پاسخ تشریحی آزمون فصل نهم

۱) گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به اینکه سیستم، LTI و حقیقی است، پس پاسخ ضربه آن $h(t)$ حقیقی است. بنابراین داریم:

$$h_e(t) \xleftrightarrow{F} H_R(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad h_e(t)=F^{-1}\{H_R(\omega)\}=F^{-1}\left\{\frac{۲}{\omega^۲+۱}\right\}=e^{-|t|}$$

از طرف دیگر طبق صورت تست، سیستم علی نیز می‌باشد. پس طبق نکته ۱۰ فصل اول، $h(t)$ برای $t>۰$ برابر $۲h_e(t)$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$h(۳)=۲h_e(۳)=۲e^{-۳}$$

۲) گزینه ۴ صحیح است.

در اینجا از روش اول (نقطه‌گذاری) استفاده می‌کنیم، یعنی $h[n]$ و $y[n]$ را در رابطه $y[n]=x[n]*h[n]$ جایگذاری می‌نماییم و سپس به‌ازای nهای مختلف، $x[n]$ را نقطه به نقطه محاسبه می‌کنیم. برای این کار ابتدا باید $h[n]$ را به صورت مجموعی از ضربه‌های انتقال‌یافته بنویسیم.

با توجه به شکل $h[n]$ داریم:

$$h[n]=\delta[n]+\delta[n-۱]+\delta[n-۲]+\delta[n-۳]+\delta[n-۴]$$

حال با جایگذاری $h[n]$ فوق، در رابطه سیستم خواهیم داشت:

$$y[n]=x[n]*h[n]=x[n]*\left(\delta[n]+\delta[n-۱]+\delta[n-۲]+\delta[n-۳]+\delta[n-۴]\right)$$

بنابراین رابطه $y[n]$ و $x[n]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y[n]=x[n]+x[n-۱]+x[n-۲]+x[n-۳]+x[n-۴] \qquad (۱)$$

با جایگذاری مقادیر $y[n]$ به‌ازای nهای مختلف در رابطه فوق، $x[n]$ به‌دست خواهد آمد. اما قبل از آن باید حد سمت چپ یا راستِ $x[n]$ را مشخص نماییم. طبق صورت تست، $x[n]$ سیگنالی سمت راستی است، پس با توجه به نکته ۶۴ می‌توانیم حد چپ آن را حدس بزنیم. حد چپ $h[n]$ و $y[n]$ برابر است، بنابراین حد چپ $x[n]$ نیز برابر ۰ می‌باشد. اکنون با توجه به اینکه $x[n]$ برای $n<۰$ برابر صفر می‌باشد، $x[-۱]=۰$ است. حال مقادیر مختلف n را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم و مقادیر مجهول $x[۰]$، $x[۱]$ و $x[۲]$ و ... را با توجه به مقادیر $y[n]$ به‌دست می‌آوریم. برای این کار از $n=۰$ شروع می‌کنیم:

$$n = n_۰ :\ \ y[n_۰] = x[n_۰] + x[n_۰ - ۱] + x[n_۰ - ۲] + x[n_۰ - ۳] + x[n_۰ - ۴]$$

$$n = ۰ :\ \ \underbrace{y[۰]}_{۱} = \underbrace{x[۰]}_{?} + \underbrace{x[-۱]}_{۰} + \underbrace{x[-۲]}_{۰} + \underbrace{x[-۳]}_{۰} + \underbrace{x[-۴]}_{۰} \longrightarrow x[۰] = ۱$$

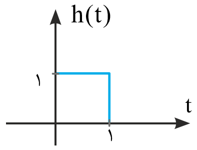
$$n = ۱ :\ \ \underbrace{y[۱]}_{۲} = \underbrace{x[۱]}_{?} + \underbrace{x[۰]}_{۱} + \underbrace{x[-۱]}_{۰} + \underbrace{x[-۲]}_{۰} + \underbrace{x[-۳]}_{۰} \longrightarrow x[۱] = ۱$$

$$n = ۲ :\ \ \underbrace{y[۲]}_{۳} = \underbrace{x[۲]}_{?} + \underbrace{x[۱]}_{۱} + \underbrace{x[۰]}_{۱} + \underbrace{x[-۱]}_{۰} + \underbrace{x[-۲]}_{۰} \longrightarrow x[۲] = ۱$$

$$n = ۳ :\ \ \underbrace{y[۳]}_{۳} = \underbrace{x[۳]}_{?} + \underbrace{x[۲]}_{۱} + \underbrace{x[۱]}_{۱} + \underbrace{x[۰]}_{۱} + \underbrace{x[-۱]}_{۰} \longrightarrow x[۳] = ۰$$

