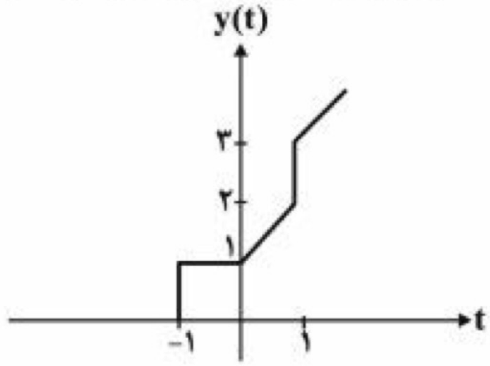
۳۶- پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $tu(t)$ در شکل زیر ارائه شده است. در مورد پاسخ فرکانسی این سیستم، کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟



۱) $|H(0)|=0$

۲) $|H(0)|=2$

۳) $|H(j\frac{\pi}{2})|=1$

۴) $|H(j\frac{\pi}{2})|=0$

راه حل دقیق و کامل سوال این است که ابتدا تبدیل فوریه ورودی، $X(j\omega)$، و تبدیل فوریه خروجی، $Y(j\omega)$، را محاسبه کرده و با تقسیم آنها رابطه پاسخ فرکانسی سیستم را به صورت $H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ بدست آورد. اما با توجه به فرم ورودی و خروجی می‌توان حدس زد که محاسبه $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ کار چندان ساده‌ای نبوده و نیازمند صرف وقت و محاسبات نسبتاً زیادی است، بنابراین سراغ روش دیگری می‌رویم. [حل دقیق سؤال به عنوان تمرین به عهده خودتان] روش دوم و سریعتر که کمی نیاز به ابتکار و خلاقیت دارد، حدس زدن ضابطه سیستم است، یعنی سعی می‌کنیم یک ضابطه خطی و تغییرناپذیر با زمان بین خروجی و ورودی بنویسیم. برای این منظور ابتدا خروجی را به فرم مجموع سیگنال‌های پله و شیب شیفت یافته می‌نویسیم:

$$y(t) = \underbrace{u(t+1)}_{\text{جهش به اندازه (+1) در لحظه } t=-1} + \underbrace{r(t)}_{\text{افزایش شیب به اندازه (+1) در لحظه } t=0} + \underbrace{u(t-1)}_{\text{جهش به اندازه (+1) در لحظه } t=1}$$

$$\Rightarrow y(t) = u(t+1) + t\,u(t) + u(t-1)$$

از آنجایی که $\frac{d}{dt}x(t) = u(t)$ و $x(t) = t\,u(t)$ است، می‌توان گفت:

$$y(t) = \underbrace{u(t+1)}_{x'(t+1)} + \underbrace{t\,u(t)}_{x(t)} + \underbrace{u(t-1)}_{x'(t-1)} = x'(t+1) + x(t) + x'(t-1)$$

ضابطه بدست آمده یک ضابطه خطی و تغییرناپذیر با زمان است (اثبات به عهده خودتان)

بنابراین می‌توان همین ضابطه را به عنوان ضابطه سیستم مورد نظر در نظر گرفت

در حوزه فوریه

$$Y(j\omega) = j\omega e^{j\omega} X(j\omega) + X(j\omega) + j\omega e^{-j\omega} X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = 1 + j\omega\big[\underbrace{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}_{2\cos(\omega)}\big] = 1 + 2j\omega\cos(\omega)$$

$\Rightarrow H(0)=1$

$\Rightarrow H(j\frac{\pi}{2})=1$

۳۷- سیستمی با رابطهٔ ورودی خروجی زیر تعریف شده است که در آن α مقدار ثابت و معلوم است.

$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(T-\alpha)dT$$

گزینهٔ درست در مورد این سیستم، کدام است؟ این سیستم:

۱) معکوس‌پذیر نیست و برای برخی مقادیر α علّی است.
۲) معکوس‌پذیر و به ازای برخی مقادیر α غیرعلّی است.
۳) معکوس‌پذیر و علّی نیست.
۴) معکوس‌پذیر و علّی است.

