0.1 Bézierkurven (Bézier-Splines)

- Ordnung $= d =$ Grad der Polynome
- $d + 1$ Kontrollpukte $\quad \vec{P}_0, \vec{P}_1, ..., \vec{P}_d$
- Bernsteinpolynome:

$$\boxed{B_i^d = \binom{d}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{d-i}} \qquad i = 0, 1, ..., d \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} B_0^1(t) &= 1 \cdot t^0 (1-t)^1 = 1 - t \\ B_1^1(t) &= \binom{1}{1} \cdot t^1 \cdot (1-t)^0 = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= \binom{2}{0} \cdot t^0 (1-t)^2 = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2 \\ B_1^2(t) &= \binom{2}{1} \cdot t^1 \cdot (1-t) = 2t(1-t) = 2t - 2t^2 \\ B_2^2(t) &= \binom{2}{2} \cdot t^2 \cdot (1-t)^0 = t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\ B_1^2(t) &= \binom{3}{1} \cdot t^1 \cdot (1-t)^2 = 3t(1-t) = 3t(1-t)^2 \\ B_2^2(t) &= \binom{3}{2} \cdot t^2 \cdot (1-t) = 3t^2(1-t) = 3t^2 - 3t^3 \\ B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Eigenschaften der Bernsteinpolynome:

1. $B_i^d(t) \geq 0$ für $0 \leq t \leq 1$
2. $\boxed{\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) = 1}$

   Beweis

   $$\sum \binom{d}{i} t^i (1-t)^{d-i} = [t + (1-t)]^d = 1^d = 1$$

3. Rekursion:

$$\boxed{B_i^d(t) = t \cdot B_{i-1}^{d-1}(t) + (1-t) B_i^{d-1}(t)} \qquad 1 \leq i \leq d-1 \tag{0.1}$$

$$B_d^d(t) = t \cdot B_{d-1}^{d-1}(t) = t^d B_0^d(t) \qquad = t \cdot B_{d-1}^{d-1}(t) + (1-t) B_0^{d-1}(t) = (1-t) \tag{0.2}$$

Beweis (von (1))

$$\begin{aligned} & t \cdot \binom{d-1}{i-1} \cdot t^{i-1} (1-t)^{(d-1)-(i-1)} + (1-t) \binom{d-1}{i} \cdot t^i (1-t)^{d-1-i} \\ &= \binom{d-1}{i-1} t^i (1-t)^{d-i} + \binom{d-1}{i} \cdot t^i (1-t)^{d-i} = t^i (1-t)^{d-i} \underbrace{\left[\binom{d-1}{i-1} + \binom{d-1}{i}\right]}_{\binom{d}{i}}] \end{aligned}$$

Bemerkung $(B_0^d(t), ..., B_d^d(t))$ sind die Wahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = t$

$B_i^d(p) =$ Wahrscheinlichkeit, dass bei d Wiederholungen genau i Erfolge auftreten.

$\Rightarrow$ Splinekurve $\vec{P}(t)$:

$$\boxed{\vec{P}(t) = B_0^d \cdot \vec{P}_0 + B_1^d(t)\vec{P}_1 + ... + B_d^d(t) \cdot \vec{P}_d} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$d = 1$:

$$\vec{P}(t) = (1-t) \cdot \vec{P}_0 + t\vec{P}_1 = \vec{P}_0 + t(\vec{P}_1 - \vec{P}_0)$$

Eigenschaften:

1. Kurve beginnt bei P_0 und endet bei P_d. Die übrigen Punkte werden im allgemeinen nicht durchlaufen.
2. die Tangentenrichtung am Anfang und am Ende ist $\overrightarrow{P_0P_1}$ bzw. $\overrightarrow{P_{d-1}P_d}$ (Beweis s. Übung, Aufgabe 29).
3. Die Kurbe verläuft in der Konvexen Hülle der Kontrollpunkte.
4. Die Punkte $\vec{P}_0, ..., \vec{P}_d$ können $\in \mathbb{R}^2, \in \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ sein. Bézierkurven *im Raum* werden auf die gleiche Art definiert.
5. Verminderung der Variation:

Eine Gerade in der Ebene (eine Ebene im Raum) schneidet die Bézierkurve höchstens so oft wie das Kontrollpolygon.

0.1.1 Der Algorithmus von de Casteljau

zur Berechnung von $P(t)$

$O(d^2)$ Operationen

$$\mathcal{B}^d(t)(P_0, ..., P_d) := \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) \cdot P_i$$

Beweis des Casteljau-Algorithmus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^d(t)(P_0, ..., P_d) &\stackrel{?}{=} (1-t)\mathcal{B}^{d-1}(P_0, ..., P_{d-1}) + t\mathcal{B}^{d-1}(P_1, ..., P_d) \\
&= (1-t)\sum_{i=0}^{d-1} B_i^{d-1}(t)P_i + \underbrace{\sum_{i=0}^{d-1} B_i^{d-1}(t)P_{i+1}}_{=\sum_{j=1}^{d} B_{j-1}^{d-1}(t)P_j} \\
&= (1-t)\sum_{j=0}^{d-1} B_j^{d-1}(t)P_j + \sum_{j=1}^{d} B_{j-1}^{d-1}(t)P_j \qquad = (*) \text{ verwenden}
\end{aligned}$$

Algorithmus

Eingabe $P_0, P_1, ..., P_d = P_0^0, P_1^0, ..., P_d^0 \qquad 0 < t < 1$

Ausgabe $P(t)$

```
for l := 1 to d
        for i := 0 to d − l
                P_i^l := (1 − t)P_i^{l−1} + tP_{i+1}^{l−1}
return P_0^d = P(t)
```

Zerlegung von Bézierkurven

- $P_0, P_0^1, P_0^2, ..., P_0^d$ bilde das Kontrollpolygon für die kurve $P(x), 0 \leq x \leq t$
- $P_0^d, P_1^{d-1}, ..., P_{d-1}^1, P_d^0$ bilden das Kontrollpolygon für die Kurve $P(x), t \leq x \leq 1$
- häufigster Fall: $t = \frac{1}{2}$