۳) گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به ورودی $x_۱(t)$ و خروجی $y_۱(t)$ و همچنین نکته ۲۷ فصل دوم (کانولوشن دو پالس)، می‌توانیم پاسخ ضربه سیستم را به شکل زیر حدس بزنیم:



حال برای محاسبه $y_۲(t)$، کافی است که کانولوشن $x_۲(t)$ را با $h(t)$ در لحظه $t = ۱/۵$ محاسبه کنیم که برابر ۰/۵ خواهد شد.

۴) گزینه ۳ صحیح است.

با استفاده از نکته ۶۸ می‌توانیم $x[n]$ را به‌صورت نمایی بنویسیم:

$$x[n] = \begin{cases} ۰ \ , & \text{زوج } n \\ ۲ \ , & \text{فرد } n \end{cases} = \frac{۰+۲}{۲} + \frac{۰-۲}{۲}(-۱)^n = ۱ - e^{j\pi n} = e^{j(۰)n} - e^{j\pi n}$$

طبق نکته ۶۷ پاسخ به $e^{j(۰)n}$ برابر $H(۰)e^{j(۰)n}$ و پاسخ به $e^{j\pi n}$ برابر $H(\pi)e^{j\pi n}$ می‌باشد که $H(۰)$ و $H(\pi)$ با توجه به $H(\omega)$ داده شده، برابر صفر می‌باشند. بنابراین پاسخ به کل ورودی $x[n]$ نیز برابر صفر خواهد بود.

۵) گزینه ۱ صحیح است.

چون $|H(\omega)|$ تابعی زوج و $\measuredangle H(\omega)$ تابعی فرد می‌باشد، پس طبق نکته ۴۴، $h(t)$ حقیقی است، بنابراین طبق نکته ۶۹ پاسخ به ورودی $\sin(\omega_۰ t + \theta)$ برابر $|H(\omega_۰)|\sin\left(\omega_۰ t + \theta + \measuredangle H(\omega_۰)\right)$ می‌باشد.

بنابراین در اینجا داریم:

$$x(t) = \sin(۲t) \xrightarrow[\omega_۰ = ۲]{H(\omega)} y(t) = |H(۲)|\sin\left(۲t + \measuredangle H(۲)\right)$$

با توجه به شکل‌های داده شده، $|H(۲)| = \frac{۱+۰}{۲} = \frac{۱}{۲}$ (میانگین حد چپ و راست) و $\measuredangle H(۲) = -۴(۲) = -۸$ می‌باشد. پس پاسخ به ورودی $x(t) = \sin(۲t)$ برابر $y(t) = \frac{۱}{۲}\sin(۲t-۸)$ خواهد بود.

۶) گزینه ۴ صحیح است.

$$H(s) = \frac{s}{s+۳} \quad , \quad Re[s] > -۳$$

برای محاسبه پاسخ به ورودی $x(t) = e^{-۴t} + u(t)$ ابتدا پاسخ به $x_۱(t) = e^{-۴t}$ و سپس پاسخ به $x_۲(t) = u(t)$ را حساب کرده و در نهایت با هم جمع می‌نماییم. اما پاسخ به ورودی $x_۱(t) = e^{-۴t}$ نامحدود می‌شود، زیرا $s = -۴$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار ندارد.

۷) گزینه ۲ صحیح است.

بررسی گزاره (الف): با توجه به پایداری سیستم داریم:

$$H(z) = \frac{۱+۲z^{-۱}}{۱-۳z^{-۱}} = \frac{z+۲}{z-۳} \quad , \quad |z| < ۳$$

از آنجا که $H(z)$ صفری در ناحیه همگرایی خود دارد، طبق نکته ۷۳ وارون‌ناپذیر است.

