پاسخ تشریحی آزمون فصل ششم

۱) گزینه ۴ صحیح است.

دوره تناوب $\cos(\frac{\pi}{۳}n-\frac{۲\pi}{۳})$ برابر $\frac{۲\pi}{\pi/۳}=۶$ و دوره تناوب $(-۱)^n$ برابر ۲ می‌باشد. پس دوره تناوب اصلی $x[n]$ و فرکانس اصلی آن برابر است با:

$$N=\text{lcm}(۶,۲)=۶ \longrightarrow \omega_\circ=\frac{۲\pi}{N}=\frac{۲\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$$

$x[n]=\cos(\frac{n-۲}{۳}\pi)+(-۱)^n$ را به‌صورت نمایی می‌نویسیم:

$$x[n]=\frac{۱}{۲}e^{j(\frac{\pi}{۳}n-\frac{۲\pi}{۳})}+\frac{۱}{۲}e^{-j(\frac{\pi}{۳}n-\frac{۲\pi}{۳})}+e^{j\pi n}=(\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{۲\pi}{۳}})e^{j\frac{\pi}{۳}n}+(\frac{۱}{۲}e^{j\frac{۲\pi}{۳}})e^{-j\frac{\pi}{۳}n}+(۱)e^{j\pi n} \qquad (۱)$$

حال به‌صورت زیر استدلال می‌کنیم:

$$\text{ضریب}\ e^{jk\omega_\circ n} \longrightarrow a_k \quad \xrightarrow{\omega_\circ=\frac{\pi}{۳}} \quad \text{ضریب}\ e^{jk\frac{\pi}{۳}n} \longrightarrow a_k$$

بنابراین باید در بسط $x[n]$، ضریب نمایی $e^{jk\frac{\pi}{۳}n}$ را به ازای هر k شناسایی کنیم. از رابطه (۱) داریم:

$$x[n]=\underbrace{(\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{۲\pi}{۳}})}_{a_۱}e^{j\frac{\pi}{۳}n}+\underbrace{(\frac{۱}{۲}e^{j\frac{۲\pi}{۳}})}_{a_{-۱}}e^{-j\frac{\pi}{۳}n}+\underbrace{(۱)}_{a_۳}e^{j\pi n}$$

پس ضرایب سری فوریه $x[n]$ <u>در یک دوره تناوب</u> برابر است با:

$$a_۱=\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{۲\pi}{۳}} \quad , \quad a_{-۱}=\frac{۱}{۲}e^{j\frac{۲\pi}{۳}} \quad , \quad a_۳=۱$$

$a_{-۵}$ در ضرایب فوق وجود ندارد؛ ولی با توجه به متناوب بودن ضرایب فوریه در حالت زمان‌گسسته، ضرایب فوق با دوره تناوب $N=۶$ متناوب هستند و ۶ تا ۶ تا تکرار می‌شوند. یعنی $a_k=a_{k+۶}$ می‌باشد:

$$a_{-۵}=a_۱=\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{۲\pi}{۳}}$$

۲) گزینه ۴ صحیح است.

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_\circ n} \xrightarrow{n=۱} x[۱]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{۲\pi}{N}(۱)}$$

$$x[۱]=\sum_{k=-۳}^{۲}a_k e^{jk\frac{۲\pi}{۶}} \quad \Rightarrow \quad I=\sum_{k=-۳}^{۳}a_k e^{jk\frac{\pi}{۳}}=x[۱]=۲$$

۳) گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا با توجه به دوره تناوب $T=۴$ و فرکانس اصلی $\omega_\circ=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$، رابطه b_k و a_k را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$b_k=(-۱)^k a_k-(-۱)^k a_{-k}=e^{jk\pi}a_k-e^{jk\pi}a_{-k}=e^{jk\overbrace{\frac{\pi}{۲}}^{\omega_\circ}(۲)}a_k-e^{jk\overbrace{\frac{\pi}{۲}}^{\omega_\circ}(۲)}a_{-k}$$

حال طبق خاصیت انتقال زمانی داریم:

$$e^{jk\omega_\circ(۲)}a_k \xrightarrow{FS^{-۱}} x(t+۲)$$

همچنین طبق خواص وارونگی و انتقال زمانی داریم:

$$a_k \xrightarrow[\text{خاصیت وارونگی}]{k\to -k} a_{-k} \xrightarrow[\text{خاصیت انتقال زمانی}]{\times e^{jk\omega_\circ(۲)}} a_{-k}e^{jk\omega_\circ(۲)}$$

$$x(t) \xrightarrow{t\to -t} x(-t) \xrightarrow{t\to t+۲} x\big(-(t+۲)\big)=x(-t-۲)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$b_k=e^{jk\omega_\circ(۲)}a_k-e^{jk\omega_\circ(۲)}a_{-k} \xrightarrow{FS^{-۱}} y(t)=x(t+۲)-x(-t-۲)$$

با رسم $y(t)=x(t+۲)-x(-t-۲)$ به شکل گزینه ۴ خواهیم رسید.

۴) گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به خاصیت مزدوجی در سری فوریه داریم:

$$b_k=\mathrm{Re}\{a_k\}=\frac{۱}{۲}a_k+\frac{۱}{۲}a_k^* \longrightarrow y[n]=\frac{۱}{۲}x[n]+\frac{۱}{۲}x^*[-n]$$

$$\Rightarrow\quad y[۱]=\frac{۱}{۲}x[۱]+\frac{۱}{۲}x^*[-۱]=\frac{۱}{۲}x[۱]+\frac{۱}{۲}x^*[۳]=\frac{۱+j}{۲}+\frac{۱+j۳}{۲}=۱+j۲$$

توجه داشته باشید به دلیل اینکه دوره تناوب سیگنال $x[n]$ برابر ۴ است، $x[-۱]=x[۳]$ می‌باشد. از طرف دیگر داریم:

$$a_\circ=\frac{۱}{N}\sum_{n=<N>}x[n]=\frac{۱}{۴}\sum_{n=\circ}^{۳}x[n]=۱-\frac{۳}{۴}j \quad\Rightarrow\quad y[۱]+a_\circ=۱+۲j+۱-\frac{۳}{۴}j=۲+\frac{۵}{۴}j$$

۵) گزینه ۴ صحیح است.

برای محاسبه توان سیگنال $x[n]$ از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم. برای این کار باید ضرایب فوریه $x[n]$ را در یک دوره تناوب به دست آوریم. با توجه به حقیقی بودن $x[n]$، ضرایب فوریه آن طبق نکته ۴۸ دارای تقارن مزدوج می‌باشند. بنابراین داریم:

$$a_k^*=a_{-k} \xrightarrow{k=۱} a_۱^*=a_{-۱} \longrightarrow a_{-۱}=a_۱^*=-۱-j۳$$

همچنین طبق صورت تست، $a_\circ$ برابر صفر است. در نتیجه طبق رابطه پارسوال داریم:

$$P=\frac{۱}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^۲=\sum_{k=<N>}|a_k|^۲=\sum_{k=-۱}^{۲}|a_k|=\underbrace{|a_{-۱}|^۲}_{۱\circ}+\underbrace{|a_\circ|^۲}_{\circ}+\underbrace{|a_۱|^۲}_{۱\circ}+\underbrace{|۱|^۲}_{۱}=۲۱$$