نظریه زبان‌ها و آتوماتا

به سبک حرفه‌ای

جلسه نهم – زبان‌های منظم و نامنظم

دکتر امیرحسین کاشفی | مدرس حرفه‌ای کنکور ارشد کامپیوتر

چگونه تشخیص دهیم یک زبان منظم است؟

1/ رسم FSA 2/ استفاده از عبارات منظم

3/ استفاده از ویژگی‌های بستاری زبان‌های منظم

4/ روش پیکربندی (کاشفی)

5/ لم تزریق زبان‌های منظم ← تشخیص بدهیم زبان نامنظم است.

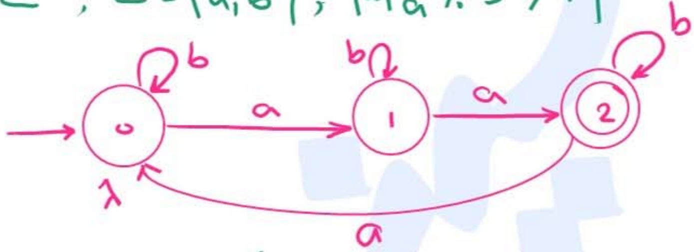
6/ قضیه Myhill-Nerode

7/ معادلسازی زبان با یک زبان منظم دیگر

① رسم نمودار FSA

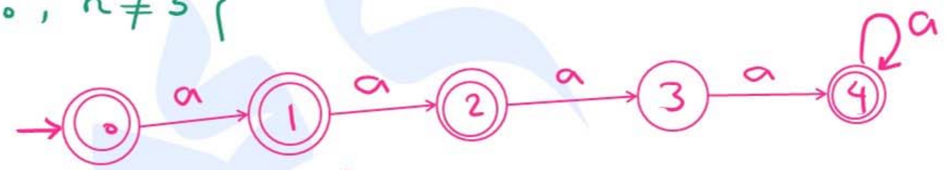
$L = \{ w \mid w \in \Sigma^*,\ \Sigma = \{a,b\},\ |w|_a \% 3 > 1 \}$

$|w|_a \% 3 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$ ۳ حالت



$L = \{ a^n \mid n \geq 0,\ n \neq 3 \}$

$\Sigma = \{a\}$



$L = \{ \lambda, a, aa, aaaa, a^5, \dots$

② عبارت منظم

$L = \{ w \mid w \in \Sigma^*,\ |w|_a = 2k \}$

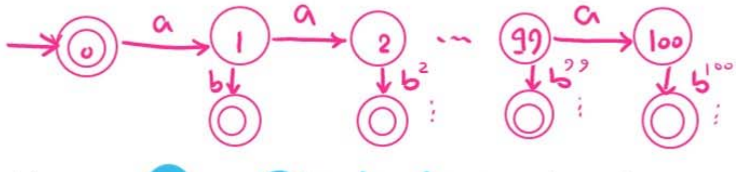
$RE_L = (ab^*a + b)^*$

* اگر L یک زبان متناهی باشد، آنگاه L منظم است

اگر L یک زبان منظم باشد آنگاه می‌تواند متناهی نیز باشد

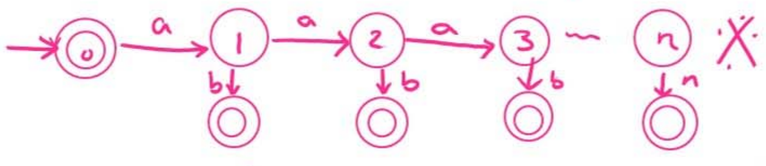
$L = \{ a^n b^n \mid n \leq 100 \} \longrightarrow$ متناهی

$L = \{ \varepsilon, ab, a^2b^2, \dots, a^{100}b^{100} \}$



↳ متناهی ⟶ منظم

به همین طریق نیز آیا می‌توان گفت زبان $a^n b^n$ $n \geq 0$ نیز منظم است؟ خیر!

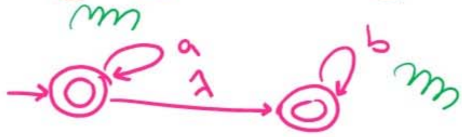


تعداد حالات = ؟

نامتناهی ← FSA متناهی!

