanner

۵. $c_1+c_2+c_3+c_4=20,\quad -3\le c_1,c_2,\quad -5\le c_3\le 5,\quad 0\le c_4$

$$(3+c_1)+(3+c_2)+(5+c_3)+c_4=31$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=31,\quad 0\le x_1,x_2,x_4,\quad 0\le x_3\le 10$$

درنتیجه، پاسخ مطلوب عبارت است از ضریب x^{31} در تابع مولد $(1+x+x^2+\cdots+x^{10})^3(1+x+x^2+\cdots)$.

۶. الف) $(1+ax)(1+bx)(1+cx)\cdots(1+rx)(1+sx)(1+tx)$

ب) $(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)\cdots(1+tx+t^2x^2+t^3x^3)$

بند ۲.۹

۱. الف) $(1+x)^8$ ب) $8(1+x)^7$ پ) $(1+x)^{-1}$ ت) $\frac{x^3}{1-x}$

ث) $\frac{6x^3}{1+x}$ ج) $(1-x^2)^{-1}$ چ) $(1-2x)^{-1}$ ح) $\frac{x^2}{1-ax}$

۲. الف) $-27, 54, -36, 8, 0, 0, 0, \cdots$ ب) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots$

پ) $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}=x^3[1+x^2+x^4+x^6+\cdots]=x^3+x^5+x^7+x^9+\cdots$. بنابراین، $f(x)$ دنبالهٔ ۰، ۰، ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ۱

برابر است با $\binom{18}{12} = (-1)^{12}(-1)^{12}\binom{-1-12+12+5}{12}(-1)^{12} = (-1)^{12}\binom{-5}{12}$. این عدد برابر است با تعداد طرق توزیع ۲۴ بطری از یک نوع نوشابه بین این افراد به‌طوری که هر یک از آنها دست‌کم دو بطری بگیرد. چون دو نوع نوشابه وجود دارد، این دو صندوق نوشابه را می‌توان، با توجه به شرطهای مفروض، به $\binom{18}{12}^2$ طریق توزیع کرد.

ب) ضریب x^{24} در $(x^3 + x^2 + \cdots)^5$ برابر است با $\binom{13}{6}$ و پاسخ مطلوب $\binom{13}{6}\binom{18}{12}$ است.

۱۳.

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{12} = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12}$$

$$= x^{12}(1-x^6)^{12}\left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \binom{-12}{2}(-x)^2 + \cdots\right]$$

پاسخ مطلوب عددی است که صورت آن برابر است با ضریب x^{18} در

$$(1-x^6)^{12}\left[\binom{12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \cdots\right] = \left[1 - \binom{12}{1}x^6 + \binom{12}{2}x^{12} - \binom{12}{3}x^{18} + \cdots + x^{72}\right]\left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \cdots\right]$$

و این ضریب برابر است با

$$\binom{-12}{18}(-1)^{18} - \binom{12}{1}\binom{-12}{12}(-1)^{12} + \binom{12}{2}\binom{-12}{6}(-1)^6 - \binom{12}{3}\binom{-12}{0}$$

$$= \binom{29}{18} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{17}{6} - \binom{12}{3}$$

پاسخ نهایی از تقسیم نتیجهٔ اخیر بر 6^{12}، یعنی بر اندازهٔ فضای نمونه‌ای، به‌دست می‌آید.

۱۴. $(x^2+x^3+x^4+x^5)^8(x^5+x^{10})^2 = x^{26}(1+x+x^2+x^3)^8(1+x^5)^2$ و از این‌رو، ضریب x^{11} را در

$$\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^8(1+2x^5+x^{10}) = (1-x^4)^8(1-x)^{-8}(1+2x^5+x^{10}) =$$

$$\left[1+\binom{8}{1}(-x^4) + \binom{8}{2}(-x^4)^2 + \cdots + (-x^4)^8\right]\left[\binom{-8}{0} + \binom{-8}{1}(-x) + \binom{-8}{2}(-x)^2 + \cdots\right](1+2x^5+x^{10})$$

