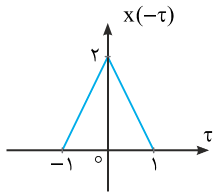
پاسخ تشریحی آزمون فصل سوم

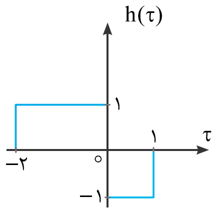
۱) گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به LTI بودن سیستم، خروجی برابر کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه می‌باشد.

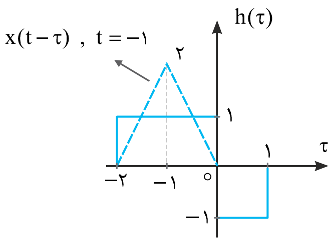
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

برای محاسبه کانولوشن در لحظه $t = t_{\circ}$، ابتدا باید یکی از سیگنال‌ها را قرینه کنیم. در اینجا به نظر ساده‌تر است که $x(t)$ را قرینه نماییم. بنابراین با رسم $h(\tau)$ و $x(-\tau)$ داریم:





حال باید سیگنال قرینه شده را به مقدار $t_{\circ}$ به سمت راست (اگر $t_{\circ} > \circ$ باشد) یا به سمت چپ (اگر $t_{\circ} < \circ$ باشد) انتقال داده و در سیگنال دیگر ضرب کنیم و سپس مساحت شکل حاصل را حساب نماییم تا مقدار کانولوشن در لحظه $t = t_{\circ}$ به‌دست آید. بدیهی است که بعد از اینکه سیگنال قرینه شده را به مقدار $t_{\circ}$ انتقال دادیم، مقدار کانولوشن به طول بازه همپوشانی دو سیگنال و همچنین دامنه سیگنال‌ها بستگی دارد؛ یعنی هر چه بازه همپوشانی دو سیگنال و دامنه سیگنال‌ها بیشتر باشند، طبیعتاً ضرب آن‌ها و در نتیجه مساحت شکل حاصل بیشتر خواهد بود. در این تست سؤال شده است که کانولوشن در چه لحظه‌ای (به ازای کدام $t_{\circ}$) ماکزیمم می‌شود. یعنی باید بررسی کنیم که سیگنال قرینه شده را چه مقدار و به چه سمتی شیفت دهیم که هم ماکزیمم همپوشانی را داشته باشیم و هم ماکزیمم دامنه‌ها روی هم قرار بگیرند، به‌طوری که وقتی دو سیگنال را در هم ضرب و مساحت شکل حاصل را حساب می‌نماییم، ماکزیمم مقدار به‌دست آید.



با توجه به شکل $h(\tau)$ و $x(-\tau)$، مشخص است که اگر $x(-\tau)$ را ۱ واحد به سمت چپ شیفت دهیم، هم ماکزیمم همپوشانی را داریم و هم ماکزیمم دامنه‌ها روی هم قرار می‌گیرند (مطابق شکل مقابل)؛ و در نتیجه حاصل ضرب دو سیگنال و مساحت شکل حاصل ماکزیمم خواهد بود. بنابراین کانولوشن در لحظه $t = t_{\circ} = -۱$ ماکزیمم مقدار را خواهد داشت. حال برای محاسبه این مقدار ماکزیمم، باید شکل $x(t-\tau)$ (به‌ازای $t = -۱$) را در $h(\tau)$ ضرب نموده که برابر خود $x(t-\tau)$ خواهد بود و مساحت آن برابر ۲ می‌باشد. پس مقدار کانولوشن در لحظه $t = -۱$ برابر ۲ است.

