«بسمه تعالی»

@mtsignal مهدی تقدسی پاسخ تشریحی سیگنال ارشد کامپیوتر ۱۴۰۰

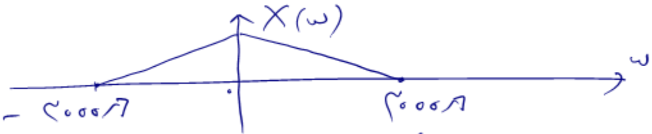
فصل ۱۷

۵۶- حداقل فرکانس نمونه برداری (f_s) برای سیگنال $x(t)=\left(\frac{\sin(1500\pi t)}{\pi t}\right)^2$ چقدر باید باشد که تداخل فرکانسی رخ ندهد؟

۱) $f_s = 1500\,Hz$ ۲) $f_s = 3000\,Hz$ ✓

۳) $f_s = 6000\,Hz$ ۴) $f_s = 7500\,Hz$

$$x(t) = \left(\frac{\sin(1500\pi t)}{\pi t}\right)^2 \xrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{\omega}{3000\pi}\right) * \Pi\left(\frac{\omega}{3000\pi}\right)$$



$$\omega_M = 3000\pi \longrightarrow 2\omega_M = 6000\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \Rightarrow 2f_M = 3000\,Hz$$

فصل ۸

۵۷- تبدیل Z سیگنال گسسته $x[n]$ دارای دو صفر در نقاط $\pm j$ و یک قطب در نقطه $\frac{1}{2}$ در صفحهٔ Z است. مکان صفرها و قطب‌های تبدیل Z سیگنال $y(n)=x(n).\left(\frac{1}{2}\right)^n.\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ کدام است؟

۱) دو قطب در نقاط $\pm\frac{1}{4}$ و دو صفر در $\pm\frac{1}{2}j$

۲) یک قطب در نقطه $\frac{1}{4}$ و دو صفر در $\pm\frac{1}{2}j$

۳) دو قطب در نقاط $\pm\frac{1}{4}j$ و ~~دو~~ چهار صفر در $\pm\frac{1}{2}$ ✓

۴) دو قطب در نقاط $\pm\frac{1}{2}j$ و دو صفر در $\pm j$

$$y(n) = \frac{1}{2}x[n].\Big(\underbrace{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}}_{z_0}\Big)^n + \frac{1}{2}x(n)\Big(\underbrace{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{z_0}\Big)^n$$

$$\Longrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}X\left(2e^{-j\frac{\pi}{2}}.z\right) + \frac{1}{2}X\left(2e^{j\frac{\pi}{2}}.z\right) = \frac{1}{2}X(-2jz) + \frac{1}{2}X(2jz)$$

صفرها:
$$\begin{cases} -2jz = \pm j \longrightarrow z = \mp\frac{1}{2} \\ 2jz = \pm j \longrightarrow z = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow z = \pm\frac{1}{2}$$

قطبها:
$$\begin{cases} -2jz = \frac{1}{2} \longrightarrow z = \frac{1}{4}j \\ 2jz = \frac{1}{2} \longrightarrow z = -\frac{1}{4}j \end{cases} \Longrightarrow z = \pm\frac{1}{4}j$$

۵۸- یک سیستم پیوسته، سببی، LTI و ~~نا~~پایدار دارای تابع تبدیل $H(s)=\frac{s+1}{s+\beta}$ است. این سیستم به‌ازای ورودی $x(t)=2$، پاسخ $y(t)=\frac{\beta}{4}$ را می‌دهد. مقدار β کدام است؟

فصل ۹

۱) $\beta=-2$

۲) $\beta=-4$

(!) ✓ ۳) $\beta=2\sqrt{2}$

۴) $\beta=-2\sqrt{2}$

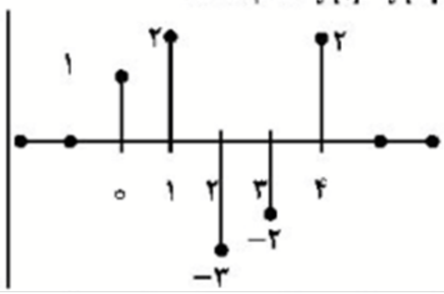
این سؤال نادرست است، زیرا در صورت ناپایداری سیستم (طبق صورت تست)، پاسخ به ورودی $x(t)=2$ نامحدود می‌شود. ولی با فرض اینکه طراح توجهی به این موضوع نداشته است، داریم:

$$x(t)=2e^{0t} \xrightarrow{H(s)} y(t)=2H(0)e^{0t}=\frac{2}{\beta}=\frac{\beta}{4} \Rightarrow \beta=\pm 2\sqrt{2}$$

با توجه به اینکه $H(0)$ محدود شده است، پس باید $s=0$ در ناحیه همگرایی آن قرار داشته باشد. پس $\beta=2\sqrt{2}$ انتخاب می‌گردد که با توجه به علّی بودن سیستم، این موضوع محقق شود.