لازم داریم. این ضریب برابر است با

$$\left[\binom{-8}{14}(-1)^{14} + 2\binom{-8}{9}(-1)^9 + \binom{-8}{4}(-1)^4\right] - \binom{8}{1}\left[\binom{-8}{10}(-1)^{10} +\right.$$

$$2\binom{-8}{5}(-1)^5 + \binom{-8}{0}\Big] + \binom{8}{2}\left[\binom{-8}{6}(-1)^6 + 2\binom{-8}{1}(-1)\right] - \binom{8}{3}$$

$$\left[\binom{-8}{2}(-1)^2\right] = \left[\binom{21}{14} + 2\binom{16}{9} + \binom{11}{4}\right] - \binom{8}{1}\left[\binom{17}{10} + 2\binom{12}{5} + \binom{7}{0}\right] + \binom{8}{2}\left[\binom{13}{6} + 2\binom{8}{1}\right] - \binom{8}{3}\binom{9}{2}$$

سپس این نتیجه را بر $(2^2)(4^8)$، یعنی اندازهٔ فضای نمونه‌ای، تقسیم می‌کنیم تا احتمال مطلوب تعیین شود.

۱۵. در اینجا ضریب x^n را در

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2(1+x^2+x^4+\cdots) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

لازم داریم. با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده می‌بینیم که

$$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1/8)}{1+x} + \frac{(1/8)}{1-x} + \frac{(1/4)}{(1-x)^2} + \frac{(1/2)}{(1-x)^3}$$

ضریب x^n در این عبارت برابر است با

$$(-1)^n\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)\binom{-2}{n}(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)\binom{-3}{n}(-1)^n$$

$$= \frac{1}{8}[1+(-1)^n] + \left(\frac{1}{4}\right)\binom{n+1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)\binom{n+2}{n}$$

۱۶. برای مدادها ضریب x^{12} را در $(x+x^2+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)^3 = x^7\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ لازم داریم. این ضریب برابر است با ضریب x^5 در $(1-x)^{-2}$، که عبارت است از $\binom{8}{5} = (-1)^5\binom{-2}{5}$. برای خودکارها ضریب x^{16} را در $(x^3+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^5)^3 = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3$ لازم داریم. این ضریب برابر است با ضریب x^{13} در

$$(1-x^6)^3(1-x)^{-4} = \left[1 - \binom{3}{1}x^6 + \binom{3}{2}x^{12} - x^{18}\right]\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \cdots\right]$$

که عبارت است از

$$\binom{-4}{13}(-1)^{13} - \binom{3}{1}\binom{-4}{7}(-1)^7 + \binom{3}{2}\binom{-4}{1}(-1) = \binom{16}{13} - \binom{3}{1}\binom{10}{7} + \binom{3}{2}\binom{4}{1}$$

بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد کل توزیعها، با توجه به شرایط داده شده، برابر است با

$$\binom{8}{5}\left[\binom{16}{13} - \binom{3}{1}\binom{10}{7} + \binom{3}{2}\binom{4}{1}\right]$$

Scanned by CamScanner

۱۷. $(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1} = [1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)]^{-1}$

$$= 1 + \underbrace{(x+x^2+\cdots+x^6)}_{\text{یک بار کشیدن}} + \underbrace{(x+x^2+\cdots+x^6)^2}_{\text{دوبار کشیدن}} + \underbrace{(x+x^2+\cdots+x^6)^3}_{\text{سه‌بار کشیدن}} + \cdots$$

در این عبارت، ۱ معرف این است که هیچ مهره‌ای را از کیسه بیرون نکشیده‌ایم.

۱۸. $$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \left[\binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}(-4x) + \binom{-1/2}{2}(-4x)^2 + \cdots\right]$$

ضریب x^n عبارت است از

$$\binom{-1/2}{n}(-4)^n =$$

$$\frac{((-1/2)-n+1)((-1/2)-n+2)\cdots((-1/2)-1)(-1/2)}{n!}(-4)^n =$$

$$\frac{(1+2n-2)(1+2n-4)\cdots(1+2)(1)}{n!}(2)^n =$$

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(5)(3)(1)}{n!}(2)^n =$$

$$\frac{[(2n-1)(2n-3)\cdots(5)(3)(1)](2^n)(n!)}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$$

۱۹. الف) تفاضلها عبارت‌اند از ۱ − ۳، ۳ − ۶، ۶ − ۸، ۸ − ۱۵ و ۱۵ − ۱۵، یعنی ۲، ۳، ۲، ۷ و ۰. بنابراین، $2+3+2+7+0=14$.