۲) گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به فرم گزینه‌ها مشخص است که ورودی شامل سه ضربه بوده است که وقتی با پاسخ ضربه کانوالو شده است، آن را سه بار انتقال داده است. بنابراین ابتدا ورودی را ساده می‌کنیم. برای ساده‌کردن ورودی،

عبارات $u[-2n-1]$ و $u[-n-3]$ باید ساده شوند. $u[-2n-1]$ برای $-2n-1 \geq 0$ یعنی $n \leq -\frac{1}{2}$ مقدار دارد؛ و چون متغیر n، مقداری گسسته و صحیح است، پس $u[-2n-1]$ برای $n \leq -1$ مقدار خواهد داشت. همچنین $u[-n-3]$ برای $-n-3 \geq 0$ یعنی $n \leq -3$ مقدار دارد. بنابراین $u[-2n-1]-u[-n-3]$ فقط برای $-2 \leq n \leq -1$ مقدار خواهد داشت. یعنی داریم:

$$x[n] = (\tfrac{1}{2})^n u[-2n-1] - (\tfrac{1}{2})^n u[-n-3] = (\tfrac{1}{2})^n \underbrace{\left(\underbrace{u[-2n-1]}_{n \leq -1} - \underbrace{u[-n-3]}_{n \leq -3}\right)}_{-2 \leq n \leq -1}$$

در نتیجه تفاضل $u[-2n-1]-u[-n-3]$ فقط دارای دو ضربه در $n=-1,-2$ می‌باشد. یعنی داریم:

$$x[n] = (\tfrac{1}{2})^n \left(\delta[n+1]+\delta[n+2]\right) = (\tfrac{1}{2})^n \underbrace{\delta[n+1]}_{n=-1 \text{ ضربه در }} + (\tfrac{1}{2})^n \underbrace{\delta[n+2]}_{n=-2 \text{ ضربه در }}$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = (\tfrac{1}{2})^{-1} \delta[n+1] + (\tfrac{1}{2})^{-2} \delta[n+2] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n+2]$$

حال ورودی فوق را با پاسخ ضربه $h[n]$ کانوالو می‌کنیم تا خروجی به‌دست آید:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \left(2\delta[n+1]+4\delta[n+2]\right)*h[n] = 2h[n+1]+4h[n+2]$$

۳) گزینه ۲ صحیح است.

$h[n]=(-1)^n u[2n-1]$ برای لحظات $n \geq \frac{1}{2}$ و به عبارت دقیق‌تر $n \geq 1$ مقدار دارد، یعنی در همه زمان‌های منفی صفر است، پس این سیستمِ LTI، علی می‌باشد. برای تحقیق در مورد پایداری سیستم، باید مطلقاً جمع‌پذیر بودن $h[n]$ را بررسی کنیم. داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n]\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|(-1)^n u[2n-1]\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} (1) = \infty$$

پس سیستم ناپایدار است.

۴) گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا با تبدیل t به $t-1$ در رابطه سیستم، $y(t)$ را بر حسب ورودی می‌نویسیم:

$$y(t+1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(\tau-t)\,d\tau \quad \xrightarrow{t \to t-1} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u\left(\tau-(t-1)\right)d\tau$$

حال با توجه به رابطه سیستم می‌توان آن را به صورت رابطه کانولوشنی نوشت:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u\left(\tau-(t-1)\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u\left(-(t-\tau)+1\right)d\tau = x(t)*u(-t+1)$$

بنابراین سیستم فوق، یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(-t+1)$ می‌باشد که با توجه به نکته ۳۵، غیرعلی است. بدیهی است که می‌توانستیم TI بودن و علی بودن این سیستم را با همان روش‌های بیان شده در فصل دوم نیز بررسی نماییم.

۵) گزینه ۲ صحیح است.

از رابطه کلی سیستم‌های خطی استفاده می‌کنیم. پاسخ به $x[n]=\delta[n-k]$ به‌صورت $h[n,k]=\delta[n-2k]$ داده شده است. برای محاسبه رابطه سیستم، کافی است که $h[n,k]$ را در رابطه کلی سیستم‌های خطی جایگذاری کنیم:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]h[n,k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\underbrace{\delta[n-2k]}_{\text{ضربه در } k=\frac{n}{2}}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[\tfrac{n}{2}]\delta[n-2k]=x[\tfrac{n}{2}]\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]$$

با توجه به اینکه $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]$ یک قطار ضربه با دوره تناوب $N=2$ می‌باشد، داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]=\begin{cases}1 & , \text{مضرب ۲ } n\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

در نتیجه رابطه سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$y[n]=\begin{cases}x[\frac{n}{2}] & , \text{مضرب ۲ } n\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}\longrightarrow \quad y[n]=x_{(2)}[n]$$