تحلیل علیت:

برای علی بودن سیستم کافی است همواره در ضابطه سیستم آرگومان ورودی کوچکتر یا مساوی آرگومان خروجی باشد. آرگومان ورودی در این ضابطه برابر با $(T-\alpha)$ است که T متغیر انتگرال گیری بوده و در بازه $(t, t+1)$ تغییر می‌کند، بنابراین حدود تغییرات آرگومان ورودی عبارتست از:

$$t \leq T \leq t+1 \rightarrow t-\alpha \leq T-\alpha \leq t+1-\alpha$$

حال اگر $1 \leq \alpha$ باشد، آرگومان ورودی همواره کوچکتر از آرگومان خروجی بوده و سیستم علی خواهد بود، اما اگر $1 > \alpha$ باشد آنگاه به ازای برخی مقادیر T آرگومان ورودی بزرگتر از آرگومان خروجی می‌شود و این موجب غیر علی شدن سیستم می‌گردد. بنابراین علی بودن یا نبودن سیستم به مقدار α وابسته است.

تحلیل معکوس پذیری

ابتدا فرض می‌کنیم سیستم معکوس پذیر بوده و سعی می‌کنیم ضابطه سیستم معکوس را بدست آوریم؛ از آنجا که می‌دانیم عملگرهای مشتق و انتگرال معکوس هم هستند، در قدم اول از طرفین ضابطه مشتق می‌گیریم:

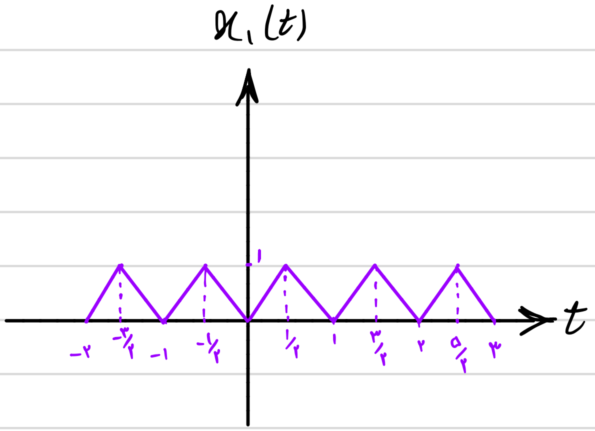
$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(T-\alpha)\,dT \rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = x(t+1-\alpha) - x(t-\alpha)$$

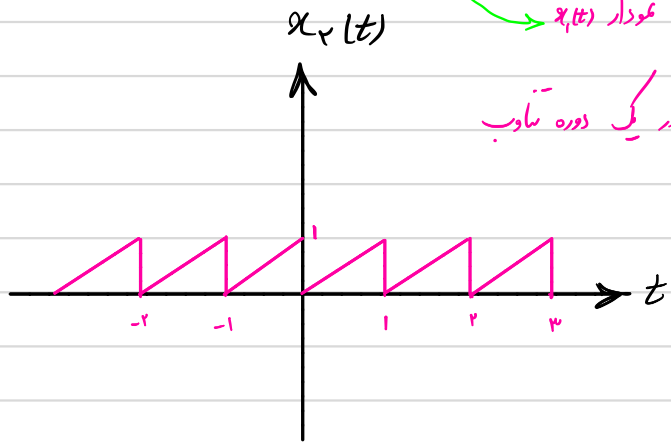
شاید این طور به نظر آید که با معلوم بودن سیگنال $y(t)$ و ثابت α، می‌توان بیشمار معادله دو متغیره بر اساس مقادیر $x(t)$ در لحظات مختلف بدست آورد و با حل این معادلات می‌توان مقادیر $x(t)$ را در تمام لحظات بدست آورد و در نتیجه سیستم معکوس پذیر است؛ اما این استدلال کاملاً غلط است و سیستم مورد بحث معکوس ناپذیر است. به عنوان مثال نقض می‌توان سیگنال های

اثباتش به عهده خودتان ☺

$x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت زیر را در نظر گرفت که هر دو با دوره تناوب ۱ متناوب بوده و پاسخ سیستم مورد نظر به هر دو سیگنال یکسان و برابر با $\frac{1}{2} = y(t)$ خواهد بود.

