به نام خدا

سوالات و پاسخ تشریحی آزمون دکتری ۹۸

مهدی مقدسی
@mtsignal_e

سطح سوالات نسبت به دو سال گذشته ساده‌تر بوده و غیر از سوالات ۴۰ و ۴۵ ، بقیه سوالات با جامه اول به راحتی قابل حل هستند، اگرچه بعضی شون با جامه دوم راحت‌تر حل می‌شوند.

۳۶- تبدیل z سیگنال گسستهٔ $x[n]$ روی دایرهٔ $z = ۲e^{j\omega}$ به‌صورت زیر است:

فصل ۸

$$X(۲e^{j\omega}) = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۳}e^{-j\omega}}$$

سیگنال $x[n]$، کدام است؟

۱) $x[n] = ۶^n u[n]$

۲) $x[n] = (\frac{۲}{۳})^n u[n]$ ✓

۳) $x[n] = (\frac{۱}{۳})^n u[n]$

۴) $x[n] = (\frac{۱}{۶})^n u[n]$

$$z = ۲e^{j\omega} \Rightarrow e^{j\omega} = \frac{z}{۲}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{۲}{۳}z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{۲}{۳} \longrightarrow$$

زیرا طبق صورت تست، $|z| = ۲$ در ROC قرار دارد

$$\Rightarrow x(n) = (\frac{۲}{۳})^n u(n)$$

فصل ۵

۳۷- تبدیل فوریهٔ سیگنال زمان گسسته $x[n]=\left[(\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi n}{2})\right]u[n]$، برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$ ✓

۲) $\dfrac{1}{1+je^{-j2\omega}}$

۳) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-j(-1)^k e^{-j\omega}}$

۴) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2-j(-1)^k e^{-j\omega}}$

$$x(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n)\cdot \tfrac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}n} + (\tfrac{1}{2})^n u(n)\, e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

با استفاده از جدول تبدیل فوریه و خاصیت انتقال فرکانس داریم:

$$X(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\omega-\frac{\pi}{2})}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\omega+\frac{\pi}{2})}}$$

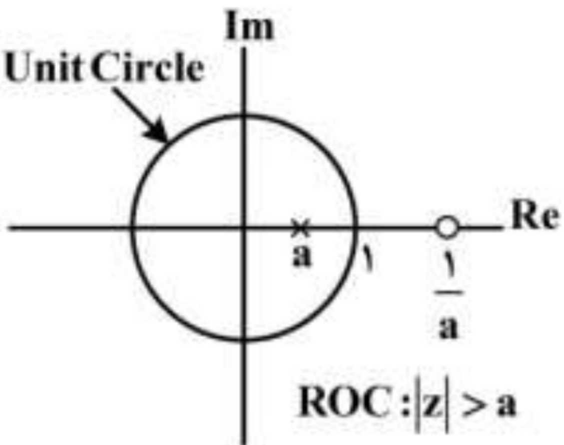
$\frac{j}{2}e^{-j\omega}$ $\qquad$ $-\frac{j}{2}e^{-j\omega}$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

البته این تست با تبدیل z (استفاده از تبدیل z سیگنال اصلی و خاصیت مقیاس دهی در حوزه z) نیز به صورت سریع‌تر قابل حل است.

۳۸- نمایش موقعیت صفر و قطب یک سیستم زمان گسسته به‌صورت شکل زیر است. این سیستم بیانگر چه نوع فیلتری است؟

فصل ۹



۱) فیلتر پایین‌گذر

۲) فیلتر میان‌گذر

۳) فیلتر بالاگذر

۴) فیلتر تمام‌گذر ✓

$$X(\omega) = \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{a}}{e^{j\omega} - a}$$

روش اول (جلسه اول):

$$\Rightarrow \quad |X(0)| = \left|\frac{1-\frac{1}{a}}{1-a}\right| = \frac{1}{a} \quad , \quad |X(\pi)| = \left|\frac{-1-\frac{1}{a}}{-1-a}\right| = \frac{1}{a}$$

$$|X(\tfrac{\pi}{2})| = \left|\frac{j-\frac{1}{a}}{j-a}\right| = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow |X(0)| = |X(\tfrac{\pi}{2})| = |X(\pi)| \Rightarrow$$ فیلتر تمام‌گذر

روش دوم (حالت دوم): قطب‌ها معکوس صفرها هستند، پس طبق نکته ۱۲۶، فیلتر تمام‌گذر است.

