فهرست مطالب

عنوان | صفحه

سیگنال‌ها ۱
سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان و خواص آن‌ها ۱۸
سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان پیوسته در زمان ـ انتگرال کانولوشن ۳۷
سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان گسسته در زمان ـ جمع کانولوشن ۴۹
خواص سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان ۵۵
سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی خطی با ضرایب ثابت ۶۳
تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان ـ مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه ۷۷
تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان متناوب (سری فوریه پیوسته در زمان) ۸۰
تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه پیوسته در زمان) ۹۷
فیلتر کردن، نمونه‌برداری و مدولاسیون سیگنال‌های پیوسته در زمان ۱۲۳
تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان ـ مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه ۱۳۷
تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان متناوب (سری فوریه گسسته در زمان) ۱۴۰
تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه گسسته در زمان) ۱۵۷
فیلتر کردن سیگنال‌های گسسته در زمان ۱۷۹
دوگانی در تحلیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان ۱۸۴
پردازش گسسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان ۱۸۷
تبدیل لاپلاس ۱۹۳
تبدیل z ۲۱۹

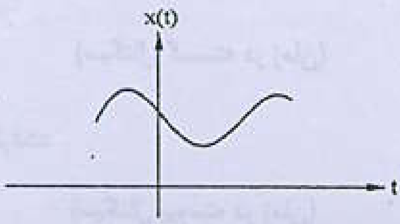
۱ـ سیگنال‌ها

۱ـ۱ـ سیگنال‌ها و خواص آن‌ها

تعریف سیگنال: تابعی از یک یا چند متغیر مست قل است و حاوی اطلاعات می‌باشد.

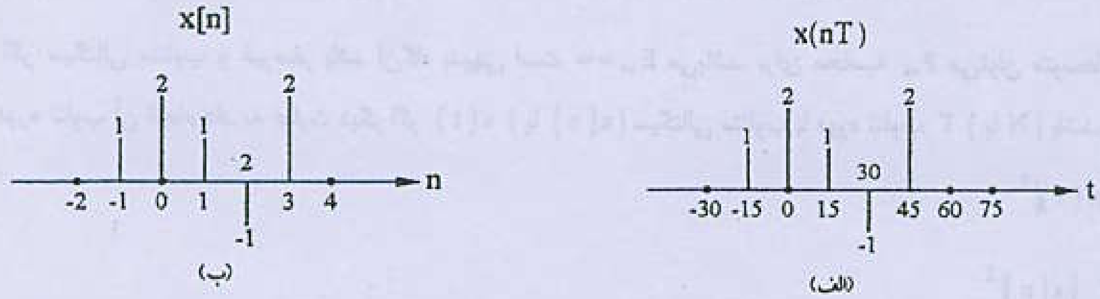
تقسیم‌بندی سیگنال‌ها: برای سیگنال‌ها با توجه به خواص موردنظر می‌توان تقسیم‌بندی‌های مختلفی به شرح زیر انجام داد.

الف ـ سیگنال‌ها را می‌توان به دو دسته (۱) پیوسته در زمان (۲) گسسته در زمان تقسیم‌بندی کرد. در سیگنال‌های پیوسته در زمان، متغیر مستقل پیوسته است و این سیگنال‌ها برای تمام مقادیر پیوسته‌ای که متغیر مستقل می‌تواند به خود بگیرد، تعریف می‌شوند. برای مشخص کردن این دسته از سیگنال‌ها متغیر مستقل را درون پرانتز قرار می‌دهیم. به عنوان مثال سیگنال $x(t)$ در شکل (۱ـ۱) نشان داده شده است:



شکل ۱ـ۱ـ نمونه‌ای از یک سیگنال پیوسته در زمان

سیگنال‌های گسسته در زمان تنها در زمان‌های گسسته تعریف شده‌اند و در نتیجه برای این سیگنال‌ها متغیر مستقل تنها مقادیر گسسته‌ای به خود می‌گیرد. بدیهی است که این سیگنال‌ها با نمونه‌برداری از یک سیگنال پیوسته در زمان بدست می‌آیند. به عنوان مثال در شکل (۱ ـ ۲ ـ الف) سیگنال نمونه‌برداری شده $x(nT)$ یک سیگنال گسسته در زمان است. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود سیگنال فوق دارای نمونه‌هائی با فاصله $T=15$ از یکدیگر است. به منظور آن‌که فاصله نمونه‌برداری در محاسبات سیگنال‌های گسسته در زمان تاثیر نداشته باشد، معمولاً متغیر مستقل آن‌ها را شماره نمونه‌ها انتخاب می‌کنند و شماره نمونه‌ها را درون کروشه قرار می‌دهند تا ماهیت گسسته بودن سیگنال نیز مشخص گردد. در شکل (۱ـ۲ـ ب) سیگنال گسسته $x[n]$ استخراج شده از روی $x(nT)$ شکل (۱ ـ ۲ ـ الف) نشان داده شده است. بدیهی است n فقط می‌تواند مقادیر صحیح داشته باشد.



شکل ۱ـ۲ـ (الف) سیگنال نمونه‌برداری شده از یک سیگنال پیوسته در زمان (ب) سیگنال گسسته در زمان بر حسب شماره نمونه

ب ـ سیگنال‌ها را می‌توان به سه دسته (۱) سیگنال توان (۲) سیگنال انرژی (۳) سیگنال غیرتوان و انرژی تقسیم‌بندی کرد. برای درک بهتر این سه نوع سیگنال ابتدا به تعریف انرژی کل (E_∞) و توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود (P_∞) برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته در زمان می‌پردازیم.

انرژی کل (E_∞) یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$$ (سیگنال پیوسته در زمان)

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2$$ (سیگنال گسسته در زمان)

توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود (P_∞) یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\ dt$$ (سیگنال پیوسته در زمان)

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$ (سیگنال گسسته در زمان)

با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{E_\infty}{2T}$$ (سیگنال پیوسته در زمان)

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{E_\infty}{2N+1}$$ (سیگنال گسسته در زمان)

با توجه به تعاریف فوق سه نوع سیگنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

سیگنال توان سیگنالی است که توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود آن در رابطه $0 < P_\infty < \infty$ صدق کند. بدیهی است برای چنین سیگنالی $E_\infty = \infty$ می‌شود.

سیگنال انرژی سیگنالی است که انرژی کل آن در رابطه $0 < E_\infty < \infty$ صدق کند. بدیهی است برای چنین سیگنالی $P_\infty = 0$ می‌شود.

سیگنال غیر توان و انرژی سیگنالی است که در آن $P_\infty = E_\infty = \infty$ می‌باشد.

در شکل (۱ـ۳) سه نمونه از این سه نوع سیگنال نشان داده شده‌اند.

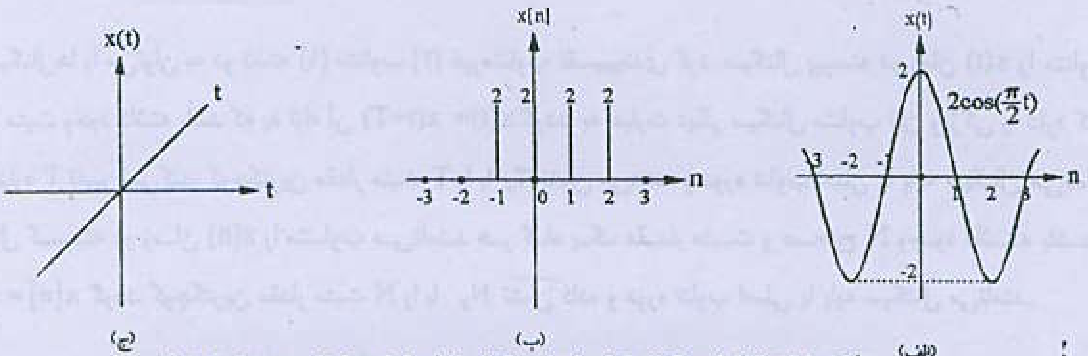
تذکر: با توجه به تعاریف P_∞ و E_∞ می‌توان نتیجه گرفت که سیگنال تواماً توان و انرژی وجود ندارد.

تذکر: اگر سیگنالی متناوب و غیرصفر باشد آن‌گاه بدیهی است $E_\infty = \infty$ می‌باشد. برای محاسبه P_∞ می‌توان متوسط‌گیری را روی یک دوره تناوب آن انجام داد. به عبارت دیگر اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) سیگنالی متناوب با دوره تناوب T (یا N) باشد، آن‌گاه:

$$P_\infty = P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2$$

$$P_\infty = P = \frac{1}{N}\sum_{n:<N>} |x[n]|^2$$

در نتیجه سیگنال متناوب نمی‌تواند یک سیگنال انرژی باشد و سیگنال فوق سیگنال توان یا سیگنال غیرتوان و انرژی است.



شکل ۱-۳- (الف) سیگنال توان (ب) سیگنال انرژی (ج) سیگنال غیر توان و انرژی

تست نمونه - (آزاد ۷۹) قدرت سیگنال زیر چقدر است؟

$$h(t)=\begin{cases}2 & t<-10\\ 4 & -10<t\le 10\\ 6 & 10\le t\end{cases}$$

۱) 20 ۲) 4 ۳) 3 ۴) 18.66

حل :

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{-10}4dt+\int_{-10}^{10}16dt+\int_{10}^{T}36dt\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{4(-10+T)+16(10+10)+36(T-10)}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{40T+K}{2T}=20$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه - در مورد سیگنال‌های $x_1(t)=e^{-t}u(t)$, $x_2(t)=\cos(2t)$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال توان است و انرژی $x_2(t)$ محدود می‌باشد.

۲) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال انرژی است و انرژی $x_2(t)$ بی‌نهایت می‌باشد.

۳) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال توان است و انرژی $x_2(t)$ بی‌نهایت می‌باشد.

۴) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال انرژی است و انرژی $x_2(t)$ محدود می‌باشد.

حل :

$$E_{x_1}=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1(t)|^2\,dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}\,dt=\frac{e^{-2t}}{-2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

$$E_{x_2}=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_2(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2(2t)\,dt=\infty$$

پس $x_1(t)$ سیگنال انرژی و $x_2(t)$ سیگنال توان است.

پس گزینه (۲) صحیح است.

ج ـ سیگنال‌ها را می‌توان به دو دسته (۱) متناوب (۲) غیرمتناوب تقسیم‌بندی کرد. سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ را متناوب می‌نامند هر گاه یک T مثبت وجود داشته باشد که به ازاء آن $x(t)=x(t+T)$ گردد. به عبارت دیگر سیگنال متناوب این ویژگی را دارد که در اثر جابجایی زمانی به اندازه T تغییر نمی‌کند. کوچکترین مقدار مثبت T را با T_0 نشان می‌دهند و دوره تناوب اصلی یا پایه سیگنال می‌نامند.

سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را متناوب می‌نامند هر گاه یک مقدار مثبت و صحیح N وجود داشته باشد که به ازاء آن $x[n]=x[n+N]$ گردد. کوچکترین مقدار مثبت N را با N_0 نشان داده و دوره تناوب اصلی یا پایه سیگنال می‌نامند.

تذکر: برخی از سیگنال‌های متناوب (توابع ثابت) فاقد دوره تناوب اصلی می‌باشند.

تذکر: با توجه به تعریف سیگنال متناوب گسسته در زمان دقت شود که دوره تناوب این سیگنال‌ها نمی‌تواند مقادیر غیر صحیح باشد.

تذکر: بدیهی است سیگنالی که نتوان برای آن دوره تناوب T (یا N) بدست آورد را سیگنال غیرمتناوب می‌نامند.

مثال: سیگنال $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-n)}$ متناوب است یا غیرمتناوب؟ در صورت متناوب بودن دوره تناوب اصلی آن را تعیین کنید.

حل: برای تعیین متناوب یا نامتناوب بودن سیگنال فوق باید درستی رابطه $x(t+T)=x(t)$ را بررسی کنیم:

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2(t+T)-n)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t+2T-n)}$$

با فرض صحیح بودن مقدار $2T$ می‌توان تغییر متغیر $m=n-2T$ داد و در نتیجه:

$$x(t+T)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-m)}=x(t)$$

بنابراین $x(t)$ به ازاء کلیه مقادیر T به گونه‌ای که $2T$ عدد صحیح باشد متناوب است و کوچکترین مقدار مثبت T (دوره تناوب اصلی $x(t)$) برابر $T_0=\frac{1}{2}$ است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۵) توان (P) و انرژی (E) سیگنال $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب عبارتند از:

۱) $E=+\infty\ ,\ P=\frac{41}{18}$

۲) $E=+\infty\ ,\ P=0$

۳) $E=+\infty\ ,\ P=+\infty$

۴) $E=\frac{64}{9}\ ,\ P=0$

حل: با روشی مشابه مثال قبل می‌توان نشان داد $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی $N_0=2$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) صحیح نیستند. زیرا $E=+\infty$ و $P\neq 0$ می‌باشند. از طرفی نزولی بودن سری تعریف کننده $x[n]$، محدود بودن نمونه‌های این سیگنال را تضمین می‌کند. بنابراین $P<+\infty$ و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

اگر بخواهیم P را محاسبه نمائیم، با توجه به آن‌که $N_0=2$ است داریم:

$$P=\frac{1}{2}\left(x^2[0]+x^2[1]\right)$$

$$x[0]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|-2m|}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-2|m|}=1+2\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-2m}=1+2\left(2^{-2}+2^{-4}+\ldots\right)=1+2\times\frac{2^{-2}}{1-2^{-2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$x[1]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|1-2m|}=2\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-(2m-1)}=2\left(2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}+\ldots\right)=2\times\frac{2^{-1}}{1-2^{-2}}=\frac{4}{3}$$

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{9}+\frac{16}{9}\right)=\frac{41}{18}$$

د ـ سیگنال‌ها را می‌توان به چهار دسته (۱) زوج (۲) فرد (۳) هم زوج هم فرد (۴) نه زوج نه فرد تقسیم‌بندی کرد.

سیگنال $x(t)$ (یا $x[n]$) را زوج می‌نامند هر گاه $x(-t)=x(t)$ (یا $x[n]=x[-n]$) باشد.

تذکر: از تعریف یک سیگنال زوج نتیجه می‌شود که نمودار آن نسبت به محور عمودی متقارن است. (مانند شکل (۱ ـ ۴ ـ الف))

سیگنال $x(t)$ (یا $x[n]$) را فرد می‌نامند هر گاه $x(-t)=-x(t)$ (یا $x[-n]=-x[n]$) باشد.

تذکر: از تعریف یک سیگنال فرد نتیجه می‌شود که نمودار آن نسبت به مبدا مختصات تقارن دارد. همچنین $x(0)=0$ (یا $x[0]=0$) می‌باشد. (مانند شکل (۱ـ۴ـ ب))

سیگنال هم زوج هم فرد به سیگنالی اطلاق می‌شود که هر دو شرط مربوط به سیگنال‌های زوج و فرد را برآورده سازد. به عبارت دیگر نمودار این سیگنال‌ها تواماً نسبت به مبدأ مختصات و محور عمودی تقارن دارد.

تذکر: از نظر تحلیلی تنها سیگنال هم زوج هم فردی که ابهام ندارد، سیگنال $x(t)=0$ (یا $x[n]=0$) است. به‌عنوان مثال سیگنال نشان داده شده در شکل (۱ ـ ۴ ـ ج) یک سیگنال هم زوج هم فرد با رابطه $|x(t)|=|t|$ است. ملاحظه می‌کنید که غیر از $t=0$ در بقیه نقاط در انتخاب مقدار $x(t)$ دچار ابهام می‌شویم. این مشکل در مورد سیگنال‌های گسسته در زمان نیز وجود دارد به گونه‌ای که برای هر نمونه دو مقدار قرینه وجود خواهد داشت! لذا از نظر طبقه‌بندی سیگنال‌ها و نقش آن‌ها در تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیگنال‌های هم زوج هم فرد نقش مهمی ندارند.

سیگنال نه زوج ، نه فرد سیگنالی است که هیچ کدام از شروط زوج یا فرد بودن را برآورده نسازد. (مانند شکل (۱ـ۴ـ د))

تذکر: اگر سیگنالی نه زوج نه فرد باشد آن را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال ، یکی فرد و دیگری زوج نوشت. اگر سیگنال فرد را با $x_o(t)=\mathrm{odd}\{x(t)\}$ (یا $x_o[n]$) و سیگنال زوج را با $x_e(t)=\mathrm{ev}\{x(t)\}$ (یا $x_e[n]$) نشان دهیم، داریم:

$$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2} \qquad x_o(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

روابط فوق برای سیگنال‌های گسسته در زمان نیز صادق است.

تذکر: اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) فرد باشد آن‌گاه داریم:

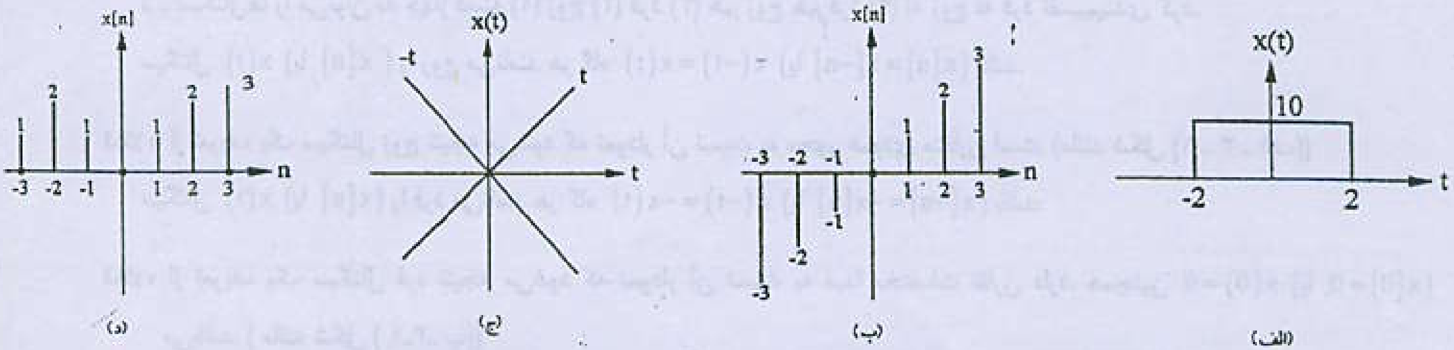
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt=0 \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]=0\right)$$

تذکر: اگر دو سیگنال هر دو زوج یا فرد باشند حاصل‌ضرب آن‌ها در یکدیگر سیگنالی زوج و اگر یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد حاصل ضرب آن‌ها در یکدیگر سیگنالی فرد است.

تذکر: اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) سیگنالی نه زوج ، نه فرد باشد آنگاه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$



شکل ۱-۴- (الف) سیگنال زوج (ب) سیگنال فرد (ج) سیگنال هم زوج، هم فرد (د) سیگنال نه زوج ، نه فرد

۱-۲- تبدیلات متغیر مستقل

یکی از مفاهیم بنیادی تحلیل سیگنال و سیستم، تبدیل سیگنال است. در این بخش به تبدیلات ساده متغیر مستقل می‌پردازیم. در این تبدیلات، متغیر مستقل سیگنال (یعنی محور زمان) تغییر کرده و سیگنال در جهت عمودی تغییری نخواهد داشت.

الف - وارونگی محور زمان: اگر در سیگنال پیوسته در زمان t به t- و در سیگنال گسسته در زمان n به n- تبدیل شود، نمودار سیگنال فوق نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود.

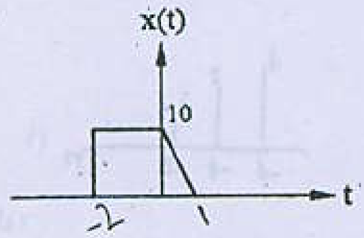
ب - جابجائی زمانی: با تبدیل t به $t-t_0$ در سیگنال پیوسته در زمان و n به $n-n_0$ (n_0 عدد صحیح) در سیگنال گسسته در زمان، سیگنال روی محور زمان جابجا می‌شود. اگر $t_0 > 0$ (یا $n_0 > 0$) جابجایی به سمت راست و در صورتی که $t_0 < 0$ (یا $n_0 < 0$) باشد، جابجائی به سمت چپ خواهد بود.

ج - فشردن یا گستردن: با تبدیل t به at در سیگنال پیوسته در زمان و n به an در سیگنال گسسته در زمان (با فرض $a > 0$) سیگنال در جهت محور زمان فشرده یا گسترده می‌شود. اگر $a>1$ باشد سیگنال فشرده و اگر $0<a<1$ باشد سیگنال گسترده می‌شود.

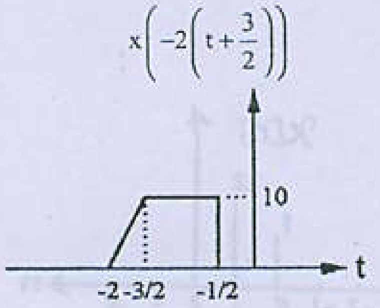
تذکر: در هنگامی که سیگنال گسسته در زمان باشد، با فشردن آن تعدادی از نمونه‌ها حذف گردیده و با گستردن آن تعدادی صفر اضافه می‌شود.

تذکر: در برخی مواقع تبدیل متغیر مستقل به صورت t به $\alpha t+\beta$ (یا n به $\alpha n+\beta$) می‌باشد که α, β ثابت‌های حقیقی می‌باشند. در این وضعیت هر سه نوع تبدیل متغیر مستقل را به صورت توام داریم.

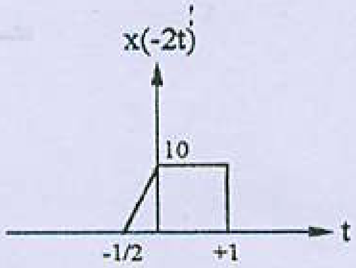
مثال : فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته در زمان مطابق شکل زیر باشد. $x(-2t-3)$ را رسم کنید.



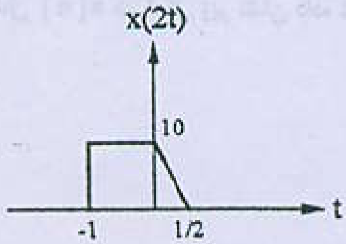
حل : به دو طریق نشان داده شده در شکل‌های زیر می‌توان این مثال را حل کرد:



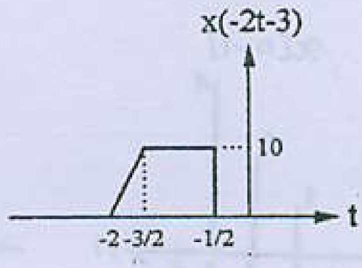
(شیفت به چپ)



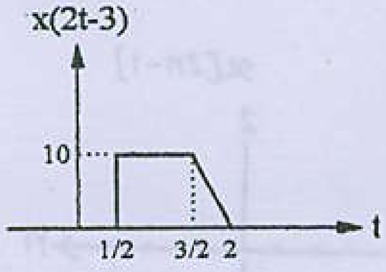
(معکوس کردن)



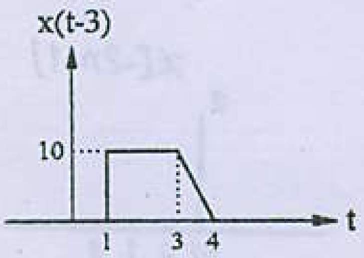
(فشردن)



(معکوس کردن)

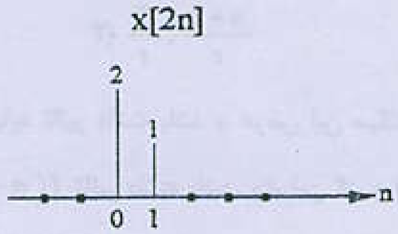


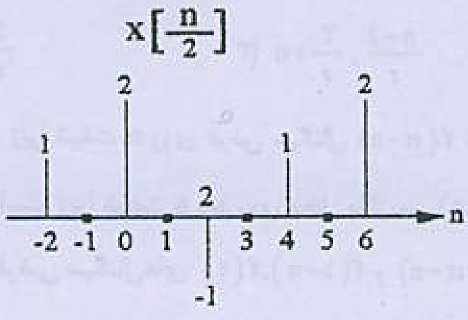
(فشردن)

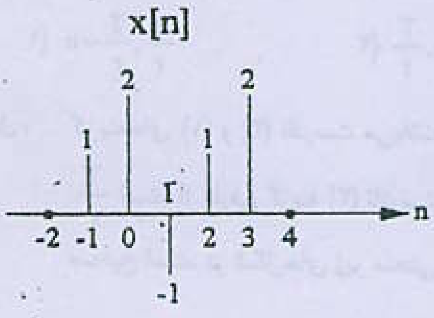


(شیفت به راست)

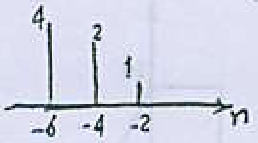
مثال : در شکل‌های زیر چگونگی فشرده شدن و گسترده شدن یک سیگنال گسسته در زمان در این شکل‌ها نشان داده شده‌اند.

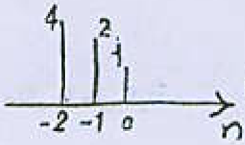


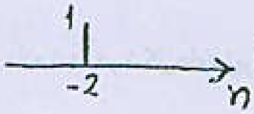


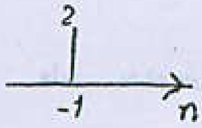


تست نمونه ـ اگر $x[n]=2^n\left(u[n]-u[n-3]\right)$ باشد، آنگاه شکل $x[-2n-1]$ کدام است؟

۱)


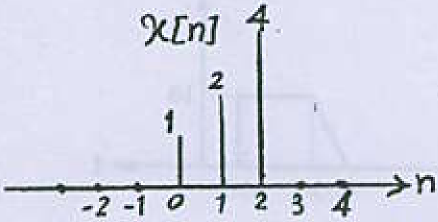
۲)


۳)


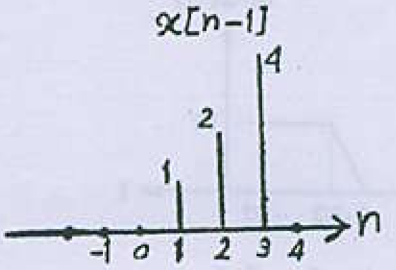
۴)


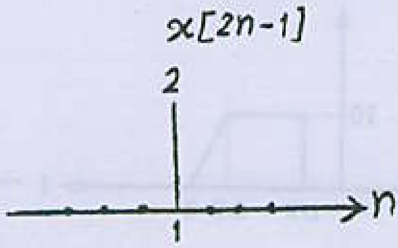
حل :

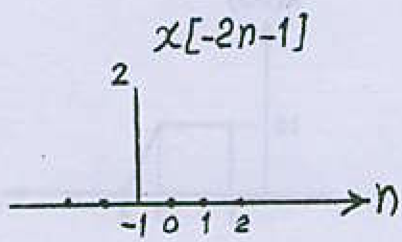
سیگنال $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است:



سیگنال فوق را ابتدا شیفت داده تا $x[n-1]$، سپس فشرده کرده تا $x[2n-1]$ و در نهایت معکوس کرده تا $x[-2n-1]$ به‌دست می‌آید. این شکل‌ها در زیر نشان داده شده‌اند:





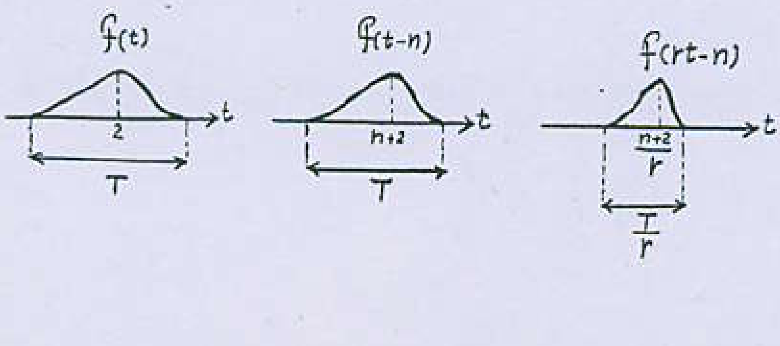


پس گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۵) اگر $f(t)$ سیگنالی به عرض T و ماکزیممی واقع بر $t=2$ باشد، در آن صورت عرض و محل ماکزیمم $f(rt-n)\ (r>0)$ عبارتند از:

۱) $\frac{n}{r}, \frac{T}{r}-n$ ۲) $\frac{2}{r}, \frac{T}{r}$ ۳) $\frac{n-2}{r}, \frac{T}{r}+n$ ۴) $\frac{n+2}{r}, \frac{T}{r}$

حل : گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. زیرا شیفت n روی عرض سیگنال $f(rt-n)$ نباید تاثیر داشته باشد و عرض این سیگنال $\frac{T}{r}$ است. از طرفی گزینه (۲) نادرست است. زیرا شیفت n باید روی محل ماکزیمم $f(rt-n)$ تاثیر داشته باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. در شکل‌های زیر منحنی فرضی سیگنال‌های $f(t)$، $f(t-n)$ و $f(rt-n)$ نشان داده شده‌اند:



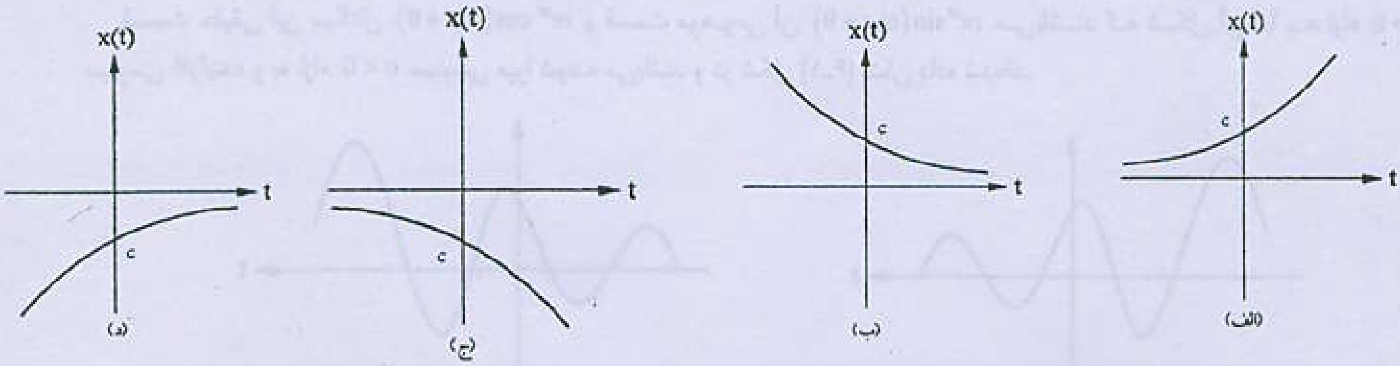
۱-۳- برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

در این بخش برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان معرفی می‌شوند. این سیگنال‌ها علاوه بر آن‌که در طبیعت وجود دارند، برای ساخت سایر سیگنال‌ها نیز استفاده می‌شوند.

الف ـ سیگنال‌های نمائی پیوسته در زمان: شکل کلی این دسته از سیگنال‌ها $x(t)=ce^{at}$ است که با توجه به وضعیت c و a سه نوع از این سیگنال‌ها معرفی می‌گردند.

الف ـ ۱ـ سیگنال نمائی حقیقی: اگر c و a حقیقی باشند آن‌گاه سیگنال حاصل را سیگنال نمائی حقیقی پیوسته در زمان می‌نامند.

در شکل (۱ـ۵) نمودار این سیگنال به ازاء مقادیر مثبت و منفی c و a رسم شده است.



شکل ۱ـ ۵ ـ نمودار سیگنال $x(t)=ce^{at}$ به ازای (الف) $a>0$ و $c>0$ (ب) $a<0$ و $c>0$ (ج) $a>0$ و $c<0$ (د) $a<0$ و $c<0$

الف ـ ۲ ـ سیگنال متناوب نمائی مختلط و سینوسی: اگر c حقیقی و a موهومی باشند، دسته مهمی از سیگنال‌های نمائی بدست می‌آیند. با فرض $c=1$ و $a=j\omega_0$ داریم:

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Re}\{x(t)\}=\cos(\omega_0 t) \qquad , \qquad \operatorname{Im}\{x(t)\}=\sin(\omega_0 t)$$

ملاحظه کنید قسمت حقیقی و موهومی سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ سیگنال‌های $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ می‌باشند.

خواص مهم سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ عبارتند از:

۱) این سیگنال به ازاء کلیه مقادیر ω_0 متناوب و دوره تناوب آن $T=\dfrac{2k\pi}{\omega_0}$ است.

۲) دوره تناوب اصلی این سیگنال به ازاء $k=1$ یا $k=-1$ بدست آمده و $T_0=\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ است.

۳) با افزایش ω_0 مقدار T_0 کوچکتر شده و در نتیجه سرعت تغییرات این سیگنال افزایش می‌یابد.

۴) سیگنال فوق یک سیگنال توان با $P_\infty=1$ است. البته توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود آن با توان متوسط روی یک دوره تناوب برابر است.

۵) از روی سیگنال فوق هارمونیک‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t} \quad k=0,\pm1,\pm2,....$$

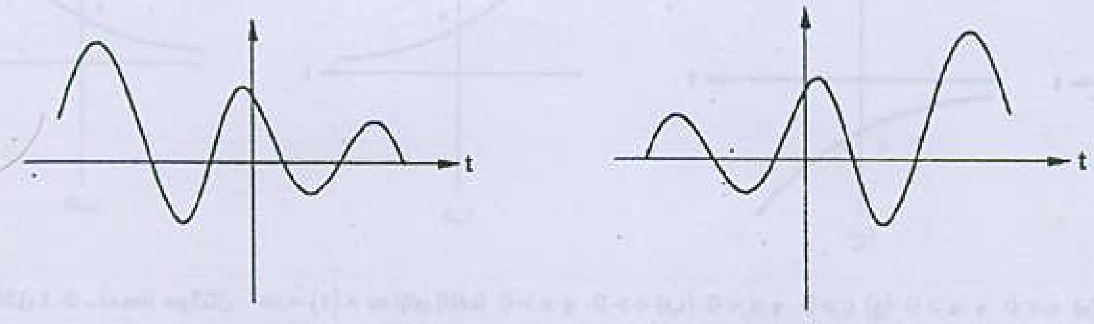
$\phi_1(t)=e^{j\omega_0 t}$ را هارمونیک اصلی (پایه)، ω_0 را فرکانس اصلی (پایه) و $T_0=\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ را دوره تناوب اصلی (پایه) می‌نامند. بدیهی است تعداد هارمونیک‌های پیوسته در زمان بی‌نهایت می‌باشد.

نتیجه ـ سیگنال‌های $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ نیز به ازاء کلیه مقادیر ω_0 با دوره تناوب $T=\frac{2k\pi}{\omega_0}$ و دوره تناوب اصلی $T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ متناوب می‌باشند. همچنین برای این دو سیگنال $P_\infty=\frac{1}{2}$ است. هارمونیک‌ها نیز برای این دو سیگنال به صورت $\cos(k\omega_0 t)$ و $\sin(k\omega_0 t)$ تعریف می‌گردند.

الف ـ ۳ـ سیگنال نمائی مختلط : اگر c و a هر دو مختلط باشند، آن‌گاه سیگنال نمائی مختلط بدست می‌آید. با فرض $c=re^{j\theta}$ و $a=\sigma+j\omega_0$ داریم:

$$x(t)=re^{j\theta}\cdot e^{(\sigma+j\omega_0)t}=re^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

قسمت حقیقی این سیگنال $re^{\sigma t}\cos(\omega_0 t+\theta)$ و قسمت موهومی آن $re^{\sigma t}\sin(\omega_0 t+\theta)$ می‌باشند که شکل آن‌ها به ازاء $\sigma>0$ سینوسی افزاینده و به ازاء $\sigma<0$ سینوسی میرا شونده می‌باشند و در شکل (۱ـ۶) نشان داده شده‌اند.



(ب) (الف)

شکل ۱ـ۶ـ (الف) سیگنال سینوسی افزاینده (ب) سیگنال سینوسی میرا شونده

ب ـ توابع پله و ضربه واحد پیوسته در زمان:

تابع پله واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

تابع ضربه واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

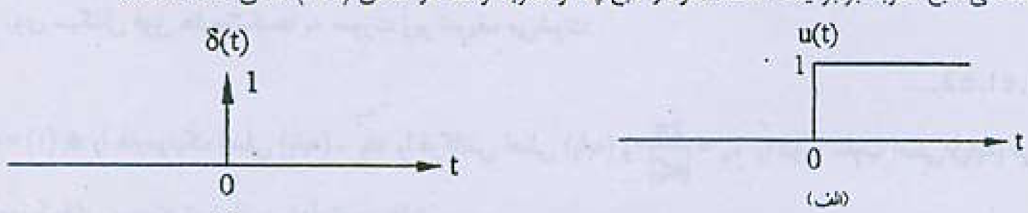
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{ویژه} & t=0\end{cases}$$

ویژگی به گونه‌ای است که

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=\int_{-0}^{+0}\delta(t)\,dt=1$$

یعنی سطح زیر منحنی تابع ضربه برابر یک است. نمودار تابع پله و ضربه واحد در شکل (۱ـ۷) نشان داده شده‌اند.



(الف) (ب)

شکل ۱ـ۷ـ (الف) نمودار تابع پله واحد (ب) نمودار تابع ضربه واحد.

تذکر: تابع پله در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(f(t))=\begin{cases}1 & f(t)>0\\ 0 & f(t)<0\end{cases}$$

به عبارت دیگر برای ترسیم نمودار این تابع باید یک فرآیند تعیین علامت انجام شود.

تذکر: تابع $\delta(f(t))$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(f(t))\begin{cases}0 & ,f(t)\neq 0\\ \text{ویژه} & ;f(t)=0\end{cases}$$

ویژگی به گونه‌ای است که سطح زیر منحنی $\delta(f(t))$ برابر یک باشد.

برای ترسیم این تابع باید ابتدا نقاطی که به ازای آن‌ها $f(t)=0$ می‌شود را تعیین کرد. اگر این نقاط را $t=t_1,t_2,\dots,t_n$ بنامیم داریم:

$$f(t)=k(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_N)$$

آن‌گاه با توجه به رابطه $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\delta(f(t))=\frac{1}{|k|}\left\{\frac{1}{|t_1-t_2|\dots|t_1-t_N|}\delta(t-t_1)+\dots+\frac{1}{|t_N-t_1|\dots|t_N-t_{N-1}|}\delta(t-t_N)\right\}$$

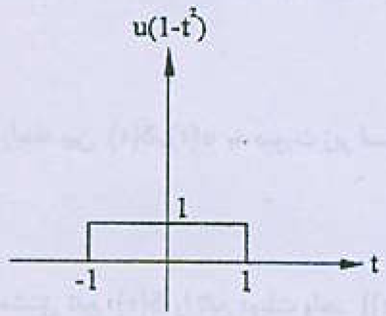
مثال: توابع $u(1-t^2)$ و $\delta(1-t^2)$ را رسم کنید.

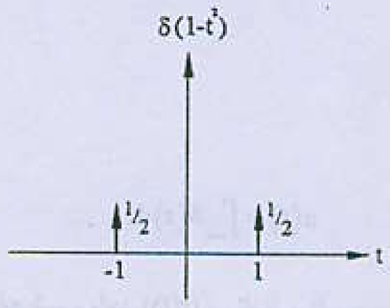
حل:

$$u(1-t^2)=\begin{cases}0 & 1-t^2<0\\ 1 & 1-t^2>0\end{cases}\rightarrow u(1-t^2)=\begin{cases}0 & t>1,t<-1\\ 1 & -1<t<1\end{cases}$$

$$\delta(1-t^2)=\delta((1-t)(1+t))=\frac{1}{2}\delta(1-t)+\frac{1}{2}\delta(1+t)$$

در شکل‌های زیر نمودار این دو تابع نشان داده شده‌اند:





تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) اگر $\delta(x)$ تابع ضربه واحد باشد و $x = 8t - t^3$ در نظر گرفته شود، حاصل انتگرال زیر چقدر خواهد بود؟

$$A = \int_{-1}^{+\infty} \delta(x)\, dt$$

۱) $A = \frac{3}{16}$ ۲) $A = \frac{1}{4}$ ۳) $A = \frac{-3}{16}$ ۴) $A = \frac{-1}{4}$

حل :

$$\delta(x) = \delta(8t - t^3) = \delta\left(t(\sqrt{8} - t)(\sqrt{8} + t)\right) = \frac{1}{\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}}\delta(\sqrt{8} + t)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}}\delta(\sqrt{8} - t) + \frac{1}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}}\delta(t) = \frac{1}{16}\delta(\sqrt{8} + t) + \frac{1}{16}\delta(\sqrt{8} - t) + \frac{1}{8}\delta(t)$$

بنابراین داریم:

$$A = \int_{-1}^{+\infty} \delta(x)\, dt = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

پس گزینه (۱) صحیح است. دقت کنید حذف گزینه‌های (۳) و (۴) از جواب‌های صحیح از ابتدا مشخص بود. زیرا مقادیر منفی می‌باشند.

تذکر : یکی از خواص مهم تابع ضربه خاصیت غربالی آن است که به صورت زیر است:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\, dt = x(0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

تذکر : قضیه کلی‌تر از خاصیت غربالی تابع ضربه، رابطه زیر است. در رابطه زیر $\delta^{(n)}(t - t_0)$ مشتق مرتبه nام $\delta(t - t_0)$ است:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta^{(n)}(t - t_0)\, dt = \begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t)\Big|_{t = t_0} & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & t_0 < t_1 \quad t_0 > t_2 \end{cases}$$

بدیهی است اگر $n = 0$ ، $t_1 = -\infty$ و $t_2 = \infty$ باشند، خاصیت غربالی تابع ضربه را خواهیم داشت.

تذکر : با توجه به تعریف تابع ضربه واحد می‌توان رابطه زیر را به‌دست آورد: (a یک اسکالر حقیقی است)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

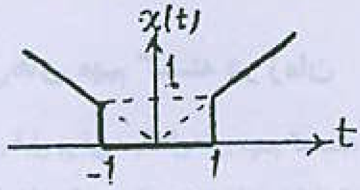
تذکر : رابطه بین $u(t), \delta(t)$ به صورت زیر است:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

تذکر : مشتق تابع $\delta(t)$ را تابع دوبلت واحد $(\delta'(t))$ و انتگرال تابع $u(t)$ را تابع شیب واحد $(r(t))$ می‌نامند و داریم:

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \qquad r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) کدام یک از دو ضابطه زیر برای سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل روبه‌رو صحیح است؟



$$x(t)=u(t^2-1)+r(t^2-1) \quad (۱)$$

$$x(t)=u(t^2-1)+r(t-1)+r(-t-1) \quad (۲)$$

۱) هر دو ضابطه (۱) و (۲) درست است. ۲) فقط ضابطه (۱) درست است.

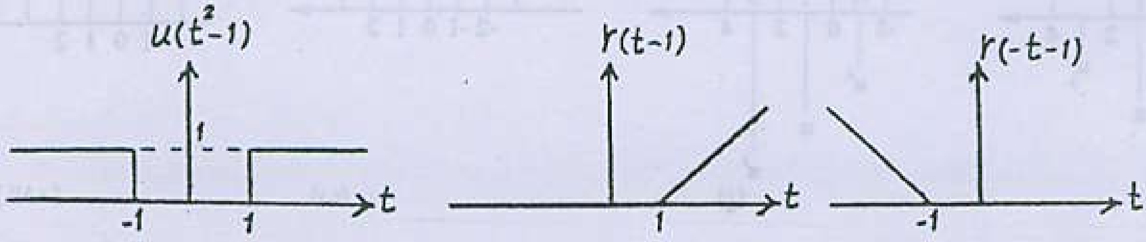
۳) فقط ضابطه (۲) درست است. ۴) هیچکدام از دو ضابطه درست نیستند.

حل :

با توجه به تعریف تابع شیب واحد نتیجه می‌گیریم:

$$r(t^2-1)=\begin{cases} t^2-1 & t^2-1>0 \\ 0 & t^2-1<0 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه (۱) صحیح نیست. اما ضابطه (۲) صحیح است. شکل‌های $u(t^2-1)$, $r(t-1)$ و $r(-t-1)$ در زیر رسم شده‌اند:



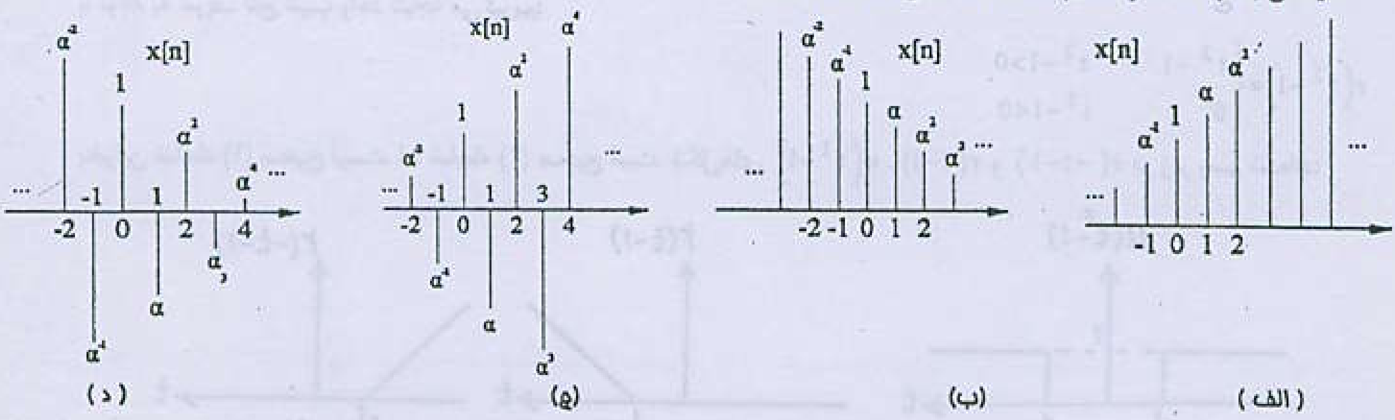
بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱-۴- برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

در این بخش مشابه بخش قبل برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان بررسی خواهند شد.

الف ـ سیگنال‌های نمائی گسسته در زمان: شکل کلی این دسته از سیگنال‌ها $x[n]=c\alpha^n$ است. با توجه به مقادیر c و α سه نوع از این سیگنال‌ها معرفی می‌گردند.

الف ـ ۱ـ سیگنال نمائی حقیقی: اگر c و α حقیقی باشند، سیگنال حاصل یک سیگنال نمائی حقیقی است. در شکل(۱ـ۸) این سیگنال به ازاء $c=1$ و مقادیر مختلف α نشان داده شده است.



شکل ۱ـ۸ـ سیگنال نمائی حقیقی به ازای (الف) $\alpha>1$ (ب) $0<\alpha<1$ (ه) $\alpha<-1$ (د) $-1<\alpha<0$

الف ـ ۲ـ سیگنال نمائی مختلط و سینوسی: اگر c حقیقی و $\alpha=e^{j\omega_0}$ باشند، این سیگنال بدست می‌آید. با فرض $c=1$ داریم:

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}\rightarrow \mathrm{Re}\{x[n]\}=\cos(\omega_0 n)\quad,\quad \mathrm{Im}\{x[n]\}=\sin(\omega_0 n)$$

بنابراین قسمت‌های حقیقی و موهومی این سیگنال به ترتیب $\cos(\omega_0 n)$ و $\sin(\omega_0 n)$ می‌باشند.

خواص مهم سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ عبارتند از:

۱) این سیگنال به ازای کلیه مقادیر ω_0 متناوب نیست و فقط هنگامی متناوب است که ω_0 مضرب گویائی از π باشد. دلیل آن است که دوره تناوب این سیگنال یعنی $N=\dfrac{2k\pi}{\omega_0}$ باید یک عدد صحیح باشد.

۲) دوره تناوب اصلی این سیگنال لزوما به ازای $k=1$ بدست نمی‌آید. بلکه هر k که اولین عدد مثبت برای N را بدهد مشخص کننده دوره تناوب اصلی سیگنال است.

۳)با افزایش ω_0 لزوماً سرعت تغییرات این سیگنال زیاد نمی‌شود. بلکه افزایش یا کاهش سرعت این سیگنال مطابق جدول زیر متناوباً در بازه‌های 2π تکرار می‌شود.

ω_0 (مضرب گویا از π)	0	π	2π	3π	4π	....
سرعت تغییرات $e^{j\omega_0 n}$	□	□	□	□	□	....

۴) سیگنال فوق نیز یک سیگنال توان با $P_\infty = P = 1$ است.

۵) از روی این سیگنال نیز می‌توان هارمونیک‌های گسسته در زمان را به صورت زیر تعریف کرد:

$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n}$ $\quad n = 0,1,2,\dots,N_0-1$ (یا هر N_0 عدد صحیح پشت سر هم)

$\phi_1[n] = e^{j\omega_0 n}$ را هارمونیک اصلی (پایه)، ω_0 را فرکانس اصلی (پایه) (با شرط ω_0 مضرب گویا از π) و $N_0 = \frac{2k\pi}{|\omega_0|}$ (به ازاء اولین عدد صحیح مثبت) را دوره تناوب اصلی (پایه) می‌نامند.

دقت کنید تعداد هارمونیک‌های گسسته در زمان N_0 است.

مثال : ـ سیگنال $\cos(2n)$ متناوب نیست زیرا $\omega_0 = 2$ و مضرب گویائی از π نیست. اما سیگنال $\sin(5\pi n)$ متناوب بوده و دوره تناوب آن برابر است با:

$N = \frac{2k\pi}{5\pi} = \frac{2k}{5} = \xrightarrow{k=5} N_0 = 2$ دوره تناوب اصلی

تست نمونه ـ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) سیگنال $3\cos(6\pi t + 30^\circ)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{1}{3}$ است.

۲) سیگنال $\sin[3\pi n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی 6 است.

۳) سیگنال $e^{j\frac{n}{2}}$ یک سیگنال غیرمتناوب است.

۴) سیگنال $\cos\left[\frac{2\pi n}{7}\right]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی 7 است.

حل :

برای سیگنال $3\cos(6\pi t + 30^\circ)$ داریم:

$T = \frac{2k\pi}{6\pi} = \frac{k}{3} \xrightarrow{k=1} T_0 = \frac{1}{3}$

برای سیگنال $\sin[3\pi n]$ داریم:

$N = \frac{2k\pi}{3\pi} = \frac{2k}{3} \xrightarrow{k=3} N_0 = 2$

برای سیگنال $e^{j\frac{n}{2}}$ داریم:

$\omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ سیگنال فوق متناوب نیست.

برای سیگنال $\cos\left[\frac{2\pi n}{7}\right]$ داریم:

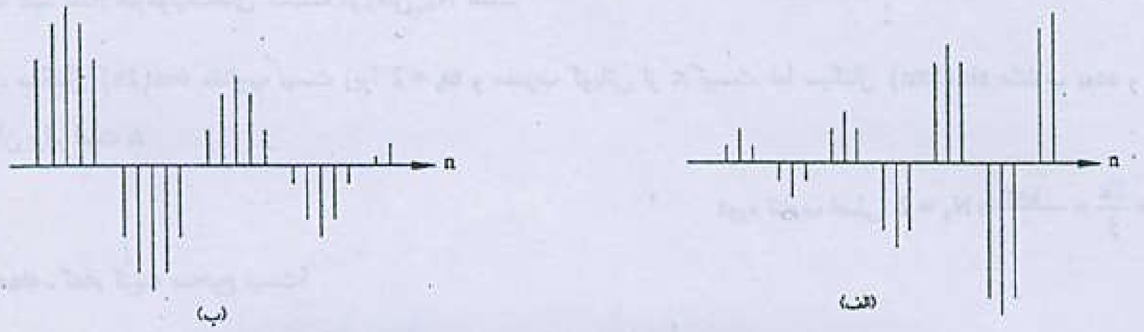
$N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7k \xrightarrow{k=1} N_0 = 7$

پس گزینه (۲) تنها گزینه نادرست است.

الف ـ ۳ ـ سیگنال نمائی مختلط کلی: اگر c و α هر دو مختلط باشند. آن‌گاه این سیگنال بدست می‌آید. با فرض $c = re^{j\theta}$ و $\alpha = ke^{j\omega_0}$ داریم:

$$x[n] = re^{j\theta}.k^n e^{j\omega_0 n} = rk^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

قسمت حقیقی این سیگنال $rk^n\cos(\omega_0 n+\theta)$ و قسمت موهومی آن $rk^n\sin(\omega_0 n+\theta)$ است که به ازای $|k|>1$ سینوسی افزاینده و به ازاء $|k|<1$ سینوسی میرا شونده می‌باشند و در شکل (۱ـ۹) نشان داده شده‌اند:



شکل ۱ـ۹ (الف) سیگنال سینوسی افزاینده (ب) سیگنال سینوسی میرا شونده

ب ـ توابع پله و ضربه گسسته در زمان

تابع پله واحد گسسته در زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

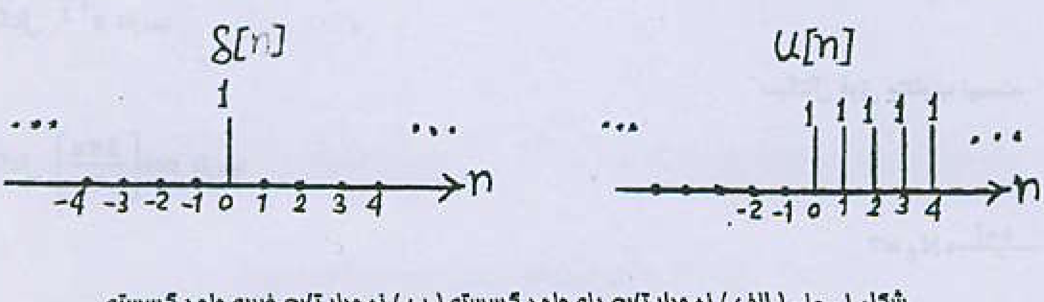
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

تابع ضربه واحد گسسته در زمان (یا تابع نمونه واحد) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

بدیهی است که برای تابع ضربه واحد داریم $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$

نمودار تابع پله واحد و ضربه واحد گسسته در زمان در شکل (۱ ـ ۱۰) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ ـ ۱۰ ـ (الف) نمودار تابع پله واحد گسسته (ب) نمودار تابع ضربه واحد گسسته

تذکر: خاصیت غربالی تابع ضربه گسسته در زمان با روابط زیر تعریف می‌گردد:

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n]=x[0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$$

تذکر: رابطه بین $\delta[n]$ و $u[n]$ به صورت زیر است:

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$

تذکر: با توجه به تعریف تابع ضربه واحد گسسته در زمان می‌توان نتیجه گرفت: (a اسکالر حقیقی است)

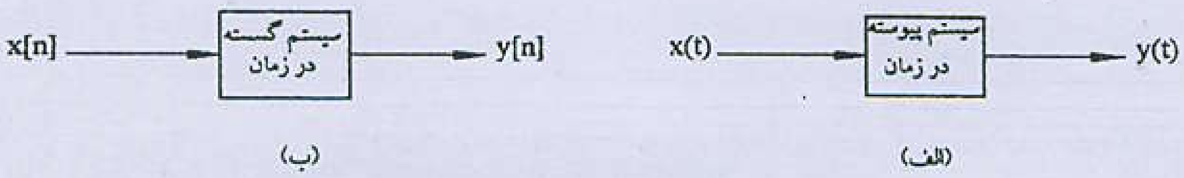
$$\delta[an]=\delta[n]$$

۲ـ سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان و خواص آن‌ها

۲ـ۱ـ سیستم‌ها، تقسیم‌بندی و اتصالات آن‌ها

تعریف سیستم: سیستم مجموعه‌ای سازمان یافته از واحدهای مختلف (زیر سیستم‌ها) می‌باشد که با اثر متقابل و برای دستیابی به اهداف خاص طراحی می‌شود.

تقسیم‌بندی سیستم‌ها: سیستم‌ها در اولین تقسیم‌بندی به دو دسته (۱) سیستم پیوسته در زمان و (۲) سیستم گسسته در زمان تقسیم می‌شوند. سیستم پیوسته در زمان سیستمی است که در آن سیگنال‌های ورودی پیوسته در زمان به سیگنال‌های خروجی پیوسته در زمان تبدیل می‌شوند. در صورتی که سیستم گسسته در زمان سیستمی است که سیگنال‌های ورودی گسسته در زمان را به سیگنال‌های خروجی گسسته در زمان تبدیل می‌کند. در شکل (۲ـ۱) این دو نوع سیستم نشان داده شده‌اند.



شکل ۲ـ۱ـ (الف) سیستم پیوسته در زمان (ب) سیستم گسسته در زمان

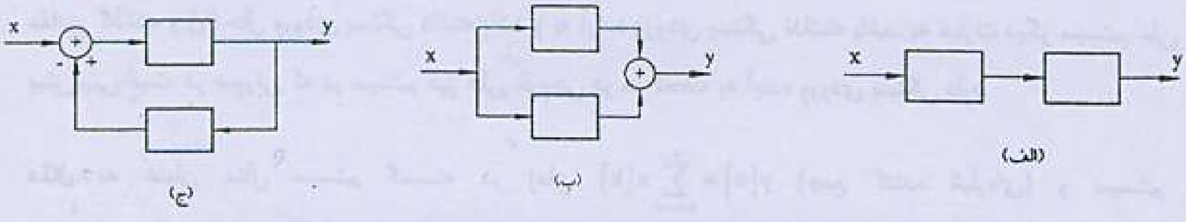
تذکر: تقسیم‌بندی سیستم‌ها به دو نوع ذکر شده محدود نمی‌شود و در برخی سیستم‌های پیچیده تر ممکن است ورودی یا خروجی پیوسته در زمان و دیگری گسسته در زمان باشد. در ادامه و در مبحث نمونه‌برداری، این دسته از سیستم‌ها نیز بررسی می‌گردند.

اتصال سیستم‌ها: معمولاً سیستم‌های واقعی از اتصال زیر سیستم‌های ساده‌تر تشکیل می‌شوند. لذا چگونگی اتصال آن‌ها و بررسی خواص مربوطه اهمیت زیادی دارد. به طور کلی سه اتصال اساسی (پایه) برای سیستم‌ها وجود دارد که عبارتند از:

۱) **اتصال سری:** در این اتصال ورودی به یکی از سیستم‌ها اعمال شده و خروجی از سیستم دوم گرفته می‌شود. خروجی سیستم اول نیز به ورودی سیستم دوم متصل می‌گردد. در شکل (۲ـ۲ـ الف) این اتصال نشان داده شده است و در برخی مواقع اتصال متوالی یا زنجیره‌ای (cascade) نیز نامیده می‌شود.

۲) **اتصال موازی:** در این اتصال ورودی به هر دو سیستم اعمال شده و خروجی آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند و خروجی کلی را درست می‌کنند. در شکل (۲ـ۲ـ ب) این اتصال نشان داده شده است.

۳) **اتصال فیدبک:** در این اتصال خروجی سیستم اول که خروجی کلی نیز می‌باشد، توسط سیستم دوم تغییر داده شده و پس از کم شدن یا جمع شدن با ورودی (فیدبک منفی یا مثبت) به ورودی سیستم اول داده می‌شود. در شکل (۲ـ۲ـ ج) این اتصال نشان داده شده است.



شکل ۲-۲- (الف) اتصال سری (ب) اتصال موازی (ج) اتصال فیدبک

۲-۲- خواص سیستم‌ها

در این بخش برخی از خواص اساسی سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان بررسی می‌گردند. در این بررسی شش خاصیت اصلی سیستم‌ها معرفی می‌گردند.

الف - سیستم‌های حافظه‌دار و بدون حافظه: سیستمی بدون حافظه نامیده می‌شود که خروجی آن به ازاء هر متغیر مستقل (هر زمان) به ورودی در همان مقدار متغیر مستقل (همان زمان) بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر در سیستم بدون حافظه خروجی به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارد. در غیر این صورت سیستم را حافظه‌دار می‌نامند.

مثال: به عنوان مثال سیستم گسسته در زمان $y[n]=2\left(x[n]-x^2[n]\right)$ و سیستم پیوسته در زمان $y(t)=10x^3(t)$ بدون حافظه می‌باشند. اما سیستم گسسته در زمان $y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{+M}x[n-k]$ که یک سیستم میانگین‌گیر است، یک سیستم با حافظه می‌باشد.

مثال: در میان عناصر مداری مقاومت LTI با رابطه $v(t)=Ri(t)$ یک عنصر بدون حافظه می‌باشد. در صورتی که سلف و خازن LTI با روابط $v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$ و $v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i_c(t')dt'$ عناصر حافظه‌دار می‌باشند.

تذکر: هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را حافظه‌دار نمایند.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی $y(t)=\begin{cases} t & t\le 2 \\ x^2(t) & t>2 \end{cases}$ بدون حافظه است. زیرا اثری از وابستگی به گذشته یا آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی‌که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)>0 \\ 2x(t-1) & x(t)\le 0 \end{cases}$ به دلیل حافظه‌دار بودن ضابطه $2x(t-1)$ و سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی $y[n]=\begin{cases} x[n] & x[n-1]\ge 0 \\ n^2x[n] & x[n-1]<0 \end{cases}$ به دلیل حافظه‌دار بودن شروط رابطه، سیستم‌های حافظه‌دار می‌باشند.

ب ـ سیستم‌های علی و غیرعلی ـ Causality: سیستمی را علی (یا سببی) می‌نامند که در آن خروجی در هر لحظه تنها به مقادیر گذشته و (یا) حال ورودی بستگی داشته باشد و به آینده ورودی بستگی نداشته باشد. به عبارت دیگر سیستم علی یک سیستم بدون پیش‌بینی است. در صورتی که در سیستم غیر علی خروجی در هر لحظه به آینده ورودی بستگی دارد.

مثال: به عنوان مثال سیستم گسسته در زمان $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (جمع کننده انباره‌ای) و سیستم پیوسته در زمان $y(t)=x^2(t)+x(t-1)$ سیستم‌های علی می‌باشند. در صورتی که سیستم گسسته در زمان $y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$ یک سیستم غیرعلی است.

تذکر: هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را غیرعلی نمایند.

مثال: سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\begin{cases} x[n-1] & x[n]\geq 1 \\ (n+2)^2 & x[n]<1 \end{cases}$ علی است زیرا اثری از وابستگی به آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی‌که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\begin{cases} x(t+1) & x(t-1)\geq 0 \\ 2x(t) & x(t-1)<0 \end{cases}$ به دلیل غیرعلی بودن ضابطه $x(t+1)$ و سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\begin{cases} x^2[n] & x[n+1]\leq 1 \\ x[n-1] & x[n+1]>1 \end{cases}$ به دلیل غیرعلی بودن شروط رابطه، سیستم‌های غیرعلی می‌باشند.

تذکر: اگر یک سیستم علی باشد، آن‌گاه اگر دو ورودی آن به ازای $t<t_0$ (یا $n<n_0$) با یکدیگر برابر باشند آن‌گاه خروجی‌های متناظر این دو ورودی نیز تا زمان $t=t_0$ (یا $n=n_0$) با یکدیگر برابر می‌باشند یعنی داریم:

$$\text{if } x_1(t)=x_2(t) \quad t<t_0 \Rightarrow y_1(t)=y_2(t) \quad t<t_0$$

$$\text{if } x_1[n]=x_2[n] \quad n<n_0 \Rightarrow y_1[n]=y_2[n] \quad n<n_0$$

تذکر: اگر متغیر مستقل زمان باشد، آن‌گاه بدیهی است که سیستم‌های غیر علی از نظر فیزیکی قابل ساخت و پیاده‌سازی نمی‌باشند.

تذکر: هر چند سیستم‌های علی اهمیت زیادی دارند، اما اگر متغیر مستقل زمان نباشد این اهمیت از نظر عملی یک محدودیت نمی‌باشد و این دسته از سیستم‌های غیرعلی قابل ساخت می‌باشند.

مثال: سیستم گسسته $y[n,m]=\frac{1}{2M+1}\sum_{l=-M}^{M}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k\,,\,m-l]$ یک فیلتر میانگین گیر غیر علی است که در پردازش تصویر کاربرد دارد. اما در رابطه فیلتر فوق m , n زمان نمی‌باشند بلکه نشان‌دهنده موقعیت Pixel فعلی (طول و عرض آن) هستند. لذا فیلتر فوق با وجود غیرعلی بودن قابل ساخت می‌باشد.

تذکر: بدیهی است که اگر یک سیستم بدون حافظه باشد، علی نیز خواهد بود اما عکس آن لزوماً صادق نیست.همچنین اگر یک سیستم غیرعلی باشد لزوماً با حافظه می‌باشد. اما عکس آن لزوماً صادق نیست.

ج ـ سیستم‌های وارون‌پذیر و وارون ناپذیر: سیستم وارون‌پذیر سیستمی است که به ازا ورودی‌های متمایز خروجی‌های متمایز بدهد. به عبارت دیگر داریم:

$$\text{if } x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t)$$

و رابطه فوق برای حالت گسسته در زمان نیز صادق است.

اگر سیستمی وارون‌پذیر باشد آن‌گاه می‌توان توسط یک سیستم وارون از روی خروجی سیستم اصلی ورودی آن را به‌طور یکتا و بدون ابهام به‌دست آورد.

اگر نتوان از روی خروجی یک سیستم، ورودی آن را بدون ابهام و به صورت یکتا تعیین کرد آن‌گاه سیستم فوق وارون‌ناپذیر است.

مثال: سیستم پیوسته در زمان $y(t)=2x(t)+1$ وارون‌پذیر است و سیستم وارون آن از رابطه $x(t)=\frac{y(t)-1}{2}$ ورودی را به‌طور یکتا تعیین می‌کند.

مثال: سیستم گسسته در زمان $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ وارون‌پذیر است و سیستم وارون آن از رابطه $x[n]=y[n]-y[n-1]$ بدست می‌آید.

مثال: سیستم پیوسته در زمان $y(t)=x^2(t)$ وارون‌ناپذیر است زیرا به ازاء دو ورودی $x(t)=A$ و $x(t)=-A$، خروجی یکسان $y(t)=A^2$ را ایجاد کرده و در نتیجه نمی‌توان از روی $y(t)$ مقدار $x(t)$ را به‌طور یکتا تعیین کرد.

تذکر: در مواقعی که یک سیستم مقادیری از ورودی را به ازای برخی زمان‌ها صفر (یا حذف) می‌کند، در این موارد سیستم وارون‌ناپذیر است. زیرا بدیهی است که نمی‌توان از روی خروجی ، ورودی را به‌طور یکتا بدست آورد.

مثال: سیستم گسسته در زمان $y[n]=\begin{cases} x[n] & n<0 \\ x[n+1] & n\geq 0 \end{cases}$ وارون‌ناپذیر است. زیرا این سیستم $x[0]$ را حذف کرده و اثری از $x[0]$ در خروجی وجود ندارد. لذا هنگام تعیین ورودی از روی خروجی نمی‌توان $x[0]$ را به‌دست آورد.

د ـ سیستم‌های پایدار و ناپایدار: پایداری از جمله مفاهیمی است که با توجه به کاربرد موردنظر در سیستم‌های مختلف تعاریف متفاوتی دارد. یکی از این معیارها که در این درس مورد استفاده قرار می‌گیرد، معیار ورودی محدود خروجی محدود (BIBO) است. با این معیار سیستم پایدار سیستمی است که پاسخ با دامنه محدود به ورودی با دامنه محدود دهد. از نظر ریاضی سیستم پایدار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{if } |x(t)| \leq A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq B < \infty$$ به ازاء تمام زمان‌ها

این تعریف برای پایداری BIBO سیستم‌های گسسته در زمان به همین صورت است.

سیستم ناپایدار سیستمی است که به ورودی با دامنه محدود خروجی با دامنه نامحدود بدهد.

مثال: به عنوان مثال برای سیستم پیوسته در زمان با رابطه $y(t)=x^2(t)$ و با فرض $|x(t)|\le A<\infty$ داریم:

$$|y(t)|=|x(t)|^2=A^2<\infty$$

پس این سیستم پایدار است.

مثال: برای سیستم گسسته در زمان با رابطه $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ و با فرض $|x[n]|\le A<\infty$ داریم:

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\right|\le\sum_{k=-\infty}^{n}|x[n]|\le\sum_{k=-\infty}^{n}A=\infty$$

پس این سیستم ناپایدار است.

مثال: برای سیستم پیوسته در زمان با رابطه $y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$ و با فرض $|x(t)|\le A<\infty$ داریم:

$$|y(t)|=\left|\int_0^t x(\tau)d\tau\right|\le\int_0^t|x(\tau)|d\tau\le\int_0^t Ad\tau=At$$

سیستم فوق ناپایدار است زیرا به ازای $t\to\infty$ دامنه خروجی به سمت بی‌نهایت می‌رود.

هـ ـ سیستم‌های تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان: به لحاظ مفهومی سیستمی تغییرناپذیر با زمان است که رفتار و مشخصات آن با زمان تغییر نکند. اما با زبان سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیستمی را تغییر ناپذیر با زمان می‌نامند هر گاه هر شیفت زمانی در سیگنال ورودی، دقیقاً در سیگنال خروجی ظاهر شود. به عبارت دیگر اگر به ورودی این سیستم $x(t)$ (یا $x[n]$) اعمال شود و خروجی $y(t)$ (یا $y[n]$) حاصل گردد، آن‌گاه اگر به این سیستم $x(t-t_0)$ (یا $x[n-n_0]$) اعمال شود، خروجی $y(t-t_0)$ (یا $y[n-n_0]$) خواهد شد.

مثال: سیستم $y(t)=x^2(t)$ (مربع کننده) را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم سیگنال $z(t)=x(t-t_0)$ را به عنوان ورودی اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$y_2(t)=z^2(t)=x^2(t-t_0)=y_1(t-t_0)$$

بنابراین سیستم فوق تغییرناپذیر با زمان است.

تذکر: اگر زمان (یا متغیر مستقل) از آرگومان سیگنال خارج شود معمولاً سیستم تغییرپذیر با زمان می‌شود.

مثال: سیستم $y[n]=nx[n]$ را در نظر بگیرید. این سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا متغیر n از آرگومان سیگنال x خارج شده است. می‌توان با یک مثال تغییرپذیر با زمان بودن این سیستم را نشان داد.

$$x_1[n]=\delta[n]\to y_1[n]=n\delta[n]=0$$
$$x_2[n]=\delta[n-1]\to y_2[n]=n\delta[n-1]=\delta[n-1]\ne x_1[n-1]$$

تذکر: عملیاتی مانند فشردن، گستردن و وارون کردن یک سیگنال و هر تغییر روی متغیر مستقل (غیر از تبدیل t به $t-t_0$ یا n به $n-n_0$) معمولاً باعث می‌شود که سیستم مربوطه تغییرناپذیر با زمان گردد. زیرا این قبیل عملیات مستقیماً روی شیفت سیگنال تاثیر دارند.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه $y(t)=x(-t)$ را در نظر بگیرید. این سیستم تغییرناپذیر با زمان است. زیرا این سیستم یک سیستم وارون کننده سیگنال است. می‌توان تغییرپذیر بودن این سیستم را با مثال نقض نشان داد:

$$x_1(t)=\delta(t)\rightarrow y_1(t)=\delta(-t)=\delta(t)$$

$$x_2(t)=\delta(t-1)\rightarrow y_2(t)=\delta(-t-1)=\delta(t+1)\neq y_1(t-1)$$

مثال: سیستم‌های با روابط $y(t)=\sin^2(x(t))$ ، $y[n]=2x[n-1]+2$ ، $y(t)=x^2(t-1)$ و $y[n]=\dfrac{x[n+1]}{x[n-1]}$ همگی تغییرناپذیر با زمان هستند. زیرا متغیر مستقل از آرگومان سیگنال خارج نشده و همچنین روی متغیر مستقل تنها تبدیل t به $t-t_0$ یا n به $n-n_0$ انجام شده است.

مثال: سیستم‌های با روابط $y(t)=x(2t+1)$ ، $y[n]=x[n^2]$ ، $y(t)=x(\sin(t))$ و $y[n]=x\left[-\dfrac{n}{2}+1\right]$ همگی تغییرپذیر با زمان هستند. زیرا روی متغیر مستقل تبدیلاتی غیر از تبدیل t به $t-t_0$ یا n به $n-n_0$ انجام گرفته و باعث تغییرپذیر با زمان شدن سیستم شده است.

تذکر: اگر رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد و اگر یکی از ضابطه‌ها تغییرپذیر با زمان باشد آن‌گاه سیستم تغییرپذیر با زمان می‌شود. اما اگر کلیه ضابطه‌ها تغییرناپذیر با زمان باشند آن‌گاه در صورتی که شروط تابعی از زمان باشند معمولاً سیستم تغییرپذیر با زمان وا گر شروط تابعی از ورودی باشند معمولاً سیستم تغییرناپذیر با زمان می‌شود.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)\geq 0 \\ tx(t) & x(t)<0 \end{cases}$ تغییرپذیر با زمان است زیرا ضابطه $tx(t)$ آن متغیر با زمان است.

مثال: سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\begin{cases} x^2[n] & n\geq 2 \\ x[n-1] & n<2 \end{cases}$ تغییرناپذیر با زمان است. زیرا شروط آن با زمان تغییر می‌کنند و در نتیجه پاسخ سیستم به $x[n-n_0]$ برابر $y[n-n_0]$ نمی‌شود.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\begin{cases} 2x(t-1) & x(t)\geq 1 \\ \sin(x(t)) & x(t)<1 \end{cases}$ تغییرناپذیر با زمان است. زیرا شروط آن فقط تابعی از ورودی است و در نتیجه پاسخ سیستم به $x(t-t_0)$ برابر $y(t-t_0)$ می‌شود.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۵) سیستم $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)<0 \\ x(t-2) & x(t)\geq 0 \end{cases}$ دارای کدام خواص زیر است؟

۱) تغییرپذیر با زمان ـ وارون‌پذیر
۲) تغییرناپذیر با زمان ـ وارون‌ناپذیر
۳) تغییرناپذیر با زمان ـ وارون‌پذیر
۴) تغییرپذیر با زمان ـ وارون‌ناپذیر

حل : سیستم فوق تغییرناپذیر با زمان است. زیرا ضابطه‌های آن تغییرناپذیر با زمان و شروط تابعی از ورودی می‌باشند. از طرفی سیستم وارون‌ناپذیر است. زیرا به عنوان مثال پاسخ این سیستم به ورودی‌های $x_1(t)=-u(t)$ و $x_2(t)=\delta(t)-u(t)$ یکسان و برابر $y(t)=-u(t)$ است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

و ـ سیستم‌های خطی و غیر خطی: یک سیستم را خطی می‌نامند اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:

۱) **خاصیت همگنی:** اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد آن‌گاه پاسخ سیستم فوق به ورودی $\alpha x(t)$ (α یک اسکالر دلخواه مختلط است) برابر $\alpha y(t)$ خواهد شد.

۲) **خاصیت جمع‌پذیری:** اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)$ و پاسخ به ورودی $x_2(t)$ برابر $y_2(t)$ باشد، آن‌گاه پاسخ سیستم فوق به ورودی $x_1(t)+x_2(t)$ برابر $y_1(t)+y_2(t)$ خواهد شد.

تذکر : تعریف خطی بودن برای سیستم‌های گسسته در زمان نیز مشابه سیستم‌های پیوسته در زمان است و باید دو خاصیت ذکر شده را داشته باشند.

تذکر : نتیجه دو خاصیت خطی بودن و همگنی برقرار بودن خاصیت جمع آثار (اصل بر هم نهی) در سیستم‌های خطی است. یعنی هر ترکیب خطی از ورودی‌ها مانند $\sum_k \alpha_k x_k(t)$ همان ترکیب خطی از خروجی‌ها یعنی $\sum_k \alpha_k y_k(t)$ را بوجود می‌آورد.

تذکر : یک نتیجه بدیهی از خاصیت همگنی صفر بودن پاسخ یک سیستم خطی به ورودی صفر، است. به عبارت دیگر اگر $x(t)=0$ (یا $x[n]=0$) باشد آن‌گاه $y(t)=0$ (یا $y[n]=0$) خواهد شد. بدیهی است که این شرط کافی نبوده و یک شرط لازم برای خطی بودن سیستم است.

مثال : سیستم پیوسته در زمان $y(t)=x^3(t)$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که این سیستم غیر خطی است. به عنوان مثال این سیستم خاصیت همگنی را برآورده نمی‌سازد.

$$\text{if } x_2(t)=\alpha x_1(t) \Rightarrow y_2(t)=x_2^3(t)=\alpha^3 x_1^3(t)\neq \alpha y_1(t)$$

مثال : سیستم پیوسته در زمان $y(t)=\cos(2t)x(t)$ یک سیستم خطی است برای اثبات اگر به این سیستم ورودی $x_3(t)=\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)$ اعمال کنیم، داریم:

$$y_3(t)=\cos(2t)x_3(t)=\cos(2t)\left(\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 t_2(t)\right)=\alpha_1\cos(2t)x_1(t)+\alpha_2\cos(2t)x_2(t)$$
$$=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)$$

مثال : سیستم گسسته در زمان $y[n]=\operatorname{Re}\{x[n]\}$ خطی نیست. زیرا اسکالر α در حالت کلی ممکن است مختلط باشد. لذا سیستم خاصیت همگنی ندارد.

تذکر : یکی از مواردی که باعث غیرخطی شدن یک سیستم می‌شود وجود عدد ثابت یا یک سیگنال مشخص جمع شونده با ورودی است. وجود این عامل باعث می‌شود که پاسخ سیستم به ورودی صفر برابر صفر نشود و در نتیجه سیستم غیرخطی گردد.

مثال: سیستم‌های $y(t)=2x(t)+1$ ، $y[n]=x[n-1]+n$ و $y(t)=x(t)+\sin(t)$ همگی غیرخطی هستند. زیرا پاسخ آن‌ها به ورودی صفر برابر صفر نیست.

تذکر: اعمال یک تابع غیرخطی روی ورودی باعث غیرخطی شدن سیستم می‌گردد. در صورتی‌که اعمال تابع خطی روی متغیر مستقل باعث غیرخطی شدن سیستم نمی‌گردد.

مثال: سیستم‌های $y(t)=\sin(x(t))$ ، $y[n]=x^2[n]+x[n]$ و $y(t)=\dfrac{x(t-1)}{x(t)}$ همگی غیرخطی هستند. زیرا یک تابع غیرخطی روی ورودی اعمال شده است. در صورتی‌که سیستم‌های $y(t)=x(\sin(t))$ ، $y[n]=x[n^2-1]$ و $y(t)=t^2x(t^2-1)$ به دلیل عدم اعمال تابع غیرخطی روی ورودی همگی سیستم‌های خطی می‌باشند.

تذکر: اگر رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد آن‌گاه اگر یکی از ضابطه‌ها غیرخطی باشد آن‌گاه سیستم غیرخطی می‌شود. اما اگر کلیه ضابطه‌ها خطی باشند آن‌گاه در صورتی که شروط تابعی از ورودی باشند معمولاً سیستم غیرخطی و اگر شروط فقط تابعی از زمان باشند معمولاً سیستم خطی می‌شود.

مثال: سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\begin{cases}x[n]+1 & n\geq 0\\ x[n-1] & n<0\end{cases}$ غیرخطی است زیرا ضابطه $x[n]+1$ آن غیرخطی است.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\begin{cases}x(t) & x(t)\geq 1\\ 2x(t+1) & x(t)<1\end{cases}$ غیرخطی است. زیرا شروط آن تابعی از ورودی می‌باشند.

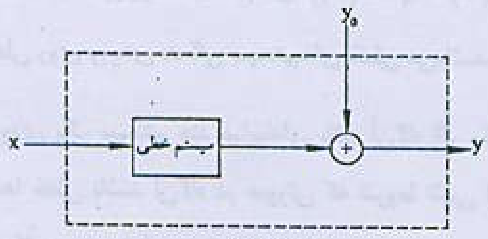
مثال: سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\begin{cases}x[n]+x[n-1] & n\geq -1\\ 2x[n+1] & n<-1\end{cases}$ خطی است. زیرا کلیه ضابطه‌ها خطی و شروط نیز فقط به زمان بستگی دارند.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۴) سیستم $y(t)=\begin{cases}x(t)+y(t-1) & y(t-1)\leq 0\\ x(t)-y(t-1) & y(t-1)>0\end{cases}$:

۱) خطی و عکس‌ناپذیر است.
۲) غیرخطی و عکس‌پذیر است.
۳) خطی و عکس‌پذیر است.
۴) غیرخطی و عکس‌ناپذیر است.

حل: سیستم فوق غیرخطی است. زیرا شروط آن تابعی از خروجی و در نتیجه تابعی از ورودی می‌باشند. از طرفی سیستم وارون‌پذیر است و سیستم وارون آن $x(t)=y(t)+|y(t-1)|$ می‌باشد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تذکر: یک سیستم را نمواً خطی می‌نامند هر گاه تفاضل پاسخ‌های سیستم به دو ورودی دلخواه یک تابع خطی از تفاضل دو ورودی آن باشد. به عبارت دیگر اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x_1(t)$ (یا $x_1[n]$) برابر $y_1(t)$ (یا $y_1[n]$) و پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ (یا $x_2[n]$) برابر $y_2(t)$ (یا $y_2[n]$) باشد، آن‌گاه y_1 بر حسب x_1 و y_2 بر حسب x_2 خطی نیستند. اما $\Delta y = y_2 - y_1$ بر حسب $\Delta x = x_2 - x_1$ یک تابع خطی است. می‌توان نشان داد خروجی هر سیستم نمواً خطی را می‌توان به صورت مجموع خروجی یک سیستم خطی و یک سیگنال نوشت که این سیگنال پاسخ ورودی صفر سیستم نمواً خطی است. این ترکیب در شکل (۲ـ۳) نشان داده شده است.



شکل ۲ـ۳ ساختار یک سیستم نمواً خطی

تست نمونه ـ (آزاد ۸۱) کدام گزینه بیان درست ویژگی‌های سیستم $y(t) = x(\sin(t))$ است؟

۱) ناپایدار و غیرعلی ۲) ناپایدار و بدون حافظه ۳) بدون حافظه و پایدار ۴) غیرعلی و پایدار

حل:

سیستم فوق غیرعلی است زیرا به عنوان مثال داریم:

$$t = -\frac{\pi}{2} \rightarrow y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = x(-1)$$

از طرفی سیستم فوق پایدار است زیرا:

$$\text{if } |x(t)| \le A < \infty \Rightarrow |x(\sin(t))| \le A < \infty \Rightarrow |y(t)| \le A < \infty$$

پس گزینه (۴) درست است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۱) رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم زمان پیوسته به صورت زیر است:

$$y(t) = T\{x(t)\} = \begin{cases} tx(t) & t < |x(t)| \\ x(-t) & t \ge |x(t)| \end{cases}$$

کدام یک از گزینه‌های زیرصحیح است؟

۱) سیستم علی و پایدار است ۲) سیستم غیر علی و ناپایدار است

۳) سیستم غیرعلی و پایدار است ۴) سیستم علی و ناپایدار است

حل :

ضابطه $y(t)=tx(t)$ نمی‌تواند سیستم را غیرعلی کند. از طرفی ضابطه $y(x)=x(-t)$ چون فقط به ازای t های مثبت صادق است. لذا این ضابطه نیز نمی‌تواند سیستم را غیرعلی کند. پس سیستم همواره علی است. از طرفی ضابطه $y(t)=x(-t)$ نمی‌تواند سیستم را ناپایدار کند. اما ضابطه $y(t)=tx(t)$ به ازای $t\to-\infty$ می‌تواند سیستم را ناپایدار کند. پس سیستم ناپایدار است.

لذا سیستم علی و ناپایدار است و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۰) دو سیستم پیوسته داریم کدام گزینه نادرست است؟

$$\text{سیستم ۱ : } y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-2) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$\text{سیستم ۲ : } y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-2) & x(t)\ge 0\\ 0 & x(t)<0\end{cases}$$

۱) هر دو سیستم خطی هستند
۲) هر دو سیستم پایدار هستند
۳)هر دو سیستم سببی هستند
۴) سیستم ۱ تغییرپذیر با زمان و سیستم ۲ تغییرناپذیر با زمان است

حل :

گزینه شماره (۱) نادرست است. زیرا سیستم ۲ خطی نیست . زیرا x(t) روی محور افقی رابطه $y(t)$ و $x(t)$ تاثیر دارد. در مورد گزینه‌های دیگر هر دو سیستم پایدار و هر دو سیستم علی هستند. زیرا ضابطه‌های ناپایدار و غیر علی کردن را ندارند. از طرفی گزینه (۴) نیز صحیح است. زیرا در سیستم ۱ که ضابطه‌ها با زمان تغییر می‌کنند، سیستم تغییرپذیر با زمان و در سیستم ۲ که ضابطه‌ها با ورودی تغییر می‌کنند، سیستم تغییرناپذیر با زمان است. پس تنها گزینه (۱) نادرست است.

تذکر : در توابع چند ضابطه‌ای، هر گاه کلیه ضابطه‌ها خطی و تغییرناپذیر با زمان باشند، آن‌گاه اگر مانند سیستم ۱ در تست فوق، ضابطه‌ها با t (یا n) از یکدیگر متمایز گردند، سیستم معمولاً خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌شود. اما اگر مانند سیستم ۲ در تست فوق، ضابطه‌ها با x (t) (یا x [n]) از یکدیگر متمایز گردند، سیستم معمولاً غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان می‌شود.

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases} t & t\le x(t)\\ x(t) & t\ge x(t)\end{cases}$$

۱) این سیستم با حافظه و ناپایدار است.
۲) این سیستم بدون حافظه و ناپایدار است.
۳) این سیستم با حافظه و پایدار است.
۴) این سیستم بدون حافظه و پایدار است.

حل :

سیستم فوق بدون حافظه است. زیرا نه ضابطه‌ها و نه شروط هیچ‌کدام به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارند. از طرفی ضابطه $y(t)=t$ به ازاء $t\to-\infty$ می‌تواند خروجی را بی‌نهایت کند. لذا سیستم فوق پایدار نیست.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه ـ ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y[n]=\begin{cases}x[n+1] & n\geq 0\\ x[n] & n\leq -1\end{cases}$$

۱) این سیستم علی و وارون‌پذیر است.
۲) این سیستم غیرعلی و وارون‌پذیر است.
۳) این سیستم علی و وارون‌ناپذیر است.
۴) این سیستم غیرعلی و وارون‌ناپذیر است.

حل :

سیستم فوق به واسطه ضابطه $y[n]=x[n+1]$ غیرعلی است. از طرفی با توجه به آن‌که نمونه صفرم ورودی ($x[0]$) در خروجی ظاهر نمی‌شود بنابراین سیستم وارون‌ناپذیر است.

پس گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t)=ev\{x(t)\}$$

۱) این سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.
۲) این سیستم خطی و تغییرپذیر با زمان است.
۳) این سیستم غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.
۴) این سیستم غیرخطی و تغییرپذیر با زمان است.

حل :

با توجه به رابطه $ev\{x(t)\}=\dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$ نتیجه می‌گیریم سیستم فوق خطی و تغییرپذیر با زمان است.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۰) در یک سیستم زمان گسسته، خروجی سیستم $y[n]$ بر حسب ورودی سیستم $x[n]$ با رابطه زیر تعیین می‌گردد :

$$y[n]=\begin{cases}n & n\leq x[-n]\\ x[n] & n>x[-n]\end{cases}$$

پس در این صورت سیستم .... است.

۱) علی و پایدار
۲) غیرعلی و پایدار
۳) علی و ناپایدار
۴) غیرعلی و ناپایدار

حل :

وجود $x[-n]$ در رابطه سیستم فوق باعث غیرعلی شدن سیستم به ازاء $n<0$ می‌گردد.

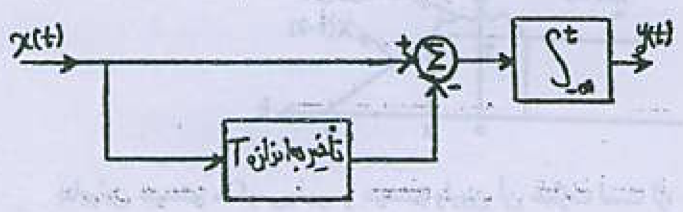
به‌عنوان مثال به ازاء $n=-3$ داریم:

$$y[-3]=\begin{cases}-3 & -3\leq x[3]\\ x[-3] & -3>x[3]\end{cases}$$

که بدیهی است برای تعیین خروجی در $n=-3$ نیاز به ورودی در $n=3$ است.

از طرفی ضابطه $y[n]=n$ باعث ناپایداری سیستم به ازاء $n\to-\infty$ می‌شود. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۴) سیستم داده شده در شکل :



۱) تغییرپذیر با زمان و پایدار است.
۲) تغییرپذیر با زمان وناپایدار است.
۳) تغییرناپذیر با زمان و پایدار است.
۴) تغییرناپذیر با زمان و ناپایدار است.

حل :

با توجه به شکل داده شده داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(x(t')-x(t'-T)\right)dt'$$

برای بررسی تغییرناپذیر بودن این سیستم، ورودی $z(t)=x(t-t_0)$ را اعمال می‌کنیم:

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(z(t')-z(t'-T)\right)dt'=\int_{-\infty}^{t}\left(x(t'-t_0)-x(t'-t_0-T)\right)dt'$$

با تغییر متغیر $t''=t'-t_0$ داریم:

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t-t_0}\left(x(t'')-x(t''-T)\right)dt''=y(t-t_0)$$

پس سیستم فوق تغییرناپذیر با زمان است.

از طرفی با توجه به آن‌که سیستم سطح زیر منحنی تفاضل ورودی و تاخیر یافته آن را حساب می‌کند، لذا پایدار نیز می‌باشد. زیرا با فرض $|x(t)|\le A$، خروجی همواره محدود است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

دقت کنید که تست فوق را با تبدیل لاپلاس نیز می‌توان حل کرد که در قسمت‌های آتی به آن اشاره می‌گردد.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۴) ضابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases} x(t-2) & t\ge 2 \\ x(t^2) & -2\le t\le 2 \\ x(t+2) & t<-2 \end{cases}$$

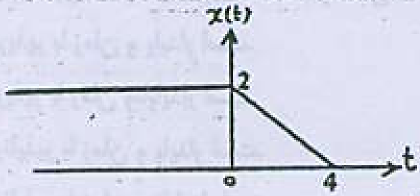
این سیستم .... است.

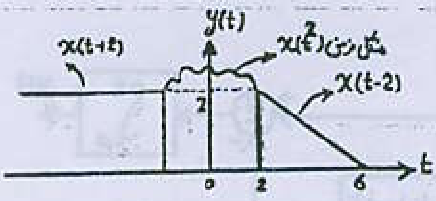
۱) خطی و معکوس‌پذیر ۲) غیرخطی و معکوس‌پذیر ۳) خطی و معکوس‌ناپذیر ۴) غیرخطی و معکوس‌ناپذیر

حل :

سیستم فوق خطی است زیرا در ضابطه‌های آن هیچ‌گونه عملیات غیرخطی روی دامنه انجام نگرفته است. البته ادعای فوق را با اعمال ورودی $\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)$ به سیستم فوق و به‌دست آوردن پاسخ $\alpha_1y_1(t)+\alpha_2y_2(t)$ می‌توان اثبات کرد.

