

## سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۶

۱. گزینه درست در مورد سیستم زیر، کدام است؟ (  $x[n]$  ورودی و  $y[n]$  خروجی سیستم می-باشد.)

فصل ۲

$$y[n] = (n^2 + 1)x[n] \sin\left(\frac{\pi n^2}{5}\right)$$

- (۱) سیستم پایدار است.  
(۲) سیستم خطی است.  
(۳) سیستم علی است.  
(۴) سیستم معکوس پذیر است.
۲. تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n]$  و ناحیه همگرایی آن به صورت زیر است:

فصل ۸

$$X(z) = \frac{z^4 + 2z^2}{z^4 - 2}, \quad |z| > 2$$

مقدار  $x[n]$  در  $n = 4$  برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶
۳. پاسخ ضربه یک سیستم LTI برابر است با:

فصل ۳

$$h(t) = u\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - u\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

پاسخ سیستم در لحظه  $t = \frac{\pi}{4}$  به ورودی  $x(t) = \left\{ u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \cos(2t)$  ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲) ۰ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) ۱

۴.  $x_1(t)$  متناوب با پریود اصلی  $T_1$  و ضرایب فوریه  $a_n$  و  $x_2(t)$  متناوب با پریود اصلی  $T_2 = 3T_1$  و ضرایب سری فوریه  $b_n$  است. ضرایب سری فوریه  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$  با پریود اصلی  $T_2 = 3T_1$  ، کدام است؟

فصل ۱۳

- (۱) اگر  $n$  مضرب ۳ باشد  $\begin{cases} a_{\frac{n}{3}} + b_n \\ b_n \end{cases}$  سایر  
(۲) اگر  $n$  مضرب ۳ باشد  $\begin{cases} a_{\frac{n}{3}} + b_n \\ a_n \end{cases}$  سایر  
(۳) اگر  $n$  مضرب ۳ باشد  $\begin{cases} a + b_{\frac{n}{3}} \\ b_n \end{cases}$  سایر  
(۴) اگر  $n$  مضرب ۳ باشد  $\begin{cases} a + b_{\frac{n}{3}} \\ a_n \end{cases}$  سایر

۵. ارتباط ورودی - خروجی یک سیستم زمان گسسته (ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$ ) به صورت

$$y[n] = \begin{cases} -x[n] & \text{اگر } x[n] \geq x[n-2] \\ x[n-1] & \text{اگر } x[n] < x[n-2] \end{cases}$$

۲ فصل

داده شده است. پاسخ این سیستم به ورودی  $x[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$  برابر کدام است؟

$$\delta[n+1] + \delta[n-1] \quad (۱) \quad \delta[n+1] + \delta[n-1] \quad (۲)$$

$$-\delta[n+1] - \delta[n-1] \quad (۳) \quad -\delta[n+1] - \delta[n-2] \quad (۴)$$

۶. سیگنالی داریم که طیف آن به شکل  $X(j\omega) = j\sqrt{\pi} \operatorname{sgn}(\omega)[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$  است. مقدار

مشتق این سیگنال در  $t=0$  چقدر است؟

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (۱) \quad -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad (۴)$$

۵ فصل

۷. سیستمی با رابطه ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] - y[n-2]$  مفروض است.

اگر سیستم در شرایط آرامش اولیه (initial rest condition) باشد، پاسخ پله سیستم در  $n=5$

کدام است؟

۱۵ فصل

$$0 \quad (۱) \quad 2 \quad (۲) \quad 3 \quad (۳) \quad 5 \quad (۴)$$

۸. یک سیستم LTI زمان - گسسته با پاسخ فرکانسی داده شده در شکل زیر مفروض است.

خروجی این فیلتر به ازای ورودی  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-2k]$  برابر کدام است؟

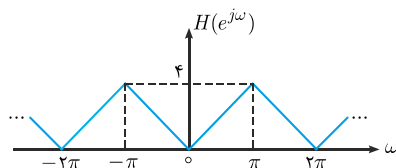
$$2(-1)^n + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (۱)$$

$$(-1)^n + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (۲)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (۳)$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (۴)$$

۹ فصل



۹. مقدار  $I$  در رابطه  $I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{k\pi}{2})}{k^2}$  برابر کدام است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱) \quad \pi^2 \quad (۲) \quad \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad \frac{1}{2} \quad (۴)$$

۵ فصل

۱۰. رابطه  $(f \times f)(t) = 3f\left(\frac{t}{3}\right)$  برای کدام یک از توابع زیر برقرار است؟

$$\frac{3}{\pi} \delta - jt \quad (۱) \quad \frac{3}{\pi} \delta - jt \quad (۲)$$

$$3\pi \delta\left(\frac{t}{3} - 1\right) \quad (۴) \quad \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (۳)$$