بررسی گزاره (ب): ابتدا ورودی و خروجی داده شده را با استفاده از فرمول اویلر به صورت نمایی می‌نویسیم و سپس با توجه به نوع ورودی ـ خروجی، برای بررسی LTI بودن آن از نکته ۷۱ استفاده می‌کنیم:

$$x(t) = ۳\sin ۲\pi t = \frac{۳}{۲j}e^{j۲\pi t} - \frac{۳}{۲j}e^{-j۲\pi t}$$

$$y(t) = e^{j۲\pi t}$$

با توجه به ورودی و خروجی فوق، پاسخ به ورودی‌های نمایی $e^{j۲\pi t}$ و $e^{-j۲\pi t}$ به ترتیب به‌صورت $Ae^{j۲\pi t}$ و $Be^{-j۲\pi t}$ می‌تواند باشد که $A = \frac{۲j}{۳}$ و $B = ۰$ شده است. بنابراین ویژگی سیستم‌های LTI (نکته ۷۱) در مورد این ورودی ـ خروجی نقض نشده است و این سیستم <u>می‌تواند</u> LTI باشد.

۸) گزینه ۲ صحیح است.

$$H(z) = \frac{۱}{z^{-۱} - z^{-۲} + ۲z^{-۳}} = \frac{z^۳}{z^۲ - z + ۲}$$

چون درجه صورت بیشتر از مخرج است، پس سیستم قطعاً و همواره غیرعلی است؛ زیرا در بینهایت قطب داریم و در نتیجه $z = \infty$ در ROC نخواهد بود.

۹) گزینه ۲ صحیح است.

تابع تبدیل سیستم با استفاده از نکته ۸۲ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H(z) = \frac{z + \frac{k}{۳}}{z - \frac{k}{۴}} = \frac{۱ + \frac{k}{۳}z^{-۱}}{۱ - \frac{k}{۴}z^{-۱}} \quad , \quad |z| > \left|\frac{k}{۴}\right|$$

ناحیه همگرایی $H(z)$ را با توجه به علی بودن آن تعیین کردیم. برای پایداری سیستم فوق، باید دایره یکه در ناحیه همگرایی آن قرار گیرد، بنابراین باید $\left|\frac{k}{۴}\right| < ۱$ یا به طور معادل $|k| < ۴$ باشد. در واقع باید قطب $z = \frac{k}{۴}$ در داخل دایره یکه واقع باشد، تا سیستم بتواند توأماً علی و پایدار باشد؛ که در این صورت حتماً صفر $z = -\frac{k}{۳}$ در ناحیه همگرایی قرار می‌گیرد، زیرا $|z| = \left|\frac{k}{۳}\right|$ از $|z| = \left|\frac{k}{۴}\right|$ (که نقطه شروع ROC است)، بزرگتر است. در نتیجه این سیستم، پایدار و وارون‌ناپذیر است.

۱۰) گزینه ۳ صحیح است.

برای تعیین نوع فیلتر، ابتدا پاسخ فرکانسی هر سیستم را محاسبه می‌کنیم. در مورد سیستم ۱ داریم:

$$y_۱[n] = ۰/۸\, y_۱[n-۱] + ۰/۱\, x_۱[n] \quad \xrightarrow{F} \quad Y_۱(\omega) = ۰/۸\, Y_۱(\omega) e^{-j\omega} + ۰/۱\, X_۱(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad H_۱(\omega) = \frac{Y_۱(\omega)}{X_۱(\omega)} = \frac{۰/۱}{۱ - ۰/۸\, e^{-j\omega}}$$

با جایگذاری $\omega = ۰\,,\, \pi$ در رابطه فوق، $H_۱(۰) = ۰/۵$ و $H_۱(\pi) = \frac{۰/۱}{۱/۸} = \frac{۱}{۱۸}$ به‌دست می‌آید. از آنجا که $|H_۱(۰)| >> |H_۱(\pi)|$ می‌باشد، پس سیستم ۱، یک فیلتر پایین‌گذر است.

در مورد سیستم ۲ داریم:

$$y_۲[n] = -۰/۸\, y_۲[n-۱] + ۰/۱\, x_۲[n] \quad \xrightarrow{F} \quad Y_۲(\omega) = -۰/۸\, Y_۲(\omega) e^{-j\omega} + ۰/۱\, X_۲(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad H_۲(\omega) = \frac{Y_۲(\omega)}{X_۲(\omega)} = \frac{۰/۱}{۱ + ۰/۸\, e^{-j\omega}}$$

با جایگذاری $\omega = ۰\,,\, \pi$ در رابطه فوق، $H_۲(۰) = \frac{۱}{۱۸}$ و $H_۲(\pi) = ۰/۵$ به‌دست می‌آید. از آنجا که $|H_۲(\pi)| >> |H_۲(۰)|$ می‌باشد، پس سیستم ۲، یک فیلتر بالاگذر است.