برای بررسی معکوس‌پذیری این سیستم به این نکته دقت کنید که ورودی با ضابطه‌های اول و سوم کاملاً در خروجی مشخص شده و برای تعیین ورودی از روی خروجی نیاز به ضابطه دوم نیست. این نکته در شکل فرضی صفحه بعد نشان داده شده است.





بنابراین سیستم معکوس‌پذیر و سیستم وارون آن عبارت است از:

$$x(t)=\begin{cases} y(t+2) & t\geq 0 \\ y(t-2) & t<0 \end{cases}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۳) اگر پاسخ یک سیستم خطی (که می‌تواند تغییرپذیر با زمان هم باشد) به تابع پله $u(t-\alpha)$ را با $g(t,\alpha)$ نمایش دهیم، پاسخ آن سیستم به تابع ضربه $\delta(t-\alpha)$ چه خواهد بود؟

۱) $-\frac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$ ۲) $\frac{\partial}{\partial t}g(t,\alpha)$ ۳) $\frac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$ ۴) $-\frac{\partial}{\partial t}g(t,\alpha)$

حل:

این تست را با دو روش حل می‌کنیم:

روش اول ـ از تعریف مشتق برای رابطه بین $u(t-\alpha)$, $\delta(t-\alpha)$ استفاده می‌کنیم:

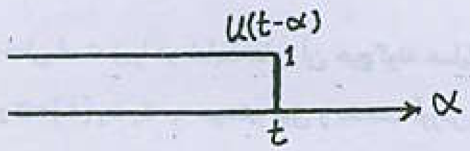
$$\delta(t-\alpha)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{u(t-\alpha)-u(t-\Delta-\alpha)}{\Delta}$$

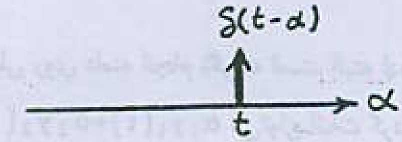
پاسخ سیستم به ورودی $u(t-\alpha)$ برابر $g(t,\alpha)$ است. بنابراین پاسخ سیستم به ورودی $u(t-\Delta-\alpha)=u(t-(\Delta+\alpha))$ برابر $g(t,\Delta+\alpha)$ می‌باشد و با توجه به خطی بودن سیستم داریم:

$$\text{پاسخ سیستم به ورودی } \delta(t-\alpha)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{g(t,\alpha)-g(t,\Delta+\alpha)}{\Delta}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

روش دوم ـ سیستم فوق اگرچه نسبت به زمان متغیر است اما نسبت به α تغییرپذیر نیست. بنابراین اگر $u(t-\alpha)$ و $\delta(t-\alpha)$ نسبت به α رسم شوند، شکل‌های زیر به‌دست می‌آیند:





از شکل‌های فوق به‌دست می‌آوریم $\delta(t-\alpha)=-\frac{\partial u(t-\alpha)}{\partial\alpha}$ و بنابراین با توجه به آن‌که سیستم خطی و نسبت به متغیر α تغییرناپذیر است پس پاسخ سیستم به $\delta(t-\alpha)$ برابر $-\frac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$ است. پس گزینه (۱) صحیح است.

خودآزمائی اول

۱ ـ قدرت سیگنال زیر چقدر است؟

$$x(t)=\begin{cases}3 & t\le -5\\ 5 & -5<t<10\\ 2 & 10\le t\end{cases}$$

۱) 4.5 ۲) 5 ۳) 6.5 ۴) 3

۲ ـ (سراسری ۸۵) توان (P) و انرژی (E) سیگنال $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب عبارتند از:

۱) $E=+\infty \ , \ P=\frac{41}{18}$

۲) $E=+\infty \ , \ P=0$

۳) $E=+\infty \ , \ P=+\infty$

۴) $E=\frac{64}{9} \ , \ P=0$

۳ ـ (سراسری ۸۵) اگر $f(t)$ سیگنالی به عرض T و ماکزیممی واقع بر $t=2$ باشد، در ان صورت عرض و محل ماکزیمم $f(rt-n)$ $(r>0)$ عبارتند از:

۱) $\frac{T}{r}-n \ , \ \frac{n}{r}$

۲) $\frac{T}{r} \ , \ \frac{2}{r}$

۳) $\frac{T}{r}+n \ , \ \frac{n-2}{r}$

۴) $\frac{T}{r} \ , \ \frac{n+2}{r}$

۴ ـ (سراسری ۸۱) معکوس سیستم $y(t)=\frac{1}{2}x(4-2t)$ در صورتی که معکوس‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $y(t)=x(2-t)$ ۲) $y(t)=x(t-2)$

۳) $y(t)=2x\left(2-\frac{t}{2}\right)$ ۴) $y(t)=2x\left(-2-\frac{t}{2}\right)$

۵ ـ (سراسری ۸۲) سیستم زمان پیوسته تعریف شده با رابطه $y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)+x(t-1)$ برای همه t دارای کدام خواص است؟

۱) خطی، متغیر با زمان، غیر علّی

۲) غیرخطی، متغیر با زمان، غیر علّی

۳) خطی، نامتغیر با زمان، غیر علّی

۴) غیرخطی، نامتغیر با زمان، علّی

۶ـ (سراسری ۸۰) در یک سیستم زمان گسسته، خروجی سیستم $y[n]$ بر حسب ورودی سیستم $x[n]$ با رابطه زیر تعیین می‌گردد :

$$y[n]=\begin{cases} n & n\le x[-n] \\ x[n] & n>x[-n] \end{cases}$$

پس در این صورت سیستم .... است.

۱) علی و پایدار ۲) غیرعلی و پایدار ۳) علی و ناپایدار ۴) غیرعلی و ناپایدار

۷ـ کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) سیستم $y[n]=\text{Re}\{x[n]\}$ خطی است.

۲) سیستم $y[n]=x[n]x[n-1]$ وارون‌پذیر است.

۳) سیستم $y[n]=x[1-n]$ بدون حافظه است.

۴) سیستم $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]$ وارون‌پذیر است.

۸ـ (آزاد ۸۲) کدام یک از گزاره‌های زیر ناصحیح است؟

۱) سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{2t}e^{(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ تغییرپذیر با زمان و پایدار است.

۲) سیستم $y(t)=e^{jx(t)}$ علی و پایدار است.

۳) سیستم $y[n]=nx[n]$ تغییرپذیر با زمان و ناپایدار است.

۴) سیستم $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$ وارون‌پذیر است.

۹ـ (آزاد ۸۰) کدام یک از جملات زیر درست است؟

۱) سیستم $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n=2k \\ 0 & n\neq 2k \end{cases}$ یک سیستم سببی است.

۲) سیستم $y[n]=2x[n]+x[2n-3]$ یک سیستم خطی است.

۳) سیستم $y[n]=(n+1)x[n]$ یک سیستم حافظه‌دار است.

۴) سیستم $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ یک سیستم پایدار است.

۱۰ـ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) اگر از یک سیگنال پیوسته در زمان متناوب نمونه‌برداری شود، سیگنال گسسته در زمان حاصل لزوماً متناوب است.

۲) اگر یک سیستم علی معکوس‌پذیر باشد، سیستم معکوس آن نیز لزوماً علی است.

۳) اتصال سری دو سیستم غیرخطی، لزوماً یک سیستم غیرخطی است.

۴) اگر یک سیستم غیرعلی باشد، لزوماً این سیستم باحافظه است.

۱۱ ـ کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) یک سیستم گسسته در زمان علی است اگر و فقط اگر بدون حافظه باشد.

۲) سیستم با رابطه $y(t)=\frac{dx}{dt}$ خطی و باحافظه است.

۳) اگر یک سیستم خطی باشد، پاسخ آن به ورودی صفر، برابر صفر می‌باشد.

۴) اگر ورودی یک سیستم تغییرناپذیر با زمان متناوب باشد، خروجی آن نیز لزوماً متناوب خواهد بود.

۱۲ ـ (آزاد ۸۳) کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) سیستم $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$ پایدار است.

۲) سیستم $y(t)=x(\sin(t))$ خطی و علی است.

۳) سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} e^{(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ تغییرپذیر با زمان و پایدار است.

۴) سیستم $y(t)=x(\sin(t))$ خطی و غیرعلی است.

۱۳ ـ (سراسری ۸۲) سیستم زمان گسسته‌ای با رابطه $y[n]=\begin{cases}x[n]+c & n\ge n_0\\ 0 & n<n_0\end{cases}$ تعریف می‌شود که در آن $c=\sum_{k=-\infty}^{n_0} x[k]$ می‌باشد در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟

۱) خطی، بدون حافظه، علّی و متغیر با زمان

۲) خطی، دارای حافظه، علّی و متغیر با زمان

۳) غیر خطی، دارای حافظه، علّی و نامتغیر با زمان

۴) غیرخطی، بدون حافظه، علّی و متغیر با زمان

۱۴ ـ (آزاد ۷۹) ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است. گزینه صحیح را انتخاب کنید.

$$y(t)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha}x(\alpha-t)d\alpha$$

۱) این سیستم پایدار و تغییرپذیر با زمان است.

۲) این سیستم ناپایدار و تغییرپذیر با زمان است.

۳) این سیستم پایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

۴) این سیستم ناپایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

۱۵ ـ (آزاد ۷۹) پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی به ورودی $x[n]=\delta[n-k]$، یعنی ورودی ضربه واحد اعمال شده در محل $k\in z$ به صورت $y[n]=\begin{cases}1 & |n|=0\ ,\ 1\\ 0 & |n|\ne 0\ ,\ 1\end{cases}$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به یک ورودی دلخواه $x[n]$ از چه ضابطه‌ای پیروی می‌کند؟

۱) $y[n]=x[n]+x[n-1]+x[n+1]$

۲) $y[n]=x[-1]+x[0]+x[1]$

۳) $y[n]=x[n]\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n+1]\}$

۴) $y[n]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n+1]\}$

۱۶ ـ (سراسری ۸۴) سیستم پیوسته زمان با توصیف ورودی ($x(t)$) و خروجی ($y(t)$) به فرم $y(t)=\int_{-5}^{t}x(\tau)d\tau$ را در نظر بگیرید. این سیستم :

۱) تغییرناپذیر با زمان و معکوس‌پذیر است.

۲) تغییرپذیر با زمان و معکوس‌ناپذیر است

۳) تغییرپذیر با زمان و معکوس‌پذیر است.

۴) تغییرناپذیر با زمان و معکوس‌ناپذیر است.

۱۷ ـ (سراسری ۸۰) سیستم S با توصیف ورودی ـ خروجی $y(t)=\dfrac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$ کدام دسته از خواص زیر را دارا است؟

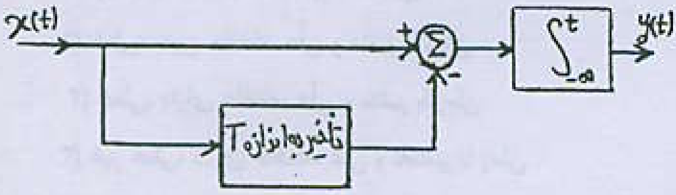
۱) غیرعلی، تغییرپذیر با زمان، ناپایدار

۲) علی، تغییرپذیر با زمان، پایدار

۳) علی، تغییرپذیر با زمان، ناپایدار

۴) علی، تغییرناپذیر با زمان، پایدار

۱۸ ـ (سراسری ۸۴) سیستم داده شده در شکل :



۱) تغییرپذیر با زمان و پایدار است.

۲) تغییرپذیر با زمان وناپایدار است.

۳) تغییرناپذیر با زمان و پایدار است.

۴) تغییرناپذیر با زمان و ناپایدار است.

۱۹ ـ (سراسری ۸۳) سیستم گسسته توصیف شده با معادله $y[n]=a^{x[n]}$ و $a>1$ را داریم. در مورد این سیستم کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) این سیستم غیرخطی، غیرعلی و پایدار است.

۲) این سیستم خطی، با حافظه و ناپایدار است.

۳) این سیستم تغییرپذیر با زمان، علی و ناپایدار است.

۴) این سیستم تغییرناپذیر با زمان، بی‌حافظه و پایدار است.

۲۰ ـ (سراسری ۸۴) ضابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases} x(t-2) & t\ge 2 \\ x(t^2) & -2\le t\le 2 \\ x(t+2) & t<-2 \end{cases}$$

این سیستم .... است.

۱) خطی و معکوس‌پذیر ۲) غیرخطی و معکوس‌پذیر ۳) خطی و معکوس‌ناپذیر ۴) غیرخطی و معکوس‌ناپذیر

۲۱ـ (سراسری ۸۳) رابطه ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته به صورت $y(t)=\begin{cases}\dfrac{x(t)}{|x(t)|} & x(t)\neq 0\\ 0 & x(t)=0\end{cases}$ می‌باشد. این سیستم :

۱) خطی و تغییرپذیر با زمان است.
۲) خطی و تغییرناپذیر با زمان است
۳) غیرخطی و تغییرپذیر با زمان است.
۴) غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.

۲۲ـ (سراسری ۸۴) سیستم $y(t)=\begin{cases}x(t)+y(t-1) & y(t-1)\le 0\\ x(t)-y(t-1) & y(t-1)>0\end{cases}$:

۱) خطی و عکس‌ناپذیر است.
۲) غیرخطی و عکس‌پذیر است.
۳) خطی و عکس‌پذیر است.
۴) غیرخطی و عکس‌ناپذیر است.

۲۳ـ (سراسری ۸۳) اگر پاسخ یک سیستم خطی (که می‌تواند تغییرپذیر با زمان هم باشد) به تابع پله $u(t-\alpha)$ را با $g(t,\alpha)$ نمایش دهیم، پاسخ آن سیستم به تابع ضربه $\delta(t-\alpha)$ چه خواهد بود؟

۱) $-\dfrac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$ ۲) $\dfrac{\partial}{\partial t}g(t,\alpha)$ ۳) $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$ ۴) $-\dfrac{\partial}{\partial t}g(t,\alpha)$

۲۴ـ (سراسری ۸۰) پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $x_1(t)=u(t-\tau)$ (پله واحد اعمال شده در لحظه $\tau\in R$) به صورت $y_1(t)=u(t+\tau)$ است. پاسخ $y_2(t)$ این سیستم به ضربه واحد اعمال شده در لحظه τ یعنی $x_2(t)=\delta(t-\tau)$ چیست؟

۱) $\delta(t+\tau)$ ۲) $-\delta(t+\tau)$

۳) $\begin{cases}\delta(t+\tau) & \tau>0\\ -\delta(t+\tau) & \tau<0\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\delta(t+\tau) & \tau<0\\ -\delta(t+\tau) & \tau>0\end{cases}$

۲۵ـ (سراسری ۸۵) پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی (که لزوماً LTI نیست) به ورودی $x_1[n]=u[n-m]$ برابر $y_1[n]=(-1)^{nm}$ می‌باشد و این خاصیت به ازای جمع مقادیر صحیح $m\in Z$ وجود دارد. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n]=\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]$ چه خواهد بود؟

۱) $y_2[n]=0$ ۲) $y_2[n]=4$ ۳) $y_2[n]=(-1)^n-1$ ۴) $y_2[n]=(-1)^n+1$

۲۶ـ (سراسری ۸۴) رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم گسسته به صورت زیر می‌باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم غلط می‌باشد. (منظور از n mod 27 باقیمانده مثبت تقسیم عدد n بر عدد صحیح 27 می‌باشد.)

$y[n]=x[n \bmod 27]$

۱) سیستم علی است. ۲) سیستم خطی است. ۳) سیستم معکوس‌ناپذیر است. ۴) سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۲۷ـ (سراسری ۸۵) با در نظر گرفتن سیستم‌های داده شده زیر:

سیستم 1: $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$ و سیستم 2: $y[n]=\sum_{k=n}^{n+6} x[n]$

۱) سیستم 1 عکس‌پذیر و سیستم 2 تغییرپذیر با زمان است.

۲) سیستم 1 عکس‌ناپذیر و سیستم 2 تغییرناپذیر با زمان است.

۳) سیستم 1 عکس‌پذیر و سیستم 2 تغییرناپذیر با زمان است.

۴) سیستم 1 عکس‌ناپذیر و سیستم 2 تغییرپذیر با زمان است.

۲۸ـ (سراسری ۸۵) سیستم $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)<0 \\ x(t-2) & x(t)\geq 0 \end{cases}$ دارای کدام خواص زیر است؟

۱) تغییرپذیر با زمان ـ وارون‌پذیر

۲) تغییرناپذیر با زمان ـ وارون‌ناپذیر

۳) تغییرناپذیر با زمان ـ وارون‌پذیر

۴) تغییرپذیر با زمان ـ وارون‌ناپذیر

یادداشت

خواص سیستم‌ها

1- حافظه داری ⇐

2- علّی بودن ⇐

3- پایداری ⇐ اگر ضریبی از t داشته باشد ← ناپایدار است.

4- وارون پذیری ⇐ اگر تابع یک به یک باشد و هر چند ضابطه ای ها X[5] حذف شود

5- تغییر ناپذیری با زمان ⇐ 1- متغیر مستقل از آرگمان خارج بشود
2- فشردن ـ گستردن ـ وارونگی
3- شروط تابعی از زمان باشد

6- [illegible] ⇐ شروط تابعی از ورودی باشد.

7- خطی بودن ⇐ 1- شرط لازم ⇐ پاسخ ورودی صفر
2- شروط تابعی از زمان باشد

8- غیر خطی بودن ⇐ 1- وجود یک عدد ثابت + ورودی

2-1 اعمال یک تابع غیر خطی روی ورودی

3- شروط تابعی از ورودی باشد

۳ـ سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان پیوسته در زمان ـ انتگرال کانولوشن

در بخش قبل برخی خواص اساسی سیستم ها معرفی گردیدند. از میان این خواص دو خاصیت خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن نقش مهمی در تحلیل سیگنال و سیستم دارند. دلیل آن است که اولاً تحلیل سیستم‌های LTI ساده‌تر از سیستم‌های غیر LTI است و ابزار قوی برای تحلیل آن‌ها وجود دارد. ثانیاً بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان به صورت سیستم‌های LTI مدل کرد. یکی از مهم‌ترین این ابزار قضیه کانولوشن می‌باشد که در سیستم‌های پیوسته در زمان به صورت انتگرال کانولوشن نمود پیدا می‌کند. در این بخش به بررسی انتگرال کانولوشن و خواص آن در این سیستم‌ها می‌پردازیم.

۳ـ۱ـ انتگرال کانولوشن

یکی از خواص مهم تابع ضربه، خاصیت غربالی آن است. برای تابع ضربه داریم:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

این رابطه را می‌توان به شکل دیگری تفسیر کرد. رابطه فوق نشان می‌دهد که هر سیگنال دلخواه مانند $x(t)$ را می‌توان در فضای بینهایت بعدی برحسب ضربه واحد و شیفت‌یافته‌های آن نوشت. اگر سیگنال $x(t)$ به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ اعمال شود به راحتی می‌توان نشان داد که خروجی این سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

معادله فوق را انتگرال کانولوشن می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

انتگرال کانولوشن نمایش خروجی یک سیستم LTI برحسب ورودی و پاسخ ضربه آن می‌باشد و نشان می‌دهد که برای یک سیستم LTI می‌توان از روی پاسخ ضربه و ورودی آن، خروجی را تعیین کرد. روش محاسبه انتگرال کانولوشن ساده و به صورت زیر است:

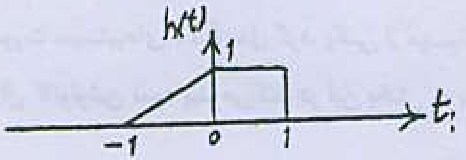
(۱) ابتدا تغییر متغیر t به τ می‌دهیم تا $x(\tau)$ و $h(\tau)$ بدست آیند.

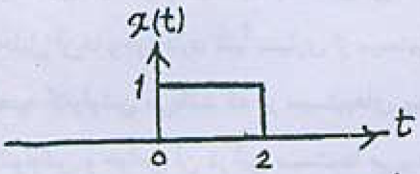
(۲) یکی از دو سیگنال را ثابت نگه داشته و دیگری را نسبت به محور عمودی معکوس می‌کنیم. در این مرحله $x(\tau)$ و $h(-\tau)$ (یا $h(\tau)$ و $x(-\tau)$) بدست می‌آیند.

(۳) سیگنال معکوس شده را به اندازه $|t|$ به سمت راست به ازای $t > 0$ و به سمت چپ به ازای $t < 0$ شیفت داده تا سیگنال‌های $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ (یا $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$) حاصل شوند.

(۴) t را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر داده و با انتگرالگیری از حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ (یا $h(\tau)x(t-\tau)$) مقدار $y(t)$ را به ازاء تمام tها بدست می‌آوریم.

مثال: فرض کنید پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی یک سیستم LTI ($x(t)$) در شکل زیر نشان داده شده‌اند. پاسخ $y(t)$ این سیستم را از طریق انتگرال کانولوشن بدست آورید.

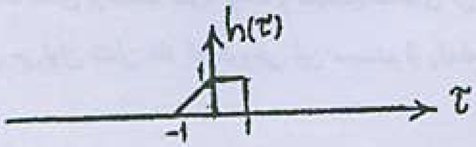


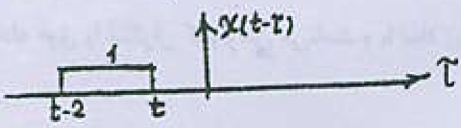


حل: سیگنال $h(t)$ را ثابت نگه داشته و $x(t)$ را معکوس کرده و حرکت می‌دهیم. روابط این سیگنال‌ها و وضعیت‌های مختلف در زیر نشان داده شده‌اند.

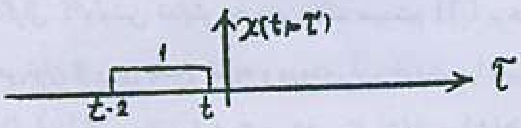
$$h(\tau)=\begin{cases}1+\tau & 1<\tau<0\rightarrow \quad \text{رابطه II} \\ 1 & 0<\tau<1\rightarrow \quad \text{رابطه III}\end{cases}$$

$$x(t-\tau)=1 \quad \text{رابطه I}$$
$$t-2<\tau<t$$

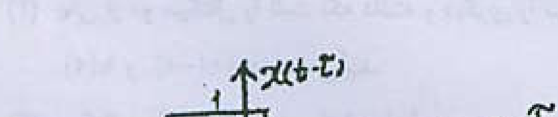




I : $t\leq -1$ با II و III تلاقی ندارد $\quad : \quad y(t)=0$



I : $-1<t\leq 0$ در حال ورود به II است. $\quad : \quad y(t)=\int_{-1}^{t}(1+\tau)d\tau$

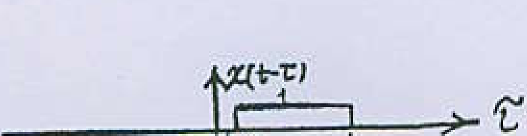


$$0<t\leq 1 \quad : \quad y(t)=\int_{-1}^{0}(1+\tau)d\tau+\int_{0}^{t}d\tau$$

I در حال ورود به III است و II کاملاً درون I است.

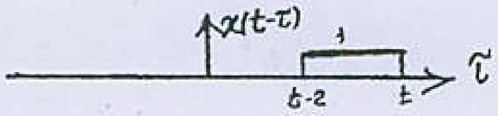
$$1<t\leq 2 \quad : \quad y(t)=\int_{t-2}^{0}(1+\tau)d\tau+\int_{0}^{1}d\tau$$

I در حال خروج از II است و III کاملاً درون I است.



$$2<t\leq 3 \quad : \quad y(t)=\int_{t-2}^{1}d\tau$$

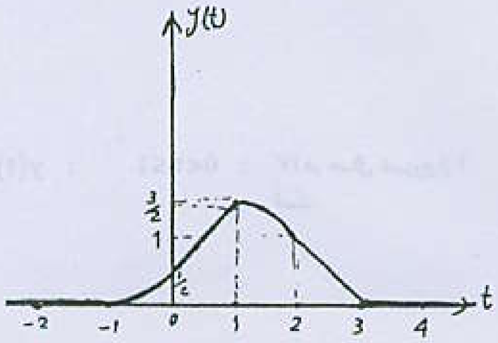
I در حال خروج از II است.



$y(t)=0 \quad : \quad 3<t$: I با II و III تلاقی ندارد.

با محاسبه انتگرال‌های فوق خواهیم داشت:

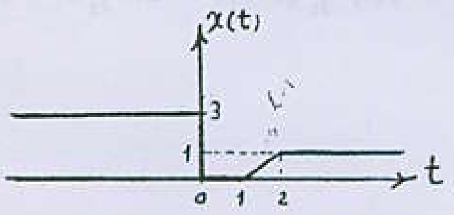
$$y(t)=\begin{cases} 0 & t\le -1 \\ \dfrac{t^2}{2}+t+\dfrac{1}{2} & -1<t\le 0 \\ t+\dfrac{1}{2} & 0<t\le 1 \\ -\dfrac{t^2}{2}+t+1 & 1<t\le 2 \\ 3-t & 2<t\le 3 \\ 0 & 3<t \end{cases}$$

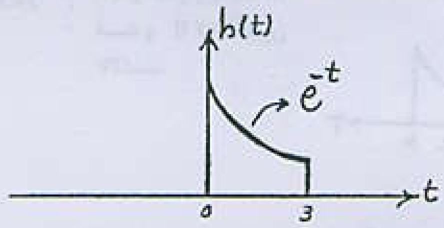


تذکر: ماهیت انتگرال کانولوشن نشان‌دهنده پیوسته بودن سیگنال $y(t)$ است. پس اگر سیگنال‌های $x(t)$ و $h(t)$ فاقد توابع ویژه مانند ضربه باشند، سیگنال $y(t)$ یک تابع پیوسته است.

تذکر: ملاحظه کنید که $x(t)$ در خارج از فاصله $[0,2]$ و $h(t)$ در خارج از فاصله $[-1,1]$ متحد با صفر می‌باشند. بنابراین $y(t)$ در خارج از فاصله $[0+(-1)\ ,\ 2+1]$ متحد با صفر شده است. این خاصیت یکی از خواص مهم انتگرال کانولوشن است که در ادامه بررسی خواهد شد.

مثال: با فرض آن‌که $x(t)$ و $h(t)$ مطابق شکل‌های زیر باشند، پاسخ $y(t)$ را بدست آورید.

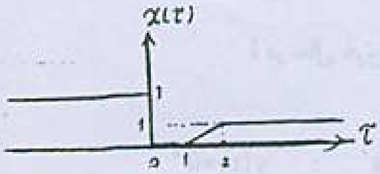


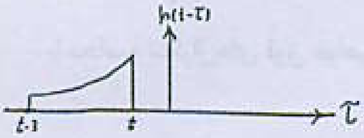


حل: سیگنال $x(t)$ را ثابت نگه داشته و $h(t)$ را معکوس کرده و حرکت می‌دهیم. روابط و وضعیت‌های مختلف این سیگنال‌ها در زیر نشان داده شده‌اند.

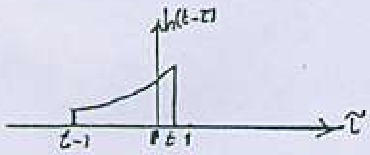
$$x(\tau)=\begin{cases} 3 & \tau<0 & \leftarrow \text{I رابطه} \\ 0 & 0<\tau<1 & \\ \tau-1 & 1<\tau<2 & \leftarrow \text{II رابطه} \\ 1 & \tau>2 & \leftarrow \text{III رابطه} \end{cases}$$

رابطه IV ← $h(t-\tau)=e^{-(t-\tau)} \quad t-3<\tau<t$

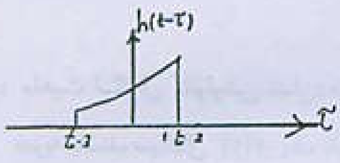




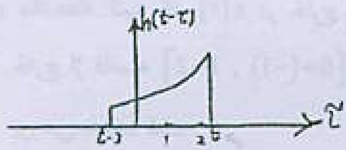
IV فقط با I تلاقی دارد. : $t \le 0$: $y(t)=\int_{t-3}^{t} 3e^{-(t-\tau)}\,d\tau$



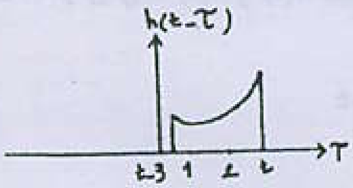
IV در حال خروج از I است. : $0<t\le 1$: $y(t)=\int_{t-3}^{0} 3e^{-(t-\tau)}\,d\tau$



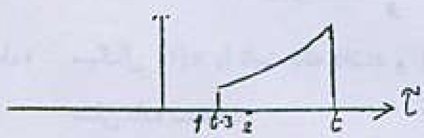
IV در حال خروج از I و ورود به II است. : $1<t\le 2$: $y(t)=\int_{t-3}^{0} 3e^{-(t-\tau)}\,d\tau+\int_{1}^{t}(\tau-1)e^{-(t-\tau)}\,d\tau$



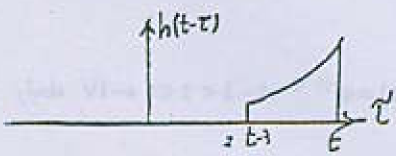
IV در حال خروج از I ورود به III است و II کاملاً درون IV است. : $2<t\le 3$: $y(t)=\int_{t-3}^{0} 3e^{-(t-\tau)}\,d\tau+\int_{1}^{2}(\tau-1)e^{-(t-\tau)}\,d\tau+\int_{2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau$



IV در حال ورود به III است و II کاملاً درون IV است. : $3<t\le 4$: $y(t)=\int_{1}^{2}(\tau-1)e^{-(t-\tau)}\,d\tau+\int_{2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau$



IV در حال ورود به III و خروج از II است. : $4<t\le 5$: $y(t)=\int_{t-3}^{2}(\tau-1)e^{-(t-\tau)}\,d\tau+\int_{2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau$



IV کاملاً درون III است. : $5<t$: $y(t)=\int_{t-3}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau$

تذکر: تابع ضربه در اپراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل می‌کند:

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)\Rightarrow x(t)*\delta(t)=x(t)$$

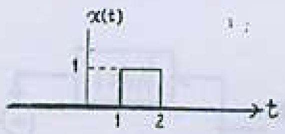
تذکر: تابع پله در اپراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل می‌کند:

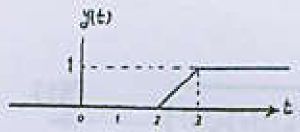
$$x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau \Rightarrow x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

نتیجه: با توجه به رابطه‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت پاسخ ضربه یک سیستم انتگرالگیر تابع پله واحد می‌باشد.

شکل ۳-۱- پاسخ ضربه انتگرال‌گیر برابر پله واحد است.

تست نمونه - (سراسری ۸۵) ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است. پاسخ ضربه سیستم چیست؟





۱) $u(t-1)$ ۲) $u(t-2)$ ۳) $u(t-1)-u(t-2)$ ۴) $\delta(t-1)-\delta(t-2)$

حل: سیستم فوق علاوه بر انتگرال‌گیری از ورودی، یک واحد نیز آن را به سمت راست شیفت داده است. بنابراین پاسخ ضربه آن $u(t-1)$ است و گزینه (۱) صحیح است.

۳-۲- خواص انتگرال کانولوشن

در این بخش برخی از خواص مهم انتگرال کانولوشن معرفی و نتایج آن ها بررسی می گردند.

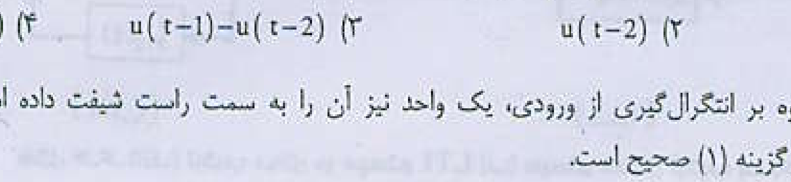
(۱) خاصیت عرض کانولوشن:

اگر $x(t)$ در خارج از فاصله $[a_1, b_1]$ و $h(t)$ در خارج از فاصله $[a_2, b_2]$ متحد با صفر باشند، آنگاه $y(t)=x(t)*h(t)$ در خارج از فاصله $[a_1+a_2\,,\,b_1+b_2]$ متحد با صفر است.

(۲) خاصیت جابجائی:

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

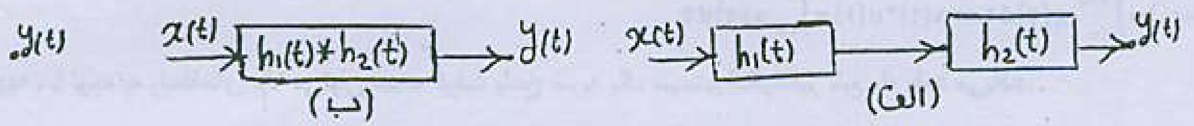
نتیجه: خروجی‌های دو سیستم LTI نشان داده شده در شکل (۳-۲) با یکدیگر برابر می‌باشند. به عبارت دیگر می‌توان جای پاسخ ضربه و ورودی را با یکدیگر تعویض کرد.



شکل ۳-۲- دو شکل نشان داده شده در (الف) و (ب) معادل می‌باشند.

(۳) خاصیت شرکت‌پذیری: $x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$

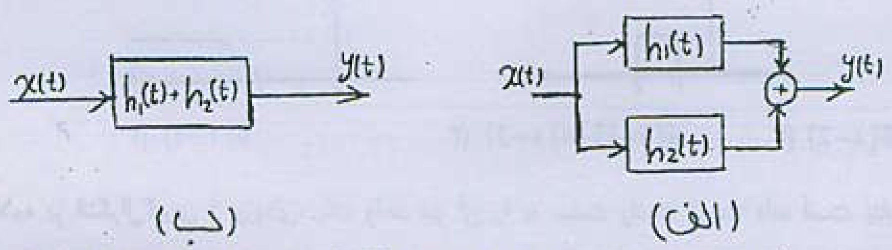
نتیجه: دو سیستم LTI سری با پاسخ ضربه‌های $h_1(t)$ و $h_2(t)$ (شکل (۳-۳- الف)) را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1(t)*h_2(t)$ (شکل (۳-۳- ب)) تبدیل کرد.



شکل ۳-۳- (الف) ترکیب سری دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بند (الف)

(۴) خاصیت توزیع‌پذیری کانولوشن روی جمع: $x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

نتیجه: دو سیستم LTI موازی با پاسخ‌های ضربه $h_1(t)$ و $h_2(t)$ (شکل ۳-۴- الف)) را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1(t)+h_2(t)$ (شکل (۳-۴- ب)) تبدیل کرد.



شکل ۳-۴- (الف) ترکیب موازی دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بند (الف)

(۵) خاصیت مشتق کانولوشن: $\text{if } \ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=x(t)*\frac{dh(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$

نتیجه: اگر از ورودی یک سیستم LTI مشتق گرفته شود، آنگاه از خروجی نیز مشتق گرفته خواهد شد. به عبارت دیگر اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد، آنگاه پاسخ آن سیستم به ورودی $\frac{dx}{dt}$ برابر $\frac{dy}{dt}$ خواهد بود.

(۶) خاصیت سطح زیرمنحنی کانولوشن: اگر سطح زیر منحنی یک سیگنال مانند $x(t)$ را با $A_x=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt$ تعریف کنیم آنگاه:

$\text{if } \ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow A_y=A_x A_h$

به عبارت دیگر سطح زیر منحنی حاصل کانولوشن برابر است باحاصلضرب سطوح زیرمنحنی سیگنال‌های کانولو شده.

(۷) خاصیت گشتاور مرتبه اول کانولوشن: اگر گشتاور مرتبه اول یک سیگنال را به صورت $m_x=\int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)dt$ تعریف کنیم و A_x نیز سطح زیر منحنی این سیگنال مطابق تعریف خاصیت (۶) باشد، آنگاه:

$\text{if } \ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow m_y=m_x A_h+m_h A_x$

به عبارت دیگر گشتاور مرتبه اول حاصل کانولوشن برابر است با مجموع حاصلضرب سطح یکی از سیگنال‌های کانولو شده در گشتاور مرتبه اول دیگری.

(۸) خاصیت مرکز ثقل کانولوشن: اگر مرکز ثقل یک سیگنال را به صورت $\eta_x=\frac{m_x}{A_x}$ تعریف کنیم که m_x و A_x به ترتیب گشتاور مرتبه اول و سطح زیرمنحنی این سیگنال باشند، آنگاه:

$$\text{if } \ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow \eta_y=\eta_x+\eta_h$$

به عبارت دیگر مرکز ثقل حاصل کانولوشن برابر است با مجموع مراکز ثقل سیگنال‌های کانوالو شده.

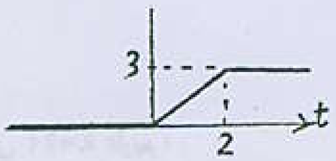
تست نمونه ـ (سراسری ۸۱) سطح زیر منحنی $v(t)$ به صورت $A_v=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)dt$ تعریف می‌شود. اگر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد که $x(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی و $h(t)$ پاسخ ضربه آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی یعنی A_y کدام است؟

(۱) $A_y=A_x+A_h$ (۲) $A_y=A_x A_h$

(۳) $A_y=A_x*A_h$ (۴) رابطه مشخصی بین A_y، A_x و A_h وجود ندارد.

حل: با توجه به خاصیت (۶) انتگرال کانولوشن گزینه(۲) صحیح می‌باشد.

تست نمونه ـ (آزادی ۷۹) در شکل روبه‌رو پاسخ پله یک سیستم LTI نشان داده شده است. اگر به سیستم فوق ورودی $x(t)=\begin{cases}0 & |t|<1\\ 1 & |t|\geq 1\end{cases}$ را اعمال کنیم، خروجی سیستم در لحظه $t=0$ چقدر خواهد بود؟

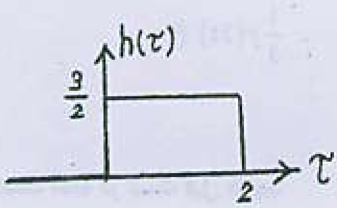


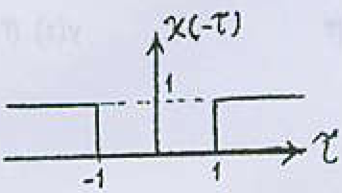
۱) 0 ۲) 1.5 ۳) 2.25 ۴) 3

حل:

$$y(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(-\tau)d\tau$$

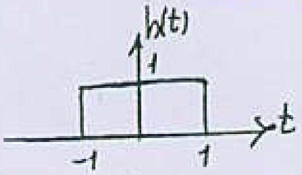
در شکل‌های زیر $h(\tau)=\frac{ds(\tau)}{d\tau}$ و $x(-\tau)$ رسم شده‌اند.





در نتیجه $y(0)=\frac{3}{2}\times 1\times 1=\frac{3}{2}$ می‌شود و گزینه (۲) صحیح است.

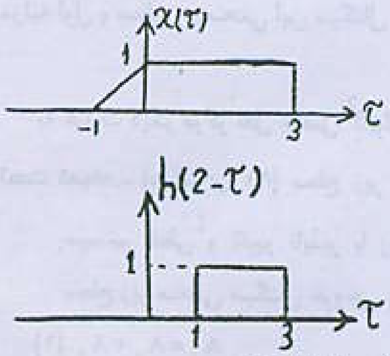
تست نمونه ـ (سراسری ۸۲) پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است.



اگر ورودی سیستم برابر با $x(t)=U_{-2}(t+1)-U_{-2}(t)-U_{-1}(t-3)$ باشد، در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظه $t=2$ کدام است؟ ($U_{-1}(t)$ معرفی تابع پله واحد و $U_{-2}(t)$ معرف تابع شیب واحد می‌باشد)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 1.5

حل: در شکل زیر $x(\tau)$ و $h(2-\tau)$ رسم شده‌اند. بنابراین داریم:



$$y(2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(2-\tau)d\tau=2\times1=2$$

پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۳) اگر $z(t)=x(t)*y(t)$ باشد، در آن صورت $x(2t)*y(2t)$ برابر است با:

۱) $z(2t)$ ۲) $2z(2t)$ ۳) $\frac{1}{4}z(2t)$ ۴) $\frac{1}{2}z(2t)$

حل:

$$x(2t)*y(2t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(2\tau)y(2(t-\tau))d\tau$$

با فرض $\lambda=2\tau$ داریم:

$$x(2t)*y(2t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)y(2t-\lambda)\frac{d\lambda}{2}=\frac{1}{2}z(2t)$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

تذکر: اگر $z(t)=x(t)*y(t)$ باشد آن‌گاه داریم $\frac{1}{|k|}z(kt)=x(kt)*y(kt)$

تست نمونه ـ (آزاد ۸۱) اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد، آنگاه $x(3t)*h(3t)$ برابر است با:

۱) $y(3t)$ ۲) $\frac{1}{3}y(3t)$ ۳) $y(t)$ ۴) $\frac{1}{3}y(t)$

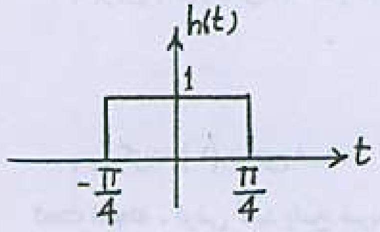
حل:

با توجه به فرمول به‌دست آمده در تست قبل داریم:

$$x(3t)\times h(3t)=\frac{1}{3}y(3t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت نشان داده شده در شکل مقابل است:

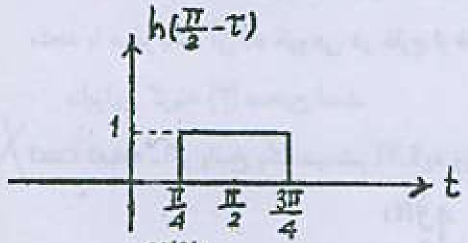


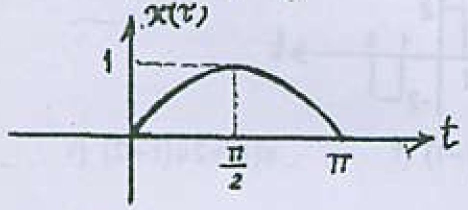
در صورتی که ورودی این سیستم $x(t)=\left[u(t)-u(t-\pi)\right]\sin(t)$ باشد، خروجی آن در لحظه $t=\frac{\pi}{2}$ کدام مقدار خواهد بود؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) π ۴) صفر

حل :

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(\tau)d\tau=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$





بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۰) مقدار $y(t)$ را به ازاء $t=1$ در رابطه $y(t)=\left[e^{-t}u(t)\right]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$ تقریباً چقدر است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{-1}{e}$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) $\frac{-2}{e}$

حل :

با توجه به خاصیت تابع ضربه در کانولوشن داریم :

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3k)}u(t-3k)$$

بنابراین با قرار دادن $t=1$ به‌دست می‌آوریم :

$$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(1-3k)}u(1-3k)=\sum_{k=-\infty}^{0} e^{-(1-3k)}=e^{-1}+e^{-4}+e^{-7}+\ldots\ldots\approx e^{-1}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه ـ فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI پیوسته در زمان $h(t)=u(t)-u(t-1)$ باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟

۱) هر ورودی به این سیستم اعمال شود، عرض خروجی محدود خواهد بود.

۲) هیچ ورودی برای این سیستم وجود ندارد که خروجی با عرض محدود دهد.

۳) برخی از ورودی‌ها ممکن است برای این سیستم خروجی با عرض محدود ایجاد کنند.

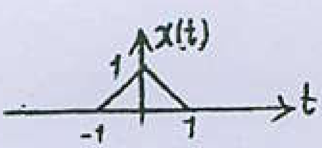
۴) خروجی این سیستم ممکن است عرض محدود یا عرض نامحدود باشد اما این امر به شکل ورودی بستگی ندارد.

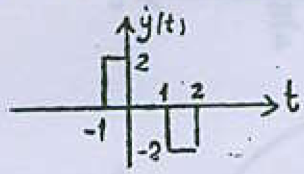
حل :

با توجه به آن‌که پاسخ ضربه این سیستم در خارج از فاصله $[0,1]$ برابر صفر است و با فرض آن‌که ورودی در خارج از فاصله $[a,b]$ متحد با صفر باشد آن‌گاه خروجی در خارج از فاصله $[a,b+1]$ متحد با صفر می‌گردد.

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تست نمونه ـ اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد، پاسخ این سیستم به ورودی شیب واحد کدام است؟

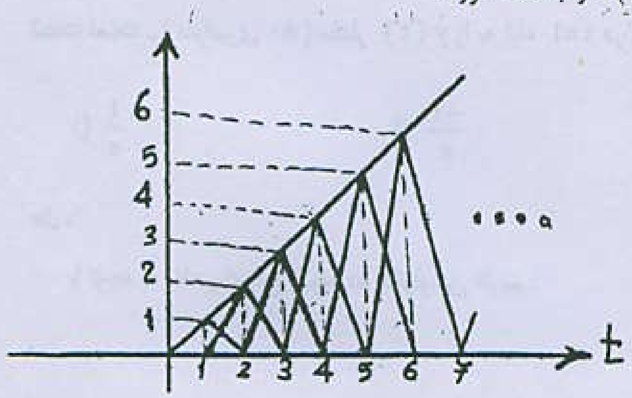




۱) $u(t)+2u(t-2)$ ۲) $2u(t)+2u(t-1)$ ۳) $u(t)+u(t-3)$ ۴) هیچکدام

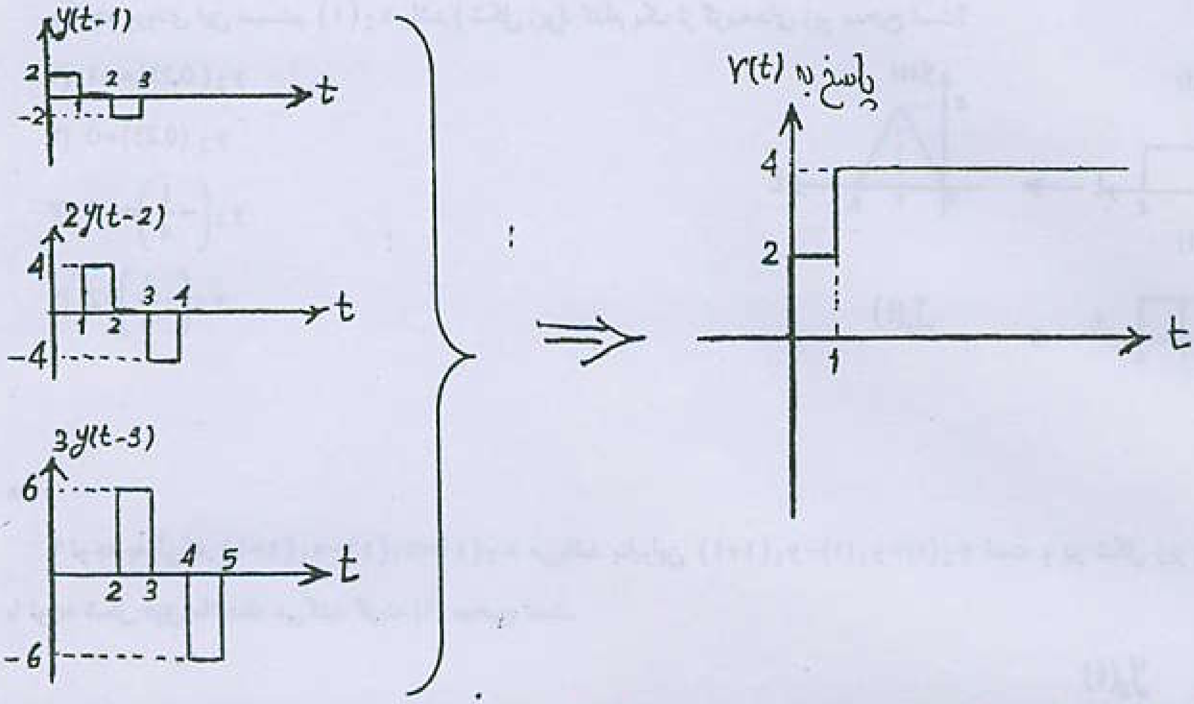
حل :

با توجه به شکل زیر می‌توان رابطه بین تابع شیب واحد و سیگنال $x(t)$ را به‌دست آورد:

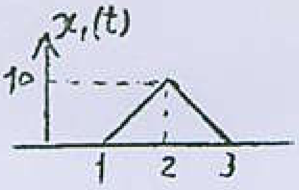


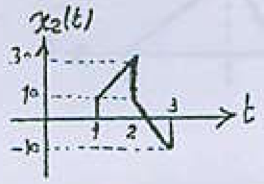
$$r(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x(t-k)$$

بنابراین با توجه به LTI بودن سیستم پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد $\sum_{k=1}^{+\infty} k\,y(t-k)$ می‌باشد که با توجه به شکل‌های زیر برابر $2u(t)+2u(t-1)$ است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



تست نمونه ـ اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)=e^{-t}u(t-2)+2u(t)$ باشد، پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ کدام است؟





۱) $y_2(t)=4u(t)+e^{-t}u(t-2)+e^{-2}\delta(t-2)+2\delta(t)$

۲) $y_2(t)=2u(t)+e^{-t}u(t-2)+\delta(t-2)+\delta(t)$

۳) $y_2(t)=2u(t)+e^{-t}u(t-2)$

۴) هیچکدام

حل :

با توجه به شکل‌های $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ نتیجه می‌گیریم:

$$x_2(t)=2x_1(t)+\frac{dx_1(t)}{dt}$$

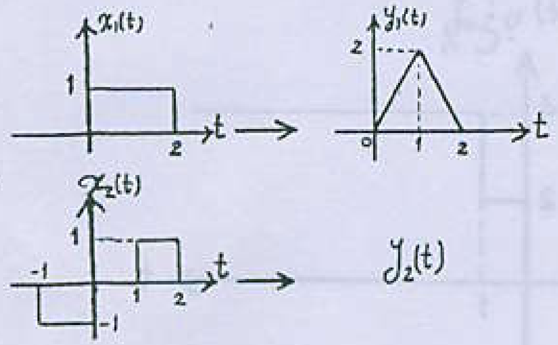
بنابراین:

$$y_2(t)=2y_1(t)+\frac{dy_1(t)}{dt}=2\left(e^{-t}u(t-2)+2u(t)\right)+\left(e^{-t}\delta(t-2)-e^{-t}u(t-2)+2\delta(t)\right)$$

$$=e^{-t}u(t-2)+4u(t)+2\delta(t)+e^{-2}\delta(t-2)$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۴) می‌دانیم در صورتی‌که ورودی یک سیستم LTI، $x_1(t)$ باشد، خروجی آن $y_1(t)$ خواهد بود (شکل زیر). چنانچه ورودی این سیستم $x_2(t)$ باشد (شکل زیر)، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



۱) $y_2(0.25)=-1$

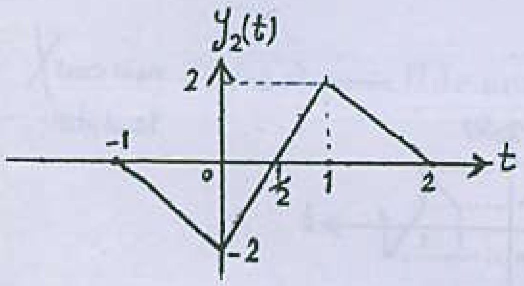
۲) $y_2(0.25)=0$

۳) $y_2\left(-\frac{1}{4}\right)=-2$

۴) $y_2\left(-\frac{1}{4}\right)=2$

حل:

با توجه به آن‌که $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t+1)$ می‌باشد بنابراین $y_2(t)=y_1(t)-y_1(t+1)$ است و در شکل زیر رسم شده است. با توجه شکل فوق ملاحظه می‌کنید گزینه (۱) صحیح است.



۴ـ سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان گسسته در زمان ـ جمع کانولوشن

در این بخش، قضیه کانولوشن را برای سیستم‌های گسسته در زمان که به صورت جمع کانولوشن مطرح می‌شود، بررسی خواهیم کرد. سپس در ادامه خواص جمع کانولوشن نیز معرفی می‌گردند.

۴ـ۱ـ جمع کانولوشن :

خاصیت غربالی تابع ضربه، برای سیگنال‌های گسسته در زمان به صورت زیر است :

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

از معادله فوق نیز می‌توان تفسیر نوشتن هر سیگنال دلخواه مانند $x[n]$ برحسب توابع ضربه و شیفت‌یافته‌های آن را داشت. لذا با توجه به خواص همگنی و جمع‌پذیری یک سیستم LTI ، می‌توان خروجی هر سیستم LTI گسسته در زمان را به صورت زیر بدست آورد:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

معادله فوق را جمع کانولوشن می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

جمع کانولوشن نمایش خروجی یک سیستم LTI گسسته در زمان برحسب ورودی و پاسخ ضربه آن می‌باشد و نشان می‌دهد که در سیستم‌های گسسته در زمان LTI نیز می‌توان خروجی را از روی ورودی و پاسخ ضربه بدست آورد.

روش محاسبه جمع کانولوشن مانند انتگرال کانولوشن و شامل مراحل زیر است:

(۱) ابتدا تغییر متغیر n به k داده تا $x[k]$ و $h[k]$ بدست آیند.

(۲) یکی از دو سیگنال را ثابت نگه داشته و دیگری را نسبت به محور عمودی معکوس می‌کنیم. در این مرحله $x[k]$ و $h[-k]$ (یا $h[k]$ و $x[-k]$) بدست می‌آیند.

(۳) سیگنال معکوس شده را به اندازه $|n|$ به سمت راست به ازای $n>0$ و به سمت چپ به ازای $n<0$ شیفت داده تا سیگنال‌های $x[k]$ و $h[n-k]$ (یا $h[k]$ و $x[n-k]$) حاصل شوند.

(۴) n را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر داده و با محاسبه مجموع حاصلضرب $x[k]h[n-k]$ (یا $h[k]x[n-k]$) مقدار $y[n]$ را به ازاء تمام nها بدست می‌آوریم.

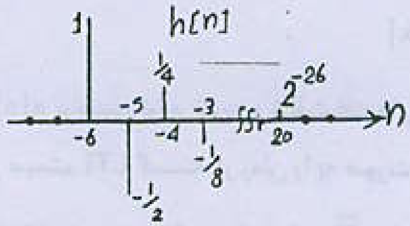
تذکر: محاسبه جمع کانولوشن کاملاً مشابه محاسبه انتگرال کانولوشن است. اما به دو دلیل محاسبه حاصل جمع کانولوشن اندکی مشکل‌تر از انتگرال کانولوشن است. اولاً حاصل جمع کانولوشن گسسته است و در تعیین بازه‌ها باید دقت بیشتری شود. ثانیاً محاسبه حاصل جمع معمولاً مشکل‌تر از محاسبه انتگرال می‌باشد. در محاسبه حاصل جمع ، فرمول مجموع N جمله از یک تصاعد هندسی، در برخی اوقات مفید می‌باشد. فرمول فوق عبارتست از:

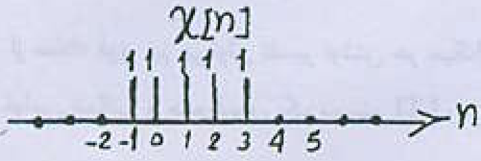
S_N : مجموع N جمله اول یک تصاعد هندسی $\qquad S_N=\dfrac{t_1\left(1-q^N\right)}{1-q}$

q : قدر نسبت تصاعد هندسی

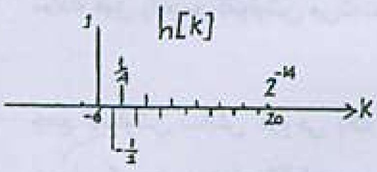
t_1 : جمله اول تصاعد هندسی $\qquad \text{if } |q|<1 \rightarrow \underset{N\to\infty}{S_N}=\dfrac{t_1}{1-q}$

مثال: فرض کنید پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی $x[n]$ یک سیستم LTI مطابق با شکل‌های زیر باشند. پاسخ $y[n]$ این سیستم را بدست آورید.

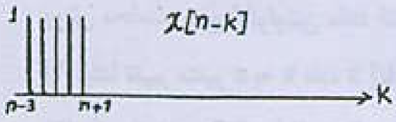




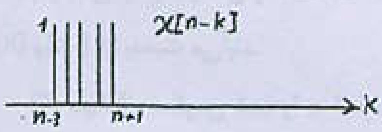
حل: سیگنال $h[n]$ را ثابت نگه داشته و $x[n]$ را معکوس کرده و حرکت می‌دهیم. روابط این سیگنال‌ها و وضعیت‌های مختلف در زیر نشان داده شده‌اند.



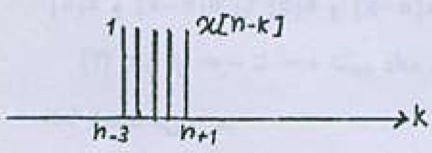
$h[k]=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+6} \quad -6\le k\le 20$ رابطه II $\qquad x[n-k]=1 \quad n-3\le k\le n+1$ رابطه I



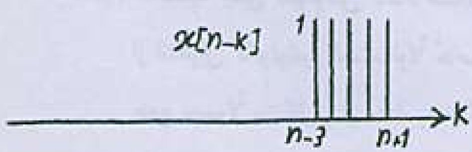
I با II تلاقی ندارد. : $n\le -8 \quad \rightarrow \quad y[n]=0$



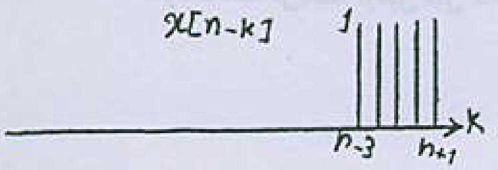
I در حال ورود به II است. : $-7\le n\le -4 \quad \rightarrow \quad y[n]=\sum_{k=-6}^{n+1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+6}$



I کاملاً درون II است. : $-3\le n\le 19 \quad \rightarrow \quad y[n]=\sum_{k=n-3}^{n+1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+6}$



I در حال خروج از II است. : $20\le n\le 23 \quad \rightarrow \quad y[n]=\sum_{k=n-3}^{20}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+6}$



I با II تلاقی ندارد. : $n\ge 24 \quad \rightarrow \quad y[n]=0$

هر کدام از مجموع های به‌دست آمده را می‌توان با فرمول مجموع جملات یک تصاعد هندسی محاسبه کرد :

$$\sum_{k=-6}^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+7}=\frac{1\times\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+8}\right)}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+8}\right)$$

$$\sum_{k=n-3}^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}+\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+7}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}\times\frac{1+\frac{1}{32}}{\frac{3}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{-1}{8}\right)\times\frac{11}{16}=\frac{-11}{128}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\sum_{k=n-3}^{20}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+4}+\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{26}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{24-n}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{-1}{8}\right)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{24-n}\right)=\frac{-1}{12}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{24}\right)$$

بنابراین داریم :

$$y[n]=\begin{cases}0 & n\le -8\\ \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+8}\right) & -7\le n\le -4\\ \frac{-11}{128}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} & -3\le n\le 19\\ \frac{-1}{12}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{24}\right) & 20\le n\le 23\\ 0 & 24\le n\end{cases}$$

تذکر : مجدداً مانند کانولوشن پیوسته در زمان ملاحظه می‌کنید با توجه به آن‌که $x[n]$ در خارج از فاصله $[-1,3]$ و $h[n]$ در خارج از فاصله $[-6,20]$ متحد با صفر می‌باشند، $y[n]$ در خارج از فاصله $[-7,23]$ متحد با صفر می‌گردد. این خاصیت نیز مربوط به عرض کانولوشن است که در ادامه بررسی و معرفی خواهد شد.

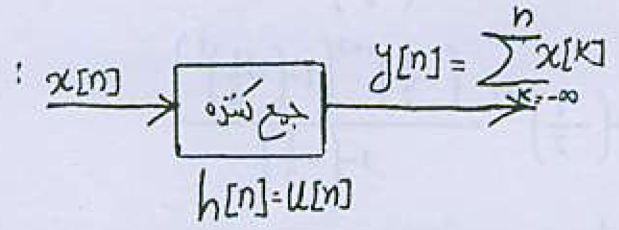
تذکر : تابع ضربه گسسته در زمان نیز در اپراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل می‌کند:

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]\Rightarrow x[n]*\delta[n]=x[n]$$

تذکر: تابع پله در اپراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل کند:

$$x[n]*u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \Rightarrow x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

نتیجه ـ با توجه به روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت پاسخ ضربه یک سیستم جمع‌کننده تابع پله واحد می‌باشد.



شکل ۴ـ۱ـ پاسخ ضربه جمع کننده برابر پله واحد است.

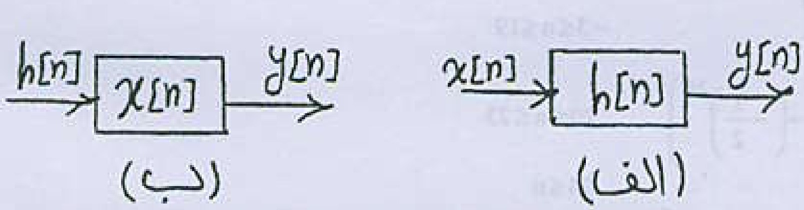
۴ـ۲ـ خواص جمع کانولوشن

جمع کانولوشن نیز مانند انتگرال کانولوشن دارای خواصی است که اکثر این خواص مشابه خواص انتگرال کانولوشن می‌باشند. در این بخش به معرفی و بررسی این خواص می‌پردازیم.

(۱) خاصیت عرض کانولوشن: اگر $x[n]$ در خارج از فاصله $[a_1,b_1]$ و $h[n]$ در خارج از فاصله $[a_2,b_2]$ متحد با صفر باشند، آنگاه $y[n]=x[n]*h[n]$ در خارج از فاصله $[a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2]$ متحد با صفر است.

(۲) خاصیت جابجایی: $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

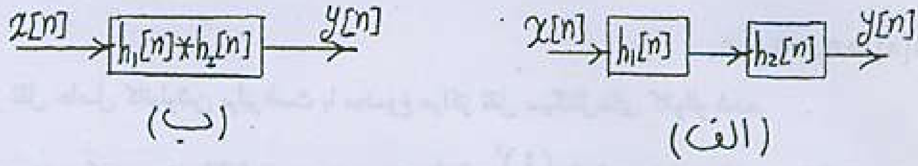
نتیجه: خروجی‌های سیستم‌های LTI نشان داده شده در شکل (۴ـ۲) با یکدیگر برابر می‌باشند. به عبارت دیگر می‌توان جای پاسخ ضربه و ورودی را با یکدیگر تعویض کرد.



شکل ۴ـ۲ـ دو شکل نشان داده شده در (الف) و (ب) معادل می‌باشند.

(۳) خاصیت شرکت‌پذیری: $x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$

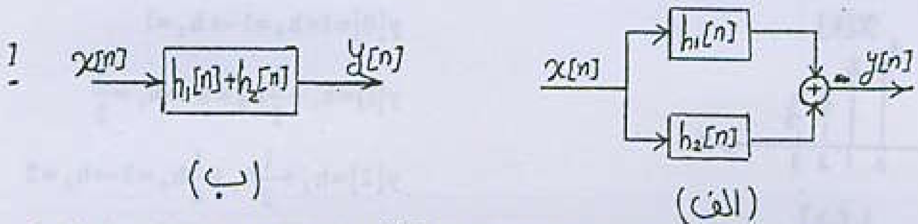
نتیجه: دو سیستم LTI سری با پاسخ ضربه‌های ضربه $h_1[n]$ و $h_2[n]$ (شکل (۴-۳- الف)) را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1[n]*h_2[n]$ (شکل (۴-۳- ب)) تبدیل کرد.



شکل ۴-۳- (الف) ترکیب سری دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بلد (الف)

(۴) خاصیت توزیع‌پذیری کانولوشن روی جمع: $x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

نتیجه: دو سیستم LTI موازی با پاسخ ضربه‌های $h_1[n]$ و $h_2[n]$ (شکل (۴-۴- الف)) را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1[n]+h_2[n]$ (شکل (۴-۴- ب)) تبدیل کرد.



شکل ۳-۴- (الف) ترکیب موازی دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بلد (الف)

(۵) خاصیت نمو کانولوشن: $\text{if } y[n]=x[n]*h[n] \Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]*(h[n]-h[n-1])=h[n]*(x[n]-x[n-1])$

نتیجه: اگر از ورودی یک سیستم LTI نمو گرفته شود، آنگاه ازخروجی نیز نمو گرفته خواهد شد. به عبارت دیگر اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x[n]$ برابر $y[n]$ باشد، آنگاه پاسخ سیستم فوق به ورودی $x[n]-x[n-1]$ برابر $y[n]-y[n-1]$ خواهد بود.

(۶) خاصیت جمع نمونه‌های یک سیگنال: اگر A_x را به صورت $A_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$ تعریف کنیم، آنگاه:

$$\text{if } \; y[n]=x[n]*h[n] \Rightarrow A_y=A_x A_h$$

به عبارت دیگر مجموع نمونه‌های حاصل کانولوشن برابر است با حاصلضرب مجموع نمونه‌های سیگنال‌های کانوالوشده.

(۷) خاصیت گشتاور مرتبه اول کانولوشن: اگر گشتاور مرتبه اول یک سیگنال گسسته در زمان را به صورت $m_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,x[n]$ تعریف کنیم و A_x نیز مجموع نمونه‌های این سیگنال مطابق با تعریف خاصیت (۶) باشد، آنگاه،

$$\text{if } \; y[n]=x[n]*h[n] \Rightarrow m_y=m_x A_h+m_h A_x$$

به عبارت دیگر گشتاور مرتبه اول حاصل کانولوشن برابر است با مجموع حاصلضرب جمع نمونه‌های یکی از سیگنال‌های کانوالو شده در گشتاور مرتبه اول دیگری.

(۸) خاصیت مرکز ثقل کانولوشن: اگر مرکز ثقل یک سیگنال را به صورت $\eta_x=\frac{m_x}{A_x}$ تعریف کنیم که m_x و A_x به ترتیب گشتاور مرتبه اول و مجموع نمونه‌های این سیگنال باشند، آنگاه:

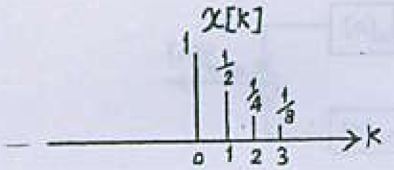
$$\text{if}\quad y[n]=x[n]*h[n]\Rightarrow\eta_y=\eta_x+\eta_h$$

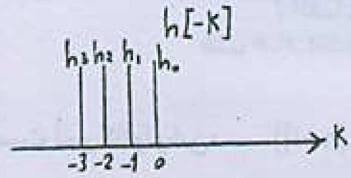
به عبارت دیگر مرکز ثقل حاصل کانولوشن برابر است با مجموع مراکز ثقل سیگنال‌های کانوالو شده.

تست نمونه: (آزاد ۸۰) ورودی یک سیستم LTI سببی به صورت $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می‌باشد. اگر $y[0]=1$ و $y[1]=2$ و $y[2]=3$ و $y[3]=4$ باشند، مقدار پاسخ ضربه سیستم در $n=3$ یعنی $h[3]$ کدام است؟

(۱) 2 (۲) 1.5 (۳) 1 (۴) 2.5

حل: با توجه به رابطه جمع کانولوشن و سببی بودن سیستم (در بخش بعد بررسی می‌گردد) و اطلاعات داده شده، شکل‌های زیر را می‌توان برای $x[k]$ و $h[-k]$ رسم کرد.





$$y[0]=1\times h_0=1\rightarrow h_0=1$$

$$y[1]=h_1+\frac{1}{2}h_0=2\rightarrow h_1=\frac{3}{2}$$

$$y[2]=h_2+\frac{1}{2}h_1+\frac{1}{4}h_0=3\rightarrow h_2=2$$

$$y[3]=h_3+\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{4}h_1+\frac{1}{8}h_0=4\rightarrow h_3=\frac{5}{2}$$

پس گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

۵ ـ خواص سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

در دو بخش قبل به معرفی انتگرال و جمع کانولوشن و برخی خواص آن‌ها پرداختیم. در این بخش سایر خواص سیستم‌های LTI را با توجه به قضیه کانولوشن بررسی می‌کنیم. تأکید اصلی در این بخش سایر خواص سیستم‌های LTI مانند علی بودن، بدون حافظه بودن، پایداری و وارون‌پذیری بر مبنای پاسخ ضربه آن‌ها می‌باشد. در انتهای این بخش به معرفی و بررسی پاسخ پله سیستم‌های LTI می‌پردازیم.

۵ ـ ۱ـ سیستم‌های LTI حافظه‌دار و بدون حافظه

سیستم بدون حافظه سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد. حال اگر سیستم فوق LTI باشد و با فرض گسسته در زمان بودن داریم:

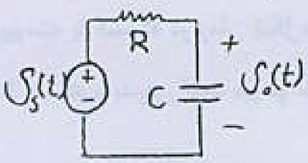
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]=\underbrace{h[0]x[n]}_{\text{این جمله فقط به حال ورودی بستگی دارد.}}+\underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} h[k]x[n-k]}_{\text{این جمله به گذشته و آینده ورودی بستگی دارد.}}$$

بنابراین شرط بدون حافظه بودن آن است که:

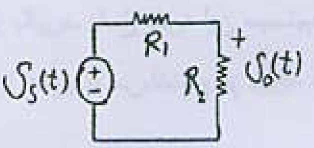
$$h[n]=0 \quad n\neq 0 \;\Rightarrow\; h[n]=k\,\delta[n]$$

این شرط برای سیستم LTI پیوسته در زمان نیز صادق است و برای این سیستم نیز شرط بدون حافظه بودن آن است که پاسخ ضربه $h(t)=k\,\delta(t)$ باشد. در غیر این صورت سیستم غیرعلی است.

مثال: دو مدار زیر را در نظر بگیرید. اگر $v_s(t)$ ورودی و $v_0(t)$ خروجی باشند، در مدار شماره (۱) پاسخ ضربه مدار $v_0(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\delta(t)$ است. لذا این مدار بدون حافظه است. در صورتی که اگر پاسخ ضربه مدار شماره (۲) را بدست آوریم، داریم $v_0(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$. پس مدار شماره (۲) حافظه‌دار است. بدیهی است خازن باعث حافظه‌دار شدن مدار (۲) شده است.



مدار شماره ②



مدار شماره ①

۵ ـ ۲ـ سیستم‌های LTI علی و غیرعلی

سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و زمان‌های قبل بستگی داشته باشد. حال اگر سیستم فوق LTI باشد و با فرض گسسته در زمان بودن داریم:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[K]x[n-k]}_{\text{این جمله فقط به آینده ورودی بستگی دارد.}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]}_{\text{این جمله به گذشته و حال ورودی بستگی دارد.}}$$

بنابراین شرط علی بودن یک سیستم LTI عبارتست از:

$h[n]=0 \quad n<0$

این شرط برای سیستم LTI پیوسته در زمان نیز صادق است و برای این سیستم نیز شرط علی بودن آن است که $h(t)=0 \quad t<0$. به عبارت دیگر یک سیستم LTI علی است اگر پاسخ ضربه آن در زمان‌های منفی (یعنی قبل از اعمال ضربه) صفر باشد.

تذکر : می‌توان نشان داد که پاسخ یک سیستم LTI علی به پله واحد (پاسخ پله سیستم) نیز در زمان‌های منفی صفر می‌باشد.

تذکر : گرچه علی بودن از خواص سیستم‌هاست، ولی معمولاً سیگنالی را که در زمان‌های منفی صفر باشد، سیگنال علی می‌نامند. بنابراین می‌توان گفت یک سیستم LTI به شرطی علی است که پاسخ ضربه‌اش یک سیگنال علی باشد.

مثال : مدارهای نشان داده شده در مثال بخش قبل هر دو دارای پاسخ ضربه‌ای می‌باشند که در زمان‌های منفی صفر هستند. بنابراین دو مدار فوق علی می‌باشند که با توجه به قابل ساخت بودن مدارات فوق امری بدیهی است.

۵ـ۳ـ سیستم‌های LTI پایدار و ناپایدار

سیستم ناپایدار با معیار BIBO سیستمی است که به ازای ورودی با دامنه محدود، خروجی با دامنه محدود بدهد. حال اگر سیستم فوق LTI باشد و با فرض گسسته در زمان بودن داریم:

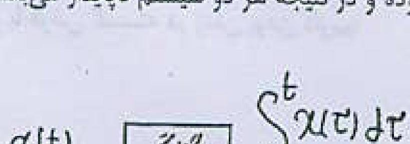
$$\text{if } |x[n]| \le A < \infty \;\Rightarrow\; |y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]| \le A \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

شرط آن که سیستم فوق پایدار باشد آن است که عبارت بدست آمده محدود گردد. یعنی $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ باشد. به عبارت دیگر یک سیستم LTI هنگامی پایدار است که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع‌پذیر باشد.

به طریقی مشابه نیز می‌توان نشان داد شرط پایداری یک سیستم LTI پیوسته در زمان مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه آن یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$ است.

مثال : سیستم تأخیردهنده پیوسته یا گسسته در زمان شکل‌های زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم‌ها به ترتیب $h(t)=\delta(t-t_0)$ و $h[n]=\delta[n-n_0]$ هستند و بدیهی است هر دو مطلقاً انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر می‌باشند و در نتیجه هر دو سیستم پایدار می‌باشند.

مثال : سیستم‌های انتگرال‌گیر یا جمع‌کننده انباره‌ای شکل‌های زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم‌ها به ترتیب $h(t)=u(t)$ و $h[n]=u[n]$ می‌باشند و بدیهی است هیچکدام مطلقاً انتگرال‌پذیر نبوده و در نتیجه هر دو سیستم ناپایدار می‌باشند.



۵ـ۴ـ سیستم‌های LTI وارون‌پذیر و وارون‌ناپذیر

اگر یک سیستم LTI وارون‌پذیر باشد، آنگاه می‌توان توسط یک سیستم وارون از روی خروجی آن، ورودی را بدون ابهام بدست آورد. می‌توان نشان داد که این سیستم وارون نیز LTI می‌باشد. در شکل (۵ ـ ۱) این دو سیستم و ترکیب آن‌ها که یک سیستم همانی را نتیجه می‌دهد، نشان داده شده‌اند.

شکل ۵ ـ (الف) ترکیب سری یک سیستم وارون‌پذیر با سیستم وارون آن

(ب) ترکیب کردن سیستم اصلی با سیستم وارون آن، سیستم همانی را نتیجه می‌دهد.

از آن‌جایی که پاسخ ضربه سیستم همانی $\delta(t)$ است و با توجه به خواص سیستم‌های سری داریم:

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t)$$

بنابراین اگر یک سیستم LTI وارون‌پذیر باشد، آنگاه حاصل کانوالو پاسخ ضربه آن با پاسخ ضربه سیستم وارون، ضربه واحد می‌شود. خاصیت فوق برای سیستم‌های LTI گسسته در زمان نیز صادق بوده و داریم:

$$h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

تذکر: روابط به‌دست آمده در واقع ارتباط بین پاسخ ضربه یک سیستم LTI وارون‌پذیر و پاسخ ضربه سیستم وارون را نشان می‌دهند. اگرچه این روابط برای تعیین پاسخ ضربه سیستم وارون موثر نمی‌باشند، اما در فصول آتی خواهیم دید که با استفاده از اپراتورهای فوریه، لاپلاس و z می‌توان روابط فوق را به روابطی موثر جهت تعیین سیستم وارون تبدیل کرد.

در جدول (۵ ـ ۱) هر چهار خاصیت ذکر شده برای سیستم‌های LTI بطور خلاصه آورده شده‌اند:

نوع سیستم / خاصیت	سیستم پیوسته در زمان	سیستم گسسته در زمان
بدون حافظه بودن	اگر $h(t)=k\delta(t)$ باشد، آنگاه سیستم بدون حافظه و در غیر این صورت با حافظه است.	اگر $h[n]=k\delta[n]$ باشد، آنگاه سیستم بدون حافظه و در غیر این صورت با حافظه است.
علی بودن	اگر $h(t)=0 \quad t<0$ باشد، آنگاه سیستم علی و در غیر این صورت غیرعلی است.	اگر $h[n]=0 \quad n<0$ باشد، آنگاه سیستم علی و در غیر این صورت غیر علی است.
پایداری	اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert h(t)\rvert dt<\infty$ باشد، آنگاه سیستم پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است.	اگر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lvert h[n]\rvert<\infty$ باشد، آنگاه سیستم پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است.
وارون‌پذیر بودن	اگر سیستم وارون‌پذیر باشد و پاسخ ضربه سیستم وارون $h_1(t)$ باشد آنگاه داریم: $h(t)*h_1(t)=\delta(t)$	اگر سیستم وارون‌پذیر باشد و پاسخ ضربه سیستم وارون $h_1[n]$ باشد آنگاه داریم: $h[n]*h_1[n]=\delta[n]$

جدول ۵ ـ۱ـ خواص اصلی سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربه آن‌ها

۵ ـ ۵ ـ پاسخ پله سیستم‌های LTI

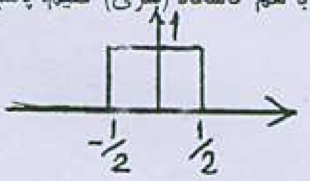
در بخش‌های قبل دیدیم که با استفاده از پاسخ ضربه یک سیستم LTI می‌توان رفتار این سیستم را به طور کامل توصیف کرد. اما سیگنال دیگری که برای توصیف رفتار یک سیستم استفاده می‌شود پاسخ پله سیستم است. پاسخ پله یک سیستم LTI با نماد $s(t)$ یا $s[n]$ نشان داده می‌شود و طبق تعریف پاسخ سیستم به ورودی پله واحد می‌باشد.

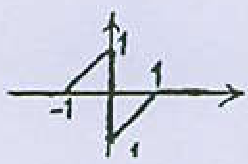
با توجه به قضیه کانولوشن و خواص سیستم‌های LTI ، بین پاسخ پله و ضربه هر سیستم LTI می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

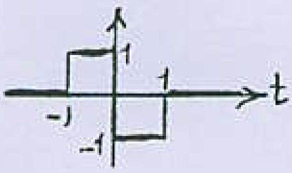
(برای سیستم‌های پیوسته در زمان) $s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$

(برای سیستم‌های گسسته در زمان) $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) اگر دو سیستم LTI مشابه را که پاسخ پله هر یک مطابق شکل روبه‌رو است را با هم کاسکاد (سری) کنیم، پاسخ پله سیستم حاصل چه خواهد بود؟



(۱)


(۲)


(۳)

(۴)

حل: تست فوق را با دو روش حل می‌کنیم.

۱ـ ابتدا پاسخ ضربه سیستم را بدست آورده و با کانوالو کردن در خودش پاسخ ضربه سیستم ترکیب شده از دو سیستم سری را تعیین کرده و در نهایت با انتگرال‌گیری پاسخ پله را بدست می‌آوریم.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$h_T(t)=h(t)*h(t)=\left(\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)*\left(\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)=\delta(t+1)-2\delta(t)+\delta(t-1)$$

$$s_T(t)=\int_{-\infty}^{t} h_T(\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<-1\\ 1 & -1\le t<0\\ -1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t\end{cases}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۲ـ قضیه کانولوشن را می‌توان اعمال کرده و رابطه‌ای برحسب پاسخ پله‌ها بدست آورد: آزاد ۸۵

$$h_T(t)=h(t)*h(t)\Rightarrow\frac{ds_T(t)}{dt}=\frac{ds(t)}{dt}*\frac{ds(t)}{dt}=\frac{d^2}{dt^2}(s(t)*s(t))$$

$$\Rightarrow s_T(t)=\frac{d}{dt}(s(t)*s(t))=s(t)*\frac{ds(t)}{dt}=s(t)*\left(\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\Rightarrow s_T(t)=s\left(t+\frac{1}{2}\right)-s\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

بنابراین گزینه (۲)صحیح می‌باشد.

تست نمونه ـ(آزاد ۸۱) در مورد علی بودن و پایداری سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ کدام گزینه صحیح است؟

$$h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

۱) علی و ناپایدار ۲) علی و پایدار ۳) غیرعلی و ناپایدار ۴) غیرعلی و پایدار

حل: با توجه به آن که $h[n]=0\ \ n<0$ بنابراین سیستم علی است. اما برای تعیین پایداری سیستم باید مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه آن را بررسی کرد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\cdots<\infty$$

ملاحظه می‌کنید که سری نزولی است و در نتیجه مجموع فوق به یک مقدار محدود همگرا می‌شود. بنابراین سیستم پایدار است و گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۱) اگر $x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$ و $h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1]$ باشد، حاصل عبارت $x[n]*h[n]$ کدام است ؟

۱) $2\{\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]\}+2\delta[n-4]$

۲) $\delta[n+1]+\delta[n-1]+2\delta[n]+\delta[n-2]-2\delta[n-3]$

۳) $4\delta[n-1]+4\delta[n-2]+2\delta[n]+\delta[n+1]-\delta[n-4]$

۴) $2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$

حل :

$$x[n]*h[n]=h[n]+2h[n-1]-h[n-3]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1]+2\left[2\delta[n]+2\delta[n-2]\right]-\left(2\delta[n-2]+2\delta[n-4]\right)$$
$$=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$$

پس گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۴) یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)=e^{iat}u(3t+1)$ می‌باشد.
($u(.)$ معرف تابع پله واحد است) . این سیستم :

۱) علی و پایدار است ۲) علی و ناپایدار است ۳) غیرعلی و پایدار است ۴) غیرعلی و ناپایدار است

حل :

پاسخ ضربه سیستم به ازاء $t<-\frac{1}{3}$ برابر صفر است. بنابراین این سیستم غیرعلی است. از طرفی داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty}\left|e^{-iat}\right|dt=\int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty}dt=\infty$$

پس سیستم ناپایدار است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مهم **تست نمونه** ـ (سراسری ۸۳) اگر پاسخ ضربه واحد یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ باشد، خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی پله به اندازه 3 ، برابر است با:

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) 4 ۴) 3

حل :

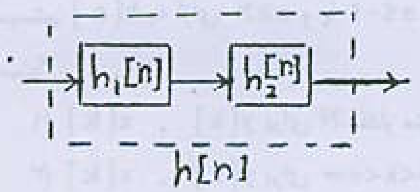
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^k u[k]u[n-k]=3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

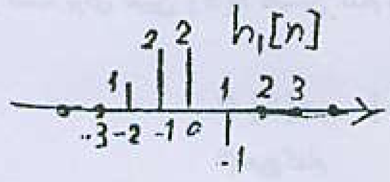
چون پاسخ حالت دائم سیستم موردنظر است بنابراین $n=\infty$ قرار داده می‌شود:

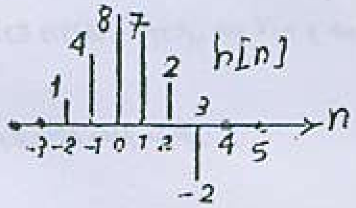
$$y[n]\Big|_{n=\infty}=3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\right)=3\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=4$$

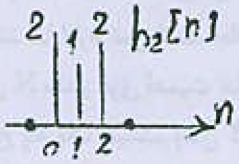
بنابراین گزینه (۳) صحیح است. البته این تست را می‌توان با سایر روش‌ها مانند تبدیل فوریه یا تبدیل z نیز حل کرد.

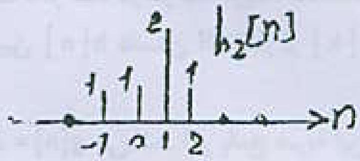
تست نمونه - اگر در شکل مقابل $h_1[n]$ و $h[n]$ به صورت زیر باشند، $h_2[n]$ چه خواهد بود؟

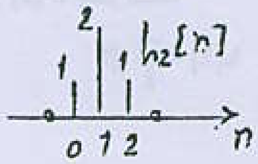


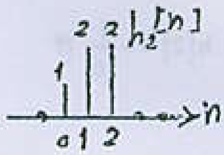




۲) 

۱) 

۴) 

۳) 

حل:

با توجه به آن‌که $h[n]=h_1[n]*h_2[n]$ می‌باشد، از خاصیت عرض کانولوشن نتیجه می‌گیریم که سیگنال $h_2[n]$ در محدود $[0,2]$ قرار گرفته و سه نمونه دارد. با توجه به رابطه کانولوشن داریم:

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[n-k]$$

$$n=-2:\quad h[-2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[-2-k] \Rightarrow 1\times h_2[0]=1 \Rightarrow h_2[0]=1$$

$$n=-1:\quad h[-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[-1-k] \Rightarrow 1\times h_2[1]+2\times h_2[0]=4 \Rightarrow h_2[1]=2$$

$$n=0:\quad h[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[-k] \Rightarrow 1\times h_2[2]+2\times h_2[1]+2\times h_2[0]=8 \Rightarrow h_2[2]=2$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تذکر: در تست اخیر ملاحظه کردید برای تعیین یکی از سیگنال‌ها با طول N نیاز به N مقدار از حاصل کانولوشن و N مقدار از سیگنال دیگر می‌باشد. البته این N مقدار لزوماً مقادیر متوالی از سیگنال‌های فوق نیستند. به عنوان مثال در این تست به جای استفاده از $h[0]=8$ و $h_1[0]=2$ در رابطه سوم، می‌توانستیم از $h[3]=-2$ و $h_1[1]=-1$ به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$n=3:\ h[3]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[3-k] \Rightarrow (-1)\times h_2[2]=-2 \Rightarrow h_2[2]=2$$

تست نمونه - (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گسسته LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ به ازای $n\geq N$ و یا $n\leq -1$ صفر است. برای تعیین $h[n]$ دانستن کدام دسته زوج ورودی ـ خروجی هم لازم و هم کافی است؟

۱) $x[k]$, $y[k]$ برای N مقدار متوالی
۲) $x[k]$, $y[k]$ برای 2N مقدار متوالی
۳) $x[k]$, $y[k]$ برای $-\infty<k<+\infty$
۴) هیچ‌کدام

حل : با توجه به نکات ذکر شده در تست قبل گزینه (۴) صحیح است. دقت کنید اطلاعات ذکر شده در هر سه گزینه اطلاعات کافی برای تعیین $h[n]$ هستند اما لازم نمی‌باشند. اطلاعات هم لازم و هم کافی برای تعیین $h[n]$ دانستن N مقدار از $x[k]$ و $y[k]$ است و متوالی بودن N مقدار فوق اهمیت ندارد.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) پاسخ پله یک سیستم زمان گسسته LTI به صورت $g[n]=2^{-n-1}u[n+1]$ می‌باشد. اگر پاسخ ضربه این سیستم را با $h[n]$ نشان دهیم، مقدار $h[2]$ چقدر است؟

۱) $h[2]=\frac{1}{8}$
۲) $h[2]=\frac{-1}{8}$
۳) $h[2]=\frac{1}{16}$
۴) $h[2]=-\frac{1}{16}$

حل :

$$h[n]=g[n]-g[n-1] \Rightarrow h[2]=g[2]-g[1]=2^{-3}-2^{-2}=-\frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۴) کدام یک از گزینه‌های زیر ناصحیح است؟

۱) سیستم $y(t)=e^{j\frac{1}{x(t)}}$ علی، پایدار و تغییرناپذیر با زمان است.
۲) سیستمی با پاسخ ضربه $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$ خطی، پایدار و علی است.
۳) سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(\lambda-1)}u(\lambda+1)x(t-\lambda)d\lambda$ حافظه‌دار، خطی و پایدار است.
و علی
۴) سیستم $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ وارون‌پذیر، ناپایدار و علی است.

حل :

گزاره آورده شده در گزینه (۱) صحیح است. زیرا سیستم فوق علی و تغییرناپذیر با زمان است و با توجه به آن‌که $|y(t)|=1$ است بنابراین پایدار می‌باشد.

گزاره آورده شده در گزینه (۲) نیز صحیح است. زیرا $n<0 \quad h[n]=0$ و $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=2$

گزاره آورده شده در گزینه (۳) ناصحیح است. زیرا داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(\lambda-1)}u(\lambda+1)x(t-\lambda)d\lambda=e^{-2(t-1)}u(t+1)*x(t)$$

بنابراین این سیستم یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-2(t-1)}u(t+1)$ است و واضح است که غیرعلی است.

گزاره آورده شده در گزینه (۴) نیز صحیح است سیستم فوق وارون‌پذیر با سیستم وارون $x[n]=y[n]-y[n-1]$ و همچنین ناپایدار و علی است.

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

یادداشت

۶ ـ سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

یک دسته بسیار مهم از سیستم‌های پیوسته در زمان سیستم‌هائی می‌باشند که رابطه بین ورودی و خروجی آن‌ها توسط یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مشخص شده است. در سیستم‌های گسسته در زمان این معادله به معادله تفاضلی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. در این بخش به بررسی این سیستم‌ها، خواص و چگونگی تحقق ساده آن‌ها می‌پردازیم.

۶ ـ ۱ ـ سیستم‌های پیوسته در زمان

اگر $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی این سیستم باشند، آنگاه معادله دیفرانسیل زیر ورودی و خروجی را به یکدیگر ارتباط می‌دهد:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

تعیین $y(t)$ از این معادله ساده و مشخص و مربوط به درس معادلات دیفرانسیل است. اما در درس تجزیه و تحلیل سیستم‌ها معمولاً از تبدیل لاپلاس برای حل این دسته از معادلات استفاده می‌شود که در ادامه معرفی و بررسی خواهد شد.

مهم‌ترین مسئله‌ای که در ارتباط با این دسته از سیستم‌ها مطرح می‌شود، LTI و علی بودن آن‌ها می‌باشد. یعنی آیا صرف آنکه رابطه بین ورودی و خروجی این سیستم‌ها به صورت یک معادله خطی با ضرایب ثابت است تضمین می‌کند که سیستم فوق LTI و علی باشد یا خیر؟ قضیه زیر به این سؤال پاسخ می‌دهد:

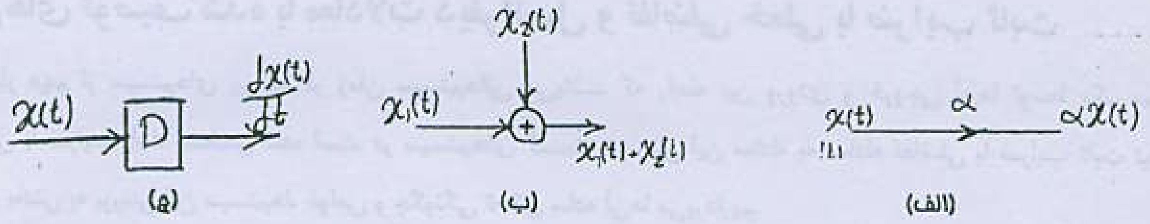
قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آن که یک سیستم بیان شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، LTI و علی باشد آن است که سیستم در سکون (آرامش) اولیه باشد. یعنی قبل از اعمال ورودی به سیستم، خروجی آن صفر باشد. مثلاً اگر در $t \le t_0$ داشته باشیم $x(t)=0$، آنگاه در $t \le t_0$ نیز داریم $y(t)=0$ و برای یافتن جواب معادله دیفرانسل در $t > t_0$ باید شرایط اولیه زیر را به کار برد:

$$y(t_0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \cdots = \left.\frac{d^{M-1} y(t)}{dt^{M-1}}\right|_{t=t_0} = 0$$

مثال: برای آن که سیستم با معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = 2x$ و با فرض $x(t) = u(t+1) - u(t)$ یک سیستم LTI و علی باشد، شرایط اولیه را باید به صورت $y(-1) = y'(-1) = 0$ انتخاب کنیم تا سیستم شرایط آرامش اولیه را داشته باشد.

