بسمه تعالی

پاسخ تشریحی سؤالات سیگنال آزمون دکتری ۹۹ -

مهدی تقدیسی

ایتا : @mtsignal_e

تلگرام : @mtsignal

۳۶- تابع تبدیل یک سیستم LTI زمان گسسته به‌صورت $H(z)=\dfrac{\left(1-\frac{1}{5}Z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}Z^{-1}\right)\left(1+4Z^{-1}\right)}$ با ناحیهٔ همگرایی $|Z|>4$ است. کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

فصل ۹

۱) سیستم پایدار است.
۲) سیستم علّی است. ✓
۳) سیستم غیر علّی است.
۴) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]=\frac{6}{25}$

برای گزینه ۱ : $|z|=1$ در ROC قرار ندارد، پس سیستم ناپایدار است.

برای گزینه‌ها ۲ و ۳ :

$$H(z)=\frac{z^2-\frac{1}{5}z}{(z-\frac{1}{3})(z+4)}, \quad |z|>4$$

$|z|=\infty$ در ROC قرار دارد، پس سیستم علی است.

برای گزینه ۴ :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)=H(1)=\infty \rightarrow$$

زیرا $z=1$ در ROC قرار ندارد

۳۷- کدام عبارت می‌تواند تبدیل فوریهٔ یک سیگنال زمان گسسته باشد؟

۱) $\sin\omega$ ✓

۲) $\sin\left(\frac{\omega}{۲}\right)$

فصل ۴

۳) $\cos\left(\frac{\omega}{۲}\right)+۱$

۴) $\text{sinc}(\omega)$

تبدیل فوریه زمان گسسته حتماً با دوره تناوب 2π یا کسری از 2π $\left(\frac{2\pi}{m}, m\in\mathbb{Z}\right)$، متناوب می‌باشد (اصل بدیهی در تبدیل فوریه زمان گسسته). پس فقط گزینه ۱ صحیح است.

۳۸- در هر یک از سیستم‌های زیر، یک نمونه ورودی ـ خروجی داده شده است. کدام یک از سیستم‌ها می‌تواند علّی باشد؟

۱) $y[n]=u[n+1]$ $\quad$ $x[n]=u[n-2]$

۲) $y[n]=u[n-1]$ $\quad$ $x[n]=u[n-2]$

۳) $y[n]=u[n+2]$ $\quad$ $x[n]=u[n+1]$

۴) $y[n]=u[n+1]$ $\quad$ $x[n]=u[n+2]$

فصل ۱۶

این سؤال از جلد دوم و از فصل ۱۶ کتاب (۱۰ جزوه) طرح شده است.

شرط علّی بودن یک سیستم با استفاده از ورودی - خروجی این است که اگر ورودیها تا لحظه‌ای از زمان یکی باشند، خروجی آنها نیز یکی باشد. از آنجایی که در همه گزینه‌ها فقط یک زوج ورودی - خروجی داده شده است، پس شرط مذکور نقض نمی‌گردد. بنابراین همه گزینه‌ها می‌توانند علّی باشند. بنابراین هر چهار گزینه صحیح هستند!

توجه: همانطور که بارها تأکید کردم در این نوع سؤالات، هرگز به دنبال حدس رابطه سیستم نباشید، زیرا لزوماً حدس شما منطبق بر واقعیت نخواهد بود!

اگر هدف طراح این سؤال، بررسی شکل اولیه بوده که در این صورت باید در صورت تست به علّی بودن سیستم اشاره می‌کرد! با این فرض گزینه ۴ صحیح می‌شود!!! به هر حال این سؤال باید حذف گردد.

