۶۷- یک سیستم زمان گسسته با ورودی x[n] و خروجی y[n] را درنظر بگیرید. رابطهٔ تبدیل فوریهٔ خروجی و ورودی این سیستم به‌صورت $y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\frac{\pi}{۴}}^{\omega+\frac{\pi}{۴}} x(e^{j\lambda})d\lambda$ به‌هم مرتبط هستند. y[n] بر حسب x[n]، کدام است؟

۱) $y[n] = ۲n\cos(\frac{\pi}{۴}n)x[n]$

۲) $y[n] = \frac{۲}{n}\sin(\frac{\pi}{۴}n)x[n]$

۳) $y[n] = \frac{j۲}{n}\sin(\frac{\pi}{۴}n)x[n]$

۴) $y[n] = ۲n\sin(\frac{\pi}{۴}n)x[n]$

پاسخنامه آزمون سراسری سال ۱۳۹۵

۱- ٦٧

گزینه (۲). از دو دیدگاه می‌توان به این سؤال نگاه کرد، دیدگاه اول آن است که بگوییم چون $Y(e^{j\omega})$ به فرم انتگرالی از $X(e^{j\omega})$ است، پس می‌توان گفت $X(e^{j\omega})$ بـه فـرم مشـتق $Y(e^{j\omega})$ است (البته به همین سادگی هم نیست!) و در نتیجه به جای در نظر گرفت رابطـه انتگرالی داده شده می‌توان از طرفین تساوی مشتق گرفت و یـک رابطـه جدیـد بـین Y و X بدست آورد که کار کردن با آن راحت‌تر است:

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\frac{\pi}{۴}}^{\omega+\frac{\pi}{۴}} X(e^{j\lambda})\,d\lambda$$

$$\longrightarrow \frac{d}{d\omega}Y(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega}\left(\int_{\omega-\frac{\pi}{۴}}^{\omega+\frac{\pi}{۴}} X(e^{j\lambda})\,d\lambda\right) = X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{۴})}) - X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{۴})})$$

حالا اگر از طرفین تساوی بدست آمده عکس تبدیل فوریه بگیریم خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}^{-۱}\left\{\frac{d}{d\omega}y(e^{j\omega})\right\} = \mathcal{F}^{-۱}\left\{X(e^{j(w+\frac{\pi}{۴})}) - X(e^{j(w-\frac{\pi}{۴})})\right\}$$

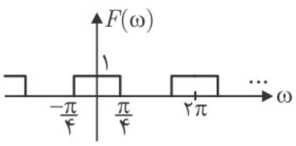
$$\longrightarrow jny[n] = x[n]e^{-j\frac{\pi}{۴}n} - x[n]e^{j\frac{\pi}{۴}n} = x[n]\Big(\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{۴}n} - e^{j\frac{\pi}{۴}n}}_{-۲j\sin(\frac{\pi}{۴}n)}\Big) = -۲j\sin\left(\frac{\pi}{۴}n\right)x[n]$$

در نهایت می‌توان گفت:

$$ny[n] = ۲\sin\left(\frac{\pi}{۴}n\right)x[n]$$

$$\longrightarrow y[n] = \frac{۲}{n}\sin\left(\frac{\pi}{۴}n\right)x[n]$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

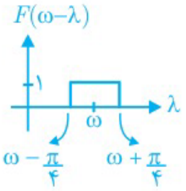


اما دیدگاه دومی که احتمالاً مدنظر طراح محترم بوده، آن اسـت که رابطه انتگرالی داده شده را به فرم کانولوشن بنویسـیم. بـرای این منظور تابع $F(\omega)$ را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم:

حالا اگر کانولوشن پریودیک $F(\omega)$ در $X(e^{j\omega})$ را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$X(e^{j\omega}) \circledast F(\omega) = \int_{۲\pi} X(e^{j\lambda})F(\omega-\lambda)\,d\lambda \overset{(۱)}{=} \int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi} X(e^{j\lambda})\,F(\omega-\lambda)\,d\lambda$$

$$\overset{(۲)}{=} \int_{\omega-\frac{\pi}{۴}}^{\omega+\frac{\pi}{۴}} X(e^{j\lambda})\,d\lambda \overset{(۳)}{=} Y(e^{j\omega})$$



(۱) بازه انتگرال‌گیری به طول ۲π را بازه $(\omega-\pi, \omega+\pi)$ در نظر می‌گیریم.

(۲) در بازه انتگرال‌گیری $F(\omega-\lambda)$ به صورت زیر است:

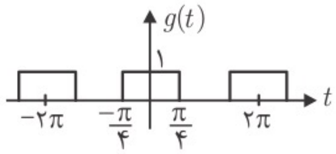
(۳) طبق تعریف $Y(e^{j\omega})$

پس می‌توان گفت $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \circledast F(\omega)$ است. در نتیجه طبق خاصیت ضرب زمانی برای تبدیل فوریه گسسته می‌توان گفت:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \circledast F(\omega)$$

$$\longrightarrow y[n] = ۲\pi x[n] f[n] \quad , \quad f[n] = \mathcal{F}^{-۱}\{F(\omega)\}$$

برای بدست آوردن سیگنال $f[n]$ نیز می‌توان از دوگانی بین تبدیل فوریه گسسته و ضرایب سری فوریه پیوسته استفاده نمود، یعنی:

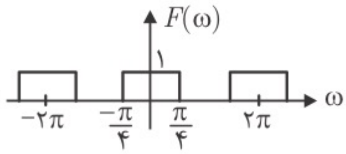


$\rightarrow$ ضرایب سری فوریه: $a_k = \frac{۱}{۴}\text{Sinc}\left(\frac{k}{۴}\right)$

$$\Downarrow$$

$$f[n] = \underbrace{\frac{۱}{۴}\text{Sinc}\left(\frac{-n}{۴}\right)}_{a_{-n}} = \frac{۱}{۴}\text{Sinc}\left(\frac{n}{۴}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega):$$

