پاسخ تشریحی آزمون فصل‌های هفتم و هشتم

۱) گزینه ۳ صحیح است.

$$x(t)=\begin{cases}\sin t\,, & 0\le t\le \pi\\ 0\,, & \text{o.w}\end{cases}=\sin t\left[u(t)-u(t-\pi)\right]=\sin(t)u(t)-\sin(t)u(t-\pi)$$

با توجه به اینکه $\sin(t-\pi)=-\sin(t)$ می‌باشد، داریم:

$$x(t)=\sin(t)u(t)-\sin(t)u(t-\pi)=\sin(t)u(t)+\sin\left(t-\pi\right)u(t-\pi)$$

حال با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس و همچنین خاصیت انتقال زمانی داریم:

$$X(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}=\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\,,\ \text{Re}[s]>-\infty \xrightarrow{s=1} X(\pi)=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

۲) گزینه ۴ صحیح است.

در این تست باید از قضیه مقدار اولیه استفاده کنیم. اما در ابتدا با استفاده از خاصیت مقیاس‌دهی در تبدیل لاپلاس داریم:

$$y(t)=x(3t) \longrightarrow Y(s)=\frac{1}{3}X(\frac{s}{3})=\frac{1}{3}\frac{3\frac{s}{3}+7}{(\frac{s}{3})^3+6(\frac{s}{3})^2+11\frac{s}{3}+6}=\frac{9s+63}{s^3+18s^2+99s+162}$$

همچنین با فرض $z(t)=\frac{dy(t)}{dt}$ و با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در زمان خواهیم داشت:

$$z(t)=\frac{dy(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Z(s)=sY(s)=\frac{9s^2+63s}{s^3+18s^2+99s+162}$$

حال با توجه به اینکه $z(t)=\frac{dy(t)}{dt}$ سیگنالی علی است و درجه صورت تبدیل لاپلاس آن از درجه مخرج کمتر است، طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{dy(t)}{dt}=\lim_{t\to 0^+}z(t)=\lim_{s\to\infty}sZ(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{9s^3+63s^2}{s^3+18s^2+99s+162}=9$$

۳) گزینه ۱ صحیح است.

قسمت فرد سیگنال $x[n]$ و تبدیل $\mathcal{Z}$ آن با استفاده از خاصیت وارونگی زمانی برابر است با:

$$y[n]=x_o[n]=\frac{1}{2}x[n]-\frac{1}{2}x[-n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)=\frac{1}{2}X(z)-\frac{1}{2}X(z^{-1})$$

ناحیه همگرایی $X(z)$ برابر $0/4<|z|<2$ و در نتیجه ناحیه همگرایی $X(z^{-1})$ برابر $0/4<|z^{-1}|<2$ یا به‌طور معادل برابر $0/5<|z|<2/5$ می‌باشد. حال ناحیه همگرایی $Y(z)$ نیز طبق خاصیت خطی بودن، حداقل برابر اشتراک این دو ناحیه یعنی $0/5<|z|<2$ خواهد بود.

۴) گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا $h_1[n]=h[n]\cos\frac{\pi n}{4}$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$h_1[n]=h[n]\cos\frac{\pi n}{4}=\frac{1}{2}h[n]e^{j\frac{\pi}{4}n}+\frac{1}{2}h[n]e^{-j\frac{\pi}{4}n}=\frac{1}{2}h[n](e^{j\frac{\pi}{4}})^n+\frac{1}{2}h[n](e^{-j\frac{\pi}{4}})^n$$

حال با استفاده از خاصیت مقیاس‌دهی در حوزه $\mathcal{Z}$ داریم:

$$H_1(z)=\frac{1}{2}H\left(\frac{z}{e^{j\frac{\pi}{4}}}\right)+\frac{1}{2}H\left(\frac{z}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)=\frac{1}{2}H\left(ze^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+\frac{1}{2}H\left(ze^{j\frac{\pi}{4}}\right)\qquad(1)$$

$H(z)$ در $2e^{j\frac{\pi}{8}}$, $2e^{-j\frac{\pi}{8}}$ دارای قطب است، یعنی $H\left(2e^{j\frac{\pi}{8}}\right),H\left(2e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)=\infty$ می‌باشد (طبق صورت تست). حال باید طبق رابطه (۱) حدس بزنیم که $H_1(z)$ در چه z هایی دارای قطب است. در واقع باید قطب‌های $H\left(ze^{j\frac{\pi}{4}}\right)$ و $H\left(ze^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$ را تعیین نماییم. به عبارت دیگر باید بررسی کنیم که در عبارات $H\left(ze^{j\frac{\pi}{4}}\right)$ و $H\left(ze^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$ به‌جای z، چه مقداری قرار دهیم تا $H\left(2e^{j\frac{\pi}{8}}\right)$ و $H\left(2e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)$ ایجاد شود. بنابراین با توجه به اینکه $H(z)$ در $2e^{j\frac{\pi}{8}}$ و $2e^{-j\frac{\pi}{8}}$ دارای قطب است، قطب‌های $H\left(ze^{j\frac{\pi}{4}}\right)$ در $\frac{2e^{j\frac{\pi}{8}}}{e^{j\frac{\pi}{4}}}$ و $\frac{2e^{-j\frac{\pi}{8}}}{e^{j\frac{\pi}{4}}}$ قرار خواهند داشت. همچنین قطب‌های $H\left(ze^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$ نیز در $\frac{2e^{j\frac{\pi}{8}}}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}$ و $\frac{2e^{-j\frac{\pi}{8}}}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}$ قرار خواهند گرفت که پس از ساده کردن این مقادیر، به گزینه ۴ خواهیم رسید.

۵) گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا $x[n]$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x[n]=\begin{cases}(\frac{1}{2})^n\cos\frac{\pi}{8}n & , \quad n\geq 0\\ 0 & , \quad n<0\end{cases}=(\frac{1}{2})^n\cos\frac{\pi}{8}n\,u[n]$$

در حوزه زمان عبارت $(\frac{1}{2})^n\cos\frac{\pi}{8}n\,u[n]$ داریم پس طبق نکته ۶۰، در حوزه $\mathcal{Z}$ قطب‌هایی در $\frac{1}{2}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ خواهیم داشت. همچنین چون $x[n]$ سمت راستی است، پس ناحیه همگرایی $X(z)$، خارجی می‌باشد و به‌صورت $|z|>\frac{1}{2}$ خواهد بود. البته توجه کنید که در اینجا $x[n]$ علی است و ROC شامل $z=\infty$ نیز می‌شود. ولی اگر $x[n]$ علی نبود، ناحیه همگرایی به‌صورت $\frac{1}{2}<|z|<\infty$ می‌شد.