۱۰۳- گزینهٔ درست در مورد سیستم زیر، کدام است؟ ($x[n]$ ورودی و $y[n]$ خروجی سیستم می‌باشد)

$$y[n]=(n^2+1)x[n^2]\sin(\frac{\pi n^2}{5})$$

۱) سیستم پایدار است.

۲) سیستم خطی است.

۳) سیستم علّی است.

۴) سیستم معکوس‌پذیر است.

← سیستم مورد نظر پایدار نیست، زیرا جمله $(n^2+1)$ زمانی که $n$ به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند، بی‌کران می‌شود که باعث بی‌کران شدن خروجی می‌گردد حتی اگر ورودی کران‌دار باشد.

← سیستم خطی است، زیرا هیچ عملگر غیرخطی به ورودی اعمال نشده است. به عبارتی می‌توان گفت ضابطه سیستم به فرم $y[n]=f(n)\,x[g(n)]$ است و همان طور که ملاحظه می‌شود خروجی از ضرب ورودی در یک تابع زمانی حاصل می‌شود که به هیچ وجه عملیاتی غیرخطی نیست.

← سیستم داده شده علی نیست، زیرا آرگومان ورودی همواره کوچک‌تر از آرگومان خروجی نیست، یعنی رابطه $n \geq n^2$ برقرار نیست

آرگومان ورودی     آرگومان خروجی

← سیستم مورد نظر معکوس‌پذیر نیست، زیرا مقدار ورودی در زمان‌های منفی هیچ تأثیری در تعیین خروجی ندارد و به هیچ وجه نمی‌توان از روی خروجی مقدار ورودی در لحظات منفی را بدست آورد [چون آرگومان ورودی به فرم $n^2$ است که همواره عددی مثبت است]

۱۰۴- تبدیل z سیگنال $x[n]$ و ناحیهٔ همگرایی آن به صورت زیر است:

$$X(z)=\frac{z^{8}+2z^{4}}{z^{4}-2}\quad,\quad |z|>2$$

مقدار $x[n]$ در $n=4$ برابر کدام است؟

۱) ۰

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

در مرحله اول مشخص است که توان‌های z در $X(z)$ همگی ضرب ۴ هستند، بنابراین می‌توان $X(z)$ را به فرم $G(z^4)$ نوشت. برای این منظور $G(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(z)=\frac{z^{2}+2z}{z-2} \longrightarrow X(z)=G(z^4) \xrightarrow{\text{طبق خاصیت انبساط زمانی}} x[n]=g\left[\frac{n}{4}\right]=\begin{cases} g\left[\frac{n}{4}\right] & n=4l \\ 0 & n\neq 4l \end{cases}$$

بنابراین کافی است عکس تبدیل Z تابع $G(z)$ تعریف شده در بالا را بدست آوریم، برای این کار ابتدا صورت و مخرج $G(z)$ را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$G(z)=\frac{z^{2}+2z}{z-2}=z+4+\frac{8}{z-2}=z+4+\frac{8z^{-1}}{1-2z^{-1}}\quad,\quad |z|>2$$

در صورت و مخرج کسر جدید از z فاکتور می‌گیریم

$$g[n]=\underbrace{\delta[n+1]}_{\text{عکس تبدیل Z جمله z}}+\underbrace{4\delta[n]}_{\text{عکس تبدیل Z جمله 4}}+\underbrace{8\left(2^{n-1}\right)u[n-1]}_{\text{عکس تبدیل Z کسر موجود با فرض } |z|>2}=\delta[n+1]+4\delta[n]+2^{n+2}u[n-1]$$

حال می‌توان $x[4]$ را بدست آورد:

$$x[4]=g\left[\frac{4}{4}\right]=g[1]=2^{n+2}u[n-1]\Big|_{n=1}=2^{3}=8$$

۱۰۵- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI برابر است با:

$$h(t)=u(t+\frac{\pi}{4})-u(t-\frac{\pi}{4})$$

پاسخ سیستم در لحظهٔ $t=\frac{\pi}{4}$ به ورودی $\cos(2t)$ $x(t)=\left\{u(t)-u(t-\frac{\pi}{4})\right\}$، کدام است؟