$F(\omega)$:



پس $f[n] = \frac{۱}{۴}\text{Sinc}(\frac{n}{۴})$ است و در نهایت $y[n]$ برابر است با:

$$y[n] = ۲\pi\, x[n]\, f[n] = ۲\pi\, x[n]\left(\frac{۱}{۴}\text{Sinc}\left(\frac{n}{۴}\right)\right) = \frac{\pi}{۲} x[n]\,\text{Sinc}\left(\frac{n}{۴}\right)$$

$$\overset{(۱)}{=} \frac{\pi}{۲} x[n]\left(\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})}{\frac{n\pi}{۴}}\right) = \frac{۲}{n} x[n] \sin\left(\frac{n\pi}{۴}\right)$$

(۱) می‌دانیم $\text{Sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$ است.

ملاحظه می‌کنید که مجدداً به همان پاسخ رسیدیم ولی در روش دوم حجم محاسبات کمی بیش‌تر بود.

تذکر: در راه حل اول از نظر مفهومی یک اشکال کوچک وجود دارد، درست است که در هر دو روش پاسخ یکسانی بدست آمد ولی در پاسخ اول مقدار $y[n]$ در لحظه $n=۰$ مبهم است در حالی که در روش دوم به دلیل وجود تابع $\text{Sinc}(.)$ چنین ابهامی وجود ندارد.

۶۸- اگر $h[n] = \delta[n-۲] + \delta[n-۳] + \delta[n-۴]$ پاسخ ضربهٔ سیستم و ورودی آن به شرح زیر بوده و

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{n}{۵} & ۰ \le n \le ۵ \\ ۲ - \dfrac{n}{۵} & ۶ \le n \le ۱۰ \\ ۰ & \text{بقیهٔ جاها} \end{cases}$$

خروجی را با $y(n)$ نشان دهیم، مقدار ماکزیمم $y[n]$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) $\frac{۱۳}{۵}$

۴) ۴

۲- ۶۸

گزینه (۳). صورت سؤال تقریباً واضح است، البته بهتر بود که LTI بودن سیستم موردنظر به طور صریح در سؤال ذکر می‌شد. اما به هر حال پاسخ ضربه و ورودی یک سیستم LTI گسسته داده شده است و از ما خواسته شده حداکثر مقدار خروجی سیستم را بدست آوریم. در حالت عادی و برای حل تشریحی چنین سؤالی باید عملیات کانولوشن را بین ورودی و پاسخ ضربه انجام دهیم تا خروجی سیستم بدست آید و سپس مقدار حداکثر خروجی را بیان کنیم؛ اما انجام عملیات کانولوشن به صورت کامل بسیار زمان‌بر است[۱]. پس باید به دنبال راه حل سریعتر و مناسب‌تری باشیم. اگر به پاسخ ضربه داده شده دقت کنید متوجه می‌شوید که $h[n]$ مجموع سه سیگنال ضربه شیفت یافته است، بنابراین با توجه به خواص ضربه می‌توان گفت:

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{(۱)}{=} x[n] * \left(\delta[n-۲] + \delta[n-۳]\delta[n-۴]\right)$$
$$\overset{(۲)}{=} x[n] * \delta[n-۲] + x[n] * \delta[n-۳] + x[n] * \delta[n-۴]$$
$$\overset{(۳)}{=} x[n-۲] + x[n-۳] + x[n-۴]$$

(۱) جای‌گذاری $h[n]$ (۲) طبق خاصیت توزیع‌پذیری ضربه (۳) می‌دانیم $f[n]*\delta[n-n_۰] = f[n-n_۰]$

پس خروجی $y[n]$ در هر لحظه برابر است با مجموع سه مقدار متوالی از ورودی $x[n]$ در زمان‌های گذشته. حال اگر ورودی $x[n]$ داده شده را رسم نماییم، خواهیم داشت:

بنابراین با توجه به توضیحات داده شده، برای بدست آوردن حداکثر مقدار خروجی، باید ببینیم که مجموع سه مقدار متوالی از ورودی $x[n]$ حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد. با توجه به شکل و فرم $x[n]$ به صورت شهودی که می‌توان گفت اگر سه مقدار متوالی $x[۴]$ و $x[۵]$ و $x[۶]$ را با هم جمع کنیم، حداکثر مقدار ممکن برای مجموع سه مقدار متوالی $x[n]$ بدست می‌آید. یعنی حداکثر مقدار خروجی $y[n]$ در لحظه $n = ۸$ حاصل می‌شود که برابر است با:

$$y[n] = x[n-۲] + x[n-۳] + x[n-۴]$$
$$\xrightarrow{(۱)} y[۸] = x[۶] + x[۵] + x[۴] = \frac{۴}{۵} + ۱ + \frac{۴}{۵} = \frac{۱۳}{۵}$$

(۱) جای‌گذاری $n = ۸$

پس حداکثر مقدار خروجی برابر $\frac{۱۳}{۵}$ است و گزینه ۳ صحیح است.

۱ - خودتان به عنوان تمرین عملیات کانولوشن را انجام دهید و خروجی را در تمام زمان‌ها بدست آورید.

توجه: باز هم تأکید می‌کنم که راه حل ارایه شده یک راه میان‌بُر و شهودی است که با توجه به فرم خاص ورودی و پاسخ ضربه در این سوال قابل استفاده بود. در حالت کلی و فرم‌های کلی‌تر و نه چندان ساده $x[n]$ و $h[n]$، چاره‌ای جز محاسبه خروجی در تمام زمان‌ها نخواهیم داشت.