۳۹- سیگنال $x(t)$ از یک سیستم نمونه بردار با فرکانس نمونه‌برداری $300\,Hz$ عبور می‌کند. ضرایب سری فوریهٔ سیگنال گسستهٔ به‌دست آمده در یک دورهٔ تناوب، کدام است؟ $x(t) = \sin(200\pi t)\cos(150\pi t)$

۱) $a_1 = a_5 = \frac{1}{4j}$ ، $a_7 = a_{11} = \frac{-1}{4j}$ و بقیه ضرایب صفر

۲) $a_1 = a_7 = \frac{-1}{4j}$ ، $a_5 = a_{11} = \frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب صفر

۳) $a_1 = a_7 = \frac{1}{4j}$ ، $a_5 = a_{11} = \frac{-1}{4j}$ و بقیه ضرایب صفر ✓

۴) $a_1 = a_5 = \frac{-1}{4j}$ ، $a_7 = a_{11} = \frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب صفر

فصل ۱۷

$$f_s = 300\,Hz \longrightarrow T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{300}\,s \longrightarrow t = nT = \frac{n}{300}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

ادامه حل سؤال دقیقاً مانند تست صفحه بعد است که در کنکور سراسری ۸۱ و

در صفحه ۲۸۶ کتاب آمده است.

۸. کدام گزینه بیانگر ضرایب فوریه سیگنال گسسته $x[n]=\sin\frac{2\pi n}{3}\cdot\cos\frac{\pi n}{2}$ است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $a_1=\frac{-1}{4j}\ ,\ a_5=\frac{1}{4j}\ ,\ a_7=\frac{1}{2j}\ ,\ a_{11}=\frac{-1}{2j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۲) $a_1=\frac{1}{4j}\ ,\ a_5=\frac{-1}{4j}\ ,\ a_7=\frac{1}{4j}\ ,\ a_{11}=\frac{-1}{4j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۳) $a_1=\frac{1}{2j}\ ,\ a_5=\frac{-1}{2j}\ ,\ a_7=\frac{1}{2j}\ ,\ a_{11}=\frac{-1}{2j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۴) $a_1=\frac{-1}{4j}\ ,\ a_5=\frac{1}{4j}\ ,\ a_7=\frac{-1}{4j}\ ,\ a_{11}=\frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

حل:

$$x[n]=\sin\frac{2\pi n}{3}\cdot\cos\frac{\pi n}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{6}n+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}n$$

ابتدا دوره تناوب $x[n]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin\frac{7\pi}{6}n \longrightarrow \frac{2\pi}{7\pi/6}=\frac{12}{7} \Rightarrow N_1=12$$

$$\sin\frac{\pi}{6}n \longrightarrow \frac{2\pi}{\pi/6}=\frac{12}{1} \Rightarrow N_2=12$$

پس دوره تناوب اصلی $x[n]$ و فرکانس اصلی آن برابر است با:

$$N=\mathrm{lcm}(12,12)=12 \longrightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

$x[n]$ را به صورت نمایی می‌نویسیم:

$$x[n]=\frac{1}{4j}e^{j\frac{7\pi}{6}n}-\frac{1}{4j}e^{-j\frac{7\pi}{6}n}+\frac{1}{4j}e^{j\frac{\pi}{6}n}-\frac{1}{4j}e^{-j\frac{\pi}{6}n} \qquad (1)$$

حال به صورت زیر استدلال می‌کنیم:

$$a_k \longleftarrow e^{jk\frac{\pi}{6}n}\ \text{ضریب} \quad \xleftarrow{\ \omega_0=\frac{\pi}{6}\ } \quad a_k \longleftarrow e^{jk\omega_0 n}\ \text{ضریب}$$

بنابراین باید در بسط $x[n]$، ضریب نمایی $e^{jk\frac{\pi}{6}n}$ را به‌ازای هر k شناسایی کنیم. از رابطه (۱) داریم:

$$x[n]=\underbrace{(\frac{1}{4j})}_{a_7}e^{j\frac{7\pi}{6}n}+\underbrace{(-\frac{1}{4j})}_{a_{-7}}e^{-j\frac{7\pi}{6}n}+\underbrace{(\frac{1}{4j})}_{a_1}e^{j\frac{\pi}{6}n}+\underbrace{(-\frac{1}{4j})}_{a_{-1}}e^{-j\frac{\pi}{6}n}$$

