«بسمه تعالی»

سؤالات و پاسخ تشریحی درس سیگنال - آزمون دکتری ۱۴۰۱

مهدی تقدسی

سؤالات در کل، ساده هستند. متأسفانه پاسخ دو سؤال (۴۴ و ۴۵) در گزینه‌ها نیست و باید مورد اعتراض قرار گیرد.
دو سؤال (۴۰ و ۴۱) از جلد دوم کتاب آمده که هر دو نیز عیناً و تقریباً در کنکورهای سال‌های گذشته (دکتری ۹۹ و سراسری ۸۱ و دکتری ۹۸) داده شده بودند.

فصل دوم

۳۶- در مورد سیستم توصیف شده با معادله $(-1)^n x[n]+(2)^n y(n)=0$، کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم سببی و پایدار است.
۲) سیستم سببی و غیرخطی است.
۳) سیستم خطی و تغییرپذیر با زمان است. ✓
۴) سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

$$y(n) = \frac{-(-1)^n x(n)}{2^n} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

مشخص است که سیستم خطی، علی، TV و ناپایدار می‌باشد.

$$y(-\infty)=\infty$$

فصل پنجم

۳۷- تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ برابر است با $X(j\omega)=\pi e^{-|\omega|}$، مقدار سیگنال $x(t)$ در مبدأ $(x(0))$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱ ✓
۳) ۲
۴) ۵

روش اول:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \xrightarrow{t=0} x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi e^{-|\omega|}\,d\omega=\int_{0}^{+\infty} e^{-\omega}\,d\omega=-e^{-\omega}\Big|_{0}^{+\infty}=1$$

روش دوم (دوگان):

$$x(t)=? \xleftrightarrow{F} X(\omega)=\pi e^{-|\omega|}$$

$$X(t)=\pi e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)=\frac{2\pi}{\omega^2+1} \xRightarrow{\omega\to -t} x(t)=\frac{1}{t^2+1} \Longrightarrow x(0)=1$$

F
جدول

۳۸- پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $p(t)=u(t)-u(t-1)$ به‌صورت زیر است:

$$q(t)=\begin{cases} 0 & ; \quad t<0 \\ t & ; \quad 0\le t<1 \\ 1 & ; \quad t>1 \end{cases}$$

فصل نهم

که منظور از $u(t)$ تابع پله واحد است. پاسخ سیستم به ورودی $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} p(t-k)$ کدام‌یک از موارد زیر است؟

۱) $y(t)=u(t)$ ۲) $y(t)=x(t)$

۳) $y(t)=tu(t)$ ✓ ۴) $y(t)=q(t)u(t)$

$$p(t)=u(t)-u(t-1) \xrightarrow{LTI} q(t)=r(t)-r(t-1)$$

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} p(t-k) \longrightarrow y(t)=?=\sum_{k=0}^{+\infty} q(t-k)=\sum_{k=0}^{+\infty} r(t-k)-\sum_{k=0}^{+\infty} r(t-1-k)$$

ترکیب خطی و انتقالی از $p(t)$ — سیستم LTI

با بازکردن دو سیگمای فوق (و یا حتی به همین صورت بسته) به سادگی حاصل آن برابر $y(t)=r(t)=tu(t)$ بدست می‌آید. البته با رسم شکل نیز می‌توان به این پاسخ رسید.

۳۹- تبدیل فوریه سیگنال گسسته زیر کدام است؟

فصل پنجم

$$x[n]=3^{-2n-2}\,u[n-1]$$

۱) $X(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}}{9-e^{-j\omega}}$ ۲) $x(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}}{1-9e^{-j\omega}}$

۳) $x(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}}{9-81e^{-j\omega}}$ ۴) $x(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}}{81-9e^{-j\omega}}$ ✓

$$x(n)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}u(n-1)=\frac{1}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}u(n-1) \xrightarrow{F} X(\omega)=\frac{1}{81}\cdot\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{9}e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega}}{81-9e^{-j\omega}}$$

۴۰- سیگنال $x(t)$ از یک سیستم نمونه‌برداری با فرکانس ۳۰۰Hz عبور کرده و سیگنال $x[n]$ را تولید می‌کند. ضرایب سری فوریه غیرصفر $x[n]$ کدام است؟

$x(t) = \sin(200\pi t)\cos(150\pi t)$

۱) $a_1 = a_7 = \frac{1}{4j}$ ، $a_5 = a_{11} = \frac{-1}{4j}$ ✓

۲) $a_1 = a_7 = \frac{1}{2j}$ ، $a_5 = a_{11} = \frac{-1}{2j}$

۳) $a_1 = a_5 = \frac{1}{4j}$ ، $a_7 = a_{11} = \frac{-1}{4j}$

۴) $a_1 = a_5 = \frac{1}{2j}$ ، $a_7 = a_{11} = \frac{-1}{2j}$

فصل هفتم (یازدهم جزوه)

$f_s = 300\ Hz \longrightarrow T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{300}\ s$

$x(n) \equiv x(nT) = \sin(200\pi nT)\cos(150\pi nT) \Longrightarrow x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$\Longrightarrow x(n) = \frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{6}n + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}n = \underbrace{\frac{1}{4j}}_{a_7} e^{j\frac{7\pi}{6}n} \underbrace{-\frac{1}{4j}}_{a_{-7}=a_5} e^{-j\frac{7\pi}{6}n} + \underbrace{\frac{1}{4j}}_{a_1} e^{j\frac{\pi}{6}n} \underbrace{-\frac{1}{4j}}_{a_{-1}=a_{11}} e^{-j\frac{\pi}{6}n}$