* اگر حالات یک ماشین نامتناهی باشد ماشین حاصل معادل ماشین تورینگ است.

$a^n b^n$



$a^* b^* \neq a^n b^n$

③ استفاده از ویژگی‌های بستاری:

زبان‌های منظم بسته هستند ← $\cdot \, , \, * \, , \, + \, , \, R \, , \, \bar{\ } \, , \, \cap \, , \, \cup \, , \, H \, , \, H^{-1} \, , \, - \, , \, / \, , \, \backslash$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = a^* b^* \\ L_2 = \{a^n b^n \mid n \leq 100\} \end{array}\right\} \quad \underbrace{\underbrace{L_1}_{R} \cap \underbrace{L_2}_{R}}_{R} \longrightarrow$$ منظم یا نامنظم

منظم

* از ویژگی‌های بستاری در اثبات نامنظم بودن زبان نیز می‌توان استفاده نمود.

$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

نشان دهید L منظم نیست.

فرض می‌کنیم L منظم است $\xrightarrow{B}$ $\bar{L}$ هم منظم است

$$\underbrace{\underbrace{\bar{L}}_{R} \cap \underbrace{a^* b^*}_{R}}_{R} = \underbrace{a^n b^n}_{\cancel{R}}$$

فرض خلف باطل است L منظم نیست.

$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

$a^2 \quad ab^3 \quad a^2 b^7$

$$\bar{L} = \boxed{\underset{n=m}{a^n b^m} \mid b^* \mid b a^m \mid \ldots} \neq \{a^n b^m \mid n = m\}$$

$\cap \; a^* b^*$

* هر کجا نیاز به حافظه و به خاطر سپردن بودیم زبان نامنظم است.

$a^n b^n \to$ ؟

به خاطر سپاری تعداد a

→ به خاطر سپاری → stack

$W = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

برای زبانهای نامنظم پرکاربرد، در اثبات‌ها عبارتند از: همه‌ی آنها را بدانیم!

$a^n b^m$ — $n=m$, $n>m$, $n<m$, $n \neq m$

ww, ww^R

w: $|w|_a = |w|_b$, $|w|_a \neq |w|_b$

$a^m \mid m \rightarrow$ عجیب‌غریب: $n!$, n^2, $fibo(n)$, m اول

$$a^* a^n b^n b^* \equiv a^* b^*$$

در دل هر $a^* b^*$ ای $a^* a^n b^n b^*$ ای هست!

$$a^5 b^2 \rightsquigarrow \underbrace{a^3}_{a^*} \underbrace{a^2 b^2}_{a^n b^n} \underbrace{b}_{b^*}$$

---

* تمامی ویژگی‌های بستاری یکطرفه هستند

$L_1 \cup L_2$ منظم بود $\not\rightarrow$ L_1 منظم و L_2 منظم

* دو ویژگی بستاری دوطرفه $\overline{L}$ و L^R

$\overline{L} \rightarrow \overline{\overline{L}} = L$

$L^R \rightarrow {L^R}^R = L$

* اگر L_1 و L_2 هر دو نامنظم باشند، جز مکمل و وارون اعمال دیگر عملگرها روی این دو زبان می‌تواند زبان منظم یا زبان نامنظم را نتیجه دهد.

$$\underbrace{a^n b^m}_{\substack{n=m \\ \text{نامنظم}}} \cup \underbrace{a^n b^m}_{\substack{n \neq m \\ \text{نامنظم}}} = \underbrace{a^* b^*}_{\text{منظم}}$$

Not Reg $\cup$, $\cap$, $-$, $/$, $\cdot$, $*$, $+$ Not Reg $\rightsquigarrow$?

$$\underbrace{a^n b^n}_{\text{نامنظم}} \cup \underbrace{b^n a^n}_{\text{نامنظم}} \Rightarrow \text{نامنظم}$$

* اگر $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$ ← L نامشخص است.

L_2: Reg, $\emptyset$ — L: a^*, $a^n b^n$ — L_1: Reg, Σ^*

* اگر $L_2 \subseteq L \subseteq L_1$ ← L نامشخص است!

