Musterlösung Übungsblatt 8

Semantik SS 13

Aufgabe 1 a) Sei $BOOL = \{\underline{true}, \underline{false}\}_\perp$, d.h.

$$f(x) = \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x = \underline{true} \\ \underline{false}, & \text{falls } x = \underline{false} \end{cases}$$

f ist nicht stetig, weil es mit $K = \{\perp, \text{false}\}$ eine Kette in BOOL gibt, für die $f(K) = \{\text{true}, \text{false}\}$ keine Kette ist.

a') Sei $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der Halbordnung $\leq$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$ ist nicht

stetig, weil $K = \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$ eine Kette in $\mathbb{N}_\infty$ ist und

$$f(\bigsqcup K) = f(\infty) = 0 \neq 1 = \bigsqcup \{f(x) \mid x \text{ ist gerade}\} = \bigsqcup f(K).$$

b) Seien $f: B \to C$ und $g: A \to B$ stetige Funktionen.

$f \circ g = x \mapsto f(g(x))$ ist stetig, weil

für jede Kette $K \subseteq A$ gilt $g(K)$ ist Kette in B und $f(g(K))$ ist Kette in C (Stetigkeit von g und f). Ferner gilt

$$\begin{aligned} f \circ g(\bigsqcup K) &= f(g(\bigsqcup K)) && \text{Def. } \circ \\ &= f(\bigsqcup g(K)) && \text{Stetigkeit von } g \\ &= \bigsqcup f(g(K)) && \text{Stetigkeit von } f \end{aligned}$$

$= \bigsqcup f \circ g\ (K)$ Def. von $\circ$

Aufgabe 2) Definiere zu cpo's $D_1, \dots, D_n$ den Summenbereich

$D := D_1 + \dots + D_n$ wie folgt:

$D = \left(\{ (d,i) \mid 1 \leq i \leq n,\ d \in D_i \} \cup \{\bot_D\},\ \sqsubseteq_D \right)$, mit

$\bot_D \sqsubseteq_D \bot_D$, $\bot_D \sqsubseteq_D (d,i)$ für alle $d \in D_i$ und

$(d,i) \sqsubseteq_D (d',j)$, gdw $i = j$ und $d \sqsubseteq_{D_i} d'$.

Jetzt ist $\sqsubseteq_D$ eine Halbordnung mit minimalem Element $\bot_D$ per Konstruktion. Die Kettenvollständigkeit folgt unmittelbar aus der Kettenvollständigkeit der einzelnen Komponenten.

b) $\underline{in}_i : D_i \to (D_1 + \dots + D_n)$

$d \mapsto (d,i)$

$\underline{out}_i : (D_1 + \dots + D_n \to D_i)$

$$x \mapsto \begin{cases} d, & \text{falls } x = (d,i) \\ \bot_{D_i}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\underline{is}_i\ (D_1 + \dots + D_n) \to BOOL_\bot$

$$x \mapsto \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } x = (d,i) \\ \underline{false}, & \text{falls } x = (d,j) \text{ mit } j \neq i \\ \bot, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$+ : \mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$$

$$\langle x, y \rangle \longmapsto \begin{cases} x+y, & \text{falls } x \in \mathbb{N} \text{ und } y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= : \mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp \to BOOL_\perp$$

$$\langle x, y \rangle \longmapsto \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \text{ und } x = y \\ \underline{false}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \text{ und } x \neq y \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskussion möglicher Alternativen:

Eine Alternative, die Addition bzw. Test auf Gleichheit erweitert, könnte allenfalls für Argumente der Form $\langle \perp, n \rangle$, $\langle n, \perp \rangle$ oder $\langle \perp, \perp \rangle$ einen anderen Wert zuordnen, sonst wäre es keine Erweiterung.

Sei $+\langle \perp, n \rangle = 0$. Dann gilt für die Kette $K = \{\langle \perp, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} \subseteq \mathbb{N}_\perp$, dass $+(K) = \{0, 2\}$ keine Kette in $\mathbb{N}_\perp$ ist, also ist diese Erweiterung der Addition nicht stetig. Analoges gilt für alle anderen Alternativen. Daher gibt es nur die o.a. <u>stetige</u> Erweiterung.

Musterlösung zu Übungsblatt 8, Aufgabe 4

Seien D_1, D_2 cpo's und

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, bend left, "f"] & D_2 \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

stetige Funktionen.

Beh.: $\underline{fix}_{f\circ g} = f(\underline{fix}_{g\circ f})$ und $\underline{fix}_{g\circ f} = g(\underline{fix}_{f\circ g})$

Beweis: Es gilt:

1. $\underline{fix}_{f\circ g} = \bigsqcup_{\nu\in\mathbb{N}} (f\circ g)^{\nu}(\bot)$ Def. von $\underline{fix}$

$\sqsubseteq \bigsqcup_{\nu\in\mathbb{N}} (f\circ g)^{\nu}(f(\bot))$ Monotonie von $f\circ g$

$= f\left(\bigsqcup_{\nu\in\mathbb{N}} (g\circ f)^{\nu}(\bot)\right)$ Monotonie von f

$= f(\underline{fix}_{g\circ f})$ Def. von $\underline{fix}$

2. $\underline{fix}_{g\circ f} \sqsubseteq g(\underline{fix}_{f\circ g})$ analog zu 1.

3. $f(\underline{fix}_{g\circ f}) \sqsubseteq f(g(\underline{fix}_{f\circ g}))$ Monotonie von f und 2.

$= \underline{fix}_{f\circ g}$ Fixpunkteigenschaft von $f\circ g$

4. $g(\underline{fix}_{f\circ g}) \sqsubseteq g(f(\underline{fix}_{g\circ f}))$ Monotonie von g und 1.

$= \underline{fix}_{g\circ f}$ Fixpunkteigenschaft von $g\circ f$

Die Behauptung folgt nun aus 1.-4. und der Antisymmetrie von $\sqsubseteq$

Q.E.D.