ب) $\{3,5,8,15\}$ پ) $\{1+a, 1+a+b, 1+a+b+c, 1+a+b+c+d\}$

۲۰. با استفاده از ایده‌های مثال ۱۵.۹، یکی از این نوع زیرمجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$1 \le 1 < 3 < 6 < 10 < 15 < 30 < 42 \le 50$$

این زیرمجموعه تفاضلهای ۰، ۲، ۳، ۴، ۵، ۱۵، ۱۲ و ۸ را، که مجموعشان ۴۹ است، به‌دست می‌دهد.

یکی دیگر از این نوع زیرمجموعه‌ها عبارت است از

$$1 \le 7 < 9 < 15 < 21 < 32 < 43 < 50 \le 50$$

که تفاضلهای ۶، ۲، ۶، ۶، ۱۱، ۱۱، ۷ و ۰ را، که باز هم مجموعشان ۴۹ است، به‌دست می‌دهد.

این ملاحظات تناظر یک به‌یکی را بین این نوع زیرمجموعه‌ها و جوابهای صحیح

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_8 = 49$$

که در آن $c_1, c_8 \ge 0$ و به‌ازای هر $2 \le i \le 7$ داریم $c_i \ge 2$، القا می‌کند. تعداد این جوابها برابر است با ضریب x^{49} در تابع مولد

$$(1+x+x^2+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)^6(1+x+x^2+\cdots) = \frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{x^{12}}{(1-x)^6}\right] = \frac{x^{12}}{(1-x)^8}$$

بنابراین، پاسخ مطلوب برابر است با ضریب x^{37} در $(1-x)^{-8}$، که عبارت است از

$$\binom{-8}{37}(-1)^{37} = (-1)^{37}\binom{8+37-1}{37}(-1)^{37} = \binom{44}{37}$$

۲۱. $$c_k = \sum_{i=0}^{k} i(k-i)^2 = \sum_{i=0}^{k} i(k^2-2ki+i^2) = k^2\sum_{i=0}^{k} i - 2k\sum_{i=0}^{k} i^2 + \sum_{i=0}^{k} i^3$$

$$= k^2[k(k+1)/2] - 2k[k(k+1)(2k+1)/6] + [(k^2)(k+1)^2/4]$$

$$= (k^3+k^2)/2 - (k^2)(k+1)(2k+1)/3 + (k^2)(k+1)^2/4$$

$$= (1/12)[6k^3+6k^2-4k^2(2k^2+3k+1)+3k^2(k^2+2k+1)]$$

$$= (1/12)[k^3-k^2] = (1/12)(k^2)(k^2-1)$$

۲۲. الف) (یک) $c_0 = a_0b_0 = 1$، $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 2$، $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 3$ و $c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 4$.

(دو) $c_0 = 1$، $c_1 = 3$، $c_2 = 7$ و $c_3 = 15$.

(سه) $c_0 = 1$، $c_1 = 2$، $c_2 = 3$ و $c_3 = 4$.

ب) (یک) $c_n = n+1$

(دو) $c_n = 1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$

(سه) $c_0 = 1$، $c_1 = 2$، $c_2 = 3$ و به‌ازای هر $n \ge 3$، $c_n = 4$.

۲۳. الف) $(1+x+x^2+x^3+x^4)(0+x+2x^2+3x^3+\cdots) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$، که در آن $c_0 = 0$، $c_1 = 1$، $c_2 = 1+2 = 3$، $c_3 = 1+2+3 = 6$، $c_4 = 1+2+3+4 = 10$ و به‌ازای هر $n \ge 5$، $c_n = n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4) = 5n-10$.

