« بسمه تعالی »

تحلیل و پاسخ تشریحی سیگنال ارشد برق ۱۴۰۰

@mtsignal مهدی تقدیسی

سطح سؤالات از آزمونهای سالهای اخیر دشوارتر بوده است. سؤالات ۱۰۴ و ۱۱۱ و ۱۱۲ از جلد دوم و بقیه سؤالات با اطلاعات جلد اول قابل حل می‌باشند.
یک تست (۱۰۹) نیز از ده صفحه طلایی ارائه شده است.

فصل ۹

۱۰۳- پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $h(t)$ و تبدیل فوریهٔ آن به‌صورت $H(\omega)=\frac{1+j\omega}{2-j\omega}$ است.
کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) غیرعلّی و وارون‌پذیر
۲) علّی و وارون‌پذیر
۳) علّی و وارون‌ناپذیر
۴) غیرعلّی و وارون‌ناپذیر ✓

$H(s)=\frac{1+s}{2-s}$ و $Re(s)<2$ ⟵ زیرا باید محور $j\omega$ در ROC باشد.

$s=+\infty$ در ROC قرار ندارد پس سیستم غیرعلی است.

در $s=-1$، صفر داریم که در ROC نیز قرار دارد، پس سیستم وارون‌ناپذیر است.

توجه: ممکن است گزینه انتخابی سنجش به اشتباه گزینه ۱ باشد که در این صورت حتماً اعتراض نمایید.

فصل ۶

۱۰۴- ضرایب سری فوریهٔ سیگنال زمان گسستهٔ متناوب $x[n]$ با پریود $N=6$ را a_k می‌نامیم. دراین‌صورت ضرایب سری فوریهٔ سیگنال متناوب زمان پیوستهٔ $y(t)$ با تعریف $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-4n)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}a_k$
۲) $\frac{1}{4}a_k$ ✓
۳) $4a_k$
۴) $6a_k$

این تست شبیه به یکی از تست‌های آزمون ارشد ۹۴ (با یک تغییر عددی جزئی) می‌باشد که در جلد دوم کتاب (فصل ۱۲) قرار داشت.

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\,\delta(t-4n)$$

$$N=6 \qquad T=4 \implies T_y=6\times 4=24 \ , \ \omega_0=\frac{2\pi}{T_y}=\frac{\pi}{12}$$

$$z(t)=x[0]\delta(t)+x[1]\delta(t-4)+x[2]\delta(t-8)+\dots+x[5]\delta(t-20)$$

یک دوره تناوب از سیگنال $(-1<t<23)$

$$\implies Z(\omega)=x[0]+x[1]e^{-j4\omega}+x[2]e^{-j8\omega}+\dots+x[5]e^{-j20\omega}$$

$$\longrightarrow b_k = \frac{1}{T_y} Z(k\omega_0) = \frac{1}{24}\left[x(0) + x(1)e^{-jk\frac{\pi}{3}} + x(2)e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \dots + x(5)e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\right] \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{6}n} = \frac{1}{6}\left[x(0) + x(1)e^{-jk\frac{\pi}{3}} + x(2)e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \dots + x(5)e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\right] \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} \quad b_k = \frac{1}{4}a_k$$

۱۰۵- $x(t)$، سیگنال زمان پیوسته با انرژی E_x به یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t) = \frac{1}{t}$، به‌عنوان ورودی اعمال می‌شود. اگر $y(t)$ سیگنال خروجی باشد، در این‌صورت انرژی $y(t)$، کدام است؟

فصل ۹

۱) $\frac{1}{3}E_x$ ۲) E_x

۳) $\pi^2 E_x$ ✓ ۴) ∞

با استفاده از دوگانی تبدیل فوریه زمان پیوسته داریم:

$$h(t) = \frac{1}{t} \xleftrightarrow{F} H(\omega) = ? = -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$H(t) \longleftrightarrow 2\pi h(-\omega) = -\frac{2\pi}{\omega}$$

$$-j\pi\,\mathrm{sgn}(t) \xleftarrow{F^{-1}}$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2 d\omega = \pi^2 \times \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2 d\omega}_{E_x} = \pi^2 E_x$$

۱۰۶- مقدار انتگرال زیر، کدام است؟

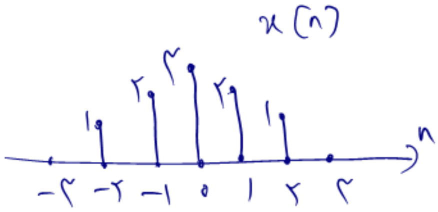
فصل ۵

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{3\omega}{2}\right)\cos(\omega)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega$$