۶۹- پاسخ سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega}) = \cos^5(\omega)$ به ورودی $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$، چیست؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $x[n]$

۳) $\frac{1}{2} + x[n]$

۴) $x[n-1]$

گزینه (۴). یک سیستم LTI گسسته داریم که پاسخ فرکانسی آن به فرم $H(e^{j\omega}) = \cos^5(\omega)$ داده شده است و از ما خواسته شده پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$ را بدست آوریم. قبل از شروع به حل باید توجه داشته باشید که ورودی داده شده یک سیگنال متناوب است و بنابراین دارای سری فوریه‌ای به فرم $\sum_{k=<N_0>} a_k e^{jk\omega_0 n}$ خواهد بود که a_kها ضرایب سری فوریه $x[n]$ هستند. می‌دانیم پاسخ هر سیستم LTI به ورودی متناوب، سیگنالی متناوب خواهد بود که اگر دوره تناوب آن با ورودی یکسان باشد، ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه $b_k = a_k H(e^{jk\omega_0})$ بدست می‌آیند که $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ برابر با فرکانس پایه سیگنال است. بنابراین برای توصیف خروجی کافی است ضرایب b_k را بدست آوریم، اما در این سؤال خاص می‌دانیم که ورودی $x[n]$ با دوره تناوب $N_0 = 2$ متناوب است و بنابراین $\omega_0 = \pi$ بوده و داریم:

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= a_0 H(e^{j0}) = a_0\left(\cos^5(0)\right) = a_0 \\ b_1 &= a_1 H(e^{j\pi}) = a_1\left(\cos^5(\pi)\right) = -a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_k = (-1)^k a_k \overset{(1)}{=} e^{-jk\pi} a_k$$

(۱) می‌دانیم $e^{-j\pi} = -1$ است

بنابراین با توجه به خواص ضرایب سری فوریه گسسته و خاصیت شیفت زمانی و نیز با توجه به آنکه $b_k = e^{-j\pi k} a_k$ است و $\omega_0 = \pi$ می‌باشد، می‌توان گفت $y[n] = x[n-1]$ خواهد بود. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

توجه داشته باشید که در این سؤال خاص و با توجه به فرم پاسخ فرکانسی توانستیم خروجی سیستم را بدون محاسبه ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی، برحسب ورودی بیان کنیم. در حالت کلی برای محاسبه خروجی باید اول ضرایب سری فوریه ورودی (a_kها) را حساب می‌کردیم و بعد از طریق رابطه $b_k = a_k H(e^{jk\omega_0})$ ضرایب سری فوریه خروجی را بدست می‌آوردیم و در نهایت با استفاده از بسط فوریه خروجی، $y[n] = \sum_{k=<N_0>} b_k e^{jk\omega_0 n}$، سیگنال $y[n]$ بدست می‌آمد. اما در این سؤال با توجه به آنکه گزینه‌های داده شده همگی برحسب ورودی هستند، سعی کردیم ضرایب b_k را در حالت کلی برحسب ضرایب a_k بیان کنیم و با استفاده از خواص ضرایب سری فوریه توانستیم خروجی را برحسب ورودی بیان کنیم. به نوعی روشی که استفاده کردیم یک میان‌بُر است که در حالت کلی ممکن است خیلی کارآمد نباشد.

تذکر: صرفاً جهت یادآوری، می‌دانیم که ضرایب سری فوریه سیگنال‌های گسسته هم با دوره تناوب خود سیگنال متناوب هستند و بنابراین در این سؤال که ورودی $x[n]$ با دوره تناوب $N_0 = 2$ متناوب است، ضرایب a_k هم با دوره تناوب ۲ متناوب خواهند بود و بنابراین تنها نیاز است که ۲ ضریب از سری فوریه ورودی و خروجی را تحلیل کنیم.

۷۰- یک سیستم LTI زمان گسستهٔ علّی با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n]+\frac{۱}{۲}y[n-۱]=x[n]-x[n-۱]$$

به ازای ورودی $x[n]=\begin{cases}۳\ , & n \text{ زوج}\\ ۲\ , & n \text{ فرد}\end{cases}$، توان متوسط خروجی این سیستم، $y[n]$، برابر کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

گزینه (۲). این تست بسیار شبیه به سؤال قبل است، باز هم یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $N_\circ=۲$ به یک سیستم LTI گسسته اعمال شده است و هدف محاسبه توان خروجی سیستم است. برای حل این سؤال باید ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آوریم و بعد با استفاده از رابطه پارسوال توان خروجی را بدست آوریم. در قدم اول ضرایب سری فوریه ورودی را محاسبه می‌کنیم:

$$a_k=\frac{۱}{N_\circ}\sum_{n=<N_\circ>}x[n]e^{-jk\frac{۲\pi}{N_\circ}n}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\begin{cases}a_\circ=\frac{۱}{۲}\sum_{n=\circ}^{۱}x[n]=\frac{۱}{۲}(۳+۲)=\frac{۵}{۲}\\ a_۱=\frac{۱}{۲}\sum_{n=\circ}^{۱}x[n](-۱)^n=\frac{۱}{۲}(۳-۲)=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

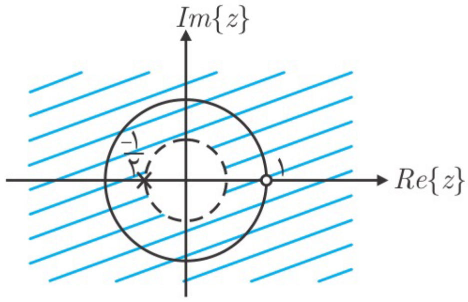
(۱) جای‌گذاری $N_\circ=۲$ و محاسبه ضرایب a_k

