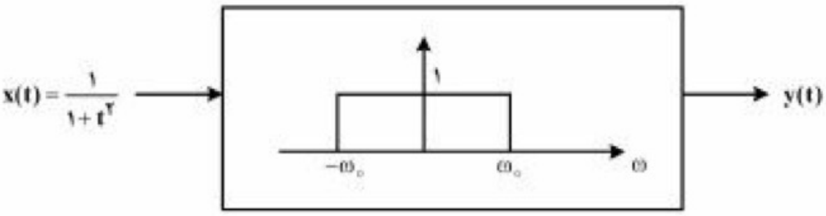
۳۶- سیگنال $y(t)$ خروجی فیلتر پایین‌گذر ایدئال با فرکانس قطع ω_0 به ورودی $x(t)=\frac{1}{1+t^2}$ است. انرژی $y(t)$، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt$ ، برابر کدام است؟



۱) $\pi^2(1-e^{-2\omega_0})$

۲) $\pi^2(1-\frac{1}{2}e^{-2\omega_0})$

۳) $\pi(1-\frac{1}{2}e^{-2\omega_0})$

۴) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\omega_0})$

ابتدا باید خروجی $y(t)$ را بدست آوریم. برای این منظور باید $X(j\omega)$ را بدست آورده و از فیلتر پایین گذر داده شده عبور دهیم تا $Y(j\omega)$ بدست آید.

برای محاسبه $X(j\omega)$ باید از خاصیت دوگانی تبدیل فوریه استفاده نماییم:

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

دوگانی

$$\frac{2a}{a^2+t^2} \xrightarrow{F} 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|} \Longrightarrow X(j\omega) = F\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \frac{1}{2}\left(2\pi e^{-a|\omega|}\right)\Big|_{a=1} = \pi e^{-|\omega|}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\underbrace{H(j\omega)}_{\text{پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر}} = \begin{cases} X(j\omega) & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases} = \begin{cases} \pi e^{-|\omega|} & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$Y(j\omega)$ بدست آمده حقیقی و زوج است و بنابراین با توجه به خواص تبدیل فوریه پیوسته می‌توان نتیجه گرفت $y(t)$ هم سیگنالی حقیقی و زوج است و در نتیجه $y^2(t) = |y(t)|^2$ خواهد بود و بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\,dt \underset{\text{طبق پارسوال}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)|^2\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)|^2\,d\omega = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left|\pi e^{-|\omega|}\right|^2 d\omega = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \pi^2 e^{-2|\omega|}\,d\omega = 2\int_0^{\omega_0} \pi^2 e^{-2\omega}\,d\omega = 2\pi^2\left(\frac{-1}{2}e^{-2\omega}\Big|_{\omega=0}^{\omega=\omega_0}\right) = \pi^2(1-e^{-2\omega_0})$$

جای گذاری $Y(j\omega)$

چون آرگومان انتگرال تابعی زوج بوده و بازه انتگرال گیری متقارن است، می‌توان در نیمی از بازه مورد نظر انتگرال گرفت و حاصل را در ۲ ضرب کرد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)|^2\,d\omega = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2\omega_0})$$

۳۷- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI با توصیف $|a|<1$ ، $y[n]=ay[n-1]+x[n]$، برابر کدام است؟

۱) a^n

۲) $|a|^n u[n]$

۳) $a^n u[n]$

۴) $|a|^n$

شاید به جرأت بتوان گفت که این سؤال ساده‌ترین سؤال مطرح شده در کنکور دکتری و حتی ارشد در ۱۵ سال اخیر است. نیاز به هیچ توضیح اضافه‌ای نیست:

$y[n] = ay[n-1] + x[n]$

در حوزه Z:

$$\longrightarrow Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z) \longrightarrow Y(z)(1-az^{-1}) = X(z) \longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

برای ROC دو حالت می‌توان در نظر گرفت: ① $|z|<a$ ② $|z|>a$

$$\longrightarrow h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = \begin{cases} -a^n u[-n-1] & : \text{با فرض ROC به فرم } |z|<a \\ a^n u[n] & : \text{با فرض ROC به فرم } |z|>a \end{cases}$$

هر دو رابطه بدست آمده را می‌توان به عنوان $h[n]$ در نظر گرفت، اما فقط $a^n u[n]$ در گزینه‌ها داده شده است، از طرفی احتمالاً منظور طراح محترم سیستم پایدار و علّی بوده است (با فرض $|a|<1$) و در نتیجه همان $h[n]=a^n u[n]$ پاسخ ضربه علّی و پایدار خواهد بود.