پس ضرایب سری فوریه $x[n]$ در یک دوره تناوب برابر است با:

$$a_7=\frac{1}{4j}\ ,\ a_{-7}=-\frac{1}{4j}\ ,\ a_1=\frac{1}{4j}\ ,\ a_{-1}=-\frac{1}{4j}$$

بقیه ضرایب در یک دوره تناوب برابر صفر هستند. ولی با توجه به متناوب بودن ضرایب فوریه در حالت زمان‌گسسته، ضرایب فوق با دوره تناوب $N=12$ متناوب هستند و ۱۲تا ۱۲تا تکرار می‌شوند. یعنی $a_k=a_{k+12}$ می‌باشد. پس a_{-1} با a_{11} و a_{-7} با a_5 برابر است

فصل ۵

۴۰- تبدیل فوریهٔ سیگنال $y(t)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|$ برابر کدام است؟

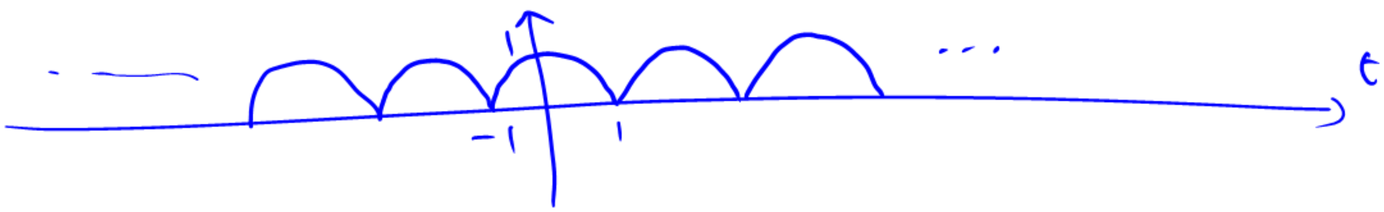
۱) $Y(\omega)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}\left[\delta\left(\omega-(k+1)\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-(k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$

۲) $Y(\omega)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}\left[\delta\left(\omega-(k+1)\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-(k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$

۳) $Y(\omega)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}\left[\delta\left(\omega-(k+1)\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-(k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$; k is even

۴) $Y(\omega)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}\left[\delta\left(\omega-(k+1)\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-(k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$; k is odd ✓

$y(t)=\left|\cos\frac{\pi}{2}t\right|$, $T=2$, $\omega_0=\pi$



$z(t)=\cos\frac{\pi}{2}t\cdot\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$

$\Rightarrow z(t)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}t}\cdot\Pi\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}t}\cdot\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$

$\Rightarrow Z(\omega)=\frac{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}{\omega-\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}{\omega+\frac{\pi}{2}}$

$a_k=\frac{1}{T}Z(k\omega_0)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \,\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{k - \frac{1}{2}} \delta(\omega - k\pi) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{k + \frac{1}{2}} \delta(\omega - k\pi)$$

می‌توان با جایگذاری و پیدا کردن مثلاً ضریب $\delta(\omega+\pi)$ و $\delta(\omega+2\pi)$

در عبارت فوق و همچنین گزینه‌ها، گزینه ۴ را انتخاب نمود. اما می‌توان

با توجه به گزینه‌ها به صورت زیر عمل کرد:

با تغییر متغیر $k = \frac{m+1}{2}$ در سیگمای اول و $k = \frac{m-1}{2}$ در سیگمای

دوم داریم،

$$Y(\omega) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \text{ فرد}}}^{+\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\frac{m}{2}} \delta\left(\omega - \left(\frac{m+1}{2}\right)\pi\right) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \text{ فرد}}}^{+\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\frac{m}{2}} \delta\left(\omega - \left(\frac{m-1}{2}\right)\pi\right)$$

متأسفانه این سؤال، تست استانداردی نبوده و بیشتر شبیه سؤالات سری فوریه

ریاضی مهندسی است تا درس سیگنال!