ب) $(1-x+x^2-x^3+\cdots)(1-x+x^2-x^3+\cdots) = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$، که عبارت است از تابع مولد دنبالهٔ $\binom{-2}{0}, \binom{-2}{1}, \binom{-2}{2}, \binom{-2}{3}, \ldots$. بنابراین، پیچش دو دنبالهٔ مفروض دنبالهٔ $c_0, c_1, c_2, \ldots$ است، که در آن

$$c_n = \binom{-2}{n} = (-1)^n\binom{2+n-1}{n} = (-1)^n\binom{n+1}{n} = (-1)^n(n+1), n \in \mathbf{N}$$

[این دنباله عبارت است از دنبالهٔ یک در میان مثبت و منفی ۱، ۲−، ۳، ۴−، ۵، ۶−، ۷، ....]

پ) $$(1+x+x^2+x^3)(0+x+2x^2+3x^3) = 0 + x + (1+2)x^2$$

$$+ (1+2+3)x^3 + (1+2+3)x^4$$

$$+ (1+2+3)x^5 + (2+3)x^6 + 3x^7$$

Scanned by CamScanner

بنابراین، دنبالهٔ ۰، ۱، ۳، ۶، ۶، ۵، ۳، ۰، ۰، ۰

ب) $g(x) = f(x) + [-1 - a_3](x^3/3!) = e^{5x} - (126x^3)/3!$

پ) $g(x) = 2f(x) + [2 - 2a_1](x^1/1!) + [4 - 2a_2](x^2/2!)$

ت) $g(x) = 2f(x) + 3e^x + [2 - 2a_1 - 3](x^1/1!) + [4 - 2a_2 - 3](x^2/2!) + [8 - 2a_3 - 3](x^3/3!)$

۴. الف) $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 = (e^x - 1)^2 = e^{2x} - \binom{2}{1}e^{2x} + \binom{2}{2}e^{2x} - \binom{2}{0}e^x + \binom{2}{0}$ ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ در $(e^x - 1)^2$ برابر است با $4^{12} - \binom{2}{1}3^{12} + \binom{2}{2}2^{12} - \binom{2}{0}1^{12}$.

ب) چند تابع پوشا از $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ در $B = \{$سیاه، آبی، سفید، قرمز$\}$ وجود دارد؟

پ) $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 = e^{2x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)(e^{2x})(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{4x} + 2e^{2x} + 1)$$

بنابراین، ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ برابر است با $\frac{1}{4}[4^{12} + 2(2^{12})]$ و این عدد، تعداد پیامهایی را به‌دست می‌دهد که در آنها هم تعداد پرچمهای آبی زوج است و هم تعداد پرچمهای سیاه.

$$g(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^2 \left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 = e^{2x}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^{2x} + 1)$$

ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ در $g(x)$ برابر است با $\frac{1}{4}[4^{12} - 2(2^{12})]$ و این عدد، تعداد پیامهایی را به‌دست می‌دهد که در آنها هم تعداد پرچمهای آبی فرد است هم تعداد پرچمهای سیاه. درنتیجه، تعداد پیامهایی که در آنها تعداد کل پرچمهای آبی و سیاه زوج است برابر است با

$$\frac{1}{4}[4^{12} + 2(2^{12})] + \frac{1}{4}[4^{12} - 2(2^{12})] = \left(\frac{1}{2}\right)(4^{12})$$

۵. الف) $(1 + x)^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)^2$

ب) $(1 + x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2$

پ) $(1 + x)^3\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)^2$

۶. $(1 + x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$

۷. پاسخ مطلوب برابر است با ضریب $\frac{x^{25}}{25!}$ در $\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)^2$

۸. $h(x) = f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2\left(\frac{x^2}{2!}\right) + c_3\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \cdots$، که در آن

$$c_n\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a_i x^i}{i!}\right)\left(\frac{b_{n-i}x^{n-i}}{(n-i)!}\right) = \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i b_{n-i}}{i!(n-i)!}\right]x^n$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n!}{i!(n-i)!}\right]a_i b_{n-i}\right]\frac{x^n}{n!} = \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}\right]\frac{x^n}{n!}$$