۳۸- کدام اظهار نظر زیر یک استنتاج صحیح می‌باشد؟ ($u(t)$ تابع پله واحد)

۱) پاسخ یک سیستم به ورودی $x(t) = tu(t)$ برابر $x^{2}(t)$ می‌باشد. این سیستم قطعاً غیرخطی می‌باشد.

۲) پاسخ یک سیستم به ورودی $e^{j\pi t}$ برابر $e^{j2\pi t}$ است. این سیستم قطعاً LTI نمی‌باشد.

۳) پاسخ یک سیستم به ورودی $u(t)$ برابر $u(t+1)$ است. این سیستم قطعاً علّی نمی‌باشد.

۴) پاسخ یک سیستم به ورودی $u(t)$ برابر $u(t-1)$ است. این سیستم قطعاً علّی می‌باشد.

گزینه‌ها را به ترتیب تحلیل می‌نماییم:

۱) گزاره داده شده لزوماً صحیح نیست. به عنوان مثال نقض سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = 2\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

سیستم بالا یک سیستم خطی است که به ازای ورودی $x(t) = t\,u(t)$ ، خروجی $y(t) = x^{2}(t) = t^{2}u(t)$ را تولید می‌کند.

۲) گزاره داده شده کاملاً صحیح است؛ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $e^{j\pi t}$ در صورت کران دار بودن برابر با $k\,e^{j\pi t}$ خواهد بود و هرگز برابر با $e^{j2\pi t}$ نمی‌باشد.

۳) این گزاره هم لزوماً صحیح نیست. به عنوان مثال نقض سیستم زیر را در نظر بگیرید که علّی است و ورودی $u(t)$ را به خروجی $u(t+1)$ تبدیل می‌کند:

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t < -1 \\ 1 & t \geq -1 \end{cases}$$

۴) گزاره چهارم نیز لزوماً صحیح نیست. به عنوان مثال نقض سیستم زیر را در نظر بگیرید که غیرعلّی بوده و ورودی $u(t)$ را به خروجی $u(t-1)$ تبدیل می‌کند:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ x(t+1) & t \geq 1 \end{cases}$$

۳۹- در یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h[n]$، تابع همبستگی ورودی $x[n]$ با خروجی $y[n]$ به صورت:

$$\phi_{xy}[m]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n].y^*[n-m]$$

تعریف می‌شود که * علامت مزدوج است. اگر حروف بزرگ نشانگر تبدیل Z باشند، در حالت کلی $\Phi_{xy}(z)$ برابر کدام است؟

۱) $H^*(\frac{1}{z^*})\Phi_{xx}(z)$

۲) $H(z)\Phi_{xx}(z)$

۳) $H(\frac{1}{z^*})\Phi_{xx}(z)$

۴) $H(\frac{1}{z})\Phi_{xx}(z)$

می‌دانیم $y[n]=x[n]*h[n]$ است، بنابراین می‌توان گفت:

$$\varphi_{xy}[m]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\,y^*[n-m]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\big(x[n-m]*h[n-m]\big)^*=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]\,x[n-m-k]\Big)^*$$

جای‌گذاری $y^*[n-m]$

کانولوشن را بسط می‌دهیم

اعمال مزدوج‌گیری

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h^*[k]\,x^*[n-m-k]\Big)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]\,h^*[k]\,x^*[n-m-k]\Big)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\,h^*[k]\,x^*[n-m-k]\Big)$$

جمله‌ی $x[n]$ نسبت به k ثابت است و می‌توان آن را داخل سیگما نسبت به k برد.

ترتیب سیگماها را عوض می‌کنیم

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h^*[k]\underbrace{\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\,x^*[n-m-k]\Big)}_{=\varphi_{xx}[m+k]}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h^*[k]\,\varphi_{xx}[m+k]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}h^*[-l]\,\varphi_{xx}[m-l]=h^*[-m]*\varphi_{xx}[m]$$

اعمال تغییر متغیر $-k=l$

طبق تعریف عملگر کانولوشن

عملگر تبدیل Z

$$\Phi_{xy}(z)=\mathcal{Z}\{\varphi_{xy}[m]\}=\mathcal{Z}\{h^*[-m]*\varphi_{xx}[m]\}=\mathcal{Z}\{h^*[-m]\}\cdot\mathcal{Z}\{\varphi_{xx}[m]\}=$$