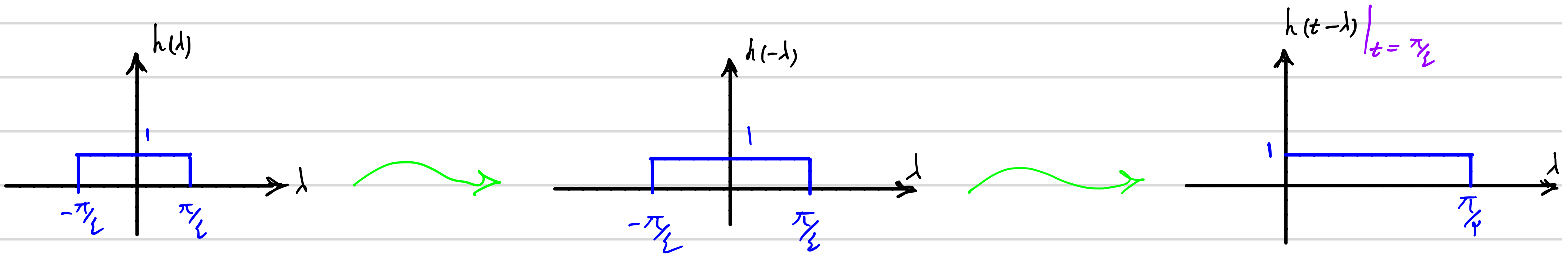
۱) $-\frac{1}{2}$

۲) ۰

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱

از آنجایی که پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ تنها در یک لحظه خاص خواسته شده است ، بهترین و سریعترین راه استفاده از تحلیل حوزه زمان و عملگر کانولوشن است . بنابراین از رابطه انتگرال کانولوشن به فرم $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda\Big|_{t=\pi/4}$ استفاده می نماییم :




$$y(\pi/4)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda\Big|_{t=\pi/4}=\int_{0}^{\pi/2} x(\lambda)\,d\lambda=\int_{0}^{\pi/2}[u(\lambda)-u(\lambda-\pi/4)]\cos(2\lambda)\,d\lambda=\int_{0}^{\pi/4}\cos(2\lambda)\,d\lambda$$

جای گذاری $h(\pi/4-\lambda)$

جای گذاری $x(\lambda)$

با توجه به اثر تابع $[u(\lambda)-u(\lambda-\pi/4)]$ حدود انتگرال را اصلاح می کنیم .

$$=\frac{1}{2}\sin(2\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\pi/4}=\frac{1}{2}\left[\sin(\pi/2)-\sin(0)\right]=\frac{1}{2}$$

۱۰۶- $x_1(t)$ متناوب با پریود اصلی $T_1$ و ضرایب فوریهٔ $a_n$ و $x_2(t)$ متناوب با پریود اصلی $T_2=3T_1$ و ضرایب سری فوریهٔ $b_n$ است. ضرایب سری فوریهٔ $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$ با پریود اصلی $T_2=3T_1$، کدام است؟

۱) $\begin{cases} a_{\frac{n}{3}}+b_n & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ b_n & \text{سایر} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a_{\frac{n}{3}}+b_n & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ a_n & \text{سایر} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a_n+b_{\frac{n}{3}} & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ b_n & \text{سایر} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a_n+b_{\frac{n}{3}} & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ a_n & \text{سایر} \end{cases}$

با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان بسط فوریه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(3\omega_2)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j3k\omega_2 t} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m=3k}}^{+\infty} a_{\frac{m}{3}} e^{jm\omega_2 t}$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2\pi}{T_2/3}=3\omega_2 \qquad \omega_2$$

تغییر متغیر $m=3k$

$$x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_2 t}$$

حال باید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را با هم جمع نمائیم و $y(t)$ را بدست آوریم تا سری فوریه $y(t)$ بدست آید، اما با توجه به آنکه $y(t)$ متناوب با دوره تناوب $T_2$ است، می‌دانیم سری فوریه $y(t)$ به فرم $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_2 t}$ خواهد بود که $c_k$ ها ضرایب سری فوریه $y(t)$ هستند:

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)=\sum_{\substack{m=-\infty \\ m=3k}}^{+\infty} a_{\frac{m}{3}} e^{jm\omega_2 t}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_2 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_2 t}$$

جای‌گذاری بسط فوریه $x_1(t)$ ، $x_2(t)$

طبق تعریف بسط فوریه برای $y(t)$

ضریب جمله $e^{jk\omega_2 t}$ در سمت راست تساوی = ضریب جمله $e^{jk\omega_2 t}$ در سمت چپ تساوی

$$c_k \qquad \qquad \begin{cases} b_k+a_{\frac{k}{3}} & , k=3l \\ b_k & , k\neq 3l \end{cases}$$

$$c_k=\begin{cases} b_k+a_{\frac{k}{3}} & , k=3l \\ b_k & , k\neq 3l \end{cases}$$