۱) π ۲) 2π

۳) 4π ✓ ۴) 6π

$$X(\omega) = \left(\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^2 \xrightarrow{F^{-1}} x[n] = \Pi\left(\frac{n}{2}\right) * \Pi\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^{2}e^{j\omega}\,d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^{2}e^{-j\omega}\,d\omega=\frac{1}{2}\times 2\pi x[1]+\frac{1}{2}\times 2\pi x[-1]=$$

۱۰۷- رابطهٔ ورودی $x(n)$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم علّی به‌صورت زیر است:

$$y[n]=x(n)x(n-1)+\frac{1}{2}y(n-1)$$

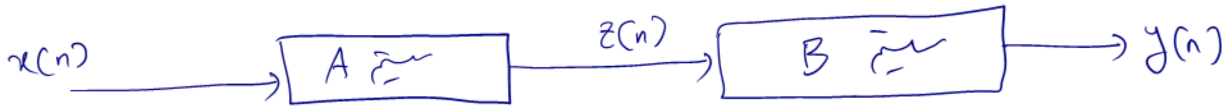
فصل ۲

کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) ناپایدار و معکوس‌پذیر
۲) ناپایدار و معکوس‌ناپذیر
۳) پایدار و معکوس‌پذیر
۴) پایدار و معکوس‌ناپذیر ✓

برای وارون‌پذیری: نمی‌توان ورودی را برحسب خروجی نوشت پس سیستم وارون‌ناپذیر است. اگرچه کاملاً مشخص است که به دلیل ضرب ورودی در خودش، ورودی‌های ثابت منفی و مثبت، یک خروجی ایجاد می‌کنند.

برای پایداری: برای راحتی در درک سؤال، سیستم را به دو سیستم متوالی A و B به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:



$z(n)=x(n).x(n-1)$ $\qquad$ $y(n)=z(n)+\frac{1}{2}y(n-1]$

پایداری سیستم A که مشخص است. کافی است که نشان دهیم که سیستم B نیز پایدار است. در این صورت سیستم کل نیز قطعاً پایدار خواهد بود. با توجه به علّی بودن سیستم، سیستم B را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$y(n)=z(n)+\frac{1}{2}y(n-1)=z(n)+\frac{1}{2}\left(z(n-1)+\frac{1}{2}y[n-2]\right)=z(n)+\frac{1}{2}z(n-1)+\frac{1}{4}\left(z(n-2)+\frac{1}{2}y(n-3]\right)$$

$$=\cdots=z(n)+\frac{1}{2}z(n-1)+\frac{1}{4}z(n-2)+\frac{1}{8}z(n-3)+\cdots+\frac{1}{\infty}y[-\infty]$$

با صرف‌نظر کردن از جملهٔ آخر (با اغماض)، رابطهٔ سیستم تبدیل به یک سیستم LTI با ورودی $z(n)$ و خروجی $y(n)$ می‌شود. داریم:

$$\Longrightarrow\quad y(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}z(n-k]\ \xrightarrow{\ z(n)=A\ \text{محدود}\ }\ y(n)=A\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=2A<\infty$$

پس سیستم B نیز پایدار است. بنابراین سیستم کل نیز قطعاً پایدار خواهد بود.

توجه: اصولاً حذف جملهٔ $\frac{1}{\infty}y(-\infty)$ صحیح نمی‌باشد و طراح باید یا شرط کمکی $y(-\infty)=0$ یا $y(-\infty)<\infty$ را بیان می‌کرد و یا به سکون اولیهٔ داشتن سیستم و یا LTI بودن سیستم اشاره می‌کرد که در این صورت با استفاده از محل قطب سیستم B نیز می‌توانستیم پایداری آن را اثبات نماییم.

۱۰۸- اگر $Y(e^{j\omega}) = 2Re\left[e^{-j3\omega}X(e^{-j3\omega})\right]$ باشد، دراین‌صورت، $y[0], y[6]$ ، کدام است؟

فصل ۵

۱) $y[6]=x[1]+x^*[4]$, $y[0]=x[0]+x^*[1]$

۲) $y[6]=x[0]+x^*[4]$, $y[0]=2Re[x[1]]$

۳) $y[6]=x[-1]+x^*[3]$, $y[0]=x[-1]+x^*[1]$

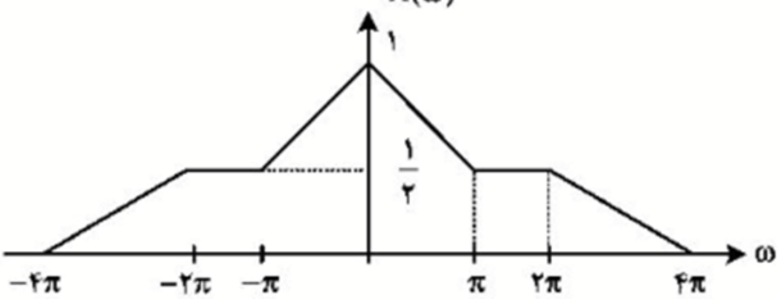
۴) ✓ $y[6]=x[-1]+x^*[3]$, $y[0]=2Re[x[1]]$