حال اگر ضرایب سری فوریه خروجی را با b_k نمایش دهیم، می‌دانیم $b_k=a_kH(e^{jk\omega_\circ})$ است. پس لازم است پاسخ فرکانسی سیستم را هم بدست آوریم. اما سیستم LTI موردنظر با یک معادله تفاضلی توصیف شده است که با اعمال تبدیل Z خواهیم داشت:

$$y[n]+\frac{۱}{۲}y[n-۱]=x[n]-x[n-۱]$$

$$\longrightarrow Y(z)\left[۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}\right]=X(z)[۱-z^{-۱}]$$

$$\longrightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{۱-z^{-۱}}{۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}}$$



اما در صورت سؤال قید شده است که سیستم علّی است و چون تنها یک قطب در $z=-\frac{1}{2}$ داریم، ناحیه همگرایی تابع تبدیل به فرم $|z|>\frac{1}{2}$ خواهد بود:

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید دایره به شعاع واحد داخل ناحیه همگرایی $H(z)$ است و بنابراین با جای‌گذاری $z=e^{j\omega}$ در تابع تبدیل $H(z)$، می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورد:

$$H(e^{j\omega})=\left.\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

توجه داشته باشید که اگر دایره واحد داخل ناحیه همگرایی $H(z)$ نبود آنگاه سیستم موردنظر اصلاً پاسخ فرکانسی نداشت و توان خروجی به ورودی متناوب داده شده، بی‌کران می‌شد.

در نهایت ضرایب سری فوریه خروجی عبارتند از:

$$b_k=a_kH(e^{jk\omega_0})\quad,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$\longrightarrow\begin{cases}b_0=a_0H(e^{j0})=\frac{5}{2}(0)=0\\ b_1=a_1H(e^{j\pi})=\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)}{1+\frac{1}{2}(-1)}\right)=\frac{1}{2}(4)=2\end{cases}$$

بنابراین طبق رابطه پارسوال توان متوسط خروجی عبارتست از:

$$P_{av}=\sum_{k=\langle N_0\rangle}|b_k|^2=2^2=4$$

۷۱- فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال گسسته متناوب با دورهٔ تناوب N زوج باشد، اگر $x[۲n]=z[n]$ ؛ ضرایب سری فوریهٔ $x[n]$ به صورت $a_k = a_{k+\frac{N}{۲}}$ باشند، $x[۲n+۱]$، کدام است؟

۱) $x[۲n+۱] = -z[n]$

۲) $x[۲n+۱] = (-۱)^n z[n]$

۳) $x[۲n+۱] = ۰$

۴) $x[۲n+۱] = (-۱)^n$

گزینه (۳). $x[n]$ یک سیگنال گسسته متناوب است که دوره تناوب آن برابر با N می‌باشد و N هم عددی زوج است. از طرف دیگر اگر ضرایب سری فوریه $x[n]$ را با a_k نمایش دهـیم، می‌دانیم $a_k = a_{k+\frac{N}{۲}}$ است، یعنی با استفاده از خاصیت شیفت فرکانسی برای ضرایب سری فوریه می‌توان گفت:

$$y[n] = x[n]e^{-j\frac{N}{۲}\omega_۰ n}$$

$$\longrightarrow y \text{ ضرایب سری فوریه } = b_k = a_{k+\frac{N}{۲}}$$

از طرفی $\omega_۰ = \frac{۲\pi}{N}$ بوده و می‌توان گفت:

$$y[n] = x[n]e^{-j\frac{N}{۲}(\frac{۲\pi}{N})n} = x[n]e^{-j\pi n} \overset{(۱)}{=} (-۱)^n x[n]$$

(۱) $e^{-j\pi} = ۱$ است.

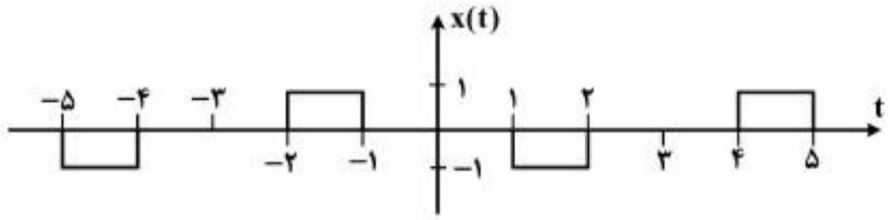
پس با توجه به رابطه $a_k = a_{k+\frac{N}{۲}}$ می‌توان گفت $y[n] = x[n]$ است و بنابراین:

$$(-۱)^n x[n] = x[n] \rightarrow \left(۱-(-۱)^n\right)x[n] = ۰ \begin{cases} n = \text{زوج}: ۱-(-۱)^n = ۰ \\ n = \text{فرد}: ۱-(-۱)^n = ۲ \rightarrow x[n] = ۰ \end{cases}$$

پس $x[n]$ در تمام لحظات فرد، صفر است؛ یعنــی $x[۲n+۱] = ۰$ بــوده و گزینــه ۳ صـحیح است.

تذکر: سیگنال $z[n] = x[۲n]$ که در صورت سؤال تعریف شده است صرفاً برای گمراه کردن شما آورده شده است!!!