۱۰۷- ارتباط ورودی ـ خروجی یک سیستم زمان گسسته (ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$) به صورت

$$y[n]=\begin{cases}-x[n] & \text{اگر } x[n]\geq x[n-2] \\ x[1-n] & \text{اگر } x[n]< x[n-2]\end{cases}$$

داده شده است. پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=\delta[n+1]-\delta[n]$ برابر کدام است؟

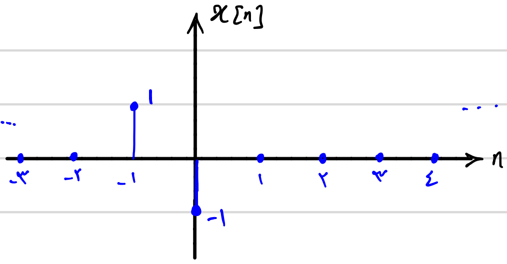
۱) $\delta[n+1]+\delta[n-2]$

۲) $\delta[n+1]+\delta[n-1]$

۳) $-\delta[n+1]-\delta[n-1]$

۴) $-\delta[n+1]-\delta[n-2]$

برای آنکه درک و شهود بهتری نسبت به سوال داشته باشیم، ابتدا ورودی $x[n]$ را رسم می‌نماییم:



واضح است که تا قبل از لحظه $n=-1$، $x[n]$ ثابت و برابر صفر است، بنابراین برای $n\leq -2$ رابطه $x[n]\geq x[n-2]$ برقرار است و در نتیجه برای $n\leq -2$ خروجی برابر $y[n]=-x[n]=0$ خواهد بود. از لحظه $n=-1$ تا لحظه $n=2$ که ورودی دچار تغییرات می‌شود، چاره‌ای جز محاسبه لحظه به لحظه خروجی نداریم:

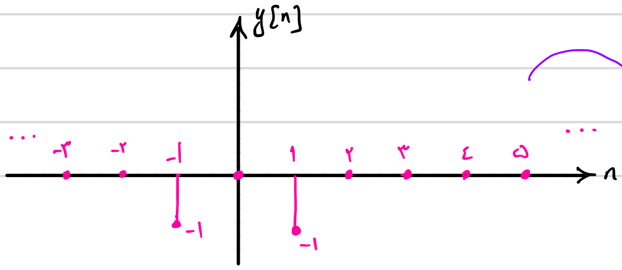
$n=-1$ : $x[n]=1$ , $x[n-2]=0$ $\xrightarrow{x[n]>x[n-2]}$ $y[-1]=-x[-1]=-1$

$n=0$ : $x[n]=-1$ , $x[n-2]=0$ $\xrightarrow{x[n]<x[n-2]}$ $y[n]\big|_{n=0}=x[1-n]\big|_{n=0}=x[1]=0$

$n=1$ : $x[n]=0$ , $x[n-2]=1$ $\xrightarrow{x[n]<x[n-2]}$ $y[n]\big|_{n=1}=x[1-n]\big|_{n=1}=x[0]=-1$

$n=2$ : $x[n]=0$ , $x[n-2]=-1$ $\xrightarrow{x[n]>x[n-2]}$ $y[n]\big|_{n=2}=-x[n]\big|_{n=2}=0$

برای زمان‌های $n\geq 3$ مجدداً مقدار $x[n]$ ثابت و برابر صفر است و بنابراین خروجی برابر با صفر خواهد بود. در نهایت خروجی به فرم زیر خواهد بود:



$\longrightarrow y[n]=-\delta[n+1]-\delta[n-1]$

۱۰۸- سیگنالی داریم که طیف آن به شکل $X(j\omega)=j\sqrt{\pi}\,\mathrm{sgn}(\omega)[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$ است. مقدار مشتق این سیگنال در $t=0$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۲) $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

