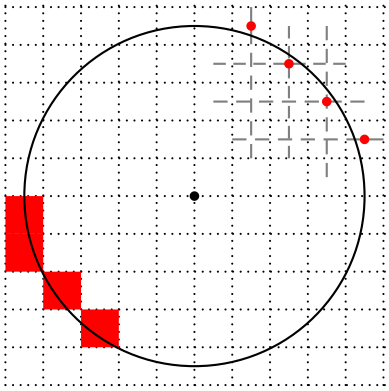
Mitschrift
Computergrafik

Martin Lenders

5. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

0.1 Kreise



Annahme

- Radius r ist ganzzahlig
- Mittelpunkt (c_x, c_y) ist ein Gitterpunkt

Kreisgleichung:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$$

Betrachte den Fall, wo der Mittelpunkt (0,0) ist (anschließend alles um (c_x, c_y) verschieben). Wir zeichnen den Bereich $x \geq 0, y \geq 0, y \geq x$ auf diesem Achtelkreis zeichnen wir auf jeder senkrechten Gittergeraden *einen* Punkt.

$x = i$ ist fest, Kreis verläuft zwischen (i, j) und $(i, j + 1)$.

Welchgen dieser beiden Punkte soll man auswählen?

(1). Wähle den Punkt, der kleineren *Abstand* vom Kreis hat

(2). Berechne den Schnittpunkt mit der Geraden $x = i$ und r und runde zum nächsten Gitterpunkt.
   - (Äquivalent: vergleiche den *senkrechten Abstand* zum Kreis)
   - (Äquivalent: Lisegt $(i, j + \frac{1}{2})$ über oder under dem Kreisbogen?)

(3). Wähle den Punkt der die *Kreisgleichung* $x^2 + y^2 = r^2$ am besten erfüllt.

$$|x^2 + y^2 - r^2| \to \text{MIN}$$

Für Geraden sind alle drei Bedingungen äquivalent
Für (3). gibt es beliebig viele Varianten:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \Rightarrow |r - \sqrt{x^2 + y^2}| \to \text{MIN führt auf (1)}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = r^4 \Rightarrow |r^4 - (x^2 + y^2)^2| \to \text{MIN führt auf (1)}$$

Satz Wenn der Mittelpunkt (c_x, c_y) und der Radius r ganzzahlig sind, dann sind Bedingung (1),(2) und (3) äquivalent.
Algebraische Formulierung von (1), (2), (3):

- Punkt $(i, j+1)$ liegt außerhalb
$$i^2 + (j+1)^2 \geq r^2$$
- Punkt (i, j) liegt innerhalb
$$i^2 + (j+1)^2 < r^2$$

(1). $r - \sqrt{i^2 + j^2} \underset{<}{\geq} \sqrt{i^2 + (j+1)^2} - r$

(2). $i^2 + \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \underset{<}{\geq} r^2$

(3). $r^2 - (i^2 + j^2) \underset{<}{\geq} i^2 + (j+1)^2 - r^2$

$$\begin{aligned}
(3) \iff \qquad 2r^2 &\underset{<}{\geq} i^2 + j^2 + 2j + 1 + i^2 + j^2 \\
&= 2i^2 + 2j^2 + 2j + \frac{1}{2} \\
\iff \qquad i^2 + j^2 + j - r^2 + \frac{1}{2} &\underset{<}{\geq} 0 \qquad \Rightarrow \text{„=“ kommt nicht vor für } i, j \in \mathbb{Z} \\
(2) \iff \qquad i^2 + j^2 + j + \frac{1}{4} - r^2 &\underset{<}{\geq} 0
\end{aligned}$$

Für $i, j, r \in \mathbb{Z}$ sind (2) und (3) äquivalent

$$\begin{aligned}
\overbrace{i^2 + j^2 + j - r^2}^{g(i,j+1),\text{s. Algorithmus}} \quad &\geq 0 &&\Rightarrow \text{Zeichne } (i, j) \\
&\leq -1 &&\Rightarrow \text{Zeichne } (i, j+1)
\end{aligned}$$

Behauptung

(a). $i^2 + \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \geq r^2 \Rightarrow \sqrt{i^2 + (j+1)^2} - r > r - \sqrt{i^2 + j^2}$

(b). $i^2 + j^2 + j + \frac{1}{2} \leq r^2 \Rightarrow \sqrt{i^2 + (j+1)^2} - r < r - \sqrt{i^2 + j^2}$

Daraus folgt, dass Regel (1) mit den beiden anderen Regeln (2), (3) konsistent ist.