سیستم‌های بیان شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را می‌توان به شیوه‌ای ساده و به صورت نمودارهای جعبه‌ای حاصل از اتصال بلوک دیاگرام‌های پایه نشان داد. این نحوه نمایش علاوه بر آن که باعث بالا رفتن درک از رفتار سیستم می‌شود، برای شبیه‌سازی و تحقق آن‌ها به صورت نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری نیز مفید می‌باشد. برای ساخت این قبیل از معادلات سه بلوک پایه نشان داده شده در شکل

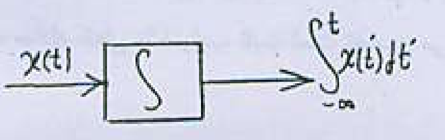
(۶ ـ ۱) کافی است. سه عنصر فوق شامل ضرب‌کننده در اسکالر، جمع‌کننده و مشتق‌گیر می‌باشند.



شکل ۶-۱- عناصر پایه جهت نمایش جعبه‌ای سیستم‌های پیوسته در زمان توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

(الف) ضرب‌کننده در اسکالر (ب) جمع‌کننده (ج) مشتق‌گیر

غیر از مشتق‌گیر، ساخت دو بلوک دیگر توسط عناصر ساده مداری بسیار متداول و عملی است. اما ساخت مشتق‌گیر و استفاده از آن متداول نیست. زیرا حساسیت مشتق‌گیر نسبت به خطا و نویز بسیار زیاد است. لذا برای رفع این مشکل با انتگرال‌گیری از طرفین معادله دیفرانسیل و تبدیل آن به معادله انتگرالی، می‌توان به جای مشتق‌گیر از انتگرال‌گیر شکل (۶-۲) استفاده کرد که کاربردی‌تر و عملی‌تر می‌باشد.



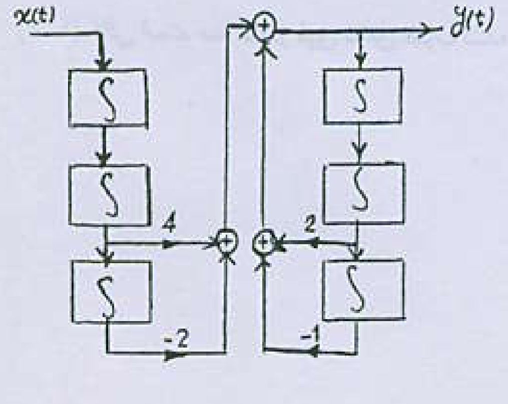
شکل ۶-۲- عنصر پایه انتگرال‌گیر

با استفاده از بلوک‌های پایه فوق می‌توان به روش‌های مختلف سیستم‌ها را تحقق داد. از بین این روش‌ها و ساختارها دو روش تحت عناوین روش مستقیم یک (Direct Form I) و روش مستقیم دو (Direct Form II) اهمیت زیادی دارند که در مثال زیر به معرفی و بررسی این دو ساختار می‌پردازیم.

مثال: نمایش جعبه‌ای سیستم $\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{dy}{dt}+y=4\frac{dx}{dt}-2x$ را با روش مستقیم I و II بدست آورید.

حل: برای تعیین تحقق به روش مستقیم I ابتدا معادله را به معادله انتگرالی تبدیل کرده و سپس y رابرحسب بقیه جمله‌ها بدست آورده و شکل ساختار را مستقیماً از روی این معادله تعیین می‌کنیم.

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{dy}{dt}+y=4\frac{dx}{dt}-2x \rightarrow y-2\iint y+\iiint y=4\iint x-2\iiint x \rightarrow y=4\iint x-2\iiint x+2\iint y-\iiint y$$

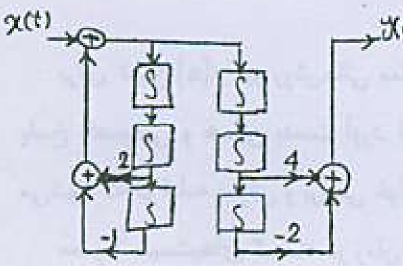


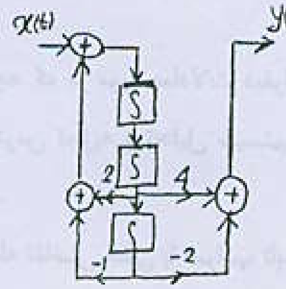
فرم مستقیم I ←

در این فرم برای تحقق یک معادله دیفرانسیل از مرتبه M ، حداقل M و حداکثر 2M انتگرالگیر لازم است.

برای بدست آوردن تحقق به روش مستقیم II، از ساختار روش مستقیم I استفاده می‌شود. بدین شکل که نیمه سمت راست و چپ ساختار I را با یکدیگر تعویض کرده و سپس انتگرالگیرهای قرار گرفته در کنار یکدیگر را ادغام می‌کنیم. دلیل آن که می‌توان نیمه راست و چپ را با یکدیگر تعویض کرد. خطی بودن این دو سیستم سری با یکدیگر و خاصیت جابجایی اپراتور کانولوشن می‌باشد.

در شکل‌های زیر مراحل کار و تعیین شکل مستقیم II نشان داده شده‌اند.



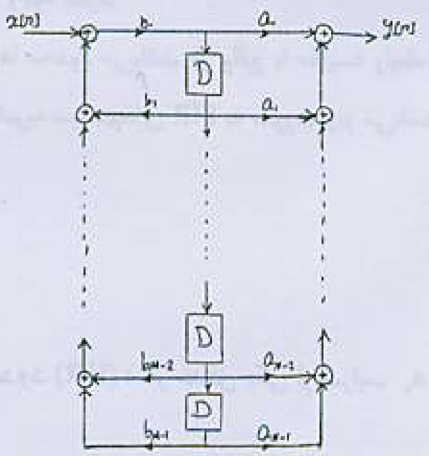


فرم مستقیم II ←

در این فرم برای تحقق یک معادله دیفرانسیل از مرتبه M ، نیاز به M انتگرالگیر است.

تذکر: اگرچه راه منطقی تعیین فرم مستقیم II از روی معادله دیفرانسیل و بالعکس استفاده از فرم مستقیم I است، اما با توجه به شکل (۶ـ۳) و معادله زیر می‌توان ارتباط بین آن‌ها را مستقیماً و بدون استفاده از فرم مستقیم I تعیین کرد.

$$y(t)=b_0\left\{a_0\,x(t)+a_1\int x+\cdots+a_{N-1}\underbrace{\int\cdots\int}_{\text{N - 1 مرتبه}} x+b_1\int y+\cdots+b_{M-1}\underbrace{\int\cdots\int}_{\text{M - 1 مرتبه}} y\right\}$$



شکل ۶ ـ ۳ ـ شکل کلی فرم مستقیم II

۶-۲- سیستم‌های گسسته در زمان

اگر $x[n]$ ورودی و $y[n]$ خروجی این سیستم باشند، آن‌گاه ورودی و خروجی این سیستم توسط معادله تفاضلی زیر به یکدیگر ارتباط پیدا می‌کند:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k\, y[n-k]=\sum_{i=0}^{N} b_i\, x[n-i]$$

برای تعیین $y[n]$ نیز روش‌هائی معادل آنچه که در مورد معادلات دیفرانسیل داشتیم، وجود دارد. یعنی برای این معادلات نیز می‌توان پاسخ خصوصی و همگن بدست آورد. اما در درس تجزیه و تحلیل سیستم‌ها معمولاً از تبدیل z برای حل این دسته از معادلات استفاده می‌شود که در ادامه معرفی و بررسی خواهد شد.

معمولاً سیستم‌های گسسته در زمان با معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف ـ سیستم‌های با پاسخ ضربه محدود (FIR): اگر در معادله تفاضلی سیستم $a_k=0$ به ازاء $k\neq 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$y[n]=\sum_{i=0}^{N}\frac{b_i}{a_0}x[n-i]$$

این سیستم را یک سیستم FIR می‌نامند. سه خاصیت بارز یک سیستم FIR عبارتند از:

(۱) خروجی در هر لحظه فقط به مقدار ورودی در همان لحظه و لحظات قبل بستگی دارد و مقادیر قبلی خروجی هیچ نقشی در تعیین خروجی در یک لحظه خاص ندارند.

(۲) در ساختار این سیستم‌ها فیدبک وجود ندارد.

(۳) عرض پاسخ ضربه این سیستم‌ها محدود می‌باشد. در واقع با مقایسه رابطه بین ورودی و خروجی آن‌ها و رابطه جمع کانولوشن می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ ضربه سیستم‌های FIR به صورت زیر می‌باشد:

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{b_n}{a_0} & 0\le n\le N\\ 0 & \text{در بقیه نمونه‌ها}\end{cases}$$

ب ـ سیستم‌های با پاسخ ضربه نامحدود (IIR): اگر حداقل یکی از ضرایب a_k به ازای $k\neq 0$ غیرصفر باشد، آنگاه داریم:

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{i=0}^{N} b_i x[n-i]-\sum_{k=1}^{M}a_k\, y[n-k]\right\}$$

این سیستم را IIR می‌نامند. سه خاصیت بارز یک سیستم IIR عبارتند از:

(۱) خروجی در هر لحظه علاوه بر ورودی در همان لحظه و لحظات قبل، به مقادیر قبلی خروجی نیز بستگی دارد.

(۲) در ساختار این سیستم‌ها فیدبک وجود دارد.

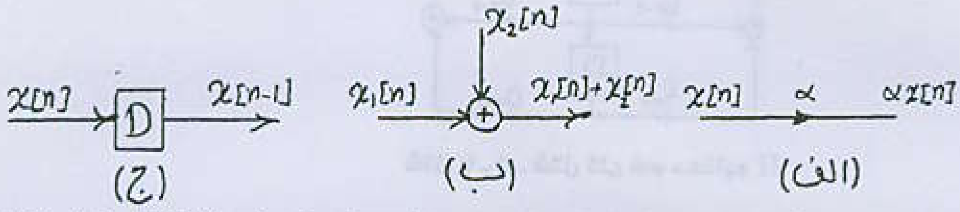
(۳) عرض پاسخ ضربه این سیستم‌ها نامحدود می‌باشد.

در مورد سیستم‌های گسسته در زمان بیان شده توسط یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت نیز شرط سکون یا آرامش اولیه، باعث LTI و علی شدن سیستم می‌شود. قضیه زیر در این ارتباط وجود دارد:

قضیه - شرط لازم و کافی برای آن که یک سیستم بیان شده توسط معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت، LTI و علی باشد آن است که سیستم در سکون (آرامش) اولیه باشد. یعنی قبل از اعمال ورودی به سیستم، خروجی آن صفر باشد. مثلاً اگر در $n \le n_0$ داشته باشیم $x[n]=0$ ، آنگاه در $n \le n_0$ نیز داریم $y[n]=0$ و برای یافتن جواب معادله تفاضلی در $n > n_0$ باید شرایط اولیه $y[n_0]=y[n_0-1]=\cdots=y[n_0-(M-1)]=0$ را بکار برد.

مثال : برای آن که سیستم با معادله تفاضلی $y[n-3]+2y[n]=4x[n-2]-x[n]$ و با فرض $x[n]=u[n-4]$ یک سیستم LTI و علی باشد، باید داشته باشیم $y[3]=y[2]=y[1]=0$ تا سیستم شرایط آرامش اولیه را داشته باشد.

سیستم‌های گسسته در زمان بیان شده توسط معادله تفاضلی با ضرایب ثابت را نیز می‌توان توسط نمودارهای جعبه‌ای حاصل از اتصال بلوک دیاگرام‌های پایه نشان داد. عناصر پایه شامل ضرب‌کننده در اسکالر، جمع‌کننده و تأخیر دهنده در شکل (۶-۴) نشان داده شده‌اند.



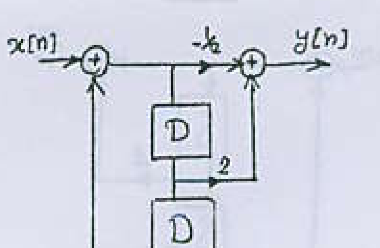
شکل ۶-۴- عناصر پایه جهت نمایش جعبه‌ای سیستم‌های گسسته در زمان توصیف شده توسط معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت (الف) ضرب‌کننده در اسکالر (ب) جمع‌کننده (ج) تأخیر دهنده

با استفاده از بلوک‌های پایه فوق می‌توان به روش‌های مختلف سیستم‌ها را تحقق داد. از میان این روش‌ها و ساختارها می‌توان به شکل مستقیم یک (Direct form I) و شکل مستقیم دو (Direct form II) اشاره کرد که در مثال زیر به بررسی این دو ساختار می‌پردازیم.

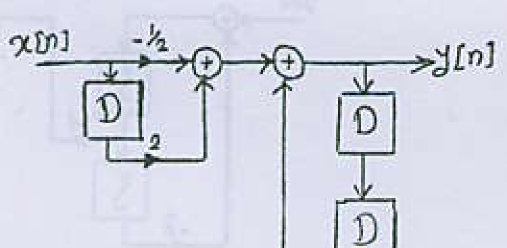
مثال : نمایش جعبه‌ای $2y[n-2]+2y[n]=4x[n-1]-x[n]$ را با روش مستقیم I و II بدست آورید.

حل :

$$y[n]=2x[n-1]-\frac{1}{2}x[n]-y[n-2]$$



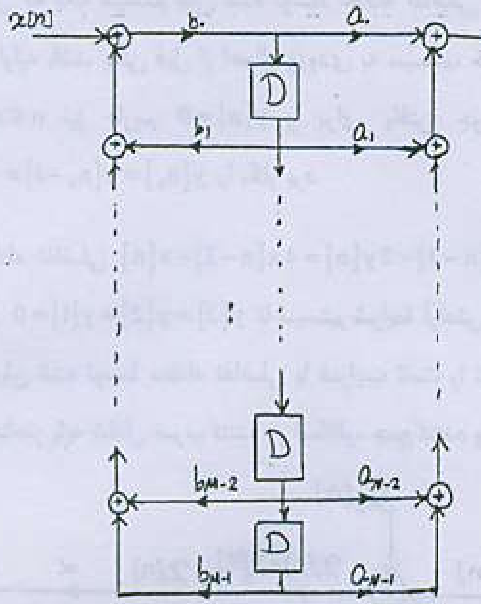
فرم مستقیم II : در این فرم برای تحقق یک معادله تفاضلی از مرتبه M ، نیاز به M تأخیردهنده است.



فرم مستقیم I : در این فرم برای تحقق یک معادله تفاضلی از مرتبه M ، حداقل M و حداکثر 2M تأخیردهنده لازم است.

تذکر : در مورد سیستم‌های گسسته نیز می‌توان به طور مستقیم و بدون استفاده از فرم مستقیم I ، ارتباط بین معادله تفاضلی و فرم مستقیم II را تعیین کرد. شکل (۶-۵) و رابطه زیر نشان‌دهنده این ارتباط است.

$$y[n]=b_0\{a_0x[n]+a_1x[n-1]+\cdots+a_{N-1}x[n-N]+b_1y[n-1]+\cdots+b_{M-1}y[n-M]\}$$

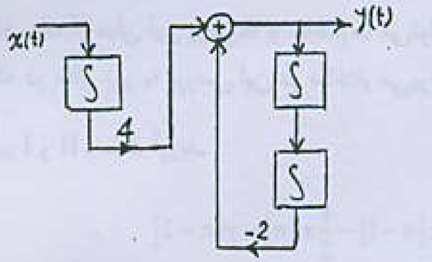


شکل ۶ ـ ۵ ـ شکل کلی فرم مستقیم II

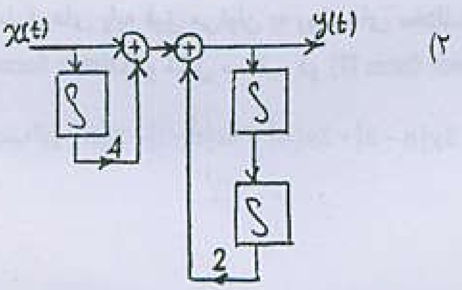
تست نمونه ـ شکل مستقیم دو (Direct Form II) برای سیستم با معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2y=4\frac{dx}{dt}$$

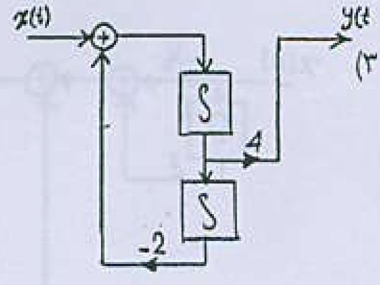
۱)



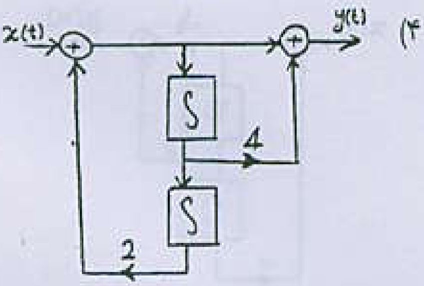
۲)



۳)



۴)



حل :

با توجه به مطالب آورده شده، گزینه (۳) صحیح است. دقت کنید گزینه‌های (۱) و (۲) شکل مستقیم I هستند و در نتیجه از ابتدا نادرست بودن آن‌ها مشخص است.

تست نمونه ـ سیستم گسسته در زمان با رابطه ورودی ـ خروجی زیر را در نظر بگیرید. کدام عبارت در مورد این سیستم درست است؟

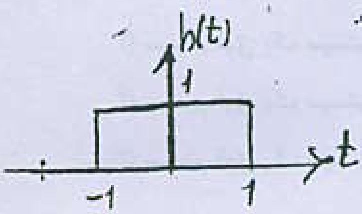
$$y[n]-y[n-1]=2x[n]$$

۱) سیستم فوق یک سیستم FIR همواره خطی و علی است.
۲) سیستم فوق یک سیستم IIR همواره خطی و علی است.
۳) سیستم فوق یک سیستم FIR است اما لزوماً خطی و علی نیست.
۴) سیستم فوق یک سیستم IIR است اما لزوماً خطی و علی نیست.

حل :

چون خروجی در هر لحظه به لحظات قبل خروجی بستگی دارد، در نتیجه سیستم فوق IIR است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. از طرفی آرامش (سکون) اولیه سیستم مشخص نشده است. لذا سیستم لزوماً خطی و علی نیست. پس گزینه (۴) صحیح است.

خودآزمائی دوم

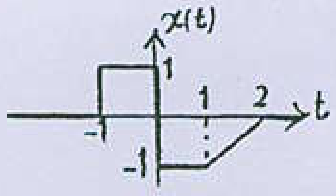


۱ـ (سراسری ۸۲) پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر ورودی سیستم برابر با $x(t)=U_{-2}(t+1)-U_{-2}(t)-U_{-1}(t-3)$ باشد، در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظه $t=2$ کدام است؟ ($U_{-1}(t)$ معرفی تابع پله واحد و $U_{-2}(t)$ معرف تابع شیب واحد می‌باشد)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 1.5

۲ـ (سراسری ۸۰) مقدار $y(t)$ را به ازاء $t=1$ در رابطه $y(t)=\left[e^{-t}u(t)\right]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$ تقریباً چقدر است؟

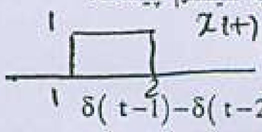
۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{-1}{e}$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) $\frac{-2}{e}$

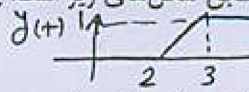


۳ـ (سراسری ۸۱) یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}\delta(t)+u(t-1)$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ که در زیر نمایش داده شده است در نقاط $t=\frac{3}{2}$ و $t=+\infty$ به ترتیب با کدام گزینه برابر است؟

۱) 1 و -1 ۲) 1 و 0 ۳) 0 و $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$

۴ـ (سراسری ۸۵) ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است. پاسخ ضربه سیستم چیست؟





۱) $u(t-1)$ ۲) $u(t-2)$ ۳) $u(t-1)-u(t-2)$ ۴) $\delta(t-1)-\delta(t-2)$

۵ـ (سراسری ۸۵) اگر به یک سیستم LTI زمان ـ گسسته با پاسخ ضربه $h[n]$، ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-2n+1]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-3]$ اعمال شود، پاسخ این سیستم، $y[n]$، عبارت خواهد بود از:

۱) $y[n]=h[n]+\frac{1}{2}\,..[n+1]+\frac{1}{4}h[n+2]$

۲) $y[n]=h[n]+2h[n+1]+4h[n+2]$

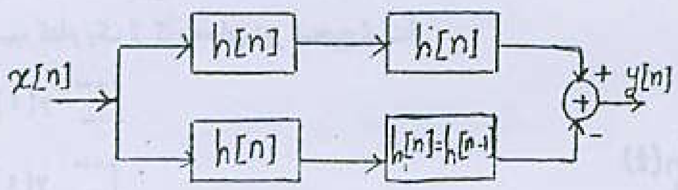
۳) $y[n]=h[n]+\frac{1}{2}h[n-1]+\frac{1}{4}h[n-2]$

۴) $y[n]=h[n]+2h[n-1]+4h[n-2]$

۶ـ (سراسری ۸۲) اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته به صورت $h[n]=(n+1)u[n+1]$ باشد، در این صورت پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=u[n]-u[n-2]$ کدام است؟

۱) $2n\,u[n]$ ۲) $n\,u[n]$ ۳) $(2n+1)\,u[n]$ ۴) $(n+1)\,u[n]$

۷ـ (آزاد ۸۰) اگر $h[n]=(n+1)u[n]$ باشد، پاسخ ضربه کلی سیستم مقابل کدام است؟



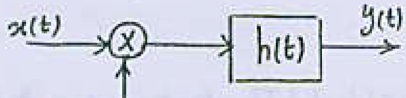
۱) $h_{tot}[n]=\frac{n+1}{2}u[n]$

۲) $h_{tot}[n]=\frac{n+2}{2}u[n]$

۳) $h_{tot}[n]=\frac{(n+1)(n+2)}{2}u[n]$

۴) $h_{tot}[n]=\frac{n+1}{n+2}u[n]$

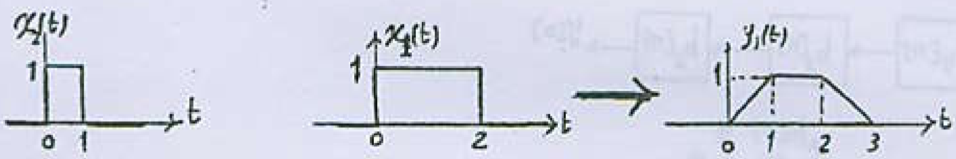
۸ـ (سراسری ۸۲) اگر در شکل زیر $x(nT)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n=\pm1,\pm2,\dots\end{cases}$ باشد، در آن صورت $y(t)$ برابر است با:



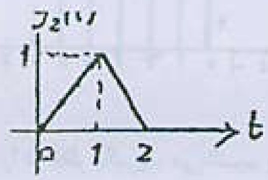
۱) $h(t)$ ۲) $x(t)$

۳) $\delta(t)$ ۴) $x(t)*h(t)$

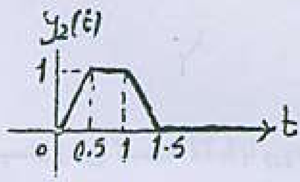
۹ـ (سراسری ۸۲) یک سیستم خطی مستقل از زمان (LTI) مفروض است. اگر به این سیستم سیگنال $x_1(t)$ اعمال شوددر این صورت $y_1(t)$ را در خروجی دریافت می‌کنیم. اگر $x_2(t)$ اعمال شود، خروجی سیستم چه خواهد بود؟



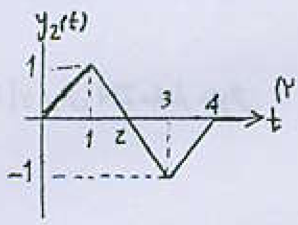
۱)



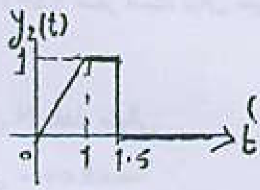
۲)



۳)



۴)



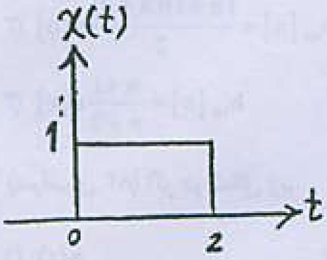
۱۰ـ (آزاد ۸۴) فرض کنید ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI به صورت زیر باشند. در صورتی‌که خروجی این سیستم را $y(t)$ بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

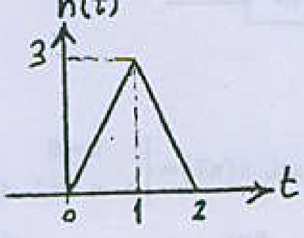
۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt=5$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt=3$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt=2.5$

۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt=6$





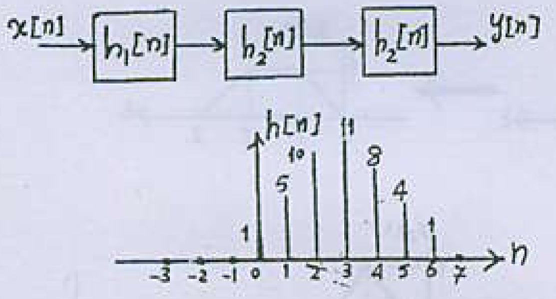
۱۱ـ (آزاد ۸۴) اتصال متوالی سه سیستم علی LTI را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. پاسخ ضربه $h_2[n]$ برابر است با $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$ و پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت زیر است. مقدار $h_1[3]$ برابر است با:

۱) $h_1[3]=0$

۲) $h_1[3]=1$

۳) $h_1[3]=2$

۴) $h_1[3]=3$



۱۲ـ (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گسسته LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ به ازای $n\ge N$ و یا $n\le -1$ صفر است. برای تعیین $h[n]$ دانستن کدام دسته زوج ورودی ـ خروجی هم لازم و هم کافی است؟

۱) $x[k]$ ، $y[k]$ برای N مقدار متوالی

۲) $x[k]$ ، $y[k]$ برای 2N مقدار متوالی

۳) $x[k]$ ، $y[k]$ برای $-\infty<k<+\infty$

۴) هیچ‌کدام

۱۳ـ (آزاد ۸۳) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت زیر است:

$$h[n]=\left(\frac{3}{2}\right)^{-n+1} u[n-1]$$

در صورتی‌که پاسخ پله آن $s[n]$ باشد، مقدار $s[3]$ کدام است؟

۱) $s[3]=\frac{5}{3}$

۲) $s[3]=\frac{19}{9}$

۳) $s[3]=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

۴) $s[3]=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

۱۴ـ اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)=e^{-3t}u(t-1)$ را $y(t)$ بنامیم و پاسخ این سیستم به $\frac{dx}{dt}$ برابر $-3y(t)+e^{-2t}u(t)$ باشد، پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

۱) $h(t)=e^{-2(t+1)}u(t)$ ۲) $h(t)=e^{-2t+1}u(t+1)$ ۳) $h(t)=e^{-2t}u(t+1)$ ۴) $h(t)=e^{-2t}u(t)$

۱۵ـ کدام گزینه از جملات زیر نادرست است؟

۱) یک سیستم LTI گسسته در زمان علّی است، اگر و تنها اگر پاسخ پله آن به ازاء $n<0$ صفر باشد.

۲) اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI ، متناوب و غیرصفر باشد، سیستم فوق لزوماً ناپایدار است.

۳) اگر عرض پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته در زمان محدود باشد، سیستم لزوماً پایدار است.

۴) رابطه ورودی ـ خروجی ترکیب سری دو سیستم LTI به ترتیب اتصال آن‌ها به یکدیگر بستگی ندارد.

۱۶ـ (سراسری ۸۴) یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)=e^{iat}u(3t+1)$ می‌باشد.

($u(.)$ معرف تابع پله واحد است). این سیستم :

۱) علی و پایدار است ۲) علی و ناپایدار است ۳) غیرعلی و پایدار است ۴) غیرعلی و ناپایدار است

۱۷ـ (سراسری ۸۱) پاسخ ضربه یک LTI به صورت $h(t)=e^{t}u(-1-t)$ داده شده است که در آن $u(t)$ تابع پله واحد می‌باشد. در این صورت سیستم چگونه است؟

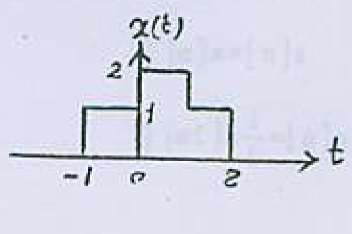
۱) پایدار و علی ۲) ناپایدار و علی ۳) ناپایدار و غیرعلی ۴) پایدار و غیرعلی

۱۸ـ (سراسری ۸۳) اگر $z(t)=x(t)*y(t)$ باشد، در آن صورت $x(2t)*y(2t)$ برابر است با:

۱) $z(2t)$ ۲) $2z(2t)$ ۳) $\frac{1}{4}z(2t)$ ۴) $\frac{1}{2}z(2t)$

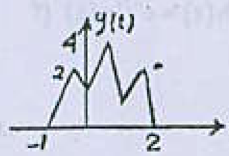
۱۹ـ (آزاد ۸۲) فرض کنید ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI به صورت زیر باشد:

در صورتی که ورودی این سیستم به شکل زیر باشد:

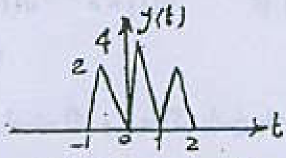


کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم درست است؟

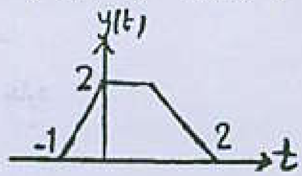
۱) خروجی به صورت زیر خواهد بود:



۲) خروجی به صورت زیر خواهد بود:



۳) خروجی به صورت زیر خواهد بود:



۴) خروجی این سیستم را نمی‌توان بدون محاسبه پاسخ ضربه آن بدست آورد.

۲۰ـ (آزاد ۸۲) فرض کنید $s(t)$ پاسخ پله یک سیستم LTI باشد. در این صورت پاسخ کلی سیستم $y(t)$، به ورودی دلخواه $x(t)$ با شرط این که $x(t)$ برای زمان‌های $t<0$ صفر باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

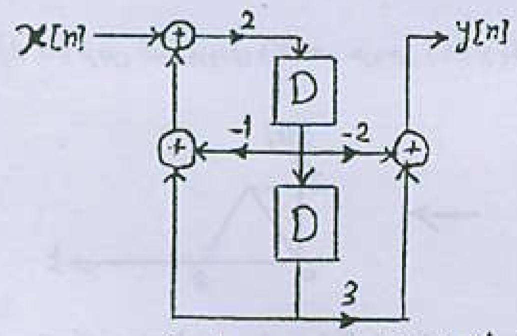
۱) $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)x(t-\tau)d\tau$

۲) $y(t)=\int_0^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau}s(t-\tau)d\tau+x(0^+)s(t)$

۳) $y(t)=\int_0^{+\infty} \frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}s(\tau)d\tau$

۴) $y(t)=\int_0^{+\infty} x(\tau)s(t-\tau)d\tau+x(0^+)s(t)$

۲۱ـ اگر شکل مستقیم دو (Direct Form II) یک سیستم LTI گسسته زمانی به صورت مقابل باشد، آن‌گاه معادله تفاضلی بیان کننده این سیستم کدام است؟



۱) $y[n]=x[n-1]+2x[n-2]-y[n-1]+y[n-2]$

۲) $y[n]=2(-2x[n-1]+3x[n-2]-y[n-1]+y[n-2])$

۳) $y[n]=2(x[n-1]+x[n-2]-y[n-1]+2y[n-2])$

۴) هیچکدام

۲۲ـ (سراسری ۸۰) با تعاریف $a[n]\triangleq x[n]*\delta[2n]$ و $b(t)\triangleq x(t)*\delta(2t)$ کدام گزینه صحیح است؟

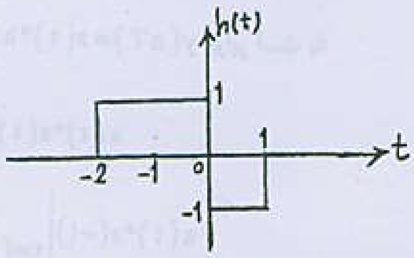
۱) $a[n]=x[2n]$ $\quad b(t)=x(2t)$

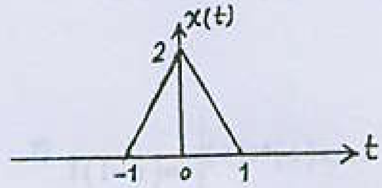
۲) $a[n]=x[n]$ $\quad b(t)=\frac{1}{2}x(t)$

۳) $a[n]=x[n]$ $\quad b(t)=x(2t)$

۴) $a[n]=\frac{1}{2}x[2n]$ $\quad b(t)=\frac{1}{2}x(2t)$

۲۳ـ (سراسری ۸۴) ورودی ($x(t)$) و پاسخ ضربه ($h(t)$) یک سیستم LTI به شکل زیر است:





به ازای چه مقداری از t خروجی سیستم ماکزیمم مقدار را داراست و مقدار خروجی در لحظه $t=1$ چیست؟

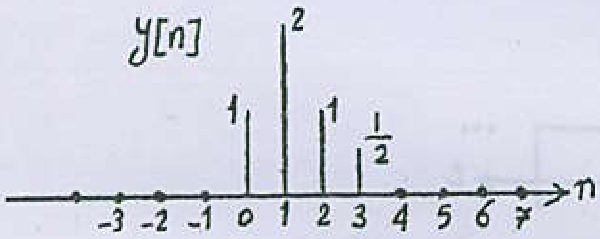
۱) به ازای $t=1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با 2.

۲) به ازای $t=-1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازی $t=1$ مقدار خروجی برابر است با 1-.

۳) به ازای $t=1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با 1.

۴) به ازای $t=-1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با $\frac{-1}{2}$.

۲۴ـ (سراسری ۸۳) پاسخ یک سیستم LTI گسسته به ضربه شیفت یافته $x[n]=\delta[n-1]$ به صورت مقابل است. در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟



۱) علی، حافظه‌دار و ناپایدار

۲) علی، بدون حافظه و پایدار

۳) غیرعلی، حافظه‌دار و پایدار

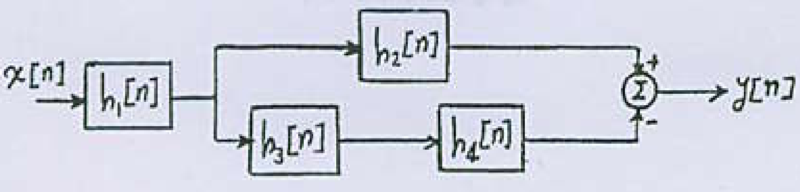
۴) غیرعلی، بدون حافظه و ناپایدار

۲۵ـ (سراسری ۸۰) اتصال سیستم‌های LTI شکل زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم کل با این فرض که:

$h_4[n]=\delta[n-2]$, $h_3[n]=h_2[n]=(n+1)u[n]$

$h_1[n]=\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{1}{4}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$

باشد، کدام است؟



۱) $u[n]-\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]+u[n-2]$

۲) $\delta[n]-\frac{1}{2}u[n]+\delta[n-2]+\frac{5}{2}u[n-3]$

۳) $\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{5}{4}\delta[n-1]+2\delta[n-2]+\frac{5}{2}u[n-3]$

۴) $\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{2}u[n-1]-\frac{1}{2}u[n-2]+\frac{5}{2}u[n-3]$

۲۶ـ (سراسری ۸۴) اگر $y(t) \triangleq x(t)*h(t)$ باشد که در آن $h(t)=s(T-t)$ است، در آن صورت مقدار $y(nT)=x(t)*h(t)\Big|_{t=nT}$ برابر است با:

۱) $x(t)*s(t)\Big|_{t=nT}$ ‏ ۲) $x(t)*s(t)\Big|_{t=(n-1)T}$

۳) $x(t)*s(-t)\Big|_{t=(n-1)T}$ ‏ ۴) $x(t)*s(-t)\Big|_{t=nT}$

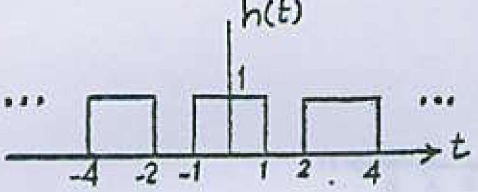
۲۷ـ سیستم گسسته در زمان با رابطه ورودی ـ خروجی و شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y[n]-y[n-2]=x[n] \\ y[0]=y[-1]=0 \end{cases}$$

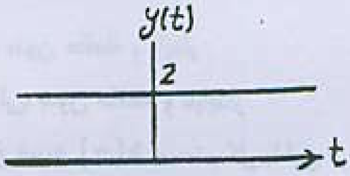
این سیستم به ازای کدام یک از ورودی‌های $x_1[n]=u[n]-u[n-4]$ و $x_2[n]=\delta[n]-u[n]$ ، LTI و علی است؟

۱) $x_1[n]$ ‏ ۲) $x_2[n]$ ‏ ۳) هر دو ورودی ‏ ۴) هیچ کدام از ورودی‌ها

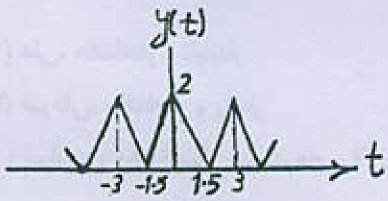
۲۸ـ (سراسری ۸۵) فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال پریودیک با پریود $T_0=3$ به صورت زیر باشد. اگر سیگنال ورودی به سیستم برابر $x(t)=u(t+1)-u(t-1)$ باشد، خروجی سیستم کدام یک از موارد زیر است؟



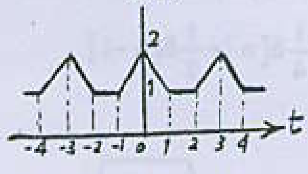
۱)



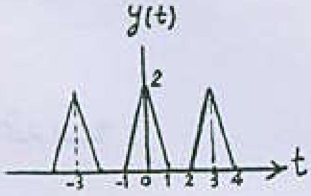
۲)



۳)



۴)



یادداشت

۷ـ تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان ـ مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه

در بخش‌های قبلی به معرفی سیگنال‌ها و سیستم‌ها و خواص آن‌ها پرداخته و سپس به تحلیل سیستم‌های LTI پیوسته و گسسته در زمان بر مبنای انتگرال یا جمع کانولوشن پرداختیم. در بخش‌های آتی این جزوه به معرفی و بررسی تحلیل فوریه برای سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته در زمان می‌پردازیم که بر مبنای نوشتن یک سیگنال بر حسب سیگنال نمائی مختلط (یا سیگنال سینوسی و کسینوسی) می‌باشد. بر این مبنا سری فوریه پیوسته در زمان (برای سیگنال‌های متناوب) و تبدیل فوریه پیوسته در زمان (برای سیگنال‌های متناوب و نامتناوب) معرفی می‌گردند. سری فوریه و تبدیل فوریه دو مزیت عمده دارند. اولاً در تحلیل و طراحی سیستم‌ها دانستن پارامترها، خواص و مفاهیم حوزه فرکانس مانند پهنای باند، طیف سیگنال و .....مفید می‌باشد. ثانیاً خاصیت جمع آثار یک سیستم خطی و این واقعیت که پاسخ یک سیستم LTI به ورودی سینوسی با یک فرکانس خاص، یک سینوسی با همان فرکانس است، باعث می‌گردد تا روابط و ابزار مناسبی جهت تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها در حوزه فوریه حاصل گردد. در واقع تبدیل فوریه (یا لاپلاس) به ما اجازه می‌دهد تا یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف کننده یک سیستم LTI را به یک معادله جبری تبدیل نمائیم.

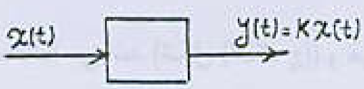
۷ـ ۱ـ پاسخ سیستم‌های پیوسته در زمان LTI به توابع نمائی مختلط

در بخش‌های قبلی نمایش و تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان LTI براساس انتگرال کانولوشن صورت گرفت. این نمایش بر مبنای خاصیت غربالی تابع ضربه واحد بود که در واقع نمایش سیگنال‌ها به صورت ترکیب خطی ضربه‌های جابجا شده می‌باشد. در این بخش به دنبال نوع دیگر از نمایش سیگنال‌ها برحسب سیگنال‌های پایه می‌باشیم به گونه‌ای که پاسخ سیستم‌های LTI به این سیگنال‌های پایه ساده‌تر بدست آیند. پس در واقع در این بخش به دنبال سیگنال‌های پایه‌ای می‌باشیم که دو خاصیت اساسی زیر را داشته باشند:

۱ـ باید بتوان تعداد زیادی از سیگنال‌های مفید را به صورت ترکیب خطی از این سیگنال‌های پایه نوشت. (شرط وجود و همگرائی)

۲ـ پاسخ سیستم LTI به هر کدام از سیگنال‌های پایه باید به سادگی بدست آید. در نتیجه با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توان پاسخ را به سیگنال ورودی نوشته شده برحسب این سیگنال‌های پایه به سادگی بدست آورد.

تعریف: سیگنالی که پاسخ سیستم به آن، حاصلضرب یک عدد ثابت (در حالت کلی می‌تواند مختلط باشد) در آن سیگنال باشد را تابع ویژه و دامنه این عدد ثابت را مقدار ویژه سیستم می‌نامند (با مقدار ویژه ماتریس‌ها اشتباه نشود!!). شکل (۷ـ۱) نشان دهنده تعریف فوق می‌باشد.



شکل ۷ـ ۱ـ $x(t)$ یک تابع ویژه و $|k|$ مقدار ویژه سیستم می‌باشند.

قضیه: سیگنال $x(t)=e^{st}$ (s در حالت کلی یک عدد مختلط است) یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI می‌باشد.

اثبات:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=H(s)e^{st}$$

بنابراین اگر به سیستم LTI ورودی e^{st} اعمال شود، آنگاه پاسخ سیستم به این ورودی $H(s)e^{st}$ خواهد بود که $H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-st}dt$ می‌باشد و $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم است.

مثال: سیستم تأخیر دهنده $y(t)=x(t-t_0)$ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم ورودی $x(t)=e^{st}$ اعمال کنیم، داریم:

$$y(t)=x(t-t_0)=e^{s(t-t_0)}=e^{st}.e^{-st_0}=e^{-st_0}.x(t)=H(s)x(t)$$

حال اگر از طریق پاسخ ضربه بخواهیم $H(s)$ را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$h(t)=\delta(t-t_0)\Rightarrow H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=e^{-st_0}$$

باتوجه به قضیه اخیر و با در نظر گرفتن آن که s در حالت کلی می‌تواند یک عدد مختلط باشد، می‌توان سه نوع نمایش سیگنال‌ها برحسب توابع e^{st} را معرفی کرد.

(۱) سری فوریه پیوسته در زمان: اگر $s=jk\omega_0$ باشد (k عدد صحیح) آنگاه:

توابع ویژه : $e^{jk\omega_0 t}$ $\quad k=0,\mp1,\mp2,\ldots$ (هارمونیک‌ها)

در این حالت مکان هندسی s ها نقاط منفصل روی محور $j\omega$ می‌باشد (شکل (۷ـ۲ـ الف)) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های $e^{jk\omega_0 t}$ نوشته می‌شود. پاسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر $H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ است. این نوع نمایش را سری فوریه پیوسته در زمان سیگنال می‌نامند و در ادامه بررسی خواهد شد.

$$e^{jk\omega_0 t}\longrightarrow\underset{h(t)}{\boxed{LTI}}\longrightarrow e^{jk\omega_0 t}H(jk\omega_0)$$

(۲) تبدیل فوریه پیوسته در زمان: اگر $s=j\omega$ باشد آنگاه:

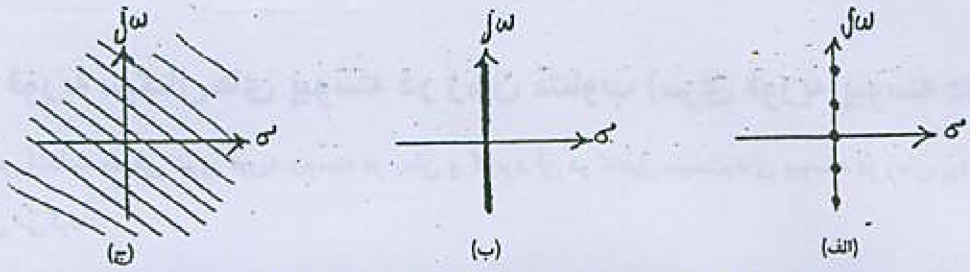
$e^{j\omega t}$: توابع ویژه

در این حالت مکان هندسی s ها کل محور $j\omega$ می‌باشد (شکل (۷ـ۲ـ ب)) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های $e^{j\omega t}$ نوشته می‌شود. پاسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر $H(j\omega)e^{j\omega t}$ است. این نوع نمایش را تبدیل فوریه پیوسته در زمان سیگنال می‌نامند و در ادامه بررسی خواهد شد.

(۳) تبدیل لاپلاس: اگر $s=\sigma+j\omega$ باشد آنگاه:

$e^{st}=e^{(\sigma+j\omega)t}$: توابع ویژه

دراین حالت مکان هندسی s ها کل صفحه مختلط می‌باشد (شکل (۷ـ۲ـ ج)) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های e^{st} نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر $H(s)e^{st}$ است. این نوع نمایش را تبدیل لاپلاس سیگنال می‌نامند و در ادامه بررسی خواهد شد.



شکل ۷-۶- مکان s ها در صفحه مختلط (الف) سری فوریه (ب) تبدیل فوریه (ج) تبدیل لاپلاس

در جدول (۷-۱) خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل فوق آورده شده است:

نام تبدیل	s	مکان s	سیگنال‌های پایه	پاسخ سیستم به سیگنال پایه	H(s)	کاربرد
سری فوریه	$s=jk\omega_0$	نقاط منفصل روی محور $j\omega$	$e^{jk\omega_0 t}$	$H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$	$H(jk\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$	تحلیل سیگنال‌های متناوب
تبدیل فوریه	$s=j\omega$	کل محور $j\omega$	$e^{j\omega t}$	$H(j\omega)e^{j\omega t}$	$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}\,dt$	تحلیل سیگنال‌های متناوب و نامتناوب
تبدیل لاپلاس	$s=\sigma+j\omega$	کل صفحه مختلط	e^{st}	$H(s)e^{st}$	$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-st}\,dt$	تحلیل سیگنال‌های متناوب و نامتناوب

جدول ۷-۱- خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل بر مبنای تابع نمائی مختلط

۸ـ تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان متناوب (سری فوریه پیوسته در زمان)

در این بخش ابتدا به معرفی سری فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان پرداخته و سپس خواص آن معرفی و بررسی می‌گردند.

۸ـ۱ـ سری فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LTI

تعریف: سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب اصلی T_0 را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

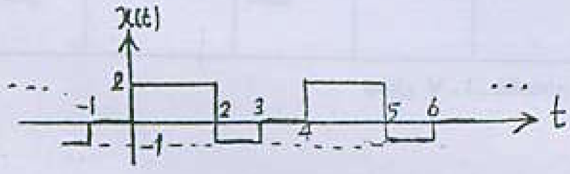
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_K e^{jk\omega_0 t}$$

در رابطه فوق $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ فرکانس اصلی (پایه) نامیده می‌شود. a_k ضرایب سری فوریه می‌باشند و از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

در رابطه فوق $\int_{T_0}$ معرف انتگرال‌گیری روی هر بازه زمانی دلخواه به اندازه T_0 می‌باشد.

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال را بدست آورید.



حل: دوره تناوب اصلی این سیگنال $T_0=4$ و در نتیجه فرکانس پایه آن $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\frac{k\pi}{2}t}$$

$$a_k=\frac{1}{4}\int_0^4 x(t)e^{-j\frac{k\pi}{2}t}dt=\frac{1}{4}\left(\int_0^2 2e^{-j\frac{k\pi}{2}t}dt-\int_2^3 e^{-j\frac{k\pi}{2}t}dt\right)\overset{k\neq 0}{\Rightarrow} a_k=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\Bigg|_0^2-\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\Bigg|_2^3\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2\left(1-e^{-jk\pi}\right)}{j\frac{k\pi}{2}}+\frac{e^{-j\frac{3k\pi}{2}}-e^{-jk\pi}}{j\frac{k\pi}{2}}\right)=\frac{2-3e^{-jk\pi}+e^{-j\frac{3k\pi}{2}}}{j2k\pi}=\frac{1}{j2k\pi}\left(2-3(-1)^k+e^{-j\frac{3k\pi}{2}}\right)$$

اما برای تعیین a_0 داریم:

$$a_0=\frac{1}{4}\int_0^4 x(t)dt=\frac{1}{4}(2\times 2-1\times 1)=\frac{3}{4}$$

برای چند k اول داریم:

$$k=1 \quad : \quad a_1=\frac{1}{j2\pi}\left(2+3+e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right)=\frac{1}{j2\pi}(5+j)=\frac{1}{2\pi}(1-j5)$$

$$k=2 \quad : \quad a_2=\frac{1}{j4\pi}\left(2-3+e^{-j3\pi}\right)=\frac{1}{j4\pi}(2-3-1)=\frac{-2}{j4\pi}=\frac{1}{2\pi}j$$

$$k=3 \quad : \quad a_3=\frac{1}{j6\pi}\left(2+3+e^{-j\frac{9\pi}{2}}\right)=\frac{1}{j6\pi}(5-j)=\frac{1}{6\pi}(-1-j5)$$

تذکر: با توجه به تعریف a_k و مثال اخیر ملاحظه می‌کنید که ضرایب a_k در حالت کلی مختلط می‌باشند. لذا معمولاً برای ترسیم آن‌ها، دامنه $|a_k|$ و فاز $\angle a_k$ جداگانه رسم می‌شوند که این منحنی‌ها را نمودار میله‌ای ضرایب سری فوریه می‌نامند.

تذکر: ضریب a_0 از رابطه $a_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)dt$ بدست می‌آید. این رابطه مقدار میانگین یا DC یک سیگنال متناوب را می‌دهد. پس a_0 در واقع مقدار DC سیگنال را مشخص می‌کند.

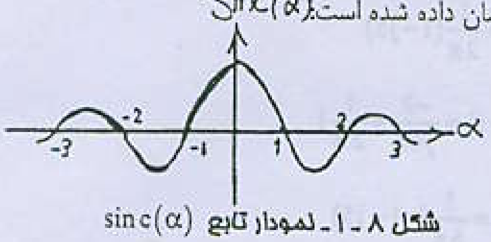
تذکر: برخی از سیگنال‌های متناوب اهمیت زیادی در تحلیل فوریه سیستم‌ها و سیگنال‌ها دارند. لذا دانستن سری فوریه آن‌ها مفید می‌باشد. در جدول (۸-۱) برخی از این سیگنال‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود.

ضرایب سری فوریه	سیگنال
$a_k=\begin{cases}1 & k=1\\0 & k\neq 1\end{cases}$	$x(t)=e^{j\omega_0 t}$
$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2} & k=\pm 1\\0 & k\neq\pm 1\end{cases}$	$x(t)=\cos(\omega_0 t)$
$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2j} & k=1\\-\frac{1}{2j} & k=-1\\0 & k\neq\pm 1\end{cases}$	$x(t)=\sin(\omega_0 t)$
$a_k=\begin{cases}1 & k=0\\0 & k\neq 0\end{cases}$	$x(t)=1$
$a_k=\frac{1}{T}$	$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$
$a_k=\frac{\omega_0 T_1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$	$x(t)=\begin{cases}1 & \|t\|<T_1\\0 & T_1\leq\|t\|<\frac{T}{2}\end{cases}$ $x(t)=x(t-T)$

جدول ۸ ـ ۱ ـ ضرایب سری فوریه برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

تذکر: تابع sinc که در جدول (۸ـ۱) استفاده شده است، یکی از توابع مهم در تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها می‌باشد. این تابع به صورت زیر تعریف شده و منحنی آن در شکل (۸ـ۱) نشان داده شده است:

$$\operatorname{sinc}(\alpha)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$



شکل ۸ - ۱ - نمودار تابع $\operatorname{sinc}(\alpha)$

دقت کنید تابع فوق تقارن زوج دارد و دامنه آن نزولی است. همچنین صفرهای تابع فوق به ازاء $\alpha=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ می‌باشند.

شکل مثلثاتی سری فوریه: در مبحث سیگنال‌ها و سیستم‌ها نمایش سری فوریه به صورت نمائی متداولتر می‌باشد. اما اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد می‌توان آن را به صورت مثلثاتی و به صورت زیر نمایش داد:

$$x(t)=a_0+2\sum_{K=1}^{+\infty} A_K\cos(k\omega_0 t+\theta_k)=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t)-C_k\sin(k\omega_0 t)\right]$$

ضرایب A_k، θ_k، B_k و C_k ارتباط مستقیمی با ضرایب a_k دارند و داریم:

$$a_k=A_k e^{j\theta_k}=B_k+jC_k$$

بنابراین اگر a_k به شکل قطبی نوشته شود، از روی دامنه و فاز آن می‌توان A_k و θ_k را بدست آورد. اما اگر a_k به شکل دکارتی نوشته شود، از روی قسمت حقیقی و موهومی آن می‌توان B_k و C_k را تعیین کرد.

تقارن‌های سیگنال در شکل دوم مثلثاتی سری فوریه (نوشتن سری بر حسب سینوس‌ها و کسینوس‌ها) اهمیت زیادی دارند و باعث ساده‌تر شدن شکل سری به شرح زیر می‌گردند:

(۱) اگر $x(t)$ تقارن زوج داشته باشد، آنگاه داریم:

$C_k=0$ به ازاء کلیه k ها $\Rightarrow x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos(k\omega_0 t)$

(۲) اگر $x(t)$ تقارن فرد داشته باشد، آنگاه داریم:

$\begin{cases}B_k=0\\a_0=0\end{cases}$ به ازاء کلیه k ها $\Rightarrow x(t)=-2\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin(k\omega_0 t)$

(۳) اگر $x(t)$ تقارن نیم موج داشته باشد یعنی $x(t)=-x\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$ (از نظر نمودار سیگنالی که تقارن نیم‌موج دارد، درنصف دوره تناوب خود قرینه نصف دیگر می‌باشد) آنگاه داریم:

$\begin{cases}C_k=B_k=0\\a_0=0\end{cases}$ به ازاء k زوج $\Rightarrow x(t)=\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{فرد}}}^{+\infty}\left(B_k\cos(k\omega_0 t)-C_k\sin(k\omega_0 t)\right)$

(۴) اگر $x(t)$ تقارن زوج و نیم‌موج داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} C_k = 0 & \text{به ازاء کلیه k ها} \\ B_k = 0 & \text{به ازاء k زوج} \\ a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = 2\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{فرد}}}^{+\infty} B_k \cos(k\omega_0 t)$$

(۵) اگر $x(t)$ تقارن فرد و نیم‌موج داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} B_k = 0 & \text{به ازاء کلیه k ها} \\ C_k = 0 & \text{به ازاء k زوج} \\ a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = -2\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{فرد}}}^{+\infty} C_k \sin(k\omega_0 t)$$

همگرائی سری فوریه: ملاحظه کردید که سری فوریه برای یک سیگنال پیوسته در زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

این سری هنگامی معنا پیدا می‌کند و قابل استفاده است که:

(۱) اولاً هیچکدام از ضرایب a_k بی‌نهایت نشوند.

(۲) ثانیاً سری به مقدار $x(t)$ همگرا شود.

قضایای متعددی در زمینه همگرائی سری فوریه در کتب مختلف ریاضی آورده شده‌اند. از آن جمله می‌توان به قضیه (شرایط) دریکله اشاره کرد.

قضیه (شرایط) دریکله: اگر $x(t)$ دارای سه شرط زیر باشد:

شرط ۱: $x(t)$ روی هر دوره تناوب مطلقاً انتگرالپذیر باشد. یعنی $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$.

شرط ۲: تعداد نقاط اکسترمم $x(t)$ در هر دوره تناوب نامحدود نباشد.

شرط ۳: تعداد نقاط ناپیوستگی $x(t)$ در هر دوره تناوب و همچنین مقدار هر ناپیوستگی نامحدود نباشند.

آنگاه اولاً کلیه ضرایب سری فوریه a_k برای این سیگنال محدود می‌باشند. ثانیاً نمایش سری فوریه در صورت پیوسته بودن $x(t)$ در هر مقدار t و در صورت ناپیوسته بودن $x(t)$ در تمام مقادیر t غیر از نقاط انفصال، با مقدار سیگنال برابر است. سری در نقاط انفصال به مقدار میانگین دو طرف ناپیوستگی میل می‌کند.

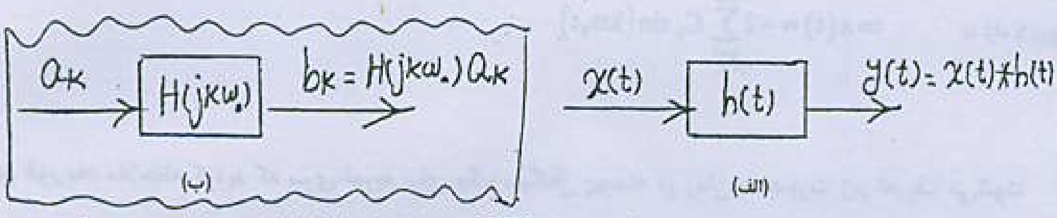
۸ ـ ۲ ـ کاربرد سری فوریه در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان LTI

در قسمت‌های قبل بخش (۸ـ۱) به معرفی سری فوریه پیوسته در زمان و شرایط همگرائی آن پرداختیم. اما در این قسمت کاربرد سری فوریه در تحلیل سیستم‌های LTI را بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ مفروض است. به این سیستم یک ورودی متناوب $x(t)$ اعمال می‌کنیم. هدف تعیین خروجی $y(t)$ است (شکل (۸ ـ ۲ ـ الف)). بدیهی است به دلیل LTI بودن سیستم، خروجی $y(t)$ نیز متناوب با همان دوره تناوب اصلی ورودی است. برای تحلیل این سیستم توسط تحلیل سری فوریه، ابتدا سری فوریه $x(t)$ را نوشته و با استفاده از آن ضرایب سری فوریه خروجی را بدست می‌آوریم (شکل (۸ـ۲ـ ب)).

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad b_k = H(jk\omega_0)a_k$$

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \qquad H(jk\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$



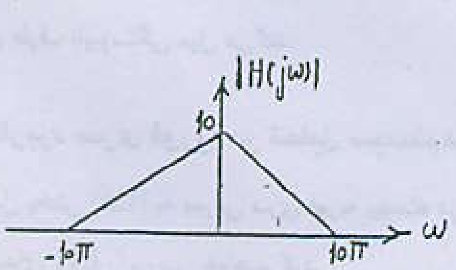
شکل ۸ـ۲ـ (الف) رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم LTI در حوزه زمان (ب) رابطه بین ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی

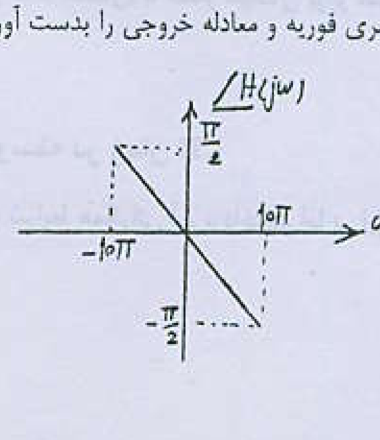
بنابراین با داشتن ورودی و پاسخ ضربه یک سیستم می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. اما تعیین خروجی از روی ضرایب سری فوریه آن غیر از موارد خاص امکان‌پذیر نیست. لذا در مواقعی که خروجی $y(t)$ مورد نظر باشد، استفاده از سری فوریه (جز در موارد خاص) مفید نیست. اما در صورتی که تعیین ضرایب سری فوریه خروجی که در واقع دامنه هارمونیک‌هادر خروجی یک سیستم (یک فیلتر) هستند، مورد نظر باشند، استفاده از سری فوریه مفید خواهد بود.

تذکر: موارد خاصی که از روی ضرایب سری فوریه یک سیگنال می‌توان آن سیگنال را بدست آورد معمولاً مواقعی است که سیگنال یکی از سیگنال‌های جدول (۸ـ۱) باشد.

تذکر: در برخی مسائل بجای $h(t)$ یک سیستم، $H(j\omega)$ داده می‌شود که پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می‌شود و در بخش‌های آتی معرفی خواهد شد. بدیهی است برای تعیین $H(jk\omega_0)$ از روی $H(j\omega)$، باید مقدار $H(j\omega)$ را در مضارب صحیح ω_0 محاسبه کرد.

مثال: فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی $T_0=\frac{1}{2}$ و ضرایب سری فوریه $a_0=1$ ، $a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$ ، $a_2=a_{-2}=\frac{1}{4}$ و $a_k=0\ |k|>2$ می‌باشد. این سیگنال به یک سیستم با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ مطابق با شکل زیر اعمال می‌شود. ضرایب سری فوریه و معادله خروجی را بدست آورید.





حل: اگر ضرایب سری فوریه خروجی را b_k بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} b_k = a_K H(jk\omega_0) \\ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 4\pi \end{cases} \Rightarrow b_k = a_k H(j4k\pi) \begin{cases} |b_k| = |a_k|\,|H(j4k\pi)| \\ \angle b_k = \angle a_k + \angle H(j4k\pi) \end{cases}$$

بنابراین به ازاء k های مختلف داریم:

$$\begin{cases} |b_0| = 1\times 10 = 10 \\ \angle b_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_0 = 10$$

$$\begin{cases} |b_1| = \dfrac{1}{2}\times 6 = 3 \\ \angle b_1 = 0 - \dfrac{\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{5}}$$

$$\begin{cases} |b_{-1}| = \dfrac{1}{2}\times 6 = 3 \\ \angle b_{-1} = 0 + \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_{-1} = 3e^{j\frac{\pi}{5}}$$

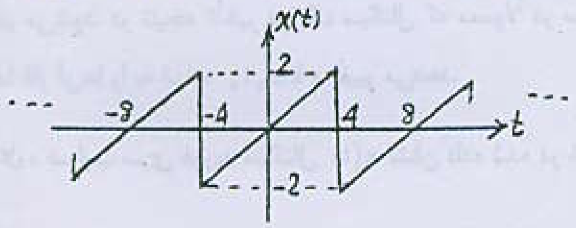
$$\begin{cases} |b_2| = \dfrac{1}{4}\times 2 = \dfrac{1}{2} \\ \angle b_2 = 0 - \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{2\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_2 = \dfrac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{5}}$$

$$\begin{cases} |b_{-2}| = \dfrac{1}{4}\times 2 = \dfrac{1}{2} \\ \angle b_{2-} = 0 + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_{-2} = \dfrac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{5}}$$

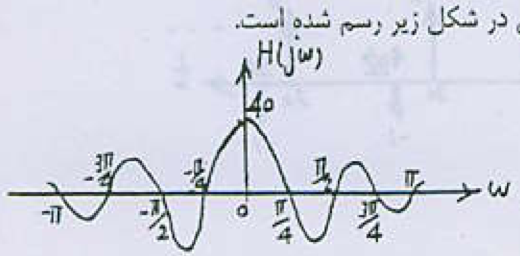
بنابراین خروجی $y(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = 10 + 3e^{j\left(4\pi t - \frac{\pi}{5}\right)} + 3e^{-j\left(4\pi t - \frac{\pi}{5}\right)} + \frac{1}{2}e^{j\left(8\pi t - \frac{2\pi}{5}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(8\pi t - \frac{2\pi}{5}\right)} \Rightarrow y(t) = 10 + 6\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(8\pi t - \frac{2\pi}{5}\right)$$

مثال: یک سیستم با پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = \dfrac{10\sin(4\omega)}{\omega}$ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم موج دندانه اره‌ای شکل زیر را اعمال کنیم، ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورید.



حل: پاسخ فرکانسی سیستم به شکل تابع sinc است و به صورت تقریبی در شکل زیر رسم شده است.



اما اگر در سیگنال ورودی توجه کنیم ملاحظه خواهیم کرد:

$$T_0 = 8 \to \omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

ملاحظه می‌شود که هارمونیک‌های ورودی غیر از هارمونیک DC روی صفرهای $H(j\omega)$ قرار می‌گیرند. بنابراین این سیستم فقط هارمونیک DC ورودی را از خود عبور می‌دهد. زیرا داریم:

$$H\left(j\frac{k\pi}{4}\right) = 0 \qquad k \neq 0$$

اما سیگنال ورودی یک سیگنال فرد است و فاقد مؤلفه DC است و برای این سیگنال $a_0 = 0$ می‌باشد. بنابراین تمام ضرایب سری فوریه خروجی برابر صفر می‌باشند و در نتیجه $y(t) = 0$ خواهد بود.

مثال: ضرایب سری فوریه قطار ضربه $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 5\delta\left(10t + k\frac{T}{3}\right)$ را بدست آورید.

حل:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{5}{10}\delta\left(t + \frac{kT}{30}\right) \overset{\text{جدول (۱ـ۸)}}{\Rightarrow} a_k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{T}{30}} = \frac{15}{T}$$

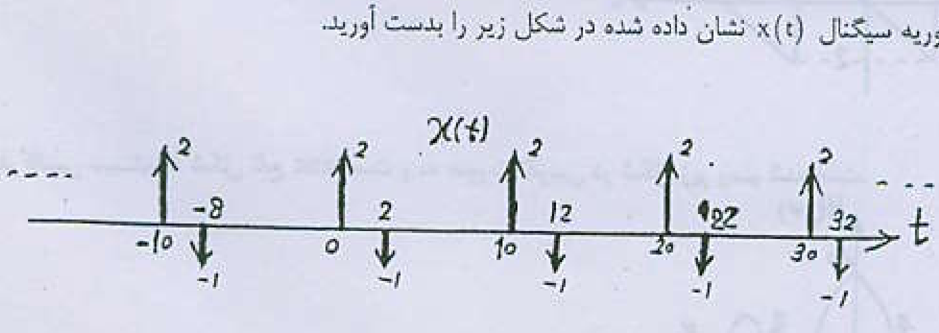
۸ـ۳ـ خواص سری فوریه پیوسته در زمان

نمایش سری فوریه خواص مهمی دارد که مفهوم آن را بارزتر کرده و همچنین برای تعیین ضرایب سری فوریه سیگنال‌های پیچیده‌تر مفید می‌باشد. این خواص در جدول (۲ـ۸) آورده شده‌اند و در ادامه بررسی خواهند گردید. فراگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر می‌باشد.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه ضرایب سری فوریه از انتگرال‌گیری استفاده می‌شود، بنابراین ضرایب سری فوریه خاصیت خطی دارند.

(۲) جابجائی زمانی: اگر سیگنالی روی محور زمان جابجا و تبدیل به $x(t-t_0)$ گردد، آنگاه ضریب سری فوریه سیگنال جدید $e^{-jk\omega_0 t_0}$ برابر می‌شود. در نتیجه تأخیر در یک سیگنال که معمولاً در سیستم‌های مخابراتی اتفاق می‌افتد، دامنه ضرایب سری فوریه را تغییر نداده و فقط فاز آن‌ها را به اندازه $-k\omega_0 t_0$ تغییر می‌دهد.

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید.



حل: اگر $x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-10n)$ فرض شود، طبق جدول (۸ـ۱) داریم $a_K=\frac{1}{10}$. از طرفی با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $x(t)=2x_1(t)-x_1(t-2)$. بنابراین با توجه به خواص خطی و جابجایی زمانی ضریب سری فوریه داریم:

$$b_k=2a_k-a_k e^{-jk\frac{2\pi}{10}\times 2}=\frac{1}{10}\left(2-e^{-j\frac{2k\pi}{5}}\right)$$

خاصیت	سیگنال متناوب	ضرایب سری فوریه
	$x(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0 و فرکانس پایه $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	a_k
	$y(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0 و فرکانس پایه $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	b_k
خطی بودن	$Ax(t)+By(t)$	Aa_k+Bb_k
جابجایی زمانی	$x(t-t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
جابجایی فرکانسی	$e^{jM\omega_0 t}x(t)$	a_{k-M}
مزدوج‌گیری	$x^*(t)$	a^*_{-k}
وارونگی زمانی	$x(-t)$	a_{-k}
تغییر مقیاس زمانی	$x(\alpha t)\quad \alpha>0$ متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{T_0}{\alpha}$	a_k
کانولوشن متناوب	$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 a_k b_k$
ضرب در حوزه زمان	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
مشتق در حوزه زمان	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k$
انتگرال در حوزه زمان	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ $x(t)$ فاقد مؤلفه DC	$\frac{a_k}{jk\omega_0}\quad k\neq 0$
تقارن سیگنال‌های حقیقی	$x(t)=x^*(t)$ ($x(t)$ حقیقی)	$a_k=a^*_{-k}$ $Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\}$ $Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\}$ $\lvert a_k\rvert=\lvert a_{-k}\rvert$ $\angle a_k=-\angle a_{-k}$
تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج	$x(t)=x^*(t)=x(-t)$ ($x(t)$ حقیقی و زوج)	$a_k=a_k^*=a_{-k}$ (a_K حقیقی و زوج)
تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد	$x(t)=x^*(t)=-x(-t)$ ($x(t)$ حقیقی و فرد)	$a_k=-a^*_k=-a_{-k}$ (a_K موهومی و فرد)
تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی	$x(t)$ حقیقی، $x(t)=x_e(t)+x_0(t)$	$a_k=Re\{a_k\}+jIm\{a_k\}=ev\{a_k\}+odd\{a_k\}$ $Re\{a_k\}=ev\{a_k\}$ ضرایب فوریه $x_e(t)$ برابر است با $jIm\{a_k\}=odd\{a_k\}$ ضرایب سری فوریه $x_0(t)$ برابر است با
رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب	$P_x=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\lvert x(t)\rvert^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lvert a_k\rvert^2$	

جدول ۸ ـ۲ خواص سری فوریه پیوسته در زمان

(۳) جابجایی فرکانسی: این خاصیت مشابه خاصیت جابجایی زمانی است. یعنی اگر ضرایب سری فوریه روی محور فرکانس جابجا شده وتبدیل به a_{k-M} گردند، آنگاه سیگنال زمانی در $e^{jM\omega_0 t}$ ضرب می‌شود. در نتیجه با ضرب یک سیگنال در $e^{jM\omega_0 t}$، می‌توان ضرایب سری فوریه آن را جابجا کرد. (سیگنال را مدوله کرد)

(۴) مزدوج‌گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، ضرایب سری فوریه آن به a^*_{-k} تبدیل می‌شوند. یعنی علاوه بر مزدوج شدن، نسبت به محور عمودی نیز قرینه می‌شوند.

(۵) وارونگی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز قرینه می‌شوند.

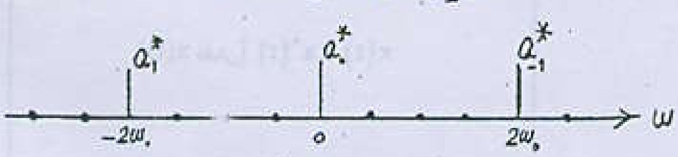
(۶) تغییر مقیاس زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان فشرده یا گسترده گردد، ضرایب سری فوریه آن هیچ تغییری نخواهند کرد. دقت کنید سیگنال فشرده یا گسترده شده در حوزه زمان یعنی $(a>0)x(at)$ از نظر شکل مشابه $x(t)$ است اما فقط دوره تناوب اصلی آن $\frac{T_0}{a}$ می‌باشد. لذا اگرچه شکل ضرایب سری فوریه سیگنال جدید مانند سیگنال قبلی است، اما فرکانس پایه سیگنال جدید $a\omega_0$ است.

مثال : فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_0 و ضرایب سری فوریه a_k می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)=x^*(2t)-x\left(\frac{-t}{2}\right)$ را b_k بنامیم، b_2 و b_4 را بدست آورید.

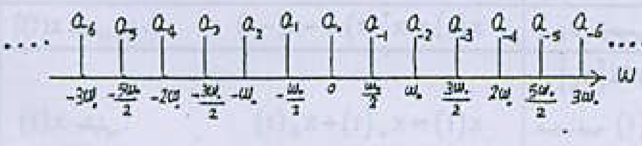
حل : دوره تناوب اصلی سیگنال $x^*(2t)$ و $x\left(\frac{-t}{2}\right)$ به ترتیب $\frac{T_0}{2}$ و $2T_0$ می‌باشند. لذا فرکانس‌های پایه این دو سیگنال به ترتیب $2\omega_0$ و $\frac{\omega_0}{2}$ می‌باشند. سیگنال $y(t)$ نیز دوره تناوب $2T_0$ و فرکانس اصلی $\frac{\omega_0}{2}$ دارد.

طبق جدول (۸ـ۲) ضرایب سری فوریه $x^*(2t)$ برابر a^*_{-k} با فرکانس پایه $2\omega_0$ و ضرایب سری فوریه $x\left(\frac{-t}{2}\right)$ برابر a_{-k} با فرکانس پایه $\frac{\omega_0}{2}$ است. در شکل‌های زیر ضرایب سری فوریه این سیگنال‌ها و همچنین ضرایب b_k نشان داده شده‌اند:

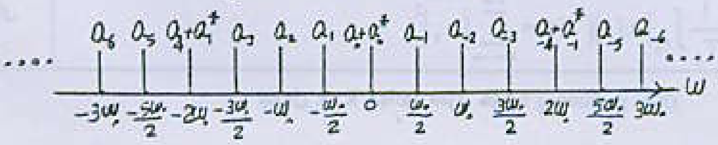
ضرایب سری فوریه $x^*(2t)$



ضرایب سری فوریه $x(-\frac{t}{2})$



ضرایب سری فوریه $y(t)$



بنابراین داریم:

$b_2 = a_{-2} \quad , \quad b_4 = a_{-4} + a^*_{-1}$

مثال: اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی $T_0 = 6$ و ضرایب سری فوریه a_k باشد و ضرایب سری فوریه $x(-3t-4)$ را b_k بنامیم، رابطه بین b_k و a_k را بدست آورید.

حل:

$$x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$$

$$x(t-4) \xleftrightarrow{F.S} e^{-jk\frac{2\pi}{6}\times 4} a_k = a_k e^{-j\frac{4k\pi}{3}}$$

$$x(-t-4) \xleftrightarrow{F.S} a_{-k} e^{j\frac{4k\pi}{3}}$$

$$x(-3t-4) \xleftrightarrow{F.S} b_{\frac{k}{3}} = a_{-k} e^{j\frac{4k\pi}{3}} \quad k=0, \pm 3, \pm 6, \ldots$$

دقت کنید فرکانس پایه $x(t)$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است در حالی که فرکانس پایه سیگنال جدید π می‌باشد.

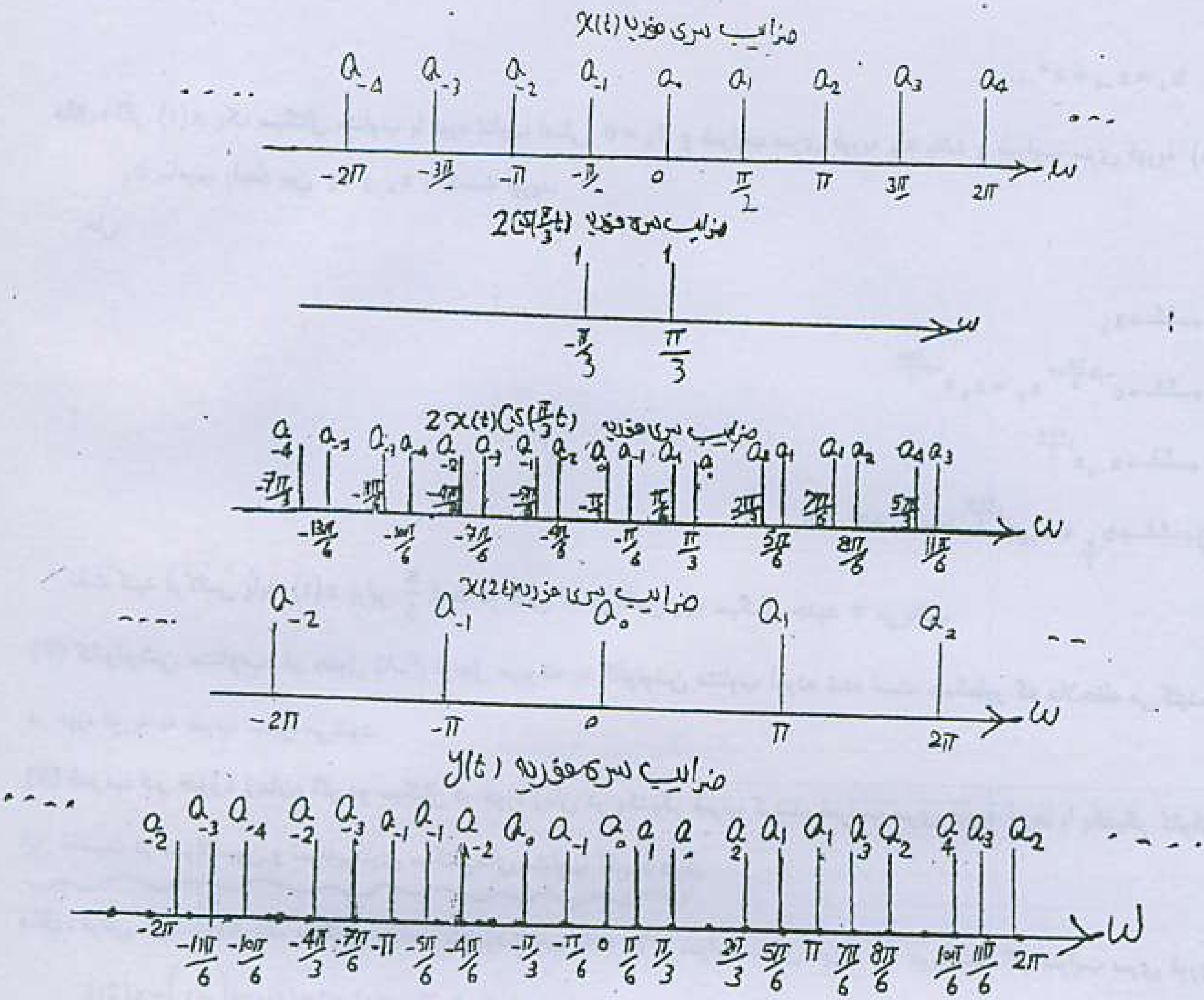
(۷) کانولوشن متناوب: در جدول (۸-۲) فرمول مربوطه به کانولوشن متناوب آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌کنید، این اپراتور در حوزه فوریه به ضرب تبدیل می‌شود.

(۸) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، ضرایب سری فوریه آن‌ها با یکدیگر کانوالو می‌شوند. این خاصیت در مدولاسیون و نمونه‌برداری سیگنال‌های متناوب کاربرد دارد.

مثال: فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T_0 = 4$ و ضرایب سری فوریه a_k می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t) = 2x(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + x(2t)$ را b_k بنامیم، ضرایب b_3 و b_7 و b_{10} را بدست آورید.

حل: با توجه به آن که دوره تناوب $x(t)$ برابر $T_0 = 4$ می‌باشد بنابراین فرکانس اصلی آن $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ است. بنابراین برای $x(2t)$ دوره تناوب $\frac{T_0}{2} = 2$ و فرکانس اصلی $2\omega_0 = \pi$ است. از طرفی دوره تناوب سیگنال $\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ برابر 6 و فرکانس اصلی آن $\frac{\pi}{3}$ است. اگر کوچکترین مضرب مشترک دوره تناوب‌ها را محاسبه کنیم، نتیجه می‌گیریم که دوره تناوب $y(t)$ برابر 12 و فرکانس اصلی آن $\frac{\pi}{6}$ است. ضرایب سری فوریه سیگنال‌های فوق در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده‌اند و با توجه به این شکل‌ها نتیجه می‌گیریم:

$b_3 = 0 \quad , \quad b_7 = a_3 \quad , \quad b_{10} = a_4$



(۹) **مشتق در حوزه زمان:** مشتق گرفتن از یک سیگنال باعث می‌شود ضرایب سری فوریه آن در $jk\omega_0$ ضرب شود.

(۱۰) **انتگرال در حوزه زمان:** با انتگرال‌گیری از یک سیگنال متناوب و محدود و فاقد مؤلفه DC ، ضرایب سری فوریه در $\frac{1}{jk\omega_0}$ ضرب می‌شوند. دلیل آنکه لازم است سیگنال فاقد مؤلفه DC باشد، لزوم صفر بودن a_0 است. زیرا ضریب $\frac{1}{jk\omega_0}$ به ازاء $k=0$ بینهایت است و در نتیجه سری فوریه وجود ندارد.

(۱۱) **تقارن سیگنال‌های حقیقی:** اگر سیگنالی حقیقی باشد، ضرایب سری فوریه آن تقارن مزدوج (هرمیتی) دارند. در این تقارن $a_k = a_{-k}^*$ می‌باشد. یعنی اگر ضرایب سری فوریه را نسبت به محور عمودی قرینه کنیم، با مزدوج ضرایب برابر می‌شود. این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی ضرایب سری.فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی ضرایب سری فوریه تقارن فرد پیدا کنند.

(۱۲) **تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج:** اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز حقیقی و زوج می‌شوند.

(۱۳) **تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد:** اگر سیگنالی حقیقی و فرد باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن موهومی و فرد می‌شوند.

(۱۴) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: قسمت زوج یک سیگنال حقیقی، قسمت زوج ضرایب سری فوریه که برابر با قسمت حقیقی این ضرایب است را نتیجه می‌دهد. قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد ضرایب سری فوریه که برابر با حاصلضرب قسمت موهومی این ضرایب در j است را نتیجه می‌دهد.

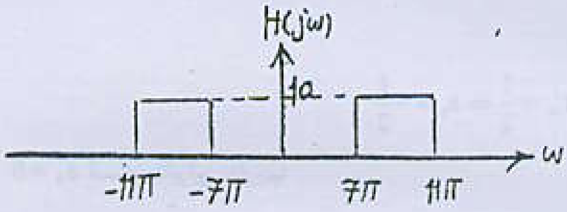
مثال: با توجه به جدول (۱ـ۸) ملاحظه می‌کنید که سیگنال $\cos(\omega_0 t)$ که یک سیگنال حقیقی و زوج است، دارای ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج می‌باشد. در حالی که $\sin(\omega_0 t)$ که یک سیگنال حقیقی و فرد است، دارای ضرایب سری فوریه موهومی و فرد می‌باشد. همچنین ضرایب سری فوریه سیگنال غیرحقیقی $e^{j\omega_0 t}$ فاقد تقارن مزدوج است.

(۱۵) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب: این رابطه یکی از روابط مهم در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها و مخابرات می‌باشد و نشان می‌دهد توان یک سیگنال را می‌توان از روی ضرایب سری فوریه آن نیز بدست آورد.

مثال: فرض کنید شکل سری فوریه سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|k|}}e^{j2k\pi t}$$

اگر این سیگنال از یک سیستم با پاسخ فرکانسی به شکل زیر عبور کند، توان سیگنال خروجی این سیستم چقدر است؟



حل: بدیهی است با توجه به شکل $H(j\omega)$ و فرکانس اصلی $x(t)$ فقط ضرایب a_4 و a_{-4} و a_5 و a_{-5} ورودی از سیستم عبور کرده و در ضمن هر کدام در 10 ضرب می‌شوند. بنابراین اگر خروجی این سیستم را $y(t)$ بنامیم، داریم:

$$P_y=100\left(2\times\frac{1}{2^8}+2\times\frac{1}{2^{10}}\right)=200\times\frac{5}{2^{10}}=\frac{125}{128}$$

مثال: اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است. این سیگنال را تعیین کنید.

(۱) $x(t)$ یک سیگنال حقیقی است.

(۲) $x(t)$ با دوره تناوب $T=4$ متناوب است و ضرایب سری فوریه آن a_k است.

(۳) برای $|k|>1$ داریم $a_k=0$.

(۴) سیگنالی که ضرایب سری فوریه آن $b_k=a_{-k}e^{-j\frac{k\pi}{2}}$ است، فرد می‌باشد.

(۵) $\frac{1}{4}\int_4|x(t)|^2dt=\frac{1}{2}$ است.

حل:

$$\Rightarrow x(t)=a_0+a_1e^{j\frac{\pi}{2}t}+a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}t}$$

(۳) $\Rightarrow$ فقط ضرایب a_0 و a_1 و a_{-1} در سری فوریه $x(t)$ وجود دارند.

(۲) $\Rightarrow$ $\omega_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$$(1)\Rightarrow a_{-1}=a_1^*\Rightarrow x(t)=a_0+a_1e^{j\frac{\pi}{2}t}+a_1^*e^{-j\frac{\pi}{2}t}=a_0+a_1e^{j\frac{\pi}{2}t}+\left(a_1e^{j\frac{\pi}{2}t}\right)^*=a_0+2\operatorname{Re}\left\{a_1e^{j\frac{\pi}{2}t}\right\}=a_0+2a_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

(۴) $\Rightarrow$ حقیقی و فرد است $x(-t+1)\Rightarrow$ برای این سیگنال ضریب $b_0=0$ و $b_1=-b_{-1}$ است

$$\Rightarrow x(-t+1)=b_1e^{j\frac{\pi}{2}t}+b_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}t}=b_1e^{j\frac{\pi}{2}t}-b_1e^{-j\frac{\pi}{2}t}=2jb_1\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

با توجه به آن که شیفت و وارون کردن روی توان یک سیگنال تأثیر ندارد بنابراین داریم:

$$(5)\Rightarrow\frac{1}{4}\int_4\left|x(-t+1)\right|^2dt=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\left|b_1\right|^2=\frac{1}{2}\Rightarrow|b_1|=|b_{-1}|=\frac{1}{2}$$

با توجه به آن که b_1 و b_{-1} باید موهومی باشند بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} b_1=\frac{j}{2}\Rightarrow\frac{j}{2}=a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}}\Rightarrow a_{-1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=\frac{1}{2} \\ \text{یا} \\ b_1=-\frac{j}{2}\Rightarrow-\frac{j}{2}=a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}}\Rightarrow a_{-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرفی چون $b_0=0$ است بنابراین $a_0=0$ است. بنابراین داریم:

$$x(t)=\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

خودآزمائی سوم

۱ـ (آزاد ۸۰) ضرایب سری فوریه قطار ضربه $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}3\delta(2t-kT_0)$ کدام می‌باشد؟

۱) $a_k=\frac{6}{T_0}$ ۲) $a_k=\frac{3}{T_0}$ ۳) $a_k=\frac{3}{2T_0}$ ۴) $a_k=\frac{2}{T_0}$

۲ـ (سراسری ۸۲) دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ برابر T_0 و ضرایب سری فوریه آن a_k می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)=x(t)+x(2t)$ را b_k بنامیم آن‌گاه ضریب b_2 کدام است؟

۱) $b_2=2a_1$ ۲) $b_2=2a_2$ ۳) $b_2=a_2-a_1$ ۴) $b_2=a_2+a_1$

۳ـ (سراسری ۸۵) دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$، T_0 و ضرایب سری فوریه آن a_k می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه $y(t)=x(t)+x\left(\frac{3}{2}t\right)$ را با b_k نمایش دهیم، b_2 کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

۱) a_1 ۲) a_2 ۳) $2a_1$ ۴) a_1+a_2

۴ـ $x_1(t)$ را سیگنال پیوسته در زمان با فرکانس پایه ω_1 و ضرایب سری فوریه a_k فرض کنید. اگر ضرایب سری فوریه و فرکانس پایه $x_2(t)=x_1(1-t)+x_1(t-1)$ را به ترتیب b_k و ω_2 بنامیم، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

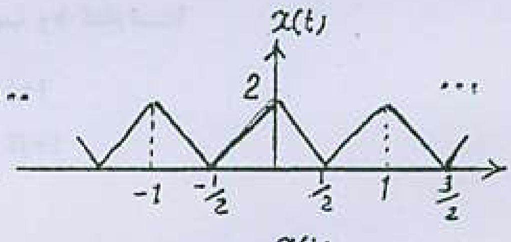
۱) $b_k=e^{-jk\omega_1}\left(a_{-k}+a_k\right)\ ,\ \omega_2=\omega_1$

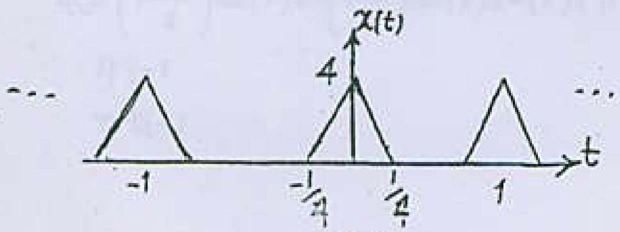
۲) $b_k=e^{-jk\omega_1}\left(a_{-k}^{*}+a_k\right)\ ,\ \omega_2=2\omega_1$

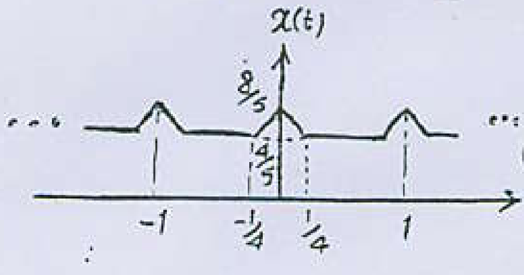
۳) $b_k=e^{-jk\omega_1}\left(a_{-k}+a_k\right)\ ,\ \omega_2=2\omega_1$

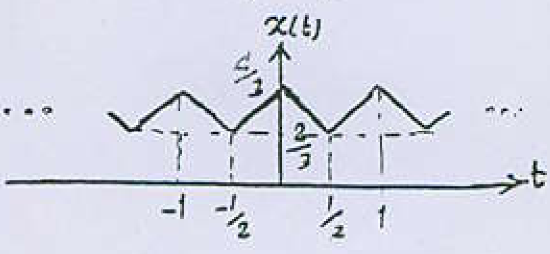
۴) $b_k=e^{-jk\omega_1}\left(a_{-k}^{*}+a_k\right)\ ,\ \omega_2=\omega_1$

۵ـ (آزاد ۸۰) سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T_0=1$ دارای ضریب سری فوریه $a_k=\left(\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2$ می‌باشد. $x(t)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۶ـ فرض کنید یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان با سری فوریه $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|k|}}e^{j\frac{k\pi}{4}t}$ به یک فیلتر پائین گذر ایده‌آل با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)=2\Pi\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$ اعمال می‌شود. توان متوسط سیگنال خروجی فیلتر چقدر است؟

۱) $\frac{13}{8}$ ۲) $\frac{13}{4}$

۳) $\frac{13}{2}$ ۴) هیچکدام

۷ـ (آزاد ۸۱) سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ را در نظر بگیرید $\left(H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}=\frac{\sin 4\omega}{\omega}\right)$ اگر ورودی این سیستم سیگنال متناوب $x(t)$ با پریود $T=8$ و به صورت $x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<4\\ -1 & 4\le t<8\end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه خروجی (y_k) کدام خواهد بود؟

۱) $y_k=0 \quad \forall k$ ۲) $y_k=\begin{cases}0 & k=0\\ \frac{16}{\pi jk} & k\neq 0\end{cases}$ ۳) $y_k=\begin{cases}0 & \text{زوج } k\\ \frac{16}{\pi jk} & \text{فرد } k\end{cases}$ ۴) $y_k=\begin{cases}\frac{16}{\pi jk} & \text{زوج } k\\ 0 & \text{فرد } k\end{cases}$

۸ ـ یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان و فاقد DC با سری فوریه $x(t)=\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\frac{e^{jk\omega_0 t}}{|k|}$ به یک سیستم با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)=\frac{2}{1+j\omega}$ اعمال می‌شود. به ازای کدام ω_0 دامنه هارمونیک دوم از 30 % دامنه هارمونیک اول در خروجی سیستم کمتر می‌گردد ؟

۱) $\omega_0=\frac{\pi}{2}$ ۲) $\omega_0=\pi$

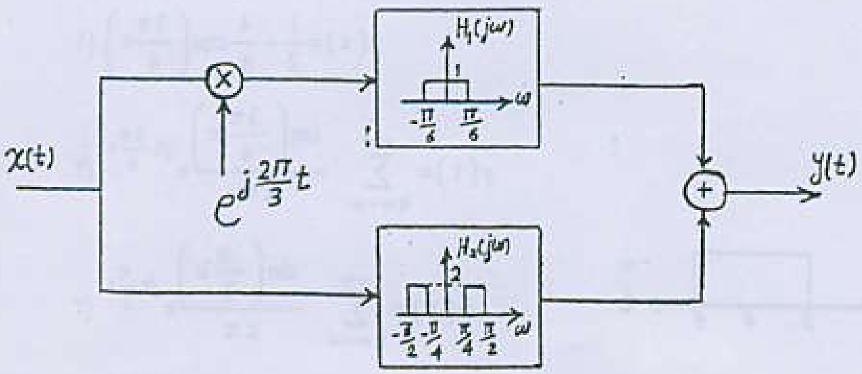
۳) هر دو ۴) هیچکدام

۹ ـ اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان با دوره تناوب اصلی $T_0=16$ و ضرایب سری فوریه $a_k=1+j^k$ باشد و ضرایب سری فوریه $y(t)=x(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+x(t)\sin\left(\frac{3\pi}{8}t\right)$ را b_k بنامیم، ضریب b_3 کدام است؟

۱) $1-j$ ۲) $1+j$

۳) $1-j2$ ۴) $1+j2$

۱۰ــ در شکل زیر فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان با دوره تناوب $T_0=6$ و ضرایب سری فوریه $a_k=\begin{cases}1 & k=0\\ \dfrac{1}{\pi|k|} & k\neq 0\end{cases}$ باشد، خروجی $y(t)$ کدام گزینه است؟



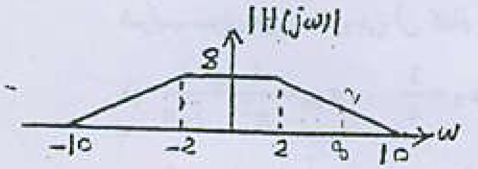
۱) $y(t)=1+\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

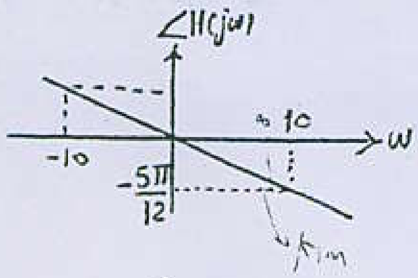
۲) $y(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

۳) $y(t)=1+\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

۴) $y(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

۱۱ـ (سراسری ۸۱) منحنی‌های اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یک فیلتر داده شده‌اند. اگر $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)$ آن‌گاه خروجی $y(t)$ کدام است؟





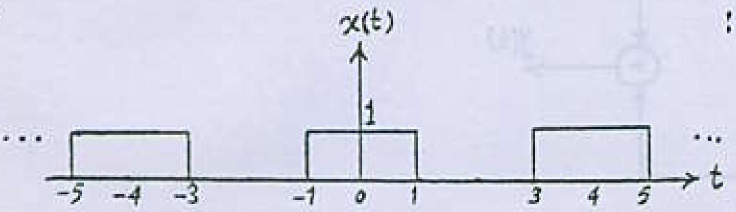
۱) $\frac{32}{\pi}+\frac{8}{\pi}\cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)$

۲) $\frac{32}{\pi}+\frac{8}{\pi}\cos\left(8t-\frac{2\pi}{3}\right)$

۳) $\frac{16}{\pi}\cos\left(8t-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{8}{\pi}\cos\left(16t-\frac{\pi}{3}\right)$

۴) $\frac{32}{\pi}+\frac{16}{\pi}\cos\left(8t-\frac{\pi}{3}\right)$

۱۲ـ (آزاد ۸۴) یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه $h(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)}{\pi t}$ در نظر بگیرید. ورودی این سیستم پنجره مستطیلی متناوب زیر است. خروجی $y(t)$ چگونه خواهد بود؟



۱) $y(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}t\right)$

۲) $y(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)}{k\pi}e^{jk\frac{3\pi}{4}t}$

۳) $y(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{k\pi}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

۴) $y(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$

۱۳ـ (آزاد ۸۳) یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه $h(t)=\dfrac{\sin(1.5\pi t)}{\pi t}$ در نظر بگیرید. چنانچه ورودی این سیستم یک سیگنال متناوب با دوره تناوب دو ثانیه و به صورت زیر باشد:

$$x(t)=\begin{cases}1-t+\sin(\pi t) & 0<t<1\\ 1+\sin(\pi t) & 1<t<2\end{cases}$$

ضرایب سری فوریه خروجی آن کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $a_{\pm1}=\dfrac{1}{\pi^2}\mp\dfrac{1}{j2\pi}$ ، $a_0=\dfrac{3}{4}$ و بقیه ضرایب صفرند.

