کنکور ارشد ۹۴

۶۷- رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در یک سیستم توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$y(t)=\begin{cases}x(t-1) & x(t-1)\le 1\\ x(t-2) & x(t-1)>1\end{cases}$$

دراین سیستم، کدام گزینه صحیح است؟

۱) سیستم علی و خطی است.

۲) سیستم علی و غیرخطی است.

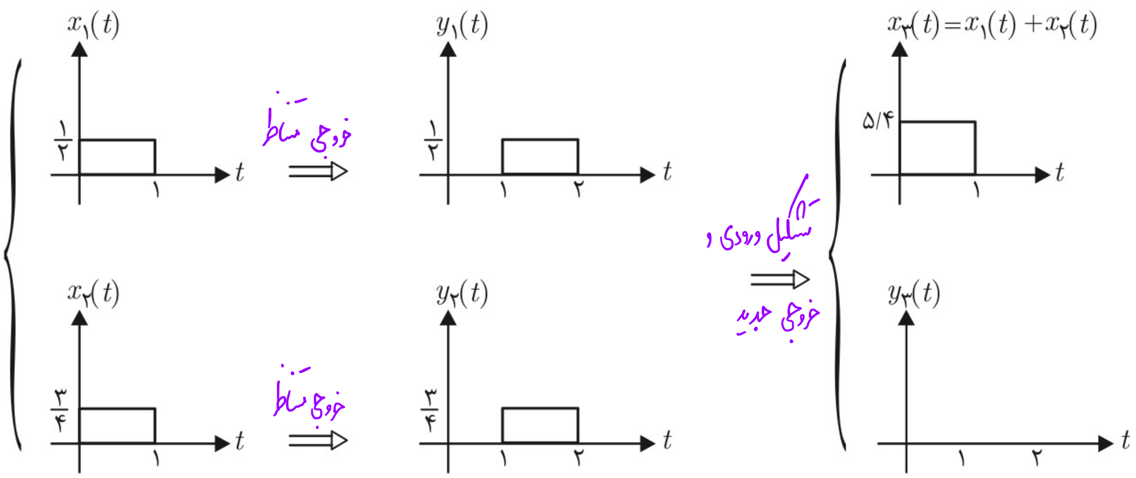
۳) سیستم غیرعلی و خطی است.

۴) سیستم غیرعلی و غیرخطی است.

حل از کتاب پوران پژوهش :

گزینه (۲). اول در مورد علیت بحث می‌کنیم. با توجه به رابطه ورودی و خروجی واضح است که مقدار خروجی در هر لحظه تنها به مقادیر قبلی و گذشته ورودی وابسته است؛ چرا که هم شرط‌ها روی $x(t-1)$ است (گذشته ورودی در یک ثانیه قبل) و هم ضابطه‌ها به گذشته ورودی در یک ثانیه قبل و دو ثانیه قبل (همان $x(t-1)$ و $x(t-2)$) وابسته است. پس چون هیچ وابستگی به آینده ورودی نداریم، سیستم علّی است.

اما در مورد خطی بودن باید گفت که چون شرط ضابطه‌ها روی خود سیگنال ورودی است (نه زمان)، پس سیستم غیرخطی است. برای اثبات غیرخطی بودن سیستم مثال نقض زیر کافی است:



به وضوح $y_3(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$ است که نشان دهنده‌ی غیرخطی بودن سیستم است.

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

N.H. Abdolrahim

@signal_tests

۶۸- برای سیستم S با رابطهٔ ورودی ـ خروجی $y(n) = x\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$، گزینه کامل‌تر کدام است؟

(بخش صحیح $\lfloor u \rfloor \triangleq u$)

۱) سیستم بدون حافظه است.

۲) پاسخ ضربه سیستم برابر $\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$ است.

۳) پاسخ به ورودی $\delta(n)$ مساوی $\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$ است.

۴) همه موارد

حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه ۳. اول از همه می‌توان گفت که سیستم حافظه‌دار است، چرا که به ازای $n=5$ داریم:

$$y[5] = x\left(\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor\right) = x[1]$$

یعنی مقدار خروجی در لحظه‌ی $n=5$ به مقدار ورودی در لحظه قبل‌تر $n=1$ وابسته است و این یعنی وجود حافظه.