۹. الف) $\frac{1}{2} \times \frac{3^{20} + 1}{3^{20}}$ ب) $\frac{1}{4} \times \frac{3^{20} + 3}{3^{20}}$ پ) $\frac{1}{2} \times \frac{3^{20} - 1}{3^{20}}$

ت) $\frac{1}{2} \times \frac{3^{20} - 1}{3^{20}}$ ث) $\frac{1}{2} \times \frac{3^{20} + 1}{3^{20}}$

۱۰. الف)

$$f(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \cdot (e^x)(e^x)$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - 1)(e^{2x}) = \frac{1}{2}(e^x - 1)(e^{2x} - e^x) = \frac{1}{2}(e^{4x} - e^{3x} - e^{2x} + e^x)$$

پاسخ مطلوب برابر است با ضریب $\frac{x^{20}}{20!}$ در $f(x)$ و این ضریب عبارت است از

$$\frac{1}{2}(4^{20} - 3^{20} - 2^{20} + 1)$$

ب) $g(x) = \left(1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)^2$

$$= e^{2x} - \binom{4}{1}e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \binom{4}{2}e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - \binom{4}{3}e^x\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^4$$

ضریب $\frac{x^{20}}{20!}$ در $g(x)$ برابر است با

$$4^{20} - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)(3^{18})(20)(19) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)2^{16}(20)(19)(18)(17) - \binom{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right)$$

پ) $h(x) = \left(1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)^2$

$$= e^{2x} - \binom{4}{1}e^{2x}\left(\frac{x^2}{6}\right) + \binom{4}{2}e^{2x}\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - \binom{4}{3}e^x\left(\frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{6}\right)^4$$

ضریب $\frac{x^{20}}{20!}$ در $h(x)$ برابر است با

$$4^{20} - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)(3^{17})(20)(19)(18) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2(2^{14})(20)(19)(18)(17)(16)(15)$$

$$- \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{20!}{11!}\right)$$

Scanned by CamScanner

ت) ضریب $\frac{x^{20}}{20!}$ در $(e^x)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)=e^{3x}+e^{3x}\left(\frac{x^2}{2!}\right)$ برابر است با

$$3^{20}+\frac{1}{2}(3^{18})(20)(19)$$

۱۱. الف)

$$\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

ب)

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\left[(x)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^4}{4!}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\right]$$

بند ۵.۹

۱. $f(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ مولد $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ است $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=0^2+1^2\times x+2^2\times x^2+3^2\times x^3+\cdots$،

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right]=1^2+2^2\times x+3^2\times x^2+\cdots،$$

$$x\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right]=0^2+1^2\times x+2^2\times x^2+3^2\times x^3+\cdots$$

درنتیجه،

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right]=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$

و بنابراین، $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^5}$ مولد $0^2, 1^2, 0^2+1^2+2^2, 0^2+1^2+2^2+3^2, \ldots$ است و ضریب x^n برابر است با $\sum_{i=0}^{n} i^2$.

$$(x^2+4x^2+x)(1-x)^{-5}=(x^3+4x^2+x)\left[\binom{-5}{0}+\binom{-5}{1}(-x)+\binom{-5}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

در اینجا ضریب x^n برابر است با

$$\binom{-5}{n-3}(-1)^{n-3}+4\binom{-5}{n-2}(-1)^{n-2}+\binom{-5}{n-1}(-1)^{n-1}$$

$$=\binom{n+1}{n-3}+4\binom{n+2}{n-2}+\binom{n+3}{n-1}$$

$$=(1/4!)[(n+1)(n)(n-1)(n-2)$$

$$+4(n+2)(n+1)(n)(n-1)+(n+3)(n+2)(n+1)(n)]$$

$$=[(n+1)(n)/4!](6n^2+6n)=(1/4)(n+1)(n)(n^2+n)$$

$$=[(n+1)(n)/2]^2$$

۲. الف)

$$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=$$

$$(d/dx)[1/(1-x)]=1/(1-x)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

$$(d/dx)[1/(1-x)^2]=2(1-x)^3=0+2\cdot 1+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+5\cdot 4x^3+\ldots$$

$$2x^2/(1-x)^3=0\cdot(-1)+1\cdot 0x+2\cdot 1x^2+3\cdot 2x^3+4\cdot 3x^4+\ldots$$

ب) با توجه به قسمت (الف)، $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$ مولد دنبالهٔ a_n، $n\geq 0$، است، که در آن $a_n=\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3}=2x^2(1-x)^{-3}=2x^2\left[\binom{-3}{0}+\binom{-3}{1}(-x)+\binom{-3}{2}(-x)^2+\ldots\right]$$