$$Y(\omega) = e^{-j3\omega}X(-3\omega) + e^{j3\omega}X^*(-3\omega) \xrightarrow{F^{-1}} y(n) = x_{(3)}[-(n-3)] + x^*_{(3)}(n+3]$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y(0) = x_{(3)}(3) + x^*_{(3)}(3) = x(1] + x^*(1] = 2Re\{x(1)\} \\ y(6] = x_{(3)}[-3] + x^*_{(3)}(9] = x[-1] + x^*(3) \end{cases}$$

۱۰۹- $x(t)$ یک سیگنال با تبدیل فوریه $X(\omega)$ در شکل زیر نشان داده شده است. اگر $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x(t-n)$ باشد، مقدار $y(1)-y\left(\frac{1}{2}\right)$ ، کدام است؟

فصل ۹



۱) ✓ $-\frac{3}{2}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{3}{2}$

$$y(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(t-n)$$

فرض می‌کنیم $y(t)$ خروجی یک سیستم LTI با ورودی متناوب $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(t-n)$ و پاسخ ضربه $h(t)=x(t)$ باشد. پس با استفاده از صفحه طلایی ونک ۷۰ داریم:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\pi) e^{jk\pi t} \qquad (1)$$

دوره تناوب $f(t)$ برابر $T=2$ و $\omega_0=\pi$ می‌باشد. برای به دست ضرایب فوریه $f(t)$ داریم:

$$z(t) = \delta(t) - \delta(t-1) \longrightarrow a_k = \frac{1}{T} Z(k\omega_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-jk\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k$$

$$\Longrightarrow \quad a_{-3}=1,\ a_{-2}=0,\ a_{-1}=1,\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=1$$

$$\xrightarrow{(1)} y(t) = \underbrace{H(-2\pi)}_{\frac{1}{4}} e^{-j2\pi t} + \underbrace{H(-\pi)}_{\frac{1}{2}} e^{-j\pi t} + \underbrace{H(\pi)}_{\frac{1}{2}} e^{j\pi t} + \underbrace{H(2\pi)}_{\frac{1}{4}} e^{j2\pi t}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos \pi t \Longrightarrow y(1) - y(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

۱۱۰- پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان به‌صورت $h(t) = e^{-t}u(t)$ است. اگر ورودی این سیستم $x(t) = u(-t)$ باشد و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش دهیم، در این‌صورت، $y(-1) - y(-2)$، کدام است؟

فصل ۹

۱) صفر ✓   ۲) $e^{-1} - e^{-2}$

۳) $e^{1} - e^{2}$ ۴) $e^{2} - e^{1}$

$$Y(s) = \underset{Re(s)<0}{X(s)} \cdot \underset{Re(s)>-1}{H(s)} = \frac{-1}{s(s+1)} \quad , \quad -1 < Re(s) < 0$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{-1}{s}}_{Re(s)<0} + \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re(s)>-1} \quad , \quad -1 < Re(s) < 0 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = u(-t) + e^{-t}u(t)$$

$$y(-1) - y(-2) = 1 - 1 = 0$$

۱۱۱- فرض کنید $x(n)$ یک سیگنال پریودیک با پریود $N = 8$ باشد. اگر ضرایب سری فوریهٔ سیگنال $x(n)$ را با a_k نمایش دهیم و بدانیم $a_k = a_{k+2}$ و $a_0 + a_1 = \frac{1}{4}$ و $x(n+4) = -x(n)$ است، در این‌صورت، مقدار $\sum_{n=0}^{7} 2^{x(n)}$، کدام است؟

فصل ۱۳

۱) $\frac{15}{2}$ ۲) $\frac{17}{2}$ ✓

۳) $\frac{27}{2}$ ۴) $\frac{29}{2}$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=-4}^{3} a_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} \qquad (1)$$

با توجه به اینکه $x(n)$ تقارن نیم موج دارد، $a_{2k} = 0$ می‌باشد (تست ۱۱۲). پس $a_0 = a_{\pm 2} = a_{\pm 4} = 0$ خواهد بود داریم:

$$a_0 + a_1 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a_0 = 0} a_1 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a_k = a_{k+2}} a_{-3} = a_3 = a_{-1} = a_1 = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{(1)} x(n) = \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}n \Longrightarrow \sum_{n=0}^{7} 2^{x(n)} = \frac{17}{2}$$