L_2: Not Reg — L_1: Not Reg

L_2: $\{a^n b^m \mid n=m\}$ N.R — L: $a^* b^*$ منظم

$\{a^n b^m \mid n=m\} \subset \{a^n b^m \mid n \geq m\}$

$\{a^*\}$

* هرگاه بتوان L را به صورت اجتماع تعدادی از زبان نوشت که یکی از آن‌ها معادل Σ^* یا Σ^+ شود آنگاه L خودش معادل Σ^* یا Σ^+ است. و منظم است.

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \dots \cup \underbrace{L_i}_{\Sigma^* \,/\, \Sigma^+} \cup \dots = \Sigma^* \,/\, \Sigma^+$$

* $L_1 \cup L_2 = L_2$

$L_1 \subset L_2$

④ پیکربندی:

به قرار دادن عدد به تعداد بی‌شمار ← پیکربندی

$= \{a^n b^m \mid 0 \le n ,\ m \ge 1\}$

$\{a^0 b^1\} \cup \{a^1 b^1\} \cup \{a^2 b^3\} \cup \dots$

* در روش پیکربندی به جای پارامترهای زبان مقادیری را قرار می‌دهیم که Σ^+ یا Σ^* را تولید کند. اگر تولید کند، چون این پیکربندی با بقیه پیکربندی‌های دیگر U گرفته می‌شود آنگاه زبان معادل Σ^* یا Σ^+ خواهد شد.

$$L_1 = \{ uv \mid u, v \in \{a,b\}^* \}$$

$\left.\begin{matrix} u = \varepsilon \\ v = \Sigma^* \end{matrix}\right\} u.v = \Sigma^*$

$L_1 = \Sigma^*$

$w = \underbrace{ab}_{u}\underbrace{bbaa}_{v}$

$w = \lambda = \underbrace{\lambda}_{u}.\underbrace{\lambda}_{v}$

$$L_2 = \{ uu \mid u \in \{a,b\}^* \}$$

$u = \Sigma^* \Longrightarrow u.u = \underbrace{\Sigma^* \Sigma^*}_{\text{یکی}}$ خیر! ⟶ منظم نیست

$\Sigma^* \rightsquigarrow aba$ ($u\ u$ ✗)

$$L_3 = \{ ww^R v \mid v, w \in \{a,b\}^* \}$$

$\left\{\begin{matrix} w = \varepsilon \\ v = \Sigma^* \end{matrix}\right\}$ $L_3 = \Sigma^*$ منظم

$\underbrace{\lambda}_{w}.\underbrace{\lambda}_{w^R}\underbrace{ababb}_{v}$ $\qquad$ $\underbrace{ab}_{w}\underbrace{ba}_{w^R}\underbrace{bb}_{v}$ $\qquad$ $\underbrace{\lambda}_{w}.\underbrace{\lambda}_{w^R}.\underbrace{\lambda}_{v}$

$$L_4 = \{ uww^R v \mid u, w, v \in \{a,b\}^*,\ |u| \ne |v| \}$$

$\left\{\begin{matrix} W = \lambda \\ u = \lambda \\ v = \Sigma^+ \end{matrix}\right.$ config

$L_4 = \Sigma^+ \rightsquigarrow$ منظم

$abba$ $\quad w = \lambda \quad u = a$

$w^R = \lambda \quad v = abba$

$$L_6 = \{ uww^R v \mid u,w,v \in \{a,b\}^*,\ u = v \}$$

$w=\varepsilon$
$u=\Sigma^*$
$v=\Sigma^*$ ✗
منظم نیست

ab

$$L_{11} = \{ uv \mid u,v \in \{a,b\}^*, |u|_a = |u|_b \}$$

$u=\varepsilon$
$|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$ ✓
$v=\Sigma^*$

$L_{11} = \Sigma^* \longrightarrow$ منظم

(5) لم تزریق زبانهای منظم ⟵ روش تشخیص زبانهای نامنظم

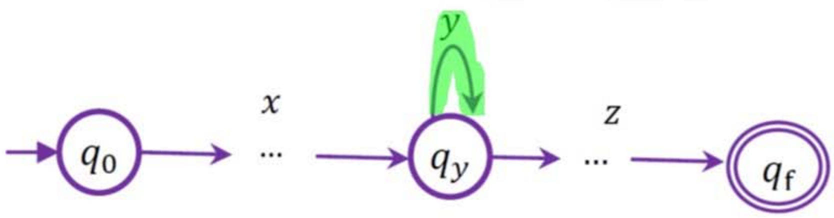
اگر L یک زبان منظم نامتناهی باشد ⇒ $\exists\, n \geq 0$ — p