سطح زیر نمودار $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در یک دوره تناوب





۳۸- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI به‌صورت $h(t)=e^{t}$ است. خروجی آن $(y(t))$ به ازای $x(t)=u(t+1)$ برابر کدام است؟

۱) $e^{t+1}u(t+1)$

۲) $e^{t-1}u(t-1)$

۳) e^{t-1}

۴) e^{t+1}

می‌دانیم سیگنال نمایی یک سیگنال ویژه برای عملگر کانولوشن است، یعنی به ازای هر سیگنال $x(t)$ و مقدار مختلط s_0 می‌توان گفت

$e^{s_0 t} * x(t) = k\, e^{s_0 t}$ است که $k = \mathcal{L}\{x(t)\}\big|_{s=s_0}$ است. بنابراین در این سؤال $y(t)$ برابر است با:

نماد تبدیل لاپلاس

$$y(t) = h(t) * x(t) = e^{t} * u(t+1) = \mathcal{L}\{u(t+1)\}\big|_{s=1} \cdot e^{t}$$

جای‌گذاری h و x

طبق سیگنال ویژه بودن e^{t}

سیگنال	تبدیل لاپلاس
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t+1)$	$\frac{e^{s}}{s}$

شیفت زمانی

$$\mathcal{L}\{u(t+1)\}\big|_{s=1} = e$$

$$y(t) = e \cdot e^{t} = e^{t+1}$$

۳۹- تبدیل لاپلاس یک سیستم LTI پیوسته به‌صورت $H(s)=\frac{k(s-1)}{s^2+3s+2}$ مفروض است. با فرض $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt=\frac{-1}{2}$ ، حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dh(t)}{dt}e^{3t}dt$

۱) -6

۲) 0

۳) 12

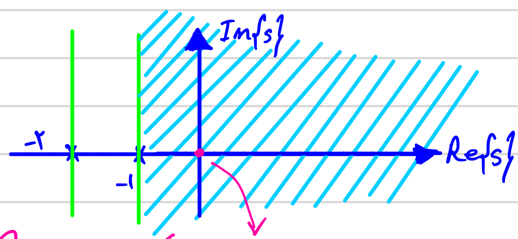
۴) ∞

$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt=\frac{-1}{2} \Rightarrow H(s)\Big|_{s=0}=\frac{-1}{2}$ پس $s=0$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته و $H(s)=\frac{-1}{2}$ است

پس می‌توان مقدار k ، ناحیه همگرایی $H(s)$ را مشخص نمود:

$H(0)=\frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{k(s-1)}{s^2+3s+2}\Big|_{s=0}=\frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{k(-1/2)}{2}=-1/2 \Rightarrow \boxed{k=2}$

قطب‌های H : $s^2+3s+2=0 \Rightarrow s=-1\,,\,-2$



$s=0$ باید در ناحیه همگرایی $H(s)$ باشد

بنابراین با توجه به محل قطب‌های $H(s)$ تنها ناحیه

$Re\{s\}>-1$ را می‌توان به عنوان ناحیه همگرایی در نظر گرفت

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}h(t)\,e^{3t}dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}h(t)\,e^{-st}dt}_{\text{تعریف تبدیل لاپلاس برای } \frac{d}{dt}h(t)}\Bigg|_{s=-3}=\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}h(t)\right\}\Bigg|_{s=-3}=sH(s)\Bigg|_{s=-3}$

طبق خواص تبدیل لاپلاس

می‌دانیم $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}h(t)\}=sH(s)$ است

اما $s=-3$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ نیست و بنابراین $H(s)\Big|_{s=-3}=\infty$ بوده و در نتیجه حاصل انتگرال مورد نظر بی‌کران است.

۴۰- $x(t)$ سیگنال زمان پیوسته و $T > 0$ است. اگر $x(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ باشد، در آن صورت:

۱) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(j\frac{2\pi n}{T})|^2 = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)|^2$

۲) $T\sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(j\frac{2\pi n}{T})|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

۳) $T\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\frac{2\pi n}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)$

۴) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\frac{2\pi n}{T}) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)$

با توجه به گزینه‌های داده شده ابتدا باید عبارت $X(j\frac{2\pi n}{T})$ را تحلیل کنیم و درک درستی از آن بدست آوریم، چرا که این عبارت در هر چهار گزینه مطرح شده است. $X(j\frac{2\pi n}{T})$ به عبارتی سیگنال نمونه برداری شده $X(j\omega)$ در فرکانس های مضرب $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است:

$$X(j\frac{2\pi}{T}n) = X(j\omega)\Big|_{\omega = n\omega_0} \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