پس گزینه‌ی صحیح یا ۳ است و یا ۲. شاید در نظر اول بگویید که هر دو گزینه یکی هستند و می‌توانند درست باشند اما به گزینه دوم می‌توان یک ایراد جزئی گرفت؛ آن هم اینکه پاسخ ضربه طبق قرارداد برای سیستم‌های LTI تعریف می‌گردد و از آنجا که سیستم S داده شده تغییرپذیر با زمان است، پس LTI نیست و اصلاً پاسخ ضربه برای آن تعریف نمی‌شود[1].

حال برای تحقیق درستی گزینه ۳ کافی است به جای $x[n]$ سیگنال $\delta[n]$ را قرار دهیم، در این صورت:

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y[n] = x\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) = \begin{cases} 0 & n \leq -1 \\ 1 & n = 0, 1, 2 = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

N.H. Abdolrahim
@ signal_tests

۱ - در اینجا پاسخ ضربه را معادل $Impuls\ Response$ در کتب مرجع در نظر گرفته‌ایم.

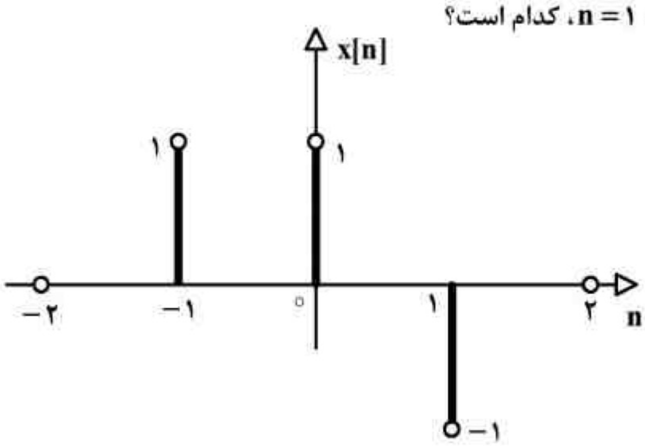
۶۹- مقدار کانولوشن $x[n]*x[1-2n]$ در نقطه $n=1$، کدام است؟

۱) -1

۲) 0

۳) 1

۴) 2



حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه (۴). کافی است از تعریف کانولوشن گسسته استفاده نماییم:

$$x[n]*x[1-2n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[n-m]x[1-2m]$$

به ازای $n=1$ خواهیم داشت:

$$x[n]*x[1-2n]\Big|_{n=1}\overset{(1)}{=}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[1-m]x[1-2m]\overset{(2)}{=}x[0]x[-1]+x[1]x[1]=1+1=2$$

(۱) جای‌گذاری $n=1$ در سیگمای قبلی

(۲) حاصل‌ضرب $x[1-m]x[1-2m]$ تنها به ازای $m=0,1$ مخالف صفر است.

لذا گزینه ۴ صحیح است.

N. H. Abdolrahim

@ signal_tests

۷۰- تبدیل فوریه کدام یک از توابع (سیگنال‌های) داده شده دارای کلیّه خصوصیات زیر است؟

الف) $Re\{X(j\omega)\}=0$ ، ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(j\omega)d\omega=0$ ، ج) $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)d\omega=0$

۱) $x(t)=e^{-t^2}-1$

۲) $x(t)=t^2e^{-|t|}$

۳) $x(t)=t^3e^{-|t|}$

۴) $x(t)=te^{-|t|}$

حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه (۳). اول از همه می‌دانیم که با توجه به گزینه‌های داده شده سیگنال $x(t)$ موردنظر یک سیگنال حقیقی است. حال با توجه به حقیقی بودن $x(t)$ و گزاره (الف) نتیجه می‌گیریم که $x(t)$ لزوماً یک سیگنال فرد است؛ یعنی گزینه‌های ۲ و ۱ نمی‌توانند درست باشند. اما با توجه به گزاره (ج) می‌دانیم $x(t)$ به ازای $t=0$ برابر با صفر است؛ که هر دو گزینه ۳ و ۴ این شرط را برآورده می‌کنند.

اما با توجه به گزاره (ب) می‌توان گفت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)d\omega=0\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega X(j\omega)\,d\omega=0\Rightarrow\mathcal{F}^{-1}\{j\omega X(j\omega)\}\,|_{t=0}=0$$

$$\Rightarrow\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}=0$$

که تنها گزینه سوم در این شرط صدق می‌کند:

$$\left.\frac{d}{dt}(t^3e^{-|t|})\right|_{t=0}=\left.\left[3t^2e^{-|t|}+t^3\left(\frac{d}{dt}e^{-|t|}\right)\right]\right|_{t=0}=0$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