۲) $a_{\pm1}=\dfrac{1}{\pi^2}\mp\dfrac{1}{j2\pi}$ ، $a_0=\dfrac{1}{2}$ و بقیه ضرایب صفرند.

۳) $a_{\pm1}=\dfrac{1}{\pi^2}\mp\dfrac{1}{j2\pi}\pm\dfrac{1}{j2}$ ، $a_0=\dfrac{3}{4}$ و بقیه ضرایب صفرند.

۴) $a_{\pm k}=\dfrac{1}{k^2\pi^2}+\dfrac{(-1)^k}{j2k\pi}$ ، $a_0=\dfrac{1}{2}$

۹ـ تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه پیوسته در زمان)

در بخش قبل سری فوریه برای سیگنال‌های پیوسته در زمان متناوب بررسی گردید. در این بخش به معرفی تبدیل فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان پرداخته و خواص آن معرفی و بررسی می‌گردند. این تبدیل علاوه بر سیگنال‌های متناوب، برای نمایش فوریه سیگنال‌های نامتناوب نیز مناسب می‌باشد.

۹ـ۱ـ تبدیل فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LTI

تعریف: سیگنال نامتناوب $x(t)$ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال با $X(j\omega)$ (یا $X(\omega)$) نشان داده می‌شود و رابطه بین $x(t)$ و $X(j\omega)$ به صورت زیر است:

معادله تبدیل فوریه :
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

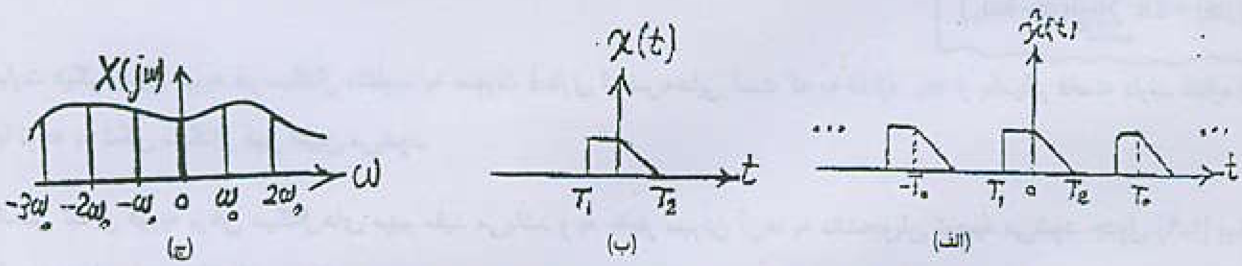
معادله عکس تبدیل فوریه :
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

تذکر: اگر $\tilde{x}(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T_0 ، فرکانس اصلی ω_0 و ضرایب سری فوریه a_k باشد، آنگاه a_k را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب

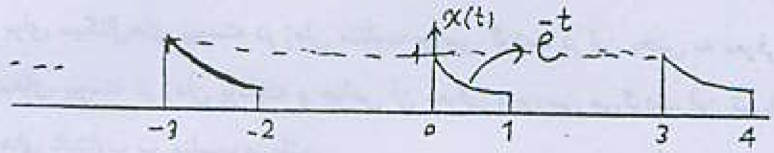
$$\boxed{a_k=\frac{1}{T_0}X(jk\omega_0)}$$

در رابطه فوق $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ می‌باشد. $x(t)$ سیگنال نامتناوبی است که مشابه یکی از دوره‌های تناوب $\tilde{x}(t)$ است. در واقع ضرایب سری فوریه $\tilde{x}(t)$ با نمونه‌برداری از تبدیل فوریه $x(t)$ بدست می‌آیند. شکل (۹ـ۱) ارتباط بین $x(t)$ و $\tilde{x}(t)$ را در حوزه زمان و فرکانس نشان می‌دهد.



شکل ۹ ـ ۱ ـ (الف) یک سیگنال متناوب فرضی (ب) سیگنال نامتناوب مشابه یک دوره تناوب سیگنال بند (الف) (ج) تبدیل فوریه فرضی سیگنال بند (ب) و نحوه بدست آوردن ضرایب سری فوریه سیگنال بند (الف)

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ شکل زیر را با استفاده از تبدیل فوریه بدست آورید.



حل: ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $x_1(t)=e^{-t}\quad 0<t<1$ را بدست می‌آوریم:

$$X_1(\omega)=\int_0^1 e^{-t}.e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-(1+j\omega)}\bigg|_0^1=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

حال با توجه به آن که دوره تناوب $x(t)$ برابر $T_0=3$ است بنابراین داریم:

$$a_k=\frac{1}{T_0}X_1\left(jk\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1-e^{-\left(1+j\frac{2k\pi}{3}\right)}}{1+j\frac{2k\pi}{3}}$$

تذکر: ملاحظه می‌کنید تبدیل فوریه یک سیگنال (برخی مواقع طیف سیگنال نیز نامیده می‌شود) در حالت کلی یک تابع مختلط است. لذا دامنه و فازآن جداگانه تعیین شده و رسم می‌گردند که به ترتیب طیف دامنه و فاز نامیده می‌شوند.

تذکر: با توجه به تعریف تبدیل فوریه، ملاحظه می‌شود که $X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt$ می‌باشد. این رابطه در واقع مقدار DC یک موج نامتناوب را نشان می‌دهد. پس $X(0)$ در واقع معرف مقدار DC سیگنال $x(t)$ است.

تذکر: (**تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب**) اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_0، فرکانس پایه ω_0 و ضرایب سری فوریه a_k باشد، آن‌گاه می‌توان نشان داد تبدیل فوریه آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)}$$

به عبارت دیگر تبدیل فوریه هر سیگنال متناوب به صورت قطاری از ضربه‌هایی است که به اندازه ω_0 از یکدیگر فاصله دارند. اندازه این ضربه‌ها با توجه به شکل سیگنال فوق تعیین می‌شود.

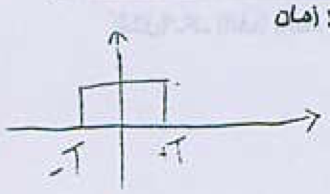
تذکر: دانستن تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم مفید می‌باشد و به خاطر سپردن آن‌ها به دانشجویان توصیه می‌شود. جدول (۹ـ۱) برخی از این زوج‌های فوریه را نشان می‌دهد.

* در حوزه زمان اصلاً 2π ضرب نمی‌شود. فقط در سری فوریه [illegible] را باید.

سیگنال	تبدیل فوریه
$x(t)=e^{j\omega_0 t}$	$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$x(t)=\cos(\omega_0 t)$	$X(j\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$x(t)=\sin(\omega_0 t)$	$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$x(t)=1$	$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$
$x(t)=\delta(t)$	$X(j\omega)=1$
$x(t)=\delta(t-t_0)$	$X(j\omega)=e^{-j\omega t_0}$
$x(t)=u(t)$	$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$x(t)=e^{-at}u(t)\ ,\ \mathrm{Re}\{a\}>0$	$X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$
$x(t)=te^{-at}u(t)\ ,\ \mathrm{Re}\{a\}>0$	$X(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
$x(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\ ,\ \mathrm{Re}\{a\}>0$	$X(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{T}\right)$
$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T\\ 0 & \lvert t\rvert>T\end{cases}$	$X(j\omega)=\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}=2T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$
$x(t)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$ صفر عرض	$X(j\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<W\\ 0 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$
$x(t)=\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert t\rvert}{T} & \lvert t\rvert<T\\ 0 & \lvert t\rvert>T\end{cases}$	$X(j\omega)=T\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$x(t)=\frac{W}{2\pi}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2\pi}\right)$	$X(j\omega)=\Lambda\left(\frac{\omega}{W}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert\omega\rvert}{W} & \lvert\omega\rvert<W\\ 0 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$
$x(t)=e^{-\alpha\lvert t\rvert}\quad \alpha>0$	$X(j\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

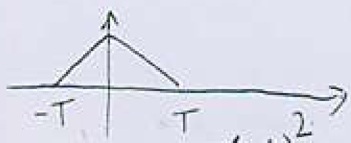
جدول ۹ - ۱ - تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$



$\xrightarrow{F}\ 2T\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$

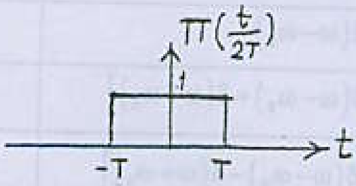
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$



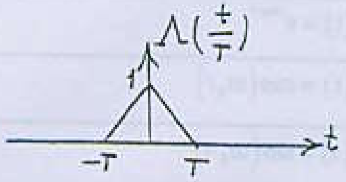
$\xrightarrow{F}\ T\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$e^{-\pi(bt)^2} \longleftrightarrow \frac{1}{b}e^{-\pi\left(\frac{f}{b}\right)^2} \longrightarrow$ تنها تابعی که شکل تبدیل و خودش [illegible] یک چیز است

در جدول (۹ـ۱) دو تابع $\Pi(.)$ و $\Lambda(.)$ استفاده شده است که در شکل‌های (۹ـ۲) و (۹ـ۳) نمودار این دو تابع نشان داده شده‌اند.



شکل ۹ ـ ۲ ـ پالس مربعی متقارن



شکل ۹ ـ ۳ ـ پالس مثلثی متقارن

همگرائی تبدیل فوریه: با توجه به ارتباط نزدیک میان تبدیل فوریه و سری فوریه، به نظر می‌رسد شرایط همگرائی تبدیل فوریه مشابه شرایط همگرائی سری فوریه باشد. قضیه زیر شرایط دریکله را برای همگرائی تبدیل فوریه بیان می‌کند.

قضیه (شرایط) دریکله: اگر $x(t)$ دارای سه شرط زیر باشد:

شرط ۱ : $x(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$

شرط ۲ : در هر بازه زمانی محدود، تعداد نقاط اکسترمم $x(t)$ محدود باشد.

شرط ۳ : در هر بازه زمانی محدود، تعداد نقاط ناپیوستگی $x(t)$ و همچنین مقادیر ناپیوستگی‌ها محدود باشند.

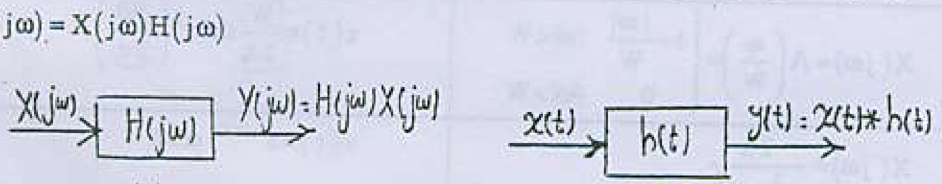
آنگاه تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ وجود داشته و با عکس تبدیل فوریه گرفتن از آن، سیگنالی بدست می‌آید که غیر از نقاط ناپیوستگی، در سایر نقاط با $x(t)$ برابر است.

۹ ـ ۲ ـ کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان LTI :

در بخش قبل ملاحظه کردید سری فوریه ابزار مناسبی جهت تعیین خروجی یک سیستم LTI نیست و با استفاده از آن (غیر از سیگنال‌های خاص) فقط می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. در این بخش خواهیم دید که تبدیل فوریه یک روش مناسب و ساده برای تعیین خروجی سیستم‌های LTI می‌باشد.

تعیین خروجی یک سیستم LTI از روی ورودی از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه نتیجه می‌شود. یعنی تبدیل فوریه کانولوشن دو سیگنال برابر حاصل ضرب تبدیل فوریه آن‌ها می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل (۹ـ۴) داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$



شکل۹ـ۴ـ (الف) رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم LTI در حوزه زمان (ب) رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی

بنابراین تبدیل فوریه خروجی یک سیستم LTI برابر است با حاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه (پاسخ فرکانسی سیستم). برای تعیین خروجی سیستم باید از تبدیل فوریه آن عکس تبدیل فوریه گرفت که معمولاً برای گرفتن عکس تبدیل فوریه از بسط یک کسر به کسرهای جزئی و خواص سری فوریه استفاده می‌شود. بحث مربوط به بسط یک کسر به کسرهای جزئی را می‌توانید از کتب پایه ریاضی مطالعه نمائید. خواص سری فوریه در ادامه معرفی و بررسی خواهند شد.

مثال : یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t)$ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم ورودی $x(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$ اعمال شود، خروجی $y(t)$ این سیستم را بدست آورید.

حل :

$$H(j\omega)=F\{h(t)\}=1+\frac{2}{1+j\omega}=\frac{3+j\omega}{1+j\omega}$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}=\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{3+j\omega}{(1+j\omega)^2(2+j\omega)}=\frac{1}{2+j\omega}+\frac{2}{(1+j\omega)^2}+\frac{-1}{1+j\omega}\Rightarrow y(t)=\left(e^{-2t}+2te^{-t}-e^{-t}\right)u(t)$$

تذکر: برای توابعی مانند $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ که آن‌ها را می‌توان برحسب $e^{j\omega_0 t}$ نوشت و با توجه به آنکه $e^{j\omega_0 t}$ یک تابع ویژه برای سیستم‌های LTI است، می‌توان خروجی سیستم را ساده‌تر بدست آورد. روابط زیر با توجه به این اصل بدست می‌آیند:

$$\text{if } x(t)=e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow y(t)=\left|H(j\omega_0)\right|e^{j(\omega_0 t+\angle H(j\omega_0))}$$

$$\text{if } x(t)=\cos(\omega_0 t)\Rightarrow y(t)=\left|H(j\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 t\pm\angle H(j\omega_0)\right)$$

$$\text{if } x(t)=\sin(\omega_0 t)\Rightarrow y(t)=\left|H(j\omega_0)\right|\sin\left(\omega_0 t+\angle H(j\omega_0)\right)$$

در روابط فوق $H(j\omega_0)$ معرف مقدار $H(j\omega)$ در فرکانس $\omega=\omega_0$ است. دقت کنید پاسخ به‌دست آمده پاسخ در حالت دائم می‌باشد و با این روش نمی‌توان پاسخ گذرای سیستم را به‌دست آورد.

مثال : پاسخ حالت دائم یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega+1)^2}$ را به ورودی $x(t)=\cos(2t)$ بدست آورید.

حل :

$$H(j2)=\frac{j2}{(j2+1)^2}=\frac{j2}{-3+j4}=\frac{2e^{j90^\circ}}{5e^{j126.8^\circ}}=\frac{2}{5}e^{-j36.8^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$y(t)=\frac{2}{5}\cos\left(2t-36.8^\circ\right)$$

تست نمونه ـ یک سیستم LTI وارون‌پذیر با پاسخ پله $s(t)=\left(1-e^{\frac{-t}{2}}\right)u(t)$ را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه سیستم وارون کدام است؟

۱) $h(t)=\delta(t)$ ۲) $h(t)=\delta(t)+2\delta'(t)$ ۳) $h(t)=\delta(t)-\delta'(t)$ ۴) هیچکدام

حل :

ابتدا پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی این سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}+j\omega}=\frac{1}{1+j2\omega}$$

اگر پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم وارون را به ترتیب با $h_1(t)$ و $H_1(j\omega)$ نشان دهیم، آن‌گاه:

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \Rightarrow H(j\omega)H_1(j\omega)=1$$

بنابراین:

$$H_1(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=1+j2\omega \Rightarrow h_1(t)=\delta(t)+2\delta'(t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h(t)=\frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2}$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=\sin^2(\pi t)$ چیست؟

۱) $y(t)=\frac{1}{4}$ ۲) $y(t)=\frac{1}{2}$ ۳) $y(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin^2(\pi t)$ ۴) $y(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2(\pi t)$

حل :

با توجه به جدول (۹ـ۱) پاسخ فرکانسی این سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$h(t)=\frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2}=\text{sinc}^2(t) \Rightarrow H(j\omega)=\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

از طرفی داریم:

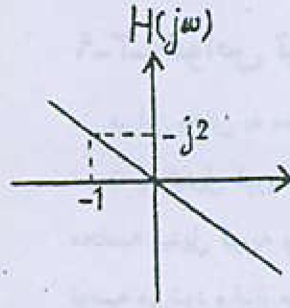
$$x(t)=\sin^2(\pi t)=\frac{1-\cos(2\pi t)}{2}$$

بدیهی است که فقط فرکانس $\omega=0$ از این سیستم عبور می‌کند و در نتیجه:

$$y(t)=\frac{1}{2}\times H(j0)=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) فرض کنید پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI و علی به‌صورت زیر باشد:



در صورتی‌که تبدیل فوریه ورودی این سیستم $X(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$ باشد و خروجی سیستم را $y(t)$ بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر ناصحیح است؟

۱) $y(t)=4e^{-2t}u(t)$ ۲) $y(0^+)=4$

۳) $y(\infty)=0$ ۴) $y(t)=4e^{-2t}u(t)-2\delta(t)$

حل:

با توجه به شکل $H(j\omega)=j2\omega$ است و بنابراین:

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{j2\omega}{2+j\omega}=2-\frac{4}{2+j\omega} \quad\Rightarrow\quad y(t)=2\delta(t)-4e^{-2t}u(t)$$

با توجه به گزینه‌های داده شده ملاحظه می‌کنید که غیر از گزینه (۳) بقیه گزینه‌ها ناصحیح می‌باشند. بنابراین به نظر می‌رسد تست اشکال تایپی دارد. اگر روی شکل داده شده $-j2$ به $+j2$ تبدیل شود آنگاه $H(j\omega)=-j2\omega$ است و داریم:

$$Y(j\omega)=\frac{-j2\omega}{2+j\omega}=-2+\frac{4}{2+j\omega} \quad\Rightarrow\quad y(t)=-2\delta(t)+4e^{-2}u(t)$$

در این حالت گزینه (۱) تنها گزینه ناصحیح است.

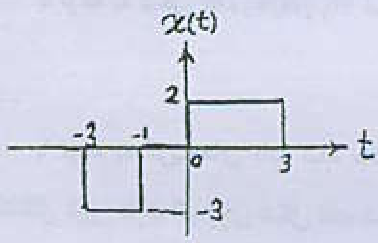
۹-۳- خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

در این بخش به معرفی خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان می‌پردازیم. این خواص نیز همانند خواص ضرایب سری فوریه بینش زیادی نسبت به تبدیل فوریه و رابطه بین سیگنال در حوزه زمان و تبدیل فوریه آن می‌دهد. همچنین به کمک این خواص می‌توان پیچیدگی محاسبه تبدیل فوریه و معکوس آن را کاهش داد. خواص تبدیل فوریه در جدول (۹-۲) آورده شده‌اند. فراگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر فراهم می‌کند.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال از انتگرال استفاده می‌شود، بنابراین تبدیل فوریه خاصیت خطی دارد.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی روی محور زمان جابجا شده و به $x(t-t_0)$ تبدیل گردد، آنگاه تبدیل فوریه آن در $e^{-j\omega t_0}$ ضرب می‌شود. بنابراین اگر پاسخ فرکانسی یک کانال $e^{-j\omega t_0}$ باشد (یعنی دامنه ثابت و فاز خطی داشته باشد) آنگاه سیگنال خروجی کانال تأخیر یافته سیگنال ورودی است و اعوجاج ندارد.

مثال : تبدیل فوریه سیگنال شکل زیر را بدست آورید.

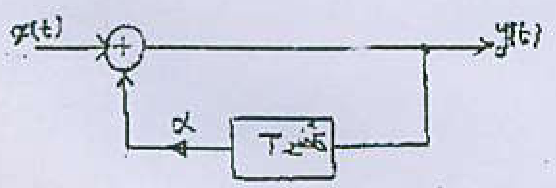


حل : از خواص خطی و جابجایی زمانی و تبدیل فوریه پالس متقارن استفاده می‌کنیم:

$$x(t)=2\Pi\left(\frac{t-1.5}{3}\right)-3\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right)\Rightarrow X(j\omega)=2e^{-j1.5\omega}\times 3\operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)-3e^{j2\omega}\times 2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$=6e^{-j1.5\omega}\operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)-6e^{j2\omega}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

تست نمونه - پاسخ ضربه سیستم نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



۱) $h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\delta(t-kT)$

۲) $h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^k\delta(t-kT)$

۳) $h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}\delta(t-kT)$

۴) $h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{2k}\delta(t-kT)$

خاصیت	سیگنال نامتناوب	تبدیل فوریه
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$y(t)$	$Y(j\omega)$
خطی بودن	$Ax(t)+By(t)$	$AX(j\omega)+BY(j\omega)$
جابجایی زمان	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
جابجایی فرکانسی	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
مزدوج گیری	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
وارونگی زمانی	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
کانولوشن در حوزه زمان	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
ضرب در حوزه زمان	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
دوگانی	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
مشتق در حوزه زمان	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
انتگرال در حوزه زمان	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
مشتق در حوزه فرکانس	$-jtx(t)$	$\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
انتگرال در حوزه فرکانس	$-\frac{x(t)}{jt}+\pi x(0)\delta(t)$	$\int_{\infty}^{+\infty}X(u)du$
تقارن سیگنال‌های حقیقی	$x(t)=x^*(t)$ $x(t)=x^*(t)$ ($x(t)$ حقیقی)	$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\quad \lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert$ $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$ $\quad \angle X(j\omega)=-\angle X(-j\omega)$
تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج	$x(t)=x^*(t)=x(-t)$ ($x(t)$ حقیقی و زوج)	$X(j\omega)=X^*(j\omega)=X(-j\omega)$ ($X(j\omega)$ حقیقی و زوج)
تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد	$x(t)=x^*(t)=-x(-t)$ ($x(t)$ حقیقی و فرد)	$X(j\omega)=-X^*(j\omega)=-X(-j\omega)$ ($X(j\omega)$ موهومی و فرد)
تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی	$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ و $x(t)$ حقیقی	$X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=X_e(j\omega)+X_o(j\omega)$ $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=X_e(j\omega)$ تبدیل فوریه $x_e(t)$ برابر است با $j\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=X_o(j\omega)$ تبدیل فوریه $x_o(t)$ برابر است با
سطح زیرمنحنی سیگنال	$X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt$	
سطح زیرمنحنی تبدیل فوریه	$2\pi x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)d\omega$	
رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب	$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2d\omega$	

جدول ۹ ـ ۲ ـ خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

[illegible] زوج

$x(t)$ زوج
تا
فرد $x(t)$

حل :

رابطه $y(t)$ و $x(t)$ با توجه به شکل عبارت است از:

$$y(t)=x(t)+\alpha y(t-T)$$

بنابراین داریم :

$$h(t)=\delta(t)+\alpha h(t-T) \;\Rightarrow\; h(t)-\alpha h(t-T)=\delta(t)$$

اگر از طرفین تبدیل فوریه گرفته شود به‌دست می‌آوریم :

$$H(j\omega)-\alpha e^{-j\omega T}H(j\omega)=1 \quad\Rightarrow\quad H(j\omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega T}}=1+\alpha e^{-j\omega T}+\alpha^2 e^{-j2\omega T}+.....$$

در نهایت با عکس تبدیل فوریه گرفتن از این رابطه، $h(t)$ بدست می‌آید :

$$h(t)=1+\alpha\delta(t-T)+\alpha^2\delta(t-2T)+....=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT)$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تذکر : (کانال ایده‌آل ـ تاخیر گروه) در یک سیستم انتقال یا کانال مخابراتی اگر سیگنال خروجی کپی و المثنی دقیقی از سیگنال ورودی باشد آن‌گاه این انتقال بدون اعوجاج بوده و کانال را کانال ایده‌آل می‌نامند. در این تعریف منظور از کپی سیگنال آن است که دامنه خروجی می‌تواند از دامنه ورودی کوچکتر یا بزرگتر بوده و خروجی نسبت به ورودی دارای تاخیر زمانی معین باشد. به عبارت دیگر اگر $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب ورودی و خروجی این کانال باشند آنگاه:

$$y(t)=kx\left(t-t_d\right)$$

در این رابطه k نشان دهنده تغییر دامنه و t_d نشان‌دهنده تاخیر زمانی خروجی نسبت به ورودی است. اگر از طرفین رابطه فوق تبدیل فوریه گرفته شود به‌دست می‌آوریم:

$$Y(j\omega)=ke^{-j\omega t_d}X(j\omega) \quad\Rightarrow\quad H(j\omega)=ke^{-j\omega t_d}$$

به عبارت دیگر پاسخ فرکانسی یک کانال ایده‌آل $H(j\omega)=ke^{-j\omega t_d}$ است که اگر از طرفین این رابطه دامنه و فاز گرفته شود به‌دست می‌آوریم:

$$\left|H(j\omega)\right|=|k|$$

$$\angle H(j\omega)=-\omega t_d \pm m\pi$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که دامنه پاسخ فرکانسی یک کانال ایده‌آل ثابت و فاز پاسخ فرکانسی آن خطی با شیب منفی می‌باشد.

t_d که نشان‌دهنده تاخیر خروجی نسبت به ورودی یک کانال ایده‌آل است را تاخیر گروه (group delay) کانال می‌نامند. اگر کانال ایده‌آل نباشد با توجه به تعریف تاخیر گروه کانال ایده‌آل، تاخیر گروه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\boxed{\tau(\omega)=-\frac{d}{d\omega}\{\angle H(j\omega)\}}$$

بدیهی است در هنگام ایده‌آل نبودن کانال تاخیر گروه ثابت نبوده و تابعی از ω می‌شود.

مثال : تاخیر گروه یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ را به‌دست آورید.

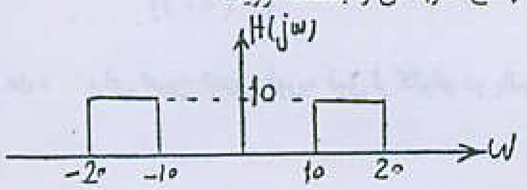
حل :

$$H(j\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \Rightarrow \angle H(j\omega)=-2\,\mathrm{Arctg}(\omega)$$

$$\Rightarrow \tau(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

(۳) جابجایی فرکانسی: با ضرب $e^{j\omega_0 t}$ در سیگنال زمانی، تبدیل فوریه سیگنال در حوزه فرکانس جابجا شده و به $X(j(\omega-\omega_0))$ تبدیل می‌شود (یعنی سیگنال مدوله می‌شود).

مثال : پاسخ فرکانسی یک سیستم به صورت زیر است (فیلتر میان گذر ایده‌آل). پاسخ ضربه آن را بدست آورید.



حل : از خواص خطی و شیفت فرکانسی و عکس تبدیل فوریه پالس متقارن استفاده می‌کنیم:

$$H(j\omega)=10\left(\Pi\left(\frac{\omega-15}{10}\right)+\Pi\left(\frac{\omega+15}{10}\right)\right)\Rightarrow h(t)=10\left(e^{j15t}\times\frac{\sin(5t)}{\pi t}+e^{-j15t}\times\frac{\sin(5t)}{\pi t}\right)\Rightarrow h(t)=\frac{20\cos(15t)\sin(5t)}{\pi t}$$

تست نمونه - (آزاد ۷۹) اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را $X(f)$ بنامیم تبدیل فوریه سیگنال $y(t)=x(t-2)e^{j4\pi t}$ چه خواهد بود؟

۱) $Y(f)=X(f+2)\,e^{j4\pi f}$
۲) $Y(f)=X(f-2)\,e^{j4\pi f}$
۳) $Y(f)=X(f+2)e^{-j4\pi f}$
۴) $Y(f)=X(f-2)e^{-j4\pi f}$

حل :

از خواص شیفت در حوزه زمان و شیفت در حوزه فرکانس استفاده می‌کنیم:

$$x(t)\xrightarrow{F.T}X(f)$$

$$x(t-2)\xrightarrow{F.T}e^{-j4\pi F}X(f)$$

$$e^{j4\pi t}x(t-2)\xrightarrow{F.T}e^{-j4\pi(f-2)}X(f-2)=e^{-j4\pi f}X(f-2)$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

(۴) مزدوج گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، تبدیل فوریه آن علاوه بر مزدوج شدن، نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود.

(۵) وارونگی زمانی: اگر سیگنالی نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه تبدیل فوریه آن نسبت به محور عمودی قرینه خواهد شد.

تذکر: از خاصیت وارونگی زمانی و با توجه به تعریف یک تابع زوج یا فرد نتیجه می‌گیریم که اگر سیگنالی زوج باشد، تبدیل فوریه آن نیز زوج و اگر فرد باشد آن‌گاه تبدیل فوریه آن نیز فرد می‌شود. اگر سیگنال نه زوج و نه فرد باشد آن‌گاه تبدیل فوریه آن نیز نه زوج و نه فرد است.

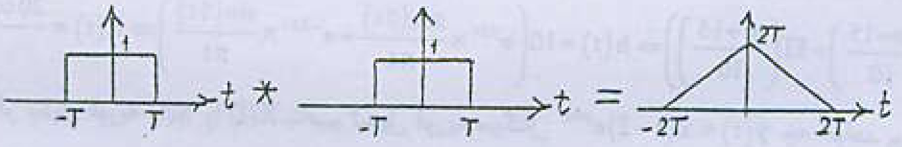
(۶) کانولوشن در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان با یکدیگر کانوالو شوند، تبدیل فوریه آن‌ها در حوزه فرکانس در یکدیگر ضرب می‌شوند. کاربرد مهم این خاصیت، بدست آوردن پاسخ یک سیستم LTI می‌باشد. علاوه بر این می‌توان از خاصیت فوق جهت تعیین تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های پیچیده نیز استفاده کرد.

مثال : در جدول (۹ـ۱) تبدیل فوریه پالس مثلثی متقارن به عرض $2T$ $\left(\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right)$ آورده شده است. با استفاده از تبدیل فوریه پالس مربعی متقارن $\left(\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\right)$ و خواص تبدیل فوریه، فرمول مربوط به تبدیل فوریه $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ را بدست آورید.

حل : برای تعیین تبدیل فوریه فوق از کانوالو دو پالس مربعی استفاده می‌شود. اگر دو پالس مربعی را با یکدیگر کانوالو کنیم داریم:

$$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)*\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)=2T\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$

شکل زیر نشان دهنده این کانولوشن است:



با تبدیل فوریه گرفتن از رابطه فوق داریم:

$$\left(F\left\{\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\right\}\right)^2=2TF\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right\}\Rightarrow\left(2T\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)\right)^2=2TF\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right\}\Rightarrow F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right\}=2T\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

با تبدیل $2T$ به T در رابطه بدست آمده خواهیم داشت:

$$F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right\}=T\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

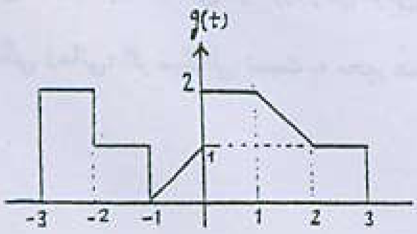
تست نمونه ـ (آزاد ۸۴) در صورتی‌که $g(t)$ به‌صورت نشان داده در شکل زیر باشد، مقدار $A=\int_{-\infty}^{+\infty}G(j\omega)\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}e^{j\frac{3\omega}{2}}d\omega$ برابر است با:

۱) $A=\pi$

۲) $A=2\pi$

۳) $A=3\pi$

۴) $A=4\pi$



حل:

با فرض $F(j\omega)=G(j\omega)\dfrac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$ داریم:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\frac{3\omega}{2}}d\omega=2\pi f(t)\Big|_{t=\frac{3}{2}}=2\pi\left(g(t)*\Pi(t)\right)\Big|_{t=\frac{3}{2}}=2\pi\int_{1}^{2} g(t)dt=2\pi\times\frac{3}{2}=3\pi$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است. برای تعیین عکس تبدیل فوریه $\dfrac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$ از جدول (۹ ـ ۱) استفاده کنید.

(۷) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، تبدیل فوریه آن‌ها در حوزه فرکانس با یکدیگر کانوالو می‌شوند. از خاصیت فوق در بحث مدولاسیون و نمونه‌برداری و بطور کلی در مواقعی که چند سیگنال در یکدیگر ضرب می‌شوند، استفاده می‌گردد.

مثال: اگر تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را $X(\omega)$ بنامیم، تبدیل فوریه $y_1(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)$ و $y_2(t)=x(t)\sin(\omega_0 t)$ را بدست آورید.

حل:

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]=\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

$$Y_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]=\frac{1}{2j}X(\omega-\omega_0)-\frac{1}{2j}X(\omega+\omega_0)$$

(۸) تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی: اگرسیگنالی در حوزه زمان فشرده یا گسترده شود، در حوزه فرکانس عکس آن اتفاق می‌افتد. یعنی فشرده شدن یک سیگنال در حوزه زمان، معادل گسترده شدن طیف آن در حوزه فرکانس می‌باشد. همچنین گسترده شدن آن در حوزه زمان، معادل فشرده شدن طیف آن در حوزه فرکانس می‌باشد.

(۹) دوگانی: یکی از خواص جالب تبدیل فوریه دوگانی است. بدین شکل که اگر بخواهیم تبدیل فوریه سیگنالی مانند $x_1(t)$ را بدست آوریم و شکل $x_1(t)$ مشابه تبدیل فوریه سیگنال $x_2(t)$ یعنی $X_2(\omega)$ باشد، آنگاه داریم:

$$X_1(\omega)=2\pi x_2(-\omega)$$

مثال: عکس تبدیل فوریه $\cos(\omega)$ و $\sin(\omega)$ را بدست آورید.

حل: با توجه آن که تبدیل فوریه $\cos(t)$ برابر $\pi\left[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right]$ و تبدیل فوریه $\sin(t)$ برابر $\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\right]$ می‌باشند و با توجه به خاصیت دوگانی داریم:

$$F\left\{\pi\left[\delta(t-1)+\delta(t+1)\right]\right\}=2\pi\cos(-\omega)\Rightarrow F\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(t-1)+\delta(t+1)\right]\right\}=\cos(\omega)$$

$$F\left\{\frac{\pi}{j}\left[\delta(t-1)-\delta(t+1)\right]\right\}=2\pi\sin(-\omega)\Rightarrow F\left\{\frac{-1}{2j}\left[\delta(t-1)-\delta(t+1)\right]\right\}=\sin(\omega)$$

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) برای سیگنال $x(t)=\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{t^2+1}$، مقدار تبدیل فوریه آن در $\omega=\frac{\pi}{4}$ چقدر است؟

۱) 2.139 ۲) 1.432 ۳) 6.890 ۴) 0.456

حل:

از تبدیل فوریه $e^{-|t|}$ و خاصیت دوگانی استفاده می‌کنیم:

$$e^{-|t|} \xrightarrow{F.T} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{F.T} 2\pi e^{-|\omega|}$$

$$\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{F.T} e^{-|\omega|} \Rightarrow X(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0.456$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

(۱۰) مشتق در حوزه زمان: مشتق گرفتن از یک سیگنال باعث می‌شود که تبدیل فوریه آن در $j\omega$ ضرب شود. از این خاصیت می‌توان در تحلیل سیستم‌هایی که توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بیان شده‌اند جهت تعیین خروجی، پاسخ فرکانسی، پاسخ ضربه و ... استفاده کرد.

مثال: یک سیستم LTI علی با معادله دیفرانسیل ورودی ـ خروجی $\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}=2\frac{d^2x}{dt^2}+x$ را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی، پاسخ ضربه و پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=10e^{-t}u(t)$ را بدست آورید.

حل: با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله دیفرانسیل فوق به‌دست می‌آوریم:

$$(j\omega)^3Y(j\omega)+(j\omega)^2Y(j\omega)=2(j\omega)^2X(j\omega)+X(j\omega)\Rightarrow H(j\omega)=\frac{2(j\omega)^2+1}{(j\omega)^2(j\omega+1)}$$

$$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=F^{-1}\left\{\frac{3}{j\omega+1}+\frac{1}{(j\omega)^2}+\frac{-1}{j\omega}\right\}=\left(3e^{-t}+t-1\right)u(t)$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{10}{j\omega+1}\times\frac{2(j\omega)^2+1}{(j\omega)^2(j\omega+1)}=10\frac{2(j\omega)^2+1}{(j\omega)^2(j\omega+1)^2}$$

$$=10\left(\frac{1}{(j\omega)^2}+\frac{-2}{j\omega}+\frac{3}{(j\omega+1)^2}+\frac{2}{j\omega+1}\right)\Rightarrow y(t)=10\left(t-2+3te^{-t}+2e^{-t}\right)u(t)$$

تست نمونه ـ خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI علی، با معادله زیر به ورودی $x(t)$ آن مرتبط شده است:

$$\frac{dy}{dt}+10y=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)$$

که در آن $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$ می‌باشد. پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

۱) $h(t)=\frac{1}{9}\left(e^{-t}+te^{-t}-6e^{-10t}\right)u(t)$

۲) $h(t)=\frac{1}{9}\left(e^{-t}+17e^{-10t}\right)u(t)$

۳) $h(t)=\frac{1}{2}\left(2e^{-t}-e^{-10t}\right)u(t)$

۴) هیچکدام

حل :

با توجه به تعریف کانولوشن داریم:

$$\frac{dy}{dt}+10y=x(t)*z(t)-x(t)$$

با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله فوق به‌دست می‌آوریم:

$$(j\omega+10)Y(j\omega)=X(j\omega)(Z(j\omega)-1)\quad\Rightarrow\quad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{Z(j\omega)-1}{j\omega+10}$$

$$=\frac{\frac{1}{1+j\omega}+2}{j\omega+10}=\frac{2j\omega+3}{(j\omega+1)(j\omega+10)}=\frac{\frac{1}{9}}{j\omega+1}+\frac{\frac{17}{9}}{j\omega+10}\quad\Rightarrow\quad h(t)=\frac{1}{9}e^{-t}u(t)+\frac{17}{9}e^{10t}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. البته می‌توانستیم این تست را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنیم.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=\frac{dx}{dt}+2x$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ عبارت است از:

۱) $y(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

۲) $y(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

۳) $y(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

۴) $y(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

حل :

از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\left((j\omega)^2+4(j\omega)+3\right)Y(j\omega)=(j\omega+2)X(j\omega)\quad\Rightarrow$$

$$Y(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}X(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}=\frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{j\omega+3}$$

$$\Rightarrow\quad x(t)=\frac{1}{2}te^{-t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. این تست را نیز می‌توان با تبدیل لاپلاس حل کرد.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) فرض کنید تبدیل فوریه $x(t)$ را با $X(j\omega)$ و تبدیل فوریه $g(t)$ را با $G(j\omega)$ نمایش دهیم، چنانچه رابطه بین $x(t)$ و $g(t)$ به‌صورت زیر باشد:

$$x(t)=\int_{t-3}^{t-1} g(\tau)d\tau$$

کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (* اپراتور کانولوشن است)

۱) $X(j\omega)=\left[\frac{1}{j\omega}G(j\omega)+\pi G(0)\delta(\omega)\right]*\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{j2\omega}$

۲) $X(j\omega)=G(j\omega)\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{-j2\omega}$

۳) $X(j\omega)=\left[\frac{1}{j\omega}G(j\omega)+\pi G(0)\delta(\omega)\right]*\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{-j2\omega}$

۴) $X(j\omega)=G(j\omega)\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{j2\omega}$

حل:

با دو روش این تست را حل می‌کنیم:

روش اول ـ از طرفین مشتق و سپس تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\frac{dx(t)}{dt}=g(t-1)-g(t-3) \Rightarrow j\omega X(j\omega)=\left(e^{-j\omega}-e^{-j3\omega}\right)G(j\omega) \Rightarrow X(j\omega)=\frac{e^{-j\omega}-e^{-j3\omega}}{j\omega}G(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega)=e^{-j2\omega}\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{j\omega}G(j\omega)=e^{-j2\omega}\frac{2\sin(\omega)}{\omega}G(j\omega)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

روش دوم ـ با توجه به رابطه داده شده داریم:

$$x(t)=\int_{t-3}^{t-1} g(\tau)d\tau=g(t)*\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right) \Rightarrow X(j\omega)=G(j\omega)\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{-j2\omega}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

(۱۱) انتگرال در حوزه زمان: انتگرال گیری از یک سیگنال در بازه زمانی $-\infty$ تا t باعث می‌شودکه تبدیل فوریه آن در $\frac{1}{j\omega}$ ضرب شده و به واسطه مؤلفه DC ورودی یک جمله $\pi X(0)\delta(\omega)$ نیز ظاهر می‌شود.

(۱۲) مشتق در حوزه فرکانس: با ضرب $(-jt)$ در یک سیگنال، از تبدیل فوریه آن مشتق گرفته می‌شود.

(۱۳) انتگرال در حوزه فرکانس: رابطه انتگرال در حوزه فرکانس مشابه رابطه آن در حوزه زمان است. اما انتگرالگیری از ω تا $+\infty$ انجام می‌شود.

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) اگر تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را $X(f)$ بنامیم، تبدیل فوریه $y(t)=\int_t^{+\infty}x(\alpha)d\alpha$ چه خواهد بود؟

۱) $Y(f)=X(0)\delta(f)+j\frac{X(f)}{2\pi f}$

۲) $Y(f)=\frac{1}{2}X(0)\delta(f)+j\frac{X(f)}{2\pi f}$

۳) $Y(f)=j\frac{X(f)}{2\pi f}$

۴) $Y(f)=-j\frac{X(f)}{2\pi f}$

حل : در جدول (۹ـ۲) تبدیل فوریه $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ آورده شده است. نحوه بدست آوردن عبارت فوق به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t)*u(t)\Rightarrow F\left\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right\}=X(j\omega)F\{u(t)\}=X(j\omega)\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)=\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$$

با توجه به آن که در تست $\int_t^{+\infty}x(\alpha)d\alpha$ داریم پس:

$$\int_t^{+\infty}x(\alpha)d\alpha=x(t)*u(-t)\Rightarrow F\left\{\int_t^{+\infty}x(\alpha)d\alpha\right\}=X(j\omega)F\{u(-t)\}$$

$$=X(j\omega)\left(\frac{-1}{j\omega}+\pi\delta(-\omega)\right)=X(f)\left(\frac{j}{2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)\right)=\frac{j}{2\pi f}X(f)+\frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

(۱۴) تقارن سیگنال‌های حقیقی: اگر سیگنالی حقیقی باشد، تبدیل فوریه آن تقارن مزدوج (هرمیتی) دارد. در این تقارن $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ می‌باشد. یعنی اگر تبدیل فوریه را نسبت به محور عمودی فرکانس قرینه کنیم، با مزدوج تبدیل فوریه برابر می‌شود. این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی تبدیل فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی تبدیل فوریه تقارن فرد پیدا کنند.

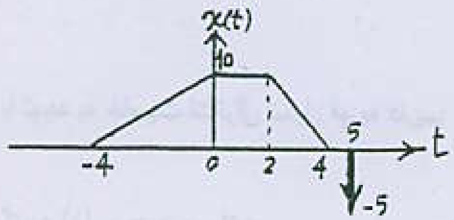
(۱۵) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج است.

(۱۶) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنالی حقیقی و فرد باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن موهومی و فرد است.

(۱۷) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: تبدیل فوریه قسمت زوج یک سیگنال حقیقی، قسمت زوج طیف که برابر با قسمت حقیقی طیف است را نتیجه می‌دهد. تبدیل فوریه قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد طیف که برابر با قسمت موهومی طیف ضربدر j می‌باشد را نتیجه می‌دهد.

(۱۸) سطح زیر منحنی سیگنال: اگر در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال $\omega=0$ قرار دهیم آنگاه ملاحظه می‌گردد که سطح زیر منحنی یک سیگنال برابر مقدار تبدیل فوریه آن به ازاء $\omega=0$ می‌شود.

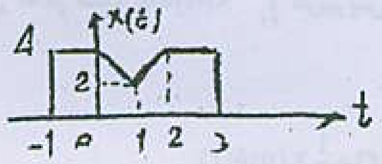
مثال : سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر تبدیل فوریه این سیگنال را $X(j\omega)$ بنامیم، $X(j\omega)\big|_{\omega=0}$ چقدر است؟



حل : از خاصیت سطح زیر منحنی سیگنال استفاده می‌کنیم:

$$X(j\omega)\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt=\frac{10}{2}(2+8)-5=45$$

تست نمونه ـ (آزاد ۸۰) سیگنال $x(t)$ در شکل مقابل داده شده است. مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}X^2(j\omega)\,d\omega$ چقدر است؟ $X(j\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ است.

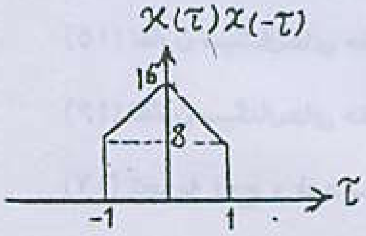


۱) 14π ۲) 24π
۳) 48π ۴) 8π

حل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X^2(j\omega)\,d\omega=2\pi\big(x(t)*x(t)\big)\Big|_{t=0}=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)x(-\tau)\,d\tau$$

در شکل زیر منحنی $x(\tau)x(-\tau)$ رسم شده است:

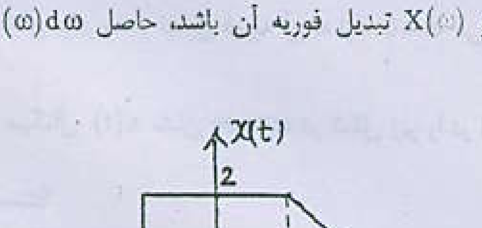


بنابراین $\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)x(-\tau)\,d\tau=24$ و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

(۱۹) سطح زیر منحنی تبدیل فوریه: اگر در رابطه عکس تبدیل فوریه $t=0$ قرار داده شود، آنگاه ملاحظه می‌گردد که انتگرال تبدیل فوریه برابر $2\pi x(0)$ می‌شود.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۱) اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد، حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\,d\omega$ چقدر است؟

۱) 4π ۲) 2π
۳) 4 ۴) 2

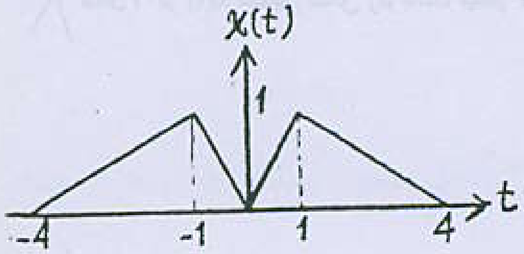


حل : با توجه به خاصیت انتگرال تبدیل فوریه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\,d\omega=2\pi x(0)=4\pi$$

پس گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) در صورتی‌که $x(t)$ به صورت داده شده در شکل زیر باشد، مقدار تبدیل فوریه آن در $\omega=0$ چه مقدار خواهد بود؟



۱) صفر
۲) 0.5
۳) 4
۴) 8

حل:

$$X(j\omega)\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt=4$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(۲۰) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب: این رابطه یکی از روابط مهم در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها و مخابرات می‌باشد و نشان می‌دهد انرژی یک سیگنال را می‌توان از روی تبدیل فوریه آن بدست آورد.

مثال: از خواص تبدیل فوریه استفاده کرده $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^2(t)dt$ و $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^4(t)dt$ رابدست آورید.

حل: از جدول (۹ـ۱) تبدیل فوریه $\operatorname{sinc}^2(t)$ را بدست آورده و سپس از خاصیت سطح زیر منحنی سیگنال و خاصیت پارسوال استفاده می‌کنیم. با توجه به جدول (۹ـ۱) داریم:

$$F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right\}=T\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\xrightarrow{T=2\pi}F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\}=2\pi\operatorname{sinc}^2(\omega)\Rightarrow F\left\{\frac{1}{2\pi}\Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\}=\operatorname{sinc}^2(\omega)$$

حال از قضیه دوگانی استفاده کرده و بدست می‌آوریم:

$$F\{\operatorname{sinc}^2(t)\}=2\pi\times\frac{1}{2\pi}\Lambda\left(\frac{-\omega}{2\pi}\right)=\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

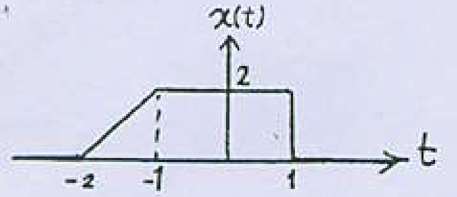
با توجه به خاصیت سطح زیر منحنی یک سیگنال داریم:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^2(t)dt=\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\Big|_{\omega=0}=1$$

حال از قضیه پارسوال استفاده کرده و بدست می‌آوریم:

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^4(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\times2\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\omega}{2\pi}\right)^2d\omega=\frac{1}{\pi}\times\frac{\left(1-\frac{\omega}{2\pi}\right)^3}{\frac{-3}{2\pi}}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2}{3}$$

مثال : اگر $x(t)$ مطابق شکل زیر باشد، مقدار $A=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{j\omega}d\omega$ چقدر است؟



حل :

فرض کنید $Y(j\omega)=X(j\omega)\dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$ باشد با توجه به خاصیت کانولوشن در حوزه زمان و جدول (۹ـ۱) داریم:

$$y(t)=\frac{1}{2}x(t)*\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

با توجه به رابطه عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

بنابراین با مقایسه روابط فوق می‌توان مقدار A را بدست آورد:

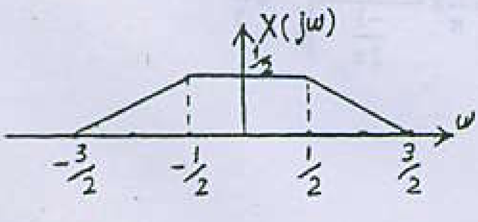
$$A=2\pi y(t)\Big|_{t=1}=2\pi\times\frac{1}{2}x(t)*\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\Big|_{t=1}=\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\Pi\left(\frac{1-\tau}{4}\right)d\tau=\pi\int_{-1}^{3}x(\tau)\,d\tau=4\pi$$

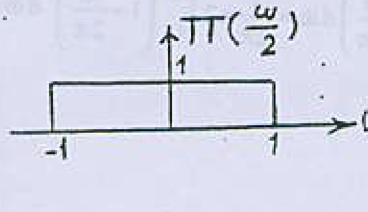
مثال : تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=\dfrac{\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2}$ را بدست آورید.

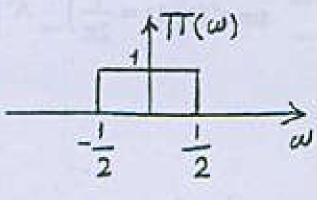
حل :

$$x(t)=\pi\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}\right)\Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{2}F\left\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\right\}*F\left\{\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}\right\}=\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)*\Pi(\omega)$$

دو تابع فوق و نصف حاصل کانولوشن آن‌ها در زیر نشان داده شده‌اند:

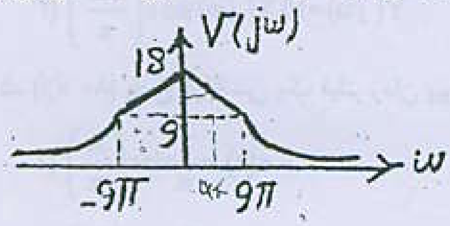




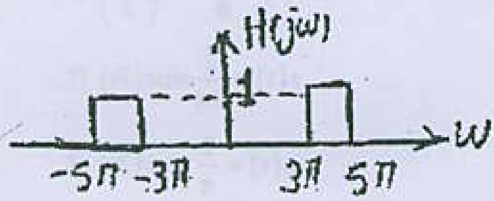


خودآزمائی چهارم

۱ـ (آزاد ۸۰) سیگنال $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T_0 = 1$ است که با متناوب کردن سیگنال $v(t)$ بدست آمده است $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t-kT_0)$. طیف سیگنال $v(t)$ داده شده است. اگر $x(t)$ از سیستمی با پاسخ فرکانسی داده شده عبور کند، خروجی آن کدام است؟



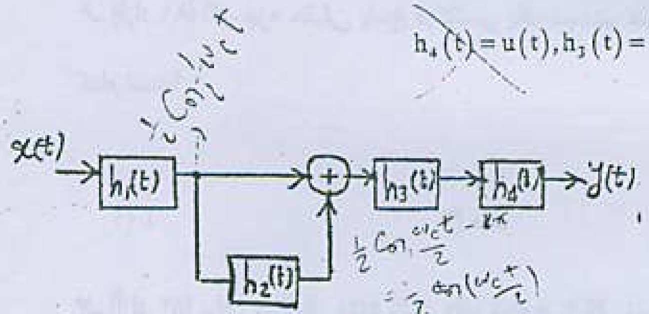
۱) $28\cos(2\pi t)$ ۲) $28\cos(4\pi t)$



۳) $14\cos(4\pi t)$ ۴) $14\cos(4\pi t)+28\cos(2\pi t)$

۲ـ (آزاد ۸۲ و آزاد ۸۳) اتصال چند سیستم LTI را به صورت زیر در نظر بگیرید:

فرض کنید $h_1(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin(\omega_c t)}{2\pi t}\right], H_2(j\omega)=e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_c}}, h_3(t)=\frac{\sin(3\omega_c t)}{\pi t}, h_4(t)=u(t)$



در صورتی‌که ورودی سیستم $x(t)=\sin(2\omega_c t)+\cos\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right)$ باشد، خروجی $y(t)$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$

۲) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)+\sin(2\omega_c t)\right]$

۳) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)+\cos\left(\frac{\omega_c t-2\pi}{2}\right)\right]$

۴) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)+\cos\left(\frac{\omega_c t-2\pi}{2}\right)+\sin(2\omega_c t-4\pi)\right]$

۳ـ (آزاد ۸۴) فرض کنید $y(t)=x(t)\cos(t)$ و تبدیل فوریه $y(t)$ به‌صورت $Y(j\omega)=u(\omega+2)-u(\omega-2)$ باشد. $x(t)$ چگونه باید باشد؟

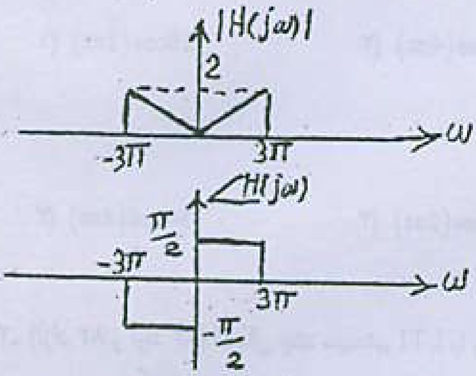
۱) $x(t)=\frac{\sin(t)}{\pi t}$ ۲) $x(t)=\frac{2\sin(t)}{\pi t}$

۳) $x(t)=\frac{\sin(2t)}{\pi t}$ ۴) $x(t)=\frac{2\sin(2t)}{\pi t}$

۴ـ (آزاد ۸۴) چنانچه خروجی یک سیستم LTI به صورت $y(t)=\int_{t-5}^{t+5} x(\tau)\,d\tau$ باشد، تبدیل فوریه آن برابر است با:

۱) $Y(j\omega)=10X(j\omega)e^{-j5\omega}\operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega}{\pi}\right)$
۲) $Y(j\omega)=\frac{1}{5}X(j\omega)\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{10\pi}\right)$
۳) $Y(j\omega)=10X(j\omega)\operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega}{\pi}\right)$
۴) $Y(j\omega)=\frac{1}{5}X(j\omega)e^{-j5\omega}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{10\pi}\right)$

۵ـ (آزاد ۸۰) پاسخ فرکانسی یک فیلتر زمان پیوسته در شکل مقابل داده شده است. پاسخ پله فیلتر کدام است؟



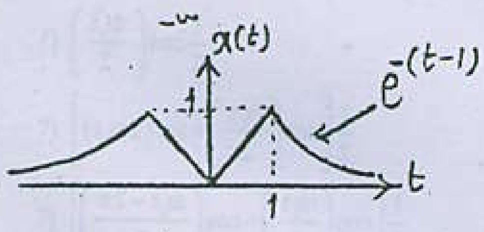
۱) $s(t)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{3t}{\pi}\right)$
۲) $s(t)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{3t}{2}\right)$
۳) $s(t)=\frac{2}{3\pi}\operatorname{sinc}(3t)$
۴) $s(t)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sinc}(3t)$

۶ـ (آزاد ۸۱) اگر جزء حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم علی و حقیقی زمان ـ پیوسته به صورت زیر باشد، مقدار پاسخ ضربه در $t=\frac{1}{2}$ کدام است؟

$\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}=\cos(\omega)$

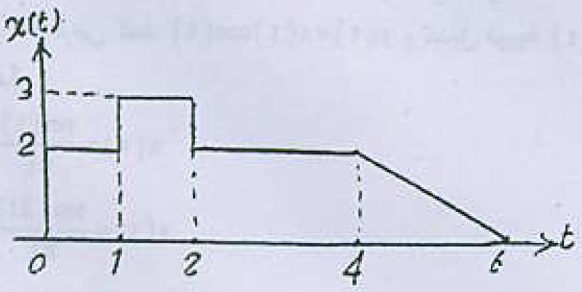
۱) 1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) نمی‌توان مشخص نمود

۷ـ (آزاد ۸۲) برای سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر مقدار عبارت $a=\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin(\omega)}{2\pi\omega}e^{j2\omega}d\omega$ برابر است با:



۱) 1.3647
۲) 0.3647
۳) ∞
۴) 0.8647

۸ـ (سراسری ۸۱) اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل مقابل باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد، در این صورت $X(0)=X(\omega)\Big|_{\omega=0}$ چقدر است؟



۱) 10
۲) 11
۳) 12
۴) 13

۹ـ (سراسری ۸۲) پاسخ فرکانسی سیستم زمان پیوسته‌ای به صورت $H(j\omega)=\cos(\omega)$ است. این سیستم در کدام گروه قرار دارد؟

۱) غیرعلی، پایدار، معکوس‌ناپذیر ۲) علی، پایدار، معکوس‌پذیر

۳) غیرعلی، ناپایدار، معکوس‌ناپذیر ۴) علی، ناپایدار، معکوس‌پذیر

۱۰ـ (سراسری ۸۱) اگر قسمت حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان حقیقی و علی برابر $H_R(\omega)=\pi\delta(\omega)$ باشد، پاسخ ضربه آن کدام است؟

۱) $h(t)=\delta(t)$ ۲) $h(t)=u(t)$ ۳) $h(t)=e^{-t}u(t)$ ۴) $h(t)=u(t)-u(t-1)$

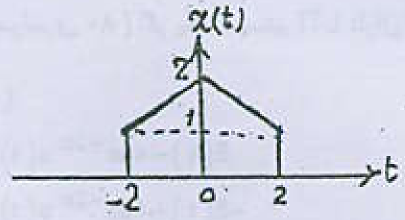
۱۱ـ (سراسری ۸۲) اگر رابطه زیر مابین تبدیل فوریه‌های ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در یک سیستم زمان پیوسته برقرار باشد، در آن صورت سیستم جز کدام دسته است؟

$$Y(j\Omega)=e^{j2\Omega}X(j\Omega)+j\frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$

۱) خطی، تغییرناپذیر با زمان، غیرعلی ۲) خطی، تغییرناپذیر با زمان، علی

۳) خطی، تغییرپذیر با زمان، غیرعلی ۴) غیرخطی، تغییرناپذیر با زمان،علی

۱۲ـ (آزاد ۸۰) به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-2t}u(t)$ ورودی زیر اعمال شده است. اگر $Y(j\omega)$ تبدیل فوریه خروجی باشد مقدار آن در مبدا (یعنی $Y(j0)$) چقدر است؟



۱) 3 ۲) 6

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 12

۱۳ـ (آزاد ۷۹) حاصل انتگرال زیر چقدر است؟

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin[\pi(t-a)]}{\pi(t-a)}\frac{\sin[\pi(t+a)]}{\pi(t+a)}dt$$

۱) $A=\frac{\sin(\pi a)}{\pi a}$ ۲) $A=\frac{\sin(2\pi a)}{2\pi a}$ ۳) $A=\frac{\sin^2(\pi a)}{(\pi a)^2}$ ۴) $A=1$

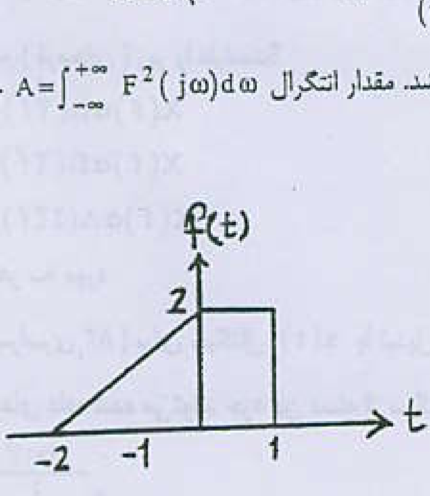
۱۴ـ آزاد ۸۴) فرض کنید سیگنال $f(t)$ به صورت نشان داده شده در شکل زیر باشد. مقدار انتگرال $A=\int_{-\infty}^{+\infty}F^2(j\omega)d\omega$ چقدر است؟ ($F(j\omega)$ تبدیل فوریه $f(t)$ است)

۱) $A=12\pi$

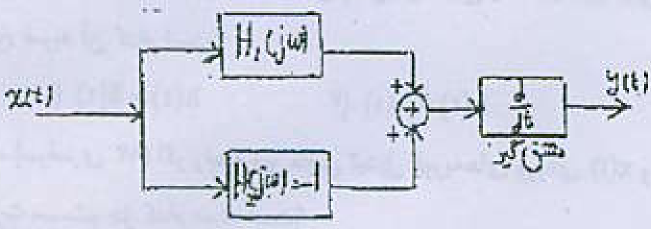
۲) $A=6\pi$

۳) $A=24\pi$

۴) $A=18\pi$



۱۵ـ (سراسری ۸۱) اگر در سیستم نمایش داده شده در شکل زیر $H_1(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$ باشد، در این صورت تابع تبدیل کل سیستم $\left(H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right)$ کدام است؟



۱) $\dfrac{\omega^2}{1+j\omega}$

۲) $j\omega * \left[H_1(j\omega)-1\right]$

۳) $\dfrac{1}{j\omega}\left[\dfrac{1}{1+j\omega}-1\right]$

۴) $\dfrac{d}{d\omega}\left[\dfrac{-j\omega}{1+j\omega}\right]$

۱۶ـ (آزاد ۸۲) برای سیگنال $x(t)=\dfrac{d}{dt}\dfrac{7\sin\left[50(t-2)\right]}{2\pi(t-2)}$، مقدار تبدیل فوریه آن $X(j\omega)$ در $\omega=\dfrac{\pi}{4}$ چقدر است؟

۱) $\dfrac{7\pi}{8}e^{j\frac{\pi}{4}}$ ۲) $\dfrac{7\pi}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}$ ۳) $\dfrac{7\pi}{8}$ ۴) $\dfrac{7\pi}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

۱۷ـ (سراسری ۸۰) اگر یک سیستم LTI دارای تابع تبدیل فرکانسی $H(\omega)=\dfrac{2a-j\omega}{2a+j\omega}$ باشد، پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) $\delta(t)-4ae^{-2at}u(t)$

۲) $-\delta(t)+4ae^{-2at}u(t)$

۳) $-\delta(t)-4ae^{-2at}u(-t)$

۴) $\delta(t)+4ae^{-2at}u(-t)$

۱۸ـ (سراسری ۸۴) $x(t)$ سیگنالی پائین‌گذر با پهنای باند $\dfrac{1}{2T}$ وصادق در $n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ $x(nT)=0$ می‌باشد. $X(f)$ کدام فرم (فرم‌های) زیر را داراست؟

۱) $X(f)\alpha\Lambda(Tf)$

۲) $X(f)\alpha\Pi(Tf)$

۳) $X(f)\alpha\Lambda(2Tf)$

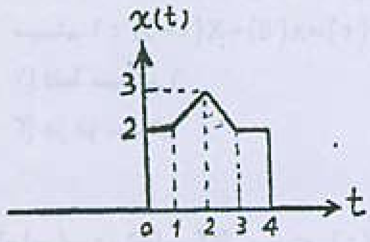
۴) هر سه مورد

۱۹ـ (سراسری ۸۳) برای سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$، خاصیت $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)e^{j\omega}d\omega=0$ برقرار است. کدام یک از سیگنال‌های داده شده می‌تواند جزء این دسته از سیگنال‌ها باشد؟

۱) $e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}$ ۲) $e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

۳) $te^{-\frac{t^2}{2}}$ ۴) $(t-1)e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

۲۰ــ (سراسری ۸۰) اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد، مقادیر $\angle X(\omega)$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{-j\omega}d\omega$ به ترتیب چقدر است؟



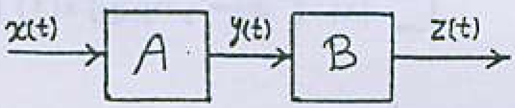
۱) ω و 2π

۲) 2ω و 0

۳) $-\omega$ و 2π

۴) -2ω و 0

۲۱ـ (سراسری ۸۴) فرض کنید دو سیستم مجهول مطابق شکل زیر به صورت متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. به ورودی سیستم سیگنال $x(t)=\text{sinc}(t)$ را اعمال می‌کنیم. $y(t)=\text{sinc}(2t)$ و $z(t)=\text{sinc}(t)$ می‌شوند. کدام یک از دو سیستم A و B می‌توانند LTI باشند؟



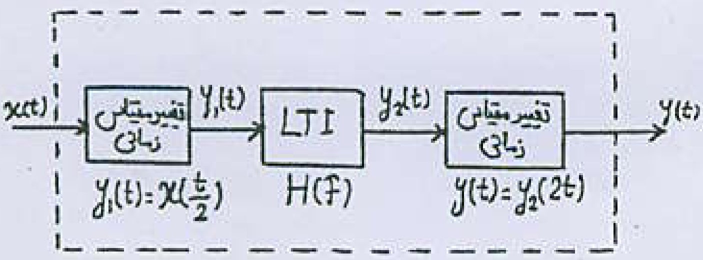
۱) فقط A

۲) فقط B

۳) هردو

۴) هیچ‌کدام

۲۲ـ (سراسری ۸۰) سیستمی از سه طبقه متوالی شکل زیر تشکیل شده است. در این شکل $H(f)$ تابع تبدیل طبقه وسط می‌باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟



۱) LTI نیست.

۲) LTI است با تابع تبدیل $H(2f)$

۳) LTI است با تابع تبدیل $H\left(\frac{f}{2}\right)$

۴) LTI است با تابع تبدیل $H(f)$

۲۳ـ (آزاد ۸۴) پاسخ فرکانسی یک سیستم علی و پایدار را به‌صورت $H(j\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ در نظر بگیرید. چنانچه تاخیر گروه (group delay) این سیستم را با $\tau(\omega)$ نشان دهیم، کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) $\tau(\omega)=0 \quad , \quad \omega>0$

۲) $\tau(\omega)>0 \quad , \quad \omega>0$

۳) $\tau(\omega)<0 \quad , \quad \omega>0$

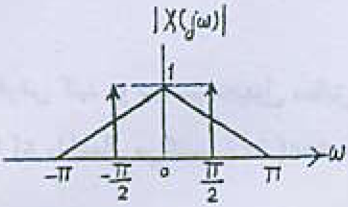
۴) $\tau(\omega)<0 \quad , \quad \omega<0$

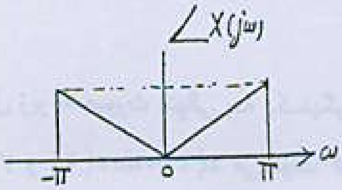
۲۴ـ (سراسری ۸۵) فرض کنید $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم بوده و $X(j\omega)$ تبدیل فوریه ورودی سیستم است. کدام یک از دو سیستم زیر تغییرناپذیر با زمان (TI) می‌باشند؟

سیستم ۱: $y(t)=x(0)+X(t-3)$ سیستم ۲: $y(t)=X(0)+x(t-3)$

۱) فقط سیستم ۱
۲) فقط سیستم ۲
۳) هر دو سیستم
۴) هیچ‌کدام از دو سیستم

۲۵ـ (سراسری ۸۵) سیگنال پیوسته $x(t)$ را با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ در نظر بگیرید که اندازه و فاز $X(j\omega)$ مطابق شکل زیر می‌باشد. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟





۱) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}$

۲) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}$

۳) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\infty$

۴) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\infty$

یادداشت

۱۰ـ فیلتر کردن، نمونه‌برداری و مدولاسیون سیگنال‌های پیوسته در زمان

در بخش‌های قبل به بررسی تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان پرداختیم و سری و تبدیل فوریه را معرفی کردیم. در این بخش کاربرد تحلیل فوریه را در سه نوع سیستم عملی یعنی فیلترها، نمونه‌بردارها و مدولاتورها بررسی خواهیم کرد. لازم به ذکر است سه مبحث فوق بسیار گسترده و خارج از حوصله این درس می‌باشند و در نتیجه به اختصار مختصر و در حد درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها بررسی می‌گردند.

۱۰ـ۱ـ فیلتر کردن سیگنال‌های پیوسته در زمان

در بسیاری از کاربردها تمایل داریم دامنه نسبی مولفه‌های فرکانسی (طیف) یک سیگنال را تغییر داده و حتی برخی از آن‌ها را کاملاً حذف کنیم. این فرآیند فیلتر کردن نام دارد و سیستمی که در طیف یک سیگنال تغییرات بوجود می‌آورد، فیلتر نام دارد.

با توجه به کاربرد فیلترها، دسته‌ای از فیلترها که شکل طیف را بنا به هدفی خاص تغییر می‌دهند را فیلترهای شکل‌دهی فرکانس و دسته‌ای دیگر که برای عبور تقریبا بدون اعوجاج بعضی از فرکانس‌ها و تضعیف شدید یا حذف بعضی دیگر از فرکانس‌ها به کار می‌روند را فیلترهای فرکانس گزین می‌نامند. در این درس تنها به معرفی و بررسی دسته خاصی از فیلترهای فرکانس گزین تحت عنوان فیلترهای فرکانس گزین ایده‌آل پرداخته می‌شود.

به طور کلی یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(j\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_d} & \text{باند عبور} \\ 0 & \text{باند قطع} \end{cases}$$

با توجه به خواص تبدیل فوریه نتیجه می‌گیریم که یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل در باند قطع ورودی را حذف کرده و از خود عبور نمی‌دهد و در باند عبور دامنه ورودی را در k ضرب کرده و تاخیر t_d در آن ایجاد می‌کند. به عبارت دیگر هیچ اعوجاجی در باند عبور ایجاد نمی‌کند و مانند یک کانال ایده‌آل می‌باشد.

با توجه به باند عبور و باند قطع انتخابی برای فیلترهای فرکانس گزین ایده‌آل می‌توان آن‌ها را به شرح زیر دسته‌بندی کرد:

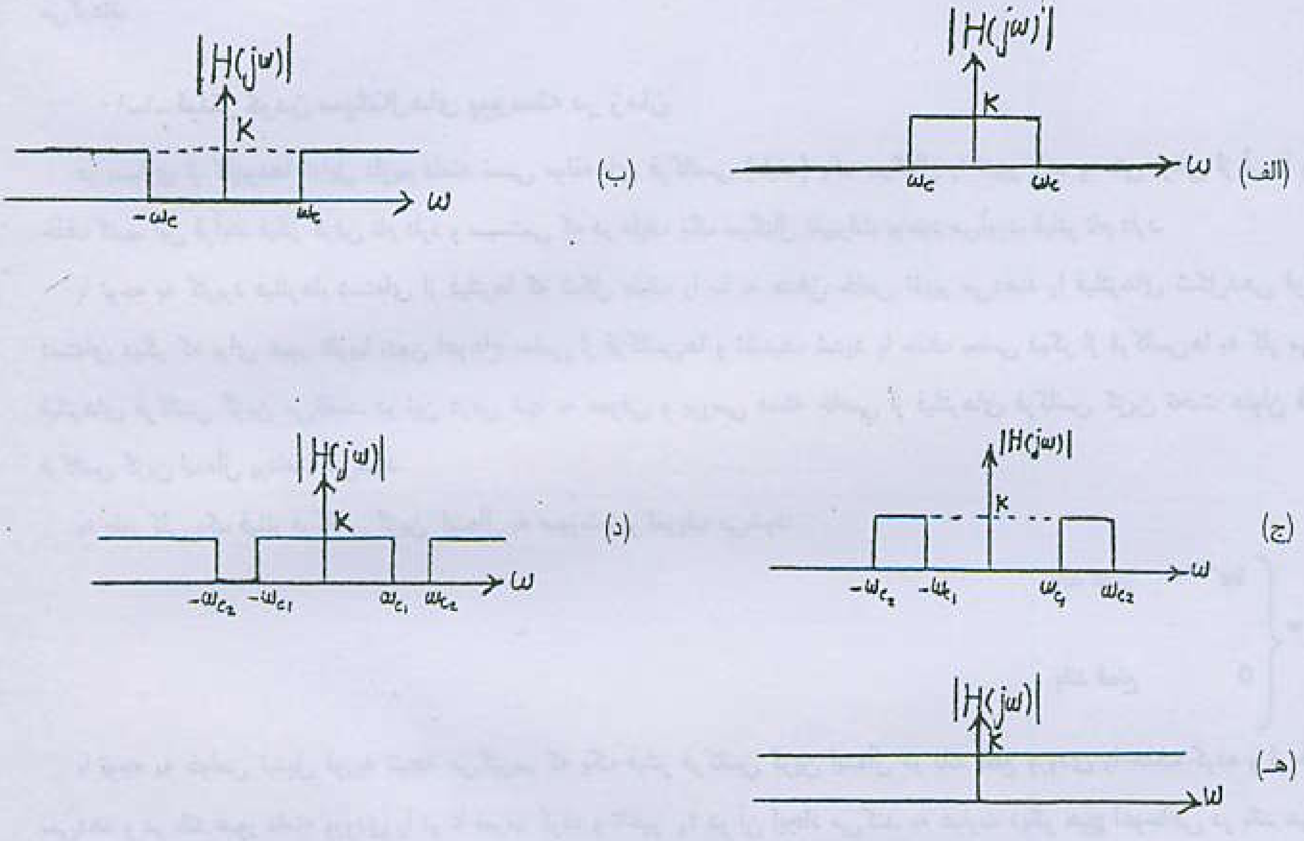
۱ـ فیلتر پائین‌گذر ایده‌آل (LPF): در این فیلتر باند عبور $|\omega|<\omega_c$ و باند قطع $|\omega|>\omega_c$ می‌باشند. شکل (۱۰ـ۱ـ الف) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد. ω_c را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۲ـ فیلتر بالاگذر ایده‌آل (HPF): در این فیلتر باند عبور $|\omega|>\omega_c$ و باند قطع $|\omega|<\omega_c$ می‌باشند. شکل (۱۰ـ۱ـ ب) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد. ω_c را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۳ـ فیلتر میان گذر ایده‌آل (BPF): در این فیلتر باند عبور $\omega_{c_1}<|\omega|<\omega_{c_2}$ و باند قطع $|\omega|<\omega_{c_1}$ و $|\omega|>\omega_{c_2}$ می‌باشند. شکل (۱۰ـ۱ـ ج) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد. ω_{c_1} و ω_{c_2} را فرکانس‌های قطع فیلتر می‌نامند.

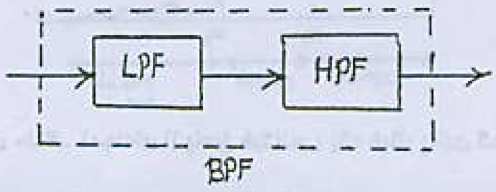
۴ـ **فیلتر میان نگذر ایده‌آل (BRF)**: در این فیلتر باند عبور $|\omega|<\omega_{c_1}$ و $|\omega|>\omega_{c_2}$ و باند قطع $\omega_{c_1}<|\omega|<\omega_{c_2}$ می‌باشند. شکل (۱۰ـ۱ـ د) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد. ω_{c_1} و ω_{c_2} را فرکانس‌های قطع فیلتر می‌نامند.

۵ـ **فیلتر تمام گذر ایده‌آل (APF)**: در این فیلتر باند عبور به ازاء کلیه فرکانس‌هاست و باند قطع نداریم. کاربرد این فیلتر برای تغییر فاز ورودی است. شکل (۱۰ـ۱ـ هـ) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد.



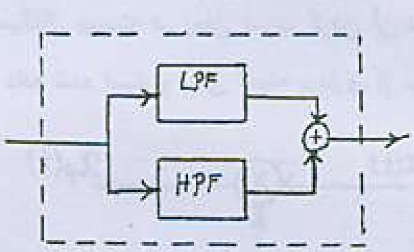
شکل ۱۰ـ۱ـ پاسخ فرکانسی (الف) فیلتر پائین گذر ایده‌آل (ب) فیلتر بالاگذر ایده‌آل (ج) فیلتر میان گذر ایده‌آل (د) فیلتر میان نگذر ایده‌آل (هـ) فیلتر تمام گذر ایده‌آل

تذکر: ترکیب سری یک فیلتر پائین‌گذر با یک فیلتر بالاگذر، یک فیلتر میان‌گذر را نتیجه می‌دهد. اگر فرکانس قطع فیلتر بالاگذر را ω_1 و فرکانس قطع پائین‌گذر را ω_2 بنامیم، فرکانس‌های قطع پائین و بالای فیلتر میان‌گذر حاصل ω_1 و ω_2 می‌باشند (فرض می‌شود $\omega_1 < \omega_2$ است). شکل (۱۰-۲) نشان‌دهنده این ترکیب می‌باشد.



شکل ۱۰-۲- ترکیب سری LPF و HPF که یک BPF را نتیجه می‌دهد

تذکر: ترکیب موازی یک فیلتر پائین‌گذر با یک فیلتر بالا گذر، یک فیلتر میان‌نگذر را نتیجه می‌دهد. اگر فرکانس قطع فیلتر پائین‌گذر را ω_1 و فرکانس قطع فیلتر بالاگذر را ω_2 بنامیم، فرکانس‌های قطع پائین و بالای فیلتر میان نگذر حاصل ω_1 و ω_2 می‌باشند (فرض می‌شود $\omega_1 < \omega_2$ است). شکل (۱۰-۳) نشان‌دهنده این ترکیب می‌باشد.



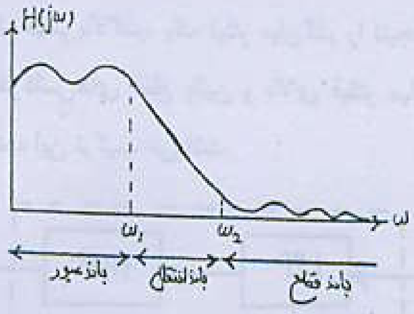
شکل ۱۰-۳ - ترکیب موازی LPF و HPF یک BRF را نتیجه می‌دهد

تذکر: فیلترهای ایده‌آل سیستم‌های LTI غیرعلی می‌باشند. بنابراین از نظر فیزیکی ساخت آن‌ها امکان‌پذیر نیست. برای نشان دادن غیرعلی بودن آن‌ها پاسخ ضربه فیلتر پائین گذر ایده‌آل را به عنوان مثال بدست می‌آوریم. برای این فیلتر داریم:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_d}\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \Rightarrow h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c(t-t_d)}{\pi}\right)$$

ملاحظه می‌کنید که پاسخ ضربه این سیستم در $t<0$ غیرصفر است و بنابراین فیلتر فوق غیرعلی است.

تذکر: با توجه به غیرعلی بودن فیلترهای ایده‌آل، فیلترهای واقعی (غیرایده‌آل) اهمیت زیادی پیدا می‌کنند. در این فیلترها علاوه بر باند عبور و باند قطع، باند انتقال نیز وجود دارد که بین دو باند قطع و عبور است. همچنین پاسخ در باند قطع و عبور لزوماً هموار نبوده و ممکن است دارای تموج باشد. شکل (۱۰-۴) نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین‌گذر غیر ایده‌آل به ازای $\omega > 0$ را نشان می‌دهد.

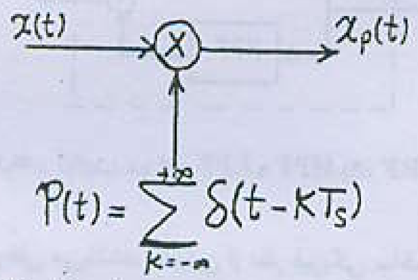


شکل ۱۰-۴- نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین گذر غیر ایده‌آل

۱۰-۲- نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته در زمان

نمونه‌برداری اولین عملیات جهت تبدیل سیگنال‌های پیوسته در زمان (آنالوگ) به سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد. توسط نمونه‌برداری می‌توان یک سیگنال پیوسته در زمان را به یک سیگنال گسسته در زمان تبدیل کرد. عکس عمل نمونه‌برداری یعنی بازسازی سیگنال پیوسته در زمان از روی سیگنال گسسته در زمان را درونیابی می‌نامند و سیستمی که این عمل را انجام می‌دهد فیلتر درون‌یاب نامیده می‌شود.

ساده‌ترین راه برای نمونه‌برداری از یک سیگنال پیوسته در زمان ضرب کردن آن در قطار ضربه می‌باشد. این فرآیند که نمونه برداری ایده‌آل نامیده می‌شود، در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است و برای نمونه برداری از سیگنال x(t) ، از ضرب کردن این سیگنال در p(t) استفاده شده است.



شکل ۱۰-۵ - سیستم نمونه‌بردار ایده‌آل

T_s در شکل (۱۰-۵) دوره تناوب نمونه برداری و $\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$ فرکانس نمونه‌برداری نامیده می‌شوند. درک مفهوم نمونه‌برداری ایده‌آل با توجه به شکل (۱۰-۵) بسیار ساده است و چگونگی نمونه‌برداری توسط ضرب در قطار ضربه قابل درک می‌باشد. اما تحلیل سیستم فوق در حوزه فرکانس و بررسی طیف سیگنال $x_p(t)$ می‌تواند جهت تعیین فیلتر درون‌یاب کارگشا باشد.

به منظور تحلیل طیفی نمونه‌بردار ایده‌آل ابتدا فرض می‌کنیم سیگنال x(t) یک سیگنال باند محدود و پائین‌گذر می‌باشد. به عبارت دیگر داریم:

$$X(\omega)=0 \qquad |\omega|>W$$

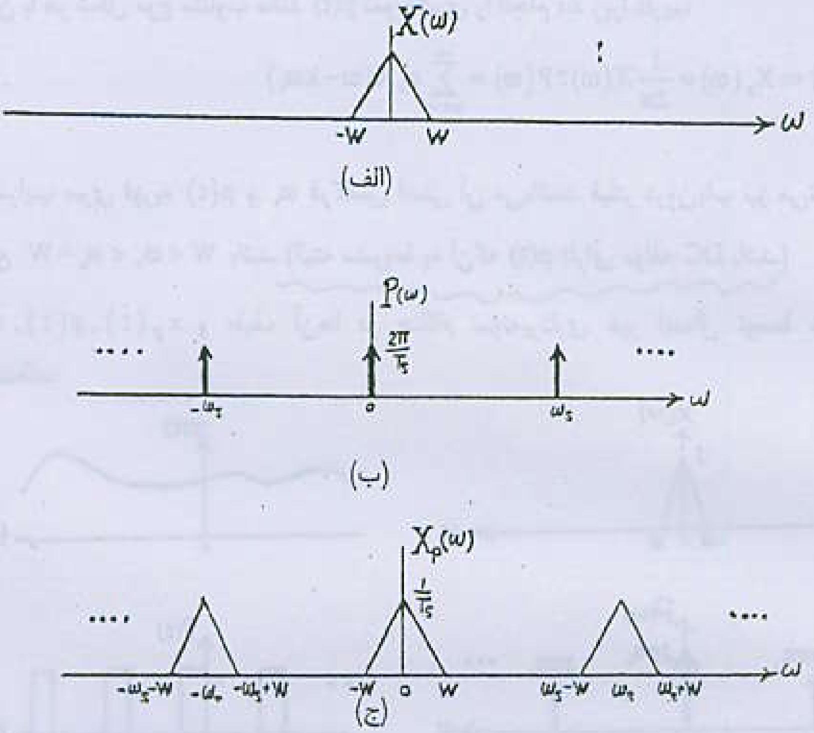
در شکل (۱۰-۶- الف) طیف فرضی این سیگنال نشان داده شده است. تبدیل فوریه سیگنال p(t) در جدول (۹-۱) آورده شده است و داریم:

$$P(\omega)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

$P(\omega)$ در شکل (۱۰ـ۶ـ ب) نشان داده شده است. حال با توجه رابطه $x_p(t)=x(t)p(t)$ و خاصیت ضرب در حوزه زمان داریم:

$$X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(\omega-k\omega_s)$$

ملاحظه می‌کنید با نمونه‌برداری کردن از یک سیگنال، طیف آن با فواصل ω_s تکرار می‌شود. در شکل (۱۰ـ۶ـ ج) طیف سیگنال خروجی نمونه بردار با فرض عدم تداخل طیفی نشان داده شده است.