از طرفی با توجه به روابط بین تبدیل فوریه و ضرایب سری فوریه می‌دانیم ضرایب سری فوریه هر سیگنال متناوبی از طریق نمونه برداری از تبدیل فوریه یک سیگنال نامتناوب که برابر با یک دوره تناوب از سیگنال متناوب مورد نظر می‌باشد، قابل محاسبه است. بنابراین اگر سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ را به صورت روبرو تعریف کنیم:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

آنگاه ضرایب سری فوریه $\tilde{x}(t)$ برابر با نمونه‌های $X(j\omega)$ در فرکانس‌های مضرب $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ خواهند بود. یعنی اگر ضرایب سری فوریه $\tilde{x}(t)$ را با a_k نمایش دهیم، آنگاه:

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} = \frac{1}{T}X(jk\frac{2\pi}{T})$$

اما در گزینه‌های داده شده دو نوع سیگما براساس جملات $X(j\frac{2\pi n}{T})$ مطرح شده است، یکی $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(j\frac{2\pi n}{T})$ که با $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ معادل است و یکی $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(j\frac{2\pi n}{T})|^2$ که با $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$ معادل است و هر دو سیگما را می‌توان طبق خواص ضرایب سری فوریه محاسبه کرد:

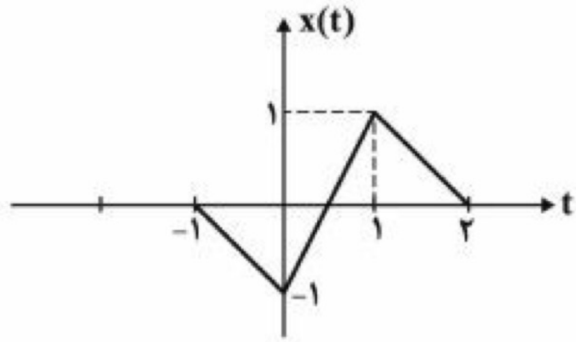
طبق تعریف سری فوریه

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \overset{\uparrow}{=} \tilde{x}(0) \xRightarrow{\text{جایگذاری } a_k \text{ و } \tilde{x}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}X(j\frac{2\pi k}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(0-kT) \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(j\frac{2\pi n}{T}) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)$$

طبق پارسوال

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |\tilde{x}(t)|^2 dt \xRightarrow{\text{جایگذاری } a_k \text{ و } \tilde{x}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(j\frac{2\pi k}{T})|^2 = T\int_{\langle T\rangle} \Big|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)\Big|^2 dt$$

۴۱- تبدیل فوریهٔ سیگنال ارائه شده در شکل زیر، کدام است؟



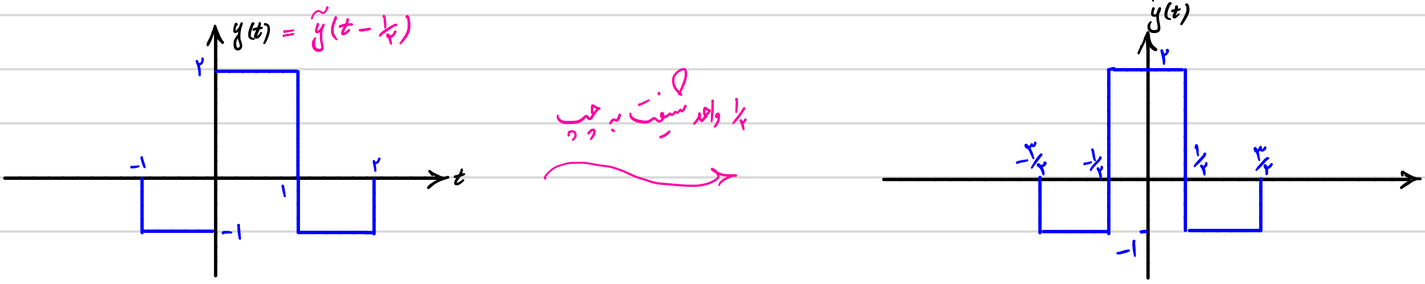
۱) $e^{-j\pi f}\,\text{sinc}^2(f)\sin(\frac{\pi f}{4})$