فصل ۱۳

۱۱۲- $x[n]$ و $X(e^{j\omega}) \triangleq X(\omega)$ زوج تبدیل فوریه هستند. a_k ضرایب سری فوریهٔ زیر، برابر کدام است؟

$$y(t) = X(-۲t) + \cos(۶t)$$

۱) $x[۲k] + \frac{۱}{۲}\delta[k-۲] + \frac{۱}{۲}\delta[k+۲]$

۲) $x[k] + \frac{۱}{۲}\delta[k-۱] + \frac{۱}{۲}\delta[k+۱]$

۳) $x[k] + \frac{۱}{۲}\delta[k-۲] + \frac{۱}{۲}\delta[k+۲]$ ✓

۴) $x[۲k] + \frac{۱}{۲}\delta[k-۱] + \frac{۱}{۲}\delta[k+۱]$

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

$$X(t) \xleftrightarrow{Fs} x[-k]$$

$$f(t) = X(-۲t) \xleftrightarrow[\text{خواص وارونگی و مقیاس دهی}]{Fs} x(k)$$

$$T = \frac{۲\pi}{۲}$$

$$g(t) = \cos ۶t \xleftrightarrow{Fs} a[k] = \frac{۱}{۲}\delta[k-۱] + \frac{۱}{۲}\delta(k+۱]$$

$$T = \frac{\pi}{۳}$$

$$y(t) = \underbrace{\overbrace{f(t)}^{x(k), \frac{۲\pi}{۲}}}_{x[k], \frac{۲\pi}{۲}} + \underbrace{\overbrace{g(t)}^{a(k), \frac{\pi}{۳}}}_{a_{(۲)}(k), \frac{۲\pi}{۲}}$$

$$\Longrightarrow b_k = x(k] + \frac{۱}{۲}\delta(k-۲) + \frac{۱}{۲}\delta[k+۲]$$

$$T_y = \text{lcm}\left(\frac{۲\pi}{۲}, \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۲\pi}{۲}$$

نکته ۱۱۱

فصل ۹

۱۱۳- تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان و علّی به‌صورت $H(s) = \frac{s-۱}{s^۲+۳s+۲}$ است. اگر $y(t)$ پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = e^{۲t}u(-t)$ باشد، مقدار $y(0^+)$ ، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ✓ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

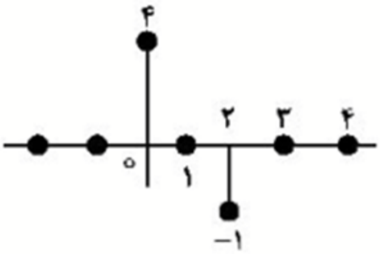
$$Y(s) = \underset{\text{Re}(s) > -۱}{H(s)} \cdot \underset{\text{Re}(s) < ۲}{X(s)} = \frac{-(s-۱)}{(s+۲)(s+۱)(s-۲)} , \quad -۱ < \text{Re}(s) < ۲$$

$$Y(s) = \frac{\frac{۳}{۴}}{\underset{\text{Re}(s) > -۲}{s+۲}} + \frac{\frac{-۲}{۳}}{\underset{\text{Re}(s) > -۱}{s+۱}} + \frac{\frac{-۱}{۱۲}}{\underset{\text{Re}(s) < ۲}{s-۲}} \xRightarrow{L^{-1}} y(t) = \frac{۳}{۴}e^{-۲t}u(t) - \frac{۲}{۳}e^{-t}u(t) + \frac{۱}{۱۲}e^{۲t}u(-t)$$

$$\Longrightarrow y(0^+) = \frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

فصل ۹

۱۱۴- در یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ به ورودی $x_1(n)=u(n)$ به‌صورت $y_1[n]=\left(2-(\frac{1}{2})^n\right)u(n)$ است. اگر پاسخ سیستم به ورودی $x_2[n]$ در شکل زیر را با $y_2[n]$ نمایش دهیم، مقدار $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y_2[n]|^2$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}$

۲) $\frac{16}{3}$

۳) ۱۳

۴) ۲۰ ✓

سیستم LTI

$$x_1(n)=u(n) \longrightarrow y_1(n)=2u(n)-(\tfrac{1}{2})^n u(n)$$

$$x_2(n) \longrightarrow y_2(n)=?$$

$$H(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}=\frac{\frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}{\frac{1}{1-z^{-1}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\ \xRightarrow{Z^{-1}}\ h(n)=(\tfrac{1}{2})^n u(n)$$

$$x_2(n)=4\delta(n)-\delta(n-2)\xrightarrow{h(n)} y_2(n)=4h(n)-h(n-2)=4(\tfrac{1}{2})^n u(n)-(\tfrac{1}{2})^{n-2}u[n-2]$$

$$=4(\tfrac{1}{2})^n\underbrace{\Big[u(n)-u(n-2)\Big]}_{\delta(n)+\delta(n-1)}=4\delta(n)+2\delta(n-1)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y_2(n)|^2=16+4=20$$