۵ فصل

۱۱. فرض کنید  $x[n]$  یک سیگنال پیوسته و  $a[n]$  یک سیگنال گسسته باشد. «کانولوشن» این دو سیگنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (که خودش سیگنال پیوسته  $y(t)$  می‌شود):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n)$$

فصل ۵

رابطه تبدیل فوریه این سیگنال‌ها یعنی  $X(j\omega)$ ،  $A(e^{j\omega})$ ،  $Y(j\omega)$  کدام است؟

$$Y(j\omega) = A(e^{j\omega})X(j\omega) \quad (۱)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{\tau\pi} A(e^{j\omega})X(j\omega) \quad (۲)$$

$$Y(j\omega) = A(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - \tau k\pi)) \quad (۳)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{\tau\pi} A(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - \tau k\pi)) \quad (۴)$$

۱۲.  $S$ ، سیستم LTI، با پاسخ ضربه  $h(t) = \frac{\sin(\tau(t-1))}{\pi(t-1)}$  را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به

ورودی  $x(t) = \left(\frac{\sin(\tau t)}{\pi t}\right)^\tau$  کدام است؟

فصل ۹

$$\frac{\sin(\tau(t-1))}{\pi(t-1)} \times \frac{\sin(\tau(t-\frac{1}{\tau}))}{\pi(t-\frac{1}{\tau})} \quad (۱)$$

$$\left(\frac{\sin(\tau(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^\tau \quad (۲)$$

$$\left(\frac{\sin(\tau(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^\tau \quad (۳)$$

$$\left(\frac{\sin(\tau(t-\frac{1}{\tau}))}{\pi(t-\frac{1}{\tau})}\right)^\tau \quad (۴)$$

### پاسخ تشریحی سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۶

(۱) گزینه ۲ صحیح است.

سیستم خطی، ناپایدار، غیرعلی و معکوس ناپذیر است.

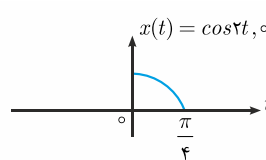
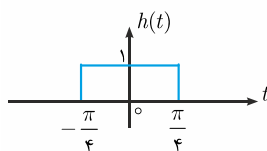
(۲) گزینه ۳ صحیح است.

با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$X(z) = \frac{z^4 + 2z^4}{z^4 - 2} = z^4 + 2 + 4z^{-4} + \dots$$

ضریب  $z^{-4}$  برابر  $x[4]$  می‌باشد.

(۳) گزینه ۳ صحیح است.



برای محاسبه خروجی در لحظه  $t = \frac{\pi}{4}$ ، کافی است  $h(t)$  را قرینه کرده و  $\frac{\pi}{4}$  به سمت راست انتقال داده و در  $x(t)$  ضرب نموده و مساحت بگیریم:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt = \frac{1}{2}$$

(۴) گزینه ۱ صحیح است.

از آنجا که دوره تناوب های  $x_1$  و  $x_2$  متفاوتند، یک دوره تناوب مشترک برای آنها در نظر می‌گیریم که برابر

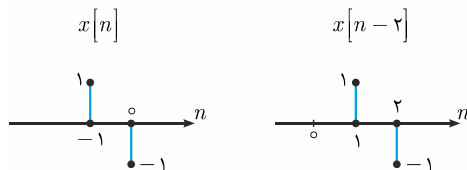
ک.م.م دوره تناوبها یعنی  $T = 3T_1$  می‌باشد. حال ضرایب فوریه  $x_1$  و  $x_2$  بر اساس دوره تناوب  $T = 3T_1$  برابرند با:

$$T = 3T_1, \quad x_1(t) \xrightarrow{F_s} a_{(r)}[k]$$

$$T = 3T_1, \quad x_2(t) \xrightarrow{F_s} b[k]$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow c[k] = a_{(r)}[k] + b[k]$$

(۵) گزینه ۳ صحیح است.

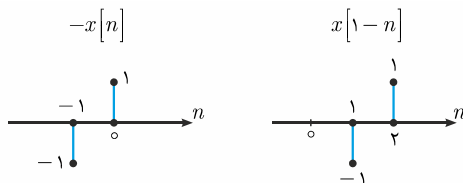


با توجه به شکلهای فوق، شرط  $x[n] \geq x[n-2]$  معادل  $n \neq 0, 1$  و شرط  $x[n] < x[n-2]$  معادل  $n = 0, 1$  می‌باشد.