۷۲- سیگنال متناوب نشان‌داده شده در شکل زیر (x(t)) از سیستمی با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{۲}t)}{\pi t}$ عبور می‌کند. سیگنال خروجی برابر کدام است؟



۱) $\frac{-۲}{\pi}\sin(\frac{\pi}{۳}t)$

۲) $۲\pi\cos(\frac{\pi}{۳}t)$

۳) $\frac{۲}{\pi}\sin(\frac{\pi}{۶}t)$

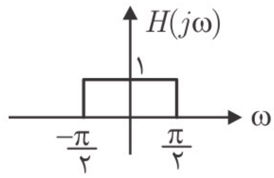
۴) $\frac{۳}{۲\pi}\cos(\frac{\pi}{۳}t)$

۷۲

۶- **گزینه (۱).** در این سؤال هم یک سیگنال متناوب از یک سیستم LTI عبور داده شده است و از ما خواسته شده خروجی را بدست آوریم. تنها تفاوت آن است که در این سؤال یک سیگنال و سیستم پیوسته داریم. در اینجا هم رابطه $b_k = a_k H(jk\omega_۰)$ بین ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی برقرار است[۱]، بنابراین برای محاسبه خروجی و ضرایب سری فوریه آن اول باید پاسخ فرکانسی سیستم و ضرایب سری فوریه ورودی را بدست آوریم. با توجه به پاسخ ضربه داده شده پاسخ فرکانسی سیستم برابر است با:

$$h(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}t)}{\pi t} = \frac{۱}{۲}\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{۲}\right)$$

$$\longrightarrow H(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{۱}{۲}\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{۲}\right)\right\} \overset{(۱)}{=} \Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$



(۱) طبق دوگانی

از طرف دیگر ورودی $x(t)$ با دوره تناوب $T_۰ = ۶$ متناوب است و فرکانس پایه آن برابر $\omega_۰ = \frac{۲\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}$ است، یعنی مقدار $H(jk\omega_۰)$ برای اکثر مقادیر k صفر است و تنها به ازای

$k=\circ$ و $k=\pm ۱$ مقدار $H(jk\omega_\circ)$ مخالف صفر است. پس کافی است ضـرایب $a_\circ$ و $a_۱$ و $a_{-۱}$ را بدست آوریم:

$$\begin{cases} a_\circ = \dfrac{۱}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)\,dt \overset{(۱)}{=} \circ \\ a_۱ = \dfrac{۱}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)\,e^{-j\frac{۲\pi}{T_\circ}t}\,dt = \dfrac{۱}{۶}\int_{-۳}^{۳} x(t)\,e^{-j\frac{۱\pi}{۳}t}\,dt = \dfrac{۱}{۶}\left[\int_{-۲}^{-۱} e^{-j\frac{۱\pi}{۳}t}\,dt - \int_{۱}^{۲} e^{-j\frac{۱\pi}{۳}t}\,dt\right] \\ \quad = \dfrac{۱}{۶}\left[\dfrac{۱}{-j\frac{۱\pi}{۳}}\left(e^{j\frac{۱\pi}{۳}} - e^{-j\frac{۲\pi}{۳}}\right) - \dfrac{۱}{-j\frac{۱\pi}{۳}}\left(e^{-j\frac{۲\pi}{۳}} - e^{-j\frac{۱\pi}{۳}}\right)\right] \\ \quad = \dfrac{۱}{j۲\pi}\left[\left(e^{j\frac{۲\pi}{۳}} + e^{-j\frac{۲\pi}{۳}}\right) - \left(e^{j\frac{\pi}{۳}} + e^{-j\frac{\pi}{۳}}\right)\right] = \dfrac{۱}{j\pi}\left[\cos(\dfrac{۲\pi}{۳}) - \cos(\dfrac{\pi}{۳})\right] = \dfrac{-۱}{j\pi} \\ a_{-۱} = \dfrac{۱}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)\,e^{+j\frac{۲\pi}{T_\circ}t}\,dt = \dfrac{۱}{۶}\int_{-۳}^{۳} x(t)\,e^{j\frac{\pi}{۳}t}\,dt = \ldots = \dfrac{۱}{j\pi} \end{cases}$$

پس ضرایب b_k برابر خواهند بود با:

$$b_k = a_k H(jk\omega_\circ) = \begin{cases} a_\circ = \circ & k=\circ \\ a_۱ = \dfrac{-۱}{j\pi} & k=۱ \\ a_{-۱} = \dfrac{۱}{j\pi} & k=-۱ \\ \circ & o.w \end{cases}$$

بنابراین خروجی سیستم برابر است با:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\frac{۲\pi}{T_\circ}t} = b_{-۱}e^{-j\frac{\pi}{۳}t} + b_\circ + b_۱ e^{j\frac{\pi}{۳}t}$$

$$\overset{(۱)}{=} \frac{۱}{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{۳}t} + \circ + \frac{-۱}{j\pi}e^{j\frac{\pi}{۳}t} = \frac{۱}{j\pi}\left(e^{-j\frac{\pi}{۳}t} - e^{j\frac{\pi}{۳}t}\right) = \frac{۱}{j\pi}\left(-۲j\sin(\frac{\pi}{۳}t)\right) = \frac{-۲}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{۳}t\right)$$

(۱) جای‌گذاری $b_\circ$ و $b_{-۱}$ و $b_۱$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تذکر: ما در اینجا ضرایب سری فوریه ورودی $x(t)$ را بـه روش محاسـباتی و انتگـرال‌گیـری بدست آوردیم، در حـالی کـه مـی‌توانسـتیم $x(t)$ را بـه صـورت مجمـوع دو پـالس متنـاوب غیرمتقارن بنویسیم و بعد ضرایب a_k را بدست آوریم. این روش یافتن ضرایب a_k به عنوان تمرین به عهده خودتان است.