N. H. Abdolrahim
@ signal_tests

۷۱- سیگنال زمانی $x(t)$ متناظر با تبدیل فوریه $X(j\omega)=\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin ۲\omega - j\cos ۲\omega}{۱+j(\frac{\omega}{۳})}\right\}$ ، کدام است؟

۱) $-۳te^{-۳(t+۲)}u(t+۲)$

۲) $۳te^{-۳(t-۲)}u(t-۲)$

۳) $te^{-۳t+۲}u(t+۲)$

۴) $te^{-۳t-۲}u(t-۲)$

حل از کتاب پوران پژوهش :

گزینه (۱). ابتدا سعی می‌کنیم تبدیل فوریه معکوس کسر داده شده را بیابیم:

$$\frac{\sin(۲\omega)-j\cos ۲\omega}{۱+j(\frac{\omega}{۳})}=\frac{\frac{۱}{۲j}(e^{j۲\omega}-e^{-j۲\omega})-\frac{j}{۲}(e^{j۲\omega}+e^{-j۲\omega})}{۱+j(\frac{\omega}{۳})}=\frac{-je^{j۲\omega}}{۱+j(\frac{\omega}{۳})}$$

برای محاسبه عکس فوریه کسر بالا از سیگنال‌های کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y_۱(j\omega)=\frac{۱}{۱+j\omega}\xrightarrow{\mathcal{F}^{-۱}} y_۱(t)=e^{-t}u(t)$$

$$Y_۲(j\omega)=\frac{-j}{۱+j(\frac{\omega}{۳})}=-jY_۱(\frac{\omega}{۳})\xrightarrow{\mathcal{F}^{-۱}} y_۲(t)=(-j).(۳y_۱(۳t))=-۳je^{-۳t}u(t)$$

$$Y_۳(j\omega)=\frac{-je^{j۲\omega}}{۱+j(\frac{\omega}{۳})}=e^{j۲\omega}Y_۲(j\omega)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-۱}} y_۳(t)=y_۲(t+۲)=-۳je^{-۳(t+۲)}u(t+۲)$$

حال برای یافتن $x(t)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$X(j\omega)=\frac{d}{d\omega}Y_۳(j\omega)\xrightarrow{\mathcal{F}} x(t)=-jty_۳(t)=-۳te^{-۳(t+۲)}u(t+۲)$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

N.H. Abdolrahim
@ signal_tests

۷۲- اگر سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ به صورت زیر باشد:

$$y(t) = x'(1-t) \quad \text{و} \quad x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{4}\times 3t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\times t\right)$$

همچنین ضرایب سری فوریه $y(t)$ را b_k بنامیم، b_3 برابر است با:

۱) $-\frac{\pi}{4}j$

۲) $-\frac{3\pi}{4}j$

۳) $\frac{\pi}{4}j$

۴) $\frac{3\pi}{4}j$

حل از کتاب پوران پژوهش :

گزینه (۴). اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ را با a_k نمایش دهیم، رابطه بین a_k و b_k به فرم زیر است:

	سیگنال	**ضرایب سری فوریه**
	$x(t)$	a_k
شیفت زمانی	$x(t+1)$	$a_k e^{jk\omega_0}$
انعکاس زمانی	$x(-t+1)$	$a_{-k} e^{-jk\omega_0}$
مشتق زمانی و خطی بودن	$y(t) = -\frac{d}{dt}x(1-t)$	$-jk\omega_0 e^{-jk\omega_0} a_{-k} = b_k$

پس برای b_3 داریم:

$$b_3 = -3j\omega_0 e^{-3j\omega_0} a_{-3}$$

پس لازم است بسط سری فوریه $x(t)$ و مقدار ω_0 را بیابیم:

$$x(t) = \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\times t\right)}_{\text{دوره تناوب}=\frac{4}{3}} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\times t\right)}_{\text{دوره تناوب}=4} \Rightarrow T_0 = 4 \;,\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3\pi}{2}t} - e^{j\frac{3\pi}{2}t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{2}t} - e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right)$$

$$= \frac{-1}{2j}e^{-j(3)\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2j}e^{j(3)\frac{\pi}{2}t}$$

یعنی داریم:

یعنی داریم:

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{۱}{۲j} & k = -۳, -۱ \\ \dfrac{۱}{۲j} & k = ۳, ۱ \\ ۰ & k \text{ سایر مقادیر} \end{cases}$$

در نهایت برای $b_۳$ داریم:

$$b_۳ = (-۳j)(\frac{\pi}{۲})\left(\underbrace{e^{-j\frac{۳\pi}{۲}}}_{j}\right)\left(-\frac{۱}{۲j}\right) = \frac{۳\pi}{۴}j$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

تذکر: در کلید اولیه سازمان سنجش به اشتباه گزینه دوم به عنوان پاسخ سوال معرفی شده بود که به هیچ وجه صحیح نیست.