ضریب x^n برابر است با $2\binom{-3}{n-2}(-1)^{n-2}=2\binom{n+1}{n-2}=\frac{2(n+1)n(n-1)}{3!}$.

یادداشت:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)=\sum_{i=0}^{n} i^2-\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}[(2n+1)-3]=\frac{2(n+1)n(n-1)}{3!}$$

۳. $(1-x)f(x)=(1-x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x^3+\ldots$

بنابراین، $(1-x)f(x)$ تابع مولد دنبالهٔ $a_0, a_1-a_0, a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots$ است.

۴. تابع $(1+x)f(x)$ مولد دنبالهٔ $a_0, a_0+a_1, a_1+a_2, a_2+a_3, \ldots$ است. برای دنبالهٔ $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_2+a_3+a_4, \ldots$ تابع مولد عبارت است از $(1+x+x^2)f(x)$.

۵.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i-a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i-a_n\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=f(x)/(1-x)-f(x)$$

$$=[f(x)-f(x)(1-x)]/(1-x)=xf(x)/(1-x)$$

۶. $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\left(\frac{1}{x-1}\right)[(a_0-a_0)+(a_1x-a_1)+(a_2x^2-a_2)+\cdots]$. به‌ازای $n\geq 0$،

$\frac{a_nx^n-a^n}{x-1}=\frac{a_n(x^n-1)}{x-1}=a_n(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$. بنابراین،

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=a_1+a_2(x+1)+a_3(x^2+x+1)+a_4(x^3+x^2+x+1)+\cdots$$

درنتیجه، به‌ازای هر $n\geq 0$ ضریب x^n برابر است با $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

۷. چون e^x تابع مولد $1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$ است، $\frac{e^x}{1-x}$ مولد دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ است، که در آن $a_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$.

Scanned by CamScanner

تمرینات تکمیلی

۱. الف) $\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{6}{1-x}$ ب) $\frac{1}{1-ax}$

پ) $\frac{1}{1-(1+a)x}$ ت) $\frac{1}{1-ax}+\frac{1}{1-x}$

۲. فرض کنیم $f(x)=(x^5+x^8+x^{11}+x^{12}+x^{17})^{10}=x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$، ضریب x^{82} در $f(x)$ برابر است با ضریب x^{32} در

$$\left(\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\right)^{10}=(1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}=\left[1-\binom{10}{1}x^{15}+\binom{10}{2}x^{30}-\cdots+x^{150}\right]\times$$
$$\left[\binom{-10}{0}+\binom{-10}{1}(-x^3)+\binom{-10}{2}(-x^3)^2+\cdots\right]$$

این ضریب برابر است با

$$\binom{-10}{11}(-1)^{11}-\binom{10}{1}\binom{-10}{6}(-1)^6+\binom{10}{2}\binom{-10}{1}(-1)^1$$
$$=\binom{20}{11}-\binom{10}{1}\binom{15}{6}+\binom{10}{2}\binom{10}{1}$$

۳. تابع مولد برای هر نوع فشنگ عبارت است از $(x^2+x^3+\cdots+x^7)^2=x^8(1+x+x^2+\cdots+x^5)^2$. ضریب x^{12} در

$$(1-x^6)^2(1-x)^{-2}=\left[1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\cdots\right]\left[\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)\right.$$
$$\left.+\binom{-4}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

برابر است با $\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\binom{4}{6}-\binom{2}{1}\binom{15}{12}=\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{2}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6+\binom{2}{2}\binom{-4}{0}$. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، پاسخ مطلوب عبارت است از $\left[\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\binom{4}{6}-\binom{2}{1}\binom{15}{12}\right]^2$.