۴۱- یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\frac{1}{\pi t}$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی این سیستم، سیگنال $x(t)=\text{sinc}^{2}(t)\cos(2\pi t)$ باشد و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش دهیم، مقدار $y\left(\frac{1}{4}\right)$ کدام است؟ فصل ۹

۱) $\frac{4}{\pi^{2}}$

۲) $\frac{8}{\pi^{2}}$ ✓

۳) $\frac{16}{\pi^{2}}$

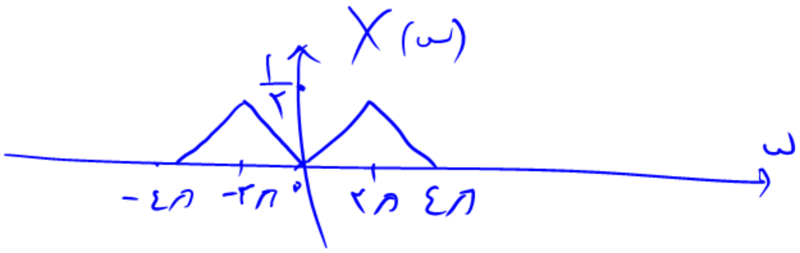
۴) $-\frac{8}{\pi^{2}}$

طبق خاصیت دوگانی تبدیل فوریه $h(t)=\frac{1}{\pi t}$ برابر $H(\omega)=-j\,\text{sgn}(\omega)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)=\begin{cases}-jX(\omega) & , \quad \omega>0\\ jX(\omega) & , \quad \omega<0\end{cases} \qquad (1)$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{2}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{2}e^{-j2\pi t}$$

$$\Rightarrow \quad X(\omega)=\frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{\omega-2\pi}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{\omega+2\pi}{2\pi}\right)$$



$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad Y(\omega)=-\frac{1}{2}j\Lambda\left(\frac{\omega-2\pi}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}j\Lambda\left(\frac{\omega+2\pi}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=-\frac{1}{2}j\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{2}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}j\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{2}e^{-j2\pi t}$$

$$=\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{2}\cdot\sin 2\pi t \quad \Rightarrow \quad y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{\pi^{2}}$$

۴۲- مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(۲\omega)}{۱+\omega^۲} d\omega$ ، کدام است؟ فصل ۵

۱) $\frac{\pi}{۲} e^{-۲}$

۲) $\pi e^{-۱}$

۳) $\pi e^{-۲}$ ✓

۴) $۲\pi e^{-۲}$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} e^{j2\omega} d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} e^{-j2\omega} d\omega$$

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2}{\omega^2+1} \Rightarrow e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega^2+1} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} e^{-|2|} + \frac{\pi}{2} e^{-|-2|} = \pi e^{-2}$$

۴۳- معادلهٔ تفاضلی سیستم LTI گسسته و علّی به‌صورت زیر داده شده است:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

فصل ۹

پاسخ سیستم به ورودی زیر، کدام است؟

$$x[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

۱) $y[n]=(n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$ ✓

۲) $y[n]=(n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n+1]-\frac{1}{4}n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n-1]$

۳) $y[n]=n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{2}n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$

۴) $y[n]=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{2}n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$