۳) $0$

۴) $-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

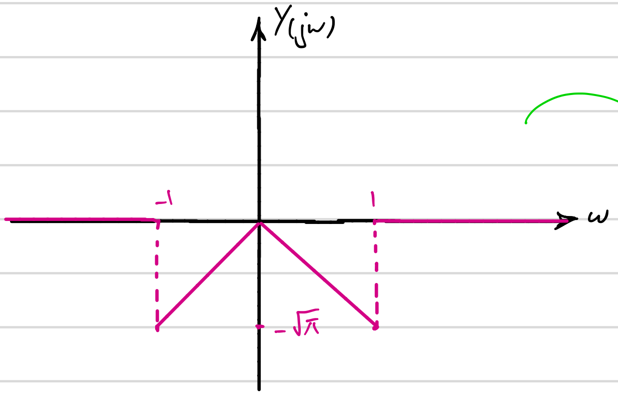
اگر سیگنال $y(t)$ به صورت $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ تعریف شده باشد، آنگاه خواسته سوال در حقیقت محاسبه $y(0)$ است. اما طبق خواص تبدیل فوریه می‌دانیم $y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)d\omega$ است که $Y(j\omega)$ تبدیل فوریه $y(t)$ می‌باشد. از طرفی طبق خاصیت مشتق زمانی برای تبدیل فوریه می‌توان گفت:

$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$

$$Y(j\omega)=j\omega X(j\omega) \overset{X(j\omega)\text{ جای‌گذاری}}{=} (j\omega)\,j\sqrt{\pi}\,\mathrm{sgn}(\omega)\left[u(\omega+1)-u(\omega-1)\right] \overset{(j)^2=-1}{=} -\omega\sqrt{\pi}\,\mathrm{sgn}(\omega)\left[u(\omega+1)-u(\omega-1)\right]$$

$$\overset{\omega\,\mathrm{sgn}(\omega)=|\omega|}{=} -|\omega|\sqrt{\pi}\left[u(\omega+1)-u(\omega-1)\right]$$

حال کافی است $\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)d\omega$ را محاسبه کنیم، اما پیش از آن برای شهود بیش‌تر $Y(j\omega)$ را رسم می‌نماییم:




$$\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)d\omega = 2\times\left[\tfrac{1}{2}\times 1\times -\sqrt{\pi}\right] = -\sqrt{\pi}$$

$$y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)d\omega=\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}$$

۱۰۹- سیستمی با رابطهٔ ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]=2x[n]+3x[n-1]-y[n-2]$ مفروض است. اگر سیستم در شرایط آرامش اولیه (initial rest condition) باشد. پاسخ پلهٔ سیستم در $n=53$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۵

با استفاده از تبدیل Z می‌توان رابطهٔ بین ورودی و خروجی سیستم را به فرم زیر نوشت :

$$Y(z)=2X(z)+3z^{-1}X(z)-z^{-2}Y(z)$$

$$\longrightarrow Y(z)\left[1+z^{-2}\right]=X(z)\left[2+3z^{-1}\right] \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2+3z^{-1}}{1+z^{-2}} \quad , \quad |z|>1$$

چون سیستم در شرایط آرامش اولیه است

پس علی بوده و ناحیه همگرایی تابع تبدیل آن دست راستی خواهد بود.

حال باید ورودی پله را به سیستم اعمال کرده و خروجی سیستم را بدست آوریم :

$$x[n]=u[n]$$

$$\longrightarrow X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \longrightarrow Y(z)=\frac{2+3z^{-1}}{1+z^{-2}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}j}{1+jz^{-1}}+\frac{-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}j}{1-jz^{-1}}+\frac{\frac{5}{2}}{1-z^{-1}} \quad , \quad |z|>1$$

تفکیک کسر می‌کنیم

$$1+z^{-2}=(1+jz^{-1})(1-jz^{-1})$$

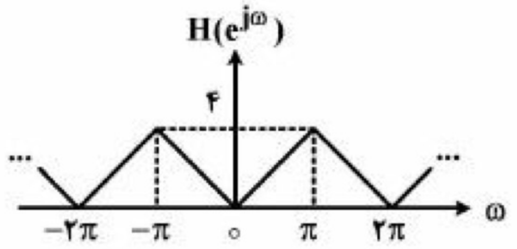
$$y[n]=\left(1+\tfrac{3}{2}j\right)(-j)^{n}u[n]+\left(1-\tfrac{3}{2}j\right)(j)^{n}u[n]+\frac{5}{2}u[n]$$

$$(j)^4=(-j)^4=1$$

$$y[53]=\left(\frac{-1}{4}+\frac{5}{4}j\right)(-j)+\left(\frac{-1}{4}-\frac{5}{4}j\right)(j)+\frac{5}{2}$$

$$=\cancel{\frac{j}{4}}+\frac{5}{4}-\cancel{\frac{j}{4}}+\frac{5}{4}+\frac{5}{2}=5$$