۷۳- سیگنال $x(t)$، یک سیگنال متناوب با ضرایب سری فوریهٔ زیر می‌باشد. کدام گزینه در مورد این سیگنال درست است؟

$$c_k = \begin{cases} ۱ & k = ۰ \\ -j\left(\frac{۱}{۳}\right)^{|k|} & k \neq ۰ \end{cases}$$

۱) سیگنال $x(t)$ حقیقی است.

۲) سیگنال $x(t)$ فرد است.

۳) مشتق سیگنال $x(t)$ زوج است.

۴) مشتق سیگنال $x(t)$ فرد است.

گزینه (۴). ضرایب سری فوریه یک سیگنال پیوسته متناوب به وضوح و بدون هیچ ابهامی داده شده است؛ یعنی می‌توان گفت که اگر دوره تناوب $x(t)$ را بدانیم آنگاه توصیف کاملی از آن را در اختیار داریم. اما با توجه به گزینه‌های داده شده متوجه می‌شوید که خواسته سؤال بحث راجع به حقیقی یا مختلط بودن $x(t)$ و نیز بحث در مورد زوج یا فرد بودن $x(t)$ و مشتق آن است. اول از همه در مورد سیگنال‌های حقیقی متناوب می‌دانیم باید ضرایب سری فوریه تقارن هرمیتی داشته باشند، یعنی برای حقیقی بودن $x(t)$ باید $c_k = c_{-k}^*$ باشد، در حالیکه چنین رابطه‌ای برای ضرایب c_k برقرار نیست مثلاً ضرایب $c_۱$ و $c_{-۱}$ را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{aligned} c_۱ &= \frac{-j}{۳} \\ c_{-۱} &= \frac{-j}{۳} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_۱ \neq c_{-۱}^*$$

پس $x(t)$ قطعاً حقیقی نیست. از طرفی با توجه به رابطه داده شده برای ضرایب c_k واضح است که این ضرایب تقارن زوج دارند، یعنی $c_k = c_{-k}$ است و بنابراین با استفاده از خواص ضرایب سری فوریه می‌توان نتیجه گرفت $x(t) = x(-t)$ است، یعنی $x(t)$ سیگنالی زوج می‌باشد. علاوه بر این طبق خواص عملگر مشتق می‌دانیم که اگر سیگنالی تقارن زوج داشته باشد، حتماً مشتق زمانی آن تقارن فرد خواهد داشت (وبالعکس).

البته به گونه دیگری هم می‌توان تحلیل کرد، فرض کنید $y(t)$ برابر با مشتق سیگنال $x(t)$ بوده و ضرایب سری فوریه $y(t)$ برابر با b_k باشند، آنگاه داریم:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\longrightarrow b_k = jk\omega_۰ c_k \overset{(۱)}{=} \begin{cases} ۰ & k = ۰ \\ k\omega_۰\left(\frac{۱}{۳}\right)^{|k|} & k \neq ۰ \end{cases}$$

(۱) جای‌گذاری c_k

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ضرایب b_k تقارن فرد دارند و $b_k = -b_{-k}$ است و در نتیجه سیگنال $y(t)$ نیز تقارن فرد خواهد داشت.

پس در مجموع با توجه به ضرایب c_k شده نتیجه می‌گیریم که $x(t)$ سیگنالی مختلط (غیرحقیقی) و زوج است که مشتق آن سیگنالی فرد خواهد بود. در نهایت گزینه ۴ تنها گزینه صحیح خواهد بود.

۷۴- ورودی یک سیستم LTI، $x(t)=\cos(۱۰۰\pi t)[u(t)-u(t-۵)]$ و پاسخ ضربهٔ آن $h(t)=x(۵-t)$ می‌باشد. مقدار خروجی در لحظهٔ $t=۶$، ($y(۶)$) برابر کدام است؟

۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۴/۵

۴) ۵

گزینه (۱). یک سیستم LTI پیوسته داریم که ورودی آن بـه فـرم $x(t)$ داده شـده و پاسـخ ضربه آن هم تابعی از ورودی است! شاید بپرسید که مگر می‌شود پاسخ ضربه تابعی از ورودی باشد؟ بله، مشکلی ندارد، اتفاقاً دانشجویان مخابراتی هنگام طراحـی گیرنـده‌هـای مبتنـی بـر فیلترهای منطبق با چنین سیستم‌هایی کار می‌کنند، ولی این مباحث به ما مربوط نمی‌شـود.

خوب، اگر رابطه کانولوشن بین ورودی و پاسخ ضربه را بنویسیم خواهیم داشت:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda\overset{(۱)}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)x(۵+\lambda-t)\,d\lambda$$

(۱) می‌دانیم $h(t-\lambda)=x\Big(۵-(t-\lambda)\Big)$ است.

بنابراین خروجی در لحظه $t=۶$ برابر است با:

$$y(۶)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)x(۵+\lambda-۶)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)x(\lambda-۱)\,d\lambda$$

$$\overset{(۱)}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(۱۰۰\pi\lambda)\cos\Big(۱۰۰\pi(\lambda-۱)\Big)\Big[u(\lambda)-u(\lambda-۵)\Big]\Big[u(\lambda-۱)-u(\lambda-۶)\Big]d\lambda$$

$$\overset{(۲)}{=}\int_{۱}^{۵}\cos(۱۰۰\pi\lambda)\cos(۱۰۰\pi\lambda-۱۰۰\pi)d\lambda=\int_{۱}^{۵}\cos^{۲}(۱۰۰\pi\lambda)d\lambda$$

$$=\int_{۱}^{۵}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos(۲۰۰\pi\lambda)\right)d\lambda$$