نکته ۱۲۶: در فیلتر تمام‌گذر زمان‌گسسته حقیقی[1] صفرها عکس قطب‌ها هستند و در فیلتر تمام‌گذر زمان‌پیوسته حقیقی نیز صفرها قرینه قطب‌ها هستند.

صفرها عکس قطب‌ها هستند.	$\longleftrightarrow$	فیلتر تمام‌گذر حقیقی زمان‌گسسته
صفرها قرینه قطب‌ها هستند.	$\longleftrightarrow$	فیلتر تمام‌گذر حقیقی زمان‌پیوسته

به‌عنوان مثال سیستم $H(s)=\frac{s-۲}{s+۲}$ و سیستم $H(z)=\frac{z-۲}{z-\frac{۱}{۲}}$ به‌ترتیب فیلترهای تمام‌گذر زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته می‌باشند، زیرا در سیستم اول، صفر و قطب، قرینه هم هستند؛ و در سیستم دوم، صفر و قطب، عکس هم می‌باشند.

۳۹- اگر برای k عدد صحیح و مثبت، سیگنال $x_{(k)}[n]$ با اضافه کردن $k-1$ صفر مابین هر دو مقدار متوالی $x[n]$ به‌دست آید، به‌ازای چه مقدار θ در فاصلهٔ $(0,2\pi)$ رابطهٔ زیر برقرار است؟

$$X_{(3)}(e^{j\omega}) = X_{(3)}(e^{j(\omega-\theta)})$$

فصل ۵

۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{2\pi}{3}$ ✓

۳) π

۴) $\frac{4\pi}{3}$

روش اول (جلسه اول): تبدیل فوریه سیگنال $x_{(3)}(n)$ طبق خاصیت گسترش دز برابر $X(e^{j3\omega}) \equiv X(3\omega)$ می‌باشد. از آنجا که $X(\omega)$ با 2π متناوب است، $X(3\omega)$ با $\frac{2\pi}{3}$ متناوب خواهد بود (نکته ۳). پس $\theta = \frac{2\pi}{3}$ می‌باشد.

* توجه کنید که منظور طراح از $X_3(e^{j\omega})$، تبدیل فوریه $x_{(3)}(n)$ بوده است.

روش دوم (جلسه دوم): استفاده از نکته ۱۰۶ به ازای $\alpha = k = 3$

نکته ۱-۶: اگر سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ حداکثر فقط در لحظات مضرب α $(0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \cdots)$ مقدار داشته باشد (یعنی در لحظات غیر مضرب α، برابر صفر باشد)، آنگاه تبدیل فوریه آن یعنی $X(\omega)$ با دوره تناوب $\frac{2\pi}{\alpha}$ و به‌طور معادل $X(f)$ با دوره تناوب $\frac{1}{\alpha}$ متناوب خواهد بود. عکس این نکته نیز برقرار است.[1]

$$\begin{cases} x(t) = 0 \ , \ t \neq 0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \cdots \\ x[n] = 0 \ , \ n \neq 0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \cdots \end{cases} \longleftrightarrow X(\omega) \text{ متناوب با } \frac{2\pi}{\alpha}$$

[1] در واقع طبق این نکته، دلیل اینکه تبدیل فوریه زمان‌گسسته همواره با دوره تناوب 2π متناوب می‌باشد این است که همه سیگنال‌های زمان‌گسسته حداکثر فقط در لحظات مضرب $\alpha = 1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$) مقدار دارند و در مضارب غیر ۱ مقدار ندارند!

