پاسخ تشریحی آزمون فصل پنجم

۱) گزینه ۳ صحیح است.

طبق جدول تبدیل فوریه داریم:

$$\frac{۱}{(۲+j\omega)^۲} \xrightarrow{F^{-۱}} t e^{-۲t}u(t)$$

حال طبق خاصیت انتقال زمانی خواهیم داشت:

$$X(\omega)=\frac{e^{-j۳\omega}}{(۲+j\omega)^۲} \xrightarrow{F^{-۱}} x(t)=(t-۳)e^{-۲(t-۳)}u(t-۳)$$

۲) گزینه ۲ صحیح است.

$$x(t) \xrightarrow[\text{خاصیت انتقال زمانی}]{t\to t+۲} x(t+۲) \xrightarrow[\text{خاصیت انتقال فرکانسی}]{\times e^{j۲\pi(۲)t}} x(t+۲)e^{j۴\pi t}=y(t)$$

$$X(f) \xrightarrow{\times e^{j۲\pi f(۲)}} \underbrace{X(f)e^{j۲\pi f(۲)}}_{X(f)e^{j۴\pi f}} \xrightarrow{f\to f-۲} X(f-۲)e^{j۴\pi(f-۲)}=Y(f)$$

بنابراین $Y(f)$ برابر است با:

$$Y(f)=X(f-۲)e^{j۴\pi(f-۲)}=X(f-۲)e^{j۴\pi f}\underbrace{e^{-j۸\pi}}_{۱}=X(f-۲)e^{j۴\pi f}$$

۳) گزینه ۲ صحیح است.

$$y(t)=۲\int_t^{+\infty}x(\alpha)\,d\alpha=۲\int_{-\infty}^{+\infty}x(\alpha)u(\alpha-t)\,d\alpha=۲x(t)*u(-t)$$

تبدیل فوریه $u(-t)$ را می‌توان با استفاده از خاصیت وارونگی از تبدیل فوریه $u(t)$ به دست آورد که برابر می‌شود با:

$$u(-t) \xleftrightarrow{F} \frac{۱}{-j\omega}+\pi\underbrace{\delta(-\omega)}_{\delta(\omega)}=-\frac{۱}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

اما با توجه به اینکه در گزینه‌ها تبدیل فوریه در حوزه f داده شده است، تبدیل فوریه فوق را باید برحسب f به محاسبه کنیم که با جایگذاری $\omega=۲\pi f$، برابر $-\frac{۱}{j۲\pi f}+\frac{۱}{۲}\delta(f)$ به‌دست می‌آید. حال با استفاده از خاصیت کانولوشن داریم:

$$y(t)=۲x(t)*u(-t) \xleftrightarrow{F} Y(f)=۲X(f)\cdot\left[-\frac{۱}{j۲\pi f}+\frac{۱}{۲}\delta(f)\right]=-\frac{X(f)}{j\pi f}+X(f)\delta(f)$$

با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت:

$$Y(f)=-\frac{X(f)}{j\pi f}+X(f)\underbrace{\delta(f)}_{f=۰}=j\frac{X(f)}{\pi f}+X(۰)\delta(f)$$

توجه کنید که در اینجا نمی‌توانیم از روش مشتق‌گیری استفاده کنیم، زیرا حد بالای انتگرال، متغیر نیست. در واقع در این صورت، پاسخ به‌دست آمده در $f=0$ لزوماً معتبر نخواهد بود.

۴) گزینه ۳ صحیح است.

از خاصیت مشتق‌گیری در فرکانس می‌دانیم که:

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{\ F\ } jX'(\omega)$$

رابطه فوق بیان می‌کند که تبدیل فوریه سیگنال $n\,x[n]$ برابر $jX'(\omega)$ می‌باشد. بنابراین رابطه پارسوال در مورد زوج تبدیل فوریه فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|n\,x[n]\right|^{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|jX'(\omega)\right|^{2}d\omega \quad\Rightarrow\quad I=\int_{-\pi}^{\pi}\left|X'(\omega)\right|^{2}d\omega=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(n\,x[n]\right)^{2}$$

برای محاسبه سیگمای فوق، می‌توانیم آن را باز کنیم:

$$I=2\pi\sum_{n=0}^{2}\left(n\,x[n]\right)^{2}=2\pi\left[\left(0\times x[0]\right)^{2}+\left(1\times x[1]\right)^{2}+\left(2\times x[2]\right)^{2}\right]=40\pi$$

۵) گزینه ۳ صحیح است.

انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega}d\omega$ شبیه رابطه عکس تبدیل فوریه می‌باشد. داریم:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \xrightarrow{\ t=1\ } x(1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega}d\omega$$

بنابراین انتگرال مذکور برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega}d\omega=2\pi\underbrace{x(1)}_{2}=4\pi$$

برای محاسبه فاز $X(\omega)$، باید از تقارن سیگنال $x(t)$ کمک بگیریم. با توجه به شکل داده شده، $x(t)$ سیگنالی حقیقی است و همچنین اگر ۲ واحد به سمت چپ شیفت پیدا کند، زوج نیز خواهد شد. بنابراین $x(t+2)$، سیگنالی حقیقی و زوج است. در نتیجه طبق نکته ۴۵، تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج خواهد بود. اما تبدیل فوریه $x(t+2)$ طبق خاصیت انتقال زمانی، برابر $X(\omega)e^{j2\omega}$ می‌باشد. بنابراین $X(\omega)e^{j2\omega}$ تابعی حقیقی و زوج است:

$$\text{حقیقی و زوج}\ x(t+2) \xleftrightarrow{\ F\ } X(\omega)e^{j2\omega}\ \text{حقیقی و زوج}$$

با توجه به حقیقی بودن تابع $X(\omega)e^{j2\omega}$، فاز آن برابر 0 یا π است. بنابراین داریم:

$$\measuredangle\left[X(\omega)e^{j2\omega}\right]=0\ \text{or}\ \pi \quad\Rightarrow\quad \measuredangle X(\omega)+\underbrace{\measuredangle e^{j2\omega}}_{2\omega}=0\ \text{or}\ \pi$$

$$\Rightarrow\ \measuredangle X(\omega)=-2\omega\ \text{or}\ \pi-2\omega$$

ملاحظه می‌کنید که فاز $X(\omega)$ بسته به علامت تابع $X(\omega)e^{j2\omega}$ در ωهای مختلف، ممکن است دارای فاز -2ω یا $\pi-2\omega$ باشد که در این تست، تنها فاز -2ω در گزینه‌ها وجود دارد!