جای‌گذاری $\varphi_{xy}[m]$

طبق خاصیت کانولوشن زمانی برای تبدیل Z

$$=H^*\Big(\frac{1}{z^*}\Big)\,\Phi_{xx}(z)$$

طبق خواص مزدوج‌گیری زمانی و انعکاس زمانی برای تبدیل Z

۴۰- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI زمان گسسته برابر $(\frac{1}{2})^n u[n]$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی زیر:

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^n & n\neq 2\\ \frac{4}{3} & n=2\end{cases}$$

برابر کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}((-1)^n+(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-2])$

۲) $\frac{1}{3}((-1)^n-(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2])$

۳) $\frac{1}{3}((-1)^{n-1}+(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2])$

۴) $\frac{2}{3}((-1)^{n-1}-(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2])$

ورودی $x[n]$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^n & n\neq 2\\ \frac{4}{3} & n=2\end{cases}=\begin{cases}(-1)^n & n\neq 2\\ (-1)^n+\frac{1}{3} & n=2\end{cases}=(-1)^n+\begin{cases}0 & n\neq 2\\ \frac{1}{3} & n=2\end{cases}=(-1)^n+\frac{1}{3}\delta[n-2]$$

بنابراین اگر تابع تبدیل سیستم را با $H(z)$ نمایش دهیم، پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ برابر است با:

$$x[n]=(-1)^n+\frac{1}{3}\delta[n-2]\longrightarrow\boxed{h[n]}\longrightarrow y[n]=H(-1)\,(-1)^n+\frac{1}{3}h[n-2]$$

$(-1)^n$ به فرم تابع ویژه است و پاسخ سیستم به آن ضریبی از $(-1)^n$ خواهد بود.

با توجه به پاسخ ضربه بودن $h[n]$، LTI بودن سیستم

از طرفی می‌دانیم:

$$h[n]=(\tfrac{1}{2})^n u[n]\xrightarrow{Z}H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|>\tfrac{1}{2}$$

$$H(-1)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$y[n]=\cancel{H(-1)}^{\,2/3}\cdot(-1)^n+\frac{1}{3}h[n-2]=\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}\underbrace{(\tfrac{1}{2})^{n-2}}_{=2\times(\frac{1}{2})^{n-1}}u[n-2]=\frac{2}{3}\left[(-1)^n+(\tfrac{1}{2})^{n-1}u[n-2]\right]$$

۴۱- مقدار I در رابطهٔ $I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^{2}(\frac{7\omega}{2})}{\sin^{2}(\frac{\omega}{2})}d\omega$، برابر کدام است؟

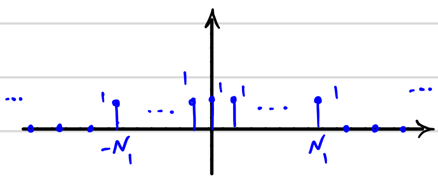
۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۵π

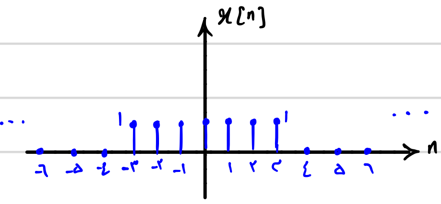
۴) ۱۴π

با توجه به فرم انتگرال داده شده، می‌توان حدس زد که باید از رابطهٔ پارسوال برای تبدیل فوریه گسسته استفاده نماییم. می‌دانیم تبدیل فوریه سیگنال پالس متقارن گسسته برابر است با:



$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(2N_1+1))}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

بنابراین با فرض $N_1=3$ سیگنال $x[n]$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:



$$\Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\frac{7\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

طبق رابطهٔ پارسوال می‌توان گفت:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}|X(e^{j\omega})|^{2}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^{2}(\frac{7\omega}{2})}{\sin^{2}(\frac{\omega}{2})}d\omega}_{\int_{<2\pi>}|X(e^{j\omega})|^{2}d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^{2} = 7$$

طبق پارسوال

با توجه به تعریف $x[n]$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^{2}(\frac{7\omega}{2})}{\sin^{2}(\frac{\omega}{2})}d\omega = 14\pi$$

۴۲- $h(t)$ ، $H(j\omega) \triangleq H_r(j\omega) + jH_i(j\omega)$ ، به ترتیب، پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی یک سیستم حقیقی و علّی می‌باشند (اندیس‌های r , i نشانگر بخش‌های حقیقی و موهومی هستند.) $h(t), t \geq 0$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty H_i(j\omega)\cos(\omega t)d\omega$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_r(j\omega)\sin(\omega t)d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_i(j\omega)\sin(\omega t)d\omega$