فصل ۳

۴۰- یک سیستم LTI با انرژی پاسخ ضربهٔ E_h را در نظر می‌گیریم. کدام گزینه در مورد این سیستم **نادرست** است؟

۱) اگر $E_h < \infty$ باشد، سیستم پایدار است. ✓

۲) اگر $E_h = \infty$ باشد، سیستم ناپایدار است.

۳) اگر سیستم پایدار باشد، E_h کراندار است $(E_h < \infty)$

۴) گزینه‌های ۲ و ۳

می‌دانیم که:
$$E_h = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|^2$$

همچنین شرط پایداری معادل $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ می‌باشد.

بررسی گزینه ۱: اگر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|^2 < \infty$ (یا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt < \infty$) باشد، لزوماً $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ (یا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$) نخواهد بود. مثال نقض آن، سیگنال sinc (سینک) می‌باشد (صفحه ۲۴ جلد اول). دلیل این موضوع، میراتر بودن سیگنال $sinc^2$ نسبت به sinc می‌باشد.

پس گزینه ۱ نادرست است.

قبل از بررسی گزینه‌های ۲ و ۳، به یک اصل بدیهی در منطق اشاره می‌کنیم. اگر گزاره منطقی

$p \to q$ برقرار باشد، قطعاً عکس نقیض آن یعنی $\sim q \to \sim p$ نیز

برقرار خواهد بود که این موضوع به سادگی با برهان خلف قابل اثبات است. مثلاً اگر

یک گزاره منطقی به صورت «هوا سرد است $\to$ اگر برف بیاید» داشته باشیم

قطعاً عکس نقیض آن یعنی «برف نمی‌آید $\to$ اگر هوا سرد نباشد» نیز برقرار

خواهد بود. حال با یادآوری این اصل بدیهی، ادامه گزینه ۳ را بررسی می‌کنیم:

برای گزینه ۳: این گزینه بیان می‌کند که:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|^2 < \infty$$

این گزاره در حالت زمان گسسته صحیح است که دلیل آن در تست ۱۲ صفحه ۲۴۵

حالت دوم کتاب بیان شده است. اما در حالت زمان پیوسته لزوماً صحیح نیست و

مثال نقض آن سیگنال $\delta(t)$ (ضربه) می‌باشد (که این مورد نیز در پاورقی همان صفحه ۲۴۵

اشاره شده است). یعنی در حالت زمان پیوسته اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt<\infty$ باشد، لزوماً

اما بوده صحیح گسسته زمان درحالت گزینه این پس .نخواهد بود $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|^2 dt < \infty$

درحالت زمان پیوسته صحیح نمی‌باشد.

برای گزینه ۲: این گزینه بیان می‌کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|^2 = \infty \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$$

خب این گزینه دقیقاً عکس نقیض گزینه ۳ می‌باشد! یعنی هیچ فرقی با گزینه ۳

ندارد پس این گزینه نیز درحالت زمان گسسته صحیح بوده و درحالت زمان پیوسته صحیح نمی‌باشد و مثال نقض آن نیز طبیعتاً همان سیگنال ضربه می‌باشد.

در نتیجه پاسخ این تست در حالت زنجیره شکسته، گزینه ۱ می‌باشد و در حالت زنجیره پیوسته نیز همه گزینه‌ها نادرست هستند.

شبیه این تست در سال گذشته و همچنین آزمون دکتری ۹۲ نیز ارائه شده بود

۴۱- سیستم‌های توصیف‌شده با رابطه‌های ورودی ـ خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 : y[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{5}\right] & , \quad n = 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