$\forall\, w \in L, |w| \geq n$

$\exists\, x,y,z \in \Sigma^*, w = xyz\ , |xy| \leq n\ , |y| \geq 1$

$\forall\, i \geq 0, \quad w_i = xy^iz \in \mathrm{L}$ — q

اصل لم تزریق $\exists\forall$



$p \to q$
عکس نقیض
$\sim q \to \sim p$

عکس نقیض لم تزریق

$\forall\, n \geq 0$

$\exists\, w \in L, |w| \geq n$

$\forall\, x,y,z \in \Sigma^*, w = xyz\ , |xy| \leq n\ , |y| \geq 1$

$\exists\, i \geq 0,\ w_i = xy^iz \notin \mathrm{L} \Rightarrow$ L یک زبان منظم نیست

$\sim \forall x\ P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$

$\sim \exists x\ P(x) \equiv \forall x \sim P(x)$

$\forall x\quad x \in Z\quad x \geq 0$
✗ گزاره

مثال 7– نشان دهید زبان $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ منظم نیست.

رشته‌ی انتخابی $w = a^n b^n$ است زیرا دارای طولی $\geq n$ و عضو L است. با توجه به اینکه $w = xyz\,, |xy| \leq n\,, |y| \geq 1$ بنابراین $1 \leq |y| \leq n$ خواهد بود و زیررشته‌های x و y فقط شامل a می‌توانند باشند.

اگر زیررشته x برابر a^m و زیررشته y برابر a^k که $1 \leq k \leq n$ و $(m + k) \leq n$ در نظر گرفته شوند، زیررشته z برابر باقیمانده w یعنی $a^{n-m-k} b^n$ خواهد بود، پس داریم:

$\underbrace{aaa\ldots a}_{n}\ \underbrace{bbb\ldots b}_{n}$

$$w = \overset{x}{a^m}\,\overset{y}{a^k}\,\overset{z}{a^{n-m-k} b^n}$$

و بر اساس تفکیک w، $w_i = a^m {a^k}^i a^{n-\cancel{m}-k} b^n = a^{n+k(i-1)} b^n$

حال کافیست یک i بیابیم که $w_i \notin L$ بنابراین اگر $i = 0$ قرار دهیم، $w_i = a^{n-k} b^n \notin L$ و حکم اثبات شده و زبان L منظم نخواهد بود.

$\boxed{i = 1}$ ← همون w خواهید رسید و عضو L هم هست.

مثال 8– نشان دهید زبان $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ منظم نیست.

رشته‌ی انتخابی $w = a^n b^n b^n a^n$ است زیرا دارای طولی $\geq n$ و عضو L است. با توجه شرایط لم تزریق، $1 \leq |y| \leq n$ و $|xy| \leq n$ خواهد بود و زیررشته‌های x و y فقط شامل a می‌توانند باشند.

اگر زیررشته x برابر a^m و زیررشته y برابر a^k که $1 \leq k \leq n$ و $(m + k) \leq n$ در نظر گرفته شوند، زیررشته z برابر باقیمانده w یعنی $a^{n-m-k} b^n b^n a^n$ خواهد بود، پس داریم:

$$w = \overset{x}{a^m}\,\overset{y}{a^k}\,\overset{z}{a^{n-m-k} b^n b^n a^n}$$

ثابت ←

$i = 1$

و بر اساس تفکیک w، $w_i = a^{\cancel{m}} {a^k}^i a^{n-\cancel{m}-k} b^n b^n a^n = a^{n+k(i-1)} b^n b^n a^n$

حال کافیست یک i بیابیم که $w_i \notin L$ بنابراین اگر $i = 0$ قرار دهیم، $w_i = a^{n-k} b^n b^n a^n \notin L$ و حکم اثبات شده و زبان L منظم نخواهد بود.

مثال 9– نشان دهید زبان $L = \{a^n \mid$ اول باشد $n\}$ منظم نیست.

