**۱-آرایه T شامل n عنصر متمایز را در نظر بگیرید. بین یک جفت اندیس مانند (j, i) از این آرایه یک نابه جایی وجود دارد اگر:**

j > i و T[j] < T[i]

الف) رابطه‌ی بین زمان اجرای insertion sort و تعداد نابه‌جایی‌ها در آرایه‌ی ورودی چیست؟

| |
|---|
| الف) تعداد دفعات اجرای حلقه داخلی وابسته به تعداد نابجایی‌ها می‌باشد به طوری که در هر بار اجرای این حلقه یکی از تعداد نابجایی‌ها کم می‌شود تا زمانی که یک عنصر در جای درست خود قرار بگیرد.<br>پس تعداد نابجایی ها = تعداد دفعات اجرای حلقه |

ب) اگر در آرایه T یک نابه جایی بین دو اندیس i و j وجود داشته باشد، نشان دهید این آرایه دارای حداقل j − i نابه جایی است.

| |
|---|
| ب) فرض کنید i و j موجود است به طوری که<br>j > i و T[j] < T[i]<br>برای هر عنصر بین این دو اندیس حداقل یکی از دو حالت زیر را داریم:<br>$i<k<j \Rightarrow T[k]>T[j]$ or $T[k]<T[i]$<br>زیرا اگر داشته باشیم<br>$T[j]>T[k]>T[i]$<br>آنگاه فرض اولیه سوال نقض می‌شود<br>در نتیجه به ازای هر عنصر میانی یک نابجایی میان آن و یکی از عناصر i و یا j وجود دارد<br>$\Rightarrow$ \|i-j\| نابجایی داریم |

**۲- زمان اجرای شبه کد زیر را (خط به خط) تحلیل کنید.**

| | |
|---|---|
| 1. `x=0;` | - |
| 2. `for(i=1;i<=n;i++){` | $n_1=n$ |
| 3. `for(j=1;j<=n;j++) x++;` | $n_2=n$ |
| 4. `j=1;` | - |
| 5. `while(j<n){` | $n_3=\lceil logn \rceil$ |
| 6. `x++; j= j*2;` | - |
| 7. `}` | - |
| 8. `}` | - |
| Time complexity $\rightarrow n_1 \times (n_2 + n_3) = n \times (n + \lceil logn \rceil) = n^2 + n \times \lceil logn \rceil$ | |

**۳-با استفاده از شبه کد زیر میخواهیم index عدد a را در آرایه ی A[1…n] بیابیم. اگر بدانیم احتمال حضور a در ⅓ ابتدایی آرایه x باشد، در ⅓ میانی 3x و در ⅓ پایانی 6x باشد، شبه کد زیر را در بهترین، بدترین و حالت متوسط بررسی کنید(محاسبات را دقیق بنویسید)**

```
for(i = 1; i <= n ; i++)
    if (A[i] == a)
        return i
```

بهترین حالت: عنصر a در خانه ی اول باشد => 1اُمین گردش حلقه O(1)

بدترین حالت: عنصر a در خانه ی آخر باشد => nاُمین گردش حلقه O(n)

حالت متوسط:

در حالت متوسط باید احتمال حضور عنصر a در خانه ی kام را در تعداد گردش های لازم در لوپ برای رسیدن به خانه ی kام ضرب کنیم و حاصل جمع تمامی این ضرب ها جواب ما میشود.

مجموع احتمال ها:

$$\frac{n}{3} \times x + \frac{n}{3} \times 3x + \frac{n}{3} \times 6x = 1 \quad \Rightarrow \frac{n}{3} \times 10x = 1 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{10n}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n/3} x + \sum_{i=n/3+1}^{2n/3} 3x + \sum_{i=2n/3+1}^{n} 6x =$$

$$x \times ( \sum_{i=1}^{n/3} 1 + \sum_{i=n/3+1}^{2n/3} 3 + \sum_{i=2n/3+1}^{n} 6) =$$

$$x \times (\frac{\frac{n}{3}\times(\frac{n}{3}+1)}{2} + 3 \times \frac{\frac{n}{3}\times(n+1)}{2} + 6 \times \frac{\frac{n}{3}\times(5\times\frac{n}{3}+1)}{2}) =$$

$$\frac{x\times n}{6} \times (\frac{n}{3} + 1 + 3n + 3 + 10n + 6) =$$

$$\frac{x\times n}{6}(\frac{40n}{3} + 10) = \frac{3}{10n} \times \frac{n}{6} \times (\frac{40}{3}n + 10) =$$

$$\frac{1}{20}(\frac{40n}{3} + 10) = \frac{2n}{3} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow O(n)$$

**۴-در یک آرایه میخواهیم بررسی کنیم که آیا دو عدد مانند a, b موجود هستند بطوریکه(k متغیر): a + b = k**
**یک بار برای آرایه sort شده و بار دیگر برای آرایه نامرتب با بیان الگوریتم پیشنهادی پیچیدگی زمانی را محاسبه کنید**

برای آرایه نامرتب:

```
For i = 0 to array_size
{
          For j = i+1 to array_size
          {
                    if (array[i] + array[j] = k) then
                    print(i, j)
                    End
          }
}
```

که پیچیدگی زمانی آن در بدترین حالت(بار اول حلقه به اندازه یکی کمتر از طول آرایه اجرا شده، بار دوم دوتا کمتر و به همین ترتیب... ) :

$(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n*(n-1)/2 \Rightarrow O(n\wedge 2)$

برای آرایه مرتب شده داریم:

```
i = 0
j = array_size
While i < j
{
          if (array[i] + array[j] = k) then
                    print(i, j)
                    End
          else if (array[i] + array[j] > k) then
                    j = j-1
          else
                    i = i-1
}
```

که در بدترین حالت کل خانه های آرایه پیمایش میشود:

$O(n)$

## ۵-موارد زیر را ثابت کنید.

نکته: در مواردی که می‌خواهید ثابت کنید $A = \Theta(B)$ باید هر دو عبارت $A = O(B)$ و $A = \Omega(B)$ را اثبات کنید.