راه حل کلی این نوع سؤالات، استفاده از تبدیل Z است. اما در اینجا با توجه به سخت بودن محاسبات، از روش نقطه‌گذاری استفاده می‌کنیم. با توجه به علّی بودن سیستم، سکون اولیه برقرار است. پس طبق ورودی داده شده، $y(n)$ برای $n<0$ برابر صفر است. داریم:

$$y[n]=x(n)-\frac{1}{2}y(n-1)$$

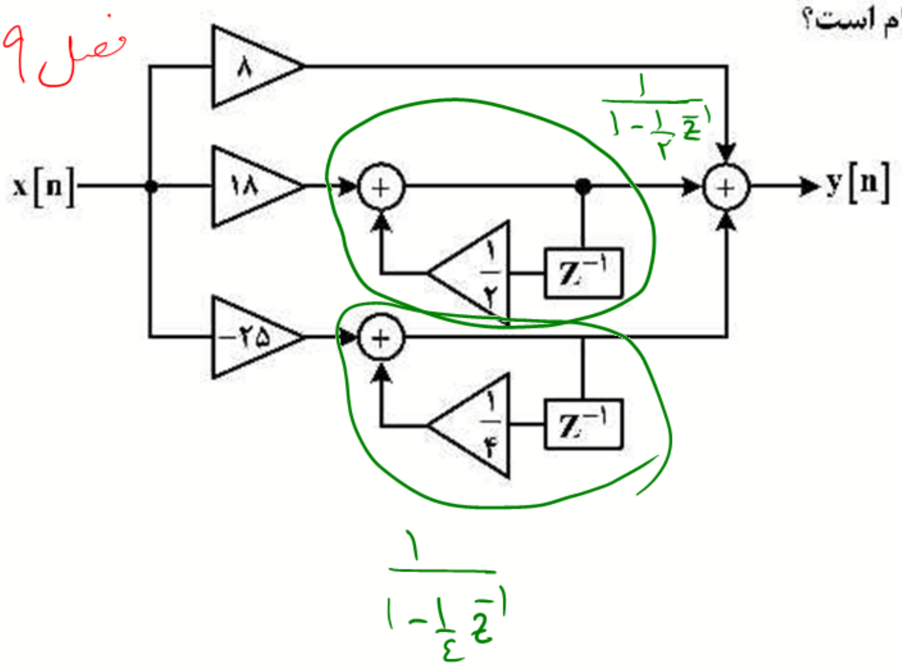
$$n=0:\ y(0)=\underbrace{x(0)}_{1}-\frac{1}{2}\underbrace{y(-1)}_{0}=1$$

پس گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

$$n=1:\ y(1)=\underbrace{x(1)}_{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\underbrace{y(0)}_{1}=-\frac{5}{4}\longrightarrow$$ پس گزینه ۱ صحیح است.

فصل ۹

۴۴- تابع سیستم متناظر با بلوک دیاگرام زیر کدام است؟



۱) $H(Z)=\dfrac{1+2Z^{-1}+Z^{-2}}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}+\frac{1}{8}Z^{-2}}$ ✓

۲) $H(Z)=\dfrac{-7+8Z^{-1}}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}+\frac{1}{8}Z^{-2}}$

۳) $H(Z)=\dfrac{1+\frac{1}{2}Z^{-1}+\frac{1}{4}Z^{-2}}{8-18Z^{-1}-25Z^{-2}}$

۴) $H(Z)=\dfrac{1+\frac{1}{2}Z^{-1}+\frac{1}{4}Z^{-2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{18}Z^{-1}-\frac{1}{25}Z^{-2}}$

$$Y(z)=8X(z)+\frac{18X(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{25X(z)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

۴۵- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI پیوسته برابر است با: $h(t)=\dfrac{\sin^{۲}(\pi t)}{(\pi t)^{۲}}$.

فصل ۹

پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\pi t}$، کدام است؟

۱) $y(t)=۱-\sin(\pi t)$

۲) $y(t)=۱+\sin(\pi t)$

۳) $y(t)=۱-\cos(\pi t)$

۴) $y(t)=۱+\cos(\pi t)$ ✓

$$H(\omega)=\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\pi)e^{jk\pi t}$$

$$\Rightarrow y(t)=1+\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}=1+\cos\pi t$$