۱۱۰- یک سیستم LTI زمان ـ گسسته با پاسخ فرکانسی داده شده در شکل زیر مفروض است. خروجی این فیلتر به ازای ورودی $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta[n-2k]$ برابر کدام است؟




۱) $2(-1)^n+2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

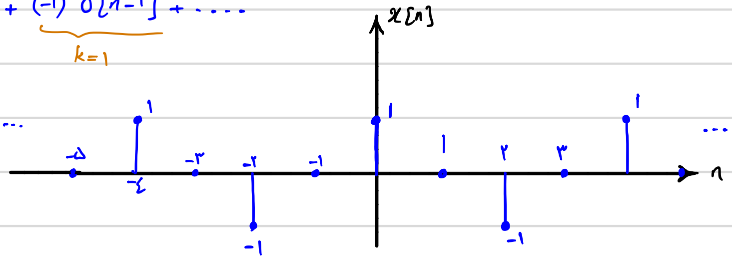
۲) $(-1)^n+\cos(\frac{\pi}{2}n)$

۳) $\cos(\frac{\pi}{2}n)$

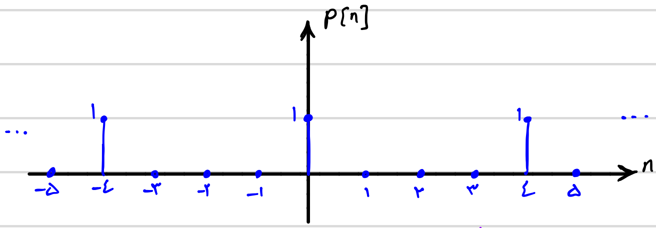
۴) $2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

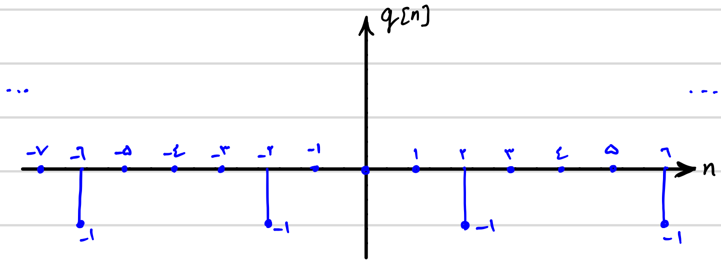
برای شهود بیش‌تر ابتدا ورودی $x[n]$ را رسم می‌نماییم:

$$x[n] = \cdots + \underbrace{(-1)\delta[n+2]}_{k=-1} + \underbrace{\delta[n]}_{k=0} + \underbrace{(-1)\delta[n-2]}_{k=1} + \cdots$$




همان طور که مشخص است $x[n]$ سیگنالی متناوب با دوره تناوب $N_0=4$ است. بنابراین برای محاسبه خروجی سیستم مورد نظر به $x[n]$ ابتدا باید ضرایب سری فوریه $x[n]$ را بدست آوریم؛ برای این منظور $x[n]$ را به فرم $x[n]=p[n]+q[n]$ می‌نویسیم:




$p[n]$ به فرم قطار ضربه است

ضرایب سری فوریه $= \frac{1}{4}$

$q[n]$ به فرم قطار ضربه شیفت یافته است

ضرایب سری فوریه $= -\frac{1}{4}e^{jk\pi} = -\frac{1}{4}(-1)^k$

ضرایب سری فوریه $x[n]$ $= a_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k = \frac{1}{4}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} 0 & k = \text{زوج} \\ \frac{1}{2} & k = \text{فرد} \end{cases}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle 4\rangle} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} = \sum_{k=-1}^{2} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$a_{-1}=a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_0=a_2=0$

از طرفی با توجه به $H(e^{j\omega})$ داده شده می‌دانیم $H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = 2$ است، بنابراین خروجی برابر است با:

$$y[n] = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}\cancelto{2}{H(e^{-j\frac{\pi}{2}})} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}\cancelto{2}{H(e^{j\frac{\pi}{2}})} = e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\frac{\pi}{2}n} = 2\cos(\frac{\pi}{2}n)$$

$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{j\alpha}+e^{-j\alpha})$

۱۱۱- مقدار I در رابطهٔ $I=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{2})}{k^2}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{2}$