رشته‌ی انتخابی $w = a^p$ است که p عددی اول بوده و $p \geq n$ بنابراین $|w| \geq n$ و عضو L است. با توجه به اینکه در قضیه $w = xyz\,, |xy| \leq n\,, |y| \geq 1$ بنابراین $1 \leq |y| \leq n$ خواهد بود.

اگر زیررشته x برابر a^m و زیررشته y برابر a^k که $1 \leq k \leq n$ و $(m + k) \leq n$ در نظر گرفته شوند، زیررشته z برابر باقیمانده w یعنی a^{p-m-k} خواهد بود، پس داریم:

$$w = \overset{x}{a^m}\,\overset{y}{a^k}\,\overset{z}{a^{p-m-k}}$$

و بر اساس تفکیک w، $w_i = a^m {a^k}^i a^{p-m-k} = a^{p+k(i-1)}$

حال کافیست یک i بیابیم که $w_i \notin L$. اگر $i = 0$ قرار دهیم: $w_i = a^{p-k} \notin L$، بطور قطع نمی‌توان گفت $p - k$ عددی اول نیست! اما اگر کمی دقت کنیم و i را طوری مقدار بدهیم که توان a دیگر اول نباشد، حکم اثبات خواهد شد. × ← تست کنکور

اگر $i = p + 1$ قرار دهیم، $w_i = a^{p+kp} = a^{p(k+1)} \notin L$ زیرا توان a به صورت حاصلضرب دو عدد در آمده که هیچ یک از دو عدد نیز نمی‌تواند برابر 1 باشد. بنابراین $p(k + 1)$ اول نبوده و حکم اثبات می‌شود و زبان L منظم نخواهد بود.

مثال 10– نشان دهید زبان $L = \{a^{n!} \mid n \geq 0\}$ منظم نیست.

رشته‌ی انتخابی $w = a^{n!}$ است زیرا دارای طولی $\leq n$ و عضو L است. با توجه به اینکه در قضیه $w = xyz\,, |xy| \leq n$ و نیز $|y| \geq 1$ بنابراین $1 \leq |y| \leq n$ خواهد بود.

اگر زیررشته x برابر a^m و زیررشته y برابر a^k که $1 \leq k \leq n$ و $(m+k) \leq n$ در نظر گرفته شوند، زیررشته z برابر باقیمانده w یعنی $a^{n!-m-k}$ خواهد بود، پس داریم:

$$w = \underbrace{a^m}_{x}\underbrace{a^k}_{y}\underbrace{a^{n!-m-k}}_{z}$$

$$w_i = a^{n! + (i-1)k} \xrightarrow{\boxed{i=1}} a^{n!}$$

$$\boxed{\frac{n!}{k}+1} \quad = a^{2n!}$$

و بر اساس تفکیک w، $w_i = a^m {a^k}^i a^{n!-m-k} = a^{n!+k(i-1)}$

حال کافیست یک i بیابیم که $w_i \notin L$. اگر $i = 0$ قرار دهیم: $w_i = a^{n!-k} \notin L$، بطور قطع نمی‌توان گفت $n! - k$ قابل نوشتن به‌صورت فاکتوریل یک عدد نیست! اما اگر کمی دقت کنیم و $i = \frac{n!}{k} + 1$ قرار دهیم، با توجه به اینکه $1 \leq k \leq n$ عدد $\frac{n!}{k}$ لزوماً یک عدد طبیعی است لذا $w_i = a^{n!+k\left(\left(\frac{n!}{k}+1\right)-1\right)} = a^{2n!} \notin L$ زیرا $n! < 2n! < (n+1)!$ برای $2 \leq n$

بنابراین $2n!$، فاکتوریل هیچ عددی نیست، حکم اثبات می‌شود و زبان L منظم نخواهد بود.