فصل ۲

$$S_2 : y[n] = x[5n] \quad , \quad \forall n$$

کدام گزینه درست است؟

۱) S_1 وارون پذیر و تغییرناپذیر با زمان

۲) S_1 و S_2 وارون‌پذیر و تغییرپذیر با زمان

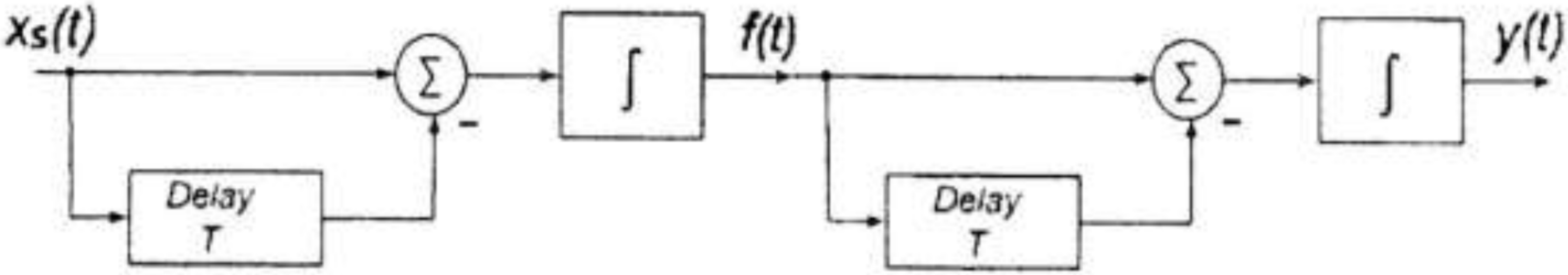
۳) S_2 وارون ناپذیر، S_1 و S_2 تغییرپذیر با زمان

۴) S_1 و S_2 وارون ناپذیر و تغییرپذیر با زمان

شبیه این سؤال به وفور در فصل دوم کتاب حل شده است.

فصل ۹ یا ۱۰

۴۲- پاسخ ضربهٔ سیستم نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



۱) h(t) = tu(t) − (t − ۲T)u(t − ۲T)

۲) h(t) = u(t) − ۲u(t − T) + u(t − ۲T)

۳) h(t) = tu(t) − ۲tu(t − T) + tu(t − ۲T)

۴) h(t) = tu(t) − ۲(t − T)u(t − T) + (t − ۲T)u(t − ۲T) ✓

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} [x(\tau) - x(\tau - T)]\,d\tau = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{x(t)=\delta(t)} f(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [f(\tau) - f(\tau - T)]\,d\tau = \int_{t-T}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

با جایگذاری $f(t)$ در رابطه دوم و استفاده از فرمول B (فصل ۱۰)، داریم:

$$y(t) = [r(t) - r(t-T)] - [r(t-T) - r(t-2T)]$$

$$= r(t) - 2r(t-T) + r(t-2T)$$

$$= t\,u(t) - 2(t-T)\,u(t-T) + (t-2T)\,u(t-2T)$$

البته می‌توانستیم با استفاده از شکل ۷ پایانی (جلد اول) و به جای استفاده از فرمول B نیز به راحتی به پاسخ فوق برسیم.

فصل ۹

۴۳- کدام گزینه دربارهٔ یک سیستم LTI صحیح است؟

۱) وارون یک سیستم علّی همیشه یک سیستم علّی است.

۲) ترکیب سری یک سیستم غیرعلّی، با یک سیستم علّی ، ضرورتاً یک سیستم غیرعلّی است.

۳) یک سیستم زمان پیوسته پایدار است، اگر و تنها اگر پاسخ پلهٔ آن مطلقا انتگرال‌پذیر باشد.

۴) ✓ یک سیستم زمان گسسته علّی است، اگر و تنها اگر پاسخ به ورودی پلهٔ واحد آن به ازای $n < 0$ برابر صفر باشد.

برای گزینه ۱ : می‌دانیم که وارون سیستم $H(z)$ برابر $H_i(z)$ است و ناحیه همگرایی $H_i(z)$ مرتبط باید طوری انتخاب گردد که با ناحیه همگرایی $H(z)$ اشتراک داشته باشد. حال اگر ناحیه همگرایی $H(z)$ شامل $|z|=\infty$ باشد، دلیلی ندارد که ناحیه همگرایی $H_i(z)$ نیز شامل $|z|=\infty$ باشد. مثلاً سیستم $H(z)=\frac{1}{z-1}$ و $|z|>1$ و وارون آن $H_i(z)=z-1$ را در نظر بگیرید که دارای ناحیه همگرایی $|z|<\infty$ است و علّی نیست.