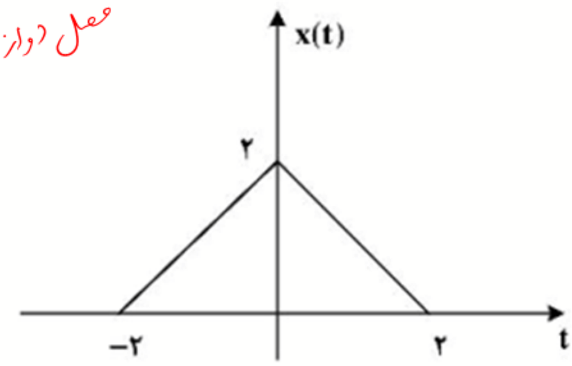
$N = 12 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{6}$

$e^{jk\omega_0 n}$ ضریب a_k

$e^{jk\frac{\pi}{6}n}$ " a_k

۴۱- برای سیگنال $x(t)$ نمایش داده شده در شکل داده شده مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{j\omega}\,d\omega$$



۱) صفر

۲) π

۳) 2π

۴) 4π ✓

فصل دوازدهم (پنجم جزوه)

روش اول :

$x(t) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} X(\omega)\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}$

سنتز : $x(t) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}\,d\omega \xrightarrow{t=1} I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega}\,d\omega = 2\pi\, x(t) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=1}$

با حل کانولوشن فوق ، $I = 4\pi$ به دست می‌آید

روش دوم (رابطه تعمیم یافته پارسوال) :

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\underbrace{\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega}}_{Y(\omega)}\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\underbrace{\Pi\left(\frac{-t+1}{2}\right)}_{y(-t)}\,dt = 4\pi$

۴۲- تابع $F(\omega)=\cos(\frac{3\omega}{2})$ پاسخ فرکانس کدام سیستم LTI می‌تواند باشد؟

فصل نهم

۱) زمان گسسته و غیرعلّی
۲) زمان پیوسته وغیرعلّی ✓
۳) زمان گسسته و پایدار
۴) زمان پیوسته و پایدار ✓

تابع $F(\omega)$ با 2π متناوب نیست، پس نمی‌تواند تبدیل فوریه زمان گسسته باشد. از طرف دیگر چون $F(\omega)$ تابعی هموار و پیوسته است، پس سیستم مذکور پایدار می‌باشد. برای بررسی علی بودن داریم:

$$F(\omega)=\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{j\frac{3\omega}{2}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{3\omega}{2}} \longrightarrow f(t)=h(t)=\frac{1}{2}\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

چون $h(t)$ برای $t<0$ مقدار دارد، پس سیستم غیرعلی است.

پایداری سیستم نیز مجدداً از روی $h(t)$ قابل بررسی است و چون $h(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است، پس سیستم پایدار می‌باشد.

پس هر دو گزینه ۲و۴ صحیح می‌باشند.

۴۳- $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\delta[n]-\frac{1}{3}\delta[n-1]$ است. اگر خروجی این سیستم $y(n)$ باشد، مقدار $\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\,y(k)$، کدام است؟

فصل سوم

۱) $\frac{5}{6}$
۲) $\frac{8}{9}$
۳) $\frac{10}{9}$ ✓
۴) $\frac{4}{3}$

$$y(n)=x(n)*h(n)=x(n)-\frac{1}{3}x(n-1)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x(k)y(k)=\sum_{k=0}^{+\infty}x^2(k)-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}x(k)x(k-1)=\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}-\frac{2}{3}\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$$

۴۴- اگر سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s)=\dfrac{3s+7}{6s^2+11s+6}$ باشد و $y(t)=e^{2t}x(t)$ و $x(t)=0\,;\,t<0$ مقدار $p=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{8}$

فصل هشتم

$$Y(s)=X(s-2)=\frac{3(s-2)+7}{6(s-2)^2+11(s-2)+6}=\frac{3s+1}{6s^2-13s+8}$$

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = Y(s)\Big|_{s=0}=?$$

چون $x(t)$ علی است، پس $y(t)$ نیز علی می‌باشد. بنابراین ناحیه همگرایی آن سمت راست راست‌ترین قطب و شامل $s=+\infty$ خواهد بود اما چون هر قطبی $Y(s)$ در سمت چپ محور $j\omega$ قرار ندارند، پس $s=0$ در ناحیه همگرایی $Y(s)$ نمی‌باشد.

بنابراین $P=Y(0)=\infty$ می‌باشد و پاسخ در گزینه‌ها نیست!

۴۵- فرض کنید که $x(t)=\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})+\sin(4\pi t+\frac{\pi}{4})$، وارد یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان با پاسخ ضربه $h(t)=\frac{1}{\pi t}$ شود و خروجی آن $y(t)$ باشد، دراین‌صورت $y(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ۲) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

۳) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ۴) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

فصل نهم (۵۰ صفحه طلایی)

چون $h(t)$ حقیقی است، پس می‌توانیم از فازور استفاده کنیم. داریم:

$$y(t)=|H(2\pi)|\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}+\measuredangle H(2\pi)\right)+|H(4\pi)|\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}+\measuredangle H(4\pi)\right)\qquad (1)$$

با استفاده از دوگانی داریم:

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}\xleftrightarrow{\;F\;} H(\omega)=\,?\,=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$H(t)=-j\,\mathrm{sgn}(t)\xleftrightarrow{\;F\;} 2\pi h(-\omega)=-\frac{2}{\omega}\qquad F^{-1}$$

$$\Longrightarrow H(2\pi)=H(4\pi)=-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} y(t)=\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(4\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow y\left(\tfrac{1}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad (!)$$