پاسخ تشریحی آزمون فصل دوم

۱) گزینه ۳ صحیح است.

بررسی خطی بودن:

$$T\{\alpha x(t)\} = \alpha x(3)\cdot \alpha x(t-2) + \alpha x(t) \neq \alpha T\{x(t)\}$$

$T\{\alpha x(t)\}$ برابر $\alpha T\{x(t)\}$ نمی‌باشد، پس این سیستم غیرخطی است.

بررسی TI بودن:

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\} = x(3-t_0)\cdot x(t-2-t_0) + x(t-t_0) \\ \\ y(t-t_0) = x(3)\cdot x(t-t_0-2) + x(t-t_0) \end{cases} \xrightarrow{T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)} \text{سیستم TV}$$

۲) گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا برای راحتی در محاسبات، با تغییر متغیر $\alpha = -\lambda$ در رابطه سیستم داریم:

$$y(t) = \int_{-t}^{+\infty} x(-\lambda)\,d\lambda = \int_{t}^{-\infty} x(\alpha)(-d\alpha) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha$$

بررسی علی بودن: طبق رابطه فوق، خروجی در هر لحظه t بـه $x(\alpha)$ (از $\alpha = -\infty$ تـا $\alpha = t$) بسـتگی دارد. بنابراین خروجی در هر لحظه t به ورودیِ لحظات بعد از t وابسته نیست. پس سیستم علی است.

بررسی TI بودن:

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha-t_0)\,d\alpha \underset{\alpha - t_0 = \tau \ \text{تغییر متغیر}}{=} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau \\ \\ y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\alpha)\,d\alpha \end{cases} \xrightarrow{T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)} \text{سیستم TI}$$

۳) گزینه ۴ صحیح است.

بررسی پایداری:

$$x(t) = A \longrightarrow x(t-\alpha) = A$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-|\alpha|}x(t-\alpha)\,d\alpha \underset{x=A}{=} \int_{-\infty}^{t} e^{-|\alpha|}A\,d\alpha = A\int_{-\infty}^{t} e^{-|\alpha|}d\alpha < A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\alpha|}d\alpha < \infty$$

توجه کنید که اولاً $\int_{-\infty}^{t} e^{-|\alpha|}d\alpha$ حتماً از $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\alpha|}d\alpha$ کوچکتر می‌باشـد، زیـرا عبـارت داخـل انتگـرال (یعنی $e^{-|\alpha|}$) همواره مثبت است. ثانیاً مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\alpha|}d\alpha$ محدود اسـت، زیـرا یـک نمـایی از دو طـرف نزولی، در داخل آن قرار دارد. بنابراین خروجی به ازای همه t ها کرانـدار مـی‌باشـد و در نتیجـه سیسـتم پایدار است.

بررسی TI بودن:

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{t} e^{-|\alpha|}x(t-\alpha-t_0)\,d\alpha \\ \\ y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-|\alpha|}x(t-t_0-\alpha)\,d\alpha \end{cases} \xrightarrow{T\{x(t-t_0)\}\neq y(t-t_0)} \text{سیستم TV}$$

۴) گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به رابطه سیستم، خروجی در هر لحظه t به ورودیِ لحظات گذشته و آینده، بستگی ندارد، زیرا فرم ورودی در رابطه سیستم، فقط به صورت $x(t)$ است و ورودیِ لحظات گذشته و آینده در رابطه سیستم دیده نمی‌شود. بنابراین سیستم بدون‌حافظه است.

برای بررسی پایداری فرض می‌کنیم ورودی محدود و برابر A باشد، داریم:

$$x(t)=A \longrightarrow y(t)=\begin{cases} e^{-t} & , \ t\leq A \\ A & , \ t>A \end{cases}$$

خروجی در لحظه $t=-\infty$، از ضابطه اول برابر ∞ به‌دست می‌آید. پس سیستم ناپایدار است.

۵) گزینه ۱ صحیح است.