N. H. Abdolrahim

@signal_tests

۷۳- ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره‌ی تناوب ۶ را با α_k نشان می‌دهیم. از روی سیگنال $x[n]$ سیگنال $s(t)$ را به صورت $s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta(t-2k)$ می‌سازیم. ضرایب سری فوریه‌ی $s(t)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\alpha_k$

۲) $\frac{1}{6}\alpha_k$

۳) $6\alpha_k$

۴) $2\alpha_k$

حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه‌ی ۱. در قدم اول باید دوره تناوب $S(t)$ را بدست آوریم؛ فرض می‌کنیم دوره تناوب $S(t)$ برابر T_0 باشد آنگاه:

$$S(t+T_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta(t+T_0-2k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta\left(t-2\left(k-\frac{T_0}{2}\right)\right)$$

$$\overset{(1)}{=}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x\left[\ell+\frac{T_0}{2}\right]\delta(t-2\ell)\overset{(2)}{=}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x[\ell]\delta(t-2\ell)$$

(۱) با فرض زوج بودن T_0، از تغییر متغیر $\ell=k-\frac{T_0}{2}$ استفاده می‌کنیم.

(۲) طبق فرض تناوب $S(t)$ با دوره تناوب T_0، باید $S(t+T_0)=S(t)$ باشد.

شرط برقراری تساوی بالا آن است که $x\left[\ell+\frac{T_0}{2}\right]=x[\ell]$ باشد و چون $x[n]$ با دوره تناوب ۶ متناوب است، می‌توان گفت:

$$\frac{T_0}{2}=6 \Rightarrow T_0=12$$

حال تعریف ضرایب سری فوریه $S(t)$ را می‌نویسیم (این ضرایب را با β_k نمایش می‌دهیم):

$$\beta_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} S(t)\,e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\,dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{12}\int_{-1}^{11}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta(t-2k)\right)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}\,dt$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{12}\Big[\int_{-1}^{11}x[0]\delta(t)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}dt+\int_{-1}^{11}x[1]\delta(t-2)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}dt+\int_{-1}^{11}x[2]\delta(t-4)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}$$

$$+\int_{-1}^{11}x[3]\delta(t-6)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}dt+\int_{-1}^{11}x[4]\delta(t-8)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}dt+\int_{-1}^{11}x[5]\delta(t-10)e^{-jk\frac{\pi}{6}t}dt\Big]$$

$$=\frac{1}{12}\left[x[0]+x[1]e^{-jk\frac{\pi}{3}}+x[2]e^{-jk\frac{2\pi}{3}}+x[3]e^{-jk\pi}+x[4]e^{-jk\frac{4\pi}{3}}+x[5]e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{m=0}^{5} x[m]\,e^{-jkm\frac{\pi}{3}}$$

$$\beta_k \triangleq \frac{۱}{T_۰}\int_{T_۰} S(t)\, e^{-jk\frac{۲\pi}{T_۰}t}\, dt \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۱۲}\int_{-۱}^{۱۱}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta(t-۲k)\right) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t}\, dt$$

$$\overset{(۲)}{=} \frac{۱}{۱۲}\Bigg[\int_{-۱}^{۱۱} x[۰]\delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t} dt + \int_{-۱}^{۱۱} x[۱]\delta(t-۲) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t} dt + \int_{-۱}^{۱۱} x[۲]\delta(t-۴) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t}$$

$$+\int_{-۱}^{۱۱} x[۳]\delta(t-۶) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t} dt + \int_{-۱}^{۱۱} x[۴]\delta(t-۸) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t} dt + \int_{-۱}^{۱۱} x[۵]\delta(t-۱۰) e^{-jk\frac{\pi}{۶}t} dt\Bigg]$$

$$= \frac{۱}{۱۲}\left[x[۰] + x[۱]e^{-jk\frac{\pi}{۳}} + x[۲]e^{-jk\frac{۲\pi}{۳}} + x[۳]e^{-jk\pi} + x[۴]e^{-jk\frac{۴\pi}{۳}} + x[۵]e^{-jk\frac{۵\pi}{۳}}\right]$$

$$= \frac{۱}{۱۲}\sum_{m=۰}^{۵} x[m]\, e^{-jkm\frac{\pi}{۳}}$$

(۱) مقدار $T_۰$ و $S(t)$ را جای‌گذاری کرده و حدود انتگرال را بازه‌ی $(-۱,۱۱)$ در نظر می‌گیریم.