با توجه به حقیقی بودن سیستم می‌دانیم $h(t)$ حقیقی است و در نتیجه تبدیل فوریه آن تقارن هرمیتی دارد، یعنی $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$ است؛ یا به عبارت دیگر می‌توان گفت $H_r(j\omega) = Re\{H(j\omega)\}$ تقارن زوج دارد و $H_i(j\omega) = Im\{H(j\omega)\}$ تقارن فرد خواهد داشت. با توجه به این اطلاعات می‌توان رابطه عکس فوریه را برای $H(j\omega)$ به فرم زیر نوشت:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(j\omega)}_{H_r(j\omega)+jH_i(j\omega)} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(H_r(j\omega)+jH_i(j\omega)\right)\left(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{H_r(j\omega)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}} d\omega + j\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{H_r(j\omega)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}} d\omega + j\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{H_i(j\omega)}_{\text{فرد}}\underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{زوج}}}_{\text{فرد}} d\omega + \overbrace{(j)^2}^{(-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{H_i(j\omega)}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{فرد}}}_{\text{زوج}} d\omega\right]$$

سطح زیر نمودار هر سیگنال فرد صفر است

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)d\omega - 2\int_0^\infty H_i(j\omega)\sin(\omega t)d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)d\omega - \int_0^\infty H_i(j\omega)\sin(\omega t)d\omega\right]$$

اگر در رابطه بالا تغییر متغیر t به $(-t)$ را اعمال کنیم به رابطه $h(-t)$ می‌رسیم:

$$h(-t) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty H_r(j\omega)\underbrace{\cos(-\omega t)}_{\cos(\omega t)}d\omega - \int_0^\infty H_i(j\omega)\underbrace{\sin(-\omega t)}_{-\sin(\omega t)}d\omega\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)d\omega + \int_0^\infty H_i(j\omega)\sin(\omega t)d\omega\right]$$

اما از طرفی با توجه به علّی بودن $h(t)$ می‌دانیم که در زمان‌های $t>0$ ، $\left[h(t)+h(-t)\right] = \underbrace{2h_e(t)}_{\text{بخش زوج } h(t)} = h(t)$ است (اثبات به عهده خودتان)

بنابراین با جمع روابط بدست آمده برای $h(t)$ و $h(-t)$ می‌توان گفت:

$$t>0:\quad h(t) = h(t) + h(-t) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)\,d\omega - \cancel{\int_0^\infty H_i(j\omega)\sin(\omega t)\,d\omega}\right]}_{h(t)} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)\,d\omega + \cancel{\int_0^\infty H_i(j\omega)\sin(\omega t)\,d\omega}\right]}_{h(-t)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_r(j\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$

توجه داشته باشید که در حل بالا از قضیه زیر استفاده شده است (اثبات قضیه به عهده خودتان)

قضیه: اگر سیگنال $x(t)$ علّی باشد، یعنی برای $t<0$ همواره $x(t)=0$ باشد، و نیز اگر قسمت زوج سیگنال $x(t)$ را با $x_e(t)$ نمایش دهیم، آنگاه:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ x_e(0) & t=0 \\ 2x_e(t) & t>0 \end{cases}$$

۴۳- رابطهٔ ورودی ـ خروجی یک سیستم زمان ـ گسسته به صورت زیر است:

$$y[n]=\begin{cases} 2x[n], & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ -x[n], & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ نباشد} \end{cases}$$

اگر $X(e^{j\omega})$ و $Y(e^{j\omega})$، به ترتیب، تبدیل فوریهٔ گسستهٔ $x[n], y[n]$ باشند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر بیان کنندهٔ رابطهٔ این دو است؟

۱) $Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{3})})+\frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{3})})$

۲) $Y(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{3})})+X(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{3})})$

۳) $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\frac{\omega+2\pi}{3}})+X(e^{j\frac{\omega}{3}})+X(e^{j\frac{\omega-2\pi}{3}})$

۴) $Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega+2\pi}{3}})+X(e^{j\frac{\omega}{3}})+\frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega-2\pi}{3}})$

سیگنال $p[n]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p[n]=\begin{cases} 2 & n=3k \\ -1 & n\neq 3k \end{cases}$$