Beweis (von (b).) Die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$ ist fü $t > 0$ konkav

$$\text{(daraus folgt: } f\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq \frac{f(u) + f(v)}{2}\text{)}$$

Eine differenzierbare Funktion f ist konkav $\Leftrightarrow$ f' monoton fallen $\Leftrightarrow$ $f'' \leq 0$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \searrow \text{ konkav}$$

$$\begin{aligned}
u &= i^2 + j^2 \\
v &= i^2 + (j+1)^2) = i^2 + j^2 + 2j + 1 \\
\frac{u+v}{2} &= i^2 + j^2 + j + \frac{1}{2} \\
r &\underset{\text{N.V.}}{\geq} \sqrt{i^2 + j^2 + j + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\left[\sqrt{i^2} + \sqrt{i^2 + (j+1)^2}\right] 2r \qquad \geq \sqrt{i^2 + j^2} + \sqrt{i^2 + (j+1)^2}
\end{aligned}$$

Beweis (von (a).) Funktion $h(y) = \sqrt{i^2 + y^2}$ ist *konvex*

$$h'(y) = \frac{1 \cdot \cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{i^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{i^2}{y^2} + 1}} \nearrow \text{ monoton wachsend}$$

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(g(u) + g(v)) \qquad u = j, v = j+1$$

$$r^2 \underset{\text{N.V.}}{\leq} \sqrt{i^2 + \left(j + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{i^2 + j^2} + \sqrt{i^2 + (j+1)^2}\right)$$

Algorithmus beginnt mit $(0, r)$ und zeichnet Punkte von links nach rechts.

- letzter gezeichneter Punkt $= (i-1, j)$
- soll nächster (i, j) oder $(i, j-1)$ gezeichnet werden?

$$g(i,j) = i^2 + (j-1)^2 + (j-1) - r^2 = i^2 + j^2 - 2j\cancel{+1} + j\cancel{-1}r^2$$

$$g(i,j) := i^2 + j^2 - j - r^2 \begin{cases} \geq 0 & \Rightarrow \text{ zeichne } (i, j-1) \\ \leq -1 & \Rightarrow \text{ zeichne } (i,j) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(i+1,j) - g(i,j) &= (i+1)^2 - i^2 = 2i + 1 \\ g(i,j-1) - g(i,j) &= (j-1)^2 - (j-1) - j^2 + j \\ &= j^2 - 2j + 1 - j + 1 - j^2 + j = -2j + 2 \end{aligned}$$

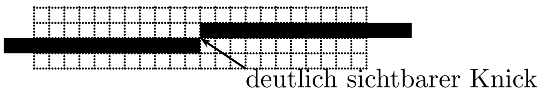
```
i := 0; j := r, g := −r; // Invariante: g = g(i,j)

loop
        SetPixel(i,j)
        g := g + 2i + 1; i := i + 1
        if g ≥ 0 then j := j − 1; g := g − 2j
until j < i
```

```
SetPixel(cx+i,cy+j)
SetPixel(cx+j,cy+i)
SetPixel(cx−i,cy+j)
SetPixel(cx−j,cy+i)
SetPixel(cx−i,cy−j)
SetPixel(cx−j,cy−i)
SetPixel(cx+i,cy−j)
SetPixel(cx+j,cy−i)
```

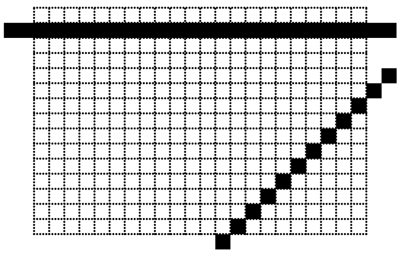
Die Pixel in de n 4 Himmelsrichtungen werden doppelt gezeichnet.

0.2 Schwachstellen der Rasterung (Aliasing)

- merkbare Sprünge bei fast achsenparallelen Geraden



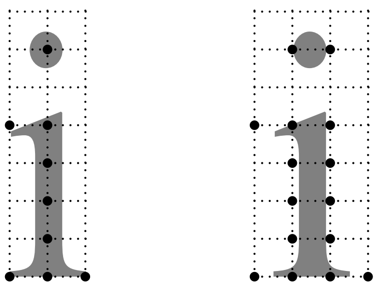
- unterschiedliche Helligkeitsverteilung in Abhängigkeit von der Steigung



  - horizontale/vertikale Linie hat 1 Pixel pro Längeneinheit
  - schräge Linie (45°) hat 1 Pixel pro $\sqrt{2}$ Längeneinheiten

  $\Rightarrow$ schräge Linien erscheinen dünner

- Buchstaben könne verschieden breit werden



Lösung (Anti-Aliasing) Verschiedene Graustufen für Pixel, statt nur schwarz und weiß