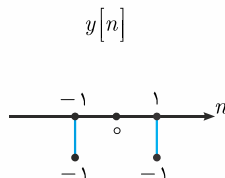
پس داریم:

$$y[n] = \begin{cases} -x[n], & n \neq 0, 1 \\ x[1-n], & n = 0, 1 \end{cases}$$

اما شکل  $-x[n]$  و  $x[1-n]$  به صورت زیر می‌باشند:



حال برای رسم  $y[n]$  کافی است که در لحظات  $n=0, 1$  به شکل سمت راست و در بقیه لحظات به شکل سمت چپ نگاه نمائیم:



۶ گزینه ۴ صحیح است.

$$x'(t) \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 j\omega j\sqrt{\pi} \operatorname{sgn}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 -\sqrt{\pi} |\omega| d\omega = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \omega d\omega = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

۷ گزینه ۴ صحیح است.

از آنجا که سیستم، یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت است، شرط سکون اولیه ایجاب می‌کند که سیستم LTI و علی باشد. (فصل ۱۱)

داریم:

$$H(z) = \frac{2+3z^{-1}}{1+z^{-2}}, \quad X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad Y(z) = \frac{2+3z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-2})}$$

حال برای محاسبه عکس تبدیل  $z$  فوق هم می‌توان از بسط کسره‌های جزئی به همراه خواص تبدیل  $z$  استفاده کرد و هم می‌توان از روش ابتکاری زیر بهره برد:

$$Y(z) = \frac{(2+3z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-z^{-2})(1+z^{-2})} = \frac{2+\delta z^{-1}+3z^{-2}}{1-z^{-4}} = \frac{(2+\delta z^{-1}+3z^{-2})}{F(z)} \cdot \frac{1}{1-z^{-4}}$$

$$\Rightarrow y[n] = f(n) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k], \quad f(n) = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

سیگنال  $y[n]$  یک سیگنال نیمه متناوب با  $N = 4$  است. در نتیجه داریم:  $y[5] = y[1] = 5$  (۸) گزینه ۴ صحیح است.

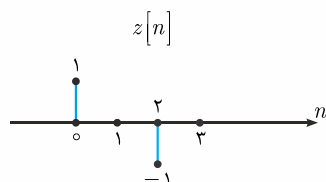
دوره تناوب ورودی برابر  $N = 4$  می‌باشد که این موضوع هم با رسم  $x[n]$  و هم با استفاده از نکته ۸۷ به راحتی مشخص است. حال با توجه به نکته ۷۰ داریم:

$$y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=-2}^1 a_k H(k\frac{\pi}{2}) e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$H(k\frac{\pi}{2}) \rightarrow \begin{cases} H(0) = 0, & k = 0 \\ H(\pm\frac{\pi}{2}) = 2, & k = \pm 1 \\ H(-\pi) = 4, & k = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = 4a_{-2}e^{-j\pi n} + 2a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + 2a_1e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

برای محاسبه  $a_k$  با توجه به نکته ۴۶ داریم:



$$Z(\omega) = 1 - e^{-j2\omega} \Rightarrow a_k = \frac{1}{2}(1 - e^{-jk\pi}) \Rightarrow a_{-2} = 0, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y[n] = 2 \cos \frac{\pi}{2} n$$

(۹) گزینه ۱ صحیح است.

$$I = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} n}{n^2} = \pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\pi n} \right|^2 = \pi^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \tilde{\Pi}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right|^2 d\omega = \frac{\pi^2}{2}$$

(۱۰) گزینه ۲ صحیح است.

$$f(t) * f(t) = 2f\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow F(\omega) \cdot F(\omega) = 2F(2\omega)$$

با امتحان کردن تک تک گزینه‌ها، فقط تبدیل فوریه  $f(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\delta - jt}$  که طبق خاصیت دوگانگی برابر

$F(\omega) = 2e^{-\Delta\omega} u(\omega)$  می‌شود، در رابطه فوق صدق می‌کند.

(۱۱) گزینه ۱ صحیح است.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\delta(t-n)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]e^{-j\omega n} = X(\omega) \cdot A(\omega)$$

این تست کاملاً مشابه تست تالیفی ۴۱ فصل ۱۲ با فرض  $T=1$  می‌باشد.

(۱۲) گزینه ۲ صحیح است.

این مشابه تست ۱۳ فصل ۹ (آزاد ۸۷) می‌باشد.

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)e^{-j\omega}$$

$$X(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \Lambda\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = H\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)e^{-j\omega} \cdot \frac{\gamma}{\pi} \Lambda\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)$$

$$= \frac{\gamma}{\pi} \Lambda\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)e^{-j\omega} = X(\omega)e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t-1) = \left(\frac{\sin \gamma(t-1)}{\pi(t-1)}\right)^{\gamma}$$