در این صورت به وضوح می‌توان گفت $y[n]=p[n]x[n]$ است. اما $p[n]$ تعریف شده سیگنالی متناوب با دوره تناوب ۳ است و می‌توان سری فوریه آن را به صورت زیر نوشت:

$$p[n]=\sum_{k=\langle 3\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{3}n} = a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+a_0+a_1 e^{j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$a_k=\frac{1}{3}\sum_{n=\langle 3\rangle} p[n]e^{-jk\frac{2\pi}{3}n}$$

$$a_{-1}=\frac{1}{3}\sum_{n=-1}^{1} p[n]e^{j\frac{2\pi}{3}n}=\frac{1}{3}\left[-e^{-j\frac{2\pi}{3}}+2-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right]=\frac{1}{3}\left[2-2\cancel{\cos(\tfrac{2\pi}{3})}^{-\frac{1}{2}}\right]=1$$

$$a_0=\frac{1}{3}\sum_{n=-1}^{1} p[n]=\frac{1}{3}[-1+2-1]=0$$

$$a_1=\frac{1}{3}\sum_{n=-1}^{1} p[n]e^{-j\frac{2\pi}{3}n}=\frac{1}{3}\left[-e^{j\frac{2\pi}{3}}+2-e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right]=1$$

$$\Downarrow$$

$$p[n]=e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+0+e^{j\frac{2\pi}{3}n}$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$y[n]=p[n]x[n]=\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right)x[n]=e^{-j\frac{2\pi}{3}n}x[n]+e^{j\frac{2\pi}{3}n}x[n]$$

جای گذاری $p[n]$

$$\rightarrow Y(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{3})})+X(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{3})})$$

۴۴- سیگنال $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi t) + 4\cos(4\pi t)$ از فیلتری با پاسخ ضربهٔ

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\pi(\frac{t}{4T}))}{\pi t}\delta(t-nT)$$

عبور کرده و سیگنال $y(t)$ را تولید می‌کند.

مقادیر A و T برای آنکه $y(t) = 1 + 4\cos(4\pi t)$ باشد، برابر کدام است؟

۱) $A = \frac{1}{2}$ ، $T = \frac{1}{2}$

۲) $A = \frac{\pi}{2}$ ، $T = \frac{\pi}{2}$

۳) $A = 1$ ، $T = 1$

۴) امکان‌پذیر نیست.

از آنجایی که $h(t)$ حقیقی است و ورودی هم به فرم مجموع چند سیگنال سینوسی است، کافی است $H(j\omega)$ را بدست آوریم، زیرا می‌دانیم پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه حقیقی به ورودی به فرم $\cos(\omega_0 t)$ برابر با $|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$ خواهد بود (اثبات به عهده خودتان) اما $h(t)$ داده شده را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{A\frac{\sin(\pi(\frac{t}{4T}))}{\pi t}}_{\text{مستقل از n است و از سیگما بیرون می‌آید}} \delta(t-nT) = \underbrace{A\frac{\sin(\pi(\frac{t}{4T}))}{\pi t}}_{\triangleq p(t)} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)}_{\triangleq q(t)} = p(t)\cdot q(t)$$

بنابراین با توجه به خاصیت ضرب در حوزه زمان برای تبدیل فوریه پیوسته می‌توان گفت $H(j\omega) = \frac{1}{2\pi}P(j\omega)*Q(j\omega)$ است، که $P(j\omega)$، $Q(j\omega)$ به ترتیب برابر با تبدیل فوریه‌های $p(t)$، $q(t)$ هستند. اما با توجه به تعریف $p(t)$، $q(t)$ می‌توان گفت:

$$P(j\omega) = A\,\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi(\frac{t}{4T}))}{\pi t}\right\} = A\,\Pi\left(\frac{2T}{\pi}\omega\right)$$

می‌دانیم $\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(at)}{t}\right\} = \pi\Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right)$ است.

$$H(j\omega) = \frac{1}{2\pi}P(j\omega) * Q(j\omega) =$$

$$Q(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$q(t)$ به فرم قطار ضربه متناوب است که ضرایب سری فوریه آن همگی برابر $\frac{1}{T}$ هستند

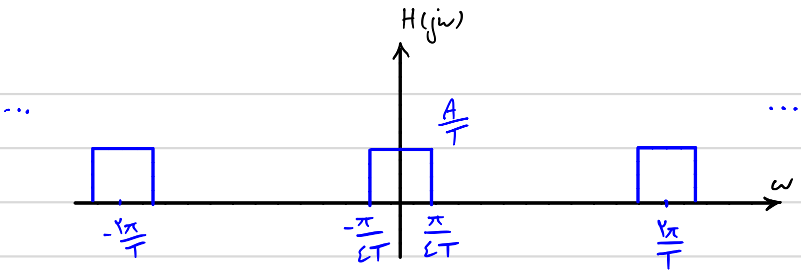
$$= \left(\frac{A}{\cancel{2\pi}}\right)\Pi\left(\frac{2T}{\pi}\omega\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\cancel{2\pi}}{T}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