۲) $-2je^{-j\pi f}\,\text{sinc}^2(f)\sin(\pi f)$

۳) $e^{-j\pi f}\,\text{sinc}^2(f)\sin(\frac{\pi f}{2})$

۴) $je^{-j\pi f}\,\text{sinc}^2(\frac{f}{2})\sin(\pi f)$

با توجه به شکل موج $x(t)$ حدس می‌زنم که برای محاسبه سریعتر و راحت‌تر تبدیل فوریه آن بهتر است ابتدا از $x(t)$ مشتق بگیریم و از روی تبدیل فوریه مشتق آن به تبدیل فوریه $x(t)$ برسیم (طبق خواص تبدیل فوریه) بنابراین مشتق $x(t)$ را با $y(t)$ نشان می‌دهیم:



در بالا، شکل سمت چپ $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ می‌باشد، که با توجه به شکل موج آن متوجه می‌شوم که اگر $y(t)$ را $(\frac{1}{2})$ واحد به چپ شیفت دهیم، سیگنال زوج $\tilde{y}(t)$ حاصل می‌گردد که قطعاً $y(t)=\tilde{y}(t-\frac{1}{2})$ خواهد بود [همان طور که در شکل‌های بالا مشاهده می‌شود]. بنابراین ابتدا تبدیل فوریه $\tilde{y}(t)$ را بدست می‌آوریم:

$$\tilde{Y}(f) = \underbrace{-e^{j2\pi f}\,\text{Sinc}(f)}_{\text{تبدیل فوریه پالس به طول ۱ از } -\frac{3}{2} \text{ تا } -\frac{1}{2}} + \underbrace{2\,\text{Sinc}(f)}_{\text{تبدیل فوریه پالس به طول ۱ از } -\frac{1}{2} \text{ تا } \frac{1}{2}} - \underbrace{e^{-j2\pi f}\,\text{Sinc}(f)}_{\text{تبدیل فوریه پالس به طول ۱ از } \frac{1}{2} \text{ تا } \frac{3}{2}}$$

$$\tilde{Y}(f) = \text{Sinc}(f)\Big[2-\underbrace{(e^{j2\pi f}+e^{-j2\pi f})}_{2\cos(2\pi f)}\Big] = 2\,\text{Sinc}(f)\Big[\underbrace{1-\cos(2\pi f)}_{2\sin^2(\pi f)}\Big] = 4\,\text{Sinc}(f)\sin^2(\pi f)$$

خاصیت شیفت زمانی ← $y(t)=\tilde{y}(t-\frac{1}{2})$

$$Y(f) = e^{-j\pi f}\,\tilde{Y}(f) = 4e^{-j\pi f}\,\text{Sinc}(f)\sin^2(\pi f)$$

خاصیت انتگرال زمانی ← $x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\,d\lambda$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\cancel{Y(0)}\,\delta(f) = \frac{\cancel{4}^{\,2}e^{-j\pi f}\,\text{Sinc}(f)\,\sin^2(\pi f)}{j\,\cancel{2}\pi f} = -2je^{-j\pi f}\,\text{Sinc}^2(f)\sin(\pi f)$$

$\sin^2(\pi f) = \sin(\pi f)\sin(\pi f)$، $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \to \text{Sinc}(f)$

۴۲- اگر پایداری ورودی ـ کراندار، خروجی ـ کراندار (BIBO) و خاصیت کراندار بودن انرژی پاسخ ضربه در یک سیستم LTI را، به‌ترتیب، با نمادهای S و E نشان دهیم، کدام گزینه برای سیستم LTI زمان گسسته صادق است؟

۱) برقراری S شرط کافی برای برقراری E است.
۲) برقراری S شرط لازم و کافی برای برقراری E است.
۳) برقراری E شرط کافی برای برقراری S است.
۴) برقراری E شرط لازم و کافی برای برقراری S است.

اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته را با $h[n]$ نمایش دهیم، آنگاه:

شرط پایداری BIBO : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

شرط کراندار بودن انرژی : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2 < \infty$

اما با توجه به حقیقی و مثبت بودن مقادیر $|h[n]|$ به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2 \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|\right)^2$$

اثبات به عنوان تمرین به عهده خودتان

بنابراین اگر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|$ مقداری محدود و کران دار باشد آنگاه $\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|\right)^2$ نیز مقداری کران دار بوده و در نتیجه طبق نامساوی بالا قطعاً حاصل $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2$ نیز کران دار خواهد بود، یعنی از پایداری سیستم می‌توان کران دار بودن انرژی پاسخ ضربه را نتیجه گرفت و لذا برقراری S شرط کافی برای برقراری E خواهد بود، اما برعکس این نتیجه‌گیری صحیح نیست!!! به عنوان مثال نقض سیگنال $h[n] = \frac{1}{n}u[n-1]$ را در نظر بگیرید، در این صورت:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$ سری واگراست ← سیستم پایدار نیست ← گزاره S برقرار نیست

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{5}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \frac{3}{4}$$ انرژی پاسخ ضربه کراندار است ← گزاره E برقرار است

$-\frac{1}{2}$

مجموع جملات اول و دوم سری

چون مخرج جملات سوم به بعد کوچکتر شده است، پس جملات سوم به بعد بزرگتر شده و حاصل سری جدید از سری قبلی بیشتر است.

۴۳- در مورد سیستم روبه‌رو، کدام گزینه صحیح است؟

$$H(z) = \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}{z^{-1}(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{3}{8}z^{-1})}$$

۱) اگر سیستم پایدار باشد، غیرعلّی است.
۲) اگر سیستم ناپایدار باشد، علّی است.
۳) اگر سیستم پایدار باشد، علّی است.
۴) سیستم همواره پایدار است.

با توجه به گزینه‌های داده شده باید در مورد پایداری و علیت تابع تبدیل داده شده نظر بدهیم که برای این منظور باید روی نواحی همگرایی ممکن برای $H(z)$ بحث کنیم. اما قبل از بحث روی نواحی همگرایی به وضوح می‌دانیم که سیستم مورد نظر قطعاً غیرعلی است و علت این امر وجود جمله z^{-1} در مخرج $H(z)$ است که معادل با وجود ضریب z در صورت کسر $H(z)$ است، یعنی می‌توان $H(z)$ را به صورت $zG(z)$ نوشت که $G(z)$ نیز تابعی کسری بر حسب z^{-1} است و حتی در صورت علی بودن $G(z)$ در عکس تبدیل z آن، $g[n]$، عبارت‌های نمایی دست راستی به فرم $a^n u[n]$ ظاهر خواهد شد، اما چون $H(z) = zG(z)$ است، $h[n] = g[n+1]$ بوده و در نتیجه $h[n]$ در $n=-1$ مقدار مخالف صفر خواهد داشت و این امر موجب غیرعلی شدن سیستم خواهد شد [در سیستم‌های LTI شرط لازم و کافی برای علی بودن سیستم، صفر بودن پاسخ ضربه سیستم در زمان‌های منفی می‌باشد] روش دیگر استدلال برای غیر علّی بودن سیستم داده شده آن است که بگوییم $H(z)$ داده شده در $z=\infty$ دارای قطب است و می‌دانیم سیستم‌هایی که قطب در بی‌نهایت دارند هرگز علی نخواهند بود. [اثبات این قضیه مشابه با استدلال اولیه ما خواهد بود]

اما در مورد پایداری سیستم با توجه به اینکه $H(z)$ دارای دو قطب محدود در $z=-\frac{1}{4}$ و $z=\frac{3}{8}$ است، پس با توجه به ناحیه همگرایی $H(z)$ سیستم می‌تواند پایدار باشد یا نباشد، بنابراین گزینه‌های دوم و سوم و چهارم نمی‌توانند صحیح باشند و تنها گزینه اول ممکن است اتفاق بیفتد.

توجه داشته باشید که اگر $H(z)$ قطب محدود نداشت، آنگاه سیستم تبدیل به سیستم FIR می‌شد که قطعاً همواره پایدار است.

تنها زمانی ممکن بود $H(z)$ قطب محدود نداشته باشد که صفرها و قطب‌های $H(z)$ یکدیگر را خنثی می‌کردند که البته در اینجا چنین اتفاقی رخ نخواهد داد.