۵۹- سیگنال $x(n)$ در شکل زیر اگر دارای تبدیل فوریه $X(e^{jw})$ باشد و سیگنال $y[n]$ با تبدیل فوریه $Y(e^{jw})$ به‌صورت $Y(e^{jw})=\mathrm{Re}\{e^{jw}X(e^{-j2w})\}$ تعریف شده باشد. مقدار $y[1]\times y[9]$ کدام است؟

فصل ۵



۱) $\frac{1}{2}$ ✓

۲) $\frac{3}{4}$

۳) ۲

۴) -3

$$Y(\omega)=\frac{1}{2}e^{j\omega}X(-2\omega)+\frac{1}{2}e^{-j\omega}X^*(-2\omega) \xrightarrow{F^{-1}} y(n)=\frac{1}{2}x_{(2)}[-(n+1)]+\frac{1}{2}x^*_{(2)}[n-1]$$

$$\Rightarrow y(1)\times y(9)=\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x_{(2)}[-2]}_{0}+\underbrace{\tfrac{1}{2}x^*_{(2)}[0]}_{1}\Big)\times\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x_{(2)}[-10]}_{0}+\underbrace{\tfrac{1}{2}x^*_{(2)}[8]}_{2}\Big)=\frac{1}{2}$$

۶۰- $x(t)$ و $y(t)$ سیگنال‌های با پهنای باند Ω و انرژی‌های Ex و Ey هستند. اگر $w>\Omega$ و $z(t)\triangleq x(t)\cos wt+y(t)\sin wt$ باشند، در این‌صورت $z(t)$ سیگنال .... برابر .... است.

فصل ۱۰

۱) انرژی با انرژی $Ex+Ey$

۲) انرژی با انرژی $\frac{1}{2}(Ex+Ey)$ ✓

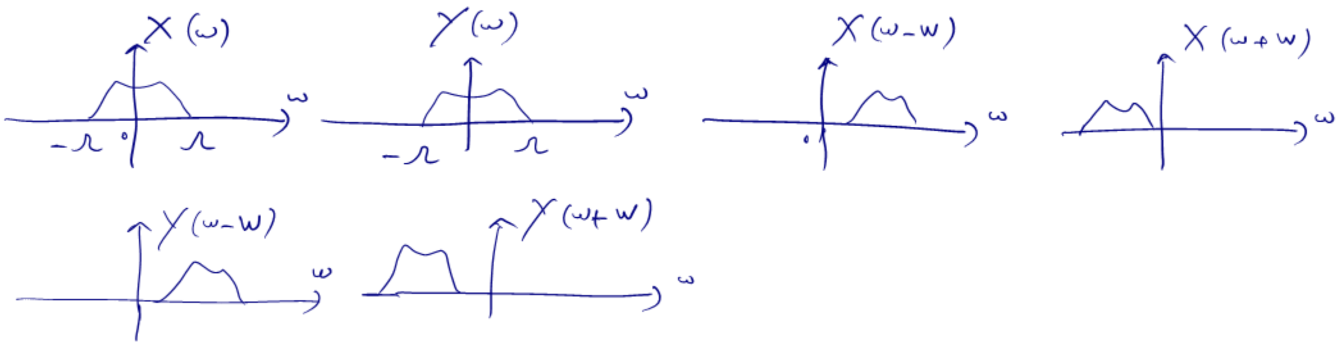
۳) توان با توان متوسط $2\pi(Ex+Ey)$

۴) توان با توان متوسط $\frac{\pi}{\Omega}(Ex+Ey)$

سیگنال های $x(t)\cos wt$ و $y(t)\sin wt$ بر هم عمودند، زیرا انتگرال ضرب آن برابر صفر می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\sin wt\cos wt\,dt = \frac{1}{2}\int \underbrace{x(t)y(t)}_{f(t)}\sin 2wt\,dt = \frac{1}{4j}F(\omega)\Big|_{\omega=2w} - \frac{1}{4j}F(\omega)\Big|_{\omega=-2w} = 0-0=0$$

بنابراین برای محاسبه انرژی $z(t)$، کافی است که انرژی $x(t)\cos wt$ و $y(t)\sin wt$ را جداگانه حساب کرده و با هم جمع نماییم.



با توجه به شکل‌های فوق و تبدیل فوریه سیگنال‌های $x(t).\cos wt$ و $y(t).\sin wt$ و استفاده از رابطه پارسوال داریم:

$$E\{z(t)\} = \underbrace{E\{x(t)\cos wt\}}_{\frac{1}{4}E_x+\frac{1}{4}E_x} + \underbrace{E\{y(t)\sin wt\}}_{\frac{1}{4}E_y+\frac{1}{4}E_y} = \frac{1}{2}(E_x+E_y)$$