۲) $\pi^2$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{1}{2}$

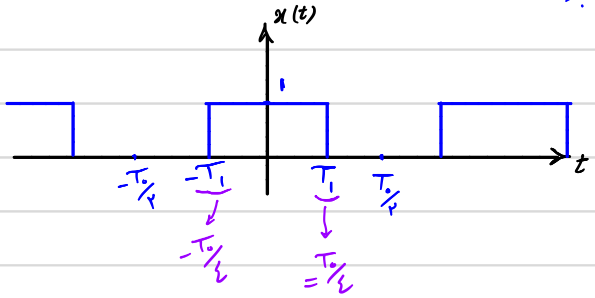
$$\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{2})}{k^2}=\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{2})}{k^2\times\frac{\pi^2}{4}\times\frac{4}{\pi^2}}=\frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)=\pi^2\left|\frac{1}{2}\mathrm{Sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right|^2$$

با توجه به رابطهٔ بالا می‌توان گفت که اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ برابر با $a_k=\frac{1}{2}\mathrm{Sinc}(\frac{k}{2})$ باشد، آنگاه حاصل مجموع $I$ برابر است با:

$$I=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{2})}{k^2}=\pi^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{2}\mathrm{Sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right|^2=\pi^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2=(\pi^2)\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle}|x(t)|^2dt$$

طبق رابطهٔ پارسوال

بنابراین کافی است سیگنال متناوب $x(t)$ را طوری بدست آوریم که ضرایب سری فوریه آن برابر $a_k=\frac{1}{2}\mathrm{Sinc}(\frac{k}{2})$ باشد. اما طبق فرم کلی ضرایب سری فوریه سیگنال پالس متقارن متناوب می‌توان گفت $x(t)$ یک پالس متقارن با دوره تناوب $T_0$ و پهنای پالس $2T_1$ است، به نحوی که $\frac{2T_1}{T_0}=\frac{1}{2}$ می‌باشد. در نتیجه $x(t)$ به شکل زیر خواهد بود:




$$\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle}|x(t)|^2dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|x(t)|^2dt=$$

بازه انتگرال‌گیری به طول $T_0$ را بازه $(-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2})$ در نظر می‌گیریم

$x(t)$ را جای‌گذاری کرده و حدود انتگرال‌گیری را اصلاح می‌کنیم.

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}1\,dt=\frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$I=(\pi^2)\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle}|x(t)|^2dt=\frac{\pi^2}{2}$$

۱۱۲- رابطه $(f*f)(t)=3f(\frac{t}{2})$ برای کدام یک از توابع زیر برقرار است؟

۱) $\dfrac{3}{\pi^2+t^2}$

۲) $\dfrac{3}{\pi}\dfrac{1}{5-jt}$

۳) $6\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

۴) $3\pi\,\delta(\frac{t}{2}-1)$

در صورت سؤال از notation غیرمعمول $(f*f)(t)$ استفاده شده است که احتمالا منظور طراح سؤال $f(t)*f(t)$ بوده است ؛ با این تعبیر می‌توان گفت رابطه داده شده در صورت سؤال به فرم $f(t)*f(t)=3f(\frac{t}{2})$ خواهد بود که در حوزه فوریه معادل است با :

$$\underbrace{F(j\omega)\cdot F(j\omega)}_{\mathcal{F}\{f(t)*f(t)\}}=\underbrace{3\left(2F(2\omega)\right)}_{\mathcal{F}\{3f(\frac{t}{2})\}}=6F(j2\omega)\longrightarrow F^2(j\omega)=6F(j2\omega)$$

حال باید تعیین کنیم تبدیل فوریه سیگنال داده شده در کدام گزینه در رابطه بالا صدق می‌کند. یک روش این است که تبدیل فوریه تک تک گزینه‌ها را بدست آورده و بررسی کنیم که آیا در رابطه بالا صدق می‌کند یا خیر که البته روشی طولانی است. اما با توجه به گزینه‌ها حدس می‌زنیم که $F(j\omega)$ باید به فرم نمایی باشد [ $F(j\omega)$ به فرم پالس نیست چون اگر به فرم پالس باشد پهنای $F(j2\omega)$ و $F(j\omega)$ متفاوت بوده و رابطه بالا هرگز برقرار نخواهد بود و از طرفی اگر $F(j\omega)$ ثابت باشد نمی‌تواند ضریب $\pi$ داشته باشد، بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم پاسخ سؤال نخواهند بود و گزینه‌های اول و دوم هم تبدیل فوریه‌هایی به فرم نمایی دارند و بنابراین فرض می‌کنیم $F(j\omega)$ به فرم $ke^{a\omega}$ یا $ke^{a|\omega|}$ است