(۲) با توجه به حدود انتگرال، تنها جملاتی را از سیگما در نظر می‌گیریم که تابع دلتا در بازه‌ی انتگرال‌گیری قرار داشته باشد.

حال اگر تعریف ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\alpha_k \triangleq \frac{۱}{۶}\sum_{m=۰}^{۵} x[m]\, e^{-jk\frac{۲\pi}{۶}m} = \frac{۱}{۶}\sum_{m=۰}^{۵} x[m]\, e^{-jk\frac{\pi}{۳}m}$$

با مقایسه روابط بدست آمده برای α_k و β_k بدیهی است که $\beta_k = \frac{۱}{۲}\alpha_k$ خواهد بود.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱

N. H. Abdolrahim

@ signal_tests

۷۴- پاسخ سیستم LTI علّی با تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{s}{s+۳}$ به ورودی $x(t)=e^{-۲t}+u(t)$ ، کدام است؟

۱) $-۲e^{-۲t}+e^{-۳t}u(t)$

۲) $e^{-۲t}u(t)+e^{-۳t}$

۳) $-۲(e^{-۲t}+e^{-۳t})u(t)$

۴) $(e^{-۲t}+۲e^{-۳t})u(t)$

حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه‌ی (۱). سیگنال ورودی از دو بخش تشکیل شده است و طبق خاصیت خطی بودن می‌توان پاسخ سیستم به هر بخش ورودی را جداگانه حساب کرد و سپس آنها را با هم جمع کرد:

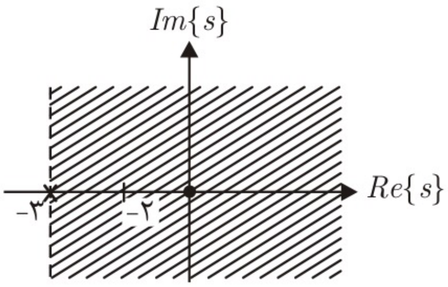
$$x(t)=\underbrace{e^{-۲t}}_{x_۱(t)}+\underbrace{u(t)}_{x_۲(t)}$$

$x_۱(t)$ از جنس توابع ویژه سیستم است و پاسخ سیستم به آن عبارتست از:

$$x_۱(t)\longrightarrow\boxed{H(S)}\longrightarrow y_۱(t)$$

$$y_۱(t)=x_۱(t)H(s)\big|_{s=-۲}=(e^{-۲t})\left(\frac{s}{s+۳}\bigg|_{s=-۲}\right)=-۲e^{-۲t}$$

البته قبل از محاسبه $y_۱(t)$ لازم بود که چک کنیم آیا $s=-۲$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ هست یا خیر؛ با توجه به آنکه گفته شده سیستم علّی است، پس ROC آن به شکل روبرو می‌باشد و شامل $s=-۲$ هست و لذا $y_۱(t)$ بدست آمده صحیح است.



اما اگر $s=-۲$ در ROC نبود، $y_۱(t)=\infty$ می‌شد.

حال بخش دوم ورودی را در نظر می‌گیریم:

$$x_۲(t)=u(t)\longrightarrow\boxed{H(S)}\longrightarrow y_۲(t)$$

$$Y_۲(s)=X_۲(s)H(s)\quad,\quad X_۲(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{S}\ ,\ Re\{s\}>0$$

$$\Rightarrow Y_۲(s)=\left(\frac{۱}{s}\right)\left(\frac{s}{s+۳}\right)=\frac{۱}{s+۳}\qquad ROC:\mathrm{Re}\{s\}>-۳$$

$$y_۲(t)=\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s+۳}\right\}=e^{-۳t}u(t)$$

در نهایت خروجی سیستم عبارتست از:

$$y(t)=y_۱(t)+y_۲(t)=-۲e^{-۲t}+e^{-۳t}u(t)$$

در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

N.H. Abdolrahim

@ signal_tests

۷۵- یک سیستم زمان پیوسته پایدار به شکل $H(s)=\frac{۱}{s+۱}$ در اختیار می‌باشد. در صورتی که ورودی این سیستم به صورت $x(t)=\cos(۲t+۱)$ باشد، در این صورت خروجی سیستم کدام است؟

۱) $y(t)=-\frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$

۲) $y(t)=\frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱)$

۳) $y(t)=\frac{۱}{۵}\cos(t+۱)-\frac{۲}{۵}\sin(t+۱)$

۴) $y(t)=\frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱)+\frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$