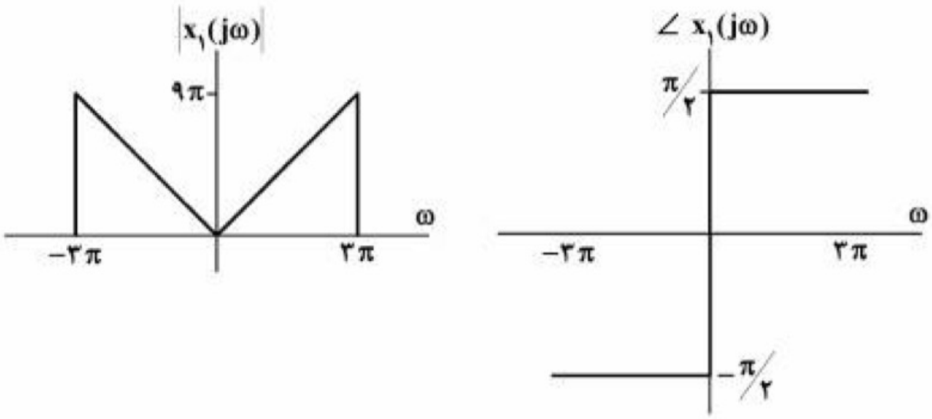
$$=\int_{۱}^{۵}\frac{۱}{۲}d\lambda+\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۵}\cancel{\cos(۲۰۰\pi\lambda)}^{\,۰}\,d\lambda=\frac{۱}{۲}(۵-۱)=۲$$

(۱) جای‌گذاری $x(\lambda)$ و $x(\lambda-۱)$

(۲) با توجه به توابع پله موجود در آرگومان انتگرال می‌دانیم $\lambda\in\Big((۰,۵)\cap(۱,۶)\Big)=(۱,۵)$

پس گزینه (۱) صحیح است.

۷۵- $x_۱(t)$، که اندازه و زاویهٔ تبدیل فوریهٔ آن به شکل زیر است، کدام‌یک از گزینه‌های زیر خواهد بود؟



۱) $\frac{۳}{\pi t^۲}(۳\pi t\cos(۳\pi t)-\sin(۳\pi t))$

۲) $\frac{۳}{\pi t}(۳\pi t\sin(۳\pi t)-\cos(۳\pi t))$

۳) $\frac{۳\sin(۳\pi t)}{\pi t^۲}$

۴) $\frac{۳\cos(۳\pi t+\frac{\pi}{۴})}{\pi t^۲}$

۷۵

گزینه (۱). اندازه و فاز تبدیل فوریه سیگنال $x_۱(t)$ داده شده است و محاسبه $x_۱(t)$ از ما خواسته شده، در قدم اول باید $X_۱(j\omega)$ را بدست آوریم:

$$X_۱(j\omega)=|X_۱(j\omega)|e^{j\measuredangle X_۱(j\omega)}=\begin{cases}۳\omega e^{j\frac{\pi}{۲}} & ۰\le\omega\le۳\pi\\ -۳\omega e^{-j\frac{\pi}{۲}} & -۳\pi\le\omega\le۰\\ ۰ & o.w\end{cases}=\begin{cases}۳j\omega & ۰\le\omega\le۳\pi\\ ۳j\omega & -۳\pi\le\omega\le۰\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

$$=(۳j\omega)\begin{cases}۱ & -۳\pi\le\omega\le۳\pi\\ ۰ & o.w\end{cases}=۳j\omega\Pi\left(\frac{\omega}{۶\pi}\right)$$

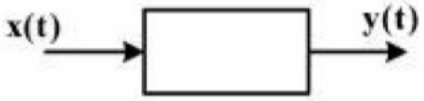
از طرفی طبق دوگانی می‌دانیم $\mathcal{F}\left\{۳\text{Sinc}(۳t)\right\}=\Pi(\frac{\omega}{۶\pi})$ است، بنابراین با توجه به خاصیت مشتق زمانی نتیجه می‌گیریم که $x_۱(t)=۳\frac{d}{dt}\left(۳\text{Sinc}(۳t)\right)$ است، یعنی داریم:

$$x_۱(t)=۳\frac{d}{dt}(۳\text{Sinc}(۳t))=۳\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(۳\pi t)}{\pi t}\right)=۳\left(\frac{۳\pi^۲t\cos(۳\pi t)-\pi\sin(۳\pi t)}{(\pi t)^۲}\right)$$

$$=\frac{۳}{\pi t^۲}\left(۳\pi t\cos(۳\pi t)-\sin(۳\pi t)\right)$$

در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۷۶- در شکل زیر، تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ را $X(\omega)$ می‌نامیم. رابطهٔ ورودی و خروجی این سیستم به صورت زیر است. در مورد این سیستم، کدام‌گزینه، نادرست است؟



$$y(t) = X(t-۳)$$

۱) حافظه‌دار است.

۲) خطی است.

۳) غیرسببی است.

۴) تغییرناپذیر با زمان است.

گزینه (۴). با توجه به تعریف تبدیل فوریه می‌دانیم:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \overset{(۱)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda} d\lambda$$

$$\longrightarrow X(\omega-۳) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j(\omega-۳)\lambda} d\lambda$$

(۱) متغیر انتگرال‌گیری را λ در نظر می‌گیریم.