با توجه به خواص کانولوشن می‌توان ترتیب سیگما و کانولوشن را عوض کرد

$$= \frac{A}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{2T}{\pi}\omega\right) * \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

می‌دانیم $f(t)*\delta(t-a) = f(t-a)$

$$= \frac{A}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{2T}{\pi}\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$



حال برای اینکه پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi t) + 4\cos(4\pi t)$ برابر با $y(t) = 1 + 4\cos(4\pi t)$ باشد، بایستی داشته باشیم:

ورودی — خروجی

طبق فرض سؤال

$$1 \rightarrow H(0)\times 1 = 1 \Rightarrow H(0) = 1 \rightarrow \frac{A}{T} = 1 \rightarrow \boxed{A = T}$$

$$2\cos(2\pi t) \rightarrow 2|H(j2\pi)|\cos(2\pi t + \angle H(j2\pi)) = 0 \rightarrow H(j2\pi) = 0 \xRightarrow[\text{شکل } H(j\omega)]{\text{با توجه به}} \frac{\pi}{4T} < 2\pi < \frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{4T}$$

طبق فرض سؤال و با توجه به اینکه در خروجی $y(t)$ کسینوسی با فرکانس 2π حذف شده

$$\frac{1}{T} < 8 < \frac{7}{T}$$

$$\boxed{\frac{1}{8} < T < \frac{7}{8}}$$

با توجه به فرض سؤال و جمله کسینوسی با فرکانس 4π در $y(t)$

$$4\cos(4\pi t) \rightarrow 4|H(j4\pi)|\cos(4\pi t + \angle H(j4\pi)) = 4\cos(4\pi t) \rightarrow H(j4\pi) = 1$$

با توجه به شکل $H(j\omega)$ و فرض $\frac{A}{T} = 1$

$$\frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{4T} < 4\pi < \frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{4T}$$

$$\frac{7}{T} < 16 < \frac{9}{T}$$

$$\boxed{\frac{7}{16} < T < \frac{9}{16}}$$

بنابراین از مجموع شرایط بالا نتیجه می‌گیریم شرط لازم و کافی جهت برقراری شرایط مسئله آن است که اولاً $A = T$ بوده و ثانیاً مقدار A و T در بازه $(\frac{7}{16}, \frac{9}{16})$ باشد، که با توجه به گزینه‌های داده شده تنها مقادیر $A = T = \frac{1}{2}$ قابل قبول هستند.

۴۵- برای هر $\omega_c \in \mathbb{R}$ خروجی سیستم S به ورودی $x(t) = e^{j\omega_c t}$ به صورت $y(t) = k(\omega_c)e^{j\omega_c t}$ است که $k(\omega_c)$ یک ضریب ثابت وابسته به ω_c است. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

۱) S خطی است.

۲) S بدون حافظه است.

۳) S پایدار است.

۴) هیچ‌کدام

به یاد داشته باشید که از روی پاسخ سیستم به تعداد خاصی ورودی نمی‌توان در مورد خواص سیستم نظر قطع داد، فقط می‌توان بین زوج ورودی و خروجی‌های داده شده به دنبال مثال نقض گشت. اما در این سؤال ورودی‌های داده شده همگی متعامد بوده و ارتباطی به یکدیگر ندارند و بنابراین مثال نقضی هم برای خواص نمی‌توان یافت. برای مثال فرض کنید $k(\omega_c)$ برابر با ω_c باشد، یعنی خروجی سیستم به ورودی $e^{j\omega_c t}$ برابر با $\omega_c e^{j\omega_c t}$ باشد؛ دراین صورت می‌توان ضابطه سیستم را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$y(t) = \frac{\ln(x(t))}{jt\, x(0)} x(t)$$

واضح است که سیستم با ضابطه بالا غیرخطی، حافظه دار و ناپایدار است، اما در شرایط مسأله هم صدق می‌کند، یعنی پاسخ آن به ورودی $x(t) = e^{j\omega_c t}$ برابر است با $y(t) = \omega_c e^{j\omega_c t}$، که در آن $k(\omega_c) = \omega_c$ می‌باشد. بنابراین هیچ یک از خواص مطرح شده لزوماً صادق نخواهند بود.