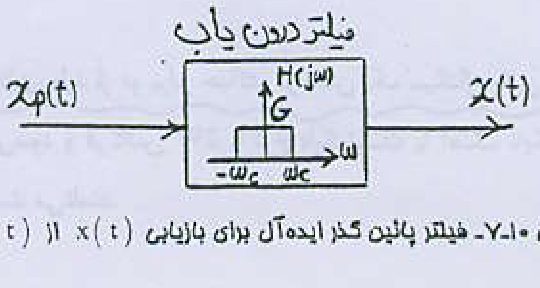


شکل ۱۰ـ۶ـ (الف) طیف فرضی برای $x(t)$ (ب) طیف سیگنال نمونه برداری $p(t)$ (ج) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده $x_p(t)$ با فرض عدم تداخل طیفی

ملاحظه می‌کنید با فرض عدم تداخل طیفی، می‌توان سیگنال $x(t)$ را از روی $x_p(t)$ توسط یک فیلتر پائین‌گذر استخراج کرد. به عبارت دیگر مطابق شکل (۱۰ـ۷)، فیلتر درون‌یاب در نمونه‌برداری ایده‌آل یک فیلتر پائین‌گذر با فرکانس قطع ω_c و بهره G می‌باشد که باید در شروط زیر صدق کنند:

$W<\omega_c<\omega_s-W$

$G=T_s$



شکل ۱۰ـ۷ـ فیلتر پائین گذر ایده‌آل برای بازیابی $x(t)$ از $x_p(t)$

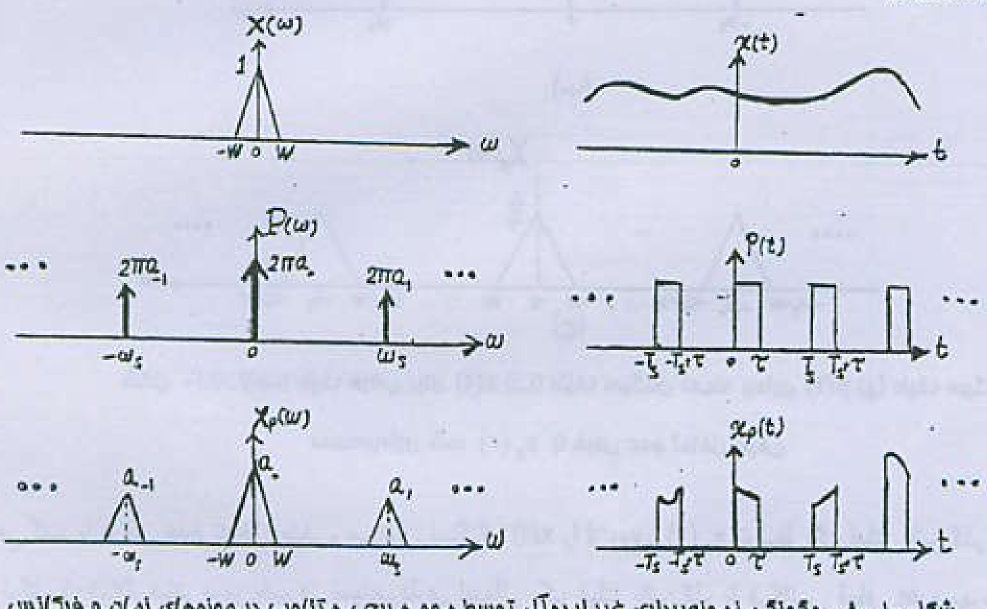
تذکر: اگرچه به نظر می‌رسد فیلتر درون‌یاب به سادگی قابل تحقق است، اما دقت کنید فیلتر پائین‌گذر ایده‌آل غیرعلی است و قابل ساخت نمی‌باشد. در عمل باید از فیلتر پائین‌گذر غیر ایده‌آل استفاده کرد و در نتیجه خروجی فیلتر درون‌یاب تقریبی از x(t) خواهد بود.

تذکر: (نمونه‌برداری غیر ایده‌آل) استفاده از قطار ضربه برای نمونه‌برداری از یک سیگنال عملاً به دلیل قابل ساخت نبودن آن امکان‌پذیر نیست. لذا معمولاً از پالسهای تیز به جای ضربه استفاده می‌شود که این نمونه‌برداری را غیر ایده‌آل می‌نامند. به طور کلی از نظر تئوری می‌توان با هر شکل موج متناوب مانند p(t) نمونه‌گیری را انجام داد زیرا داریم:

$$P(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_s)\Rightarrow X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kX(\omega-k\omega_s)$$

در رابطه فوق a_k ضرایب سری فوریه p(t) و ω_s فرکانس اصلی آن می‌باشند. فیلتر درون‌یاب نیز می‌تواند یک فیلتر پائین‌گذر با بهره $G=\frac{1}{a_0}$ و فرکانس قطع $W<\omega_c<\omega_s-W$ باشد. (البته مشروط به آن‌که p(t) دارای مولفه DC باشد.)

بعنوان مثال $x(t)$, $p(t)$, $x_p(t)$ و طیف آن‌ها در هنگام نمونه‌برداری غیر ایده‌آل توسط موج مربعی متناوب در شکل (۱۰ ـ ۸) نشان داده شده‌اند:



شکل ۱۰ ـ ۸ ـ چگونگی نمونه‌برداری غیر ایده‌آل توسط موج مربعی متناوب در حوزه‌های زمان و فرکانس

تذکر: (قضیه نمونه‌برداری) در سرتاسر بحث فوق فرض عدم تداخل طیفی در سیگنال نمونه‌برداری شده را داشتیم. این فرض فقط هنگامی درست است که داشته باشیم:

$$\omega_s-W>W\Rightarrow\omega_s>2W$$

به عبارت دیگر فرکانس نمونه‌برداری باید از دو برابر حداکثر فرکانس یک سیگنال پائین‌گذر (باند محدود) بیشتر باشد. این شرط تحت عنوان قضیه نمونه‌برداری شناخته می‌شود و فرکانس 2W را نرخ نایکوئیست یا آهنگ نایکوئیست می‌نامند. فرکانس W که نصف آهنگ نایکوئیست است را فرکانس نایکوئیست می‌نامند.

W = فرکانس نایکوئیست
2W = نرخ یا آهنگ نایکوئیست

دقت کنید قضیه نمونه‌برداری لازم می‌دارد که فرکانس نمونه‌بردار از آهنگ نایکوئیست بیشتر باشد. لذا تساوی فرکانس نمونه‌بردار با آهنگ نایکوئیست لزوما باعث نمی‌شود که بتوان سیگنال اصلی را از روی سیگنال نمونه‌برداری شده بازسازی کرد.

مثال : حداکثر فرکانس صوت منتقل شده از طریق خط تلفن تقریباً $f_m = 3.4KHZ$ است. لذا آهنگ نایکوئیست برای این سیگنال $2f_m = 6.8KHZ$ بوده و فرکانس نمونه‌برداری باید بزرگتر از این مقدار باشد.

مثال : آهنگ نایکوئیست را برای سیگنال $x(t)=\dfrac{\sin(2000t)}{\pi t}$ بدست آورید.

حل :

با توجه به جدول (۹ـ۱) داریم:

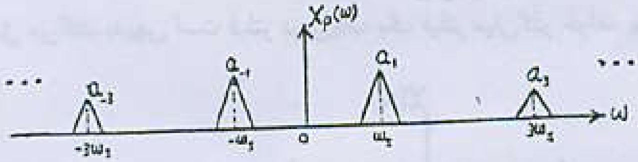
$$X(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{4000}\right)$$

بنابراین حداکثر فرکانس در سیگنال فوق $\omega_m = 2000$ و در نتیجه آهنگ نایکوئیست آن $2\omega_m = 4000$ است.

تذکر : در برخی موارد خاص می‌توان با نرخی پایین‌تر از آهنگ نایکوئیست از یک سیگنال پائین‌گذر (باند محدود) نمونه‌برداری کرد. یکی از این موارد خاص هنگامی است که سیگنال نمونه‌بردار تقارن نیم موج دارد و در نتیجه ضرایب زوج سری فوریه آن صفر است. در این حالت داریم :

$$P(\omega)=2\pi\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ \text{فرد}}}^{+\infty} a_k\,\delta(\omega-k\omega_s) \;\Rightarrow\; X_p(\omega)=\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ \text{فرد}}}^{+\infty} a_k\,X(\omega-k\omega_s)$$

نمودار $X_p(\omega)$ برای $X(\omega)$ فرضی در شکل (۱۰ ـ ۹) نشان داده شده است.

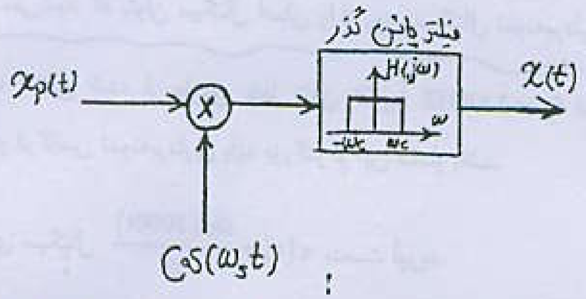


شکل ۱۰ ـ ۹ ـ طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با فرض تقارن نیم موج سیگنال نمونه‌بردار

با توجه به شکل (۱۰ ـ ۹) شرط عدم تداخل عبارت است از :

$$3\omega_s - W > \omega_s + W \;\Rightarrow\; \omega_s > W$$

ملاحظه می‌کنید در این حالت نرخ لازم برای نمونه‌برداری باید بزرگتر از نصف آهنگ نایکوئیست باشد. البته بدیهی است بر خلاف نمونه‌برداری عادی، فیلتر درون‌یاب LPF نیست و برای بازسازی سیگنال اصلی باید طیف سیگنال نمونه‌برداری شده را مجدداً به مبدا منتقل کرد. شکل (۱۰ ـ ۱۰) سیستم بازیابی $x(t)$ از $x_p(t)$ را نشان می‌دهد.

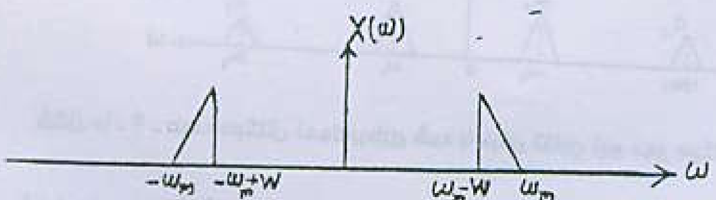


شکل ۱۰ - ۱۰ - سیستم بازیابی $x(t)$ از $x_p(t)$ برای حالتی که سیگنال نمونه‌بردار دارای تقارن نیم موج باشد.

تذکر : دقت کنید اگرچه از نظر تئوری نرخ نمونه‌برداری از یک سیگنال پائین‌گذر (باند محدود) باید اندکی بزرگتر از آهنگ نایکوئیست باشد، اما عملاً پهنای باند و فرکانس قطع فیلتر پائین‌گذر درون یاب در گیرنده تعیین کننده حداقل نرخ لازم برای نمونه‌برداری است و این نرخ بیشتر از آهنگ نایکوئیست است.

مثال : در انتقال صوت دیجیتال از طریق خط تلفن، اگرچه آهنگ نایکوئیست 6.8 KHZ است، اما به دلیل محدودیت پهنای باند فیلتر درون‌یاب در گیرنده، نرخ نمونه‌برداری حداقل 8 KHZ انتخاب می‌شود.

تذکر : طبق قضیه نمونه‌برداری، فرکانس نمونه‌برداری باید از دو برابر حداکثر فرکانس سیگنال (آهنگ نایکوئیست) بیشتر باشد. اما برای سیگنال‌های میان گذر می‌توان نرخ نمونه‌برداری را کمتر از آهنگ نایکوئیست انتخاب کرد. می‌توان نشان داد اگر طیف یک سیگنال میان‌گذر مطابق شکل (۱۰-۱۱) دارای حداکثر فرکانس ω_m و آهنگ نایکوئیست $2\omega_m$ وپهنای باند W باشد آن‌گاه می‌توان سیگنال میان گذر اصلی را از روی سیگنال نمونه‌برداری شده با نرخ $\omega_s = \frac{2\omega_m}{k}$ بدست آورد. k عدد صحیحی است که در رابطه $\frac{\omega_m}{W} - 1 < k \le \frac{\omega_m}{W}$ صدق می‌کند. بدیهی است فیلتر درون‌یاب یک فیلتر میان‌گذر خواهد بود.



شکل ۱۰-۱۱- نمایش یک سیگنال میان گذر فرضی با نرخ نایکوئیست $2\omega_m$ و پهنای باند W

مثال : یک سیگنال میان‌گذر با حداقل و حداکثر فرکانس $f_1 = 12KHZ$ و $f_2 = 14.5KHZ$ را در نظر بگیرید. نرخ نایکوئیست و حداقل فرکانس لازم برای نمونه‌برداری مناسب برای این سیگنال را بدست آورید.

حل : نرخ نایکوئیست این سیگنال $2f_2 = 29KHZ$ است. اما برای تعیین حداقل فرکانس نمونه‌برداری مناسب داریم:

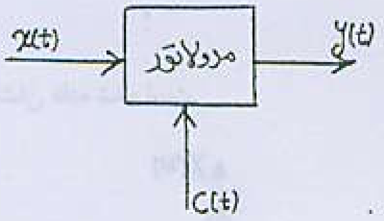
$$\frac{f_2}{f_2 - f_1} = \frac{14.5}{2.5} = 5.8$$

بنابراین k=5 است و داریم:

$$f_s = \frac{2f_2}{k} = \frac{29}{5} = 5.8KHZ$$

۱۰ـ۳ـ مدولاسیون سیگنال‌های پیوسته در زمان

مدولاتورها و دمدولاتورها بلوکهای اصلی در اکثر سیستم‌های مخابراتی می‌باشند. مدولاتور در فرستنده قرار گرفته و سیگنال پیام را درون سیگنال دیگری تحت عنوان سیگنال حامل قرار می‌دهد. و دمدولاتور در گیرنده قرار گرفته و سیگنال پیام را استخراج می‌کند. در فرآیند مدولاسیون، دو سیگنال مطابق شکل (۱۰ـ۱۲) به مدولاتور وارد شده و یک سیگنال خارج می‌شود. سیگنال‌های ورودی پیام x(t) و سیگنال حامل c(t) نام دارند و سیگنال خروجی را سیگنال مدوله شده می‌نامند.



شکل ۱۰ـ۱۲ـ مدولاتور

استفاده از مدولاسیون دلایل گوناگونی دارد. یکی از دلایل مهم پائین‌گذر بودن اغلب پیام‌ها و میان‌گذر بودن کانال‌های انتقال است. لذا برای تطبیق مشخصات فرکانسی سیگنال ارسالی با محیط انتقال، به جای پیام، سیگنال حامل که فرکانس آن مطابق با مشخصات فرکانسی محیط انتقال است، ارسال گردیده و پیام x(t) یکی از پارامترهای حامل را تغییر داده تا در گیرنده بتوان از روی حامل پیام را استخراج کرد. البته دلایل دیگری نیز برای مدوله کردن یک سیگنال وجود دارند که از حوصله این بحث خارج است.

اولین تقسیم‌بندی روی مدولاسیون‌ها با توجه به ماهیت پیام صورت می‌گیرد. اگر پیام ماهیت پیوسته در زمان (آنالوگ) داشته باشد مدولاسیون را آنالوگ و اگر ماهیت دیجیتال داشته باشد مدولاسیون را دیجیتال می‌نامند.

تقسیم‌بندی روی مدولاسیون‌های آنالوگ که بحث اصلی ما در این بخش می‌باشد بر اساس شکل حامل c(t) صورت می‌گیرد. اگر c(t) موج سینوسی باشد، مدولاسیون را مدولاسیون سینوسی یا موج پیوسته (CW) می‌نامند. در صورتی‌که اگر c(t) موج مربعی باشد مدولاسیون را مدولاسیون پالسی می‌نامند.

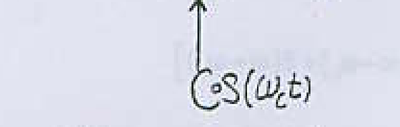
تقسیم‌بندی روی مدولاسیون‌های سینوسی بر اساس پارامتر کنترل شونده حامل توسط پیام و به شرح زیر انجام می‌شود:

۱) **مدولاسیون دامنه (AM):** در این مدولاسیون دامنه حامل توسط پیام کنترل می‌شود.

۲) **مدولاسیون فرکانس (FM):** در این مدولاسیون فرکانس حامل توسط پیام کنترل می‌شود.

۳) **مدولاسیون فاز (PM):** در این مدولاسیون فاز حامل توسط پیام کنترل می‌شود.

در این مبحث یک نوع ساده از مدولاسیون آنالوگ با حامل سینوسی و از نوع AM تحت عنوان مدولاسیون DSB بررسی می‌گردد. بلوک دیاگرام مدولاتور DSB در شکل (۱۰ـ۱۳) نشان داده شده است.



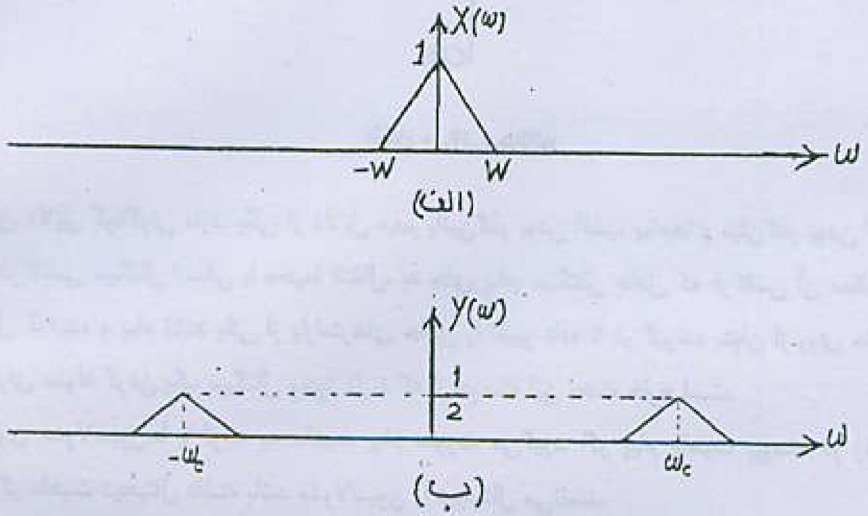
شکل ۱۰ـ۱۳ـ مدولاتور DSB

با توجه به شکل (۱۰-۱۳) ملاحظه می‌کنید پیام x(t) با ضرب در حامل $\cos(\omega_c t)$ دامنه آن را کنترل می‌کند. برای تحلیل بهتر این مدولاتور و ایده گرفتن برای طراحی دمدولاتور آن از تحلیل در حوزه فرکانس استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم x(t) یک سیگنال باند محدود پائین‌گذر با تبدیل فوریه $X(\omega)$ نشان داده شده در شکل (۱۰-۱۴- الف) باشد آنگاه:

$$y(t)=x(t)\cos(\omega_c t)\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi\left[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right]$$

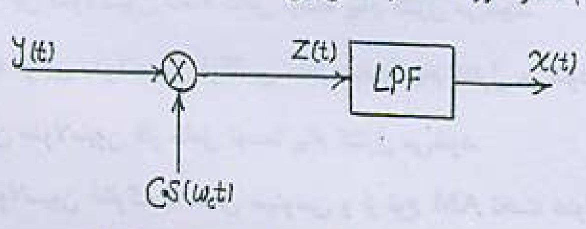
$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{2}X(\omega-\omega_c)+\frac{1}{2}X(\omega+\omega_c)$$

طیف $Y(\omega)$ در شکل (۱۰-۱۴- ب) نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱۴- (الف) طیف سیگنال پیام (ب) طیف سیگنال مدوله شده

شکل (۱۰-۱۴- ب) نشان می‌دهد که خروجی مدولاتور یک سیگنال میان گذر حول فرکانس ω_c می‌باشد و معمولاً $\omega_c >> W$ است. همچنین از روی شکل فوق می‌توان نتیجه گرفت که با ضرب y(t) در $\cos(\omega_c t)$ و سپس استفاده از یک فیلتر پائین گذر می‌توان سیگنال پیام را استخراج کرد. شکل (۱۰-۱۵) دمدولاتور DSB را نشان می‌دهد.



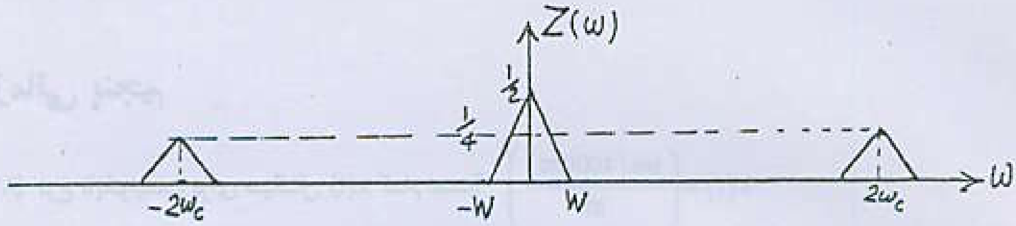
شکل ۱۰-۱۵- دمدولاتور DSB

با توجه به شکل (۱۰-۱۵) داریم:

$$z(t)=y(t)\cos(\omega_c t)\Rightarrow Z(\omega)=\frac{1}{2\pi}Y(\omega)*\pi\left[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right]$$

$$=\frac{1}{2}Y(\omega-\omega_c)+\frac{1}{2}Y(\omega+\omega_c)$$

طیف $Z(\omega)$ در شکل (۱۰-۱۶) نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱۶- طیف سیگنال z(t)

مشخصات فیلتر پائین‌گذر با توجه به شکل (۱۰-۱۶) عبارت است از:

$W < \omega_{LP} < 2\omega_c - W$

$G = 2$

خودآزمائی پنجم

۱ـ (آزاد ۸۱) نرخ نایکوئیست برای سیگنال $x(t)$ کدام است؟ $x(t)=\left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$

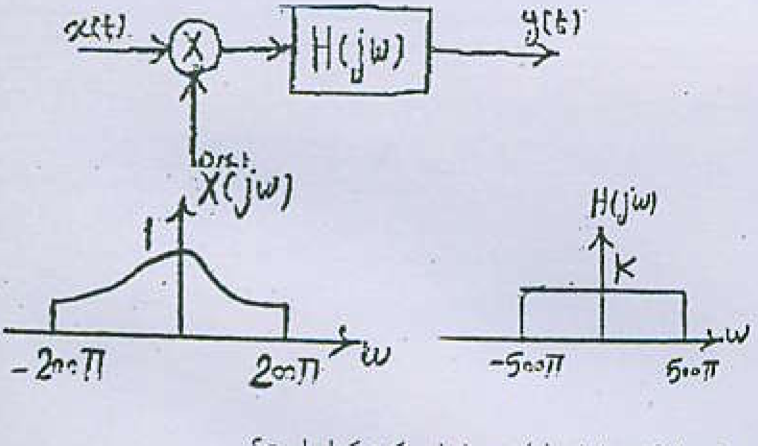
۱) 8000HZ   ۲) 16000HZ   ۳) 4000HZ   ۴) 32000HZ

۲ـ (سراسری ۸۱) $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_m و فرکانس اصلی $\frac{2\pi}{T_m} \triangleq \omega_m$ می‌باشد. نرخ نایکوئیست این سیگنال با کدام گزینه برابر است؟

۱) ω_m ۲) $2\omega_m$

۳) مضرب محدود و صحیحی از ω_m ۴) به شکل موج $x(t)$ بستگی دارد

۳ـ (آزاد ۸۰) از سیگنال $x(t)$ به وسیله قطار ضربه $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)$ نمونه برداری می‌شود و سیگنال نمونه‌برداری شده از یک فیلتر پائین‌گذر با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ در شکل مقابل عبور داده می‌شود. مقدار k و حداکثر T_s را طوری تعیین کنید که $y(t)=x(t)$ (طیف سیگنال ورودی داده شده است)



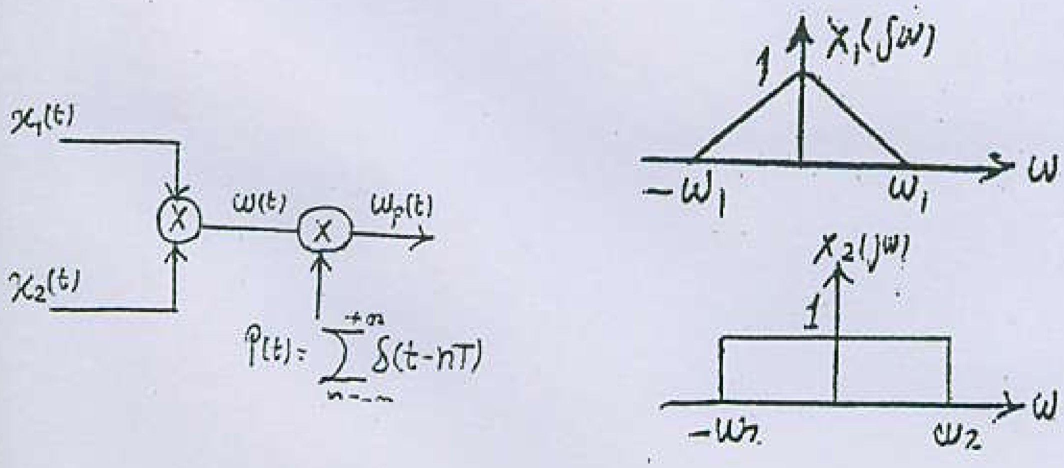
۱) $T_s < \frac{1}{100}S\ ,\ k=T_s$

۲) $T_s < \frac{1}{150}S\ ,\ k=T_s$

۳) $T_s < \frac{1}{350}S\ ,\ k=T_s$

۴) $T_s < \frac{1}{250}S\ ,\ k=T_s$

۴ـ (آزاد ۸۱ و آزاد ۸۴) حداکثر پریود نمونه‌برداری برای آن‌که بتوان $w(t)$ را از $w_p(t)$ بازیابی کرد کدام است؟



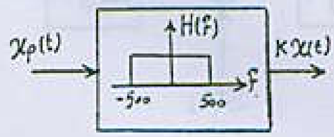
۱) $\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}$

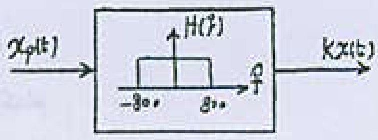
۲) $\frac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$

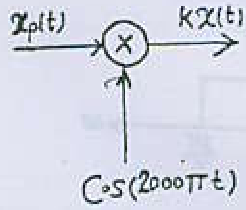
۳) $\frac{1}{2(\omega_1+\omega_2)}$

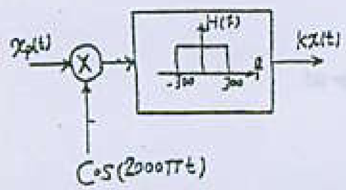
۴) $\frac{\pi}{2(\omega_1+\omega_2)}$

۵ـ سیگنال $x(t)$ یک سیگنال باند محدود با حداکثر فرکانس 300HZ است. از این سیگنال توسط سیگنال $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(t-\frac{k}{1000}\right)-\delta\left(t-\frac{k-0.5}{1000}\right)\right]$ نمونه‌برداری می‌شود و سیگنال $x_p(t)$ به‌دست می‌آید. توسط کدام یک از سیستم‌های زیر می‌توان $x(t)$ را از روی $x_p(t)$ بازسازی کرد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶ـ آهنگ نایکوئیست و حداقل فرکانس برای نمونه‌برداری مناسب از سیگنال $x(t)=\frac{\sin(1000\pi t)\cos(8000\pi t)}{\pi t}$ به ترتیب چقدر می‌باشند؟

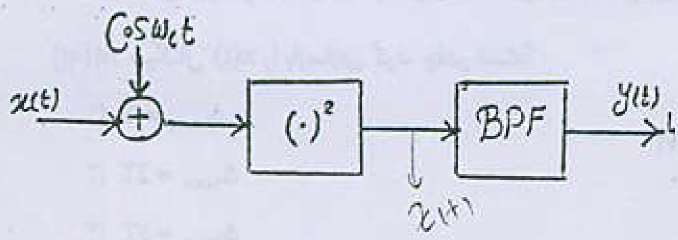
۱) 8KHZ و 8KHZ

۲) 8KHZ و 2KHZ

۳) 9KHZ و 9KHZ

۴) 9KHZ و 2.25KHZ

۷ـ در شکل زیر فرکانس‌های قطع پائین و بالای فیلتر میان گذر (ω_{c_1} و ω_{c_2}) در چه محدوده‌ای باشند تا $y(t)$ یک سیگنال مدوله شده دامنه با فرکانس حامل ω_c باشد؟ (پیام $x(t)$ باند محدود با حداکثر فرکانس ω_m است)



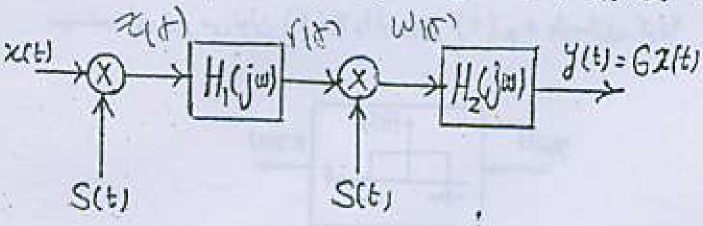
۱) $2\omega_m<\omega_{c_1}<\omega_c-\omega_m$ و $\omega_c+\omega_m<\omega_{c_2}<2\omega_c$

۲) $\omega_m<\omega_{c_1}<\omega_c-\omega_m$ و $\omega_c+\omega_m<\omega_{c_2}<\omega_c-\omega_m$

۳) $2\omega_m<\omega_{c_1}<\omega_c-\omega_m$ و $\omega_c+\omega_m<\omega_{c_2}<2\omega_c-\omega_m$

۴) هیچکدام

۸ـ شکل زیر یک تقویت‌کننده فرکانس پائین را نشان می‌دهد که در آن سیگنال موردنظر ابتدا مدوله شده و پس از تقویت مجدداً دمدوله می‌شود. اگر $s(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T و ضرایب سری فوریه a_k باشد، آن‌گاه ضریب تقویت (G) چقدر است؟

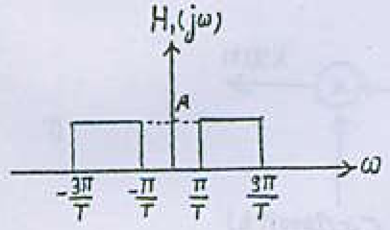


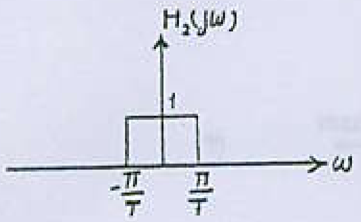
۱) $2Aa_1a_{-1}$

۲) Aa_1a_{-1}

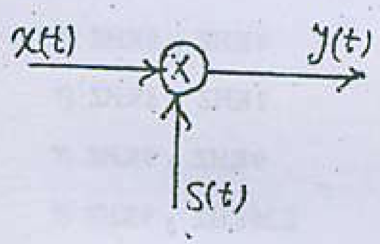
۳) Aa_0

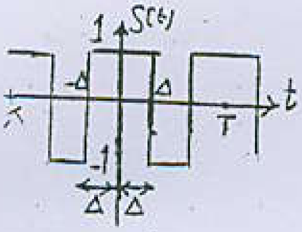
۴) هیچکدام





۹ـ در شکل زیر اگر $x(t)$ یک سیگنال باند محدود با حداکثر فرکانس ω_m باشد، آن‌گاه حداکثر مقدار T برای آن‌که بتوان $x(t)$ را از روی $y(t)$ بازسازی کرد، چقدر است؟





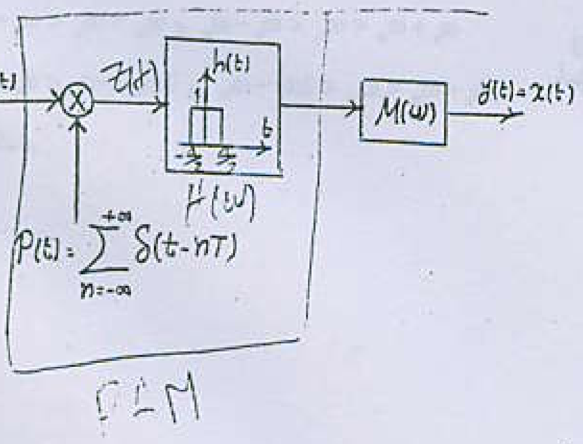
۱) $T_{MAX} = \frac{\pi}{\omega_m}$

۲) $T_{MAX} = \frac{2\pi}{\omega_m}$

۳) $T_{MAX} = \frac{4\pi}{\omega_m}$

۴) بستگی به مقدار Δ دارد

۱۰ـ در شکل زیر اگر $x(t)$ یک سیگنال باند محدود با حداکثر فرکانس $\frac{\pi}{T}$ باشد، حداکثر مقدار Δ به گونه‌ای که بتوان با استفاده از فیلتر $M(\omega)$ سیگنال $x(t)$ را بازسازی کرد، چقدر است؟



۱) $\Delta_{MAX} = T$

۲) $\Delta_{MAX} = 2T$

۳) $\Delta_{MAX} = 3T$

۴) $\Delta_{MAX} = 4T$

ELM

یادداشت

۱۱ـ تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان ـ مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه

در بخش‌های قبل تحلیل فوریه برای سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته در زمان معرفی و بررسی گردید. در این بخش و چند بخش آتی سری و تبدیل فوریه را برای سیگنال‌های گسسته در زمان معرفی و خواص و کاربرد آن‌ها را در تحلیل سیستم‌های گسسته در زمان LTI بررسی خواهیم کرد. سری و تبدیل فوریه گسسته در زمان دو مزیت عمده دارند. اولاً در تحلیل و طراحی سیستم‌ها دانستن پارامترها، خواص و مفاهیم حوزه فرکانس مانند پهنای باند، طیف سیگنال و ....مفید می‌باشد. ثانیاً خاصیت جمع آثار یک سیستم خطی و این واقعیت که پاسخ یک سیستم LTI گسسته در زمان به ورودی سینوسی با یک فرکانس خاص، یک سینوسی با همان فرکانس است، باعث می‌گردد که روابط و ابزار مناسبی جهت تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها در حوزه فوریه حاصل گردد. در واقع تبدیل فوریه گسسته در زمان (یا تبدیل z) به ما اجازه می‌دهد تا یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت توصیف کننده یک سیستم LTI گسسته در زمان را به یک معادله جبری تبدیل نمائیم.

۱۱ـ۱ـ پاسخ سیستم‌های گسسته در زمان LTI به توابع نمائی مختلط

در بخش‌های قبل تحلیل سیستم‌های گسسته در زمان LTI توسط جمع کانولوشن معرفی گردید. این تحلیل بر مبنای نمایش یک سیگنال گسسته در زمان به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه جابجا شده بود. در این بخش به دنبال نوع دیگری از نمایش سیگنال‌های گسسته در زمان برحسب سیگنال‌های پایه می‌باشیم که دو خاصیت اساسی زیر را داشته باشند:

۱ـ باید بتوان تعداد زیادی از سیگنال‌های مفید گسسته در زمان را به صورت ترکیب خطی از این سیگنال‌های پایه نوشت (شرط وجود و همگرائی).

۲ـ پاسخ هر سیستم LTI گسسته در زمان به هر کدام از این سیگنال‌های پایه به سادگی به دست آید. در نتیجه با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توان پاسخ سیستم LTI را به سیگنال ورودی نوشته شده برحسب این سیگنال‌های پایه به سادگی بدست آورد.

تعریف: سیگنالی که پاسخ سیستم به آن، حاصلضرب یک عدد ثابت (در حالت کلی می‌تواند مختلط باشد) در آن سیگنال باشد را تابع ویژه سیستم می‌نامند. دامنه عدد ثابت فوق را مقدار ویژه آن سیستم می‌نامند (با مقدار ویژه ماتریس‌ها اشتباه نشود ! !) . شکل (۱۱ ـ ۱) نشان دهنده تعریف فوق می‌باشد.

شکل ۱۱ـ۱ـ $x[n]$ یک تابع ویژه برای سیستم نمایش داده شده و $|k|$ مقدار ویژه سیستم می‌باشند.

قضیه: سیگنال $x[n]=z^n$ (z در حالت کلی یک عدد مختلط است) یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI می‌باشد.

اثبات:
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{n-k}h[k]=z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}=H(z)z^n$$

بنابراین اگر به سیستم LTI ورودی z^n اعمال شود، آنگاه پاسخ سیستم به این ورودی $H(z)z^n$ خواهد بود که $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$ می‌باشد و $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم است.

مثال: سیستم تأخیر دهنده $y[n]=x[n-n_0]$ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم ورودی $x[n]=z^n$ اعمال کنیم، داریم:
$$y[n]=x[n-n_0]=z^{n-n_0}=z^n.z^{-n_0}=z^{-n_0}x[n]=H(z)x[n]$$

حال اگر بخواهیم $H(z)$ را با استفاده از پاسخ ضربه بدست آوریم، داریم: .

$$h[n]=\delta[n-n_0] \;\Rightarrow\; H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]z^{-n}=z^{-n_0}$$

با توجه به قضیه اخیر و با در نظر گرفتن آن که z در حالت کلی می‌تواند یک عدد مختلط باشد، می‌توان سه نوع نمایش سیگنال برحسب توابع z^n را معرفی کرد.

(۱) سری فوریه گسسته در زمان: اگر $z=e^{jk\omega_0}$ باشد (k عدد صحیح) آنگاه داریم:

توابع ویژه : $e^{jk\omega_0 n}$ $\quad k=0,1,2,\ldots,N_0-1$ (هارمونیک‌ها)

در این حالت مکان هندسی z ها نقاط منفصل روی دایره واحد با اختلاف فاز ω_0 از یکدیگر می‌باشند (شکل (۱۱ ـ ۲ ـ الف)) و هر سیگنال گسسته به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های پایه $e^{jk\omega_0 n}$ نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI گسسته به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر $H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$ خواهد بود. این نوع نمایش را سری فوریه گسسته در زمان یک سیگنال می‌نامند و در بخش دوازده بررسی خواهد شد.

(۲) تبدیل فوریه گسسته در زمان: اگر $z=e^{j\omega}$ باشد آنگاه داریم:

توابع ویژه : $e^{j\omega n}$

در این حالت مکان هندسی z ها کل دایره واحد می‌باشد (شکل (۱۱ ـ ۲ ـ ب)) و هر سیگنال گسسته به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های $e^{j\omega n}$ نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI گسسته به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ خواهد بود. این نوع نمایش را تبدیل فوریه گسسته در زمان یک سیگنال می‌نامند و در بخش سیزده بررسی خواهد شد.

(۳) تبدیل z: اگر $z=re^{j\omega}$ باشد آنگاه داریم:

توابع ویژه : $z^n=r^n e^{j\omega n}$

در این حالت مکان هندسی z ها کل صفحه مختلط می‌باشد (شکل (۱۱ ـ ۲ ـ ج)) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های پایه z^n نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر $H(z)z^n$ خواهد بود. این نوع نمایش را تبدیل z یک سیگنال گسسته می‌نامند و در بخش هیجدهم بررسی خواهد شد.

شکل ۱۱ ـ ۲ ـ مکان z ها در صفحه مختلط (الف) سری فوریه گسسته در زمان (ب) تبدیل فوریه گسسته در زمان (ج) تبدیل z

در جدول (۱۱ ـ ۱) خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل فوق آورده شده است:

نام تبدیل	z	مکان z	سیگنال‌های پایه	پاسخ سیستم به سیگنال‌های پایه	H (z)	کاربرد
سری فوریه گسسته در زمان	$z=e^{jk\omega_0}$	نقاط منفصل روی دایره واحد	$e^{jk\omega_0 n}$	$H\left(e^{jk\omega_0}\right)e^{jk\omega_0 n}$	$H\left(e^{jk\omega_0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-jk\omega_0 n}$	تحلیل سیگنال‌های متناوب گسسته در زمان
تبدیل فوریه گسسته در زمان	$z=e^{j\omega}$	کل دایره واحد	$e^{j\omega n}$	$H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$	$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$	تحلیل سیگنال‌های متناوب و نامتناوب گسسته در زمان
تبدیل z	$z=re^{j\omega}$	کل صفحه مختلط	z^n	$H(z)z^n$	$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$	تحلیل سیگنال‌های متناوب و نامتناوب گسسته در زمان

جدول ۱۱ ـ ۱ ـ خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل بر مبنای تابع نمائی مختلط گسسته

۱۲ـ تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان متناوب (سری فوریه گسسته در زمان)

در این بخش ابتدا به معرفی سری فوریه گسسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های گسسته در زمان پرداخته و سپس خواص آن معرفی و بررسی می‌گردند.

۱۲ ـ ۱ـ سری فوریه گسسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LTI

تعریف: سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N_0 را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

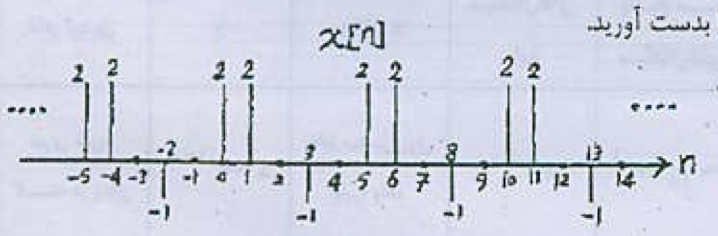
$$x[n]=\sum_{k:\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

در رابطه فوق $\omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$ فرکانس اصلی (پایه) نامیده می‌شود. a_k ضرایب سری فوریه می‌باشند و از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$a_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

در روابط فوق $\sum\limits_{m:\langle N_0\rangle}$ معرف جمع کردن به ازاء N_0 عدد صحیح متوالی است.

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال را بدست آورید.



دوره تناوب اصلی این سیگنال $N_0=5$ و در نتیجه فرکانس پایه آن $\omega_0=\frac{2\pi}{5}$ است.

بنابراین داریم:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{4} a_k e^{j\frac{2k\pi}{5}n}$$

$$a_k=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n]e^{-j\frac{2k\pi}{5}n} = \frac{1}{5}\left(2+2e^{-j\frac{2k\pi}{5}}-e^{-j\frac{6k\pi}{5}}\right)$$

ضرایب سری فوریه این سیگنال به ازای k های مختلف عبارتند از:

$$\ldots=a_{-10}=a_{-5}=a_0=a_5=a_{10}=\ldots=\frac{1}{5}(2+2-1)=\frac{3}{5}$$

$$\ldots=a_{-9}=a_{-4}=a_1=a_6=a_{11}=\ldots=\frac{1}{5}\left(2+2e^{-j\frac{2\pi}{5}}-e^{-j\frac{6\pi}{5}}\right)\approx 0.685-j0.5$$

$$\ldots=a_{-8}=a_{-3}=a_2=a_7=a_{12}=\ldots=\frac{1}{5}\left(2+2e^{-j\frac{4\pi}{5}}-e^{-j\frac{12\pi}{5}}\right)\approx 0.015-j0.045$$

$$...=a_{-7}=a_{-2}=a_3=a_8=a_{13}=...\frac{1}{5}\left(2+2e^{-j\frac{6\pi}{5}}-e^{-j\frac{18\pi}{5}}\right)\approx 0.015+j0.045$$

$$...=a_{-6}=a_{-1}=a_4=a_9=a_{14}=...=\frac{1}{5}\left(2+2e^{-j\frac{8\pi}{5}}-e^{-j\frac{24\pi}{5}}\right)\approx 0.685+j0.5$$

تذکر: دقت کنید ضرایب سری فوریه با دوره تناوب $N_0=5$ متناوب می‌باشند. همچنین $a_{-k}=a_k^*$ است و در بخش‌های بعد ملاحظه خواهید کرد که از خواص اصلی ضرایب سری فوریه سیگنال‌های حقیقی است.

تذکر: با توجه به تعریف a_k و مثال اخیر، ملاحظه می‌کنید ضرایب a_k در حالت کلی مختلط می‌باشند. لذا معمولاً برای ترسیم آن‌ها، دامنه $|a_k|$ و فاز $\angle a_k$ جداگانه رسم می‌شوند. این منحنی‌ها را نمودارهای میله‌ای ضرایب سری فوریه می‌نامند.

تذکر: دقت کنید برخلاف سری فوریه پیوسته در زمان، تعداد هارمونیک‌های لازم برای مشخص کردن سری فوریه یک سیگنال گسسته در زمان محدود و برابر دوره تناوب اصلی N_0 آن است. دلیل این امر محدود بودن تعداد هارمونیک‌های گسسته در زمان می‌باشد.

مقدار DC سیگنال x[n]

تذکر: ضریب a_0 از رابطه $a_0=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}x[n]$ بدست می‌آید. این تعریف نشان می‌دهد ضریب a_0 از تقسیم مجموع N_0 نمونه متوالی $x[n]$ بر N_0 بدست می‌آید و معرف مقدار DC سیگنال $x[n]$ است.

تذکر: در مثال قبل ملاحظه کردید ضرایب سری فوریه گسسته در زمان با دوره تناوب N_0 متناوب می‌باشند که N_0 دوره تناوب اصلی سیگنال است. اثبات به صورت زیر است:

$$a_{k+N_0}=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}x[n]e^{-j(k+N_0)\omega_0 n}=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}x[n]e^{-jk\omega_0 n}\times e^{-jN_0\omega_0 n}$$

$$=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}x[n]e^{-jk\omega_0 n}.e^{-j2mn\pi}=\frac{1}{N}\sum_{n:\langle N_0\rangle}x[n]e^{-jk\omega_0 n}=a_k$$

تذکر: برخی از سیگنال‌های متناوب گسسته اهمیت زیادی در تحلیل فوریه سیستم‌ها و سیگنال‌ها دارند. لذا دانستن سری فوریه گسسته آن‌ها مفید می‌باشد. در جدول (۱۲ ـ ۱) برخی از این سیگنال‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود. اگرچه در بدو امر به خاطر سپردن فرمول‌های مربوط به سری فوریه گسسته در زمان مشکل به نظر می‌رسد، اما فرمول‌های فوق تا حد زیادی مشابه فرمول‌های ضرایب سری فوریه پیوسته در زمان می‌باشند. با این تفاوت که اولاً در حالت گسسته این ضرایب با دوره تناوب N متناوب می‌باشند و ثانیاً در توابع سینوسی در صورتی که $N=\frac{2m\pi}{\omega_0}$ باشد (یعنی فرکانس تابع سینوسی روی فرکانس اصلی قرار نگرفته باشد)، آنگاه ضرایب سری فوریه به جای $k=\pm 1$ روی $k=\pm m$ قرار می‌گیرند. در ضمن اگر فرکانس ω_0 این توابع مضرب گویائی از π نباشد، آنگاه متناوب نبوده و نمی‌توان برای آن‌ها سری فوریه نوشت.

ضرایب سری فوریه گسسته	سیگنال
$a_k = \begin{cases} 1 & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2m\pi}{N}$	$x[n] = e^{j\omega_0 n}$ فرض: ω_0 مضرب گویا از π
$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2m\pi}{N}$	$x[n] = \cos(\omega_0 n)$ فرض: ω_0 مضرب گویا از π
$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = m, m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots \\ -\frac{1}{2j} & k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2m\pi}{N}$	$x[n] = \sin(\omega_0 n)$ فرض: ω_0 مضرب گویا از π
$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases}$	$x[n] = 1$
$a_k = \dfrac{\sin\left[\dfrac{2k\pi\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{N}\right]}{N \sin\left[\dfrac{2k\pi}{2N}\right]} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a_k = \dfrac{2N_1 + 1}{N} \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$	موج مربعی متناوب $x[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n \rvert \leq N_1 \\ 0 & N_1 < \lvert n \rvert \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$
$a_k = \frac{1}{N}$ به ازاء کلیه k ها	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$

جدول ۱۲ـ۱ـ ضرایب سری فوریه برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

مثال: برای سه سیگنال $\cos(2n)$، $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ و $e^{j3\pi n}$ ضرایب سری فوریه را در صورت وجود بدست آورید.

حل: سیگنال $\cos(2n)$ متناوب نیست و بنابراین نمی‌توان سری فوریه برای آن نوشت. برای سیگنال $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ داریم:

$$N_0 = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8k \xrightarrow{k=1} N_0 = 8$$

بنابراین فرکانس پایه این سیگنال $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{\pi}{4}$ است و داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}n} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} \quad , \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \\ a_k = 0 \qquad k \neq \pm 1 \\ a_{k+8} = a_k \end{cases}$$

در مورد این سیگنال ضرایب سری فوریه با دوره تناوب $N_0 = 8$ متناوب می‌باشند و ضرایب سری فوریه غیرصفر آن عبارتند از:

$$\cdots = a_{-7} = a_1 = a_9 = a_{17} = \cdots = \frac{1}{2j}$$

$$\cdots = a_{-9} = a_{-1} = a_7 = a_{15} = \cdots = \frac{-1}{2j}$$

برای سیگنال $e^{j3\pi n}$ داریم:

$$N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{3\pi} = \frac{2k}{3} \xrightarrow{k=3} N_0 = 2$$

بنابراین فرکانس پایه این سیگنال $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \pi$ است و داریم:

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_k = 0 \qquad k \neq 3 \\ a_{k+2} = a_k \end{cases}$$

در مورد این تابع ضرایب سری فوریه با دوره تناوب $N_0 = 2$ متناوب می‌باشند و اگر بخواهیم کلیه ضرایب سری فوریه غیرصفر آن را بنویسیم داریم:

$$\cdots = a_{-1} = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 1$$

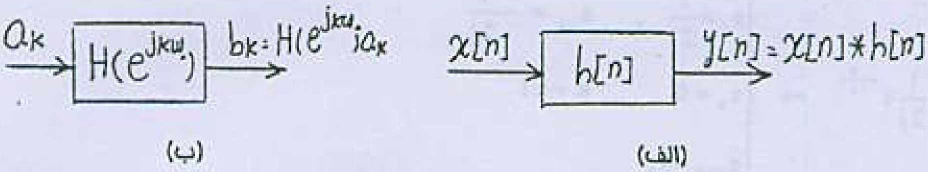
۱۲ ـ ۲ ـ کاربرد سری فوریه در تحلیل سیستم‌های گسسته در زمان LTI:

در بخش (۱۲ ـ ۱) به معرفی سری فوریه گسسته در زمان پرداختیم. در این بحث کاربرد سری فوریه گسسته در زمان در تحلیل سیستم‌های LTI بررسی می‌گردد.

فرض کنید یک سیستم LTI گسسته با پاسخ ضربه $h[n]$ مفروض است. به این سیستم ورودی متناوب $x[n]$ اعمال شده و هدف تعیین خروجی $y[n]$ است (شکل (۱۲ ـ ۲ ـ الف)). بدیهی است به دلیل LTI بودن سیستم، خروجی $y[n]$ نیز متناوب بوده و دوره تناوب اصلی آن برابر دوره تناوب اصلی ورودی است. برای تحلیل این سیستم توسط تحلیل سری فوریه، ابتدا سری فوریه گسسته $x[n]$ را نوشته و با استفاده از آن ضرایب سری فوریه خروجی را بدست می‌آوریم (شکل (۱۲ ـ ۲ ـ ب)).

$$x[n] = \sum_{k:\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad b_k = H\left(e^{jk\omega_0}\right)a_k$$

$$y[n] = \sum_{k:\langle N_0\rangle} b_k e^{jk\omega_0 n} \qquad H\left(e^{jk\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-jk\omega_0 n}$$



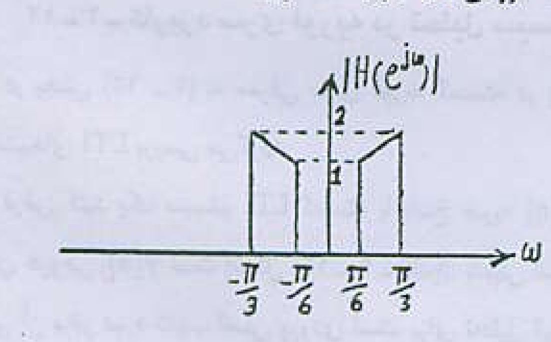
شکل ۱۲ ـ ۲ ـ (الف) رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم LTI گسسته در حوزه زمان (ب) رابطه بین ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی

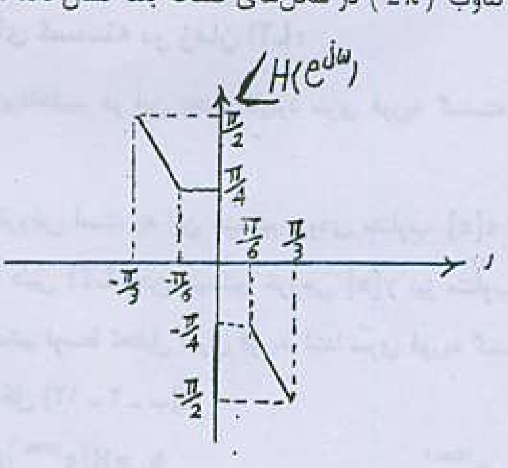
بنابراین با داشتن ورودی و پاسخ ضربه یک سیستم می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. اما تعیین خروجی از روی ضرایب سری فوریه غیر از موارد خاص امکان‌پذیر نیست. لذا در مواقعی که خروجی $y[n]$ مورد نظر باشد، استفاده از سری فوریه (غیر از موارد خاص) مفید نیست. اما درصورتی که هدف تعیین ضرایب سری فوریه خروجی (دامنه هارمونیک‌ها) باشد، استفاده از سری فوریه مفید است.

تذکر: موارد خاصی که از روی ضرایب سری فوریه یک سیگنال می‌توان آن سیگنال را بدست آورد معمولاً مواقعی است که سیگنال یکی از سیگنال‌های جدول (۱۲ ـ ۱) باشد.

تذکر: در برخی مسائل به جای $h[n]$ یک سیستم، $H(e^{j\omega})$ داده می‌شود. این تابع که پاسخ فرکانسی سیستم نام دارد، در بخش‌های آتی معرفی خواهد شد. بدیهی است برای تعیین $H(e^{jk\omega_0})$ از روی $H(e^{j\omega})$، باید مقادیر $H(e^{j\omega})$ را در مضارب صحیح ω_0 محاسبه کرد. بدیهی است $H(e^{j\omega})$ یک تابع متناوب از ω با دوره تناوب 2π است.

مثال: فرض کنید $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-8k]$ به یک سیستم با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ اعمال می‌شود. پاسخ دامنه و فاز این سیستم روی یک دوره تناوب (2π) در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده‌اند. خروجی $y[n]$ را بدست آورید.





حل :

دوره تناوب سیگنال $x[n]$ برابر $N_0 = 8$ است. لذا ضرایب سری فوریه این سیگنال $a_k = \frac{1}{8}$ با فرکانس پایه $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{\pi}{4}$ می‌باشند.

با توجه به پاسخ فرکانسی سیستم ملاحظه می‌شود فقط هارمونیک‌ها به ازاء $k = \pm 1$ از سیستم عبور می‌کنند. در نتیجه اگر ضرایب سری فوریه خروجی را $y[n]$ بنامیم، داریم:

$$b_1 = a_1 H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \rightarrow \begin{cases} |b_1| = |a_1|\left|H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\right| = \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \\ \angle b_1 = \angle a_1 + \angle H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = 0 - \frac{3\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

$$b_{-1} = a_{-1} H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) \rightarrow \begin{cases} |b_{-1}| = |a_{-1}|\left|H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\right| = \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \\ \angle b_{-1} = \angle a_{-1} + \angle H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) = 0 + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

$b_k = 0 \qquad k \neq \pm 1$ به ازاء $\qquad , \qquad b_{k+8} = b_k$

بنابراین داریم:

$$y[n] = b_1 e^{j\frac{\pi}{4}n} + b_{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \frac{3}{16} e^{j\frac{\pi}{4}n - j\frac{3\pi}{8}} + \frac{3}{16} e^{-j\frac{\pi}{4}n + j\frac{3\pi}{8}} = \frac{3}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{3\pi}{8}\right)$$

تذکر: دقت کنید $H(e^{j\omega})$ یک تابع متناوب از ω با دوره تناوب 2π است. در مثال اخیر و برخی مسائل و مثال‌های آتی ممکن است فقط یک دوره تناوب آن نشان داده شود.

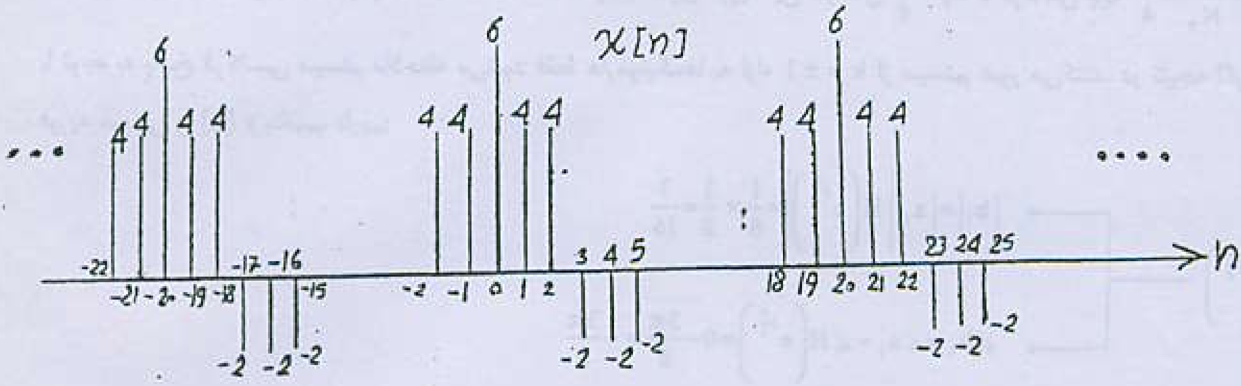
۱۲ـ۳ـ خواص سری فوریه گسسته در زمان

نمایش سری فوری گسسته خواص مهمی دارد که علاوه بر آن که مفهوم آن را بارزتر می‌کند، برای تعیین ضرایب سری فوریه سیگنال‌های پیچیده‌تر مفید می‌باشد. این خواص در جدول (۱۲ـ۲) آورده شده‌اند و در ادامه بررسی خواهند گردید. فراگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر می‌باشد.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه ضرایب سری فوریه گسسته از جمع استفاده می‌شود، بنابراین ضرایب سری فوریه گسسته خاصیت خطی دارند.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی روی محور زمان جابجا گردیده و تبدیل به $x[n - n_0]$ گردد، آنگاه ضرایب سری فوریه سیگنال جدید $e^{-jk\omega_0 n_0}$ برابر می‌شوند. در نتیجه تأخیر در یک سیگنال گسسته در زمان به اندازه n_0 نمونه، دامنه ضرایب سری فوریه را تغییر نداده و فقط فاز آن‌ها را به اندازه $-k\omega_0 n_0$ تغییر می‌دهد.

مثال : با استفاده از جدول (۱۲ـ۱) و خواص خطی و جابجایی زمانی، ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



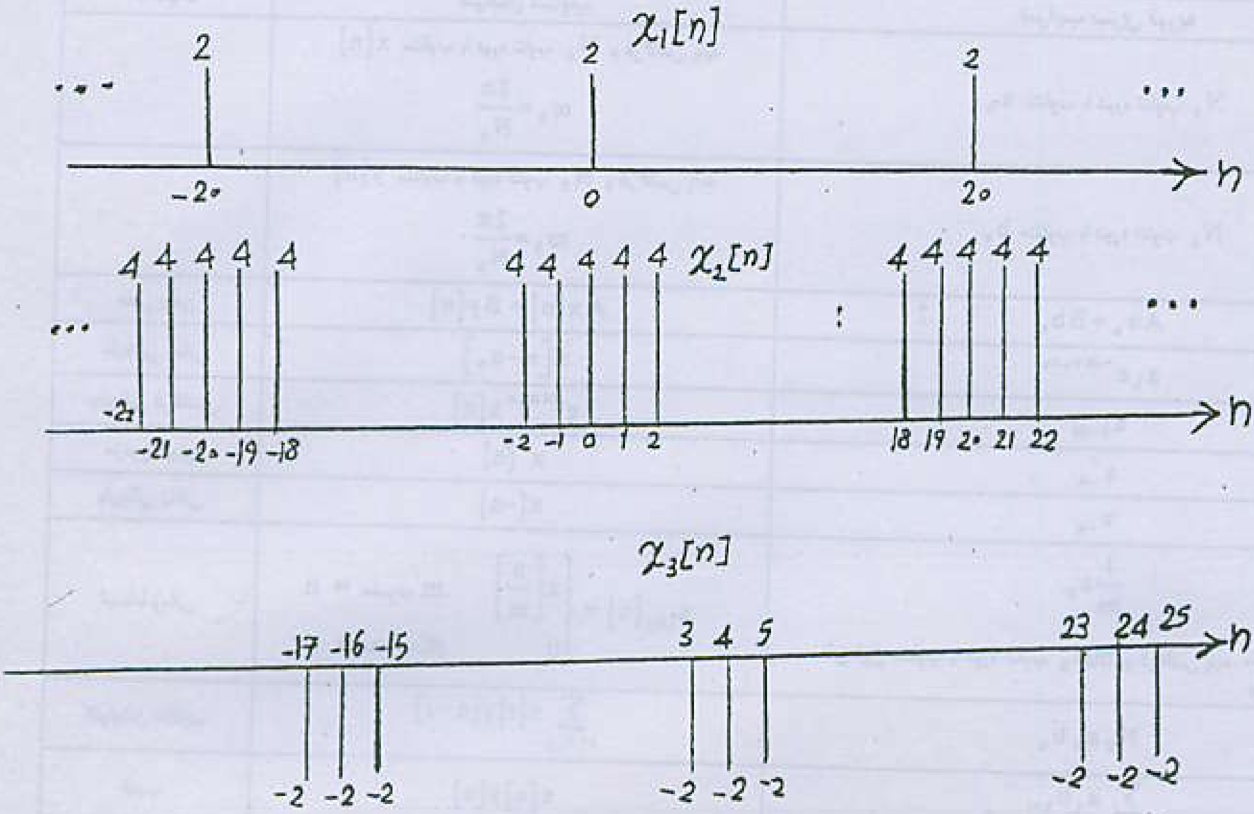
حل :

سیگنال متناوب $x[n]$ را می‌توان به صورت مجموع سیگنال‌های متناوب ساده‌تر که ضرایب سری فوریه آن‌ها در جدول (۱۲ـ۱) موجود است، تجزیه کرد.این کار را می‌توان به چندین روش مختلف انجام داد. به عنوان مثال سیگنال فوق مجموع سیگنال‌های $x_1[n]$، $x_2[n]$ و $x_3[n]$ می‌باشد:

خاصیت	سیگنال متناوب	ضرایب سری فوریه
	$x[n]$ متناوب با دوره تناوب N_0 و فرکانس پایه $\omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$	a_k متناوب با دوره تناوب N_0
	$y[n]$ متناوب با دوره تناوب N_0 و فرکانس پایه $\omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$	b_k متناوب با دوره تناوب N_0
خطی بودن	$Ax[n]+By[n]$	Aa_k+Bb_k
جابجایی زمانی	$x[n-n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$
جابجایی فرکانسی	$e^{jM\omega_0 n}x[n]$	a_{k-M}
مزدوج گیری	$x^*[n]$	a^*_{-k}
وارونگی زمانی	$x[-n]$	a_{-k}
انبساط زمانی	$x_{(m)}[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n = \text{مضرب } m \\ 0 & n \neq \text{مضرب } m \end{cases}$	$\frac{1}{m}a_k$ تابع فوق متناوب با دوره تناوب mN_0 و فرکانس پایه $\frac{2\pi}{mN_0}$ است.
کانولوشن متناوب	$\sum_{r:\langle N_0\rangle} x[r]y[n-r]$	$N_0 a_k b_k$
ضرب	$x[n]y[n]$	$\sum_{l:\langle N_0\rangle} a_l b_{k-l}$
تفاضل اول	$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{-jk\omega_0}\right)a_k$
جمع انباره‌ای	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ $x[n]$ فاقد مؤلفه DC $(a_0=0)$	$\frac{a_k}{1-e^{-jk\omega_0}}$
تقارن سیگنال‌های حقیقی	$x[n]=x^*[n]$ ($x[n]$ حقیقی)	$a_k=a^*_{-k}$ $\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{Re}\{a_{-k}\}$ $\quad$ $\lvert a_k\rvert=\lvert a_{-k}\rvert$ $\mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$ $\quad$ $\angle a_k=-\angle a_{-k}$
تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج	$x[n]=x^*[n]=x[-n]$ ($x[n]$ حقیقی و زوج)	$a_k=a^*_k=a_{-k}$ (a_k حقیقی و زوج)
تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد	$x[n]=x^*[n]=-x[-n]$ ($x[n]$ حقیقی و فرد)	$a_k=-a^*_k=-a_{-k}$ (a_k موهومی و فرد)
تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی	$x[n]$ حقیقی و $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$	$a_k=\mathrm{Re}\{a_k\}+j\mathrm{Im}\{a_k\}=\mathrm{ev}\{a_k\}+\mathrm{odd}\{a_k\}$ ضرایب سری فوریه $x_e[n]$ برابر است با: $\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{ev}\{a_k\}$ ضرایب سری فوریه $x_o[n]$ برابر است با: $j\mathrm{Im}\{a_k\}=\mathrm{odd}\{a_k\}$

رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب	مجموع نمونه‌های سیگنال	مجموع ضرایب سری فوریه	ضریب $\frac{N_0}{2}$ به ازاء N_0 زوج
$\frac{1}{N_0}\sum_{k:\langle N_0\rangle}\lvert x[n]\rvert^2=\sum_{k:\langle N_0\rangle}\lvert a_k\rvert^2$	$a_0=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}x[n]$	$x[0]=\sum_{k:\langle N_0\rangle}a_k$	$a_{\frac{N_0}{2}}=\frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}(-1)^n x[n]$

جدول ۱۲ ـ ۲ ـ خواص سری فوریه گسسته در زمان



ضرایب سری فوریه هر سه سیگنال را می‌توان از جدول (۱۲ـ۱) و خواص خطی و جابجائی زمانی بدست آورد:

$$x_1[n] \xrightarrow{F.S} a_k = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$ به ازاء تمام k ها

$$x_2[n] \xrightarrow{F.S} b_k = 4\frac{\sin\left[\frac{2k\pi\left(2+\frac{1}{2}\right)}{20}\right]}{20\sin\left[\frac{2k\pi}{40}\right]} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{5\sin\left(\frac{k\pi}{20}\right)}$$

$$x_3[n] \xrightarrow{F.S} c_k = -2\frac{\sin\left[\frac{2k\pi\left(1+\frac{1}{2}\right)}{20}\right]}{20\sin\left[\frac{2k\pi}{40}\right]} e^{-jk\frac{2\pi}{20}\times 4} = \frac{\sin\left(\frac{3k\pi}{20}\right)}{-10\sin\left(\frac{k\pi}{20}\right)} e^{-j\frac{2k\pi}{5}}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه $x[n]$ برابر است با:

$$x[n] \xrightarrow{F.S} d_k = a_k + b_k + c_k$$

(۳) جابجایی فرکانسی: این خاصیت مشابه خاصیت جابجایی زمانی است. یعنی اگر ضرایب سری فوریه روی محور فرکانس جابجا شده و تبدیل به a_{k-M} گردند، آنگاه سیگنال زمانی در $e^{jM\omega_0 n}$ ضرب می‌شود. در نتیجه با ضرب یک سیگنال در $e^{jM\omega_0 n}$، می‌توان ضرایب سری فوریه آن را جابجا و سیگنال را مدوله کرد.

تذکر: با توجه به رابطه $(-1)^n = e^{j\pi n} = e^{j\frac{N_0}{2}\omega_0 n}$ نتیجه می‌گیریم با ضرب $(-1)^n$ در یک سیگنال گسسته در زمان، ضرایب سری فوریه آن $\frac{N_0}{2}$ جابجا می‌شوند. یعنی ضرایب سری فوریه سیگنال $(-1)^n x[n]$ برابر $a_{k-\frac{N_0}{2}}$ است.

(۴) مزدوج‌گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، ضرایب سری فوریه آن به a^*_{-k} تبدیل می‌شوند. یعنی علاوه بر مزدوج شدن، نسبت به محور عمودی نیز قرینه می‌شوند.

(۵) وارونگی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز قرینه می‌شوند.

(۶) انبساط زمانی: اگر سیگنال گسسته در زمان در حوزه زمان گسترده شود، تعدادی صفر بین نمونه‌ها اضافه می‌شوند. لذا در این حالت می‌توان ضرایب سری فوریه سیگنال منبسط شده را به ضرایب سری فوریه سیگنال اصلی ارتباط داد. از جدول (۱۲ـ۲) ملاحظه می‌شود اگر سیگنال با ضریب m منبسط شود، ضرایب سری فوریه آن $\frac{1}{m}a_k$ می‌شوند. دقت کنید دوره تناوب سیگنال منبسط شده mN_0 و فرکانس پایه آن $\frac{2\pi}{mN_0}$ می‌شود.

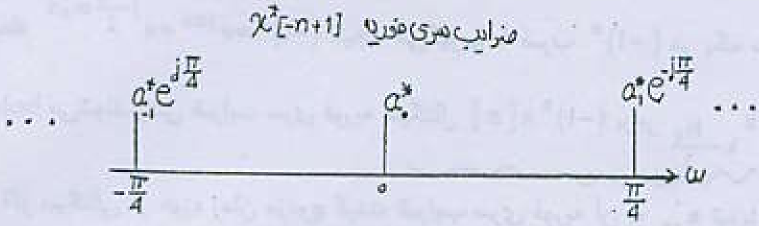
مثال: اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ را a_k و ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]=x^*[-n+1]+2x_{(3)}[n]$ را b_k بنامیم، ضرایب b_2 و b_3 را برحسب ضرایب a_k بدست آورید. دوره تناوب $x[n]$ را $N_0=8$ فرض کنید.

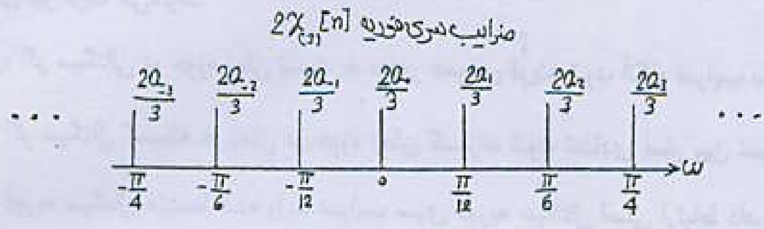
حل: فرکانس پایه سیگنال $x[n]$ برابر $\omega_0=\frac{2\pi}{N_0}=\frac{\pi}{4}$ می‌باشد. بنابراین $x_{(3)}[n]$ دارای ضرایب سری فوریه $\frac{1}{3}a_k$ و فرکانس پایه $\frac{\omega_0}{3}=\frac{\pi}{12}$ است. ضرایب سری فوریه $x[n+1]$ برابر $a_k e^{j\frac{k\pi}{4}}$ و در نتیجه ضرایب سری فوریه $x[-n+1]$ برابر $a_{-k}e^{-j\frac{k\pi}{4}}$ و در نهایت سری فوریه $x^*[-n+1]$ برابر $a^*_k e^{-j\frac{k\pi}{4}}$ می‌باشند (دقت کنید $e^{-j\frac{k\pi}{4}}$ پس از تبدیل k به k- و سپس مزدوج شدن تغییری نخواهد کرد). همچنین فرکانس پایه $x^*[-n+1]$ نسبت به فرکانس پایه $x[n]$ تغییر نکرده و $\omega_0=\frac{\pi}{4}$ است. با توجه به شکل‌های مربوط به ضرایب سری فوریه $2x_{(3)}[n]$ ، $x^*[-n+1]$ و $y[n]$ داریم:

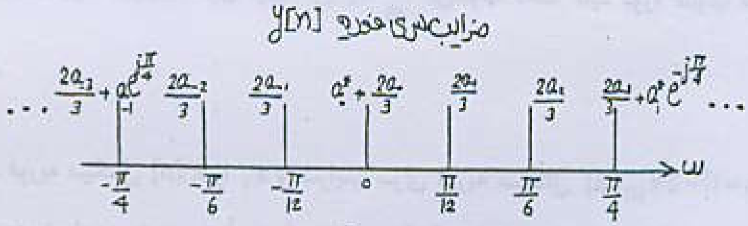
$$b_2=\frac{2a_2}{3}$$

$$b_3=\frac{2a_3}{3}+a_1^* e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

دقت کنید ضرایب سری فوریه سیگنال‌های $x[n]$ و $x^*[-n+1]$ متناوب با دوره تناوب $N_0=8$ و ضرایب سری فوریه سیگنال‌های $2x_{(3)}[n]$ و $y[n]$ متناوب با دوره تناوب $3N_0=24$ می‌باشند.







(۷) کانولوشن متناوب: اگر دو سیگنال گسسته متناوب در حوزه زمان به طور متناوب کانولو شوند، ضرایب سری فوریه آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند و N_0 برابر می‌گردند.

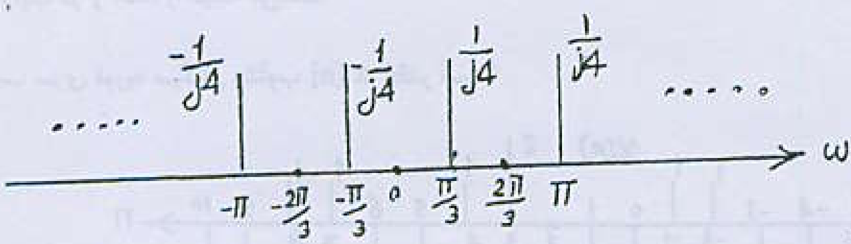
(۸) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، آنگاه ضرایب سری فوریه آن‌ها بطور متناوب با یکدیگر کانولو می‌شوند.

مثال : ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ را از دو روش (۱) مستقیم و (۲) استفاده از خاصیت ضرب در حوزه زمان بدست آورید.

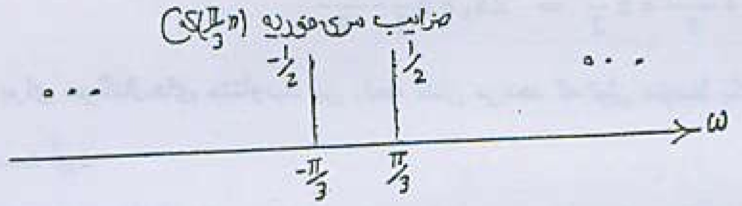
حل : (۱) در روش مستقیم حاصلضرب دو تابع سینوسی و کسینوسی را به حاصل جمع تبدیل کرده و سپس ضرایب سری فوریه هر کدام از جمله‌ها را به دست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$x[n]=\frac{1}{2}\sin(\pi n)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

دوره تناوب این سیگنال $N_0 = 6$ و فرکانس پایه آن $\frac{\pi}{3}$ است. با توجه به جدول (۱۲-۱) می‌توان ضرایب سری فوریه این سیگنال را به صورت زیر نشان داد:



(۲) ضرایب سری فوریه سیگنال‌های $\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:



ضرب دو سیگنال فوق باعث کانوالو شدن ضرایب سری فوریه آن‌ها می‌شود که با کانوالو کردن دو شکل فوق به نتیجه یکسان با بند (۱) می‌رسیم.

(۹) تفاضل اول: در سیگنال‌های گسسته در زمان، تفاضل اول جایگزین مشتق در سیگنال‌های پیوسته در زمان می‌باشد. اگر از سیگنالی تفاضل اول گرفته شود، ضرایب سری فوریه آن در $\left(1-e^{-jk\omega_0}\right)$ ضرب می‌شوند.

(۱۰) جمع انباره‌ای: در سیگنال‌های گسسته در زمان، جمع انباره‌ای جایگزین انتگرال در سیگنال‌های پیوسته در زمان می‌باشد. اگر جمع انباره‌ای سیگنالی که فاقد DC است محاسبه گردد، سیگنال حاصل متناوب است و ضرایب سری فوریه آن $\frac{1}{1-e^{-jk\omega_0}}$ برابر می‌شوند.

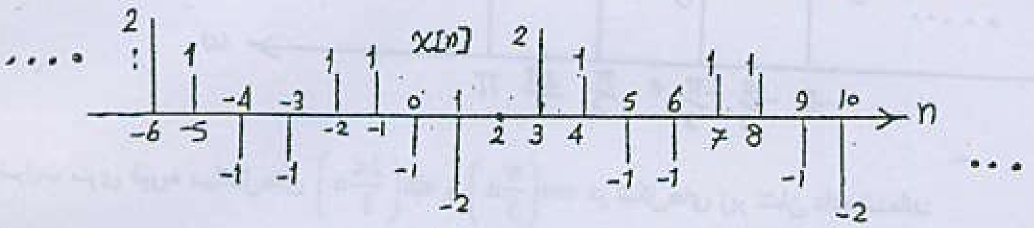
(۱۱) تقارن سیگنال‌های حقیقی: ضرایب سری فوریه سیگنال‌های گسسته حقیقی مانند سیگنال‌های پیوسته در زمان تقارن مزدوج (هرمیتی) دارند. در این تقارن $a_k = a_{-k}^*$ می‌باشد. یعنی اگر ضرایب سری فوریه را قرینه کنیم، با مزدوج ضرایب برابر می‌شوند. این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی ضرایب سری فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی ضرایب سری فوریه تقارن فرد پیدا کنند.

(۱۲) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز حقیقی و زوج می‌شوند.

(۱۳) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنالی حقیقی و فرد باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن موهومی و فرد می‌شوند.

(۱۴) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: قسمت زوج یک سیگنال حقیقی، قسمت زوج ضرایب سری فوریه که برابر با قسمت حقیقی این ضرایب است را نتیجه می‌دهد. قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد ضرایب سری فوریه که برابر با حاصلضرب قسمت موهومی این ضرایب در j است را نتیجه می‌دهد.

مثال : فاز ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x[n]$ چقدر است؟



با توجه به شکل سیگنال $x[n]$ ملاحظه می‌کنیم که سیگنال $x[n+2]$ فرد است. بنابراین ضرایب سری فوریه $x[n+2]$ موهومی و فرد است و فاز آن‌ها برابر $\pm\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. اما اگر ضرایب سری فوریه $x[n]$ را a_k بنامیم ضرایب سری فوریه $x[n+2]$ برابر $e^{j2k\omega_0}a_k$ است. با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم $N_0=9$ و $\omega_0=\frac{2\pi}{9}$. در نتیجه ضرایب سری فوریه $x[n+2]$ برابر $e^{j\frac{4k\pi}{9}}a_k$ می‌باشند و داریم:

$$\angle\left(a_k e^{j\frac{4k\pi}{9}}\right)=\pm\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \angle a_k+\frac{4k\pi}{9}=\pm\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \angle a_k=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{4k\pi}{9}$$

(۱۵) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب: این رابطه نشان می‌دهد که توان متوسط یک سیگنال متناوب را می‌توان از روی ضرایب سری فوریه آن بدست آورد.

(۱۶) مجموعه نمونه‌های یک سیگنال: اگر در رابطه محاسبه ضرایب سری فوریه یک سیگنال گسسته k را صفر قرار دهیم ملاحظه خواهیم کرد که جمع نمونه‌های یک سیگنال متناوب گسسته روی یک دوره تناوب آن $N_0\,a_0$ است.

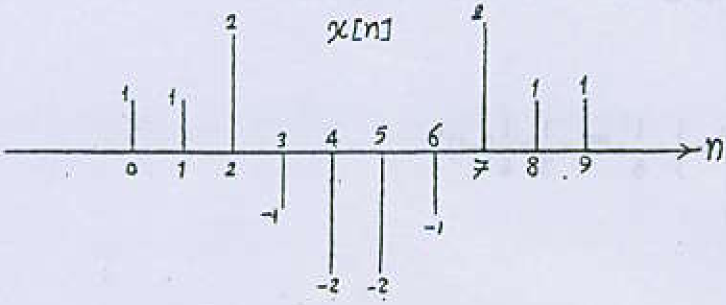
(۱۷) مجموع ضرایب سری فوریه: اگر در رابطه سری فوریه یک سیگنال گسسته n را صفر قرار دهیم ملاحظه خواهیم کرد که مجموع ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب گسسته روی یک دوره تناوب آن $x[0]$ است.

(۱۸) ضریب $\frac{N_0}{2}$ به ازاء N_0 زوج: اگر در رابطه محاسبه ضرایب سری فوریه یک سیگنال گسسته k را $\frac{N_0}{2}$ قرار دهیم و N_0 زوج باشد، آنگاه ملاحظه خواهیم کرد که مجموع نمونه‌های قرار گرفته در زمان‌های زوج منهای مجموع نمونه‌های قرار گرفته در زمان‌های فرد یک سیگنال روی یک دوره تناوب آن برابر $N_0\,a_{\frac{N_0}{2}}$ است.

مثال: یک سیگنال گسسته در زمان متناوب با دوره تناوب $N_0 = 10$ که روی یک دوره تناوب خود به شکل زیر است را در نظر بگیرید. اگر ضرایب سری فوریه این سیگنال را با a_k نشان دهیم، مطلوبست تعیین:

(۱) a_0 (۲) $\sum_{k=0}^{9} a_k$ (۳) $\sum_{k=-35}^{-25} a_k$

(۴) $\sum_{k=-3}^{+3} a_{10k+5}$ (۵) $\sum_{k=-6}^{3} |a_k|^2$



$$a_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle} x[n] = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} x[n] = \frac{1}{5} \qquad (۱)$$

$$\sum_{k=0}^{9} a_k = x[0] = 1 \qquad (۲)$$

$$\sum_{k=-35}^{-25} a_k = \sum_{k=-5}^{+5} a_k = \sum_{k=-5}^{+4} a_k + a_5 = x[0] + \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}(-1)^n x[n] = 1 + 0 = 1 \qquad (۳)$$

$$\sum_{k=-3}^{+3} a_{10k+5} = 7a_5 = \frac{7}{10}\sum_{n=0}^{9}(-1)^n x[n] = 0 \qquad (۴)$$

$$\sum_{k=-6}^{3} |a_k|^2 = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = \frac{1}{10}(1+1+4+1+4+4+1+4+1+1) = \frac{11}{5} \qquad (۵)$$

مثال: فرض کنید اطلاعات زیر در مورد سیگنال گسسته $x[n]$ داده شده است:

(۱) $x[n]$ با دوره تناوب 6 متناوب است.

(۲) $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$

(۳) $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$

(۴) در میان تمام سیگنال‌هایی که سه شرط بالا را دارند، $x[n]$ حداقل توان متوسط را داراست.

با توجه به اطلاعات فوق سیگنال $x[n]$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم که سیگنال $x[n]$ دارای شش ضریب سری فوریه است که با دوره تناوب $N_0 = 6$ تکرار می‌شوند.

با توجه به (۲) داریم:

$$\sum_{n=0}^{5} x[n] = 6a_0 = 2 \ \Rightarrow\ a_0 = \frac{1}{3}$$

با توجه به (۳) داریم:

$$\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n]=6a_3=1 \quad\Rightarrow\quad a_3=\frac{1}{6}$$

با توجه به آنکه طبق رابطه پارسوال توان متوسط سیگنال فوق از رابطه:

$$P=\sum_{k=0}^{5}\left|a_k\right|^2$$

بدست می‌آید و طبق (۴) سیگنال $x[n]$ باید حداقل توان متوسط را داشته باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$a_1=a_2=a_4=a_5=0$$

بنابراین داریم:

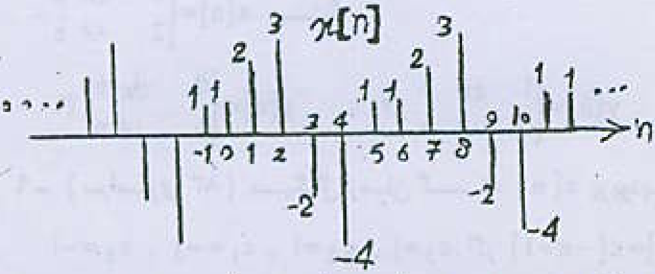
$$x[n]=a_0+a_3e^{j3\omega_0 n}=a_0+a_3e^{j3\frac{2\pi}{6}n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{j\pi n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-1)^n$$

خودآزمائی ششم

۱ـ (آزاد ۷۹) سیگنال زمان گسسته پریودیک $x[n]=\{\dots,2,1,0,2,1,0,2,1,0,2,1,0,\dots\}$ که در آن نمونه صفرم سیگنال $x[0]=2$ می‌باشد را در نظر بگیرید. ضریب $e^{j\frac{2\pi}{3}n}$ در بسط به سری فوریه این سیگنال چیست؟

۱) $-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۴) $\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲ـ (سراسری ۸۲) برای سیگنال گسسته و متناوب $x[n]$ در شکل زیر با ضرایب سری فوریه a_k، مقدار $\sum_{k=-3}^{3} a_k$ کدام است؟



۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۳ـ $x[n]$ یک سیگنال متناوب با تناوب $N=8$ و ضرایب سری فوریه $a_k=-a_{k-4}$ است. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)x[n-1]$ را b_k بنامیم، کدام رابطه درست است؟

۱) $b_k=a_k e^{-jk\frac{\pi}{4}}$ ۲) $b_k=2a_k e^{-jk\frac{\pi}{4}}$ ۳) $b_k=4a_k$ ۴) $b_k=0$

۴ـ (آزاد ۸۱) اگر $x[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right)$ و $y[n]=1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)$، ضرایب غیرصفر سری فوریه سیگنال $x[n]\,y[n]$ کدام گزینه خواهد بود؟ (C_k ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]\,.\,y[n]$ است)

۱) $\{C_0, C_{\pm1}, C_{\pm2}\}$ ۲) $\{C_0, C_{\pm1}\}$ ۳) $\{C_{\pm2}, C_{\pm1}\}$ ۴) $\{C_0, C_{\pm2}\}$

۵ـ (آزاد ۸۰) اگر ضرایب سری فوریه سیگنال گسسته و متناوب $x[n]$ را a_k و ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]=-x[n-3]$ را b_k بنامیم، رابطه بین a_k و b_k کدام است؟ (دوره تناوب هر دو سیگنال N_0 است)

۱) $b_k=-e^{-jk\frac{6\pi}{N_0}}a_{-k}$ ۲) $b_k=-e^{-jk\frac{6\pi}{N_0}}a_k$ ۳) $b_k=-e^{jk\frac{6\pi}{N_0}}a_{-k}$ ۴) $b_k=-e^{jk\frac{6\pi}{N_0}}a_k$

۶ـ (سراسری ۸۱) کدام گزینه بیان‌کننده ضرایب سری فوریه برای سیگنال گسسته $x[n]=\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ می‌باشد؟

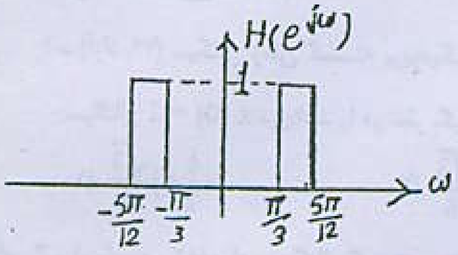
۱) $a_{11}=-\frac{1}{2j}$ ، $a_7=\frac{1}{2j}$ ، $a_5=+\frac{1}{4j}$ ، $a_1=-\frac{1}{4j}$

۲) $a_{11}=-\frac{1}{4j}$ ، $a_7=\frac{1}{4j}$ ، $a_5=-\frac{1}{4j}$ ، $a_1=\frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۳) $a_{11}=-\frac{1}{2j}$ ، $a_7=\frac{1}{2j}$ ، $a_5=-\frac{1}{2j}$ ، $a_1=\frac{1}{2j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۴) $a_{11}=\frac{1}{4j}$ ، $a_7=-\frac{1}{4j}$ ، $a_5=\frac{1}{4j}$ ، $a_1=-\frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۷ـ (آزاد ۸۱) اگر $x[n]$ سیگنال متناوب $1+\sin\left(\frac{3\pi n}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$ باشد، فیلتر شده $x[n]$ با فیلتر $H(e^{j\omega})$ کدام است؟



۱) $1+\sin\left(\frac{3\pi n}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$ ۲) صفر

۳) $\sin\left(\frac{3\pi n}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$ ۴) $1+\cos\left(\frac{3\pi n}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$

مهم ۸ـ (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI به صورت $H(f)=|\sin(\pi f)|$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=\begin{cases}0 & n\ \text{زوج}\\ 2 & n\ \text{فرد}\end{cases}$ چیست؟

۱) $y[n]=\begin{cases}0 & n\ \text{زوج}\\ 1 & n\ \text{فرد}\end{cases}$ ۲) $y[n]=\begin{cases}1 & n\ \text{زوج}\\ 0 & n\ \text{فرد}\end{cases}$ ۳) $y[n]=-(-1)^n$ ۴) $y[n]=(-1)^n$

۹ـ (سراسری ۸۳) سیگنال زمان گسسته $x[n]$ پریودیک با پریود $N_0=4$ است. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از $c_0=-1$, $c_1=-j$, $c_2=1$, $c_3=j$. اگر $y[n]=x[-n+1]$ باشد و ضرایب سری فوریه آن را با d_3, d_2, d_1, d_0 نشان دهیم، d_2 چه خواهد بود؟

۱) -1 ۲) $-j$ ۳) 1 ۴) j

۱۰ـ (سراسری ۸۴) ضرایب سری فوریه دنباله متناوب $x[n]$ دارای دوره تناوب N (زوج) را با $X[k]$ نمایش می‌دهیم. در آن صورت ضرایب سری فوریه دنباله $(-1)^n x[n]$ برابرند با:

۱) $X[-k]$ ۲) $-X[k]$ ۳) $X\left[k-\frac{N}{2}\right]$ ۴) $-X\left[k+\frac{N}{2}\right]$

۱۳ـ تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه گسسته در زمان)

در بخش قبل سری فوریه گسسته در زمان معرفی و بررسی گردید و ملاحظه کردید عمده‌ترین تفاوت‌های سری فوریه گسسته در زمان نسبت به سری فوریه پیوسته در زمان محدود بودن ابعاد سری به واسطه محدود بودن تعداد هارمونیک‌ها و متناوب بودن ضرایب سری فوریه می‌باشند. اما اکثر روابط بین سری فوریه گسسته و پیوسته شبیه یکدیگر هستند. در این بخش به معرفی تبدیل فوریه گسسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های گسسته در زمان پرداخته و خواص آن معرفی و بررسی می‌گردند. ملاحظه خواهید کرد که این تبدیل نیز نسبت به تبدیل فوریه پیوسته در زمان تفاوت‌ها و شباهت‌هایی دارد.

۱۳ـ۱ـ تبدیل فوریه گسسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LTI

تعریف: سیگنال نامتناوب $x[n]$ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه گسسته در زمان این سیگنال را با $X(e^{j\omega})$ نشان می‌دهند و رابطه آن به صورت زیر است:

رابطه تبدیل فوریه:
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

رابطه عکس تبدیل فوریه :
$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

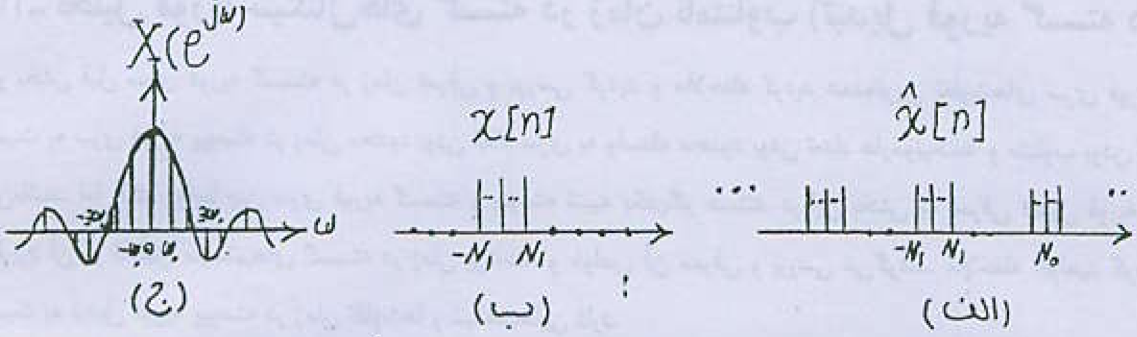
تذکر: با توجه به تعریف $X(e^{j\omega})$ ملاحظه می‌کنید روابط تبدیل فوریه گسسته شباهت زیادی به روابط تبدیل فوریه پیوسته دارند. تفاوت‌های عمده این دو تبدیل، متناوب بودن $X(e^{j\omega})$ و محدود بودن فاصله انتگرال‌گیری در رابطه عکس تبدیل فوریه می‌باشند. این دو تفاوت ناشی از این واقعیت است که سیگنال $e^{j\omega}$ یک سیگنال متناوب از ω با دوره تناوب 2π است و در نتیجه $X(e^{j\omega})$ نیز یک سیگنال متناوب از ω با دوره تناوب 2π می‌شود و در نتیجه در رابطه عکس تبدیل فوریه حدود انتگرال محدود به بازه 2π می‌شود.