۴۴- سیگنال $x[n]$ یک سیگنال پریودیک با دورهٔ تناوب ۶ است که برای آن رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{1}{3}a_k^3 + a_k^2 a_{k-3} + a_k a_{k-3}^2 + \frac{1}{3}a_{k-3}^3 = 0$$

سیگنال $y[n] = \sin(\frac{n\pi}{2})x[n-1]$ از روی سیگنال $x[n]$ ساخته شده است. ضرایب سری فوریهٔ سیگنال $y[n]$ کدام است؟

۱) $a_k e^{-\frac{j2\pi k}{6}}$

۲) 0

۳) $a_k e^{-\frac{j4\pi k}{6}}$

۴) $a_k e^{-j\pi k}$

ابتدا گزاره‌ی داده شده در صورت سؤال را ساده کرده و تفسیر می‌نماییم:

$$\frac{1}{3}a_k^3 + a_k^2 a_{k-3} + a_k a_{k-3}^2 + \frac{1}{3}a_{k-3}^3 = 0 \longrightarrow \frac{1}{3}(a_k + a_{k-3})^3 = 0 \longrightarrow a_k = -a_{k-3}$$

اما با توجه به خاصیت شیفت فرکانسی برای ضرایب سری فوریه، می‌دانیم a_{k-3} ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]e^{j\pi n}$ خواهد بود $[e^{j3(\frac{2\pi}{6})n} = e^{j\pi n}]$

پس با توجه به تساوی بالا می‌توان گفت:

$$a_k = -a_{k-3} \longrightarrow x[n] = -x[n]\cancel{e^{j\pi n}}^{(-1)^n} \longrightarrow x[n]\underbrace{(1+(-1)^n)}_{\substack{n=\text{فرد} \to 0 \\ n=\text{زوج} \to 2}} = 0 \longrightarrow x[n] = 0 : \text{برای } n \text{ های زوج}$$

بنابراین $x[n-1]$ [که شیفت یافته‌ی $x[n]$ است] در زمان‌های فرد صفر می‌باشد. از طرفی تابع زمانی $\sin(\frac{n\pi}{2})$ هم در زمان‌های زوج همواره صفر است، در نتیجه به وضوح می‌توان گفت که حاصل‌ضرب $x[n-1]$ و $\sin(\frac{n\pi}{2})$، در تمام زمان‌ها صفر خواهد بود و بدیهی است که ضرایب سری فوریه سیگنال صفر نیز همگی صفر هستند.

۴۵- اگر داشته باشیم $Y(z)=X(a^{-1}z)+X(2a^{-1}z)+X(4a^{-1}z)+X(8a^{-1}z)+\cdots$، حاصل $y[1]y[2]$، کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}x[1]x[2]a^3$

۲) $\frac{16}{9}x[1]x[2]a^3$

۳) $\frac{8}{3}x[1]x[2]a^3$

۴) $\frac{4}{3}x[1]x[2]a^3$

با توجه به خاصیت تغییر مقیاس حوزه Z برای تبدیل Z می‌دانیم $X(a^{-1}z)$ تبدیل Z سیگنال $a^n x[n]$ خواهد بود و به همین ترتیب می‌توان عکس تبدیل Z سایر جملات بسط داده شده را نیز بدست آورد، یعنی خواهیم داشت:

$$X(a^{-1}z) \xrightarrow{Z^{-1}} a^n x[n]$$
$$X(2a^{-1}z) \xrightarrow{Z^{-1}} \left(\frac{a}{2}\right)^n x[n]$$
$$X(4a^{-1}z) \xrightarrow{Z^{-1}} \left(\frac{a}{4}\right)^n x[n]$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Rightarrow y[n] = a^n x[n] + \left(\frac{a}{2}\right)^n x[n] + \left(\frac{a}{4}\right)^n x[n] + \cdots$$
$$= a^n x[n]\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{8}\right)^n+\cdots\right)$$
$$= a^n x[n]\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}+\cdots\right)$$
$$= a^n x[n]\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^0+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^1+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3+\cdots\right)$$

طبق رابطه سری هندسی با قدر نسبت $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= a^n x[n]\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)$$

$$\begin{cases} y[1] = a\,x[1]\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2a\,x[1] \\ y[2] = a^2 x[2]\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{3}a^2 x[2] \end{cases} \Rightarrow y[1]y[2] = \frac{8}{3}a^3 x[1]x[2]$$