حل از کتاب پوران پژوهش :

گزینه‌ی (۴). از قبل می‌دانیم که پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ شبکه $H(j\omega)$ به ورودی سینوسی دلخواه به فرم زیر است:

$$x(t)=A\cos(\omega_\circ t+\phi) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

$$\Rightarrow y(t)=A\,|H(j\omega_\circ)|\cos(\omega_\circ t+\phi+\measuredangle H(j\omega_\circ))$$

در این سوال نیز با چنین حالتی مواجه هستیم. ابتدا با توجه به پایداری سیستم و تابع تبدیل $H(s)$، تابع $H(j\omega_\circ)$ را تشکیل می‌دهیم و $|H(j\omega_\circ)|$ و $\measuredangle H(j\omega_\circ)$ را بدست می‌آوریم:

$$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}=\frac{۱}{j\omega+۱}\Rightarrow\begin{cases}|H(j\omega)|=\dfrac{۱}{|j\omega+۱|}=\dfrac{۱}{\sqrt{۱+\omega^۲}}\\[2ex] \measuredangle H(j\omega_\circ)=\measuredangle\dfrac{۱}{۱+j\omega}=\measuredangle\dfrac{۱-j\omega}{۱+\omega^۲}=\tan^{-۱}(-\omega)\end{cases}$$

حال با جایگذاری $\omega_\circ=۲$ داریم:

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=۲}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\measuredangle H(j\omega)|_{\omega=۲}=\tan^{-۱}(-۲)\triangleq\alpha$$

در بالا α را برابر زاویه $\measuredangle H(j\omega)|_{\omega=۲}$ یا همان زاویه $\tan^{-۱}(-۲)$ در نظر گرفته‌ایم، البته توجه داشته باشید که α به گونه‌ای است که $\sin(\alpha)<\circ$ و $\cos(\alpha)>\circ$ است. حال به محاسبه خروجی می‌پردازیم:

$$x(t)=\cos(۲t+۱) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=|H(j\omega)|_{\omega=۲}\cos\left(۲t+۱+\measuredangle H(j\omega)\Big|_{\omega=۲}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\cos(۲t+۱+\alpha)$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\cos(\alpha)\cos(۲t+۱)-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\sin(\alpha)\sin(۲t+۱)$$

اما از طرفی داریم:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan\left(\tan^{-۱}(-۲)\right) = -۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱ + \tan^{۲}(\alpha) = \dfrac{۱}{\cos^{۲}(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \sin(\alpha) = -\sqrt{۱ - \cos^{۲}(\alpha)} = \dfrac{-۲}{\sqrt{۵}} \end{cases}$$

در نهایت خروجی سیستم عبارتست از:

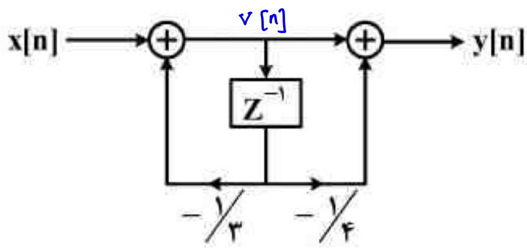
$$y(t) = \frac{۱}{\sqrt{۵}}[\cos(\alpha)\cos(۲t+۱) - \sin(\alpha)\sin(۲t+۱)]$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)\cos(۲t+۱) - \left(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right)\sin(۲t+۱)\right] = \frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱) + \frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

N. H. Abdolrahim
@ signal_tests

۷۶- در سیستم علی داده شده به ازای $x[n]=(\frac{۲}{۳})^n$ ، $y[n]$ کدام است؟



۱) $y[n]=\frac{۱۲}{۵}(\frac{۲}{۳})^n$

۲) $y[n]=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n$

۳) $y[n]=\frac{۱۲}{۵}(\frac{۲}{۳})^n u(n)$

۴) $y[n]=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n u(n)$

حل از کتاب پوران پژوهش :

گزینه‌ی (۲). سیگنال ورودی $x[n]$ جزو توابع ویژه سیستم است و اگر تابع تبدیل سیستم $H(z)$ باشد آنگاه خروجی عبارتست از:

$$y[n]=x[n].H(z)|_{z=\frac{۲}{۳}}$$

پس کافیست که $H(z)$ را بدست آوریم؛ با استفاده از سیگنال کمکی $v[n]$ که در شکل مشخص شده است می‌توان گفت:

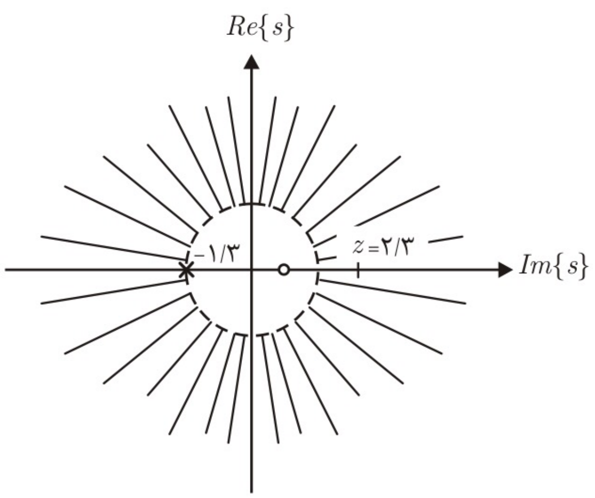
$$v[n]=x[n]-\frac{۱}{۳}v[n-۱]\xrightarrow{z}V(z)=X(z)-\frac{۱}{۳}z^{-۱}V(z)\Rightarrow\frac{V(z)}{X(z)}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۳}z^{-۱}}$$

$$y[n]=v[n]-\frac{۱}{۴}v[n-۱]\xrightarrow{z}Y(z)=V(z)-\frac{۱}{۴}z^{-۱}V(z)\Rightarrow\frac{Y(z)}{V(z)}=\frac{۱-\frac{۱}{۴}z^{-۱}}{۱}$$

بنابراین تابع تبدیل سیستم کلی برابر است با:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\left(\frac{Y(z)}{V(z)}\right)\cdot\left(\frac{V(z)}{X(z)}\right)=\left(\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۳}z^{-۱}}\right)\cdot\left(\frac{۱-\frac{۱}{۴}z^{-۱}}{۱}\right)=\frac{۱-\frac{۱}{۴}z^{-۱}}{۱+\frac{۱}{۳}z^{-۱}}$$

ابتدا لازم است ROC مربوط به $H(z)$ را با فرض علّی بودن که در صورت سؤال ذکر شده است بدست آوریم:



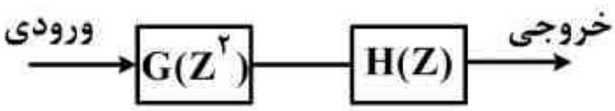
همانطور که ملاحظه می‌شود $z=\frac{۲}{۳}$ داخل ROC است، پس خروجی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y[n]=x[n]\cdot H(z)|_{z=\frac{۲}{۳}}=\left((\frac{۲}{۳})^n\right)\cdot\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۲})}{۱+(\frac{۱}{۳})(\frac{۳}{۲})}\right)=\left(\frac{۲}{۳}\right)^n\cdot\left(\frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۳}{۲}}\right)=\frac{۵}{۱۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

لذا گزینه ۲ صحیح است.

N.H. Abdolrahim
@signal_tests

۷۷- اگر $G(z)$ و $H(z)$ به ترتیب تبدیل z یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$ و یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$ باشد، پاسخ فرکانسی سیستمی که در شکل زیر نشان داده شده، کدام است؟



۱) فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$

۲) فیلتر میان‌گذر که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$ را عبور می‌دهد.

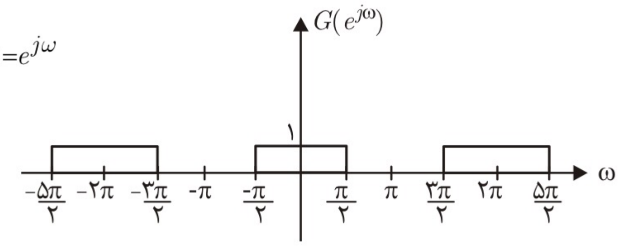
۳) فیلتر بالاگذر که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را عبور می‌دهد.

۴) فیلتر بالاگذر که بین $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ را عبور می‌دهد.