تذکر: اگر $\tilde{x}[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب N_0، فرکانس پایه ω_0 و ضرایب سری فوریه a_k باشد، آنگاه a_k را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\boxed{a_k=\frac{1}{N_0}X(e^{jk\omega_0})}$$

در رابطه فوق $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ می‌باشد. $x[n]$ سیگنال نامتناوبی است که مشابه یکی از دوره‌های تناوب $\tilde{x}[n]$ است. در واقع ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ با نمونه‌برداری فرکانسی از تبدیل فوریه $x[n]$ به ازاء فرکانس‌های مضارب صحیح ω_0 بدست می‌آیند.

شکل (۱۳ـ۱) این ارتباط را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳ـ۱ـ (الف) یک سیگنال متناوب فرضی (ب) سیگنال نامتناوب مشابه یک دوره تناوب سیگنال بند (الف)
(ج) تبدیل فوریه فرضی سیگنال بند (ب) و نحوه بدست آوردن ضرایب سری فوریه سیگنال بند (الف)

تذکر: دقت کنید تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته (که در برخی مواقع طیف سیگنال نامیده می‌شود) در حالت کلی یک تابع مختلط است. لذا معمولاً دامنه و فاز آن جداگانه تعیین و رسم می‌گردند که به ترتیب طیف دامنه و طیف فاز نام دارند.

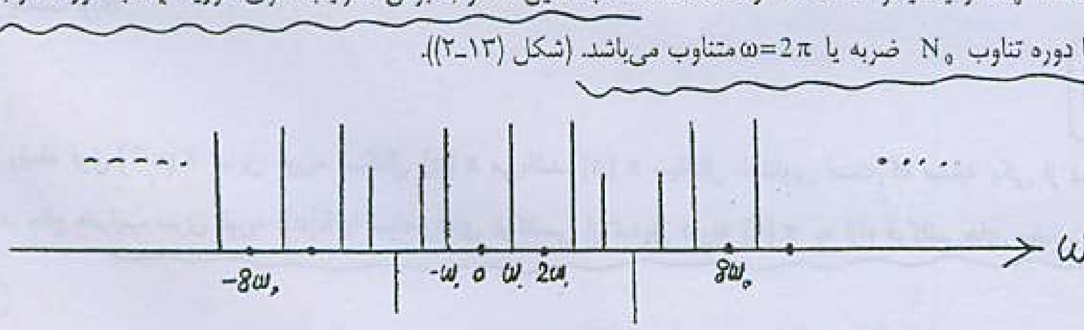
تذکر: با توجه به تعریف تبدیل فوریه، ملاحظه می‌شود که $X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$ می‌باشد. این رابطه در واقع مقدار DC یک سیگنال نامتناوب گسسته را نشان می‌دهد.

که مقدار DC یک سیگنال نامتناوب گسسته

تذکر: (تبدیل فوریه گسسته سیگنال‌های متناوب) اگر $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی N_0، فرکانس پایه ω_0 و ضرایب سری فوریه a_k باشد، آنگاه می‌توان نشان داد تبدیل فوریه گسسته آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

به عبارت دیگر مانند سیگنال‌های متناوب پیوسته در زمان، در سیگنال‌های متناوب گسسته در زمان نیز تبدیل فوریه قطاری از ضربه‌هایی به فاصله ω_0 از یکدیگر است. اما در حالت گسسته به دلیل متناوب بودن ضرایب سری فوریه a_k با دوره تناوب N_0، قطار ضربه فوق نیز با دوره تناوب N_0 ضربه یا $\omega=2\pi$ متناوب می‌باشد. (شکل (۱۳ـ۲)).



شکل ۱۳ـ۲ـ تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته متناوب فرضی با دوره تناوب $N_0 = 8$

تذکر: دانستن تبدیل فوریه گسسته برخی سیگنال‌های مهم مفید می‌باشد و به خاطر سپردن آن‌ها به دانشجویان توصیه می‌شود. جدول (۱۳ـ۱) برخی از این زوج‌های فوریه را نشان می‌دهد. دقت کنید اکثر فرمول‌ها در جدول فوق مشابه تبدیل فوریه پیوسته در زمان می‌باشند. با این تفاوت که کلیه تبدیل فوریه‌های گسسته در زمان متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشند.

همگرایی تبدیل فوریه گسسته در زمان: با توجه به آن که در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته حدود سیگما نامحدود می‌باشد، لذا امکان واگرا شدن سری وجود دارد. بدین منظور بررسی شرایطی که $x[n]$ باید داشته باشد تا سری فوق همگرا شود، ضروری به نظر می‌رسد. شرایط فوق مانند حالت پیوسته در زمان می‌باشد و در کتب ریاضی آورده شده است. اما انتگرال به جمع تبدیل می‌شود. یعنی اگر $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

یا انرژی سیگنال فوق محدود باشد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

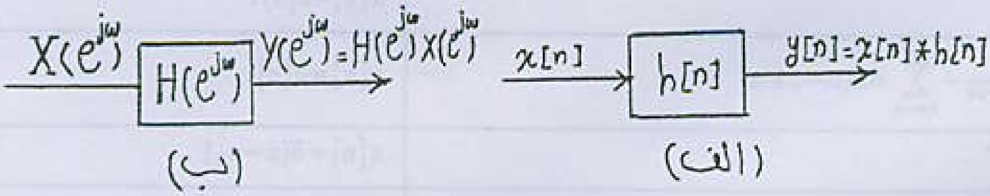
آنگاه همگرائی جمع در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته تضمین می‌شود.

۱۳ ـ ۲ ـ کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم‌های گسسته در زمان LTI :

در بخش قبل ملاحظه کردید سری فوریه ابزار مناسبی جهت تعیین خروجی یک سیستم LTI نیست و با استفاده از آن فقط می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. در این بخش خواهیم دید که تبدیل فوریه گسسته یک روش مناسب و ساده جهت تعیین خروجی سیستم‌های LTI می‌دهد.

تعیین خروجی یک سیستم LTI گسسته در زمان از روی ورودی و با استفاده از تبدیل فوریه گسسته در زمان بر اساس خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه گسسته می‌باشد. بر مبنای این خاصیت، تبدیل فوریه کانوالو دو سیگنال گسسته در زمان برابر حاصلضرب تبدیل فوریه آن‌ها می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل(۱۳ـ۳) داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n] \quad \Rightarrow \quad Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$



شکل ۱۳ـ۳ـ (الف) رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم LTI گسسته در حوزه زمان (ب) رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی

تبدیل فوریه	سیگنال
$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$	$x[n]=e^{j\omega_0 n}$
$X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)+\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)\}$	$x[n]=\cos(\omega_0 n)$
$X(e^{j\omega})=\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)-\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)\}$	$x[n]=\sin(\omega_0 n)$
$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$	$x[n]=1$
$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{N}\right)$ مطابق جدول (۱۲-۱) a_k	موج مربعی متناوب $x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert\le N_1\\ 0 & N_1\le\lvert n\rvert\le\frac{N}{2}\end{cases}$ $x[n+N]=x[n]$
$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{N}\right)$	$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$
$X(e^{j\omega})=\frac{\sin\left[\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$	$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert\le N_1\\ 0 & \lvert n\rvert> N_1\end{cases}$
$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & 0\le\lvert\omega\rvert\le W\\ 0 & W<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$ $X(e^{j\omega})$ متناوب با دوره تناوب 2π	$x[n]=\frac{\sin(Wn)}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0<W<\pi$
$X(e^{j\omega})=1$	$x[n]=\delta[n]$
$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2k\pi)$	$x[n]=u[n]$
$X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}$	$x[n]=\delta[n-n_0]$
$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$	$x[n]=\alpha^n u[n]\quad \lvert\alpha\rvert<1$
$X(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$	$x[n]=(n+1)\alpha^n u[n]\quad \lvert\alpha\rvert<1$
$X(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^r}$	$x[n]=\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}\alpha^n u[n]\quad \lvert\alpha\rvert<1$

جدول ۱۳-۱ - تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

بنابراین تبدیل فوریه خروجی یک سیستم LTI گسسته در زمان برابر است باحاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه (پاسخ فرکانسی سیستم). برای تعیین خروجی سیستم باید عکس تبدیل فوریه آن را محاسبه کرد. معمولاً برای محاسبه عکس تبدیل فوریه از بسط یک کسر به کسرهای جزئی و خواص تبدیل فوریه استفاده می‌شود. بحث مربوط به بسط یک کسر به کسرهای جزئی را می‌توانید از کتب پایه ریاضی مطالعه نمائید. خواص تبدیل فوریه در ادامه معرفی و بررسی خواهند شد.

مثال: یک سیستم گسسته در زمان با پاسخ ضربه $h[n]=\alpha^n u[n]$ و با فرض $|\alpha|<1$ را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=\beta^n u[n]$ و با فرض $|\beta|<1$ را بدست آورید.

حل: مثال فوق را برای دو حالت $\alpha=\beta$ و $\alpha\neq\beta$ حل می‌کنیم.

(۱) $\alpha\neq\beta$: در این حالت با توجه به جدول (۱۳ـ۱) داریم:

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}=\frac{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}{1-\alpha e^{-j\omega}}+\frac{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow\quad y[n]=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n]+\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n]=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)u[n]$$

(۲) $\alpha=\beta$: در این حالت با توجه به جدول (۱۳ـ۱) داریم:

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}\quad\Rightarrow\quad y[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$$

تذکر: برای توابعی مانند $e^{j\omega_0 n}$، $\cos(\omega_0 n)$ و $\sin(\omega_0 n)$ که آن‌ها را می‌توان برحسب $e^{j\omega_0 n}$ نوشت و با توجه به آن که $e^{j\omega_0 n}$ یک تابع ویژه برای سیستم‌های LTI گسسته در زمان است، می‌توان خروجی سیستم را ساده‌تر بدست آورد. روابط زیر با توجه به این اصل بدست می‌آیند:

$$\text{if}\quad x[n]=e^{j\omega_0 n}\quad\Rightarrow\quad y[n]=\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{j\left(\omega_0 n+\angle H(e^{j\omega_0})\right)}$$

$$\text{if}\quad x[n]=\cos(\omega_0 n)\quad\Rightarrow\quad y[n]=\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\left(\omega_0 n+\angle H(e^{j\omega_0})\right)$$

$$\text{if}\quad x[n]=\sin(\omega_0 n)\quad\Rightarrow\quad y[n]=\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin\left(\omega_0 n+\angle H(e^{j\omega_0})\right)$$

در روابط فوق $H(e^{j\omega_0})$ معرف مقدار $H(e^{j\omega})$ در فرکانس $\omega=\omega_0$ است. دقت کنید پاسخ به‌دست آمده پاسخ در حالت دائم می‌باشد و با این روش نمی‌توان پاسخ گذرای سیستم را به‌دست آورد.

مثال: یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})=\frac{2}{(1-e^{-j\omega})(1-2e^{-j\omega})^2}$ را در نظر بگیرید. پاسخ حالت دائم این سیستم به ورودی $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ را بدست آورید.

حل :
$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{\left(1-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\left(1-2e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^2}=\frac{2}{(1+j)(1+j2)^2}=\frac{2}{(1+j)(-3+j4)}=\frac{2}{-7+j}=\frac{2}{7.07e^{j172^\circ}}=0.28e^{-j172^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$y[n]=0.28\sin\left(\frac{\pi}{2}n-172^\circ\right)$$

۱۳ ـ ۳ ـ خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

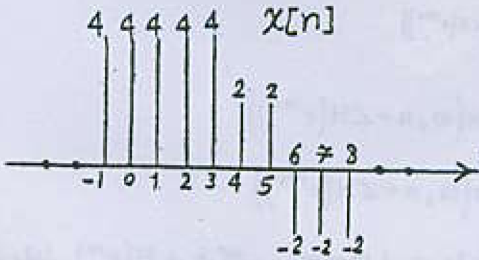
در این بخش به بررسی خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان می‌پردازیم. این خواص بینش زیادی نسبت به تبدیل فوریه گسسته و رابطه بین سیگنال در حوزه زمان و تبدیل فوریه آن می‌دهند. همچنین به کمک این خواص می‌توان پیچیدگی محاسبه تبدیل فوریه و معکوس آن را کاهش داد. خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان در جدول (۱۳ـ۲) آورده شده‌اند. با مقایسه جدول فوق و خواص تبدیل و سری فوریه پیوسته در زمان و سری فوریه گسسته در زمان می‌توان به شباهت‌ها و تفاوت‌های این خواص پی برد. فراگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر فراهم می‌کند.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته از اپراتور جمع استفاده می‌شود، بنابراین این تبدیل خاصیت خطی دارد.

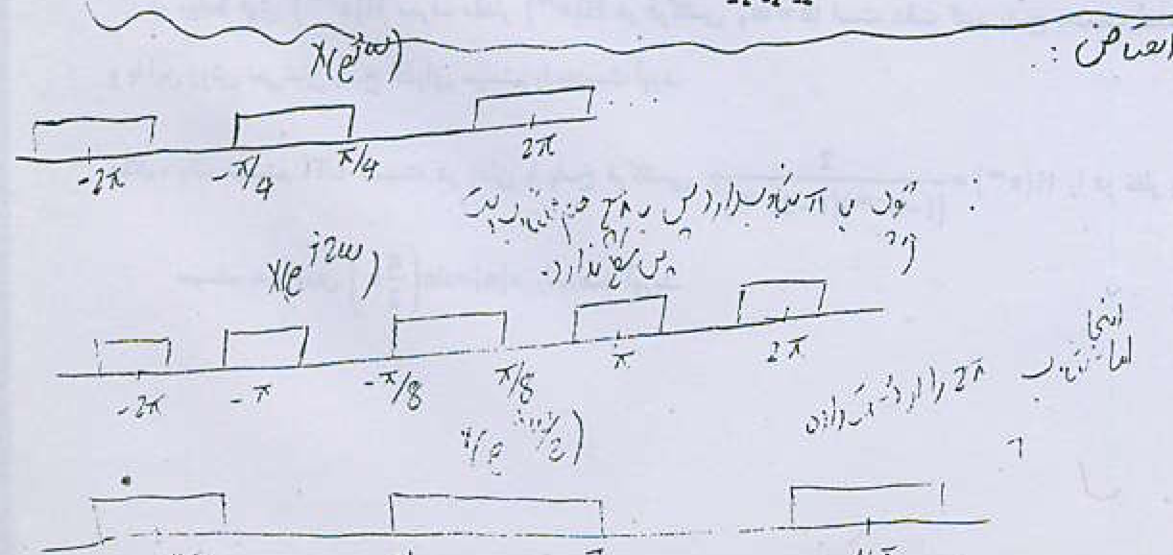
(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی روی محور زمان جابجا و به $x[n-n_0]$ تبدیل گردد، آنگاه تبدیل فوریه آن در $e^{-j\omega n_0}$ ضرب می‌شود.

بنابراین اگر پاسخ فرکانسی یک کانال $e^{-j\omega n_0}$ باشد (یعنی دامنه ثابت و فاز خطی داشته باشد) آنگاه سیگنال خروجی تأخیر یافته سیگنال ورودی است و اعوجاج در آن ایجاد نمی‌شود.

مثال : تبدیل فوریه گسسته سیگنال شکل زیر را بدست آورید.



مثالی راجع به خاصیت انعکاس :



[illegible] $(1-e^{-j\omega})$ [illegible]

خاصیت	سیگنال نامتناوب	تبدیل فوریه
	$x[n]$	$X(e^{j\omega})$ متناوب با دوره تناوب 2π
	$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$ متناوب با دوره تناوب 2π
خطی بودن	$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
جابجایی زمانی	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
جابجایی فرکانسی	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
مزدوج گیری	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
وارونگی زمانی	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
انبساط زمانی	$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \text{مضرب } k = n \\ 0 & \text{مضرب } k \neq n \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$ [illegible]
انقباض زمانی	$x[Mn]$	$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{\frac{j(\omega+2k\pi)}{M}}\right)$
کانولوشن در حوزه زمان	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
ضرب در حوزه زمان	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
تفاضل گیری زمانی	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
جمع انباره‌ای	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$
مشتق‌گیری فرکانسی	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
تقارن سیگنال‌های حقیقی	$x[n]=x^*[n]$ (حقیقی $x[n]$)	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=\mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\}$ $\quad$ $\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=-\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\}$ $\quad$ $\angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})$
تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج	($x[n]$ حقیقی و زوج) $x[n]=x^*[n]=x[-n]$	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$ ($X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج)
تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد	($x[n]$ حقیقی و فرد) $x[n]=x^*[n]=-x[-n]$	$X(e^{j\omega})=-X^*(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})$ ($X(e^{j\omega})$ موهومی و فرد)
تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی	$x[n]$ حقیقی و $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$	$X(e^{j\omega})=\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}+j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$ $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=X_e(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه $x_e(t)$ برابر است با: $j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=X_o(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه $x_o(t)$ برابر است با:

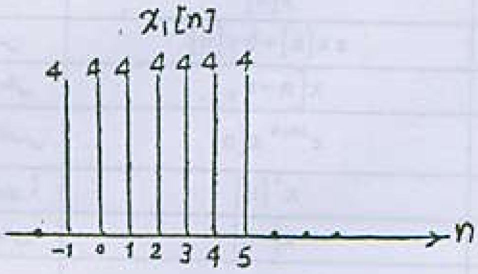
رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب	جمع نمونه‌های یک سیگنال	مقدار تبدیل فوریه در $\omega=\pi$	سطح زیر منحنی تبدیل فوریه
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$	$X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$	$X(e^{j\pi})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x[n]$	$x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$

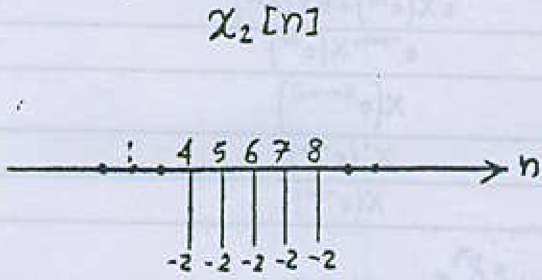
جدول ۱۳ ـ ۲ ـ خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

[illegible] $X\left(e^{j\frac{(\omega+2\pi)}{2}}\right)$ [illegible]

[illegible] $x[n]$ [illegible] $x[2n]$ [illegible]

حل : به روش‌های مختلفی می‌توان تبدیل فوریه سیگنال فوق را بدست آورد. بعنوان مثال می‌توان $x[n]$ را به مجموع دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ مطابق شکل‌های زیر تجزیه کرد:





حال با توجه به جدول (۱۳ـ۱) و خواص خطی و جابجایی زمانی تبدیل فوریه می‌توان تبدیل فوریه دو سیگنال فوق را بدست آورده و با یکدیگر جمع کنیم.

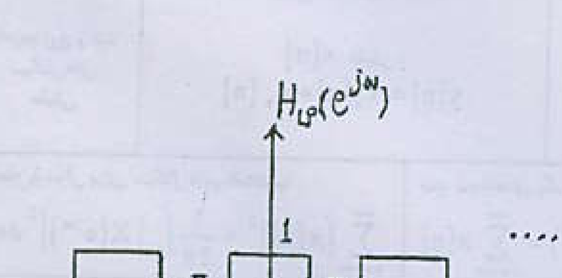
$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4\sin\left[\omega\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\times e^{-j2\omega}=\frac{4\sin\left(\frac{7\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j2\omega}$$

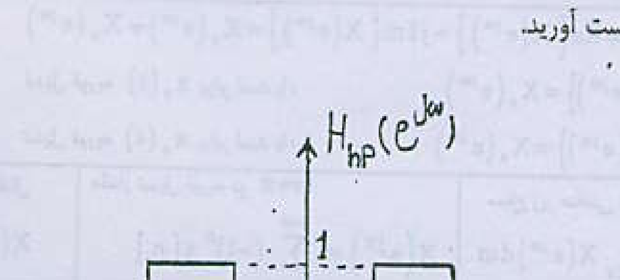
$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-2\sin\left[\omega\left(2+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\times e^{-j6\omega}=\frac{-2\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j6\omega}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)+X_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4\sin\left(\frac{7\omega}{2}\right)e^{-j2\omega}-2\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)e^{-j6\omega}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

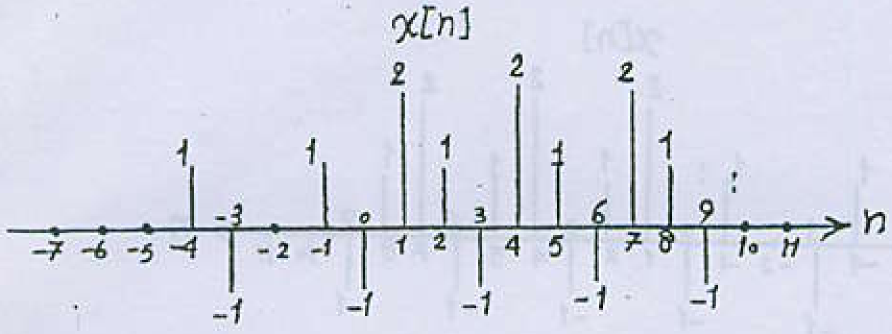
(۳) جابجائی فرکانسی: با ضرب $e^{j\omega_0 n}$ در سیگنال زمانی، تبدیل فوریه گسسته در زمان سیگنال در حوزه فرکانس جابجا شده و تبدیل به $X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$ می‌شود (یعنی سیگنال مدوله می‌شود).

مثال : پاسخ فرکانسی فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر ایده‌آل گسسته در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند. رابطه بین پاسخ ضربه‌های آن‌ها را بدست آورید.

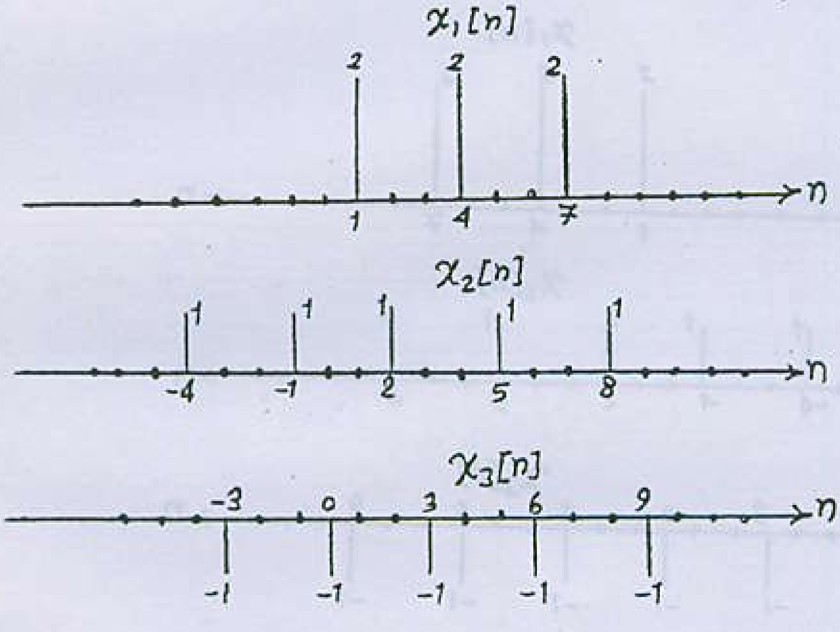




مثال : با استفاده از جدول (۱۳ـ۱) و خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان، تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید.



حل : سیگنال $x[n]$ را می‌توان به مجموع سه سیگنال $x_1[n]$ ، $x_2[n]$ و $x_3[n]$ نشان داده شده در شکل‌های زیر تجزیه کرد:



برای تعیین تبدیل فوریه $x_1[n]$ از تبدیل فوریه سیگنال زیر و جدول (۱۳ـ۱) استفاده می‌کنیم:

$$y[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 1\\ 0 & |n|>1\end{cases} \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega})=\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

رابطه بین $x_1[n]$ و $y[n]$ به صورت زیر است:

$$x_1[n]=2y_{(3)}[n-4]$$

در نتیجه داریم:

$$X_1(e^{j\omega})=2Y(e^{j3\omega})\times e^{-j4\omega}$$

برای تعیین تبدیل فوریه سیگنال‌های $x_2[n]$ و $x_3[n]$ از تبدیل فوریه سیگنال زیر و جدول (۱۳ـ۱) استفاده می کنیم:

$$r[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 2\\ 0 & n>2\end{cases} \xrightarrow{F} R(e^{j\omega})=\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

رابطه بین $x_2[n]$ و $x_3[n]$ با $r[n]$ به صورت زیر است:

$$x_2[n]=r_{(3)}[n-2]$$
$$x_3[n]=-r_{(3)}[n-3]$$

در نتیجه داریم:

$$X_2(e^{j\omega})=R(e^{j3\omega})\times e^{-j2\omega}$$
$$X_3(e^{j\omega})=-R(e^{j3\omega})\times e^{-j3\omega}$$

بنابراین تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ برابر است با:

$$X(e^{j\omega})=2Y(e^{j3\omega})\times e^{-j4\omega}+R(e^{j3\omega})\times e^{-j2\omega}-R(e^{j3\omega})\times e^{-j3\omega}=\frac{2\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)e^{-j4\omega}+\sin\left(\frac{15\omega}{2}\right)e^{-j2\omega}-\sin\left(\frac{15\omega}{2}\right)e^{-j3\omega}}{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}$$

(۷) انقباض زمانی : اگر یک سیگنال گسسته در زمان در حوزه زمان با ضریب M انقباض پیدا کند، آن‌گاه تبدیل فوریه آن ابتدا با ضریب M انبساط یافته و پس به اندازه $2k\pi$ $(k=0,1,\ldots,(M-1))$ شیفت یافته و با یکدیگر جمع می‌شوند. در این فرآیند احتمال تداخل طیفی و تغییر شکل طیف نیز وجود دارد. همچنین دامنه تبدیل فوریه با ضریب M کوچک می‌شود.

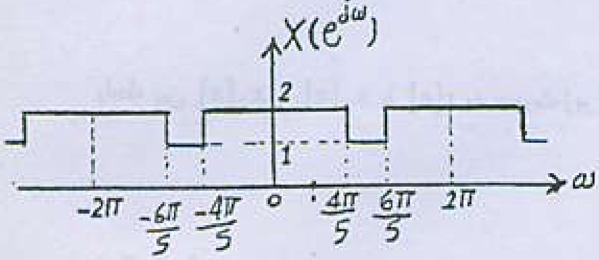
مثال : اگر تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ را $X(e^{j\omega})$ بنامیم، تبدیل فوریه سیگنال‌های $x_1[n]=x[2n]$ و $x_2[n]=x[3n]$ را بدست آورید.

حل : با توجه به خاصیت انقباض در حوزه زمان داریم :

$$X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{\frac{j(\omega+2\pi)}{2}}\right)=\frac{1}{2}X\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)$$

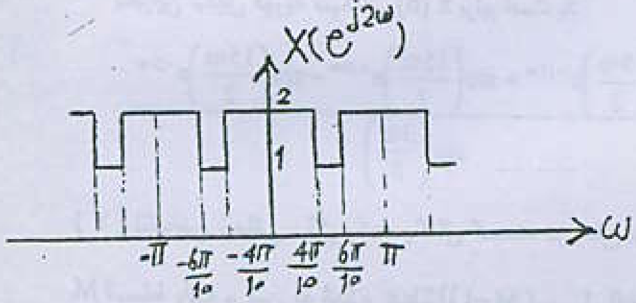
$$X_2(e^{j\omega})=\frac{1}{3}X\left(e^{\frac{j\omega}{3}}\right)+\frac{1}{3}X\left(e^{\frac{j(\omega+2\pi)}{3}}\right)+\frac{1}{3}X\left(e^{\frac{j(\omega+4\pi)}{3}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}X\left(e^{\frac{j\omega}{3}}\right)+\frac{1}{3}X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)+\frac{1}{3}X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)$$

مثال : اگر تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ مطابق شکل زیر باشد، تبدیل فوریه سیگنال‌های $x[2n]$, $x_{(2)}[n]$ را رسم کنید.

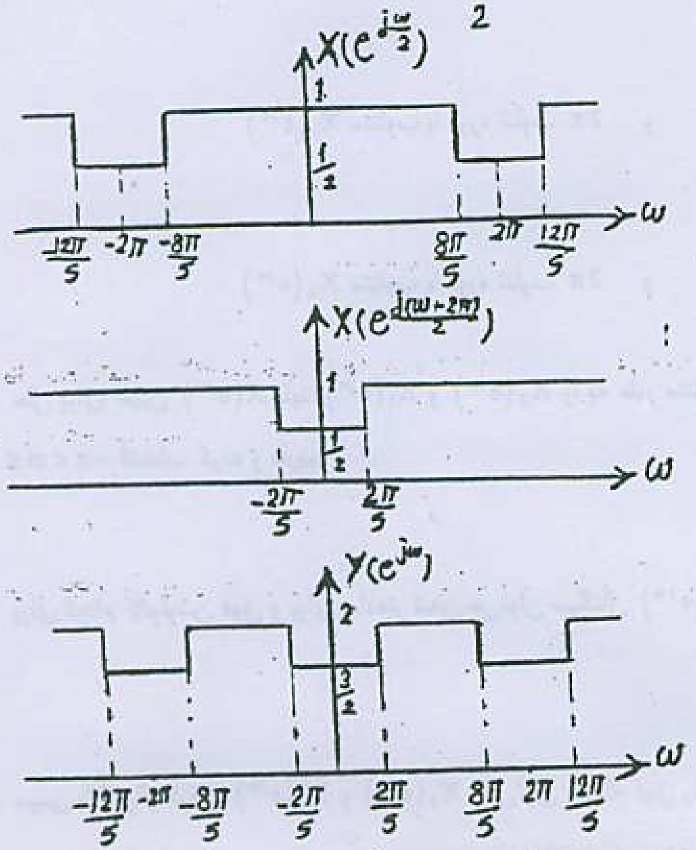


حل :

تبدیل فوریه $x_{(2)}[n]$ برابر $X\left(e^{j2\omega}\right)$ است و در شکل زیر نشان داده شده است:



تبدیل فوریه $x[2n]$ برابر $\frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{\frac{j(\omega+2\pi)}{2}}\right)$ است و در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده است:



(۸) کانولوشن در حوزه زمان: اگر دو سیگنال گسسته در حوزه زمان با یکدیگر کانوالو شوند، آنگاه تبدیل فوریه گسسته آن‌ها در حوزه فرکانس در یکدیگر ضرب خواهد شد. کاربرد مهم این خاصیت، بدست آوردن پاسخ یک سیستم LTI گسسته در زمان می‌باشد.

(۹) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، آنگاه تبدیل فوریه آن‌ها در حوزه فرکانس به طور متناوب با یکدیگر کانوالو می‌شوند. دلیل آن که در تبدیل فوریه گسسته در زمان و در حوزه فرکانس از کانولوشن متناوب استفاده می‌شود متناوب بودن تبدیل فوریه‌ها می‌باشد.

مثال : از جدول (۱۳ـ۱) و خاصیت ضرب در حوزه زمان تبدیل فوریه گسسته استفاده کرده و تبدیل فوریه گسسته سیگنال

$$x[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{(\pi n)^2}$$

را بدست آورید.

حل : سیگنال $x[n]$ را به حاصلضرب دو سیگنال $x_1[n]=\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n}$ و $x_2[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$ تجزیه کرده و با استفاده از جدول (۱۳ـ۱) تبدیل فوریه این دو سیگنال را بدست می‌آوریم:

$$x_1[n]=\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n}\xrightarrow{F}X_1\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|\le\frac{3\pi}{4}\\ 0 & \frac{3\pi}{4}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$ و $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ متناوب با دوره تناوب 2π

$$x_2[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}\xrightarrow{F}X_2\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$ و $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ متناوب با دوره تناوب 2π

حال برای تعیین $X\left(e^{j\omega}\right)$ باید $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ و $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ را به طور متناوب کانوالو کرد. بدین منظور یک بازه دلخواه به طول 2π مثلاً $-\pi<\omega\le\pi$ انتخاب کرده و داریم:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

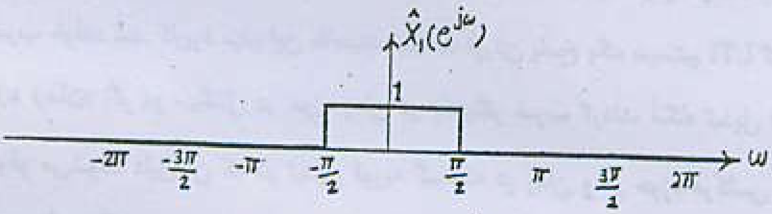
برای انجام کانولوشن فوق و برای ساده‌تر شدن می‌توان سیگنال $\hat{X}_1\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

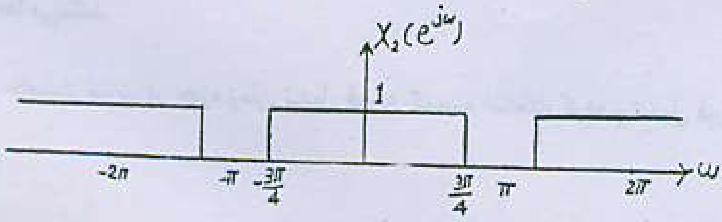
$$\hat{X}_1\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}X_1\left(e^{j\omega}\right) & -\pi<\omega\le\pi\\ 0 & \text{در بقیه نقاط}\end{cases}$$

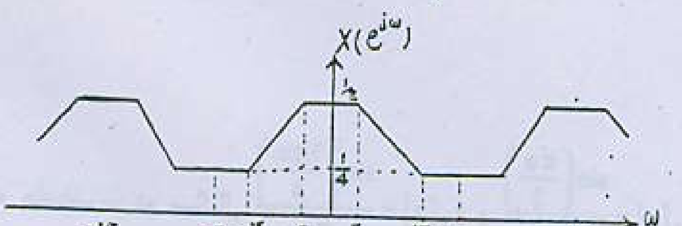
سپس با کانوالو کردن $\hat{X}_1\left(e^{j\omega}\right)$ و $X_2\left(e^{j\omega}\right)$، می‌توان معادله فوق را به یک کانولوشن معمولی تبدیل کرد:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{X}_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

$\hat{X}_1\left(e^{j\omega}\right)$، $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ و حاصل کانوالو آن‌ها یعنی $X\left(e^{j\omega}\right)$ در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:







(۱۰) تفاضل گیری زمانی: این خاصیت متناظر با خاصیت مشتق در حوزه زمان تبدیل فوریه پیوسته در زمان می‌باشد. بدین شکل که اگر سیگنال گسسته‌ای در حوزه زمان تفاضل‌گیری مرتبه اول شود، آنگاه تبدیل فوریه آن در $\left(1-e^{-j\omega}\right)$ ضرب می‌شود.

(۱۱) جمع انباره‌ای: این خاصیت متناظر با خاصیت انتگرال در حوزه زمان تبدیل فوریه پیوسته در زمان است. بدین شکل که اگر جمع انباره‌ای یک سیگنال گسسته در حوزه زمان محاسبه گردد، آنگاه تبدیل فوریه گسسته آن بر عبارت $(1-e^{-j\omega})$ تقسیم می‌شود و به دلیل مقدار DC آن یک ضربه در فرکانس $\omega=0$ ایجاد می‌شود و ضربه فوق در فواصل 2π مرتباً تکرار می‌شود.

(۱۲) مشتق‌گیری فرکانسی: هر بار ضرب n در یک سیگنال گسسته در زمان، باعث می‌شود تا از تبدیل فوریه آن مشتق گرفته شده و در j ضرب گردد.

مثال: در جدول (۱۳ـ۱) تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$ به ازاء $|\alpha|<1$ با رابطه $X(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$ داده شده است. با استفاده از تبدیل فوریه سیگنال $x_1[n]=\alpha^n u[n]$ و خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان، فرمول داده شده برای $X(e^{j\omega})$ را اثبات کنید.

حل: از تبدیل فوریه $x_1[n]$ و با توجه به جدول (۱۳ـ۱) استفاده می‌کنیم:

$$x_1[n]=\alpha^n[n]\ ,\ |\alpha|<1\xrightarrow{F}X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$x_2[n]=nx_1[n]=n\alpha^n u[n]\xrightarrow{F}X_2(e^{j\omega})=j\frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}=j\frac{-\alpha je^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

$$x[n]=\frac{1}{\alpha}x_2[n+1]=\frac{1}{\alpha}(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1]=(n+1)\alpha^n u[n+1]=(n+1)\alpha^n u[n]$$

$$\xrightarrow{F}X(e^{j\omega})=\frac{1}{\alpha}e^{j\omega}X_2(e^{j\omega})=\frac{1}{\alpha}e^{j\omega}\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

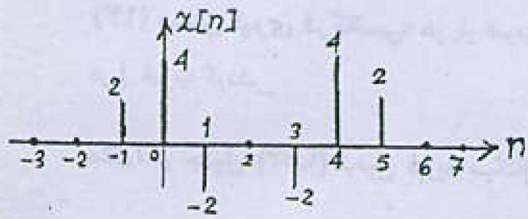
(۱۳) تقارن سیگنال‌های حقیقی: اگر سیگنالی حقیقی باشد، تبدیل فوریه گسسته آن تقارن مزدوج (هرمیتی) دارد. در این تقارن $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ می‌باشد. یعنی اگر فاز تبدیل فوریه را قرینه کنیم، با مزدوج تبدیل فوریه برابر می‌شود.این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی تبدیل فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی تبدیل فوریه تقارن فرد پیدا کنند.

(۱۴) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنال گسسته‌ای حقیقی و زوج باشد، آنگاه تبدیل فوریه گسسته آن نیز حقیقی و زوج است.

(۱۵) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنال گسسته‌ای حقیقی و فرد باشد، آنگاه تبدیل فوریه گسسته آن موهومی و فرد است.

(۱۶) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: تبدیل فوریه قسمت زوج یک سیگنال حقیقی گسسته، قسمت زوج تبدیل فوریه که برابر با قسمت حقیقی تبدیل فوریه است را نتیجه می‌دهد. تبدیل فوریه قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد تبدیل فوریه که برابر با قسمت موهومی تبدیل فوریه آن ضربدر j است را نتیجه می‌دهد.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) سیگنال $x[n]$ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



تابع فاز تبدیل فوریه آن کدام است؟

۱) -2ω ۲) $-2\omega\pm\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2ω

حل:

$x[n+2]$ زوج است و بنابراین تبدیل فوریه آن حقیقی و زوج می‌باشد. بنابراین:

$$\angle F\{x[n+2]\}=0 \Rightarrow \angle\left\{X\left(e^{j\omega}\right)e^{j2\omega}\right\}=0 \Rightarrow \angle X\left(e^{j\omega}\right)+2\omega=0$$

$$\Rightarrow \angle X\left(e^{j\omega}\right)=-2\omega$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

(۱۷) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب گسسته: این رابطه نشان می‌دهد که انرژی یک سیگنال گسسته در زمان نامتناوب را می‌توان از روی تبدیل فوریه آن بدست آورد.

مثال: در مثال قبل تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{(\pi n)^2}$ را بدست آوریم. با استفاده از رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب گسسته انرژی این سیگنال را محاسبه کنید.

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\times 2\int_0^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}d\omega+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{5}{8}-\frac{\omega}{2\pi}\right)^2d\omega+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{1}{16}d\omega\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4}+\left.\frac{\left(\frac{5}{8}-\frac{\omega}{2\pi}\right)^3}{3\times\frac{-1}{2\pi}}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\frac{1}{16}\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{16}+\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{64}\right)+\frac{\pi}{64}\right]=\frac{1}{16}+\frac{7}{96}+\frac{1}{64}=\frac{29}{192}\approx 0.151$$

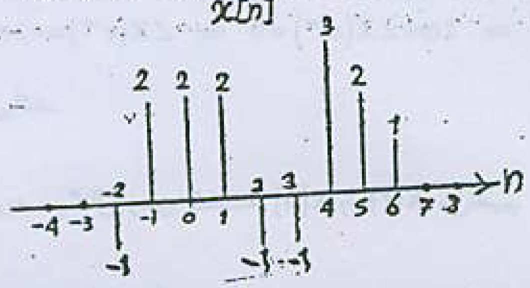
(۱۸) جمع نمونه‌های یک سیگنال گسسته در زمان: اگر در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته در زمان $\omega=0$ قرار دهیم، آنگاه ملاحظه می‌شود که جمع نمونه‌های این سیگنال برابر $X\left(e^{j0}\right)$ بدست می‌آید. بنابراین مقدار DC سیگنال گسسته در زمان برابر مقدار تبدیل فوریه آن به ازاء $\omega=0$ است.

(۱۹) مقدار تبدیل فوریه در $\omega=\pi$: اگر در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته $\omega=\pi$ قرار دهیم، آن‌گاه ملاحظه می‌شود مقدار تبدیل فوریه در $\omega=\pi$ برابر مجموع نمونه‌های قرار گرفته در محل زوج منهای مجموع نمونه‌های قرار گرفته در محل فرد می‌باشد.

(۲۰) سطح زیرمنحنی تبدیل فوریه: اگر در رابطه عکس تبدیل فوریه $n=0$ قرار داده شود آنگاه ملاحظه می‌شود که سطح زیرمنحنی تبدیل فوریه گسسته روی یک دوره تناوب آن $2\pi x[0]$ است.

مثال: سیگنال $x[n]$ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه این سیگنال باشد، مطلوبست تعیین مقادیر:

(۱) $X(e^{j0})$ (۲) $X(e^{j\pi})$ (۳) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$ (۴) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$



حل:

(۱)
$$X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=\sum_{n=-2}^{6}x[n]=9$$

(۲)
$$X(e^{j\pi})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\pi n}=\sum_{n=-2}^{6}(-1)^n x[n]=([(-1)+2+(-1)+3+1]-[2+2+(-1)+2])=-1$$

(۳)
$$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=2\pi x[0]=4\pi$$

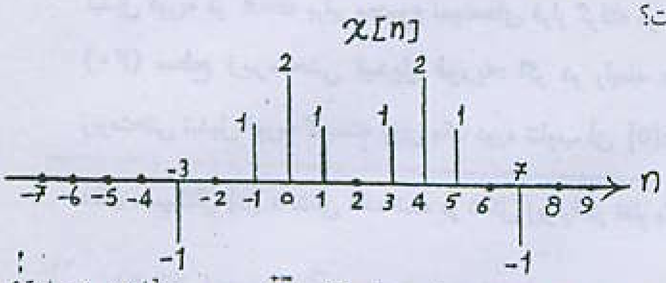
(۴)
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(nx[n])^2=2\pi(4+4+0+4+4+9+144+100+36)=610\pi$$

مثال: در مثال‌های قبل تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{(\pi n)^2}$ را بدست آوریم. با استفاده از تبدیل فوریه این سیگنال $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$ و $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x[n]$ بدست آورید.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=X(e^{j0})=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\pi n}=X(e^{j\pi})=\frac{1}{4}$$

تست نمونه (آزاد ۸۱) فرض کنید $X(e^{j\omega})$ مشخص‌کننده تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است. در این صورت مقادیر $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$ و $\angle X(e^{j\omega})$ کدام است؟



۱) $-2\omega \;,\; 14$

۲) $2\omega \;,\; 28\pi$

۳) $-2\omega \;,\; 28\pi$

۴) $2\omega \;,\; 14$

حل: $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = 2\pi(1+1+4+1+1+1+4+1+1) = 28\pi$

سیگنال فوق حول نقطه $n=2$ تقارن زوج دارد بنابراین سیگنال $x[n+2]$ تقارن زوج دارد و داریم:

$\angle F\{x[n+2]\} = 0 \;\Rightarrow\; \angle e^{j2\omega}X(e^{j\omega}) = 0 \;\Rightarrow\; 2\omega + \angle X(e^{j\omega}) = 0 \;\Rightarrow\; \angle X(e^{j\omega}) = -2\omega$

بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

تست نمونه (آزاد ۷۹) تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را $X(f)$ می‌نامیم. اگر $y[n]$ را به صورت $y[n]=\begin{cases} x[n] & \frac{n}{3}\notin Z \\ 0 & \frac{n}{3}\in Z \end{cases}$ تعریف کنیم، تبدیل فوریه آن چه خواهد بود؟

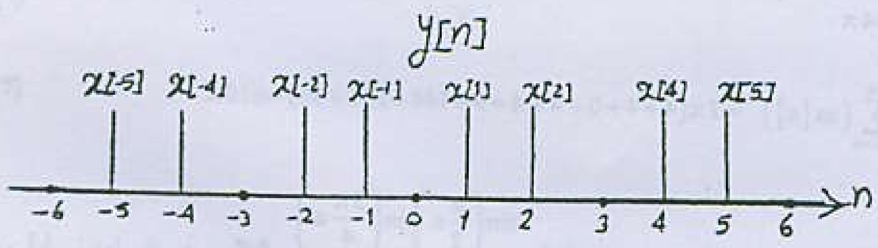
۱) $Y(f)=\frac{1}{3}X(f)+\frac{1}{3}X\left(f-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}X\left(f+\frac{1}{3}\right)$

۲) $Y(f)=\frac{1}{3}X\left(\frac{f}{3}\right)+\frac{1}{3}X\left(\frac{f-1}{3}\right)+\frac{1}{3}X\left(\frac{f+1}{3}\right)$

۳) $Y(f)=\frac{2}{3}X(f)-\frac{1}{3}X\left(f-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}X\left(f+\frac{1}{3}\right)$

۴) $Y(f)=\frac{2}{3}X\left(\frac{f}{3}\right)-\frac{1}{3}X\left(\frac{f-1}{3}\right)-\frac{1}{3}X\left(\frac{f+1}{3}\right)$

حل: اگر سیگنال $y[n]$ را برحسب نمونه‌های $x[n]$ نمایش دهیم شکل زیر بدست می‌آید:



تابع $y[n]$ برحسب $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y[n]=\left(x[n]-x[n]\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x[n]-\frac{1}{3}x[n]e^{j\frac{2\pi n}{3}}-\frac{1}{3}x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{3}}$$

بنابراین داریم:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{2}{3}X(e^{j\omega})-\frac{1}{3}X\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)-\frac{1}{3}X\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

رابطه فوق اگر برحسب فرکانس f نوشته شود داریم:

$$Y(f)=\frac{2}{3}X(f)-\frac{1}{3}X\left(f-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}X\left(f+\frac{1}{3}\right)$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

خودآزمائی هفتم

۱ـ (سراسری ۸۱) تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=4^{-n}u[n+2]$ کدام است؟

۱) $X(e^{j\Omega})=\frac{64e^{-2j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$ ۲) $X(e^{j\Omega})=\frac{16e^{-j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$ ۳) $X(e^{j\Omega})=\frac{64e^{2j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$ ۴) $X(e^{j\Omega})=\frac{16e^{j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$

۲ـ (آزاد ۸۲) سیگنال $x[n]$ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

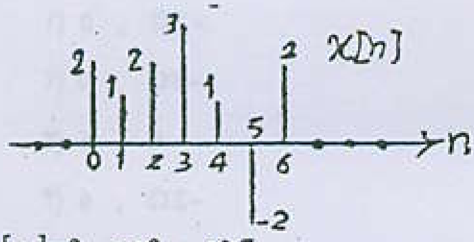
مقدار dc ~~تبدیل فوریه~~ چقدر است؟ سیگنال x[n]

۱) 16 ۲) $\frac{16}{7}$

۳) $\frac{8}{\pi}$ ۴) $\frac{8}{7\pi}$

۳ـ (آزاد ۸۰) سیگنال گسسته $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه آن باشد، مقادیر زیر کدام است.

$$a=X(e^{j\pi})\ ,\ b=\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega\ ,\ c=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$$



$x[n]=0 \quad n<0\ ,\ n\geq 7$

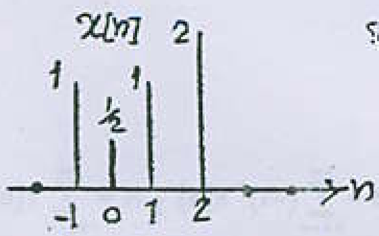
۱) $a=5\ ,\ b=4\pi\ ,\ c=716\pi$

۲) $a=5\ ,\ b=4\pi\ ,\ c=540\pi$

۳) $a=9\ ,\ b=4\pi\ ,\ c=716\pi$

۴) $a=9\ ,\ b=2\pi\ ,\ c=540\pi$

۴ـ (سراسری ۸۲) اگر $x[n]$ به صورت زیر باشد مقدار $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$ کدام است؟



۱) 12π ۲) 18π

۳) 36π ۴) $\frac{45\pi}{2}$

۵ـ پاسخ ضربه یک سیستم غیرعلی با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ و با شرایط $\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}=\sin(\omega)-\sin(2\omega)$، بهره DC مثبت و $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2 d\omega=3$ کدام گزینه است؟

۱) $h[n]=-\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]$ ۲) $h[n]=-\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{1}{2}\delta[n]$

۳) $h[n]=\delta[n+2]-\delta[n+1]+\delta[n]$ ۴) $h[n]=\delta[n+2]-\delta[n+1]-\delta[n]$

۶ـ (آزاد ۷۹) تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت $X(f)=\cos^2(2\pi f)$ می‌باشد. مقدار $A=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 x[n]$ چقدر است؟

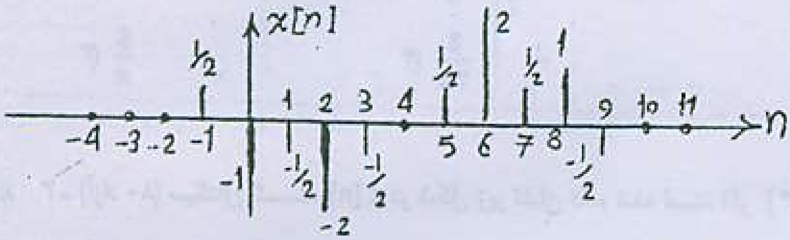
۱) $A=\frac{1}{2}$ ۲) $A=2$

۳) سری متقارب نمی‌شود و $A \to \infty$ می‌گردد. ۴) سری متقارب نمی‌شود و $A \to -\infty$ می‌گردد.

۷ـ (آزاد ۸۱) اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل $x[n]$ باشد، تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان $x[1-n]+x[-1-n]$ کدام گزینه است؟

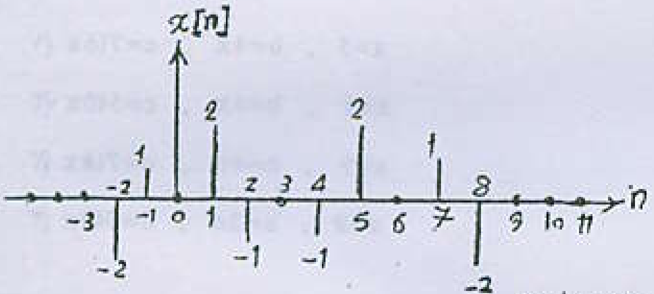
۱) $\cos(\omega)X(e^{j\omega})$ ۲) $2\cos(\omega)X(e^{j\omega})$ ۳) $2\cos(\omega)X(e^{-j\omega})$ ۴) $4\sin(\omega)X(e^{-j\omega})$

۸ـ (سراسری ۸۱) اگر سیگنال $x[n]$ به صورت زیر باشد، در این صورت فاز تبدیل فوریه این سیگنال کدام است؟



۱) صفر
۲) $-\frac{\pi}{2}$
۳) -4ω
۴) $-4\omega \pm \frac{\pi}{2}$

۹ـ (سراسری ۸۲) فرض کنید $X(j\Omega)$ مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ که در شکل نمایش داده شده است باشد، در این صورت مقدار $X(0)$ و فاز $X(j\Omega)$ به ترتیب برابر است با:



۱) -2Ω , 0
۲) -3Ω , 0
۳) 0 , 6
۴) -2Ω , 6

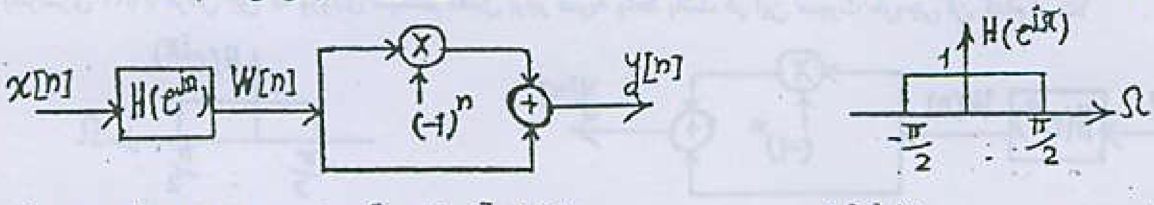
۱۰ـ (آزاد ۷۹) تبدیل فوریه یک سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت زیر است:

$$X(f)=\begin{cases}\frac{1}{4} & |f|\le\frac{1}{4}\\ \frac{1-|f|}{3} & \frac{1}{4}\le|f|\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

مقادیر $A=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$ و $B=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x[n]$ چقدر است؟

۱) $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{6}$ ۲) $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{4}$ ۳) $A=\frac{1}{4}$, $B=0$ ۴) $A=0$, $B=\frac{1}{4}$

۱۱ـ (سراسری ۸۱) با فرض این که ورودی سیستم مقابل برابر ضربه واحد باشد، در این صورت خروجی آن کدام است؟



۱) $\delta[n]$ ۲) $h[n]$ ۳) $\left[(-1)^n+1\right]h[n]$ ۴) $\left[(-1)^n+1\right]*h[n]$

۱۲ـ (سراسری ۸۰) اگر بین سیگنال‌های زمان گسسته $x[n]$ و $y[n]$ رابطه زیر برقرار باشد، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین تبدیل فوریه آن‌ها یعنی $X(\omega)$ و $Y(\omega)$ برقرار است؟

$$y[n]=\begin{cases} x[-n] & \text{زوج } n \\ -x[-n] & \text{فرد } n \end{cases}$$

۱) $Y(\omega)=X(\pi-\omega)$ ۲) $Y(\omega)=X(\omega-\pi)$ ۳) $Y(\omega)=X^*(\omega-\pi)$ ۴) $Y(\omega)=X^*(\pi-\omega)$

۱۳ـ (سراسری ۸۳) در صورتی که رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی یک سیستم زمان گسسته به صورت $Y(\Omega)=\int_{\Omega-\frac{\pi}{4}}^{\Omega+\frac{\pi}{4}}X(\theta)d\theta$ باشد، آن‌گاه رابطه بین ورودی و خروجی در حوزه زمان برابر است با:

$$\left(\begin{array}{l} x[n]=\dfrac{\sin(Wn)}{\pi n} \\ 0<W<\pi \end{array} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \begin{array}{l} X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\le|\Omega|\le w\\ 0 & w\le|\Omega|\le\pi\end{cases} \\ \text{متناوب با تناوب } 2\pi \; X(\Omega) \end{array}\right)$$

۱) $y[n]=2x[n]\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}$ ۲) $y[n]=x[n]\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi}$

۳) $y[n]=2x[n]\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi}$ ۴) $y[n]=2\pi x[n]\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}$

۱۴ ـ فیلتر کردن سیگنال‌های گسسته در زمان

در بخش‌های قبل به بررسی تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان پرداختیم و سری وتبدیل فوریه گسسته را معرفی کردیم. در این بخش به بررسی مختصر در مورد فیلترهای گسسته در زمان می‌پردازیم و انواع مختلف این فیلترها را معرفی خواهیم کرد.

در سیگنال‌های گسسته در زمان نیز مانند سیگنال‌های پیوسته در زمان اغلب تمایل داریم دامنه نسبی مؤلفه‌های فرکانسی (طیف) یک سیگنال گسسته را تغییر دهیم و حتی برخی از آن‌ها را کاملاً حذف کنیم. این فرآیند فیلتر کردن نام دارد و سیستمی که در طیف یک سیگنال گسسته تغییرات بوجود می‌آورد، فیلتر نام دارد.

در مورد فیلترهای گسسته در زمان نیز دو نوع فیلتر شکل‌دهی فرکانس و فرکانس گزین داریم. فیلترهای شکل‌دهی فرکانس برای شکل دادن طیف سیگنال بنا به هدف خاص به کار می‌روند در حالی‌که فیلترهای فرکانس گزین برای عبور تقریباً بدون اعوجاج بعضی از فرکانس‌ها و تضعیف شدید و حذف بعضی دیگر از فرکانس‌ها به کار می‌روند. در این درس تنها فیلترهای فرکانس گزین گسسته ایده‌آل بررسی می‌گردند.

بطور کلی یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} ke^{-j\omega n_0} & \text{باند عبور} \\ 0 & \text{باند قطع} \end{cases}$$

در نتیجه یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل در باند قطع اجازه عبور ورودی را نمی دهد در باند عبور دامنهٔ ورودی را در $|k|$ ضرب کرده و تأخیر n_0 در آن ایجاد می‌کند. (در باند عبور یک کانال ایده‌آل است).

با توجه به باند عبور و قطع انتخابی برای فیلترهای فرکانس‌گزین ایده‌آل می‌توان آن‌ها را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱ـ فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل (LPF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴ـ۱ـ الف) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناوب با دوره تناوب 2π است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{lp}(e^{j\omega})=\begin{cases} ke^{-j\omega n_0} & 0\le|\omega|\le\omega_{lp} \\ 0 & \omega_{lp}<|\omega|\le\pi \end{cases}$$

ω_{lp} را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۲ـ فیلتر بالا گذر ایده‌آل (HPF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴ـ۱ـ ب) نشان داده شده است.

ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناوب با دوره تناوب 2π است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{hp}(e^{j\omega})=\begin{cases} ke^{-j\omega n_0} & \omega_{hp}<|\omega|\le\pi \\ 0 & 0\le|\omega|\le\omega_{hp} \end{cases}$$

ω_{hp} را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۳- فیلتر میان‌گذر ایده‌آل (BPF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴-۱- ج) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناوب با دوره تناوب 2π است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{bp}(e^{j\omega})=\begin{cases} ke^{-j\omega n_0} & \omega_{bp_1}\le|\omega|\le\omega_{bp_2} \\ 0 & 0\le|\omega|<\omega_{bp_1}\ ,\ \ \omega_{bp_2}<|\omega|\le\pi \end{cases}$$

ω_{bp_1} را فرکانس قطع پایین و ω_{bp_2} را فرکانس قطع بالای فیلتر می نامند.

۴- فیلتر میان نگذر ایده‌آل (BRF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴-۱- د) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناوب با دوره تناوب 2π است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

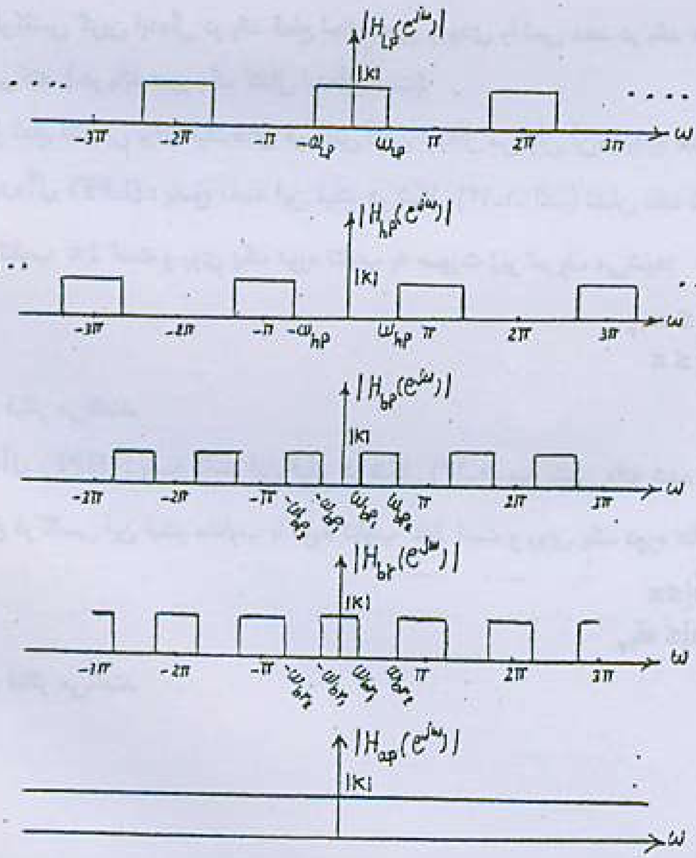
$$H_{br}(e^{j\omega})=\begin{cases} ke^{-j\omega n_0} & 0\le|\omega|<\omega_{br_1}\ ,\ \ \omega_{br_2}<|\omega|\le\pi \\ 0 & \omega_{br_1}\le|\omega|\le\omega_{br_2} \end{cases}$$

ω_{br_1} را فرکانس قطع پایین و ω_{br_2} را فرکانس قطع بالای این فیلتر می‌نامند.

۵ - فیلتر تمام گذر ایده‌آل (APF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴-۱- هـ) نشان داده شده است. برای این فیلتر در تمام فرکانس‌ها داریم:

به ازاء کلیه فرکانس‌ها $H_{ap}(e^{j\omega})=ke^{-j\omega n_0}$.

این فیلتر یک فیلتر فاز است و بدون تغییر در دامنه ورودی، فقط فاز آن را تغییر می‌دهد.



بین پاسخ ضربه یک فیلتر LPF و HPF
رابطه زیر برقرار است:
$h_{HPF}[n]=(-1)^n h_{LPF}[n]$

شکل ۱۴ - ۱ - پاسخ فرکانسی (الف) فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل گسسته (ب) فیلتر بالا گذر ایده‌آل گسسته (ج) فیلتر میان گذر ایده‌آل گسسته (د) فیلتر میان نگذر ایده‌آل گسسته (هـ) فیلتر تمام گذر ایده‌آل

نکته: همانطور که از شکل (۱۴ـ۱) ملاحظه می‌شود فیلترهای مختلف ایده‌آل گسسته در واقع شیفت فرکانسی یکدیگر می‌باشند. به عبارت دیگر با ایجاد یک شیفت فرکانس در پاسخ فرکانس یک نوع فیلتر، پاسخ فرکانسی فیلتر نوع دیگر بدست می‌آید.

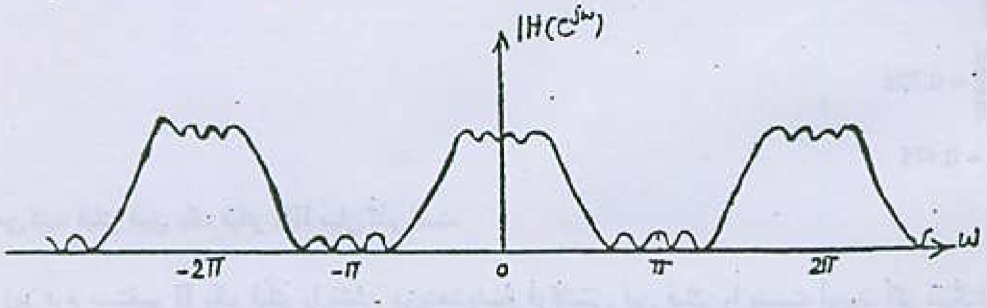
نکته: با توجه به پاسخ فرکانسی فیلترهای پائین‌گذر و بالاگذر گسسته در زمان ملاحظه می‌کنید که اگر پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین‌گذر با فرکانس قطع ω_c به اندازه π شیفت پیدا کند آن‌گاه به یک فیلتر بالاگذر با فرکانس قطع $\pi-\omega_c$ تبدیل می‌شود. اما از خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان ملاحظه کردید که شیفت تبدیل فوریه به اندازه π معادل ضرب $(-1)^n$ در سیگنال در حوزه زمان است. در نتیجه اگر پاسخ ضربه یک فیلتر پائین‌گذر با فرکانس قطع ω_c در $(-1)^n$ ضرب شود (یعنی نمونه‌های پاسخ ضربه یکی در میان قرینه شوند) آنگاه پاسخ ضربه جدید مربوط به یک فیلتر بالاگذر می‌باشد. البته عکس این عمل (یعنی تبدیل HPF به LPF) نیز امکان‌پذیر است.

نکته: همانند فیلترهای پیوسته در زمان با ترکیب سری دو فیلتر پایین‌گذر و بالا گذر می‌توان یک فیلتر میان گذر و با ترکیب موازی آن‌ها می‌توان یک فیلتر میان نگذر بدست آورد.

نکته: فیلترهای ایده‌آل گسسته در زمان نیز مانند فیلترهای ایده‌آل پیوسته در زمان سیستم‌های LTI غیرعلی می‌باشند و در نتیجه ساخت آن‌ها از نظر فیزیکی امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای فیلتر پایین گذر ایده‌آل گسسته داریم:

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} ke^{-j\omega n_0} & 0\le|\omega|\le W \\ 0 & W<|\omega|\le\pi \end{cases} \Rightarrow h[n]=\frac{kW}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{W(n-n_0)}{\pi}\right)$$

نکته: با توجه به غیرعلی بودن فیلترهای ایده‌آل، فیلترهای واقعی (غیرایده‌آل) اهمیت زیادی پیدا می‌کنند. در این فیلترها علاوه بر باند عبور و باند قطع، باند انتقال نیز بین آن‌ها وجود دارد. همچنین پاسخ در باند قطع و عبور لزوماً هموار نبوده و ممکن است دارای تموج باشد. شکل (۱۴ـ۲) نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر غیر ایده‌آل گسسته را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴ ـ ۲ ـ نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین‌گذر غیر ایده‌آل گسسته در زمان

نکته: دسته مهمی از فیلترهای گسسته غیر ایده‌آل، فیلترهائی هستند که توسط معادله تفاضلی ورودی ـ خروجی خطی با ضرایب ثابت مشخص شده‌اند. این دسته از فیلترها با توجه به نوع سیستم به فیلترهای FIR یا IIR معروف می‌باشند. در فیلترهای FIR خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه و لحظات قبل بستگی دارد. در حالی که در فیلترهای IIR خروجی در هر لحظه علاوه بر ورودی، به لحظات قبل خروجی نیز بستگی دارد.

FIR: $y[n]=a_0x[n]+a_1x[n-1]+\cdots$

IIR: $y[n]=(a_0x[n]+a_1x[n-1]+\cdots)+(b_0y[n-1]+\cdots)$

مثال : یک فیلتر گسسته LTI با معادله تفاضلی $y[n]-\frac{2}{13}y[n-1]+\frac{10}{9}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{13}x[n-1]$ را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی این فیلتر را بدست آورده و نوع فیلتر را تعیین کنید.

حل : از معادله تفاضلی داده شده تبدیل فوریه گرفته تا پاسخ فرکانسی فیلتر بدست آید:

$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{2}{13}e^{-j\omega}+\frac{10}{9}e^{-j2\omega}\right)=X(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{13}e^{-j\omega}\right) \Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1-\frac{1}{13}e^{-j\omega}}{1-\frac{2}{13}e^{-j\omega}+\frac{10}{9}e^{-j2\omega}}$$

فیلتر فوق یک فیلتر IIR است. برای تعیین نوع آن پاسخ دامنه فیلتر را بدست می‌آوریم:

$$H(e^{j\omega})=\frac{\left(1-\frac{1}{13}\cos(\omega)\right)+j\frac{1}{13}\sin(\omega)}{\left(1-\frac{2}{13}\cos(\omega)+\frac{10}{9}\cos(2\omega)\right)+j\left(\frac{2}{13}\sin(\omega)-\frac{10}{9}\sin(2\omega)\right)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{13}\cos(\omega)\right)^2+\frac{1}{169}\sin^2(\omega)}{\left(1-\frac{2}{13}\cos(\omega)+\frac{10}{9}\cos(2\omega)\right)^2+\left(\frac{2}{13}\sin(\omega)-\frac{10}{9}\sin(2\omega)\right)^2}}$$

اگر چند فرکانس مشخص را در فاصله $0\le\omega<\pi$ در تابع فوق قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\omega=0 \Rightarrow \left|H(e^{j0})\right|=0.47$$

$$\omega=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \left|H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\right|=0.706$$

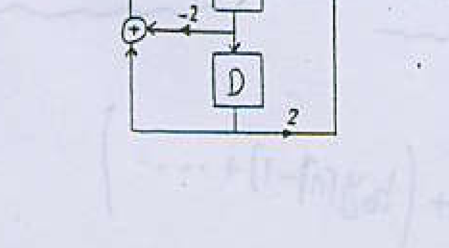
$$\omega=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\right|=5.28$$

$$\omega=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left|H\left(e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\right|=0.726$$

$$\omega=\pi \Rightarrow \left|H(e^{j\pi})\right|=0.475$$

ملاحظه می‌کنید فیلتر فوق یک فیلتر IIR میان‌گذر است.

مثال : شکل زیر فرم مستقیم II یک فیلتر را نشان می‌دهد.پاسخ فرکانسی این فیلتر را بدست آورید. اگر سیگنال ورودی این فیلتر یک سیگنال متناوب با فرکانس پایه $\frac{\pi}{4}$ باشد و فرض شود دامنه هارمونیک دوم این سیگنال $\frac{1}{2}$ باشد، دامنه هارمونیک دوم سیگنال خروجی را بدست آورید.



حل : اگر از روی فرم مستقیم داده شده مستقیماً یا پس از تبدیل به فرم مستقیم I ، معادله تفاضلی فیلتر را بدست آوریم:

$$y[n]+2y[n-1]-y[n-2]=2x[n-2]$$

با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله داریم:

$$Y(e^{j\omega})(1+2e^{-j\omega}-e^{-j2\omega})=2e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{2e^{-j2\omega}}{1+2e^{-j\omega}-e^{-j2\omega}}$$

برای تعیین دامنه هارمونیک دوم خروجی داریم:

$$b_2=a_2\left|H(e^{j2\omega_0})\right|=\frac{1}{2}\times\left|H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2e^{-j\pi}}{1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}-e^{-j\pi}}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-2}{2+j2}\right|=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین دامنه هارمونیک دوم در خروجی فیلتر $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم زمان گسسته LTI توسط معادله زیر توصیف شده است:

$$y[n]=-0.8y[n-1]+1.2x[n]$$

کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم صدق می‌کند؟

۱) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع IIR است.
۲) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع FIR است.
۳) سیستم یک فیلتر پائین‌گذران از نوع FIR است.
۴) سیستم یک فیلتر پائین‌گذران از نوع IIR است.

حل :

با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله، پاسخ فرکانسی فیلتر را به‌دست می‌آوریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left(1+0.8e^{-j\omega}\right)=1.2X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1.2}{1+0.8e^{-j\omega}}$$

برای تعیین نوع فیلتر از دو فرکانس $\omega=0$, $\omega=\pi$ استفاده می‌کنیم:

$$\omega=0 : H\left(e^{j0}\right)=\frac{1.2}{1.8}$$

$$\omega=\pi : H\left(e^{j\pi}\right)=\frac{1.2}{0.2}$$

بنابراین فیلتر بالاگذر می‌باشد از طرفی IIR بودن فیلتر نیز مشخص است. در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۱۵- دوگانی در تحلیل فوریه پیوسته و گسسته زمانی

در بخش‌های قبل به معرفی و بررسی تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته و گسسته در زمان پرداخته شد. این تحلیل‌ها که شامل سری و تبدیل فوریه می‌باشند شامل دو دسته فرمول در حوزه زمان و فرکانس می‌باشند. در برخی از این تحلیل‌ها نوعی تقارن یا دوگانی بین معادله حوزه زمان و معادله حوزه فرکانس وجود دارد که در بخش ۹ یکی از این خواص دوگانی بین سیگنال حوزه زمان پیوسته و تبدیل فوریه آن معرفی گردید. در جدول (۱۵-۱) خلاصه‌ای از معادلات سری و تبدیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان و چگونگی وجود یا عدم وجود دوگانی بین روابط مختلف آورده شده است.

	پیوسته در زمان		گسسته در زمان	
	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه زمان	حوزه فرکانس
سری فوریه	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ پیوسته در زمان متناوب در زمان	$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ گسسته در فرکانس نامتناوب در فرکانس	$x[n]=\sum_{k\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ گسسته در زمان متناوب در زمان	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$ گسسته در فرکانس متناوب در فرکانس
تبدیل فوریه	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ پیوسته در زمان نامتناوب در زمان	$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ پیوسته در فرکانس نامتناوب در فرکانس	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ گسسته در زمان نامتناوب در زمان	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ پیوسته در فرکانس متناوب در فرکانس

جدول ۱۵-۱- خلاصه معادلات سری و تبدیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان

با توجه به جدول (۱۵-۱) ملاحظه می‌کنید دوگانی بین معادلات فوق در سه دسته از معادلات برقرار است:

(۱) دوگانی در تبدیل فوریه پیوسته در زمان بین رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس: همانطور که در بخش ۹ ملاحظه کردید بین سیگنال پیوسته در زمان نامتناوب و تبدیل فوریه آن که یک سیگنال پیوسته و نامتناوب در حوزه فرکانس است دوگانی وجود دارد. رابطه دوگانی عبارت است از:

$$x(t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه پیوسته}} X(\omega)$$

$$X(t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه پیوسته}} 2\pi x(-\omega)$$

(۲) دوگانی در سری فوریه گسسته در زمان بین رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس: بین سیگنال گسسته در زمان متناوب و ضرایب سری فوریه آن که یک سیگنال گسسته و متناوب در حوزه فرکانس است دوگانی وجود دارد. رابطه دوگانی به صورت زیر است:

$$x[n] \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسسته}} a_k = y[k]$$

$$y[n] \xrightarrow{\text{ضرایب سری گسسته}} b_k = \frac{1}{N}x[-k]$$

یادداشت

مثال : سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تناوب $N=9$ را در نظر بگیرید:

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & n \neq 9\ \text{مضرب} \\ \dfrac{5}{9} & n = 9\ \text{مضرب}\end{cases}$$

با استفاده از خاصیت دوگانی و ضرایب سری فوریه موج مربعی متناوب، ضرایب سری فوریه این سیگنال را بدست آورید.

حل : از جدول (۱۲ـ۱) و برای موج مربعی متناوب داریم:

$$x_1[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1 \\ 0 & N_1<|n|\le\frac{N}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسسته}} a_{k_1}=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\frac{2k\pi\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{N}\right]}{N\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} & k\neq 0\,,\ \pm N\,,\ \dots \\ \dfrac{2N_1+1}{N} & k=0\,,\pm N\,,\ \dots\end{cases}$$

$$x[n+N]=x[n]$$

با فرض $N=9$ و $N_1=2$ داریم:

$$x_1[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 2 \\ 0 & 2<|n|\le 4\end{cases} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسسته}} a_{k_1}=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\frac{5k\pi}{9}\right)}{9\sin\left(\frac{k\pi}{9}\right)} & k\neq 9\ \text{مضرب} \\ \dfrac{5}{9} & k= 9\ \text{مضرب}\end{cases}$$

$x[n]$ متناوب با دوره تناوب 9

با توجه به قضیه دوگانی داریم:

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & n \neq 9\ \text{مضرب} \\ \dfrac{5}{9} & n = 9\ \text{مضرب}\end{cases} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسسته}} a_k=\begin{cases}\frac{1}{9} & |k|\le 2 \\ 0 & 2<|k|\le 4\end{cases}$$

a_k متناوب با دوره تناوب 9

(۳) دوگانی بین ضرایب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمان و رابطه حوزه زمان تبدیل فوریه گسسته در زمان:

بین سیگنال گسسته در زمان و نامتناوب و ضرایب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمان که یک سیگنال گسسته و نامتناوب در فرکانس است دوگانی وجود دارد. رابطه دوگانی به صورت زیر است:

$$x[n] \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه گسسته}} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{jt}) \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه پیوسته}} a_k = x[-k]$$

مثال: از خاصیت دوگانگی و جدول (۱۳ـ۱) استفاده کرده و ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-jt}}$ را به ازاء $|\alpha|<1$ بدست آورید.

از جدول (۱۳ـ۱) داریم:

$$\underset{|\alpha|<1}{x[n]=\alpha^n u[n]} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه گسسته}} X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

بنابراین با توجه به قضیه دوگانی داریم:

$$\underset{|\alpha|<1}{x(t)=\frac{1}{1-\alpha e^{-jt}}} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه پیوسته}} a_k=\alpha^{-k}u[-k]$$

۱۶ ـ پردازش گسسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان

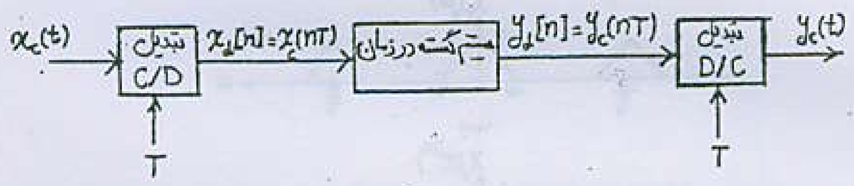
در بسیاری از کاربردها، پردازش سیگنال‌های پیوسته در زمان توسط یک سیستم گسسته در زمان انجام می‌شود. این سیستم گسسته در زمان می‌تواند کامپیوتر، میکروپروسسور، تراشه‌های پردازنده و ...... باشد. بدین‌منظور باید ابتدا سیگنال پیوسته در زمان را به سیگنال گسسته در زمان تبدیل و پس از پردازش مجدداً به سیگنال پیوسته در زمان تغییر داد. در این بخش به اختصار به بررسی چگونگی پردازش گسسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان می‌پردازیم.

بلوک دیاگرام پردازش گسسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان در شکل (۱۶ ـ ۱) نشان داده شده است. با توجه به شکل فوق ملاحظه می‌کنید این سیستم از سه جزء اساسی تشکیل شده است:

۱) مبدل پیوسته در زمان به گسسته در زمان (C / D)

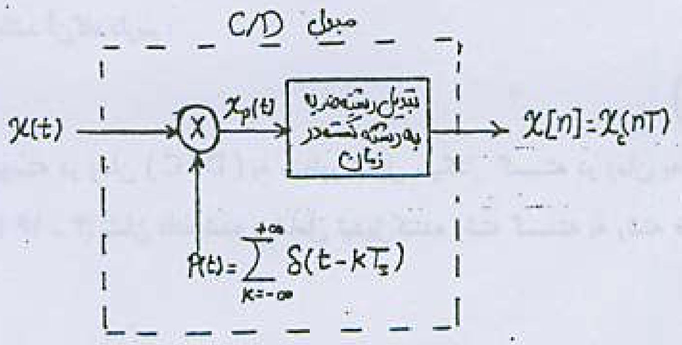
۲) سیستم گسسته در زمان پردازنده

۳) مبدل گسسته در زمان به پیوسته در زمان (D/ C)



شکل ۱۶ ـ ۱ ـ بلوک دیاگرام پردازش گسسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان

مبدل پیوسته در زمان به گسسته در زمان (C / D) به منظور تبدیل سیگنال پیوسته در زمان به گسسته در زمان استفاده می‌شود. این واحد با جزئیات بیشتر در شکل (۱۶ ـ ۲) نشان داده شده و شامل نمونه بردار و تبدیل کننده رشته ضربه به رشته گسسته در زمان می‌باشد.

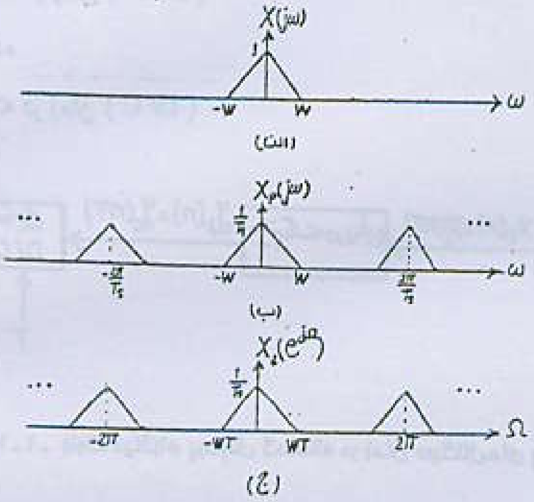


شکل ۱۶ ـ ۲ ـ مبدل C/D

اگر فرکانس را در حالت پیوسته در زمان با ω و در حالت گسسته در زمان با Ω نشان دهیم آن‌گاه روابط زیر را می‌توان به سادگی بین تبدیل فوریه سیگنال‌های نشان داده شده در شکل (۱۶ ـ ۲) به‌دست آورد :

$$X_d\left(e^{j\Omega}\right)=X_p\left(\frac{j\Omega}{T_s}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(\Omega-2k\pi)}{T_s}\right)$$

با توجه به رابطه فوق ملاحظه می‌کنید تبدیل فوریه گسسته در زمان $x_d[n]$ مقیاس‌بندی شده (فشرده یا گسترده) تبدیل فوریه سیگنال $x_p(t)$ است. تبدیل فوریه $x_p(t)$ نیز طبق قضیه نمونه‌برداری با تبدیل فوریه $x(t)$ ارتباط دارد. در شکل (۱۶ ـ ۳) این تبدیلات با فرض باند محدود بودن سیگنال ورودی نشان داده شده‌اند.

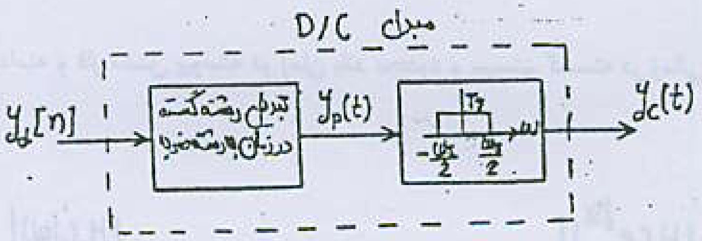


شکل ۱۶ ـ ۳ ـ طیف فرضی (الف) $X(j\omega)$ (ب) $X_p(j\omega)$ (ج) $X_d\left(e^{j\Omega}\right)$

وظیفه سیستم گسسته در زمان شکل (۱۶ ـ ۱) پردازش سیگنال گسسته $x_d[n]$ و تبدیل آن به $y_d[n]$ است. اگر این سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H_d\left(e^{j\Omega}\right)$ باشد آن‌گاه داریم :

$$Y_d\left(e^{j\Omega}\right)=H_d\left(e^{j\Omega}\right)X_d\left(e^{j\Omega}\right)$$

مبدل گسسته در زمان به پیوسته در زمان (D / C) به منظور تبدیل سیگنال گسسته در زمان به پیوسته در زمان استفاده می‌شود. این واحد با جزئیات بیشتر در شکل (۱۶ ـ ۴) نشان داده شده و شامل تبدیل‌کننده رشته گسسته به رشته ضربه و فیلتر پائین‌گذر بازیابی سیگنال پیوسته در زمان می‌باشد.



شکل ۱۶-۴- مبدل D / C

با توجه به مباحث مطرح شده در این بخش می‌توان نتیجه گرفت اگر سیستم گسسته در زمان یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ باشد آن‌گاه سیستم پیوسته در زمان کل با ورودی $x_c(t)$ و خروجی $y_c(t)$ نیز یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H_c(j\omega)$ است و داریم: (ω_s فرکانس نمونه‌برداری است)

$$H_c(j\omega)=\begin{cases} H_d\left(e^{j\omega T_s}\right) & |\omega|<\frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega|>\frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

بنابراین برای تعیین پاسخ فرکانسی سیستم پیوسته در زمان از روی پاسخ فرکانسی سیستم گسسته در زمان باید در پاسخ فرکانسی سیستم گسسته در زمان Ω را به ωT_s تبدیل کرده (فشرده یا گسترده کردن) و سپس در محدوده $|\omega|<\frac{\omega_s}{2}$ (یا $|\Omega|<\pi$) از یک پریود آن استفاده کرد.

مثال: می‌دانیم پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر پیوسته در زمان $H_c(j\omega)=j\omega$ است. پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر گسسته در زمان (مشتق‌گیر دیجیتال) را تعیین کنید. فرض کنید سیگنال ورودی باند محدود با حداکثر فرکانس W است.

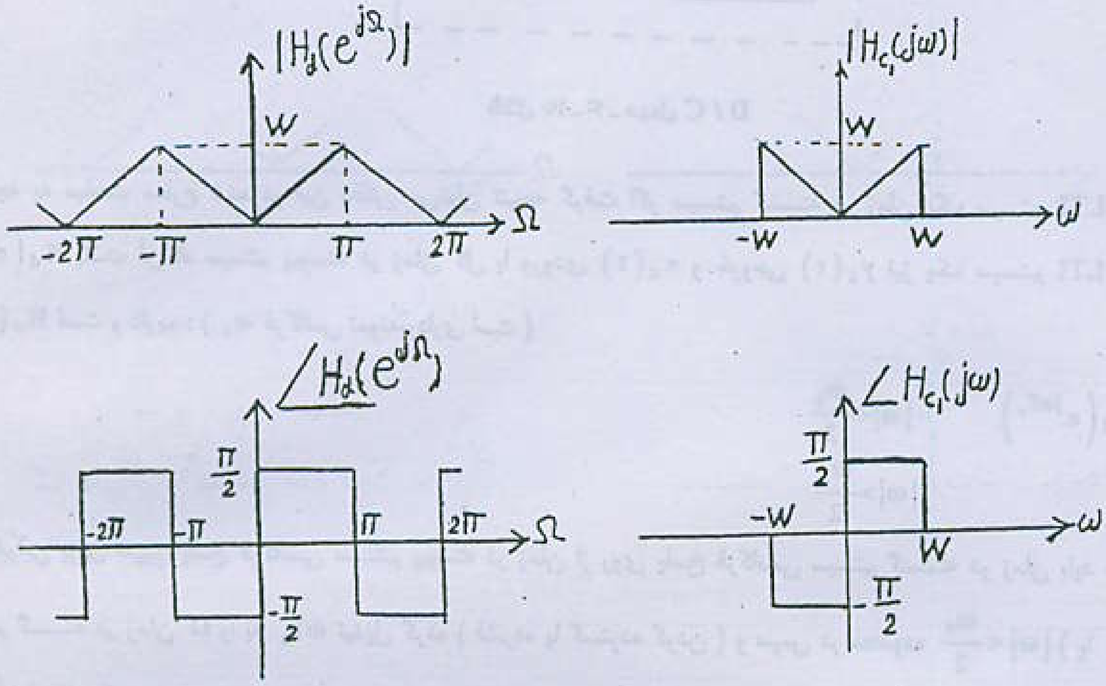
حل: ابتدا پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر پیوسته در زمان را به باند فرکانسی سیگنال ورودی محدود می‌کنیم:

$$H_{c_1}(j\omega)=\begin{cases} j\omega & |\omega|<W \\ 0 & |\omega|>W \end{cases}$$

اگر فرکانس نمونه‌برداری را $\omega_s=2W$ انتخاب کنیم به‌دست می‌آوریم:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right)=j\left(\frac{\Omega}{T}\right) \quad |\Omega|<\pi$$ و $H\left(e^{j\Omega}\right)$ متناوب با دوره تناوب 2π

در شکل‌های زیر پاسخ دامنه و فاز مشتق پیوسته در زمان باند محدود و سیستم گسسته در زمانی که برای تحقق مشتق‌گیر فوق استفاده می‌شود، نشان داده شده‌اند :



خودآزمائی هشتم

۱ـ (سراسری ۸۳) رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ برای یک سیستم LTI زمان گسسته با معادله تفاضلی $y[n]-\frac{1}{2}y[n-2]+\frac{1}{16}y[n-4]=x[n]+x[n-1]$ داده شده است. خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+3\cos(\pi n)$ برابر است با:

۱) $\frac{9}{8}\cos(\pi n)$
۲) $\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$
۳) $\frac{32}{23}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$
۴) $\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{9}{8}\cos(\pi n)$

۲ـ یک سیستم گسسته در زمان با معادله تفاضلی $y[n]+2y[n-1]-y[n-2]=2x[n-2]$ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم یک ورودی متناوب با دوره تناوب $N=8$ اعمال کنیم، نسبت دامنه هارمونیک دوم خروجی به دامنه هارمونیک دوم ورودی چقدر است؟

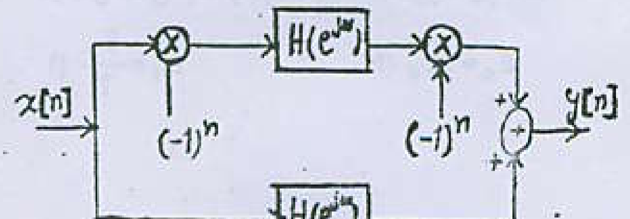
۱) 1
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
۴) هیچکدام

۳ـ (آزاد ۸۲ و آزاد ۸۳) رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم زمان گسسته LTI توسط معادله زیر توصیف شده است.

$$y[n]=-0.75y[n-1]+1.5x[n]$$

۱) سیستم یک فیلتر بالا گذران از نوع FIR است.
۲) سیستم یک فیلتر بالا گذران از نوع IIR است.
۳) سیستم یک فیلتر پائین‌گذران از نوع FIR است.
۴) سیستم یک فیلتر پائین گذران از نوع IIR است.

۴ـ (آزاد ۸۰) یک فیلتر پائین گذر ایده‌آل گسسته در زمان با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ دارای فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$ و بهره 1 در باند عبور می‌باشد. سیستم مقابل چه نوع فیلتری می‌باشد؟



۱) پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$
۲) پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{3\pi}{4}$
۳) میان گذر ایده‌آل با فرکانس‌های قطع $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$
۴) میان نگذر ایده‌آل با فرکانس‌های قطع $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

۵ـ (سراسری ۷۹) دو سیستم زمان گسسته LTI توسط معادلات تفاضلی زیر توصیف شده‌اند:

سیستم ۱: $y_1[n]=0.9y_1[n-1]+0.1x_1[n]$

سیستم ۲: $y_2[n]=-0.9y_2[n-1]+0.1x_2[n]$

کدام گزینه در مورد این دو سیستم صحیح است؟

۱) هر دو سیستم فیلترهای بالاگذر هستند.
۲) هر دو سیستم فیلترهای پائین‌گذر هستند.
۳) سیستم ۱ فیلتر پائین‌گذر و سیستم ۲ فیلتر بالاگذر است.
۴) سیستم ۱ فیلتر بالاگذر و سیستم ۲ فیلتر پائین‌گذر است.