۴. $f(x)=(1+x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^2+x^6+x^{10}+\cdots)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{3i}+x^{5i}+\cdots)$.

۵. فرض کنیم $f(x)$ تابع مولد تعداد افزارهایی از n باشد، که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکرار نمی‌شود (ولی جمعوندهای فرد می‌توانند تکرار شوند). $g(x)$ تابع مولد تعداد افزارهایی از n است، که در آنها هیچ جمعوندی بیشتر از سه بار حضور ندارد. دراین‌صورت،

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6+x^9)\cdots$$
$$=[(1+x)(1+x^2)][(1+x^2)(1+x^4)][(1+x^3)(1+x^6)]\cdots$$
$$=[(1-x^2)/(1-x)](1+x^2)[(1-x^4)/(1-x^2)](1+x^4)[(1-x^6)/(1-x^3)](1+x^6)\cdots$$

$$=[1/(1-x)](1+x^2)[1/(1-x^2)](1+x^2)[1/(1-x^3)](1+x^6)\cdots$$
$$=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^4)(1+x^5+x^{10}$$
$$+x^{15}+\cdots)(1+x^6)\cdots=f(x)$$

۶. نتیجهٔ موردنظر برابر است با ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ در

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4=(e^x-x)^4=e^{4x}-\binom{4}{1}xe^{3x}+\binom{4}{2}x^2e^{2x}-\binom{4}{3}x^3e^x+\binom{4}{4}x^4$$

این ضریب عبارت است از

$$4^{10}-\binom{4}{1}(10)(3^9)+\binom{4}{2}(10)(9)(2^8)-\binom{4}{3}(10)(9)(8)$$

۷. الف)

$$(1-2x)^{-5/2}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-5/2)((-5/2)-1)((-5/2)-2)\cdots((-5/2)-r+1)}{r!}(-2x)^r$$
$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(5)(7)(9)\cdots(3+2r)}{r!}x^r$$

بنابراین، $g(x)$ تابع مولد نمایی برای ۱، ۵، (۵)(۷)، (۵)(۷)(۹)، ... است.

ب)

$$(1-ax)^b=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(b)(b-1)(b-2)\cdots(b-r+1)}{r!}(-ax)^r$$
$$=1-abx+b(b-1)a^2x^2/2!+\cdots$$

درنتیجه، با مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه x می‌بینیم که $-ab=7$، $b(b-1)a^2=7\times 11$ و به این ترتیب داریم $a=4$ و $b=-\frac{7}{4}$.

۸. بازای هر افراز n، سطری از $n+k$ نقطه بالای سطر اول در نمودار فررز آن بگذارید. نتیجهٔ این عمل، نمودار فررز برای افرازی از $2n+k$ است، که در آن $n+k$ بزرگترین جمعوند است. از این تناظر یک به‌یک تساوی $P_1=P_2$ حاصل می‌شود. ترانهش نمودار فررز برای هر افرازی از P_2، نمودار فررز برای افرازی از P_2 را به‌دست می‌دهد و برعکس. اکنون می‌توان نتیجهٔ موردنظر را با توجه به این دو نکته به‌دست آورد.

۹. بازای هر $n\in Z^+$، $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n$. اگر از هر دو طرف مشتق بگیریم، می‌بینیم که

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

بازای $x=1$ داریم

$$n(1+1)^{n-1}=n(2^{n-1})=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$$

Scanned by CamScanner

۱۰. $f(x) = (1+x)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6+x^9)\cdots(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots+x^{k^2})\cdots$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k^2} x^i\right)$$

۱۱. الف) ضریب x^{20} در $(x+x^2+\cdots)^{12} = x^{12}(1+x+x^2+\cdots)^{12}$ برابر است با ضریب x^8 در

$$(1+x+x^2+\cdots)^{12} = (1-x)^{-12}$$

که این هم عبارت است از

$$\binom{-12}{8}(-1)^8 = (-1)^8\binom{12+8-1}{8}(-1)^8 = \binom{19}{8}$$

ب) ضریب x^{10} در $(x+x^2+\cdots)^6 = x^6(1+x+x^2+\cdots)^6$ برابر است با $\binom{9}{4} = \binom{-6}{4}(-1)^4$.
احتمال وقوع چنین توزیعی $\binom{19}{8}/\binom{9}{4}\binom{9}{4}$ است.