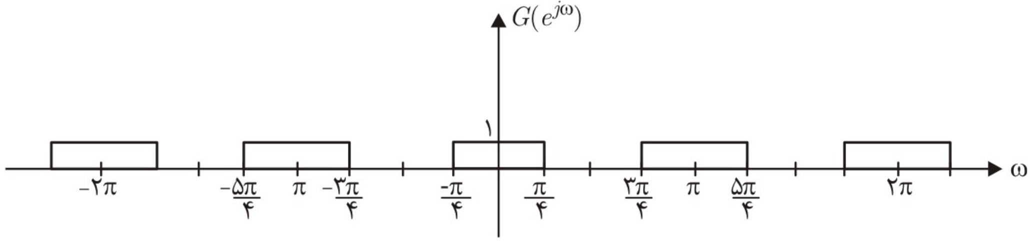
حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه‌ی (۴). ابتدا $G(z)$ را رسم می‌کنیم (در حوزه فرکانس) و بعد $G(z^2)$ را از روی آن بدست می‌آوریم:

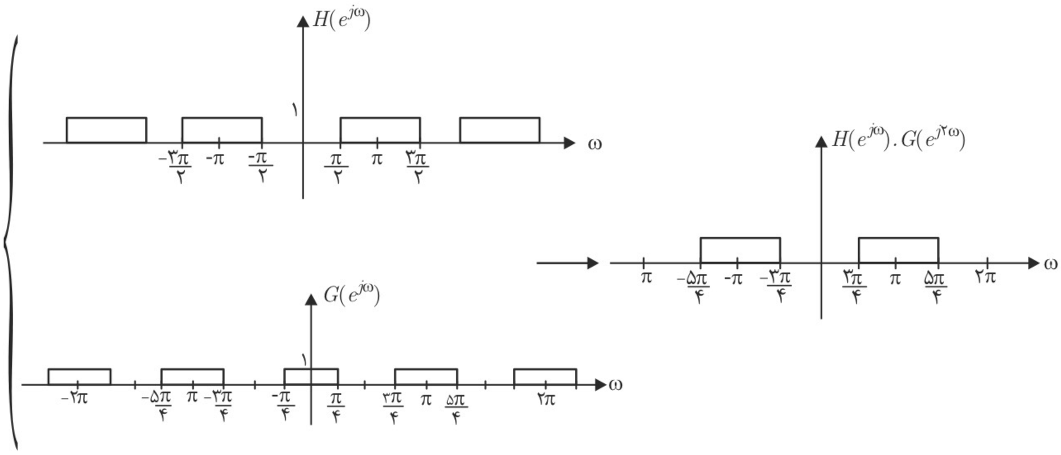
$G(e^{j\omega}) = G(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$



$G(z^2)\big|_{z=e^{j\omega}} = G(e^{j2\omega}) \rightarrow$ فشرده‌سازی در حوزه فرکانس



حال $H(z)$ را رسم کرده و زیر آن هم $G(z^2)$ را رسم می‌کنیم:



پس سیستم کلی که از ضرب $H(z)$ و $G(z^2)$ بدست می‌آید یک فیلتر بالاگذر است.

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

N.H. Abdolrahim

@signal_tests

۷۸- $x[n]$ یک سیگنال علّی با تبدیل z، $X(z)=\dfrac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-3})^2}$ می‌باشد. $x[n]$، کدام است؟

۱) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}-1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}}u[\frac{n}{3}-1] & \text{مضرب ۳ } n\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

۲) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}-1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}-1}u[\frac{n}{3}-1] & \text{مضرب ۳ } n\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

۳) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}+1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}}u[\frac{n}{3}+1] & \text{مضرب ۳ } n\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

۴) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}+1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}+1}u[\frac{n}{3}+1] & \text{مضرب ۳ } n\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

حل از کتاب پوران پژوهش:

گزینه‌ی (۳). با تعریف چند تابع کمکی مرحله به مرحله $X(z)$ را می‌سازیم:

$$Y_1(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\xrightarrow{Z^{-1}}y_1[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$Y_2(z)=z\frac{d}{dz}Y_1(z)=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}\xrightarrow{Z^{-1}}y_2[n]=-ny_1[n]=-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$Y_3(z)=2zY_2(z)=\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\xrightarrow{Z^{-1}}y_3[n]=2y_2[n+1]$$

$$=-2(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$$

$$X(z)=Y_3(z^3)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-3})^2}\xrightarrow{z^{-1}}x[n]=y_3\left[\frac{n}{3}\right]$$

$$=-2\left(\frac{n}{3}+1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}+1}u\left[\frac{n}{3}+1\right]$$

$$=\left(\frac{n}{3}+1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}u\left[\frac{n}{3}+1\right],\ n=3k$$

در نهایت داریم:

$$x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}+1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}}u\left[\frac{n}{3}+1\right] & \text{مضرب ۳ } n\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$$

N.H. Abdolrahim

@signal_tests

در نتیجه گزینه ۳ صحیح است.