⑥ قضیه Myhill - Nerode

$L \subseteq \Sigma^*$
$x, y \in \Sigma^*$ $\Big\} \Rightarrow$ x, y غیرقابل تشخیص نسبت به L یا $x \equiv_L y$ (هم‌ارزی) iff $\forall z \in \Sigma^*$

$xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

یا هردو عضو L یا هیچکدام عضو نباشند.
xz
yz $\}$

$L = a^*b$

$x = ab$
$y = a$

az	abz
× a	× a
✓ b	× b

$L = a^*b$

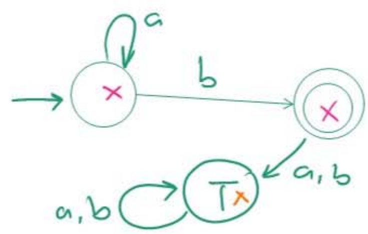
$x = a$
$y = aa$

$xz = az$; $yz = aaz$

$xz = az$	$yz = aaz$
✓ b	✓ b
× a	× a
× 3	× b^3

$a\,,\ aa$ غیرقابل تشخیص

$L = a^*b$



$a\,,\ aa$ inD
$ab\,,\ b$ inD
$abb\,,\ ba$ inD

قضیه Myhill - Nerode : L منظم است اگر و فقط اگر تعداد کلاس‌های هم‌ارزی L متناهی باشند.

← اگر تعداد کلاس‌های هم‌ارزی برابر k باشد، تعداد حالات DFA نیز برابر k است.

L نامنظم است است اگر و فقط اگر یک مجموعه نامتناهی زیرمجموعه Σ^* ای باشد که رشته‌هایش دو به دو قابل تشخیص باشند.

قابل تشخیص: یکی Acc دیگری Rej

نشان دهید زبان زیر نامنظم است

$L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

$S = \{a^n \mid n \geq 0\}$ — نامتناهی ، $\subset \Sigma^*$

$a^k , a^m \in S$

$m \neq k$

$a^k . \underbrace{b a^k b}_{z \in \Sigma^*} \longrightarrow$ Accept

$a^m . \underbrace{b a^k b}_{z \in \Sigma^*} \longrightarrow$ Reject

نامنظم

★★★ ۱۴- می‌گوییم دو رشته‌ی x و y نسبت به زبان L هم‌ارزند، اگر برای هر $z \in \cancel{L}$ Σ^* داشته باشیم $xz \in L \leftrightarrow yz \in L$ اکنون زبان $L = (ab \cup aab)^*$ را در نظر بگیرید، کلاس‌های هم‌ارزی L کدام‌ها هستند؟ (کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر- دولتی ۹۷)

۱) $[b], [a], [\varepsilon]$

۲) $[b], [aab], [ab]$

۳) $[b], [aa], [a], [\varepsilon]$

۴) $[aab], [ab], [a], [\varepsilon]$ X

$L = (ab \cup aab)^*$

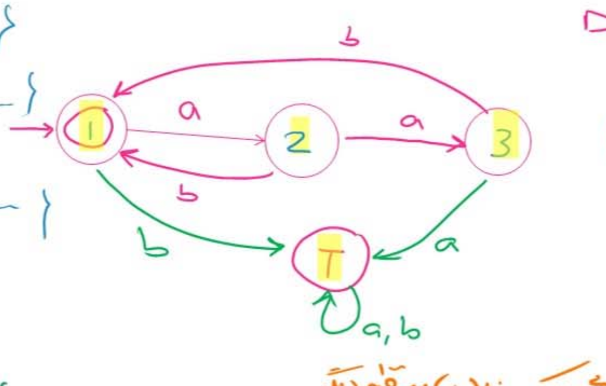
DFA ←

1 → $[\varepsilon] = \{\varepsilon, ab, aab, \ldots\}$

2 → $[a] = \{a, aba, \ldots\}$

3 → $[aa] = \{aa, abaa, \ldots\}$

T → $[b] = \{b, ba, bb, \ldots\}$



$(ab \cup aab)^*$

7) معادل‌سازی با یک زبان منظم دیگر

$L = \{u w w^R v \mid u, v, w \in \Sigma^+ , |u| \geq 10\}$

$\Sigma^{10}\Sigma^*(aa+bb)\Sigma^+$ $\quad u = \Sigma^{10}\Sigma^*$

ارتباط با من

کانال فرهیختگی اندیشه

@kashefism

آیدی من در تلگرام

@MrSpecialOne

کانال تورینگ در تلگرام

@Turingism

گروه رفع اشکال تورینگ در تلگرام

yon.ir/turing

کانال تورینگ در آپارات

aparat.com/turing