۶ـ (سراسری ۸۰) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب با پریود اصلی N و ضرایب سری فوریه $a[k]$ در نظر می‌گیریم. $a[n]$ نیز سیگنالی متناوب است. ضرایب سری فوریه آن کدام است؟

۱) $x[k]$ ۲) $x[-k]$ ۳) $\frac{1}{N}x[k]$ ۴) $\frac{1}{N}x[-k]$

۷ـ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=\frac{2}{(2-t^2)+j3t}$ کدام است؟

۱) $2\left(e^{-\omega}-e^{-2\omega}\right)u(\omega)$ ۲) $2\left(e^{\omega}-e^{2\omega}\right)u(-\omega)$

۳) $4\pi\left(e^{-\omega}-e^{-2\omega}\right)u(\omega)$ ۴) $4\pi\left(e^{\omega}-e^{2\omega}\right)u(-\omega)$

۸ـ اگر ضرایب سری فوریه سیگنال گسسته در زمان و متناوب $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N را $a_k=y[k]$ بنامیم، ضرایب سری فوریه سیگنال گسسته و متناوب $y^*[-n+1]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{N}e^{j\frac{2k\pi}{N}}x^*[k]$ ۲) $\frac{1}{N}e^{-j\frac{2k\pi}{N}}x^*[-k]$

۳) $e^{-j\frac{2k\pi}{N}}x^*[-k]$ ۴) $e^{j\frac{2k\pi}{N}}x^*[k]$

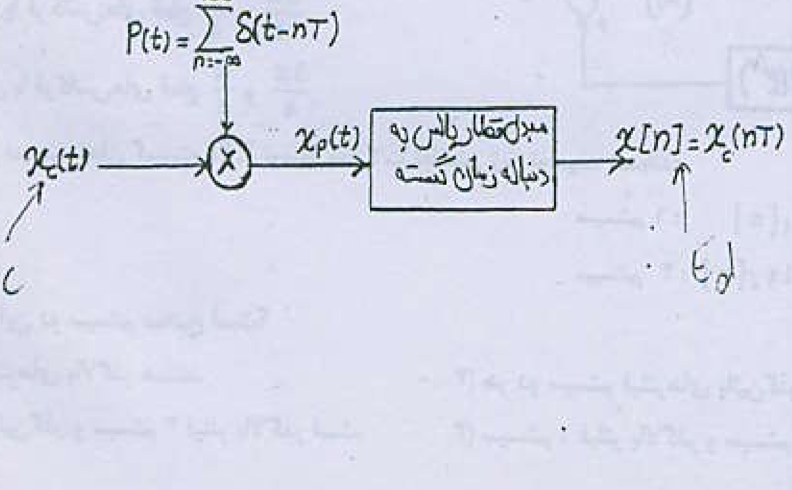
۹ـ ضرایب سری فوریه سیگنال پیوسته در زمان و متناوب $x(t)=\frac{1}{\left(2+e^{-jt}\right)^2}$ کدام است؟

۱) $a_k=k\left(\frac{-1}{2}\right)^k u[k]$ ۲) $a_k=(1+k)\left(\frac{1}{2}\right)^k u[-k]$

۳) $a_k=(1-k)\left(-\frac{1}{2}\right)^{2-k}u[-k]$ ۴) $a_k=(1+k)\left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]$

۱۰ـ (سراسری ۷۹) سیگنال $x_c(t)$ که از نظر پهنای باند محدود است با نرخی بیش از نرخ نایکوئیست نمونه برداری می‌شود. نمونه‌ها که به فاصله T ثانیه از یکدیگر فاصله دارند به یک دنباله $x[n]$ مطابق شکل زیر تبدیل می‌شوند. رابطه بین انرژی دنباله E_d و انرژی سیگنال اصلی E_c و بازه T به کدام صورت زیر است:

۱) $E_c=\frac{E_d}{T}$ ۲) $E_c=TE_d$ ۳) $E_c=T^2E_d$ ۴) $E_c=\frac{E_d}{T^2}$



یادداشت

۱۷ـ تبدیل لاپلاس

در این بخش ابتدا به معرفی تبدیل لاپلاس و مفاهیم اولیه از جمله نواحی همگرائی، صفر و قطب و... می‌پردازیم. سپس خواص تبدیل لاپلاس بررسی گردیده و کاربرد آن‌ها در تعیین تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پیچیده‌تر و تحلیل سیستم‌های LTI ارائه می‌گردند. در نهایت در بخش آخر تحلیل و توصیف کامل سیستم‌های LTI توسط تبدیل لاپلاس، جبر تابع سیستم و نمایش سیستم‌ها بررسی می‌گردند.

۱۷ـ۱ـ معرفی تبدیل لاپلاس و مفاهیم اولیه

در بخش‌های قبل ملاحظه گردید سیگنال e^{st} یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI پیوسته در زمان است. اگر s یک عدد مختلط در نظر گرفته شود $(s=\sigma+j\omega)$ آنگاه به تبدیل لاپلاس می‌رسیم. به طور کلی تبدیل لاپلاس دو طرفه یک سیگنال پیوسته در زمان مانند $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

در رابطه فوق s یک عدد مختلط است و به صورت $s=\sigma+j\omega$ نشان داده می‌شود.

تذکر: لفظ دو طرفه برای تبدیل لاپلاس به دلیل استفاده از حدود $-\infty$ تا $+\infty$ برای انتگرال است. در تبدیل لاپلاس یک طرفه حدود انتگرال از 0^- (یا 0^+) تا $+\infty$ انتخاب می‌شود و داریم:

$$X(s)=L_1\{x(t)\}=\int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

در این درس به دلیل آن که سیستم‌ها لزوماً علی نیستند تبدیل لاپلاس دو طرفه مفیدتر می‌باشد. لذا هرگاه لفظ تبدیل لاپلاس استفاده گردید منظور تبدیل لاپلاس دوطرفه است و در هنگام استفاده از تبدیل لاپلاس یک طرفه، لفظ یک طرفه آورده می‌شود.

تذکر: ارتباط تبدیل لاپلاس با تبدیل فوریه عبارت است از:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}\cdot e^{-j\omega t}\,dt=F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

بنابراین تبدیل لاپلاس $x(t)$ در واقع تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ است و در نتیجه اگر $x(t)e^{-\sigma t}$ تبدیل فوریه داشته باشد، آنگاه $x(t)$ تبدیل لاپلاس دارد. با توجه به آن‌که شرط اصلی برای همگرایی تبدیل فوریه مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن $x(t)$ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت شرط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن $x(t)e^{-\sigma t}$ است. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\,dt<\infty$$

وجود عبارت $e^{-\sigma t}$ باعث می‌شود یک درجه آزادی تحت عنوان σ جهت نزولی کردن عبارت زیر انتگرال و مطلقاً انتگرال‌پذیر کردن آن داشته باشیم. به عبارت دیگر ممکن است $x(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر نباشد اما بتوان محدوده σ را به گونه‌ای انتخاب کرد که $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر گردد. در نتیجه ممکن است سیگنالی تبدیل فوریه نداشته باشد اما بتوان محدوده‌ای از σ برای آن بدست آورد که در آن محدوده دارای تبدیل لاپلاس گردد. در نتیجه تعداد سیگنال‌هایی که تبدیل لاپلاس دارند بیشتر از تعداد سیگنال‌هایی است که تبدیل فوریه دارند. بحث فوق در مورد وجود یا عدم وجود تبدیل لاپلاس به ازای برخی از σ ها به تعریف ناحیه همگرائی (ROC) منجر می‌شود.

تعریف ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل لاپلاس: محدوده‌ای از صفحه مختلط که به ازاء آن تبدیل لاپلاس برای یک سیگنال پیوسته در زمان وجود دارد را ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل لاپلاس آن سیگنال می‌نامند. در ادامه خواص ROC بیشتر بررسی خواهند شد.

با توجه به تعریف ناحیه همگرائی (ROC) و این واقعیت که هنگام تبدیل فوریه گرفتن ازیک سیگنال فقط محور $j\omega$ برای گرفتن تبدیل انتخاب می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت:

«اگر سیگنالی تبدیل فوریه داشته باشد آنگاه لزوماً تبدیل لاپلاس نیز دارد (زیرا حداقل $\sigma = 0$ جزء ROC آن است). اما اگر سیگنالی تبدیل لاپلاس داشته باشد تنها در صورتی تبدیل فوریه دارد که ROC تبدیل لاپلاس آن شامل محور $j\omega$ باشد.»

تعریف صفر و قطب و نمودار صفر و قطب: تبدیل لاپلاس یک سیگنال معمولاً یک تابع گویا از s است و آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

در رابطه فوق $N(s)$ و $D(s)$ به ترتیب چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج هستند. بنا به تعریف ریشه‌های چند جمله‌ای صورت تبدیل لاپلاس را صفرهای $X(s)$ می‌نامند و به ازاء این ریشه‌ها $X(s) = 0$ می‌گردد. ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج تبدیل لاپلاس را قطب‌های $X(s)$ می‌نامند و به ازاء این ریشه‌ها $X(s) = \infty$ می‌گردد. به عبارت دیگر داریم:

$$X(s)=0 \;\Rightarrow\; N(s)=0 \;\Rightarrow\; s=z_1,z_2,\ldots,z_M \;:\; X(s) \text{ صفرهای}$$

$$X(s)=\infty \;\Rightarrow\; D(s)=0 \;\Rightarrow\; s=p_1,p_2,\ldots,p_N \;:\; X(s) \text{ قطب‌های}$$

صفرها و قطب‌های تبدیل لاپلاس یک سیگنال در حالت کلی اعدادمختلط می‌باشند و می‌توان آن‌ها را در صفحه مختلط نمایش داد. صفرها با علامت O و قطب‌ها با علامت × در صفحه مختلط مشخص می‌گردند. نمایش صفرها و قطب‌ها در صفحه مختلط را نمودار صفر و قطب تبدیل لاپلاس می‌نامند.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ را بدست آورید.

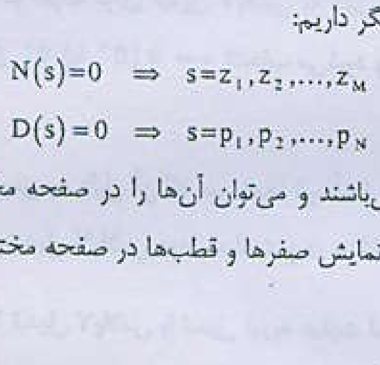
حل:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}.\,e^{-st}\,dt=\left.\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\right|_{0}^{+\infty}$$

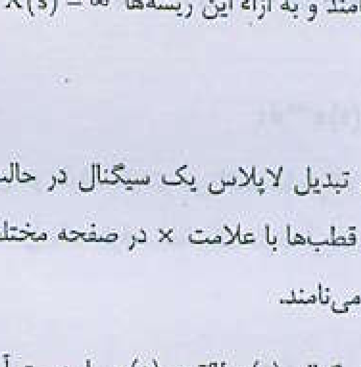
حاصل انتگرال فوق ممکن است به ازاء $t=+\infty$ واگرا شود. برای جلوگیری از این امر باید داشته باشیم:

$$\alpha+\mathrm{Re}\{s\}>0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$$

شرط بدست آمده در واقع ROC تبدیل لاپلاس را مشخص می‌کند و در شکل‌های زیر به ازاء $\alpha > 0$ و $\alpha < 0$ رسم شده‌اند:



$\alpha<0$



$\alpha>0$

با فرض $Re\{s\} > -\alpha$ خواهیم داشت:

$$X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$$

دقت کنید به ازاء $\alpha > 0$ محور $j\omega$ در ROC قرار می‌گیرد ودر نتیجه سیگنال $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ به ازاء $\alpha > 0$ تبدیل فوریه دارد. همچنین توجه کنید که تبدیل لاپلاس فوق یک قطب در $s=-\alpha$ دارد.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$ را بدست آورید.

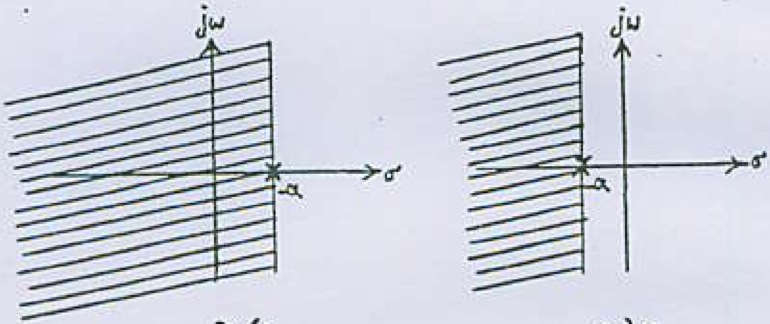
حل:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0} -e^{-\alpha t}.e^{-st}dt=\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{(\alpha+s)}\bigg|_{-\infty}^{0}$$

حاصل انتگرال فوق ممکن است به ازاء $t=-\infty$ واگرا شود. برای جلوگیری از این امر باید داشته باشیم:

$$\alpha+Re\{s\}<0 \Rightarrow Re\{s\}<-\alpha$$

شرط بدست آمده در واقع ROC تبدیل لاپلاس را مشخص می‌کندکه در شکل‌های زیر به ازاء $\alpha > 0$ و $\alpha < 0$ رسم شده‌اند:



$\alpha<0$ $\qquad$ $\alpha>0$

با فرض $Re\{s\} < -\alpha$ خواهیم داشت:

$$X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$$

دقت کنید که به ازاء $\alpha < 0$ محور $j\omega$ در ROC قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال $x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$ به ازاء $\alpha < 0$ تبدیل فوریه دارد. همچنین توجه کنید تبدیل لاپلاس فوق یک قطب در $s=-\alpha$ دارد.

نکته: دقت کنید تبدیل لاپلاس هر دو سیگنال $e^{-\alpha t}u(t)$ و $-e^{-\alpha t}u(-t)$ یکسان و برابر $\frac{1}{s+\alpha}$ است. تنها وجه تمایز تبدیل لاپلاس این دو سیگنال نواحی همگرائی آن‌هاست که برای یکی $Re\{s\} > -\alpha$ و برای دیگری $Re\{s\} < -\alpha$ است. لذا ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس جهت محاسبه عکس تبدیل لاپلاس هر سیگنال لازم است. به عبارت دیگر در این مورد خاص داریم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\right\}=\begin{cases} e^{-\alpha t}u(t) & Re\{s\}>-\alpha \\ -e^{-\alpha t}u(-t) & Re\{s\}<-\alpha \end{cases}$$

تذکر: در تبدیل لاپلاس یک طرفه موضوعی تحت عنوان ROC مطرح نیست. دلیل این امر حدود انتگرال در تبدیل لاپلاس یکطرفه است که از صفرتا $+\infty$ است. لذا در هنگام عکس تبدیل لاپلاس گرفتن هیچگونه ابهامی نداریم و سیگنال واقع در $t > 0$ را انتخاب می‌کنیم.

تذکر: با قرار دادن $\alpha = 0$ در روابط بدست آمده می‌توان تبدیل لاپلاس $u(t)$ و $-u(-t)$ را بدست آورد:

$$L\{u(t)\}=\frac{1}{s} \qquad \text{Re}\{s\}>0$$

$$L\{-u(-t)\}=\frac{1}{s} \qquad \text{Re}\{s\}<0$$

تذکر: برخی از سیگنال‌ها اهمیت زیادی در تعیین تبدیل لاپلاس یاعکس تبدیل لاپلاس سیگنال‌ها دارند. لذا دانستن تبدیل لاپلاس آن‌ها مفید می‌باشد. در جدول (۱۷ ـ ۱) برخی از این سیگنال‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود.

سیگنال	تبدیل لاپلاس	ROC
$x(t)=\delta(t)$	$X(s)=1$	تمام صفحه s
$x(t)=u(t)$	$X(s)=\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\}>0$
$x(t)=-u(-t)$	$X(s)=\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\}<0$
$x(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$X(s)=\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re}\{s\}>0$
$x(t)=-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$X(s)=\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re}\{s\}<0$
$x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$	$X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$	$\operatorname{Re}\{s\}>-\alpha$
$x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$	$X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$	$\operatorname{Re}\{s\}<-\alpha$
$x(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$X(s)=\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\operatorname{Re}\{s\}>-\alpha$
$x(t)=-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$X(s)=\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\operatorname{Re}\{s\}<-\alpha$
$x(t)=\delta(t-T)$	$X(s)=e^{-sT}$	تمام صفحه s
$x(t)=[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$X(s)=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\}>0$
$x(t)=[\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$X(s)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\}>0$
$x(t)=[e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$X(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\}>-\alpha$
$x(t)=[e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$X(s)=\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\}>-\alpha$
$x(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	$X(s)=s^n$	تمام صفحه s
$x(t)=u_{-n}(t)=\underbrace{u(t)*\dots*u(t)}_{\text{n بار}}$	$X(s)=\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re}\{s\}>0$

جدول ۱۷ـ۱ ـ تبدیل لاپلاس برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ را بدست آورید.

حل: از جدول (۱۷ ـ ۱) استفاده کرده وتبدیل لاپلاس هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آوریم:

$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1 \qquad -\infty < \mathrm{Re}\{s\} < +\infty$$

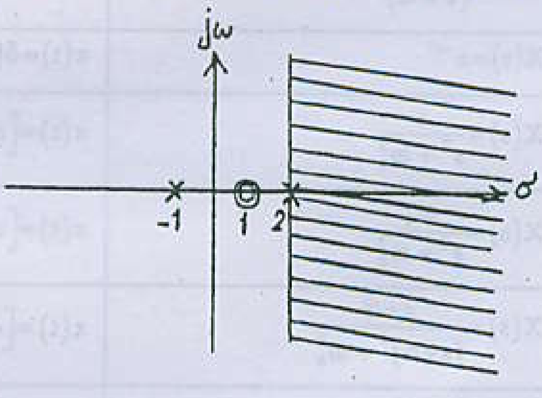
$$-\frac{4}{3}e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{-\frac{4}{3}}{s+1} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{\frac{1}{3}}{s-2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

در صورتی که نواحی همگرایی جملات فوق با یکدیگر اشتراک داشته باشند، آنگاه طبق خاصیت خطی تبدیل لاپلاس، می‌توان تبدیل لاپلاس آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد. بنابراین داریم:

$$X(s)=1+\frac{-\frac{4}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}=\frac{(s+1)(s-2)-\frac{4}{3}(s-2)+\frac{1}{3}(s+1)}{(s+1)(s-2)}=\frac{s^2-2s+1}{(s+1)(s-2)}=\frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>2$$

دقت کنید ناحیه همگرائی اشتراک سه ناحیه همگرایی می‌باشد و در شکل زیر نشان داده شده است. همچنین صفرها و قطب‌های تبدیل نیز نشان داده شده‌اند. همچنین ملاحظه می‌کنید سیگنال فاقد تبدیل فوریه است زیرا ROC تبدیل لاپلاس فاقد محور $j\omega$ است.



مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=e^{t}u(t)+u(-t)$ را بدست آورید.

حل: از جدول (۱۷ ـ ۱) استفاده کرده و تبدیل لاپلاس هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آوریم:

$$e^{t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s-1} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>1$$

$$u(-t) \xrightarrow{L} \frac{-1}{s} \qquad \mathrm{Re}\{s\}<0$$

چون دو نواحی همگرائی هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند، بنابراین $x(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد. بدیهی است این سیگنال فاقد تبدیل فوریه می‌باشد.

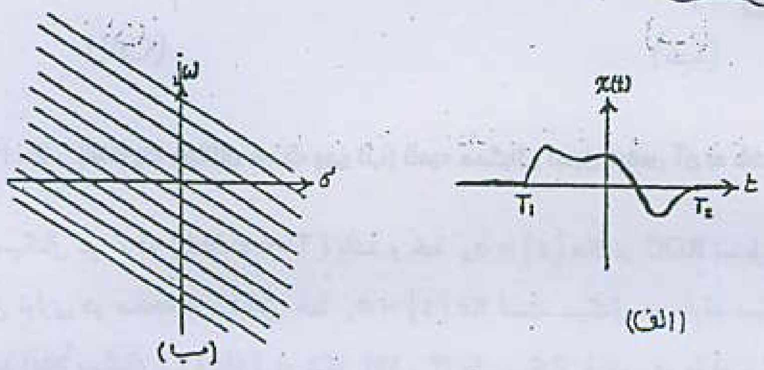
خواص ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل لاپلاس: در بخش قبل دیدیم برای مشخص کردن کامل تبدیل لاپلاس، هم عبارت جبری $X(s)$ و هم ناحیه همگرائی آن لازم است. در این بخش برخی خواص ROC را بررسی کرده و خواهیم دید ROC سیگنال‌ها تا حدودی به شکل آن‌ها در حوزه زمان بستگی دارد.

(۱) ROC تبدیل لاپلاس در صفحه s از نوارهائی موازی با محور $j\omega$ تشکیل می‌شود.

(۲) ROC تبدیل لاپلاس‌های گویا هیچ قطبی را شامل نمی‌شوند.

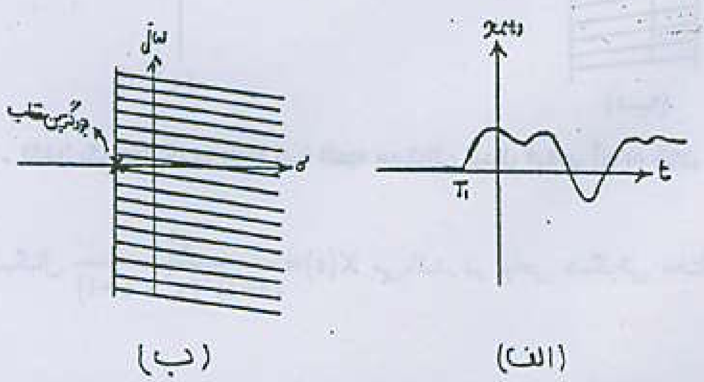
(۳) اگر $x(t)$ یک سیگنال با عرض محدود (Finite Duration) و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه ROC تبدیل لاپلاس آن کل صفحه s می‌باشد. سیگنال با عرض محدود سیگنالی است که به ازاء $t < T_1$ و $t > T_2$ برابر صفر می‌باشد (مثلاً سیگنال $\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$).

در شکل (۱۷ ـ ۱) یک سیگنال فرضی با عرض محدود و ROC تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، تبدیل لاپلاس سیگنال با عرض محدود فاقد قطب است.



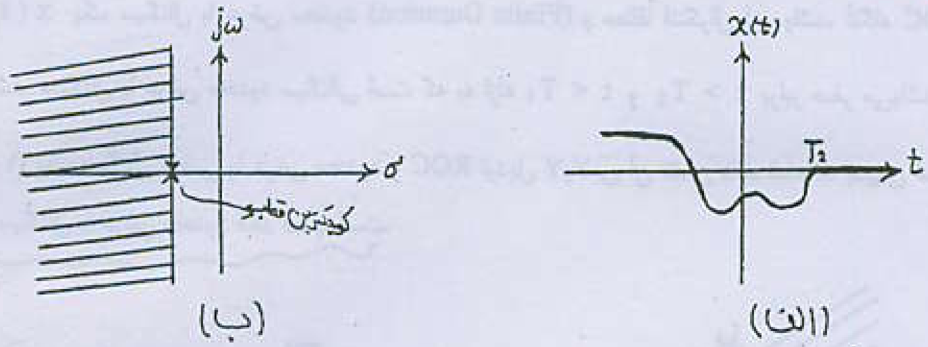
شکل ۱۷ ـ ۱ـ یک سیگنال با عرض محدود (ب) ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس آن که کل صفحه s است.

(۴) اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی (Right sided) باشد و خط $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر s با $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$ نیز در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار دارند. سیگنال سمت راستی سیگنالی است که به ازاء $t < T_1$ برابر صفر باشد (مثلاً سیگنال $u(t)$). در شکل (۱۷ ـ ۲) یک سیگنال فرضی سمت راستی و ROC تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت راستی بین بزرگترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن بزرگترین است) تا $+\infty$ می‌باشد.



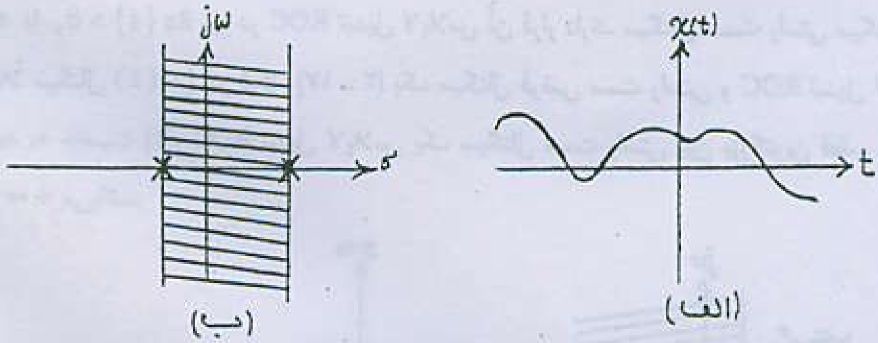
شکل ۱۷ـ ۲ ـ (الف) یک سیگنال سمت راستی (ب) ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس آن به شکل $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$

(۵) اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت چپی (Left sided) باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر s با $Re\{s\} < \sigma_0$ نیز در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار دارند. سیگنال سمت چپی سیگنالی است که به ازاء $t > T_2$ برابر صفر باشد (مثلاً سیگنال $u(-t)$). در شکل (۱۷ ـ ۳) یک سیگنال فرضی سمت چپی و ROC تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت چپی بین $-\infty$ تا کوچکترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن کوچکترین است) می‌باشد.



شکل ۱۷ـ۳ ـ (الف) یک سیگنال سمت چپی (ب) ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس آن به شکل $Re\{s\} < \sigma_0$

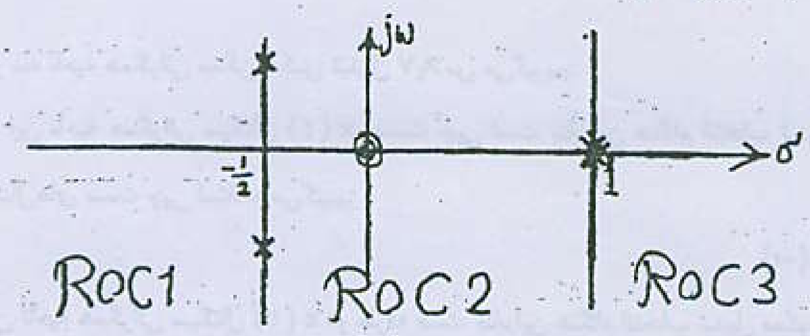
(۶) اگر $x(t)$ یک سیگنال دو طرفه (Two sided) باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه ROC تبدیل لاپلاس آن نواری در صفحه s و شامل خط $Re\{s\} = \sigma_0$ است. سیگنال دو طرفه سیگنالی است که گستره آن در محور زمان از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد (مثلاً سیگنال $\sin(t)$). در شکل (۱۷ ـ ۴) یک سیگنال فرضی دو طرفه و ROC تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال دوطرفه بین دو قطب متوالی (دوقطبی که قسمت‌های حقیقی آن‌ها متوالی است) می‌باشد.



شکل ۱۷ـ۴ ـ (الف) یک سیگنال دو طرفه (ب) ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس آن به شکل $\sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2$

مثال : تبدیل لاپلاس یک سیگنال $X(s)=\dfrac{s^2}{(s-1)^2(s^2+s+1)}$ می‌باشد. در نواحی همگرائی مختلف در مورد شکل این سیگنال بحث کنید.

حل: $X(s)$ دارای دو صفر در $s=0$ و چهار قطب که دو قطب در $s=1$ و دو قطب دیگر در $s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ قرار دارند، می‌باشد. نمودار صفر و قطب آن در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به شکل فوق ملاحظه می‌کنیم برای تبدیل لاپلاس فوق سه ناحیه همگرائی به شرح زیر وجود دارند:

ROC 1 : سیگنال $x(t)$ یک سیگنال سمت چپی است و تبدیل فوریه ندارد.

ROC 2 : سیگنال $x(t)$ یک سیگنال دو طرفه است و تبدیل فوریه دارد.

ROC 3 : سیگنال $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی است و تبدیل فوریه ندارد.

محاسبه عکس تبدیل لاپلاس: با انجام محاسبات ساده می‌توان معادله عکس تبدیل لاپلاس را به صورت زیر به دست آورد:

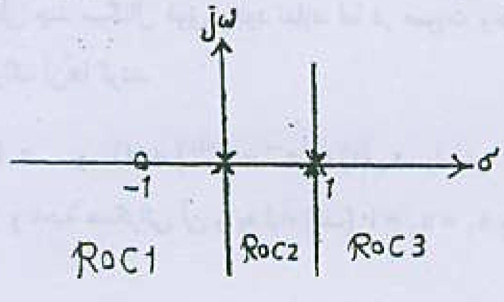
$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds \quad : \quad \text{معادله عکس تبدیل لاپلاس}$$

معادله فوق نشان می‌دهد که می‌توان $x(t)$ را با انتگرال‌گیری از حاصل ضرب $X(s)$ در تابع نمایی مختلط به‌دست آورد. مسیر انتگرال‌گیری روی خط $\text{Re}\{s\}=\sigma$ انتخاب می‌شود که در ناحیه همگرائی $X(s)$ قرار دارد.

عملاً برای عکس تبدیل لاپلاس گرفتن می‌توان از بسط یک کسر به کسرهای جزئی استفاده کرد. همچنین استفاده از خواص تبدیل لاپلاس جهت محاسبه عکس تبدیل لاپلاس مفید می‌باشد.

مثال: عکس تبدیل لاپلاس سیگنال $X(s)=\frac{s+1}{s(s-1)^2}$ را روی نواحی همگرائی مختلف آن به دست آورید.

حل: $X(s)$ یک صفر در $s=-1$ و دو قطب در $s=1$ و یک قطب دیگر در $s=0$ دارد. نمودار صفر و قطب آن در شکل زیر نشان داده شده است.



اگر $X(s)$ را به کسرهای جزئی بسط دهیم، داریم:

$$X(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}$$

حال روی هر سه ناحیه همگرائی ممکن عکس تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

ROC 1 : در این ناحیه همگرائی سیگنال $x(t)$ سمت چپی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جملات جدول (۱۷ ـ ۱) از سیگنال‌های سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x(t)=-u(-t)+e^t u(-t)-2te^t u(-t)$$

ROC 2 : در این ناحیه همگرائی سیگنال $x(t)$ دو طرفه است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جملات جدول (۱۷ ـ ۱) باید توامأ از سیگنال‌های سمت راستی و سمت چپی استفاده کنیم. با توجه به آن که ناحیه همگرائی ROC 2 برابر $1>\sigma>0$ است و این ناحیه همگرائی از اشتراک $\sigma>0$ و $\sigma<1$ بدست می‌آید، لذا در هنگام انتخاب سیگنال‌ها، برای قطب $\sigma=0$ از سیگنال سمت راستی و برای قطب $\sigma=1$ از سیگنال سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x(t)=u(t)+e^t u(-t)-2te^t u(-t)$$

ROC 3 : در این ناحیه همگرائی سیگنال $x(t)$ سمت راستی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام جملات جدول (۱۷ ـ ۱) از سیگنال‌های سمت راستی استفاده می‌کنیم:

$$x(t)=u(t)-e^t u(t)+2te^t u(t)$$

۱۷ ـ ۲ ـ خواص تبدیل لاپلاس

در این بخش به معرفی خواص تبدیل لاپلاس و کاربرد آن‌ها می‌پردازیم. به کمک این خواص می‌توان تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پیچیده‌تر را به دست آورد و در موارد دیگر از جمله تحلیل سیستم‌های LTI و سیستم‌های بیان شده توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت استفاده کرد. این خواص در جدول (۱۷ ـ ۲) آورده شده‌اند. فراگیری جدول فوق به دانشجویان توصیه می‌شود. دقت کنید در این جدول علاوه بر تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرائی تبدیل نیز اهمیت دارد.

(۱) خطی بودن: به دلیل استفاده از اپراتور انتگرال جهت محاسبه تبدیل لاپلاس، خاصیت خطی برای تبدیل لاپلاس وجوددارد.دقت کنید ناحیه همگرائی ترکیب خطی چند سیگنال، بزرگتر یا مساوی اشتراک نواحی همگرائی آن‌ها می‌باشد. اگر بین این نواحی اشتراک وجود نداشته باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس ترکیب خطی چند سیگنال فوق وجود ندارد. اما در صورت وجود اشتراک، ممکن است حذف صفرها و قطب‌ها باعث بزرگتر شدن ناحیه همگرائی اشتراک آن‌ها گردد.

مثال: دو سیگنال $x_1(t)=e^{-t}u(t)$ و $x_2(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس ترکیب خطی $y(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ و ناحیه همگرائی آن را به ازاء (الف) $a_1=a_2=1$ و (ب) $a_1=-a_2=1$ بدست آورید.

حل: تبدیل لاپلاس $x_1(t)$ برابر $X_1(s)=\frac{1}{s+1}$ با ناحیه همگرائی $Re\{s\}>-1$ و تبدیل لاپلاس $x_2(t)$ برابر

$$X_2(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

با ناحیه همگرائی $Re\{s\}>-1$ می‌باشند.

(الف) در این حالت داریم:

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

ناحیه همگرائی این تبدیل $Re\{s\}>-1$ است.

(ب) در این حالت داریم:

$$y(t)=x_1(t)-x_2(t) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2}$$

ناحیه همگرائی این تبدیل $Re\{s\}>-2$ است. ملاحظه می‌کنید به دلیل حذف صفر و قطب در تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرائی بزرگتر از اشتراک نواحی همگرائی شده است.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان جابجا شود، تبدیل لاپلاس آن در e^{-st_0} ضرب می‌شود. ناحیه همگرائی تغییر نمی‌کند زیرا e^{-st_0} هیچ قطبی اضافه یا حذف نمی‌کند.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$ را بدست آورید.

حل:

$$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)=u(t+T)-u(t-T) \Rightarrow X(s)=\frac{e^{sT}}{s}-\frac{e^{-sT}}{s}=\frac{e^{sT}-e^{-sT}}{s} \quad Re\{s\}>0$$

(۳) جابجایی فرکانسی: با ضرب e^{s_0t} در یک سیگنال، تبدیل لاپلاس آن در حوزه s جابجا می‌شود. این جابجایی در حوزه s باعث جابجایی صفرها و قطب‌های تبدیل لاپلاس و در نتیجه ناحیه همگرائی می‌شود.

(۴) تغییر مقیاس زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان تغییر مقیاس پیدا کند آنگاه در حوزه s نیز تغییر مقیاس خواهد یافت. این تغییر مقیاس در حوزه s برعکس حوزه زمان می‌باشد و باعث فشرده یا گسترده شدن ناحیه همگرائی می‌شود. فشرده شدن سیگنال باعث گسترده شدن ROC و گسترده شدن سیگنال باعث فشرده شدن ROC می‌شود.

تست نمونه ـ فرض کنید $g(t)=x(t)+\alpha x(-t)$ که در آن $x(t)=\beta e^{-t}u(t)$ و تبدیل لاپلاس $g(t)$ برابر $G(s)=\frac{s}{s^2-1}$ و $-1<Re\{s\}<1$ است. مقدار ثابت‌های α و β کدام می‌باشند؟

۱) $\alpha=1 \quad , \quad \beta=0$ ۲) $\alpha=-1 \quad , \quad \beta=\frac{1}{2}$ ۳) $\alpha=1 \quad , \quad \beta=1$ ۴) هیچکدام

حل :

$$g(t)=x(t)+\alpha x(-t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=X(s)+\alpha X(-s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s}{s^2-1}=\frac{\beta}{s+1}+\frac{\alpha\beta}{-s+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{s^2-1}=\frac{\beta(\alpha-1)s+\beta(\alpha+1)}{1-s^2}$$

$$\beta(\alpha+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1$$

$$\beta(\alpha-1)=-1 \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

خاصیت	سیگنال	تبدیل لاپلاس	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	$R:\alpha<\mathrm{Re}\{s\}<\beta$
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
خطی بودن	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	حداقل $R_1\cap R_2$
جابجائی زمانی	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
جابجایی در حوزه s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$\alpha+\mathrm{Re}\{s_0\}<\mathrm{Re}\{s\}<\beta+\mathrm{Re}\{s_0\}$
تغییر مقیاس زمانی	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\alpha a<\mathrm{Re}\{s\}<\beta a \quad a>0$ $\beta a<\mathrm{Re}\{s\}<\alpha a \quad a<0$
مزدوج‌گیری	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
کانولوشن	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	حداقل $R_1\cap R_2$
مشتق‌گیری زمانی	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	حداقل R
مشتق‌گیری در حوزه s	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R
انتگرال‌گیری زمانی	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	حداقل $R\cap(\mathrm{Re}\{s\}>0)$

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی: اگر در $t<0$ داشته باشیم $x(t)=0$ و $x(t)$ در $t=0$ ضربه و توابع تکین مرتبه بالاتر نداشته باشد، آنگاه:

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s) \quad , \quad x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)$$

جدول ۱۷ ـ ۲ ـ خواص تبدیل لاپلاس

(۵) مزدوج‌گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن مزدوج گردیده و علاوه بر آن s نیز مزدوج می‌شود. ناحیه همگرائی با مزدوج‌گیری تغییر نمی‌کند.

مثال: اگر تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ را با $X(s)$ نشان دهیم، آنگاه تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t) = 2x(3t)+e^{2t}x^*(t)+3x(-t+2)$ را بدست آورید.

حل:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$$

$$2x(3t) \xrightarrow{L} \frac{2}{3}X\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$x^*(t) \xrightarrow{L} X^*(s^*)$$

$$e^{2t}x^*(t) \xrightarrow{L} X^*(s^*-2)$$

$$x(t+2) \xrightarrow{L} e^{2s}X(s)$$

$$3x(-t+2) \xrightarrow{L} 3e^{-2s}X(-s)$$

بنابراین داریم:

$$Y(s)=\frac{2}{3}X\left(\frac{s}{3}\right)+X^*(s^*-2)+3e^{-2s}X(-s)$$

توجه داشته باشید $Y(s)$ درصورتی وجود دارد که ROC آن تهی نباشد.

(۶) کانولوشن: تبدیل لاپلاس مانند سایر اپراتورهای بر مبنای توابع ویژه، کانوالو دو سیگنال در حوزه زمان را به ضرب در حوزه s تبدیل می‌کند. از آنجائیکه هنگام ضرب تبدیل لاپلاس‌ها ممکن است حذف صفر و قطب اتفاق بیفتد، بنابراین ناحیه همگرائی حداقل اشتراک دو ناحیه همگرائی است. از این خاصیت در تحلیل سیستم‌های LTI استفاده می‌شود.

(۷) مشتق‌گیری زمانی: یکی از مهم‌ترین خواص تبدیل لاپلاس مشتق‌گیری زمانی است. اگر از سیگنالی در حوزه زمان مشتق گرفته شود، تبدیل لاپلاس آن در s ضرب می‌شود. چون ضرب s در تبدیل لاپلاس ممکن است باعث حذف قطب گردد، بنابراین ناحیه همگرائی حداقل R است. از این خاصیت برای تحلیل سیستم‌های بیان شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت استفاده میشود.

مثال: یک سیستم LTI پیوسته در زمان با معادله دیفرانسیل ورودی ـ خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=x(t)$$

تابع تبدیل $H(s)$ این سیستم را بدست آورده و پاسخ سمت راستی سیستم به ورودی $x(t)=e^{-2t}u(t)$ را بدست آورید.

حل: از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس گرفته و به دست می‌آوریم:

$$\left(s^2-s-2\right)Y(s)=X(s) \;\Rightarrow\; H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{(s-2)(s+2)(s+1)}=\frac{\frac{1}{12}}{s-2}+\frac{\frac{1}{4}}{s+2}+\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}$$

با توجه به آن‌که $y(t)$ سمت راستی است داریم:

$$y(t)=\left(\frac{1}{12}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-t}\right)u(t)$$

(۸) مشتق‌گیری در حوزه s : با هر بار ضرب یک سیگنال در $-t$ ، از تبدیل لاپلاس آن مشتق گرفته می‌شود. به دلیل آن که با مشتق گرفتن از تبدیل لاپلاس قطب‌های آن کم نمی‌شود و قطب جدید نیز بوجود نمی‌آید، بنابراین ناحیه همگرائی تغییر نمی‌کند.

(۹) انتگرال‌گیری زمانی: اگر از سیگنال زمانی انتگرال گرفته شود، آنگاه تبدیل لاپلاس آن ضربدر $\frac{1}{s}$ می‌شود. از آنجائیکه پاسخ ضربه یک انتگرال‌گیر تابع پله واحد می‌باشد و ناحیه همگرائی آن $\mathrm{Re}\{s\}>0$ است، بنابراین ROC تبدیل لاپلاس آن حداقل اشتراک R با $\mathrm{Re}\{s\}>0$ است.

نکته: از آنجائیکه پاسخ ضربه سیستم با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\int_t^{+\infty}x(\tau)d\tau$ برابر $u(-t)$ است و با توجه به تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرائی $u(-t)$ داریم:

$$L\left\{\int_t^{+\infty}x(\tau)d\tau\right\}=-\frac{X(s)}{s} \qquad \mathrm{ROC}: R\cap \mathrm{Re}\{s\}<0$$

2 علی باشد 1

(۱۰) قضایای مقدار اولیه و مقدار نهائی: این قضیه برای توابعی است که در $t<0$ صفر باشند و در $t=0$ فاقد ضربه و توابع تکین باشند. توسط این قضیه مقدار اولیه و نهائی سیگنال از روی تبدیل لاپلاس آن به دست می‌آیند.

مثال: سیگنال $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}\cos(3t)u(t)$ را در نظر بگیرید. صحت قضیه مقدار اولیه را برای این سیگنال تحقیق کنید.

حل: مقدار این سیگنال در لحظه $t=0$ برابر است با:

$$x\left(0^-\right)=2$$

حال اگر از این سیگنال تبدیل لاپلاس گرفته شود، داریم:

$$X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{s+1}{(s+1)^2+9}$$

اگر از قضیه مقدار اولیه استفاده کنیم، داریم:

$$x\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{s+2}+\frac{s(s+1)}{s^2+2s+10}\right)=1+1=2$$

تذکر: در مورد تبدیل لاپلاس یک طرفه، کلیه خواص ذکر شده غیر از خاصیت مشتق در حوزه زمان یکسان می‌باشند. این خاصیت به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} \xrightarrow{L} sX(s)-x(0^-)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \xrightarrow{L} s^2X(s)-sx(0^-)-x'(0^-)$$

$$\vdots$$

به کمک این خاصیت می‌توان معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و با شرایط اولیه را حل کرد.

مثال: یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل ورودی ـ خروجی $y''+3y'+2y=2x$ را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد با شرایط اولیه $y(0^-)=3$ و $y'(0^-)=-5$ را بدست آورید.

حل: از طرفین معادله فوق تبدیل لاپلاس یکطرفه می‌گیریم:

$$(s^2Y(s)-3s+5)+3(sY(s)-3)+2Y(s)=\frac{2}{s} \Rightarrow Y(s)(s^2+3s+2)=\frac{2}{s}+3s+4$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{3s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2} \Rightarrow y(t)=(1-e^{-t}+3e^{-2t})u(t)$$

۱۷ ـ ۳ ـ تحلیل و توصیف سیستم های LTI با تبدیل لاپلاس واتصال آن‌ها

یکی از کاربردهای مهم تبدیل لاپلاس تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI است. اگراز خاصیت کانولوشن در حوزه زمان برای یک سیستم LTI استفاده کنیم، داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t) \Rightarrow Y(s)=X(s)H(s)$$

به عبارت دیگر تبدیل لاپلاس خروجی برابر تبدیل لاپلاس ورودی در تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه (تابع انتقال یا تابع سیستم یا تابع تبدیل) می‌باشد و با عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از $Y(s)$ می‌توان $y(t)$ را بدست آورد. همچنین با توجه به آن که e^{st} یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI می‌باشد، اگر $x(t)=e^{st}$ به سیستم اعمال شود، خروجی $y(t)=H(s)e^{st}$ خواهد شد.

تذکر: رابطه $Y(s)=H(s)X(s)$ فقط هنگامی صادق است که ناحیه همگرائی $Y(s)$ که از اشتراک نواحی همگرائی $X(s)$ و $H(s)$ به‌دست می‌آید تهی نباشد. در غیر این صورت باید از قضیه کانولوشن برای به‌دست آوردن $y(t)$ استفاده کرد.

تذکر: رابطه $y(t)=H(s)e^{st}$ پاسخ حالت دائم سیستم را می‌دهد و برای تعیین پاسخ‌گذرای سیستم باید از قطب‌های $H(s)$ (فرکانس‌های طبیعی سیستم) استفاده کرد.

مثال : پاسخ ضربه یک سیستم LTI در رابطه $\frac{dh(t)}{dt}+4h(t)=u(t)+2\delta(t)$ صدق می‌کند. اگر خروجی سیستم به ازاء تمام زمان‌ها به ورودی $x(t)=e^{t}$ برابر $y(t)=ke^{t}$ باشد، مقدار k چقدر است؟

حل : از طرفین رابطه داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$sH(s)+4H(s)=\frac{1}{s}+2 \;\Rightarrow\; H(s)=\frac{2s+1}{s(s+4)}$$

اطلاعات دیگر در واقع مقدار $H(s)$ را به ازاء $s=1$ می‌دهد. پس داریم:

$$H(s=1)=k \;\Rightarrow\; k=\frac{3}{5}$$

معمولاً از روی تابع تبدیل یک سیستم LTI می‌توان بسیاری از خواص آن را به دست آورد. از جمله این خواص علی و پایدار بودن سیستم LTI است.

علی بودن یک سیستم LTI : اگر یک سیستم LTI علی باشد آنگاه پاسخ ضربه آن به ازاء $t<0$ برابر صفر است. در نتیجه پاسخ ضربه یک سیگنال سمت راستی است و در نتیجه ROC تابع تبدیل آن به صورت $Re\{s\}>\sigma_0$ است.عکس این گزاره لزوماً صادق نیست زیرا اگر ROC تابع تبدیل به صورت $Re\{s\}>\sigma_0$ باشد، فقط نتیجه می‌گیریم $h(t)$ سمت راستی است و صفر بودن آن به ازاء $t<0$ تضمین نمی‌شود. اما اگر تابع تبدیل گویا باشد می‌توان اثبات کرد عکس قضیه نیز صحیح است. بنابراین در حالت کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: اگر یک سیستم LTI علی باشد آنگاه ROC تابع تبدیل آن به صورت $Re\{s\}>\sigma_0$ است و اگر تابع تبدیل یک تابع گویا از s باشد، عکس قضیه نیز صادق است.

تذکر: بر اساس تعریف انجام شده برای یک سیستم علی، در برخی مواقع اگر ROC تابع تبدیل سیستمی $Re\{s\}<\sigma_0$ باشد، آن سیستم را ضدعلی می‌نامند.

مثال : تابع تبدیل غیرگویای $H(s)=\frac{e^{s}}{s+1}$ $Re\{s\}>-1$ را در نظر بگیرید. با تعیین پاسخ ضربه آن، در علی بودن سیستم بحث نمائید.

حل : تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{1}{s+1}$ طبق جدول (۱۷ ـ ۱) برابر $e^{-t}u(t)$ است و با توجه به خاصیت جابجایی زمانی داریم:

$$h(t)=e^{-(t+1)}u(t+1)$$

ملاحظه می‌کنید علی رغم آن که ناحیه همگرائی $H(s)$ برابر $Re\{s\}>-1$ است، اما این سیستم غیرعلی است و این به دلیل غیرگویا بودن $H(s)$ می‌باشد.

پایداری یک سیستم LTI : اگر یک سیستم LTI پایدار باشد، آنگاه پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال‌پذیر است. در این صورت تبدیل فوریه پاسخ ضربه همگراست. چون تبدیل فوریه یک سیگنال در واقع تبدیل لاپلاس آن بر روی محور $j\omega$ است در نتیجه می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت:

قضیه: یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرائی تابع تبدیل $H(s)$ آن شامل محور $j\omega$ باشد.

علی بودن و پایداری یک سیستم LTI: اگر یک سیستم LTI تواماً علی و پایدار باشد، آنگاه ناحیه همگرائی تابع تبدیل آن علاوه بر آن که به صورت $Re\{s\} > \sigma_0$ است، شامل محور $j\omega$ نیز می‌باشد. این وضعیت فقط هنگامی پیش می‌آید که تمام قطب‌های $H(s)$ در نیم صفحه چپ (LHP) صفحه s باشند. بدیهی است عکس قضیه هنگامی صحیح است که $H(s)$ یک تابع گویا از s باشد. بنابراین قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: اگر یک سیستم LTI علی و پایدار باشد، آنگاه تمام قطب‌های تابع تبدیل آن در نیم صفحه چپ (LHP) صفحه s قرار می‌گیرند. عکس قضیه هنگامی صادق است که $H(s)$ یک تابع گویا از s باشد.

مثال: یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{2s^3-9s^2+4s+10}{s^2-3s-4}$ را در نظر بگیرید. به ازاء نواحی همگرائی مختلف، در علی و پایدار بودن این سیستم بحث کرده و پاسخ ضربه این سیستم را روی نواحی همگرائی مختلف آن بدست آورید.

حل: $H(s)=2s-3+\dfrac{3s-2}{(s+1)(s-4)}=2s-3+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s-4}$

با توجه به محل قطب‌ها سه ناحیه همگرایی می‌توان برای این تابع تبدیل در نظر گرفت:

ROC1 : $(Re\{s\} < -1)$: روی این ناحیه همگرایی سیستم غیرعلی و ناپایدار است و داریم:

$$h(t)=2\delta'(t)-3\delta(t)-e^{-t}u(-t)-2e^{4t}u(-t)$$

ROC2 : $(-1 < Re\{s\} < 4)$: روی این ناحیه همگرائی سیستم غیرعلی و پایدار است و داریم:

$$h(t)=2\delta'(t)-3\delta(t)+e^{-t}u(t)-2e^{4t}u(-t)$$

ROC3 : $(Re\{s\} > 4)$: روی این ناحیه همگرایی سیستم علی و ناپایدار است و داریم:

$$h(t)=2\delta'(t)-3\delta(t)+e^{-t}u(t)+2e^{4t}u(t)$$

بدیهی است در هیچ ناحیه همگرائی از تابع تبدیل فوق نمی‌توان سیستم تواماً علی و پایدار داشت و این به دلیل آن است که کلیه قطب‌های $H(s)$ در LHP نیستند.

تست نمونه ـ یک سیستم LTI پیوسته پایدار با معادله دیفرانسیل $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-2y=x$ را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

۱) $h(t)=-\frac{1}{3}\left(e^{2t}u(-t)+e^{-t}u(t)\right)$

۲) $h(t)=\frac{1}{3}\left(e^{-2t}u(t)+e^{-t}u(-t)\right)$

۳) $h(t)=\frac{1}{3}\left(e^{2t}u(-t)-e^{-t}u(t)\right)$

۴) $h(t)=-\frac{1}{3}\left(e^{-2t}u(t)+e^{-t}u(-t)\right)$

حل:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=x \Rightarrow \left(s^2-s-2\right)Y(s)=X(s) \Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}$$

$$=\frac{1}{(s-2)(s+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}$$

با توجه به شرط پایداری سیستم، ناحیه همگرائی $H(s)$ باید شامل محور $j\omega$ باشد. بنابراین $-1<\mathrm{Re}(s)<2$ ناحیه همگرائی $H(s)$ می‌باشد و روی این ناحیه همگرائی داریم:

$$h(t)=\frac{-1}{3}e^{2t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال: یک سیستم پایدار و علی با پاسخ ضربه $h(t)$ و تابع سیستم $H(s)$ را در نظر بگیرید. $H(s)$ گویاست، یک قطب در $s=-2$ دارد و در مبدأ صفر ندارد. محل بقیه قطب‌ها و صفرها را نمی‌دانیم. تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر مطمئناً درست، کدام یک حتماً نادرست و برای کدام یک اطلاعات کافی برای تعیین این موارد وجود ندارد.

(الف) $F\{h(t)e^{3t}\}$ همگراست.

(ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt=0$

(ج) $t\times h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار است.

(د) تبدیل لاپلاس $\frac{dh(t)}{dt}$ حداقل یک قطب دارد.

(هـ) $h(t)$ عرض محدود است.

(و) $H(s)=H(-s)$

(ز) $\lim\limits_{s\to\infty} H(s)=2$

حل: گزاره (الف) نادرست است. زیرا تبدیل لاپلاس $h(t)$ در $s=-3$ است. این تبدیل لاپلاس هنگامی وجود دارد که $s=-3$ در ROC باشد. سیستم فوق چون علی و پایدار است، بنابراین ROC باید سمت راست تمام قطب‌ها قرار گیرد و چون دارای یک قطب در $s=-2$ است بنابراین $s=-3$ نمی‌تواند در ROC قرار گیرد.

گزاره (ب) نادرست است زیرا این گزاره معادل آن است که $H(s=0)=0$ باشد. یعنی $H(s)$ در مبدأ صفر داشته باشد که طبق مفروضات داده شده صحیح نیست.

گزاره (ج) درست است. زیرا طبق جدول (۱۷ ـ ۲) ناحیه همگرائی $h(t)$ و $t\times h(t)$ یکسان می‌باشند. چون ROC سیگنال $h(t)$ محور $j\omega$ را شامل می‌شود، بنابراین ROC سیگنال $t\times h(t)$ نیز محور $j\omega$ را شامل می‌شود. بنابراین سیستم متناظربا آن پایدار است. همچنین چون $h(t)=0$ به ازاء $t<0$ پس $t\times h(t)=0$ به ازاء $t<0$ و در نتیجه $t\times h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم علی است.

گزاره (د) درست است. طبق جدول (۱۷ ـ ۲) تبدیل لاپلاس $\frac{dh(t)}{dt}$ برابر $sH(s)$ است. اما $H(s)$ یک قطب در $s=-2$ دارد و با ضرب s در $H(s)$ این قطب حذف نمی‌شود.

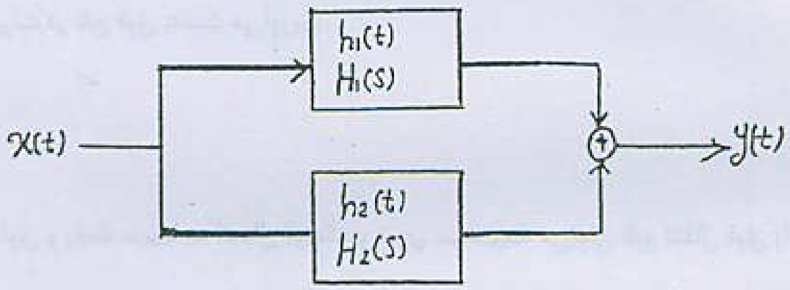
گزاره (هـ) نادرست است. اگر $h(t)$ عرض محدود داشته باشد آنگاه $H(s)$ باید فاقد قطب باشد. اما $H(s)$ در $s=-2$ قطب دارد.

گزاره (و) نادرست است. در صورت درست بودن این گزاره، چون $H(s)$ در $s=-2$ قطب دارد، باید در $s=2$ نیز قطب داشته باشد. ولی وجود قطب در $s=2$ با علی و پایدار بودن این سیستم تناقض دارد.

گزاره (ز) را نمی‌توان از اطلاعات داده شده نتیجه گرفت. برای درست بودن این گزاره باید صورت و مخرج $H(s)$ هم مرتبه باشند و اطلاعات کافی برای استخراج چنین نتیجه‌ای موجود نیست.

اتصال سیستم های LTI : با استفاده از تبدیل لاپلاس و خواص مربوطه می‌توان تابع شبکه ترکیب سیستم‌های مختلف را به دست آورد. بدین منظور دانستن تابع تبدیل اتصالات اولیه و ساده لازم می‌باشد. اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۷ ـ ۵) با یکدیگر موازی باشند آنگاه از آنجائیکه پاسخ ضربه آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها نیز با یکدیگر جمع می‌گردند. به عبارت دیگر داریم:

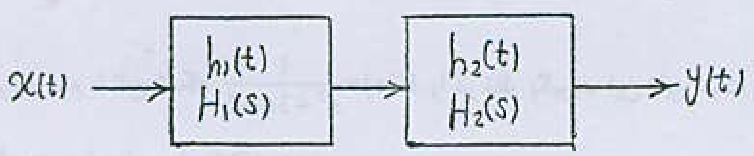
$$h(t)=h_1(t)+h_2(t) \Rightarrow H(s)=H_1(s)+H_2(s)$$



شکل ۱۷ ـ ۵ ـ اتصال موازی دو سیستم LTI

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۷ ـ ۶) با یکدیگر سری باشند آنگاه از آنجائیکه پاسخ ضربه آنها با یکدیگر کانوالو می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند. به عبارت دیگر داریم:

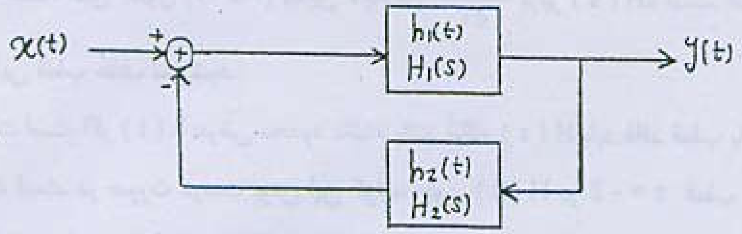
$$h(t)=h_1(t)*h_2(t) \Rightarrow H(s)=H_1(s)H_2(s)$$



شکل ۱۷ ـ ۶ ـ اتصال سری دو سیستم

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۷ ـ ۷) با اتصال فیدبک به یکدیگر متصل گردند، آنگاه می‌توان تابع تبدیل $H(s)$ را از رابطه زیر بدست آورد:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$



شکل ۱۷ـ۷ ـ اتصال فیدبک دو سیستم LTI

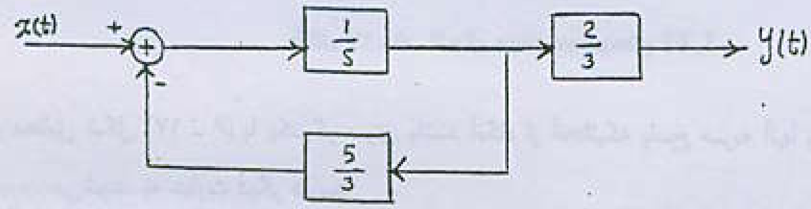
با در نظر گرفتن سه ساختار فوق و همچنین ساختارهای شکل مستقیم I و II که در بخش ۶ ارائه شدند و با استفاده از عناصر پایه ضرب کننده اسکالر، جمع‌کننده و انتگرال‌گیر می‌توان سیستم‌های مرتبه بالا را به صورت جعبه‌ای و در حوزه s نمایش داد.

مثال : یک سیستم LTI پیوسته در زمان با تابع شبکه $H(s)=\frac{2}{3s+5}$ را در نظر بگیرید. توسط یکی از ساختارهای اصلی نمودار جعبه‌ای هم‌ارز این تابع شبکه را تحقق دهید.

حل : با کمی تغییرات در تابع فوق بدست می‌آوریم:

$$H(s)=\frac{\frac{2}{3}}{s+\frac{5}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{5}{3s}}$$

با مقایسه رابطه فوق و رابطه مربوط به اتصال فیدبک و سری سیستم‌ها، می‌توان تابع انتقال فوق را به صورت زیر تحقق داد:



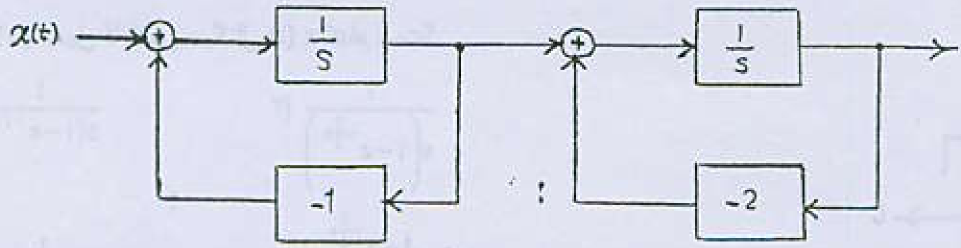
دقت کنید تابع شبکه $\frac{1}{s}$ مربوط به انتگرال‌گیر می‌باشد.

مثال : یک سیستم مرتبه دوم با تابع شبکه $H(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$ را در نظر بگیرید. این تابع شبکه را به صورت ساختارهای سری، موازی و فرم مستقیم II و توسط عناصر پایه تحقق دهید.

حل : برای تحقق به ساختار سری کافی است صورت و مخرج کسر H (s) را تجزیه کرده و به صورت حاصلضرب عبارت‌های مرتبه اول بنویسیم.

$$H(s)=\frac{1}{(s+2)(s+1)}=\frac{1}{s+2}\times\frac{1}{s+1}=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}}\times\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}$$

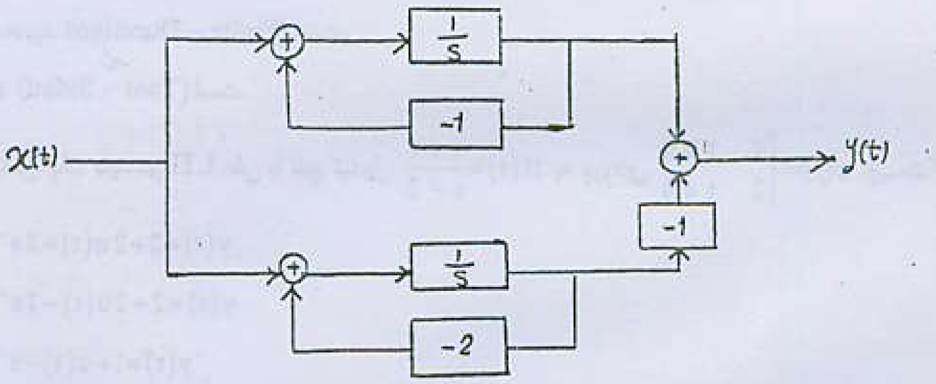
حال هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم. نمودار جعبه‌ای برای تحقق سری H (s) در شکل زیر نشان داده شده است:



برای تحقق به ساختار موازی کافی است مخرج کسر H (s) را تجزیه کرده و این کسر را به مجموع کسرهای جزئی بسط دهیم:

$$H(s)=\frac{1}{(s+2)(s+1)}=\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+1}=-\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}}+\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}$$

حال مجدداً هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم. نمودار جعبه‌ای برای تحقق موازی H (s) در شکل زیر نشان داده شده است:

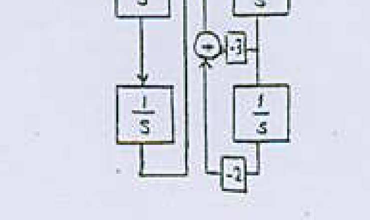


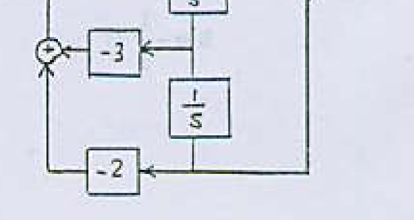
. برای تحقق به ساختار فرم مستقیم II سعی می‌کنیم معادله انتگرالی که از تابع H (s) بدست می‌آید را استخراج کنیم:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+3s+2}\ \Rightarrow\ s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=X(s)\ \Rightarrow\ Y(s)+\frac{3}{s}Y(s)+\frac{2}{s^2}Y(s)=\frac{1}{s^2}X(s)$$

$$\Rightarrow\ Y(s)=\frac{1}{s^2}X(s)-\frac{3}{2}Y(s)-\frac{2}{s^2}Y(s)$$

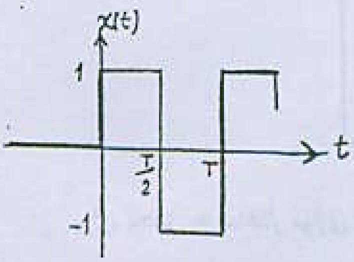
در شکل‌های زیر فرم‌های مستقیم I و II این تابع شبکه نشان داده شده‌اند:





خودآزمائی نهم

۱ ـ (آزاد ۸۱) تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ کدام است؟



۱) $\dfrac{1}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}$

۲) $\dfrac{1}{s\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$

۳) $\dfrac{1}{s\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$

۴) $\dfrac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{s\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$

۲ ـ (آزاد ۸۰) تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ دارای یک قطب در $s=-2$ می‌باشد. سیگنال $x_1(t)=e^{4t}x(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است. سیگنال $x_2(t)=e^{6t}x(t)$ تبدیل فوریه ندارد. سیگنال $x(t)$ یک سیگنال:

۱) سمت راستی (Right – Sided) است.

۲) سمت چپی (Left – Sided) است.

۳) با دوره محدود (Finite – Duration) است.

۴) دو طرفه (Two – Sided) است.

۳ ـ (آزاد ۷۹) پاسخ یک سیستم LTI علی با تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{s+1}{s+2}$ به ورودی $x(t)=\begin{cases}4 & t\geq 0\\ 2 & t<0\end{cases}$ چیست؟

۱) $y(t)=2+2u(t)+2e^{-2t}u(t)$

۲) $y(t)=2+2u(t)-2e^{-2t}u(t)$

۳) $y(t)=1+u(t)-e^{-2t}u(t)$

۴) $y(t)=1+u(t)+e^{-2t}u(t)$

۴ ـ (سراسری ۸۱) پاسخ ضربه یک سیستم در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=e^{-4t}u(t)+bu(t)$$

که در آن $u(t)$ پله واحد و b یک ثابت نامعین می‌باشد. خروجی سیستم به ورودی $x(t)=e^{2t}$ به ازای تمام زمان‌ها برابر $y(t)=\frac{1}{12}e^{2t}$ می‌باشد. مقدار b کدام است؟

۱) $b=\frac{1}{12}$

۲) $b=\frac{1}{3}$

۳) $b=-\frac{1}{12}$

۴) $b=-\frac{1}{3}$

۵ـ فرض کنید تبدیل لاپلاس ورودی یک سیستم LTI برابر $X(s)=\dfrac{s+2}{s-2}$ و $x(t)=0 \quad t>0$ و خروجی آن به صورت $y(t)=-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$ باشد. آنگاه پاسخ ضربه این سیستم برابر است با:

۱) $h(t)=\left(e^{-t}-2e^{-2t}\right)u(-t)$

۲) $h(t)=e^{-t}u(-t)+2e^{-2t}u(t)$

۳) $h(t)=\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)$

۴) $h(t)=-2e^{-2t}u(-t)-e^{-t}u(t)$

۶ـ (آزاد ۷۹) یک سیستم LTI علی و پایدار که پاسخ پله آن در $t\to\infty$ صفر می‌باشد را در نظر بگیرید. تابع تبدیل این سیستم به کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد.

۱) $H(s)=\dfrac{s^2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$

۲) $H(s)=\dfrac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$

۳) $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+2)(s+1)}$

۴) $H(s)=\dfrac{s(s-1)}{(s+2)(s+1)}$

۷ـ (آزاد ۸۰) پاسخ یک سیستم پیوسته LTI سببی با تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)(s+a)}$ به ورودی $x(t)=1$ برابر $y(t)=\dfrac{a}{32}$ می‌باشد. مقدار a کدام است؟

۱) $a=-4$ ۲) $a=4$

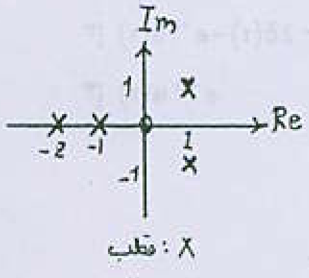
۳) $a=0$ ۴) $a=\pm 4$

۸ـ (سراسری ۸۱) اگر پاسخ پله یک سیستم LTI برابر $s(t)=\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)u(t)$ باشد و پاسخ خروجی سیستم به ورودی x (t) برابر $y(t)=\left(2-3e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$ باشد، x (t) کدام است؟

۱) $2+e^{-3t}$ ۲) $\left(2+4e^{-t}\right)u(t)$

۳) $\left(1+e^{-t}+3te^{-t}\right)u(t)$ ۴) $\left(2+4e^{-3t}\right)u(t)$

۹ـ (سراسری ۸۲) در سیستم با آرایش صفرها و قطب‌های نشان داده شده در شکل زیر، به ازای ناحیه همگرائی $-1<Re(s)<1$ پاسخ ضربه سیستم برابر است با:



X : قطب

o : صفر

۱) $h(t)=\left[e^{-2t}-e^{-t}+e^{t}\sin(t)\right]u(t)$

۲) $h(t)=\left[-e^{-2t}+e^{-t}-e^{t}\sin(t)\right]u(-t)$

۳) $h(t)=e^{-2t}u(t)+\left[e^{-t}-e^{t}\sin(t)\right]u(-t)$

۴) $h(t)=\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)-e^{t}\sin(t)u(-t)$

۱۰ ـ فرض کنید تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت $H(s)=\frac{s^2+as+b}{s^2-as+b}$ می‌باشد که a و b اعداد ثابت حقیقی می‌باشند. کدام گزینه درمورد این سیستم درست است؟

۱) این سیستم یک فیلتر پائین‌گذر است.

۲) این سیستم یک فیلتر بالاگذر است.

۳) این سیستم یک فیلتر تمام‌گذر است.

۴) نوع این فیلتر به مقدار a و b بستگی دارد.

۱۱ ـ (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت $H(s)=\frac{s+2}{s^2-2s+1-a^2}$ مفروض است که در آن a یک عدد ثابت حقیقی است. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) این سیستم نمی‌تواند توأماً علی و پایدار باشد (به ازای هیچ مقداری از a)

(۲) این سیستم نمی‌تواند توأماً غیرعلی و ناپایدار باشد (به ازای هیچ مقداری از a)

۱) فقط گزاره (۱) صحیح است.

۲) فقط گزاره (۲) صحیح است.

۳) هر دو گزاره صحیح هستند.

۴) هیچکدام از دوگزاره فوق صحیح نیستند.

۱۲ ـ (آزاد ۸۰) تابع تبدیل یک سیستم پیوسته LTI به صورت $H(s)=\frac{6s}{s^2+2s-8}$ می‌باشد و ناحیه همگرائی آن $-4<\text{Re}(s)<2$ می‌باشد. در این سیستم کدام گزاره نادرست است؟

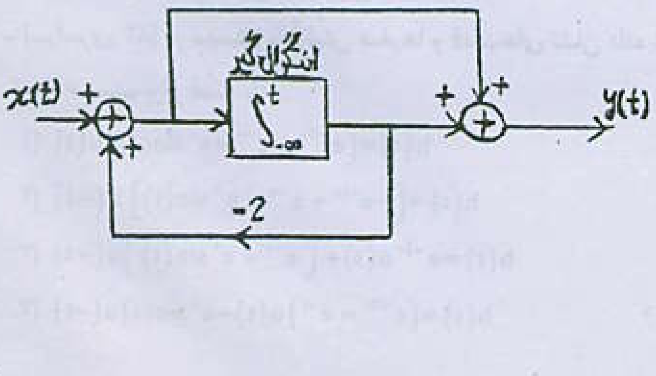
۱) سیستم پایدار است.

۲) سیستم غیرسببی است.

۳) پاسخ پله سیستم به صورت $s(t)=-e^{-4t}u(t)+4e^{2t}u(-t)$ می‌باشد.

۴) اگر $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم باشد $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=0$

۱۳ ـ (سراسری ۸۱) پاسخ ضربه سیستم LTI در شکل مقابل کدام است؟



۱) $\delta(t)-e^{-2t}u(t)$

۲) $\delta(t)+2\delta(t-1)$

۳) $2\delta(t)-e^{-t}u(t)$

۴) $e^{-2t}u(t)$

۱۴ـ (آزاد ۸۳) سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ عبارت است از:

۱) $y(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

۲) $y(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

۳) $y(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$

۴) $y(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right]u(t)$

۱۵ـ (آزاد ۸۴) یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل $y''(t)-y'(t)-2y(t)=x(t)$ توصیف می‌شود. پاسخ ضربه آن در صورتی‌که سیستم پایدار باشد، چگونه خواهد بود؟

۱) $h(t)=\frac{1}{3}e^{2t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

۲) $h(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$

۳) $h(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

۴) $h(t)=\frac{1}{3}e^{2t}u(t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

۱۶ـ (سراسری ۸۳) اگر محدوده $Real\{s\}<-3$ ، منطقه همگرائی برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ باشد، منطقه همگرائی برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(\alpha t)$ که $-1<\alpha<0$ باشد، عبارت است از :

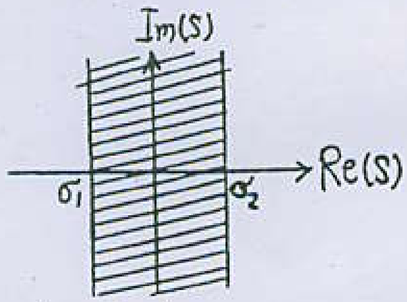
۱) $Real\{s\}>-3\alpha$

۲) $Real\{s\}<\frac{-3}{\alpha}$

۳) $Real\{s\}<-3\alpha$

۴) $\frac{3}{\alpha}<Real\{s\}<\frac{-3}{\alpha}$

۱۷ـ(سراسری ۸۰) اگر ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ به‌صورت زیر باشد، ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t)=x(t)u(t)$ کدام است؟



۱) $Re\{s\}>\sigma_1$

۲) $Re\{s\}<\sigma_2$

۳) $Re\{s\}>\sigma_2$

۴) $\sigma_1<Re\{s\}<\sigma_2$

۱۸ـ (سراسری ۸۳) پاسخ ضربه سیستم معکوس سیستم توصیف شده با رابطه $y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ را به‌دست آورید.

۱) $\delta'(t)$

۲) $u(t)$

۳) $\delta(t)$

۴) $\delta(t)+\delta'(t)$

۱۹ـ (سراسری ۸۴) یک سیستم LTI پایدار توسط معادله دیفرانسیل $4y(t)-\frac{d^2y(t)}{dt^2}=x(t)$ توصیف می‌شود. پاسخ سیستم به کدام ورودی(های) $x_1(t)=e^{-t}$ ، $x_2(t)=e^{-4t}$ و $x_3(t)=e^{6t}$ کراندار است؟

۱) فقط $x_1(t)$

۲) $x_1(t)$ ، $x_2(t)$

۳) هر سه

۴) هیچکدام

۲۰ـ (سراسری ۸۳) سیستم پیوسته LTI با معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x(t)$ را داریم. وارون این سیستم می‌تواند :

۱) علی و ناپایدار باشد. ۲) علی و پایدار باشد.

۳) ضدعلی و پایدار باشد. ۴) گزینه‌ها همگی ناصحیح هستند.

۲۱ـ (سراسری ۸۵) مقدار نهایی پاسخ زمانی سیستم LTI علی با تابع تبدیل $H(s)=\frac{1}{s-2}$ به ورودی $x(t)=3u(t)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) 3 ۴) بی‌نهایت

یادداشت

۱۸ـ تبدیل z

تبدیل z همان نقشی را که تبدیل لاپلاس در مورد سیگنال‌های پیوسته در زمان دارد، در مورد سیگنال‌های گسسته در زمان ایفا می‌کند. لذا به نظر می‌رسد این بخش باید با بخش قبل تا حدود زیادی مشابه باشد. در این بخش ابتدا به معرفی تبدیل z و مفاهیم اولیه مانند نواحی همگرائی، صفر و قطب و ... می‌پردازیم. سپس خواص تبدیل z و کاربرد آن‌ها بررسی می‌گردند. در نهایت تحلیل و توصیف کامل سیستم های گسسته در زمان LTI توسط تبدیل z، جبر تابع سیستم و نمایش سیستم‌ها بررسی می‌گردند.

۱۸ـ ۱ـ معرفی تبدیل z و مفاهیم اولیه

در بخش ۱۱ ملاحظه کردید سیگنال z^n یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI گسسته در زمان است. اگر z یک عدد مختلط به شکل $z = re^{j\omega}$ درنظر گرفته شود، آنگاه به تبدیل z می‌رسیم. تبدیل z دو طرفه یک سیگنال گسسته در زمان مانند $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

در رابطه فوق z یک عدد مختلط و به صورت $z = re^{j\omega}$ می‌باشد.

تذکر: لفظ دو طرفه برای تبدیل z مانند تبدیل لاپلاس به دلیل استفاده از حدود $-\infty$ تا $+\infty$ برای سیگما است. در تبدیل z یکطرفه حدود سیگما از صفر تا $+\infty$ انتخاب می‌شود و داریم:

$$X(z) = Z_I\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

دراین درس به دلیل غیرعلی بودن سیستم‌ها در حالت کلی، تبدیل z دو طرفه مفیدتر می‌باشد. لذا هرگاه لفظ تبدیل z استفاده می‌گردد، منظور تبدیل z دو طرفه است و در هنگام استفاده از تبدیل z یکطرفه، لفظ یکطرفه آورده می‌شود.

تبدیل z ارتباط نزدیکی با تبدیل فوریه گسسته دارد:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} = F\{x[n]r^{-n}\}$$

بنابراین تبدیل z سیگنال گسسته $x[n]$ در واقع تبدیل فوریه گسسته در زمان $x[n]r^{-n}$ است و در نتیجه اگر $x[n]r^{-n}$ تبدیل فوریه گسسته در زمان داشته باشد، آنگاه $x[n]$ تبدیل z دارد. در بخشهای قبل ملاحظه کردید که شرط کافی برای همگرائی تبدیل فوریه گسسته در زمان مطلقاً جمع‌پذیر بودن $x[n]$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت شرط کافی برای وجود تبدیل z آن است که $x[n]r^{-n}$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد. به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty$$

فلسفه ROC

وجود عبارت r^{-n} باعث می‌شود که یک درجه آزادی r جهت نزولی کردن عبارت زیر سیگما و مطلقاً جمع‌پذیر کردن آن داشته باشیم. به عبارت دیگر ممکن است $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر نباشد اما بتوان محدوده‌ای از r را به گونه‌ای انتخاب کرد که $x[n]r^{-n}$ مطلقاً جمع‌پذیر گردد. در نتیجه ممکن است سیگنالی تبدیل فوریه گسسته در زمان نداشته باشد اما بتوان محدوده‌ای از r برای آن به دست آورد که در آن محدوده دارای تبدیل z گردد. بنابراین تعداد سیگنال‌هائی که تبدیل z دارند بیشتر از تعداد سیگنال‌هایی است که تبدیل فوریه گسسته در زمان دارند. بحث فوق در مورد وجود یا عدم وجود تبدیل z به ازاء برخی از r ها مانند تبدیل لاپلاس به تعریف ناحیه همگرائی (ROC) منجر می‌شود.

تعریف ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل z : محدوده‌ای از صفحه مختلط که به ازاء آن تبدیل z برای یک سیگنال گسسته در زمان وجود دارد را ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل z آن سیگنال می‌نامند. در ادامه خواص ROC بیشتر بررسی خواهند شد و خواهید دید ROC تبدیل z دارای خواص مشابهی با ROC تبدیل لاپلاس است.

با توجه به تعریف ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل z و این واقعیت که هنگام محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته در زمان فقط دایره واحد (دایره‌ای با شعاع $r = 1$) برای محاسبه تبدیل انتخاب می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت:

« اگر سیگنالی تبدیل فوریه گسسته در زمان داشته باشد آن‌گاه لزوماً تبدیل z نیز دارد (زیرا حداقل $r = 1$ جزء ROC آن است). اما اگر سیگنالی تبدیل z داشته باشد، تنها در صورتی تبدیل فوریه گسسته در زمان دارد که ROC تبدیل z آن شامل دایره واحد باشد»

تعریف صفر و قطب و نمودار صفر و قطب: تبدیل z یک سیگنال معمولاً یک تابع گویا از z (یا z^{-1}) است و آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

در رابطه فوق $N(z)$ و $D(z)$ به ترتیب چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج هستند. بنا به تعریف ریشه‌های چند جمله‌ای صورت تبدیل z را صفرهای $X(z)$ و ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج تبدیل z را قطب‌های $X(z)$ می‌نامند. به عبارت دیگر داریم:

$X(z)=0 \Rightarrow N(z)=0 \Rightarrow z=z_1,z_2,\ldots,z_M$: صفرهای $X(z)$

$X(z)=\infty \Rightarrow D(z)=0 \Rightarrow z=p_1,p_2,\ldots,p_N$: قطب‌های $X(z)$

صفرها و قطب‌های تبدیل z در حالت کلی اعداد مختلط می‌باشند و می‌توان آن‌ها را در صفحه مختلط نمایش داد. صفرها با علامت □ و قطب‌ها با علامت × در صفحه مختلط مشخص می‌گردند. نمایش صفرها و قطب‌ها در صفحه مختلط را نمودار صفر و قطب تبدیل z می‌نامند.

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n]=\alpha^n u[n]$ را بدست آورید.

حل:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^n$$

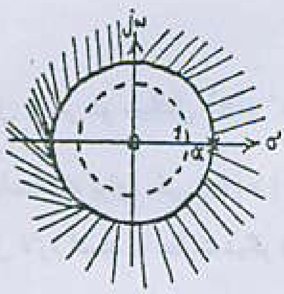
برای محاسبه حاصل جمع فوق از جمع جمله‌های یک تصاعد هندسی با جملهٔ اول $t_1=1$ و قدر نسبت $q=\alpha z^{-1}$ استفاده می‌کنیم. در صورتی که $|q|<1$ باشد آنگاه سری فوق همگرا شده و داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}=\frac{z}{z-\alpha}$$

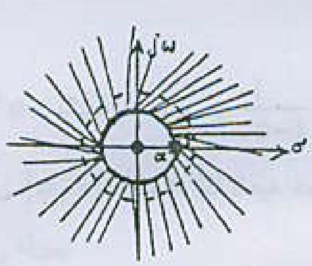
شرط $|q|<1$ در واقع ROC تبدیل z سیگنال فوق را مشخص می‌کند:

$$\left|\alpha z^{-1}\right|<1 \Rightarrow \frac{|\alpha|}{|z|}<1 \Rightarrow |z|>|\alpha|$$

ملاحظه می‌کنید ROC فوق خارج یک دایره به شعاع $|\alpha|$ است و در شکل‌های زیر به ازاء $|\alpha|>1$ و $|\alpha|<1$ رسم شده‌اند.



$|\alpha|>1$



$|\alpha|<1$

دقت کنید به ازاء $|\alpha|<1$ دایره واحد که با نقطه چین روی شکل نشان داده شده است در ROC تبدیل z قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال به ازاء $|\alpha|<1$ تبدیل فوریه گسسته در زمان دارد. همچنین ملاحظه می‌کنید تبدیل z این سیگنال یک قطب در $z=\alpha$ و یک صفر در $z=0$ دارد.

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n]=-\alpha^n u[-n-1]$ را بدست آورید.

حل:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\alpha^n z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\alpha z^{-1}\right)^n$$

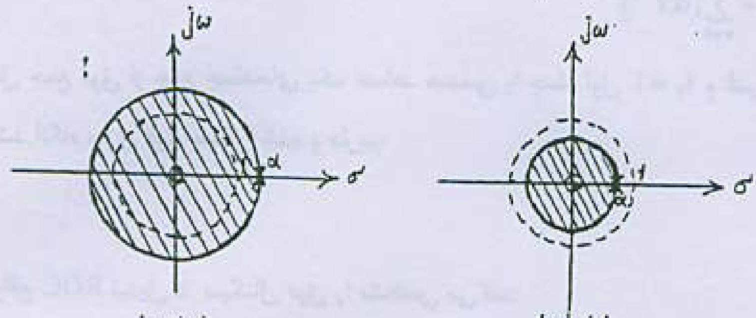
برای محاسبه حاصل جمع فوق از جمع جمله‌های یک تصاعد هندسی با جمله اول $t_1=\left(\alpha z^{-1}\right)^{-1}$ و قدر نسبت $q=\left(\alpha z^{-1}\right)^{-1}$ استفاده می‌کنیم. در صورتی که $|q|<1$ باشد، آنگاه سری فوق همگرا شده و داریم:

$$X(z)=\frac{-\left(\alpha z^{-1}\right)^{-1}}{1-\left(\alpha z^{-1}\right)^{-1}}=\frac{-\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}=\frac{z}{z-\alpha}$$

شرط $|q|<1$ در واقع ROC تبدیل z سیگنال فوق را مشخص می‌کند:

$$|\alpha^{-1} z|<1 \;\Rightarrow\; \frac{|z|}{|\alpha|}<1 \;\Rightarrow\; |z|<|\alpha|$$

ملاحظه می‌کنید ROC فوق داخل یک دایره به شعاع $|\alpha|$ است و در شکل‌های زیر به ازاء $|\alpha|>1$ و $|\alpha|<1$ رسم شده است.



$|\alpha|>1$ $|\alpha|<1$

دقت کنید به ازاء $|\alpha|>1$ دایره واحد که با نقطه چین روی شکل نشان داده شده است در ROC تبدیل z قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال به ازاء $|\alpha|>1$ تبدیل فوریه گسسته در زمان دارد. همچنین ملاحظه می‌کنید تبدیل z این سیگنال یک قطب در $z=\alpha$ و یک صفر در $z=0$ دارد.

تذکر: دقت کنید تبدیل z هر دو سیگنال $\alpha^n u[n]$ و $-\alpha^n u[-n-1]$ یکسان و برابر $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ است. تنها وجه تمایز این دو سیگنال نواحی همگرائی آنهاست که برای یکی $|z|>|\alpha|$ و برای دیگری $|z|<|\alpha|$ است. لذا ناحیه همگرائی تبدیل z جهت محاسبه عکس تبدیل z هر سیگنال لازم است. به عبارت دیگر در این مورد خاص داریم:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\right\}=\begin{cases}\alpha^n u[n] & |z|>|\alpha| \\ -\alpha^n u[-n-1] & |z|<|\alpha|\end{cases}$$

تذکر: همانند تبدیل لاپلاس یکطرفه، در تبدیل z یکطرفه نیز مبحثی تحت عنوان ROC مطرح نیست. دلیل این امر حدود سیگما در تبدیل z یکطرفه می‌باشد که از صفر تا $+\infty$ است. لذا در هنگام عکس تبدیل z گرفتن هیچگونه ابهامی نداریم و سیگنال واقع در $n \geq 0$ را انتخاب می‌کنیم.

تذکر: با قرار دادن $\alpha = 1$ در روابط بدست آمده می‌توان تبدیل z سیگنال‌های $u[n]$ و $-u[-n-1]$ را بدست آورد:

$$Z\{u[n]\}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$Z\{-u[-n-1]\}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|<1$$

تذکر: دانستن تبدیل z برخی از سیگنال‌های مهم مفید می‌باشد و از آن‌ها در هنگام عکس تبدیل z گرفتن استفاده می‌شود. در جدول (۱۸ ـ ۱) برخی از این سیگنال‌ها و تبدیل z آن‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود.

سیگنال	تبدیل z	ROC
$x[n]=\delta[n]$	$X(z)=1$	تمام صفحه مختلط
$x[n]=u[n]$	$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$x[n]=-u[-n-1]$	$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$x[n]=\delta[n-m]$	$X(z)=z^{-m}$	تمام صفحه مختلط غیر از صفر (اگر $m>0$) یا ∞ (اگر $m<0$)
$x[n]=\alpha^n u[n]$	$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert\alpha\rvert$
$x[n]=-\alpha^n u[-n-1]$	$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert\alpha\rvert$
$x[n]=n\alpha^n u[n]$	$X(z)=\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert\alpha\rvert$
$x[n]=-n\alpha^n u[-n-1]$	$X(z)=\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert\alpha\rvert$
$x[n]=[\cos(\omega_0 n)]u[n]$	$X(z)=\frac{1-[\cos(\omega_0)]z^{-1}}{1-[2\cos(\omega_0)]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$x[n]=[\sin(\omega_0 n)]u[n]$	$X(z)=\frac{[\sin(\omega_0)]z^{-1}}{1-[2\cos(\omega_0)]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$x[n]=[r^n\cos(\omega_0 n)]u[n]$	$X(z)=\frac{1-[r\cos(\omega_0)]z^{-1}}{1-[2r\cos(\omega_0)]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$
$x[n]=[r^n\sin(\omega_0 n)]u[n]$	$X(z)=\frac{[r\sin(\omega_0)]z^{-1}}{1-[2r\cos(\omega_0)]+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$

جدول ۱۸ ـ ۱ ـ تبدیل z برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

[illegible] می‌توان [illegible]

[illegible] بدست آورد.

برای سمت چپ‌های [illegible] تبدیل‌ها [illegible] کافی است [illegible] را به [illegible] تبدیل کنیم.

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n]=2^n u[n]+3^{n+1}u[-n-1]$ را بدست آورید.

حل: از جدول (۱۸ ـ ۱) استفاده کرده وتبدیل z هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آورید:

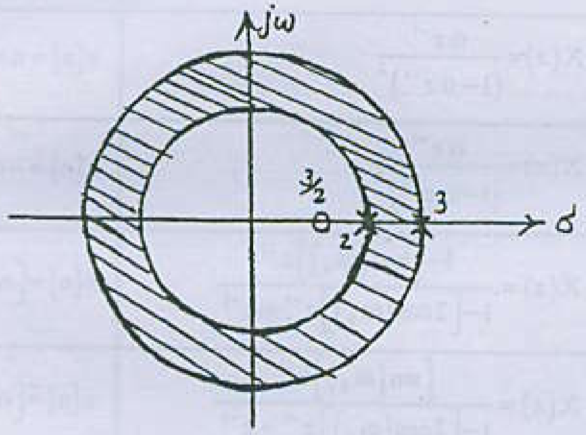
$$2^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad |z|>2$$

$$3^{n+1}u[-n-1]=3\times 3^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-3}{1-3z^{-1}} \qquad |z|<3$$

در صورتی که نواحی همگرائی جملات فوق با یکدیگر اشتراک داشته باشند، آنگاه طبق خاصیت خطی تبدیل z ، می‌توان تبدیل z آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد. بنابراین داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{-3}{1-3z^{-1}}=\frac{-2+3z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}$$

ناحیه همگرائی فوق در شکل زیر نشان داده شده است. این تبدیل دارای دو قطب در $z=2$ و $z=3$ و یک صفر در $z=\frac{3}{2}$ است و در شکل مشخص شده‌اند. دقت کنید چون دایره واحد در ROC قرار نگرفته، پس سیگنال فاقد تبدیل فوریه است.



مثال: تبدیل z سیگنال $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-2^n u[n]$ را بدست آورید.

حل: از جدول (۱۸ ـ ۱) استفاده کرده و تبدیل z هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آوریم.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

$$2^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad |z|>2$$

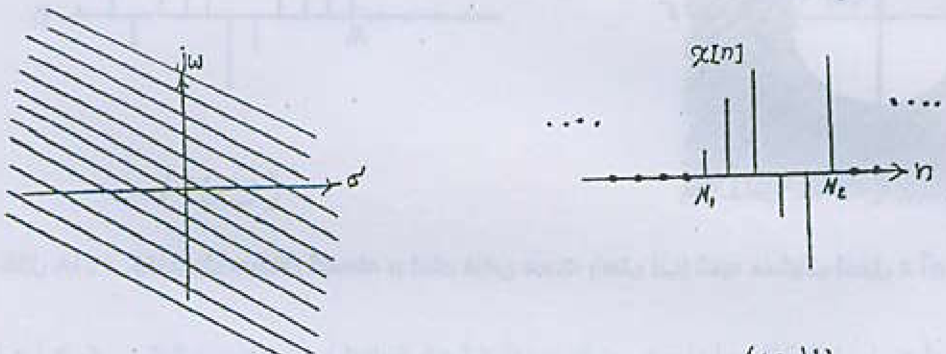
ملاحظه می‌کنید دو ناحیه همگرائی هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند و در نتیجه $x[n]$ تبدیل z ندارد. بدیهی است این سیگنال فاقد تبدیل فوریه نیز می‌باشد.

خواص ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل z : ملاحظه کردید برای مشخص کردن کامل تبدیل z ، هم عبارت جبری (X (z و هم ناحیه همگرائی آن لازم است. دراین بخش برخی خواص ROC را بررسی کرده و خواهیم دید ROC تبدیل z سیگنال‌ها تا حدودی به شکل آن‌ها در حوزه زمان بستگی دارد.