۱) $F(j\omega)=ke^{-a\omega}u(-\omega)\xrightarrow{F^2(j\omega)=6F(j2\omega)}k^2e^{-2a\omega}u(\omega)=6ke^{-a2\omega}u(-\omega)$

$\longrightarrow$ a می‌تواند هر عدد حقیقی منفی باشد

$\longrightarrow k^2=6k\longrightarrow k=6$

$\longrightarrow F(j\omega)=6e^{-a\omega}u(-\omega)$

$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t)=6\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{1}{a+jt}\right]\quad,\quad a<0$

طبق رابطه دوگانی تبدیل فوریه

$$e^{at}u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{j\omega+a}$$

$$\frac{1}{jt+a}\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi e^{-a\omega}u(-\omega)$$

$\longrightarrow f(t)=\left(\frac{3}{\pi}\right)\left(\frac{1}{jt+a}\right)\quad,\quad a<0$

۲ $F(j\omega) = ke^{-a\omega}u(\omega) \quad , \quad a>0 \xrightarrow{F'(j\omega)=6F(j2\omega)} k'e^{-2a\omega}u(\omega) = 6ke^{-2a\omega}u(\omega) \quad , \quad a>0$

$\begin{cases} a \in \mathbb{R}^+ \\ k=6 \end{cases}$

$F(j\omega) = 6e^{-a\omega}u(\omega) \quad , \quad a>0 \xrightarrow{F^{-1}} f(t) = 6\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{1}{a-jt}\right]$

طبق دوگانی

$\begin{cases} e^{at}u(-t) \xrightarrow{F} \frac{1}{a-j\omega} \\ \frac{1}{a-jt} \xrightarrow{F} 2\pi e^{-a\omega}u(\omega) \end{cases}$

$f(t) = \left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{1}{a-jt} \quad , \quad a>0$

۳ $F(j\omega) = ke^{a|\omega|} \xrightarrow{F'(j\omega)=6F(j2\omega)} k'e^{2a|\omega|} = 6ke^{2a|\omega|}$

$\begin{cases} a \in \mathbb{R}^- \\ k=6 \end{cases}$

$F(j\omega) = 6e^{a|\omega|} \quad , \quad a<0 \xrightarrow{F^{-1}} f(t) = 6\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{2|a|}{a^2+t^2}\right)\right] = \left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{2|a|}{a^2+t^2}$

طبق دوگانی

$\begin{cases} e^{a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2|a|}{a^2+\omega^2} \\ \frac{2|a|}{a^2+t^2} \xrightarrow{F} 2\pi e^{a|\omega|} \end{cases}$

با توجه به گزینه‌های داده شده تنها حالت ۲ به ازای $a=5$ صحیح خواهد بود که در گزینه دوم داده شده است.

۱۱۳- فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته و $a[n]$ یک سیگنال گسسته باشد. «کانولوشن» این دو سیگنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (که خودش سیگنال پیوستهٔ $y(t)$ می‌شود):

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n)$$

رابطهٔ تبدیل فوریهٔ این سیگنال‌ها یعنی $X(j\omega)$، $A(e^{j\omega})$، $Y(j\omega)$ کدام است؟

۱) $Y(j\omega)=A(e^{j\omega})X(j\omega)$

۲) $Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}A(e^{j\omega})X(j\omega)$

۳) $Y(j\omega)=A(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-2k\pi))$

۴) $Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}A(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-2k\pi))$

با توجه به تعریف تبدیل فوریه برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته می‌توان گفت:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad , \quad A(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]e^{-j\omega n}$$

حال با استفاده از تعریف تبدیل فوریه به محاسبه $Y(j\omega)$ می‌پردازیم:

$$\boxed{Y(j\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n)\,e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n)e^{-j\omega t}dt=$$

جای‌گذاری $y(t)$ با توجه به تعریف انجام شده

جمله $e^{-j\omega t}$ نسبت به n (پارامتر سیگما) ثابت است و می‌توان آن را به عنوان ضریب به داخل سیگما منتقل کرد.

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n)e^{-j\omega t}dt\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-n)e^{-j\omega t}dt}_{\mathcal{F}\{x(t-n)\}=e^{-j\omega n}X(j\omega)}$$

با توجه به فرم سیگما، انتگرال بدست آمده و خواص این عملگرها می‌توان ترتیب سیگما، انتگرال را عوض کرد.

جمله $a[n]$ نسبت به t (متغیر انتگرال‌گیری) ثابت است و به عنوان ضریب از انتگرال بیرون می‌آید.