نکته: برای قسمت c و d از تقریب استرلینگ استفاده کنید

برای موارد a و b هر اثبات صحیحی قابل قبول است

a) $lg(n!) = \Theta(lg(n^n)) \equiv lg(n!) = \Theta(nlg(n))$

با استفاده از تقریب استرلینگ:

$$\begin{aligned}
\lg(n!) &= \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \lg\sqrt{2\pi n} + \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n + \lg\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \Theta(\sqrt{n}) + n\lg\frac{n}{e} + \lg\left(\Theta(1)+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \Theta(\sqrt{n}) + \Theta(n\lg n) + \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \Theta(n\lg n).
\end{aligned}$$

با استفاده از O و Ω :

$$lg(n!) = lg(1 \times 2 \times .. \times n) = lg(1) + lg(2) + .. + lg(n) \le \underbrace{lg(n) + lg(n) + \ldots + lg(n)}_{\text{n times}} = n.lg(n)$$

$$\Rightarrow lg(n!) = O(nlg(n))$$

$$\begin{aligned}
lg(n!) = lg(1 \times 2 \times .. \times n) = lg(1) + lg(2) + .. + lg(\tfrac{n}{2}) + .. + lg(n) &\ge lg(\tfrac{n}{2}) + .. + lg(n) \ge \\
&lg(\tfrac{n}{2}) + .. + lg(\tfrac{n}{2}) \ge \\
&\tfrac{n}{2}.lg(\tfrac{n}{2}) = \tfrac{n}{2}(lg(n) - lg(2))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow lg(n!) = \Omega(nlg(n))$$

b) $n^{\frac{1}{lg\, n}} = \Theta(1)$

تغییر متغیر $\Rightarrow n = 2^x \Rightarrow n^{\frac{1}{lg\, n}} = (2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$

$2 = \Theta(1)!$

c) $n! = \omega(2^n)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \left(\frac{2e}{n}\right)^n \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2e}{n}\right)^n \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,
\end{aligned}
$$

d) $n! = o(n^n)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)e^n \\
&\ge \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c\sqrt{n}} && \text{(for some constant } c > 0) \\
&\ge \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{cn} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c} = \infty.
\end{aligned}
$$

۶-صحیح یا غلط بودن گزاره‌های زیر را اثبات کنید(در صورتی که گزاره ها غلط هستند مثال نقض کافیست)

a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$

b) $f(n) + g(n) = \Theta(min(f(n), g(n)))$

c) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow lg(f(n)) = O(lg(g(n)))$, $\forall n: lg(g(n)) \geq 1$ *and* $f(n) \geq 1$

d) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

e) $f(n) = O(f(n^2))$

f) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

g) $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$

h) $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

---

a) False, Counterexample: $n = O(n^2)$ but $n^2 \neq O(n)$

b) False, Counterexample: $n + n^2 \neq \Theta(n)$

c) True,

$\exists c, n0 : \forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c.g(n) \underset{log}{\Rightarrow} lg(f(n)) \leq lg(c.g(n)) = lg(c) + lg(g(n)) \Rightarrow$

$lg(f(n)) \leq lg(c).lg(g(n)) + lg(g(n)) = (lg(c) + 1).lg(g(n)) = c'.lg(g(n)) \Rightarrow$

$\exists c', n0 : \forall n \geq n_0,\ lg(f(n)) \leq c'.lg(g(n))$

d) False. Counterexample: $2n = O(n)$ but $2^{2n} \neq 2^n$

e) False, Counterexample: $f(n) = \frac{1}{n}$ but $\frac{1}{n} \neq O(\frac{1}{n^2})$

f) True. $\exists c, n_0\ s.t\ \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq c.g(n)$

$\Rightarrow \frac{1}{c} f(n) \leq g(n) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

g) False. Counterexample: $f(n) = 2^{2n}$ but $2^{2n} \neq O(2^n)$

h) True,

Let $g(n) = o(f(n))$, so we have:

$\exists c, n_0\ s.t\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq c.f(n)$

But we want to prove that $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$ so we should prove:

$\exists c_1, c_2, n_0\ s.t\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow c_1.f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2.f(n)$

**۷- مشخص کنید که به ازای هر جفت (A , B) آیا A از $O, o, \Omega, \omega, \Theta$ تابع B هست یا خیر(مانند ردیف اول)**

| A | B | O | o | Ω | ω | Θ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | $n^3$ | yes | yes | no | no | no |
| $lg^k.n$ | $n^\varepsilon$ | yes | yes | no | no | no |
| $n^k$ | $c^n$ | yes | yes | no | no | no |
| $2^n$ | $2^{\frac{n}{2}}$ | no | no | yes | yes | no |
| $n^{lg\,c}$ | $c^{log\,n}$ | yes | no | yes | no | yes |
| $4^{lg\,n}$ | $n^2$ | yes | no | yes | no | yes |
| $n!$ | $n.2^n$ | no | no | yes | yes | no |
| $1$ | $n^{\frac{1}{lg\,n}}$ | yes | no | yes | no | yes |
| $(lg(n))!$ | $2^{2^n}$ | yes | yes | no | no | no |
| $n^{lg(lg\,(n))}$ | $(lg\,(n))^{lg(n)}$ | yes | no | yes | no | yes |