۱۲. عدد m، $0 \le m \le n$، را ثابت می‌گیریم. m شیء را می‌توان به $k(k+1)\cdots(k+m-1)$ طریق مرتب کرد. چون $\binom{n}{m}$ طریق برای انتخاب این m شیء وجود دارد، تعداد طرق انتخاب m شیء از n شیء وگذاشتن آنها در ظرفها به‌صورتی که مشخص شده است برابر است با $\binom{n}{m}(k)(k+1)\cdots(k+m-1)$.

$$\frac{e^x}{(1-x)^k} = \left[1+x+\left(\frac{x^2}{2!}\right)+\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots\right]\times$$
$$\left[\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}(-x)+\binom{-k}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در $e^x(1-x)^{-k}$ برابر است با

$$\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}(-1)(n)+\binom{-k}{2}(-1)^2(n)(n-1)+\cdots+\binom{-k}{n-1}(-1)^{n-1}\left(\frac{n!}{1!}\right)$$
$$+\binom{-k}{n}(-1)^n\left(\frac{n!}{0!}\right) = \sum_{m=0}^{n}\binom{-k}{m}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-1}{m}\frac{n!}{(n-m)!}$$

و

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(k)(k+1)\cdots(k+m-1) = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(m+k-1)!}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}\frac{n!}{(n-m)!} = \sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-1}{m}\frac{n!}{(n-m)!}$$

۱۰

روابط بازگشتی

بند ۱.۱۰

۱. الف) به‌ازای $n \ge 1$، $a_n = 5a_{n-1}$ و $a_0 = 2$. پ) به‌ازای $n \ge 1$، $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$ و $a_0 = 1$.

ب) به‌ازای $n \ge 1$، $a_n = -3a_{n-1}$ و $a_0 = 6$. ت) به‌ازای $n \ge 1$، $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1}$ و $a_0 = 7$.

۲. الف) $a_{n+1} = 1.5a_n$ و درنتیجه، به‌ازای هر $n \ge 0$، $a_n = (1.5)^n a_0$.

ب) $4a_n = 5a_{n-1}$ و درنتیجه، به‌ازای هر $n \ge 0$، $a_n = (1.25)^n a_0$.

پ) $3a_{n+1} = 4a_n$، $3a_1 = 15 = 4a_0$، $a_0 = \frac{15}{4}$ و بنابراین، به‌ازای هر $n \ge 0$

$$a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n a_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n\left(\frac{15}{4}\right) = 5\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

ت) $a_n = \frac{3}{2}a_{n-1}$، $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_0$، $81 = a_4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 a_0$. بنابراین، $a_0 = 16$ و به‌ازای هر $n \ge 0$،

$$a_n = 16\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

۳. به‌ازای هر $n \ge 0$، $a_{n+1} - da_n = 0$. بنابراین، $a_n = d^n a_0$. از $\frac{153}{49} = a_3 = d^3 a_0$ و $\frac{1377}{2401} = a_5 = d^5 a_0$ نتیجه می‌شود که $\frac{a_5}{a_3} = d^2 = \frac{9}{49}$ و $d = \pm\frac{3}{7}$.

۴. به‌ازای $n \ge 0$، $a_{n+1} = a_n + 2.5a_n$.

۵. $a_n = (3.5)^n a_0 = (3.5)^n 1000$. به‌ازای $n = 12$ داریم $a_n = (3.5)^{12}(1000) \doteq 3379220508$.

$P_n = 100(1+0.015)^n$، $P_0 = 100$.

از $100(1.015)^n = 200$ نتیجه می‌شود که $(1.015)^n = 2$

$$(1.015)^{27} \doteq 2.0133 \quad , \quad (1.015)^{26} \doteq 1.9835$$

بنابراین، شخص

Scanned by CamScanner