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]e^{-j\omega n}X(j\omega)=X(j\omega)\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]e^{-j\omega n}}_{\mathcal{F}\{a[n]\}=A(e^{j\omega})}=\boxed{X(j\omega)A(e^{j\omega})}$$

با توجه به تعریف تبدیل فوریه برای $x(t-n)$ و خاصیت شیفت زمانی تبدیل فوریه

جمله $X(j\omega)$ نسبت به n ثابت است و به عنوان ضریب از سیگما خارج می‌شود.

با توجه به تعریف تبدیل فوریه برای $a[n]$

۱۱۴- S، سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\dfrac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$ را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=\left(\dfrac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\times\dfrac{\sin(2(t-\frac{1}{2}))}{\pi(t-\frac{1}{2})}$

۲) $\left(\dfrac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^2$

۳) $\left(\dfrac{\sin 4(t-1)}{\pi(t-1)}\right)^2$

۴) $\left(\dfrac{\sin(2(t-\frac{1}{2}))}{\pi(t-\frac{1}{2})}\right)^2$

با توجه به تبدیل فوریه سیگنال پالس و خاصیت دوگانی می‌دانیم تبدیل فوریه سیگنال Sinc برابر است با:

$$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2T\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

دوگانی

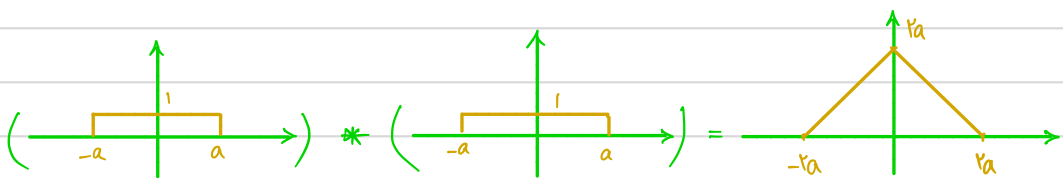
$$2T\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{tT}{\pi}\right) = \frac{2\sin(tT)}{t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right)$$ (رابطه I)

بنابراین می‌توان گفت تبدیل فوریه سیگنال $\frac{\sin(at)}{\pi t}$ برابر با $\Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right)$ خواهد بود و با استفاده از خاصیت ضرب زمانی برای تبدیل فوریه می‌توان گفت:

طبق خاصیت ضرب زمانی

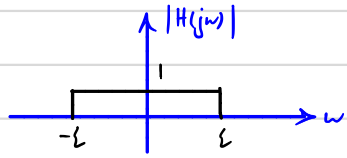
$$\mathcal{F}\left\{\left(\frac{\sin(at)}{\pi t}\right)^2\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(at)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(at)}{\pi t}\right\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(at)}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(at)}{\pi t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right) * \Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right) = \frac{a}{\pi}\Lambda\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$ (رابطه II)

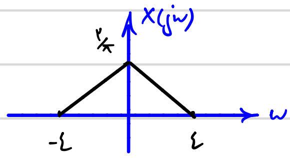


با توجه به توضیحات ارائه شده به راحتی می‌توان تبدیل فوریه ورودی و پاسخ ضربه را محاسبه کرده و خروجی را در حوزه فوریه و زمان بدست آورد :

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}\right\} \overset{\text{طبق خاصیت شیفت زمانی}}{=} e^{-j\omega}\,\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(4t)}{\pi t}\right\} \overset{\text{I طبق رابطه}}{=} e^{-j\omega}\,\Pi\left(\frac{\omega}{8}\right)$$




$$X(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2\right\} \underset{\text{II طبق رابطه}}{=} \frac{2}{\pi}\,\Lambda\left(\frac{\omega}{4}\right)$$




$$Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot X(j\omega) = e^{-j\omega}\,X(j\omega)$$

$$y(t) \underset{\text{طبق خاصیت شیفت زمانی}}{=} x(t-1) = \left[\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\right]^2$$

با توجه به شکل موج های $|H(j\omega)|$ و $X(j\omega)$ می‌توان گفت که تمام محتوای فرکانسی $X(j\omega)$ از فیلتر $H(j\omega)$ عبور می‌کند و اندازه‌ی $X(j\omega)$ هیچ تغییری نخواهد کرد (چون در باند فرکانسی $X$ همواره $|H(j\omega)|=1$ است) و تنها فاز $X(j\omega)$ تغییر می‌کند و بنابراین خروجی برابر با $e^{-j\omega}X(j\omega)$ خواهد بود.