

## بسمه تعالی

- تمرین سری اول درس ساختمان داده ها و مبانی الگوریتم ها
  - پاسخ تمرین در قالب یک فایل pdf تایپ شده یا دست نویس اسکن شده (مرتب و خوانا) و با نام StudentNumber\_HW1.pdf آپلود شود.
  - مهلت ارسال تمرین تا ساعت 11:59 روز سه شنبه مورخ 29 مهر 1399 می باشد.
  - در صورتی که درمورد این تمرین سوال یا ابهامی داشتید با ایمیل [dsfall1399@gmail.com](mailto:dsfall1399@gmail.com) با تدریس یاران در ارتباط باشید. لطفا برای ایمیل زدن فرمت زیر را در قسمت subject رعایت کنید:  
برای سوال از مباحث مختلف:  
«سوال\_اسم مبحث» (مثال: «سوال\_رشد توابع»)  
برای سوال از یک تمرین خاص:  
«تمرین\_شماره تمرین\_شماره سوال» (مثال: «تمرین\_۱\_۳»)
- همچنین خواهشمند است در متن ایمیل به شماره دانشجویی خود اشاره کنید.

## تحلیل الگوریتم

۱- آرایه  $T$  شامل  $n$  عنصر متمایز را در نظر بگیرید. بین یک جفت اندیس مانند  $(j, i)$  از این آرایه یک نابه جایی وجود دارد اگر:

$$j > i \text{ و } T[j] < T[i]$$

الف) رابطه‌ی بین زمان اجرای insertion sort و تعداد نابه‌جایی‌ها در آرایه‌ی ورودی چیست؟

ب) اگر در آرایه  $T$  یک نابه جایی بین دو اندیس  $i$  و  $j$  وجود داشته باشد، نشان دهید این آرایه دارای حداقل  $i - j$  نابه جایی است.

۲- زمان اجرای شبه کد زیر را (خط به خط) تحلیل کنید.

```
1. x=0;
2. for(i=1;i<=n;i++){
3.     for(j=1;j<=n;j++) x++;
4.     j=1;
5.     while(j<n){
6.         x++; j= j*2;
7.     }
8. }
```

۳- با استفاده از شبه کد زیر می‌خواهیم index عدد a را در آرایه ی  $A[1 \dots n]$  بیابیم. اگر بدانیم احتمال حضور a در تمام درایه‌های  $\frac{1}{3}$  ابتدایی آرایه برابر x باشد، در تمام درایه‌های  $\frac{1}{3}$  میانی برابر  $3x$  و در تمام درایه‌های  $\frac{1}{3}$  پایانی برابر  $6x$  باشد، شبه کد زیر را در بهترین، بدترین و حالت متوسط بررسی کنید (محاسبات را دقیق بنویسید)

```
for(i = 1; i <= n ; i++)
    if (A[i] == a)
        return i
```

### مرتب سازی

۴- در یک آرایه می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا دو عدد مانند a, b موجود هستند بطوریکه  $k$  (متغیر):  $a + b = k$  یک بار برای آرایه‌ی مرتب شده و بار دیگر برای آرایه نامرتب الگوریتم‌هایی پیشنهاد دهید و پیچیدگی زمانی آن‌ها را مقایسه کنید. (در حالت حل مساله با آرایه‌ی مرتب شده پیچیدگی زمانی مرتب کردن آرایه را در نظر نگیرید)

### رشد توابع

۵- موارد زیر را ثابت کنید.

نکته:

- در مواردی که می‌خواهید ثابت کنید  $A = \Theta(B)$  باید هر دو عبارت  $A = O(B)$  و  $A = \Omega(B)$  را اثبات کنید.

- برای قسمت c و d از تقریب استرلینگ استفاده کنید

- a)  $\lg(n!) = \Theta(\lg(n^n))$
- b)  $n^{\frac{1}{\lg n}} = \Theta(1)$
- c)  $n! = \omega(2^n)$
- d)  $n! = o(n^n)$

۶- صحیح یا غلط بودن گزاره‌های زیر را اثبات کنید (در صورتی که گزاره‌ها غلط هستند مثال نقض کافیست)

- a)  $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
- b)  $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
- c)  $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$ ,  $\forall n : \lg(g(n)) \geq 1$  and  $f(n) \geq 1$
- d)  $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
- e)  $f(n) = O(f(n^2))$
- f)  $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
- g)  $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$
- h)  $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

۷- مشخص کنید که به ازای هر جفت (A, B) آیا A از  $O, o, \Omega, \omega, \Theta$  تابع B هست یا خیر (مانند ردیف اول)

A	B	O	o	$\Omega$	$\omega$	$\Theta$
$n^2$	$n^3$	yes	yes	no	no	no
$\lg^k n$	$n^\epsilon$					
$n^k$	$c^n$					
$2^n$	$2^{n/2}$					
$n^{\lg c}$	$c^{\log n}$					
$4^{\lg n}$	$n^2$					
$n!$	$n \cdot 2^n$					
$\sqrt{2}^{\lg n}$	$2^{\sqrt{2} \cdot \lg(n)}$					
$(\lg(n))!$	$2^{2^n}$					
$n^{\lg(\lg(n))}$	$(\lg(n))^{\lg(n)}$					