بررسی سیستم A:

ابتدا مرحله اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ضابطه اول، $t\geq 1$ می‌باشد. در نتیجه آرگومان ورودی (t)، لحظات ۱ به بعد ($x(1\uparrow)$) را پوشش می‌دهد و به خروجی منتقل می‌کند. در ضابطه سوم، $t\leq 0$ می‌باشد، در نتیجه آرگومان ورودی ($t+1$)، لحظات قبل از ۱ ($x(1\downarrow)$) را پوشش و به خروجی انتقال می‌دهد. ضابطه دوم نیز ورودیِ بعضی از زمان‌ها را به خروجی منتقل می‌کند و چون ضابطه‌های اول و سوم، ورودیِ همه زمان‌ها را به خروجی انتقال می‌دهند، دیگر نیازی به بررسی ضابطه دوم نیست. بنابراین ورودیِ همه زمان‌ها به خروجی منتقل می‌شود. همچنین همه مقادیر ورودی (مقادیر x) نیز به خروجی منتقل می‌شود و هیچ محدودیتی روی آن وجود ندارد. پس شرط لازم برای وارون‌پذیری برقرار است و بنابراین باید مرحله دوم را مورد بررسی قرار دهیم؛ یعنی باید ورودی را بر حسب خروجی بنویسیم. داریم:

$$y(t)=\begin{cases} x(\overset{\geq 1}{t}) & , \ t\geq 1 \longrightarrow x(1\uparrow) \\ x^2(t) & , \ 0\leq t<1 \\ x(\underbrace{t+1}_{<1}) & , \ t<0 \longrightarrow x(1\downarrow) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t)=x(t) \ , \ t\geq 1 \longrightarrow x(t)=y(t) \ , \ t\geq 1 \\ y(t)=x^2(t) \ , \ 0\leq t<1 \longrightarrow x(t)=\pm\sqrt{y(t)} \ , \ 0\leq t<1 \\ y(t)=x(t+1) \ , \ t<0 \xrightarrow{t\longrightarrow t-1} x(t)=y(t-1) \ , \ \underbrace{t-1<0}_{t<1} \end{cases}$$

در هر ضابطه ورودی را بر حسب خروجی نوشتیم، ولی ظاهراً در علامت ضابطه دوم ابهام داریم، زیرا دو جواب مثبت و منفی برای ورودی به‌دست می‌آید. اما می‌توان این ابهام را برطرف کرد. کافی است که ضابطه دوم را حذف نموده و ورودی در لحظات $0 \le t < 1$ را از ضابطه سوم که ابهام نداریم به‌دست آوریم. زیرا زمان $0 \le t < 1$ در شرط ضابطه سوم نیز صدق می‌کند. بنابراین رابطه فوق به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{cases} x(t) = y(t) & , \quad t \ge 1 \\ x(t) = y(t-1) & , \quad t < 1 \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که ابهامی در ضابطه‌ها وجود ندارد. حال به شرط‌ها نگاه می‌کنیم. شرط‌ها روی زمان است (حالت اول نکته ۲۴)؛ پس شرط وارون‌پذیری این است که همه زمان‌ها در شرط‌ها پوشش داده شوندکه همین‌طور است. در نتیجه این سیستم وارون‌پذیر است.

بررسی سیستم B:

$$y(t) = t\,x(2) + x(t-1)$$

ابتدا مرحله اول را بررسی می‌کنیم؛ با تغییرات t، ورودیِ همه زمان‌ها به خروجی منتقل می‌شود. همچنین همه مقادیر ورودی (مقادیر x) نیز به خروجی منتقل می‌شود و هیچ محدودیتی روی آن وجود ندارد. پس شرط لازم برای وارون‌پذیری برقرار است و بنابراین باید مرحله دوم را مورد بررسی قرار دهیم؛ باید سعی کنیم ورودی را بر حسب خروجی بنویسیم؛ برای این کار ابتدا باید $x(2)$ را بر حسب خروجی به دست آوریم. اگر در دو طرف رابطه سیستم، $t = 3$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$y(t) = t\,x(2) + x(t-1) \xrightarrow{t=3} y(3) = 3\,x(2) + x(2) \quad \Rightarrow \quad x(2) = \frac{1}{4}y(3)$$

با جایگذاری $x(2)$ از رابطه فوق، در رابطه سیستم داریم:

$$y(t) = t\,x(2) + x(t-1) = t\frac{1}{4}y(3) + x(t-1) \xrightarrow{t \to t+1} x(t) = y(t+1) - (t+1)\frac{1}{4}y(3)$$

ملاحظه می‌کنید که ورودی به صورت تابعی بدون ابهام از خروجی به دست آمد و ورودی را می‌توان با استفاده از رابطه فوق، از روی خروجی محاسبه و بازیابی نمود. در نتیجه سیستم وارون‌پذیر است.