بنابراین ضابطه سیستم، یعنی $y(t) = X(t-۳)$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j(t-۳)\lambda} d\lambda$$

با توجه به ضابطه بدست آمده می‌توان گفت:

- سیستم حافظه‌دار است چون مقادیر ورودی در تمام زمان‌ها در تعیین خروجی نقش دارند.
- سیستم خطی است زیرا هیچ عملگر غیرخطی به ورودی اعمال نشده است.
- سیستم غیرسببی است، زیرا با توجه به حدود انتگرال مقادیر ورودی در لحظات آینده هم در تعیین خروجی نقش دارند که باعث غیرعلّی شدن سیستم می‌شود.
- سیستم تغییرپذیر با زمان است، زیرا اگر ورودی $x_۱(t) = x(t-t_۰)$ را به سیستم اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$y_۱(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_۱(\lambda)\, e^{-j(t-۳)\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda - t_۰)\, e^{-j(t-۳)\lambda} d\lambda$$

$$\overset{(۱)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j(t-۳)(\alpha+t_۰)} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j(t-۳)\alpha} e^{-j(t-۳)t_۰} d\alpha$$

$$\overset{(۲)}{=} e^{-j(t-۳)t_۰} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j(t-۳)\alpha} d\alpha}_{y(t)} = e^{-j(t-۳)t_۰} y(t) \neq y(t-t_۰)$$

(۱) اعمال تغییر متغیر $\alpha = \lambda - t_۰$

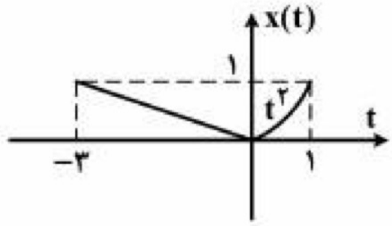
(۲) جمله $e^{-j(t-۳)t_۰}$ نسبت به پارامتر α ثابت است و از انتگرال بیرون می‌آید.

بنابراین واضح است که سیستم تغییرپذیر با زمان است.

در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

تذکر: سیستم داده شده علاوه بر خواص بررسی شده، ناپایدار و معکوس‌پذیر هم هست، البته برای معکوس‌پذیری باید فرض کنیم که $x(t)$ حتماً دارای تبدیل فوریه است. اثبات این خواص به عنوان تمرین به عهده خودتان.

۷۷- یک سیستم CT-LTI دارای پاسخ‌فرکانسی $H(j\omega)=\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ است. خروجی این سیستم به‌ازای ورودی متناوب نشان‌داده شده در شکل زیر، کدام است؟



یک دورهٔ تناوب از ورودی

۱) $\frac{11}{3}$

۲) $\frac{11}{6}$

۳) $\frac{11}{12}$

۴) $\frac{11}{24}$

گزینه (۳). گویا طراح محترم سؤالات کنکور ۹۵ علاقه خیلی زیادی به سیگنال‌های متناوب و عبور آن‌ها از سیستم‌های LTI داشته‌اند، چون این سؤال چهارمین سوالی است که از ایده عبور یک سیگنال متناوب از یک سیستم LTI مطرح شده است!!!

خوب، اگر ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی را به ترتیب با a_k و b_k نمایش دهیم، می‌دانیم $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ است، که ω_0 فرکانس پایه ورودی و خروجی بوده و برابر است با:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

مقادیر $H(jk\omega_0)$ عبارتند از:

$$H(jk\omega_0) = H\left(jk\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(2(k\frac{\pi}{2})\right)}{k\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sin(k\pi)}{k\pi} = 0 \quad for \quad k \neq 0$$

یعنی تمام ضرایب b_k به جز b_0 برابر با صفر خواهند بود و ضریب b_0 هم برابر با $a_0 H(j0)$ خواهد بود که با توجه به پاسخ فرکانسی داده شده $H(j0)=\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{\sin(2\omega)}{\omega}=2$ است. اما a_0 برابر است با:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\left[\int_{-3}^{0}(-\frac{1}{3}t)\,dt + \int_0^1 t^2\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(-\frac{1}{6}t^2\Big|_{-3}^{0}\right) + \left(\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{9}{6}+\frac{1}{3}\right] = \frac{11}{24}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی و سیگنال خروجی عبارتند از:

$$b_k = \begin{cases} a_0 H(j0) & k=0 \\ 0 & k\neq 0\end{cases} = \begin{cases} \frac{11}{24}(2) & k=0 \\ 0 & k\neq 0\end{cases} = \begin{cases} \frac{11}{12} & k=0 \\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

$$\longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = b_0 = \frac{11}{12}$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۷۸- رابطهٔ بین ورودی و خروجی در یک سیستم زمان گسسته به‌صورت زیر است:

$$y[n]=\begin{cases}\mathrm{Re}\{x[n-1]\} & \text{زوج} \quad n\\ \mathrm{Re}\{x[n-1]+x[n-2]\} & \text{فرد} \quad n\end{cases}$$

کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) خطی و تغییرناپذیر با زمان

۲) خطی و تغییرپذیر با زمان

۳) غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان

۴) غیرخطی و تغییرپذیر با زمان

گزینه (۴). با توجه به گزینه‌های داده شده متوجه می‌شویم که خواسته سؤال بحث در مورد خطی بودن یا نبودن و تغییرپذیری یا ناپذیری با زمان سیستم داده شده است.

به علت وجود عملگر $\mathrm{Re}\{.\}$ در ضابطه‌های $y[n]$، سیستم داده شده غیرخطی است، زیرا اگر ورودی $x[n]$ را در ضریبی مختلط مثل α ضرب کنیم خروجی α برابر نخواهد شد[1] پس سیستم غیرخطی است.

از طرفی با توجه به آنکه سیستم دو ضابطه‌ای است و شروط ضوابط هم روی زمان n هستند، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

در نتیجه سیستم غیرخطی و متغیر با زمان بوده و گزینه ۴ صحیح است.

تذکر: سیستم داده شده حافظه‌دار و علّی و پایدار و معکوس‌ناپذیر هم هست که اثبات آنها را به خودتان واگذار می‌کنم.

۱ - با فرض آنکه $\mathrm{Im}\{\alpha\} \neq 0$ است