(۱) ROC تبدیل z در صفحه مختلط از دوایر و حلقه‌هائی به مرکز مبدأ مختصات تشکیل می‌شود.

(۲) ROC تبدیل z های گویا هیچ قطبی را شامل نمی‌شود.

(۳) اگر $x[n]$ یک سیگنال با عرض محدود (Finite Duration) و مطلقاً جمع‌پذیر باشد، آنگاه ROC تبدیل z آن شامل تمام صفحه مختلط غیر از $z=0$ یا $z=\infty$ یا $z=0$ و $z=\infty$ است. یعنی با توجه به شکل سیگنال نقطه $z=0$ یا $z=\infty$ یا هم $z=0$ و $z=\infty$ از ناحیه همگرائی خارج می‌شوند. سیگنال با عرض محدود سیگنالی است که به ازاء $n < N_1$ و $n > N_2$ برابر صفر باشد (مثلاً سیگنال $u[n]-u[n-5]$). در شکل (۱۸ ـ ۱) یک سیگنال فرضی با عرض محدود و ROC تبدیل z آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، تبدیل z سیگنال با عرض محدود فاقد قطب است.



(الف)　　(ب)

شکل (۱۸ ـ ۱) (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی با عرض محدود (ب) ناحیه همگرائی تبدیل z آن کل صفحه مختلط است.

فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال با عرض محدودگسسته در بازه زمانی $[N_1, N_2]$ باشد. آنگاه تبدیل z این سیگنال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} = x\left[N_1\right]z^{-N_1} + \cdots + x\left[N_2\right]z^{-N_2}$$

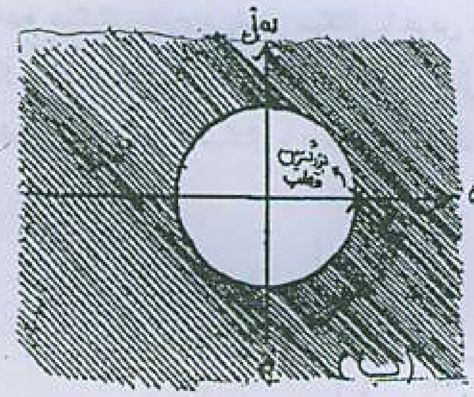
در رابطه فوق سه وضعیت مختلف ممکن است اتفاق بیفتد:

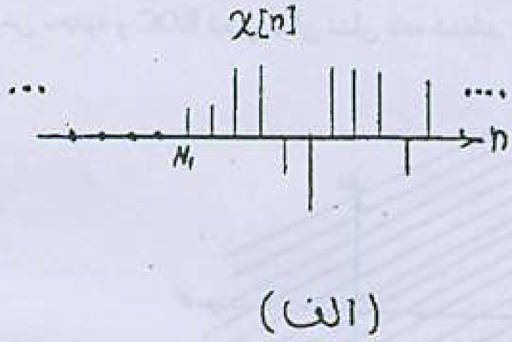
الف ـ اگر $N_1 < 0$ و $N_2 < 0$ باشند آنگاه چند جمله‌ای (X (z شامل جمله‌های z به توان اعداد مثبت می‌باشد. بدیهی است در این حالت $z=0$ در ROC می‌باشد اما $z=\infty$ نمی‌تواند در ROC قرار گیرد.

ب ـ اگر $N_1 < 0$ و $N_2 > 0$ باشند آنگاه چند جمله‌ای (X (z شامل جمله‌های z به توان هم عدد مثبت و هم عدد منفی می‌باشد. بدیهی است در این حالت $z=0$ و $z=\infty$ هیچکدام نمی‌توانند در ROC قرار گیرند.

ج ـ اگر $N_1 > 0$ و $N_2 > 0$ باشند آنگاه چند جمله‌ای $X(z)$ شامل جمله‌های z به توان اعداد منفی می‌باشد. بدیهی است در این حالت $z=\infty$ در ROC می‌باشد اما $z=0$ نمی‌تواند در ROC قرار گیرد.

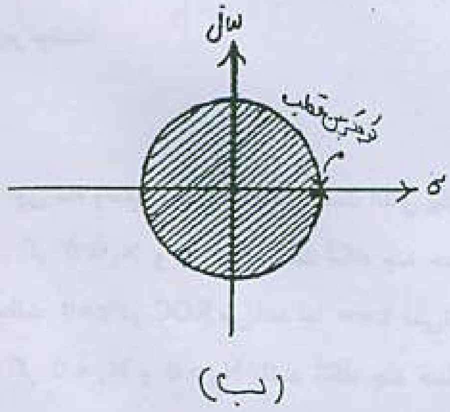
(۴) اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی (Right Sided) باشد و دایره $|z| = r_0$ در ROC تبدیل z آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر z با $|z| > r_0$ غیر از احتمالاً $z=\infty$ در ROC تبدیل z آن قرار دارند. سیگنال سمت راستی سیگنالی است که به ازاء $n < N_1$ برابر صفر باشد (مثلاً سیگنال $u[n]$). با توجه به آنچه در بند (۳) آورده شد نتیجه می‌گیریم اگر $N_1 < 0$ باشد آنگاه $z=\infty$ جزء ROC تبدیل z آن نیست. در شکل (۱۸ ـ ۲) یک سیگنال فرضی سمت راستی و ROC تبدیل z آن نشان داده شده‌اند. با توجه به خاصیت (۲) نتیجه می‌گیریم ROC تبدیل z یک سیگنال سمت راستی بین بزرگترین قطب (قطبی که دامنه آن بزرگترین است) تا بی‌نهایت می‌باشد.

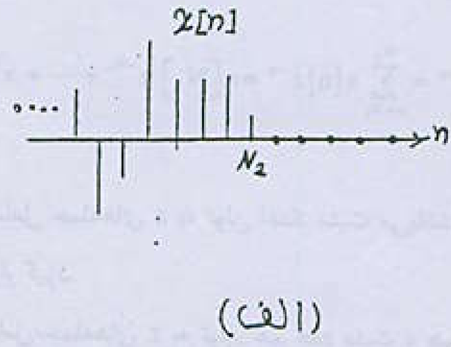




شکل ۱۸ ـ ۲ ـ (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی سمت راستی (ب) ناحیه همگرائی تبدیل z آن $|z| > r_0$ است

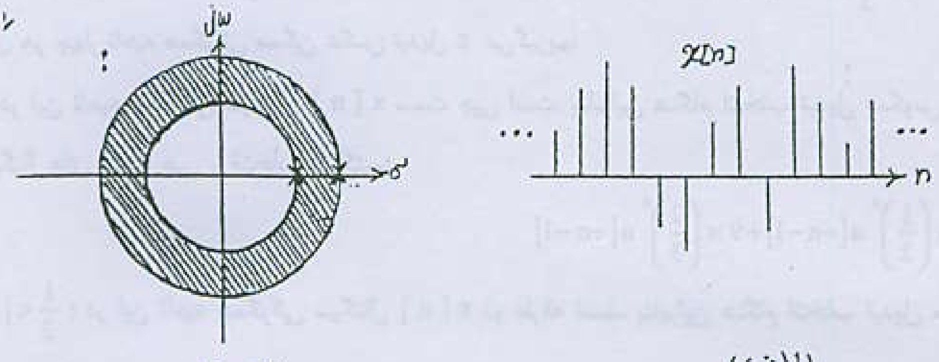
(۵) اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت چپی (Left Sided) باشد و دایره $|z| = r_0$ در ROC تبدیل z آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر z با $|z| < r_0$ غیر از احتمالاً $z=0$ در ROC تبدیل z آن قرار دارند. سیگنال سمت چپی سیگنالی است که به ازاء $n > N_2$ برابر صفر باشد (مثلاً سیگنال $u[-n]$). با توجه به آنچه در بند (۳) آورده شده نتیجه می‌گیریم اگر $N_2 > 0$ باشد آنگاه $z=0$ جزء ROC تبدیل z آن نیست. در شکل (۱۸ ـ ۳) یک سیگنال فرضی سمت چپی و ROC تبدیل z آن نشان داده شده‌اند. با توجه به خاصیت (۲) نتیجه می‌گیریم ROC تبدیل z یک سیگنال سمت چپی بین مبدأ مختصات تا کوچکترین قطب (قطبی که دامنه آن کوچکترین است) می‌باشد.





شکل ۱۸ ـ ۳ ـ (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی سمت چپی (ب) ناحیه همگرائی تبدیل z آن $|z| < r_0$ است.

(۶) اگر $x[n]$ یک سیگنال دو طرفه (Two Sided) باشد و دایره $|z| = r_0$ در ROC تبدیل z آن قرار داشته باشد، آنگاه ROC تبدیل z آن حلقه‌ای در صفحه مختلط شامل دایره $|z| = r_0$ است. سیگنال دو طرفه سیگنالی است که گستره آن در محور زمان از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد (مثلاً سیگنال $\cos(\omega_0 n)$). در شکل (۱۸ ـ ۴) یک سیگنال فرضی دو طرفه و ROC تبدیل z آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، ROC تبدیل z یک سیگنال دو طرفه بین دو قطب متوالی (دو قطبی که دامنه آن‌ها متوالی است) می‌باشد.



(ب) (الف)

شکل ۱۸ ـ ۴ ـ (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی دو طرفه (ب) ناحیه همگرائی تبدیل z آن $r_1 < |z| < r_2$ است.

مثال : تبدیل z یک سیگنال گسسته در زمان $X(z) = \dfrac{2z^{-2}}{(1-2z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$ می‌باشد. در نواحی همگرائی مختلف در مورد شکل این سیگنال بحث کنید.

$X(z)$ دارای سه قطب در $z=\frac{1}{2}$ ، $z=\frac{2}{3}$ و $z=2$ می‌باشد. بنابراین چهار ناحیه همگرائی می‌توان برای آن و به شرح زیر در نظر گرفت:

$|z| < \frac{1}{2}$: سیگنال $x[n]$ یک سیگنال سمت چپی است و تبدیل فوریه ندارد.

$\frac{1}{2} < |z| < \frac{2}{3}$: سیگنال $x[n]$ یک سیگنال دو طرفه است و تبدیل فوریه ندارد.

$\frac{2}{3} < |z| < 2$: سیگنال $x[n]$ یک سیگنال دو طرفه است و تبدیل فوریه دارد.

$|z| > 2$: سیگنال $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی است وتبدیل فوریه ندارد.

محاسبه عکس تبدیل z : با انجام محاسبات ساده می‌توان معادله عکس تبدیل z را به صورت زیر بدست آورد:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

معادله فوق نشان می‌دهد که می‌توان $x[n]$ را با انتگرال‌گیری روی مسیری دایروی به شعاع r و مرکز مبدأ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت محاسبه کرد. مسیر r از ناحیه همگرائی $X(z)$ انتخاب می‌شود.

عملاً از روش‌های دیگر برای محاسبه عکس تبدیل z استفاده می‌شود که متداولترین آن‌ها برای توابع گویا از z استفاده از روش بسط به کسرهای جزئی می‌باشد.

مثال : برای $X(z)$ داده شده در مثال قبل، معکوس تبدیل z را محاسبه کنید.

حل : اگر $X(z)$ را به کسرهای جزئی بسط دهیم، داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-9}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

حال روی هر چهار ناحیه همگرائی ممکن عکس تبدیل z می‌گیریم:

$|z|<\frac{1}{2}$: در این ناحیه همگرائی سیگنال $x[n]$ سمت چپی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جمله‌ها از جدول (۱۸ ـ ۱) سیگنال‌های سمت چپی را انتخاب می‌کنیم:

$$x[n]=-2^n u[-n-1]-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]+9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$\frac{1}{2}<|z|<\frac{2}{3}$: در این ناحیه همگرائی سیگنال $x[n]$ دو طرفه است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جمله‌ها از جدول (۱۸ ـ ۱) باید توأماً سیگنال‌های سمت راستی و سمت چپی را انتخاب کنیم. با توجه به این که ناحیه همگرائی فوق از اشتراک $|z|>\frac{1}{2}$ و $|z|<\frac{2}{3}$ و $|z|<2$ بدست می‌آید، لذا در هنگام انتخاب سیگنال‌ها، برای قطب $z=\frac{1}{2}$ از سیگنال سمت راستی و برای قطب‌های $z=\frac{2}{3}$ و $z=2$ از سیگنال‌های سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x[n]=-2^n u[-n-1]+8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$\frac{2}{3}<|z|<2$: در این ناحیه همگرائی سیگنال $x[n]$ دو طرفه است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جمله‌ها از جدول (۱۸ ـ ۱) باید توأماً سیگنال‌های سمت راستی و سمت چپی را انتخاب کنیم. با توجه به این که ناحیه همگرائی فوق از اشتراک $|z|>\frac{1}{2}$ و $|z|>\frac{2}{3}$ و $|z|<2$ بدست می‌آید، لذا در هنگام انتخاب سیگنال‌ها، برای قطب‌های $z=\frac{1}{2}$ و $z=\frac{2}{3}$ از سیگنال‌های سمت راستی و برای قطب $z=2$ از سیگنال سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x[n]=-2^n u[-n-1]+8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

$|z|>2$: در این ناحیه همگرائی سیگنال $x[n]$ سمت راستی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام جملات از جدول (۱۸ ـ ۱) از سیگنال‌های سمت راستی استفاده می‌کنیم:

$$x[n]=2^n u[n]+8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

تست نمونه ـ (آزاد ۸۴) سیگنال $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر و دارای تبدیل z به‌صورت $X(z)=\dfrac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$ است. $x[n]$ به چه صورت خواهد بود؟

۱) $x[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u[n]$

۲) $x[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u[-n]$

۳) $x[n]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$

۴) $x[n]=\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+4\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u[n]$

حل:

$$X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}=\frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

سیگنال $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر است. بنابراین تبدیل فوریه دارد و در نتیجه ROC آن شامل دایره واحد است. از طرفی چون قطب‌های آن هر دو درون دایره واحد قرار گرفته‌اند بنابراین ROC آن $|z|>\frac{1}{2}$ و در نتیجه سیگنال سمت راستی است. بنابراین:

$$x[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-4\left(\frac{-1}{4}\right)^{n}u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n]+\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}u[n]$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۱۸ ـ ۲ ـ خواص تبدیل z

در این بخش به معرفی خواص تبدیل z و کاربرد آن‌ها می‌پردازیم. به کمک این خواص می‌توان تبدیل z سیگنال‌های پیچیده‌تر را بدست آورد و در موارد دیگر از جمله تحلیل سیستم‌های LTI و سیستم‌های بیان شده توسط معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت استفاده کرد. این خواص در جدول (۱۸ ـ ۲) آورده شده‌اند و فراگیری آن به دانشجویان توصیه می‌شود. دقت کنید دراین جدول علاوه بر تبدیل z ، ناحیه همگرائی تبدیل نیز اهمیت دارد.

(۱) خطی بودن: به دلیل استفاده از اپراتور سیگما جهت محاسبه تبدیل z ، خاصیت خطی برای تبدیل z وجود دارد. دقت کنید همانند تبدیل لاپلاس هنگام ایجاد یک ترکیب خطی از تبدیل z چند سیگنال، ممکن است حذف صفر و قطب داشته باشیم و در نتیجه ناحیه همگرائی بزرگتر از اشتراک نواحی همگرائی تبدیل z ها گردد.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان جابجا شود، تبدیل z آن در z^{-n_0} ضرب می‌شود. تنها تغییری که در ناحیه همگرائی به وجود می‌آید اضافه یا حذف شدن $z=0$ یا $z=\infty$ به یا از ناحیه همگرائی است. دلیل آن است که ضرب z^{-n_0} ممکن است وضعیت مثبت یا منفی بودن توان z ها را در بسط تبدیل z تغییر دهد. بعنوان مثال اگر $X(z)=1+2z$ باشد، آنگاه $z=\infty$ در ROC واقع نیست. اگر این تبدیل در z^{-2} ضرب شود آنگاه $z^{-2}X(z)=z^{-2}+2z^{-1}$ می‌شود. در نتیجه در این حالت $z=0$ در ROC نخواهد بود. این خاصیت از جمله خواص مهم می‌باشد و برای تحلیل سیستم‌های گسسته بیان شده توسط معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت مفید می‌باشد.

خاصیت	سیگنال گسسته	تبدیل z	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	$R_x : \alpha < \lvert z \rvert < \beta$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
خطی بودن	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	حداقل $R_1 \cap R_2$
جابجایی زمانی	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R_x \pm \begin{Bmatrix} z=0 \\ z=\infty \end{Bmatrix}$
	(شیفت فرکانسی) $e^{j\omega_0 n}x[n]$ (چرخش)	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R_x
تغییر مقیاس در حوزه z	$z_0^n x[n]$ چرخش + مقیاس‌بندی	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R_x : \lvert z_0 \rvert \alpha < \lvert z \rvert < \lvert z_0 \rvert \beta$
	(مقیاس‌بندی) $a^n x[n]$ ← حقیقی	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$aR_x : \lvert a \rvert \alpha < \lvert z \rvert < \lvert a \rvert \beta$
وارونگی زمانی	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$R_x^{-1} : \frac{1}{\beta} < \lvert z \rvert < \frac{1}{\alpha}$
انبساط زمانی	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r] & n=rk \\ 0 & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$	$R_x^{\frac{1}{k}} : \alpha < \lvert z \rvert^k < \beta$
انقباض زمانی	$x[Mn]$	$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2k\pi}{M}}\right)$ $X(e^{j\omega})=0 \quad \omega_c < \lvert \omega \rvert < \pi$	$R_\alpha^M : \alpha < \lvert z \rvert^M < \beta$
مزدوج‌گیری	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
کانولوشن در حوزه زمان	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	حداقل $R_1 \cap R_2$
تفاضل اول	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	حداقل $R_x \cap \{\lvert z \rvert > 0\}$
جمع انباره‌ای	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$	حداقل $R_x \cap \{\lvert z \rvert > 1\}$
مشتق در حوزه z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R_x
قضایای مقدار اولیه: اگر $x[n]=0$ به ازاء $n<0$ آنگاه: ← برای سیستم‌های علّی از روی تبدیل z به دست می‌آید. $x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$, $x[1]=\lim_{z\to\infty}z(X(z)-x[0])$, $x[2]=\lim_{z\to\infty}z^2\left(X(z)-x[0]-z^{-1}x[1]\right)$, ...			
مجموع نمونه‌های سیگنال: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(z)\Big\rvert_{z=1}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x[n] = X(-1)$			

جدول ۱۸-۲ - خواص تبدیل z

← زوج‌های جدید

ROC=R $\quad \frac{1}{2}X(z e^{-j\omega_0}) + \frac{1}{2}X(z e^{j\omega_0}) \leftarrow \cos\omega_0 n\, x(n)$

ROC=R $\quad \frac{1}{2j}X(z e^{-j\omega_0}) - \frac{1}{2j}X(z e^{j\omega_0}) \leftarrow \sin(\omega_0 n)x(n)$

مثال: یک سیستم LTI گسسته با معادله تفاضلی $y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=2x[n-1]$ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل و پاسخ ضربه سمت راستی این سیستم را تعیین کنید.

حل: از طرفین معادله فوق تبدیل z گرفته و داریم:

$$Y(z)(1-2z^{-1}+z^{-2})=2z^{-1}X(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \Rightarrow h[n]=2nu[n]$$

(۳) تغییر مقیاس در حوزه z: به سه طریق تبدیل z یک سیگنال تغییر مقیاس پیدا می‌کند:

(الف) با ضرب $e^{j\omega_0 n}$ در سیگنال زمانی، $e^{-j\omega_0}$ در z ضرب شده و باعث می‌شود صفرها و قطب‌های تبدیل z در جهت دایره‌ای جابجا شوند (چرخش پیدا کنند). بدیهی است ناحیه همگرائی تغییر نمی‌کند.

(ب) با ضرب z_0^n در سیگنال زمانی، z به $\frac{z}{z_0}$ تبدیل شده و باعث می‌شود صفرها و قطب‌ها علاوه بر چرخش در مسیر شعاعی نیز حرکت کنند. بدیهی است در این حالت ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

(ج) با ضرب a^n در سیگنال زمانی، z به $\frac{z}{a}$ تبدیل شده (a عدد حقیقی است) و باعث می‌شود صفرها و قطب‌ها در مسیر شعاعی جابجا شوند. در این حالت نیز ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

(۴) وارونگی زمانی: اگر سیگنال در حوزه زمان نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه در تبدیل z آن z به $\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود. بدیهی است در این حالت ROC ممکن است کوچکتر یا بزرگتر گردد.

(۵) انبساط زمانی: اگر سیگنال در حوزه زمان با ضریب k گسترده شود آنگاه در تبدیل z آن z به z^k تبدیل می‌شود. بدیهی است با این تبدیل ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) تبدیل z سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را $X(z)$ می‌نامیم. تبدیل z سیگنال $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$ چیست؟

۱) $Y(z)=z^{-1}X(z^2)$ ۲) $Y(z)=zX(z^2)$ ۳) $Y(z)=z^{-2}X(z)$ ۴) $Y(z)=z^2X(z)$

حل: $y[n]=x_{(2)}[n-1]$ است و بنابراین $Y(z)=z^{-1}X(z^2)$ می‌باشد و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

(۶) انقباض زمانی: اگر یک سیگنال گسسته در زمان باند محدود باشد، آن‌گاه انقباض زمانی باعث تبدیل z به $z^{\frac{1}{M}}$ تواماً با چرخش صفرها و قطب‌ها می‌شود. بدیهی است پس از این تبدیل ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

مثال: فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال گسسته باند محدود با تبدیل z $X(x)$ است. تبدیل z سیگنال‌های $x[2n]$ و $x[3n]$ را به‌دست آورید.

$x[n]=0 \ , \ n<0 \Rightarrow X(z)=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\dots$

(یک سیگنال علی است $x[n]$)

$\Rightarrow x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z) \ , \ x[1]=\lim_{z\to\infty} z(X(z)-x[0]) \ , \dots$

حل :

$$x[2n] \xrightarrow{z} \frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{2}}e^{-j\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$x[3n] \xrightarrow{z} \frac{1}{3}\left[X\left(z^{\frac{1}{3}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{3}}e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)+X\left(z^{\frac{1}{3}}e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\right]$$

(۷) مزدوج‌گیری: اگر سیگنال در حوزه زمان مزدوج گردد، آنگاه درتبدیل z آن علاوه بر مزدوج شدن تابع تبدیل، z نیز مزدوج می‌شود.

مثال : اگر تبدیل z سیگنال $x[n]$ را با $X(z)$ نشان دهیم و ناحیه همگرائی آن $1<|z|<4$ باشد، تبدیل z سیگنال $y[n]=2x^*[-n+3]+4^n x_{(2)}[n-1]$ و ناحیه همگرائی آن را بدست آورید.

حل : از جدول (۱۸ ـ ۲) استفاده کرده و داریم:

$2x^*[n] \xrightarrow{z} 2X^*(z^*)$ $\qquad$ ROC : $1<|z|<4$

$2x^*[n+3] \xrightarrow{z} 2z^3X^*(z^*)$ $\qquad$ ROC : $1<|z|<4$

$2x^*[-n+3] \xrightarrow{z} 2z^{-3}X^*\left(\left(z^{-1}\right)^*\right)$ $\qquad$ ROC : $\frac{1}{4}<|z|<1$

$x_{(2)}[n] \xrightarrow{z} X(z^2)$ $\qquad$ ROC : $1<|z|<2$

$x_{(2)}[n-1] \xrightarrow{z} z^{-1}X(z^2)$ $\qquad$ ROC : $1<|z|<2$

$4^n x_{(2)}[n-1] \xrightarrow{z} \left(\frac{z}{4}\right)^{-1}X\left(\frac{z^2}{16}\right)$ $\qquad$ ROC : $4<|z|<8$

ملاحظه کنید تبدیل z دو جمله مربوط به $y[n]$ نواحی همگرائی مشترک ندارند و بنابراین $y[n]$ تبدیل z ندارد.

(۸) کانولوشن در حوزه زمان: اگر دو سیگنال گسسته در حوزه زمان با یکدیگر کانولو شوند آنگاه تبدیل z های آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند. از این خاصیت جهت تحلیل سیستم‌های LTI گسسته در زمان استفاده می‌شود. ناحیه همگرائی حداقل اشتراک نواحی همگرائی تبدیل z دو سیگنال است.

مثال : یک سیستم LTI گسسته در زمان با معادله تفاضلی $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $H(z)$ این سیستم را به دست آورده و پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را تعیین کنید.

حل : از طرفین معادله تفاضلی تبدیل z گرفته و تابع تبدیل را بدست می‌آوریم:

$$Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)=X(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

برای تعیین خروجی این سیستم از قضیه کانولوشن در حوزه زمان استفاده می‌کنیم:

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left[1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-j0.58}{1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}}+\frac{j0.58}{1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$\Rightarrow\quad y[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right]u[n]$$

(۹) تفاضل اول: اگر از یک سیگنال گسسته در زمان تفاضل اول گرفته شود آنگاه تبدیل z آن در $(1-z^{-1})$ ضرب می‌شود. ناحیه همگرائی تبدیل z حداقل اشتراک بین R و $0<|z|$ است.

(۱۰) جمع انباره‌ای: اگر جمع انباره‌ای یک سیگنال در حوزه زمان محاسبه گردد، آنگاه تبدیل z آن بر $(1-z^{-1})$ تقسیم می‌شود. از آنجائیکه پاسخ ضربه جمع کننده انباره‌ای تابع پله واحد است، بنابراین ناحیه همگرائی تبدیل حداقل اشتراک بین R و $|z|>1$ می‌باشد.

نکته: از آنجائی‌که پاسخ ضربه سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\sum_{k=n+1}^{+\infty}x[k]$ برابر $u[-n-1]$ است و با توجه به تبدیل z و ناحیه همگرائی $u[-n-1]$ داریم:

$$Z\left\{\sum_{k=n+1}^{+\infty}x[k]\right\}=-\frac{X(z)}{1-z^{-1}}\qquad ROC:R\cap|z|<1$$

(۱۱) مشتق در حوزه z: اگر یک سیگنال در حوزه زمان در n ضرب شود، آنگاه از تبدیل z آن بر حسب z مشتق گرفته شده ودر -z ضرب می‌شود. بدیهی است چون مشتق از یک تابع گویا باعث حذف قطب یا ایجاد قطب جدید نمی‌شود، بنابراین ناحیه همگرائی تغییر نخواهد کرد.

تست نمونه ـ اگر تبدیل z سیگنال x[n] را X(z) بنامیم و $X(z)=Ln(1+z^{-1})$ روی ناحیه همگرائی $|z|>1$ باشد، x[n] کدام است؟

۱) $x[n]=\frac{(-1)^n}{n}u[n-1]$ ۲) $x[n]=\frac{(-1)^n}{n}u[n]$ ۳) $x[n]=\frac{(-1)^{n+1}}{n}u[n-1]$ ۴) $x[n]=\frac{(-1)^{n+1}}{n}u[n]$

حل:

$$x[n]\xrightarrow{z}X(z)=Ln\left(1+z^{-1}\right)$$

$$n\,x[n]\xrightarrow{z}-z\frac{dx(z)}{dz}=(-z)\frac{-z^{-2}}{1+z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

با توجه به جدول (۱۸ ـ ۱) داریم:

$$nx[n]=(-1)^{n-1}u[n-1] \Rightarrow x[n]=\frac{(-1)^{n-1}}{n}u[n-1]$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(۱۲) قضایای مقدار اولیه: اگر $x[n]$ یک سیگنال گسسته در زمان و در $n<0$ فاقد نمونه باشد، آنگاه نمونه صفرم، اول، دوم و ...... آن را می‌توان از روابط داده شده در جدول (۱۸ ـ ۲) بدست آورد.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) فرض کنید یک سیستم LTI و علی توسط معادله تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=-6x[n]+x[n-1]$$

در صورتی‌که ورودی به‌صورت $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم نادرست است؟

۱) $y[n]=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n-2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u[n]$

۲) $y[n]=-2(n+3)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

۳) $y[n]=-6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n]$

۴) $y[n]=-6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$

حل: با روش‌های مختلفی می‌توان این تست را حل کرد. یکی از این روش‌ها استفاده از قضیه مقدار اولیه و تعیین $y[0]$ است.

$$y[0]=\lim_{z\to\infty}Y(z)=\lim_{z\to\infty}H(z)X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{-6+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=-6$$

تنها گزینه (۱) است که در آن $y[0]\neq -6$ است.

مثال: فرض کنید تبدیل z یک سیگنال برابر $X(z)=\frac{z^3+2z^2-4z+1}{2z^3-z^2+z+2}$ باشد. نمونه صفرم و اول این سیگنال را بدست آورید. (فرض کنید سیگنال فوق هیچ نمونه‌ای در $n<0$ نداشته باشد.)

حل: از قضایای مقدار اولیه استفاده کرده و داریم:

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)=\frac{1}{2}$$

$$x[1]=\lim_{z\to\infty}z\left(\frac{z^3+2z^2-4z+1}{2z^3-z^2+z+2}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{5}{2}z^3-\frac{9}{2}z^2}{2z^3-z^2+z+2}=\frac{5}{4}$$

تذکر: تعیین مقادیر اولیه یک سیگنال گسسته در زمان با تبدیل z گویا را می‌توان از روش‌های دیگر نیز به‌دست آورد. یکی از این روش‌ها تقسیم صورت بر مخرج است. به عنوان نمونه برای مثال اخیر داریم:

$$\begin{array}{l|l} z^3+2z^2-4z+1 & 2z^3-z^2+z+2 \\ \cline{2-2} z^3-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z+1 & \frac{1}{2}+\frac{5}{4}z^{-1}+\dots\dots\dots \\ -\quad + \quad - \quad - & \\ \hline \frac{5}{2}z^2-\frac{9}{2}z & \vdots \\ \frac{5}{2}z^2-\frac{5}{4}z+\frac{5}{4}+\frac{5}{2}z^{-1} & \\ -\quad + \quad - \quad - & \\ \hline \vdots & \end{array}$$

با توجه به خارج قسمت به‌دست آمده ملاحظه می‌کنید $x[0]=\frac{1}{2}$ و $x[1]=\frac{5}{4}$ به‌دست می‌آیند.

(۱۳) مجموع نمونه‌های سیگنال : اگر در رابطه تبدیل z یا یک سیگنال $z=1$ قرار داده شود، آن‌گاه ملاحظه می‌شود مجموع نمونه‌های سیگنال برابر مقدار تبدیل z آن به ازای $z=1$ است.

۱۸ـ۳ـ تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI با تبدیل z و اتصال آن‌ها

از تبدیل z مانند تبدیل لاپلاس می‌توان در تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI استفاده کرد. اگر از خاصیت کانولوشن در حوزه زمان برای یک سیستم LTI گسسته در زمان استفاده کنیم، داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n] \;\Rightarrow\; Y(z)=X(z)H(z)$$

به عبارت دیگرتبدیل z خروجی برابر تبدیل z ورودی در تبدیل z پاسخ ضربه (تابع انتقال یا تابع سیستم یا تابع تبدیل) می‌باشد و با عکس تبدیل z گرفتن از $Y(z)$ می‌توان $y[n]$ را بدست آورد.

همچنین با توجه به آن که z^n یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI گسسته می‌باشد، اگر $x[n]=z^n$ به سیستم اعمال شود، خروجی $y[n]=H(z)z^n$ خواهد شد.

تذکر: رابطه $Y(z)=H(z)X(z)$ فقط هنگامی صادق است که ناحیه همگرائی $Y(z)$ که از اشتراک نواحی همگرائی $X(z)$ و $H(z)$ به‌دست می‌آید تهی نباشد. در غیر این صورت باید از قضیه کانولوشن برای به‌دست آوردن $y[n]$ استفاده کرد.

تذکر: رابطه $y[n]=H(z)z^n$ پاسخ حالت دائم سیستم را می‌دهد و برای تعیین پاسخ‌گذرای سیستم باید از قطب‌های $H(z)$ (فرکانس‌های طبیعی سیستم) استفاده کرد.

مثال : تابع تبدیل یک سیستم LTI گسسته در زمان به صورت $H(z)=\dfrac{1-kz^{-1}}{k+2z^{-1}+z^{-2}}$ است و k یک مقدار حقیقی می‌باشد. اگر به این سیستم ورودی $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ اعمال کنیم، پاسخ حالت دائم برابر $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ می‌شود. مقدار k چقدر است؟

حل : چون $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ یک تابع ویژه برای سیستم می‌باشد بنابراین با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$H(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow \frac{1-2k}{k+4+4}=2 \Rightarrow 1-2k=2k+16 \Rightarrow k=-\frac{15}{4}$$

معمولاً از روی تابع تبدیل یک سیستم LTI می‌توان بسیاری از خواص آن را بدست آورد. ازجمله این خواص علی و پایدار بودن سیستم LTI است.

تست نمونه ـ در مورد یک سیستم LTI گسسته در زمان با ورودی x [n] و خروجی y [n] مطالب زیر را می‌دانیم:

(۱)اگر به ازای تمام مقادیر n ، $x[n]=(-2)^n$ باشد، آنگاه به ازای تمام مقادیر n داریم $y[n]=x[n]$

(۲)اگر به ازای تمام مقادیر n ، $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ باشد ، آنگاه به ازای تمام مقادیر n داریم $y[n]=\delta[n]+a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. مقدار a کدام است؟

۱) $a=\frac{3}{40}$ ۲) $a=-\frac{9}{40}$ ۳) $a=\frac{9}{40}$ ۴) هیچکدام

حل :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\dfrac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xrightarrow{H(z)\big|_{z=-2}=1} 1=\frac{1+\dfrac{8a}{9}}{\dfrac{4}{5}} \Rightarrow 1+\frac{8a}{9}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8a}{9}=-\frac{1}{5} \Rightarrow a=-\frac{9}{40}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI به صورت $H(z)=\dfrac{1-az^{-1}+z^{-2}}{7+az^{-1}}$ می‌باشد. ضمناً می‌دانیم پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=a^n$ به صورت $y[n]=a^{n+1}$ می‌باشد. مقدار a چقدر است؟

۱) $a=2$ ۲) $a=1.5$ ۳) $a=1$ ۴) $a=0.5$

حل :

$$H(z)\Big|_{z=a}=a \Rightarrow \frac{1-1+a^{-2}}{8}=a \Rightarrow a^{-3}=8 \Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

علی بودن یک سیستم LTI گسسته در زمان: اگر یک سیستم LTI علی باشد آنگاه پاسخ ضربه آن به ازاء $n < 0$ برابر صفر است. در نتیجه پاسخ ضربه یک سیگنال سمت راستی است و ROC تابع تبدیل آن به صورت $|z| > r_0$ است.عکس این گزاره لزوماً صادق نیست زیرا اگر ROC تابع تبدیل به صورت $|z| > r_0$ باشد، فقط نتیجه می‌گیریم $h[n]$ سمت راستی است و صفر بودن آن به ازاء $n < 0$ تضمین نمی‌شود. اما اگر تابع تبدیل گویا باشد می‌توان اثبات کرد که عکس گزاره نیز صحیح است. همچنین دقت کنید برای آن که سیستم علی باشد باید حتماً $z=\infty$ در ROC قرار داشته باشد.(زیرا اگر ROC فاقد $z=\infty$ باشد، این بدان معناست که در تابع تبدیل سیستم فوق جمله z به توان یک عدد مثبت داریم و این جمله طبق خاصیت شیفت در حوزه زمان باعث غیرعلی شدن سیستم می‌شود.) بنابراین در حالت کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: یک سیستم LTI گسسته در زمان با تابع تبدیل $H(z)$ علی است اگر و تنها اگر:

(الف) ROC خارج دایره‌ای بیرون از بیرونی‌ترین قطب باشد.

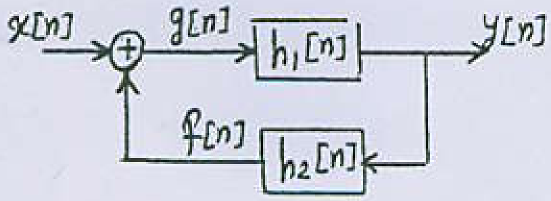
(ب) اگر $H(z)$ به صورت نسبت دو چند جمله‌ای برحسب z بیان شود، درجه صورت نباید از درجه مخرج بزرگتر باشد.

پایداری یک سیستم LTI گسسته: اگر یک سیستم LTI پایدار باشد، آنگاه پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع‌پذیر است. در این صورت تبدیل فوریه پاسخ ضربه همگراست. چون تبدیل فوریه یک سیگنال در واقع تبدیل z آن بر روی دایره واحد است در نتیجه قضیه زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه: یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرائی تابع تبدیل $H(z)$ آن شامل دایره واحد باشد.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) یک سیستم LTI در شکل زیر نمایش داده شده است:

چنانچه داشته باشیم:



$$y[n]=g[n]-\frac{3}{2}g[n-1]-g[n-2]$$

$$f[n]=\frac{3}{2}f[n-1]+f[n-2]+y[n-2]-\frac{3}{2}y[n-1]$$

سیستم فوق به ازاء کدام یک از نواحی همگرائی تابع تبدیل $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$ زیرپایدار است؟

۱) $|z|<2$ ۲) $|z|<\frac{1}{2}$ ۳) $|z|>\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}<|z|<2$

حل :

$$H_1(z)=\frac{Y(z)}{G(z)}=1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}$$

$$H_2(z)=\frac{F(z)}{Y(z)}=\frac{z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}$$

حال از فرمول فیدبک مثبت استفاده کنیم:

$$H(z)=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z)H_2(z)}=\frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}{1-z^{-2}+\frac{3}{2}z^{-1}}$$

در ادامه قطب‌های $H(z)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$z^2+\frac{3}{2}z-1=0 \Rightarrow (z+2)\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow z=+\frac{1}{2}\ ,\ z=-2$$

شرط پایداری آن است که ناحیه همگرائی $H(z)$ شامل دایره واحد باشد و شرط هنگامی تحقق می‌یابد که $\frac{1}{2}<|z|<2$ باشد.

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

علی و پایدار بودن یک سیستم LTI : اگر یک سیستم LTI تواماً علی و پایدار باشد، آنگاه ناحیه همگرائی تابع تبدیل آن علاوه بر آن که به صورت $|z|>r_0$ و شامل $z=\infty$ است، باید شامل دایره واحد نیز باشد. این وضعیت فقط هنگامی پیش می‌آید که تمام قطب‌های $H(z)$ درون دایره واحد باشد. بنابراین قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: یک سیستم LTI علی با تابع تبدیل گویا پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطب‌های $H(z)$ آن داخل دایره واحد باشد.

مثال : یک سیستم LTI گسسته با تابع تبدیل $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$ را در نظر بگیرید. به ازاء نواحی همگرائی مختلف در علی و پایدار بودن این سیستم بحث کرده و پاسخ ضربه آن راروی نواحی همگرائی مختلف بدست آورید.

حل :

$$H(z)=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-2z^{-1}}$$

با توجه به محل قطب‌ها، سه ناحیه همگرائی می توان برای این تابع تبدیل در نظر گرفت:

$|z|<\frac{1}{2}$: روی این ناحیه همگرائی سیستم غیرعلی و ناپایدار است و داریم:

$$h[n]=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-\frac{2}{3}\times(2)^n u[-n-1]$$

$\frac{1}{2}<|z|<2$: روی این ناحیه همگرائی سیستم غیرعلی و پایدار است و داریم:

$$h[n]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{2}{3}\times(2)^n u[-n-1]$$

$|z|>2$:روی این ناحیه همگرائی سیستم علی و ناپایدار است و داریم:

$$h[n]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{2}{3}\times(2)^n u[n]$$

تست نمونه - (آزاد ۸۴) چهار سیستم LTI پایدار با توابع سیستم زیر داده شده است:

$$H_1(z)=\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad H_2(z)=\frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$H_3(z)=\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6} \quad , \quad H_4(z)=\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر ناصحیح است؟

۱) سیستم $H_1(z)$ علی است.
۲) سیستم $H_2(z)$ غیرعلی است.
۳) سیستم $H_3(z)$ علی است.
۴) سیستم $H_4(z)$ علی است.

حل: قطب‌های هر چهار سیستم درون دایره واحد است. بنابراین با توجه به پایدار بودن آن‌ها، ROC هر چهار سیستم سمت راستی است. از طرفی درجه چند جمله‌ای صورت $H_2(z)$ و $H_4(z)$ از درجه چند جمله‌ای مخرج آن‌ها بیشتر است. لذا این دو سیستم غیرعلی می‌باشند. اما $H_1(z)$ و $H_3(z)$ مربوط به سیستم‌های علی می‌باشند.
بنابراین تنها گزاره ناصحیح گزینه (۴) است.

تست نمونه - (آزاد ۸۲) تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته به صورت $H(z)=\frac{z^{-1}}{1+kz^{-1}+z^{-2}}$ است که در آن k یک عدد ثابت می‌باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد؟

۱) این سیستم نمی‌تواند توأماً علی و پایدار باشد.
۲) این سیستم نمی‌تواند توأماً علی و ناپایدار باشد.
۳) این سیستم نمی‌تواند توأماً غیرعلی و ناپایدار باشد.
۴) این سیستم نمی‌تواند توأماً غیرعلی و پایدار باشد.

حل: قطب‌های $H(z)$ را به‌دست آورده و با توجه به آن‌ها گزاره درست انتخاب می‌کنیم:

$$z^2+kz+1=0 \;\Rightarrow\; z=-\frac{k}{2}\pm\sqrt{\frac{k^2}{4}-1}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$$

با توجه به محدوده k می‌توان تقسیم‌بندی زیر را انجام داد:

$k>2$ یا $k<-2$: سیستم دارای دو قطب حقیقی $Z=-\frac{k}{2}\pm\frac{\sqrt{k^2-4}}{2}$ است و بدیهی است یکی از این دو قطب در خارج از دایره واحد قرار می‌گیرد.

$-2<k<2$: سیستم دارای دو قطب مزدوج $Z=-\frac{k}{2}\pm j\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$ است که برای این دو قطب $|z|=1$ است و در نتیجه هر دو روی دایره واحد می‌باشند.

بنابراین به ازاء هیچ مقدار از k هر دو قطب این سیستم درون دایره واحد قرار نمی‌گیرد و بنابراین سیستم نمی‌تواند توأماً علی و پایدار باشد.

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه ـ یک سیستم گسسته در زمان LTI و علی با معادله تفاضلی $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]+k\,y[n-2]=x[n-1]-2x[n-2]$ را در نظر بگیرید. محدوده k به گونه‌ای که اولاً این سیستم دارای دو قطب مزدوج با یکدیگر و ثانیاً پایدار باشد کدام است؟

۱) $k<1$ ۲) $\frac{1}{16}<k<1$ ۳) $k>\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{16}<k<4$

حل: از طرفین معادله تبدیل z گرفته و $H(z)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$Y(z)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}+kz^{-2}\right)=X(z)\left(z^{-1}-2z^{-2}\right) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}-2z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+kz^{-2}}$$

حال قطب‌های $H(z)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$z^2+\frac{1}{2}z+k=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-k}$$

اگر $k>\frac{1}{16}$ آن‌گاه هر دو قطب مزدوج یکدیگرند و در این صورت داریم:

$$z=-\frac{1}{4}\pm j\sqrt{k-\frac{1}{16}}$$

برای پایداری سیستم داریم:

$$|z|<1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{16}+k-\frac{1}{16}}<1 \Rightarrow k<1$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال: یک سیستم علی و پایدار با پاسخ ضربه $h[n]$ و تابع سیستم گویای $H(z)$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $H(z)$ قطبی در $z=\frac{1}{2}$ و صفری روی دایره واحد دارد. تعداد و محل بقیه قطب‌ها و صفرها معلوم نیست. می‌خواهیم تعیین کنیم کدام یک از گزاره‌های زیر مطمئناً درست می‌باشند. کدام یک مطمئناً نادرست هستند و در درستی یا نادرستی کدام گزاره نمی‌توان اظهارنظر کرد.

(الف) $F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n h[n]\right\}$ همگرا است.

(ب) به ازاء بعضی مقادیر ω داریم $H(e^{j\omega})=0$

(ج) $h[n]$ عرض محدودی دارد.

(د) $h[n]$ حقیقی است.

(هـ) $g[n]=n\{h[n]*h[n]\}$ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار است.

حل: گزاره (الف) درست است. زیرا $F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n h[n]\right\}$ تبدیل z سیگنال $h[n]$ در $z=2$ است. این همگرائی معادل این است که $z=2$ در ROC قرار دارد، این تبدیل فوریه همگراست. چون سیستم پایدار و علی است، تمام قطب‌های $H(z)$ داخل دایره واحد قرار دارند و تمام نقاط خارج از دایره واحد از جمله $z=2$ در ROC واقع‌اند.

گزاره (ب) درست است زیرا $H(z)$ روی دایره واحد صفر دارد.

گزاره (ج) نادرست است زیرا ناحیه همگرائی سیگنال دارای عرض محدود باید تمام صفحه z، غیر از احتمالاً $z=0$ و (یا) $z=\infty$ باشد. این مطلب با وجود یک قطب در $z=\frac{1}{2}$ سازگار نیست.

برای درستی گزاره (د) باید داشته باشیم $H(z)=H^*(z^*)$ یعنی اگر قطب یا صفری در $z=z_0$ قرار داشته باشد، باید در $z=z_0^*$ نیز قطب یا صفری وجود داشته باشد. در این مورد اطلاعات کافی وجود ندارد.

گزاره (هـ) درست است. زیرا سیستم علی است و در نتیجه $h[n]$ در $n<0$ برابر صفر است. پس $h[n]*h[n]$ نیز در $n<0$ برابر صفر است. $g[n]=n(h[n]*h[n])$ نیز در $n<0$ برابر صفر است. پس $g[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم علی است. طبق قضیه کانولوشن در حوزه زمان تابع تبدیل متناظر با $h[n]*h[n]$ برابر $H^2(z)$ است و طبق خاصیت مشتق در حوزه z، تابع تبدیل متناظر با $g[n]$ عبارت است از:

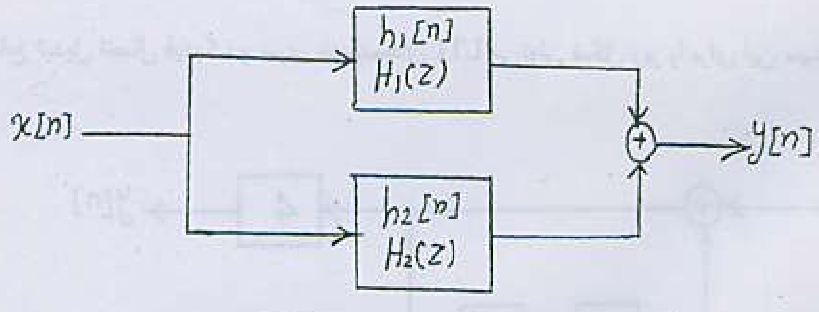
$$G(z)=-z\frac{d}{dz}\left(H^2(z)\right)=-2zH(z)\frac{dH(z)}{dz}$$

از رابطه اخیر می‌توان نتیجه گرفت قطب‌های $G(z)$ غیر از احتمالاً مبدأ در همان محل‌های قطب‌های $H(z)$ قرار دارند. چون قطب‌های $H(z)$ داخل دایره واحد است بنابراین کلیه قطب‌های $G(z)$ نیز درون دایره واحد قرار می‌گیرند و $g[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار است.

اتصال سیستم‌های LTI : با استفاده از تبدیل z و خواص مربوطه می‌توان تابع شبکه ترکیب سیستم‌های مختلف را به دست آورد. بدین منظور دانستن تابع تبدیل اتصالات اولیه و ساده لازم می‌باشد.

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۸ ـ ۵) با یکدیگر موازی باشند آنگاه از آنجایی که پاسخ ضربه آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها نیز با یکدیگر جمع می‌شوند. به عبارت دیگر داریم:

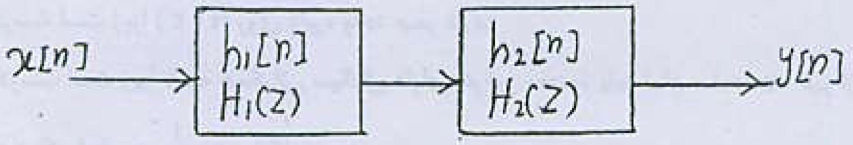
$$h[n]=h_1[n]+h_2[n] \;\Rightarrow\; H(z)=H_1(z)+H_2(z)$$



شکل ۱۸ ـ ۵ ـ اتصال موازی دو سیستم LTI گسسته

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۸ ـ ۶) با یکدیگر سری باشند آنگاه از آنجائیکه پاسخ ضربه آن‌ها با یکدیگر کانوالو می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند. به عبارت دیگر داریم:

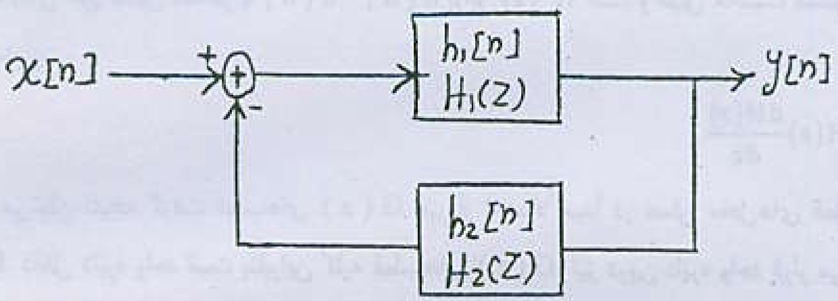
$$h[n]=h_1[n]*h_2[n] \;\Rightarrow\; H(z)=H_1(z)H_2(z)$$



شکل ۱۸ ـ ۶ ـ اتصال سری دو سیستم LTI گسسته

اگر دو سیستم LTI گسسته مطابق شکل (۱۸ ـ ۷) با اتصال فیدبک به یکدیگر متصل گردند، می‌توان تابع تبدیل $H(z)$ را از رابطه زیر بدست آورد:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}$$



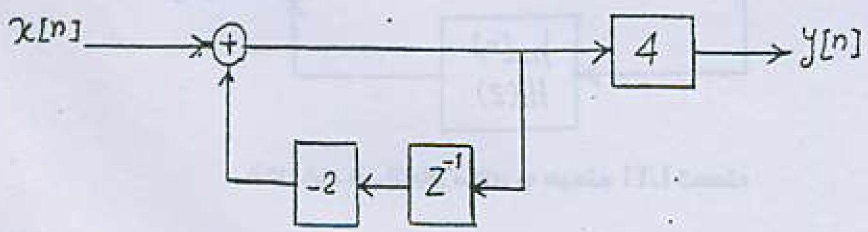
شکل ۱۸ ـ ۷ـ اتصال فیدبک دو سیستم LTI

با در نظر گرفتن سه ساختار فوق و همچنین ساختارهای شکل مستقیم I و II و با استفاده از عناصر پایه ضرب کننده اسکالر، جمع کننده و تأخیردهنده می‌توان سیستم‌های مرتبه بالا رابه صورت جعبه‌ای ودر حوزه z نمایش داد.

مثال : یک سیستم LTI گسسته در زمان با تابع تبدیل $H(z)=\frac{4}{1-2z^{-1}}$ را در نظر بگیرید. توسط ساختارهای اصلی، نمودار جعبه‌ای هم‌ارز این تابع شبکه را تحقق دهید.

حل : با توجه به تابع تبدیل اتصال فیدبک و سری سیستم‌های LTI می‌توان شکل زیر را برای این سیستم در نظر گرفت:

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}\times 4$$

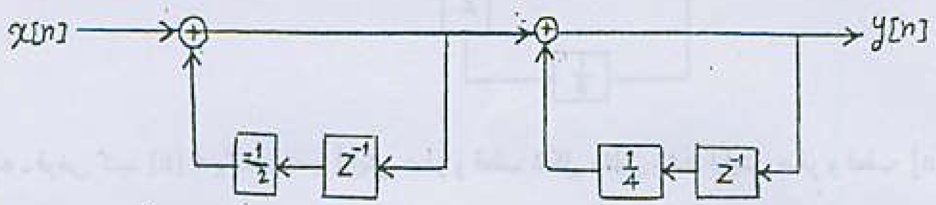


مثال : یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل $H(z)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل فوق را توسط ساختارهای سری، موازی و شکل مستقیم II و توسط عناصر پایه تحقق دهید.

حل: برای تحقق به ساختار سری کافی است صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده و به صورت حاصلضرب عبارت‌های مرتبه اول بنویسیم:

$$H(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

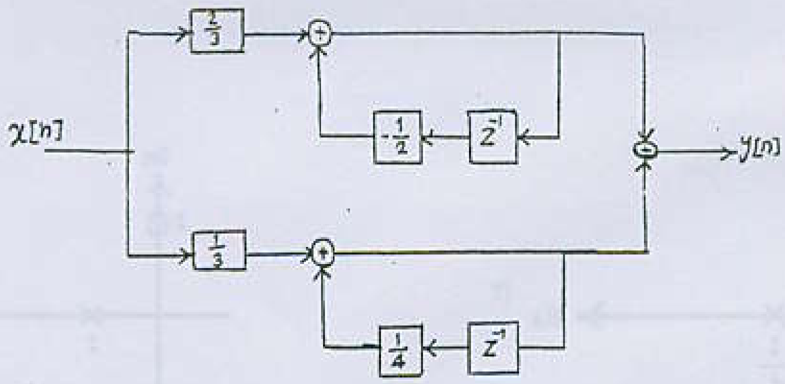
حال هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم. نمودار جعبه‌ای برای تحقق سری $H(z)$ در شکل زیر نشان داده شده است:



برای تحقق به ساختار موازی کافی است مخرج کسر $H(z)$ را تجزیه کرده و این کسر را به مجموع کسرهای جزئی بسط دهید.

$$H(z)=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

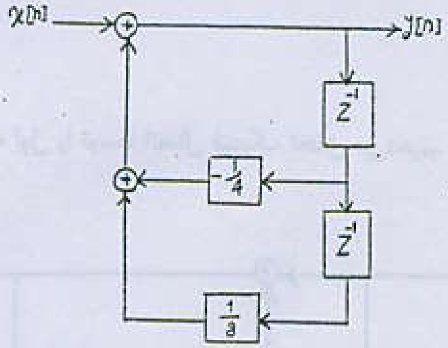
حال مجدداً هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم. نمودار جعبه‌ای برای تحقق موازی $H(z)$ در شکل صفحه بعد نشان داده شده است:



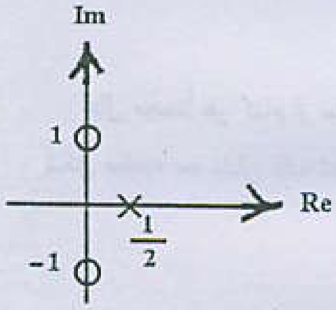
برای تحقق به ساختار شکل مستقیم II سعی می کنیم معادله تفاضلی را از $H(z)$ بدست آورده و فرم مستقیم I و سپس II تحقق دهیم.

$$H(z)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}\quad\Rightarrow\quad Y(z)+\frac{1}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)$$

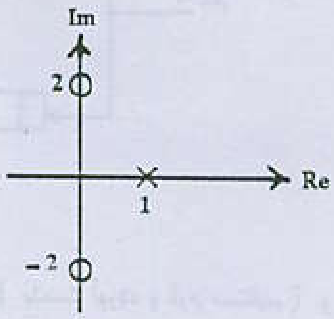
در شکل زیر شکل مستقیم II این تابع شبکه نشان داده شده است:



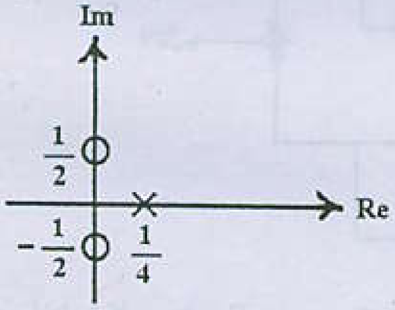
تست نمونه ـ فرض کنید $x[n]$ یک رشته با آرایش صفر و قطب شکل مقابل باشد. آرایش صفر و قطب $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n x[n]$ کدام گزینه است؟



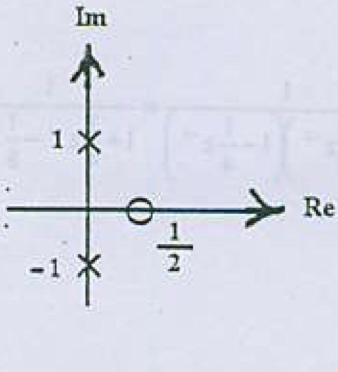
۱)



۲)



۳)



۴) هیچکدام

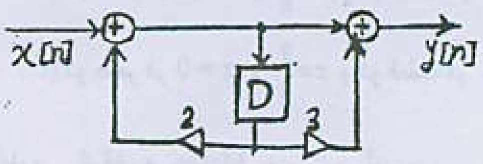
حل :

با توجه به جدول (۱۸ ـ ۲) داریم :

$$Y(z)=X(2z)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) تابع تبدیل زمان گسسته نشان داده شده در شکل روبروکه در آن D معرف یک واحد شیفت می‌باشد چیست؟



۱) $H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+2z^{-1}}$

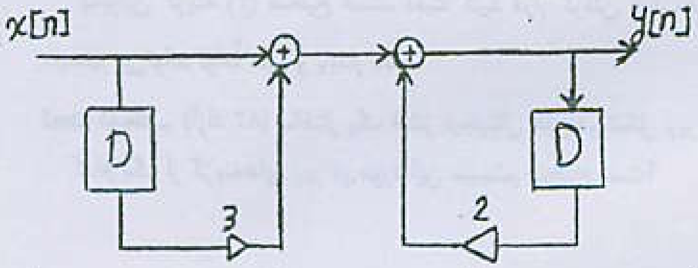
۲) $H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1+2z^{-1}}$

۳) $H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$

۴) $H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$

حل :

راه حل مستقیم این‌گونه تست‌ها، تبدیل به شکل مستقیم I و تعیین معادله تفاضلی و در نتیجه تابع تبدیل است. شکل مستقیم I این سیستم در زیر نشان داده شده است:



با توجه به شکل فوق می‌توان معادله تفاضلی و تابع تبدیل سیستم را به‌دست آورد :

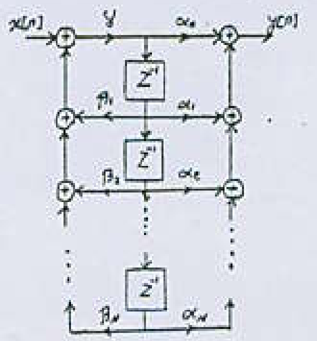
$$y[n]=x[n]+3x[n-1]+2y[n-1]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

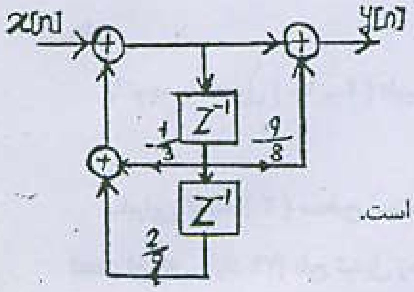
پس گزینه (۳) صحیح است.

تذکر: در تست فوق می‌توان تابع تبدیل $H(z)$ را به‌طور مستقیم و از روی شکل مستقیم II بدست آورد. با توجه به شکل زیر $H(z)$ برابر است با: (قضیه Mason)

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N}\alpha_k z^{-k}}{\frac{1}{\gamma}-\sum_{i=1}^{N}\beta_i z^{-i}}$$



تست نمونه - (آزاد ۸۲) شکل مقابل نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI را نشان می‌دهد:



کدام یک ازگزینه‌های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

۱) دو قطب در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو صفر در $z=\frac{1}{3}$ و $z=-\frac{2}{3}$ دارد و ناپایدار است.

۲) دو قطب در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو صفر در $z=\frac{1}{3}$ و $z=-\frac{2}{3}$ دارد و اگر غیرعلی باشدپایدار است.

۳) دو صفر در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو قطب در $z=\frac{1}{3}$ و $z=-\frac{2}{3}$ دارد و پایدار است.

۴) دو صفر در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو قطب در $z=\frac{1}{3}$ و $z=-\frac{2}{3}$ دارد و اگر علی باشد پایدار است.

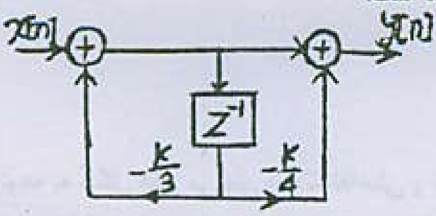
حل : از قضیه Mason به‌دست می‌آوریم:

$$H(z)=\frac{1-\frac{9}{8}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}}=\frac{z\left(z-\frac{9}{8}\right)}{z^2+\frac{1}{3}z-\frac{2}{9}}=\frac{z\left(z-\frac{9}{8}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است. دقت کنید قرار گرفتن قطب‌ها داخل دایره واحد باعث پایداری سیستم نمی‌گردد. اما در این وضعیت سیستم می‌تواند تواماً علی و پایدار باشد.

تست نمونه - (آزاد ۸۲) ساختار یک فیلتر دیجیتال علی در شکل زیر نشان داده شده است:

کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟



۱) این سیستم به ازای $|k|<4$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=\left(\frac{k}{4}\right)^n u[n]+\frac{k}{3}\left(\frac{k}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$ است.

۲) این سیستم به ازای $|k|>4$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=\left(-\frac{k}{4}\right)^n u[n]+\frac{k}{3}\left(-\frac{k}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$ است.

۳) این سیستم به ازای $|k|>3$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=\left(\frac{k}{3}\right)^n u[n]+\frac{k}{4}\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}u[n-1]$ است.

۴) این سیستم به ازای $|k|<3$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=\left(-\frac{k}{3}\right)^n u[n]+\frac{k}{4}\left(-\frac{k}{3}\right)^{n-1}u[n-1]$ است.

حل : از قضیه Mason استفاده می‌کنیم:

$$H(z)=\frac{1-\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$$

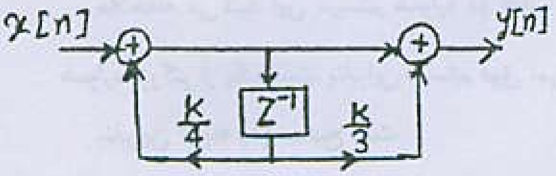
حال قطب سیستم را به‌دست آورده و با توجه به علی بودن سیستم، شرط قرار گرفتن این قطب در دایره واحد را به‌دست می‌آوریم:

$$z+\frac{k}{3}=0 \quad \rightarrow \quad z=-\frac{k}{3}$$

$$|z|<1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|k|}{3}<1 \quad \Rightarrow \quad |k|<3$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) ساختار یک فیلتر دیجیتال در شکل زیر نشان داده شده است:



در صورتی‌که برای ورودی $x[n]=(3)^n$ خروجی این سیستم $y[n]=16(3)^{n-2}$ باشد، مقدار k چقدر باید باشد؟

۱) $k=\frac{1}{4}$ ۲) $k=4$ ۳) $k=3$ ۴) $k=\frac{1}{3}$

حل : از قضیه Mason استفاده می‌کنیم:

$$H(z)=\frac{1+\frac{k}{3}z^{-1}}{1-\frac{k}{4}z^{-1}}$$

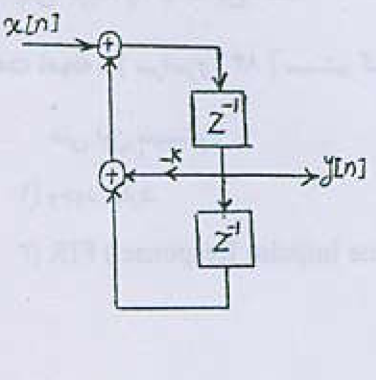
حال از شرط داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$H(z)\Big|_{z=3}=\frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\frac{k}{9}}{1-\frac{k}{12}}=\frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad 9+k=16-\frac{4}{3}k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3}k=7 \quad \Rightarrow \quad k=3$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۳) شکل زیر نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI است (k یک عدد ثابت است). کدام یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد؟



۱) این سیستم نمی‌تواند تواماً علی و پایدار باشد.
۲) این سیستم نمی‌تواند تواماً علی و ناپایدار باشد.
۳) این سیستم نمی‌تواند تواماً غیرعلی و ناپایدار باشد.
۴) این سیستم نمی‌تواند تواماً غیرعلی و پایدار باشد.

حل : از قضیه Mason استفاده می‌کنیم و سپس قطب‌های سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$H(z)=\frac{Z^{-1}}{1+kz^{-1}-z^{-2}}$$

$$Z^2+kz-1=0 \Rightarrow Z=-\frac{k}{2}\pm\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$$

ملاحظه می‌کنید این سیستم همواره دو قطب حقیقی دارد که حداقل یکی از آن‌ها خارج از دایره واحد است. زیرا جمله $\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}$ همواره بزرگتر از یک است. بنابراین سیستم فوق نمی‌تواند توأماً علی و پایدار باشد.

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه ـ (آزاد ۸۲) ورودی یک سیستم زمان گسسته LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ به صورت $x[n]=\left(-\frac{7}{8}\right)^n$ است. خروجی این سیستم در لحظه n=1 برابر است با:

۱) $-\frac{49}{72}$ ۲) $\frac{49}{72}$ ۳) $-\frac{7}{9}$ ۴) $-\frac{7}{8}$

حل :

$$h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

از آنجائی‌که $x[n]=\left(-\frac{7}{8}\right)^n$ یک تابع ویژه برای این سیستم است بنابراین :

$$y[n]=H(z)\Big|_{z=-\frac{7}{8}}\times\left(-\frac{7}{8}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\times\frac{8}{7}}\times\left(-\frac{7}{8}\right)^n=\frac{7}{9}\times\left(-\frac{7}{8}\right)^n$$

$$y[n]\Big|_{n=1}=\left(\frac{7}{9}\right)\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{-49}{72}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۴) سیستم گسسته زمان LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]-\delta[-n+2]$ مفروض است. وارون علی این سیستم :

۱) وجود ندارد.
۲) IIR و پایدار است.
۳) Finite Impulse Response) FIR) است.
۴) Infinite Impulse Response) IIR) است.

حل :

$$h[n]=\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]-\delta[n-2] \Rightarrow H(z)=1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}$$

اگر تابع تبدیل سیستم وارون را با $G(z)$ نشان دهیم داریم :

$$G(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1}{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}$$

اگر $X(z)$ و $Y(z)$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم وارون باشند آنگاه :

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}} \Rightarrow y[n]+\frac{3}{2}y[n-1]-y[n-2]=x[n]$$

برای انتخاب بین گزینه‌های (۲) و (۴) قطب‌های $G(z)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}=0 \Rightarrow z^2+\frac{3}{2}z-1=0 \Rightarrow z=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+1}$$

ملاحظه می‌کنید یک قطب در RHP قرار می‌گیرد. پس سیستم نمی‌تواند تواماً علی و پایدار باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گسسته LTI علی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h[n]=0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]=4 \quad , \quad h[0]=1$$

محل صفر z_0 و قطب p_0 آن را مشخص کنید.

۱) $z_0=1$, $p_0=\frac{1}{2}$
۲) $z_0=1$, $p_0=\frac{1}{3}$
۳) $z_0=-1$, $p_0=\frac{1}{2}$
۴) $z_0=-1$, $p_0=\frac{1}{3}$

حل : با توجه به آن‌که سیستم فوق فقط یک صفر و یک قطب دارد بنابراین تابع تبدیل آن را به صورت $H(z)=k\frac{z-z_0}{z-p_0}$ در نظر میگیریم، حال از مفروضات تست استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h[n]=0 \Rightarrow H(z)\Big|_{z=-1}=0 \Rightarrow z_0=-1$$

$$h[0]=1 \Rightarrow \lim_{z\to\infty}H(z)=1 \Rightarrow k=1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]=4 \Rightarrow H(z)\Big|_{z=1}=4 \Rightarrow \frac{1+(-1)}{1-p_0}=4 \Rightarrow 1-p_0=\frac{1}{2} \Rightarrow p_0=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

خودآزمائی دهم

۱ـ (آزاد ۸۳) سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]+2^n u[-n-1]$$

در مورد این سیگنال چه می‌توان گفت؟

۱) تبدیل فوریه دارد ولی تبدیل z ندارد.
۲) تبدیل فوریه ندارد ولی تبدیل z دارد.
۳) هم تبدیل فوریه دارد هم تبدیل z
۴) نه تبدیل فوریه دارد و نه تبدیل z

۲ـ (آزاد ۸۱) کدام گزینه قطب‌ها و ناحیه همگرائی تبدیل z سیگنال $x[n]$ را بیان می‌کند؟ $x[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & n\le 0\\ 0 & n>0\end{cases}$

۱) $\frac{1}{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$, $|z|<\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$, $|z|>\frac{1}{3}$
۳) $\frac{\pi}{4}e^{\pm j\frac{1}{3}}$, $|z|<\frac{\pi}{4}$
۴) $\frac{\pi}{4}e^{\pm j\frac{1}{3}}$, $|z|>\frac{\pi}{4}$

۳ـ (آزاد ۸۴) تبدیل z سیگنال $x[n]$ به صورت $X(z)=\log\left(1+\frac{3}{2}z^{-1}\right)$ و ناحیه همگرائی $|z|>\frac{3}{2}$ است. $x[n]$ چگونه است؟

۱) $x[n]=\frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n u[n-1]$
۲) $x[n]=\left(\frac{3}{2}\right)^n u[n]$
۳) $x[n]=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n u[n-1]$
۴) $x[n]=-\left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n-1]$

۴ـ $x[n]$ سیگنالی است که تبدیل z گویای آن قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد، می‌دانیم که $x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر است و $x_2[n]=\left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر نیست. تعیین کنید کدام گزینه در مورد $x[n]$ صحیح است؟

۱) $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی است.
۲) $x[n]$ یک سیگنال سمت چپی است.
۳) $x[n]$ یک سیگنال دو طرفه است.
۴) با اطلاعات فوق نمی‌توان نوع $x[n]$ را تعیین کرد.

۵ـ (آزاد ۸۲ و آزاد ۸۴) گفته شده اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت $x_1[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ باشد، خروجی آن $y_1[n]=\left[b\left(\frac{1}{2}\right)^n+10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$ خواهد بود و چنانچه ورودی $x_2[n]=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ باشد، خروجی آن $y_2[n]=\frac{118}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ خواهد بود. مقدار b چقدر است؟

۱) $b=1$
۲) $b=2$
۳) $b=3$
۴) $b=4$

۶ـ (آزاد ۸۰) پاسخ یک سیستم LTI گسسته زمان به ورودی $\begin{matrix} x[n]=0 \\ n<0 \end{matrix}$ و $X(z)=\frac{1-4z^{-1}}{1-z^{-1}}$ به صورت

$$y[n]=-\frac{1}{2}(-3)^n u[-n-1]+\frac{3}{2}u[n]$$

می‌باشد. پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

۱) $h[n]=-\frac{10}{7}(-3)^n u[-n-1]-\frac{4}{7}(4)^n u[-n-1]$

۲) $h[n]=-\frac{10}{7}(-3)^n u[-n-1]+\frac{4}{7}(4)^n u[n]$

۳) $h[n]=\frac{10}{7}(-3)^n u[n]-\frac{4}{7}(4)^n u[-n-1]$

۴) $h[n]=\frac{10}{7}(-3)^n u[n]+\frac{4}{7}(4)^n u[n]$

۷ـ (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI علی به صورت $H(z)=\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$ است. پاسخ پله این سیستم چیست؟

۱) $\frac{2}{3}u[n]+\frac{1}{3}(-0.5)^n u[n]$

۲) $\frac{1}{3}u[n]+\frac{2}{3}(-0.5)^n u[n]$

۳) $\frac{2}{3}u[n]+\frac{1}{3}(0.5)^n u[n]$

۴) $\frac{1}{3}u[n]+\frac{2}{3}(0.5)^n u[n]$

۸ـ (آزاد ۸۱) اولین سه مقدار از پاسخ ضربه سیستم علی با تابع تبدیل مقابل کدام است؟

$$H(z)=\frac{6z^{-3}+2z^{-2}+2z^{-1}+3}{2z^{-3}+3z^{-2}+4z^{-1}+2}$$

۱) $\frac{11}{4}, -2, \frac{3}{2}$

۲) $\frac{11}{4}, 2, \frac{3}{2}$

۳) $\frac{1}{4}, -\frac{7}{2}, 3$

۴) $\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, 3$

۹ـ (آزاد ۸۰) تابع تبدیل یک سیستم LTI گسسته به صورت $H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$ می‌باشد. در مورد این سیستم کدام گزاره درست است؟

۱) این تابع تبدیل می‌تواند به یک سیستم سببی مربوط باشد.

۲) برای ناحیه همگرائی $\frac{1}{2}>|z|$ پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=2^n u[-n-1]$ به صورت $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-n-2]$ می‌باشد.

۳) برای ناحیه همگرائی $\frac{1}{2}>|z|$ سیستم پایدار است.

۴) پاسخ ضربه برای $\frac{1}{2}<|z|$ به صورت $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می‌باشد.

۱۰ـ (آزاد ۸۱) اگر $H(z)$ تبدیل z پاسخ ضربه $h[n]$ مربوط به یک سیستم LTI باشد کدام گزینه صحیح است؟

$$H(z)=\frac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

۱) سیستم به شرط پایداری علی است.
۲) سیستم به شرط پایداری غیر علی است.
۳) سیستم همواره غیرعلی است.
۴) سیستم همواره علی است.

۱۱ـ یک سیتم LTI گسسته در زمان را در نظر بگیرید. اطلاعات در موردپاسخ ضربه $h[n]$ و تابع تبدیل $H(z)$ این سیستم به شرح زیر است:

۱) $h[n]$ حقیقی است.
۲) $h[n]$ سمت راستی است.
۳) $\lim_{z\to\infty} H(z)=1$
۴) $H(z)$ دو صفر دارد.
۵) یکی از قطب‌های غیرحقیقی $H(z)$ روی دایره $|z|=\frac{3}{4}$ قرار دارد.

کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟

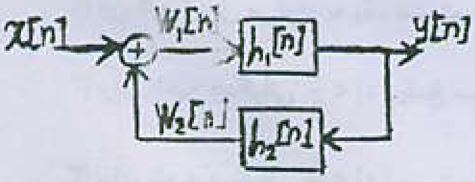
۱) سیستم فوق علی و پایدار است.
۲) سیستم فوق غیرعلی و پایدار است.
۳) سیستم فوق علی و ناپایدار است.
۴) سیستم فوق غیرعلی و ناپایدار است.

۱۲ـ (آزاد ۷۹) یک سیستم زمان گسسته LTI علی در نظر بگیرید و فرض کنید بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن معادله تفاضلی $y[n]=4ay[n-1]-\frac{25}{4}a^2y[n-2]+x[n]$ برقرار است. به ازای چه مقادیری از a این سیستم پایدار خواهد بود؟

۱) $|a|>\frac{2}{3}$
۲) $|a|>\frac{2}{5}$
۳) $|a|<\frac{2}{5}$
۴) $|a|<\frac{2}{3}$

۱۳ـ (آزاد ۸۲) یک سیستم LTI در شکل زیر نمایش داده شده است:

گفته شده $y[n]=y[n-1]+\frac{20}{3}w_1[n]$ و $w_2[n]=2w_2[n-1]-y[n-1]$ است. سیستم فوق به ازای کدام یک از نواحی همگرائی تابع تبدیل $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$ زیر پایدار است.

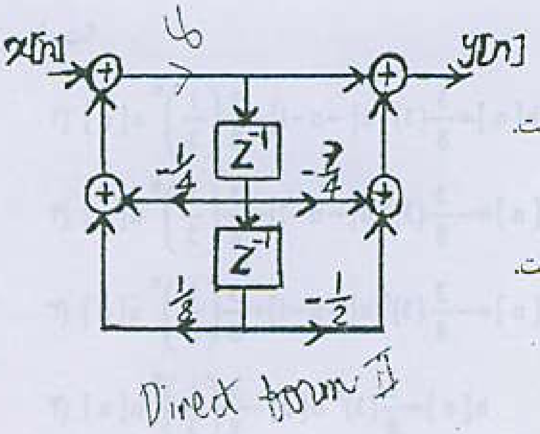


۱) $|z|<3$
۲) $\frac{2}{3}<|z|$
۳) $\frac{2}{3}<|z|<3$
۴) $3<|z|$

۱۴ـ (آزاد ۸۲) سیستم داده شده در سؤال قبل به ازای کدام یک از نواحی همگرائی تابع تبدیل $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$ زیر علی است؟

۱) $|z|<3$
۲) $\frac{2}{3}<|z|$
۳) $\frac{2}{3}<|z|<3$
۴) $3<|z|$

۱۵ ـ (آزاد ۸۲) شکل مقابل نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI را نمایش می‌دهد:



کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم ناصحیح است؟

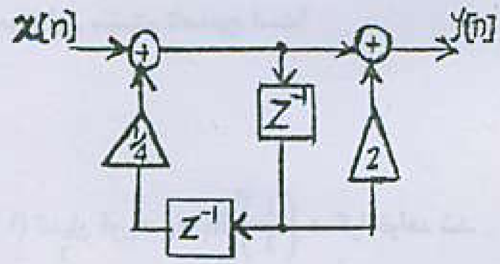
۱) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z)=\left(\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)$ است.

۲) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z)=4+\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ است.

۳) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$ است.

۴) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z)=\frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$ است.

۱۶ ـ (سراسری ۸۲) پاسخ ضربه سیستم نشان داده شده در شکل زیر با فرض علی بودن سیستم کدام است؟ ($u_{-1}[n]$ معرف دنباله پله واحد می‌باشد)



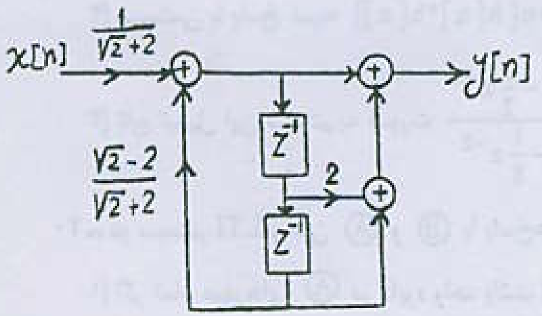
۱) $h[n]=\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u_{-1}[n]$

۲) $h[n]=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u_{-1}[n]$

۳) $h[n]=\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u_{-1}[n]$

۴) $h[n]=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u_{-1}[n]$

۱۷ ـ (آزاد ۸۳) شکل مقابل یک شبکه دیجیتال برای پیاده‌سازی یک فیلتر باترورث مرتبه دوم نمایش می‌دهد:



معادله تفاضلی توصیف‌کننده این شبکه کدام است؟

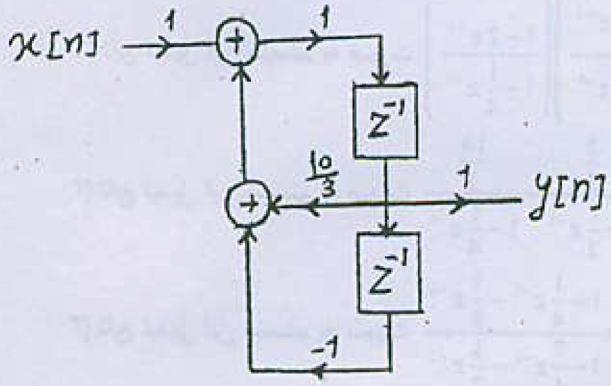
۱) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}y[n]+\left(2-\sqrt{2}\right)y[n-2]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$

۲) $\left(2+\sqrt{2}\right)y[n]+\left(\sqrt{2}-2\right)y[n-2]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$

۳) $\left(2+\sqrt{2}\right)y[n]+\left(2-\sqrt{2}\right)y[n-2]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$

۴) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}y[n]+\left(\sqrt{2}-2\right)y[n-2]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$

۱۸ ـ (آزاد ۸۴) نمودار بلوکی یک سیستم LTI در شکل زیر رسم شده است. در صورتی که این سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه آن کدام است؟



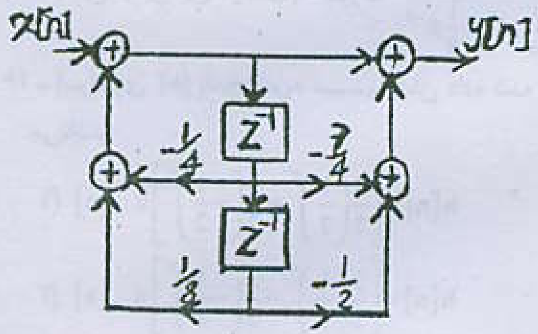
۱) $h[n]=\frac{3}{8}(3)^n u[-n-1]-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

۲) $h[n]=-\frac{3}{8}(3)^n u[-n-1]-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

۳) $h[n]=-\frac{3}{8}(3)^n u[-n-1]+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

۴) $h[n]=\frac{3}{8}(3)^n u[n]-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

۱۹ ـ (آزاد ۸۳) شکل مقابل نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI و علی را نمایش می‌دهد. چنانچه پاسخ ضربه سیستم را $h[n]$ و تابع تبدیل آن را $H(z)$ بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم ناصحیح است؟



۱) تبدیل فوریه $\left(\frac{1}{3}\right)^n h[n]$ همگرا خواهد شد.

۲) نقطه یا نقاطی روی دایره واحد (در صفحه z) وجود دارد که $H(e^{j\omega})=0$ خواهد شد.

۳) سیستمی با پاسخ ضربه $g[n]=n(h[n]*h[n])$ پایدار است.

۴) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z)=\dfrac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$ است.

۲۰ ـ دو سیستم LTI و علی Ⓐ و Ⓑ با پاسخ‌های ضربه $h_A[n]$ و $h_B[n]=h_A[-n]$ را در نظر بگیرید. کدام گزاره درست است؟

۱) اگر تمام صفرهای Ⓐ در دایره واحد باشد، آنگاه سیستم Ⓑ لزوماً پایدار است.

۲) اگر سیستم Ⓐ ناپایدار باشد، آنگاه سیستم Ⓑ لزوماً پایدار خواهد بود.

۳) اگر یکی از صفرهای سیستم Ⓐ در خارج دایره واحد باشد، آنگاه سیستم Ⓑ لزوماً ناپایدار خواهد بود.

۴) اگر سیستم Ⓐ پایدار باشد، آنگاه سیستم Ⓑ لزوماً ناپایدار خواهد بود.

۲۱ ـ یک سیستم LTI و FIR با پاسخ ضربه $h[n]$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $h[n]$ حقیقی، زوج و در بازه محدود $2N+1$ قرار دارد. اگر $z_1 = re^{j\omega_0}$ یک صفر این سیستم باشد، آنگاه کدام گزاره صحیح است؟

۱) $z_2 = re^{-j\omega_0}$ نیز یک صفر این سیستم است.
۲) $z_3 = \frac{1}{r}e^{j\omega_0}$ نیز یک صفر این سیستم است.
۳) $z_4 = \frac{1}{r}e^{-j\omega_0}$ نیز یک صفر این سیستم است.
۴) z_2 , z_3 , z_4 هر سه صفرهای این سیستم می‌باشند.

۲۲ـ (سراسری ۸۱) در صورتی که پاسخ ضربه سیستم LTI و علی $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=\frac{1}{3}x[n]$ از پاسخ پله سیستم LTI و علی $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$ کسر شود حاصل با کدام برابر است؟

۱) $\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$
۲) $\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$
۳) $\left[\frac{8}{3}-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$
۴) $\left[\frac{8}{3}+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$

۲۳ـ (سراسری ۸۰) تابع تبدیل یک سیستم گسسته LTI به صورت $H(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}$ و ناحیه همگرائی آن $2<|z|<\infty$ می‌باشد. در مورد این سیستم کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم علی است.
۲) سیستم پایدار است.
۳) اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم باشد آن‌گاه $h[-1]=1$
۴) اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم باشد آن‌گاه $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]=0$

۲۴ـ (سراسری ۸۴) سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را در نظر بگیرید. با فرض این‌که $x[n]=0 \quad n>0$ باشد آن‌گاه: ($X(z)$ تبدیل z سیگنال $x[n]$ می‌باشد.)

۱) $x[0]=\lim\limits_{z\to 0} X(z)$
۲) $x[0]=\lim\limits_{z\to 1} zX(z)$
۳) $x[0]=\lim\limits_{z\to \infty} X(z)$
۴) $x[0]=\lim\limits_{z\to 1} X(z)$

۲۵ـ (سراسری ۸۳) فرض کنید $X(z)$ تبدیل z سیگنال گسسته $x[n]$ است. صفرهای تابع $X(z)$ در $z=\pm 2$ و قطب‌های آن در $z=0$ می‌باشد. اگر $y[n]=x^2[n]$ باشد صفرهای تابع $Y(z)$ (یعنی تبدیل z سیگنال $y[n]$) در کجا قرار خواهد داشت؟

۱) $z=\pm 4$
۲) $z=\pm j4$
۳) $z=\pm 2$ و به‌صورت مضاعف
۴) $z=4$ و به‌صورت مضاعف

۲۶ـ (سراسری ۸۰) اگر در یک سیستم زمان ـ گسسته LTI و پایدار، معادله تفاضلی زیر بین ورودی سیستم $x[n]$ و خروجی سیستم $y[n]$ برقرار باشد:

$$y[n]-a\,y[n-1]+y[n-2]=x[n]$$

می‌توان نتیجه گرفت که سیستم به ازای .... است.

۱) جمیع مقادیر a غیرعلی
۲) جمیع مقادیر a علی
۳) $a<-2$ علی و به ازای $a\geq -2$ غیرعلی
۴) $a<0$ علی و به ازای $a\geq 0$ غیرعلی

۲۷ـ (سراسری ۸۴) $h[n]$ دنباله‌ای با $H(z)$ دارای دو قطب در $\sqrt{3}\, e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ است. اگر $h_1[n] \triangleq h[n]\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ باشد، در حالت کلی محل قطب‌های $H_1(z)$ به فرم زیر است:

۱) $\sqrt{3}\, e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$
۲) $\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$
۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ و $\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$
۴) $\sqrt{3}\, e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ و $\sqrt{3}\, e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$

۲۸ـ (سراسری ۸۴) سیستم گسسته زمان LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]-\delta[-n+2]$ مفروض است. وارون علی این سیستم:

۱) وجود ندارد.
۲) IIR و پایدار است.
۳) FIR (Finite Impulse Response) است.
۴) IIR (Infinite Impulse Response) است.

۲۹ـ (سراسری ۸۵) پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ به ورودی $x[n]=2^n$ در $n=0$ کدام مورد خواهد بود؟

۱) نامحدود
۲) $\frac{4}{3}$
۳) 1
۴) $\frac{2}{3}$

۳۰ـ (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گسسته LTI علی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h[n]=0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]=4 \quad , \quad h[0]=1$$

محل صفر z_0 و قطب p_0 آن را مشخص کنید.

۱) $p_0=\frac{1}{2} \;,\; z_0=1$
۲) $p_0=\frac{1}{3} \;,\; z_0=1$
۳) $p_0=\frac{1}{2} \;,\; z_0=-1$
۴) $p_0=\frac{1}{3} \;,\; z_0=-1$

پاسخ خودآزمائی اول

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۳
۲-	۱
۳-	۴
۴-	۳
۵-	۱
۶-	۴
۷-	۴
۸-	۱
۹-	۲
۱۰-	۴
۱۱-	۱
۱۲-	۴
۱۳-	۲
۱۴-	۱
۱۵-	۴
۱۶-	۳
۱۷-	۳
۱۸-	۳
۱۹-	۴
۲۰-	۱
۲۱-	۴
۲۲-	۲
۲۳-	۱
۲۴-	۲
۲۵-	۱
۲۶-	۱
۲۷-	۳
۲۸-	۲

پاسخ خودآزمائی دوم

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۲
۲-	۱
۳-	۳
۴-	۱
۵-	۲
۶-	۳
۷-	۳
۸-	۱
۹-	۱
۱۰-	۴
۱۱-	۳
۱۲-	۴
۱۳-	۲
۱۴-	۲
۱۵-	۳
۱۶-	۴
۱۷-	۴
۱۸-	۴
۱۹-	۳
۲۰-	۲
۲۱-	۲
۲۲-	۲
۲۳-	۲
۲۴-	۳
۲۵-	؟
۲۶-	۳
۲۷-	۲
۲۸-	۳

پاسخ خودآزمائی سوم

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۲
۲-	۴
۳-	۱
۴-	۱
۵-	۱
۶-	۴
۷-	۱
۸-	۳
۹-	۳
۱۰-	۲
۱۱-	۴
۱۲-	۴
۱۳-	۳

پاسخ خودآزمائی چهارم

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۲
۲-	۳
۳-	۲
۴-	۳
۵-	۴
۶-	۲
۷-	۴
۸-	۲
۹-	۱
۱۰-	۲
۱۱-	۳
۱۲-	۱
۱۳-	۲
۱۴-	۱
۱۵-	۱
۱۶-	۳
۱۷-	۲
۱۸-	۲
۱۹-	۲
۲۰-	۴
۲۱-	۲
۲۲-	۳
۲۳-	۲
۲۴-	۲
۲۵-	۳

پاسخ خودآزمائی پنجم

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۱
۲-	۴
۳-	۳
۴-	۲
۵-	۴
۶-	۴
۷-	۱
۸-	۱
۹-	۴
۱۰-	۲

پاسخ خودآزمائی ششم

شماره تست	گزینه صحیح
-۲۴	۳
-۲۵	۴
-۲۶	۱
-۲۷	۱
-۲۸	۲
-۲۹	۲
-۳۰	۳
-۳۱	۳
-۳۲	۱
-۳۳	۳

پاسخ خودآزمائی هفتم

شماره تست	گزینه صحیح
-۲۹	۳
-۳۰	۱
-۳۱	۱
-۳۲	۳
-۳۳	۱
-۳۴	۲
-۳۵	۳
-۳۶	۴
-۳۷	۲
-۳۸	۱
-۳۹	۱ و ۳
-۴۰	۱
-۴۱	۱
-۴۲	۲
-۴۳	۱

پاسخ خودآزمائی هشتم

شماره تست	گزینه صحیح
-۱۴	۲
-۱۵	۳
-۱۶	۲
-۱۷	۴
-۱۸	۳
-۱۹	۴
-۲۰	۴
-۲۱	۲
-۲۲	۳
-۲۳	۲

پاسخ خودآزمائی نهم

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۴
۲-	۴
۳-	۴
۴-	۲
۵-	۳
۶-	۴
۷-	۴
۸-	۴
۹-	۴
۱۰-	۳
۱۱-	۱
۱۲-	۳
۱۳-	۱
۱۴-	۲
۱۵-	۳
۱۶-	۳
۱۷-	۱
۱۸-	۴
۱۹-	۴
۲۰-	۲
۲۱-	۴

پاسخ خودآزمائی دهم

شماره تست	گزینه صحیح
۱-	۳
۲-	۱
۳-	۳
۴-	۳
۵-	۴
۶-	۱
۷-	۱
۸-	۱
۹-	۴
۱۰-	۳
۱۱-	۱
۱۲-	۳
۱۳-	۳
۱۴-	۴
۱۵-	۳

شماره تست	گزینه صحیح
۱۶-	۳
۱۷-	۳
۱۸-	۲
۱۹-	۲
۲۰-	۴
۲۱-	۴
۲۲-	۳
۲۳-	۳
۲۴-	۱
۲۵-	۲
۲۶-	۱
۲۷-	۴
۲۸-	۴
۲۹-	۲
۳۰-	۳

یادداشت