برای بخش ۲: ناحیه همگرایی دو سیستم LTI متوالی، حداقل برابر اشتراک آنها خواهد بود
و در صورت ساده شدن صفر و قطب، می‌تواند بزرگتر از اشتراک نیز بشود. حال فرض
کنید سیستم $H_1(z)$ غیرعلی بوده و ناحیه همگرایی آن شامل $z=\infty$ نباشد. همچنین
$H_2(z)$ علی بوده و ناحیه همگرایی آن شامل $z=\infty$ باشد. اشتراک ناحیه همگرایی این
دو سیستم شامل $z=\infty$ نمی‌باشد، اما اگر قطب و صفر ساده شوند، ممکن است ناحیه همگرایی
کل شامل $z=\infty$ شود. مثلاً دو سیستم $|z|<\infty$ و $H_1(z)=z$ و
$|z|>0$ و $H_2(z)=z^{-1}$ را در نظر بگیرید. پس گزینه ۲ نادرست است. البته

حتی توانستیم با روابط سیستم ها با پاسخ ضربه نیز این موضوع را بررسی نماییم.

برای تکمیل خواص سیستم های سوال در تمرین های تالیفی ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ فصل ۱۰ از ج ۳ مساله است

که البته این تست لزوماً نیازی به مطالعه آنها نداشت.

برای گزینه ۳: شرط پایداری مربوط به مطلق انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه‌ی خود و

مطلق انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه نیز لزوماً ربطی به مطلق انتگرال‌پذیر بودن پاسخ پله ندارد.

برای گزینه ۴: با توجه به روابط $h(n)=s(n)-s(n-1)$ و $s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)$، شرط لازم و کافی برای علی بودن $h(n)$ این است که $s(n)$ علی باشد.

فصل ۲

۴۴- کدام گزینه در مورد سیستم با توصیف ورودی ـ خروجی $y(t) = (t-1)x(\cos(t))$ صادق است؟

۱) تغییرناپذیر با زمان، پایدار، بدون حافظه

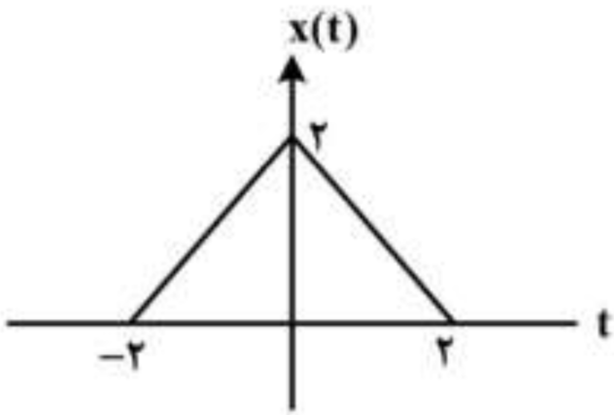
۲) تغییرپذیر با زمان، ناپایدار، غیرعلّی

۳) تغییرپذیر با زمان، پایدار، حافظه‌دار

۴) تغییرناپذیر با زمان، ناپایدار، بدون حافظه

نکته: این سؤال به وفور در فصل دوم کتاب حل شده است.

۴۵- اگر $X(j\omega)$ تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ باشد، حاصل انتگرال زیر کدام است؟



$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(j\omega)\sin(\omega)}{\omega}e^{j\omega}d\omega$$

فصل ۵ یا ۱۲

۱) ۰

۲) π

۳) 2π ✓

۴) 4π

روش اول:

$$x(t) * \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} X(\omega)\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}$$

رابطهٔ سنتز: $x(t) * \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\frac{\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}\,d\omega$

$$\Rightarrow I = 2\pi\, x(t) * \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=1} = 2\pi$$

روش دوم (رابطه تعمیم یافته پارسوال):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,\underbrace{\frac{\sin\omega}{\omega}\,e^{j\omega}}_{Y(\omega)} = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\Pi(-t+1)}_{y(-t)}\,dt$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\frac{1}{2}\Pi(t-1)\,dt = 2\pi$$

زوج Π

موفق باشید