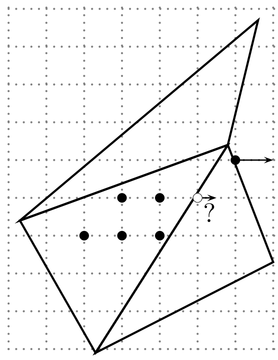
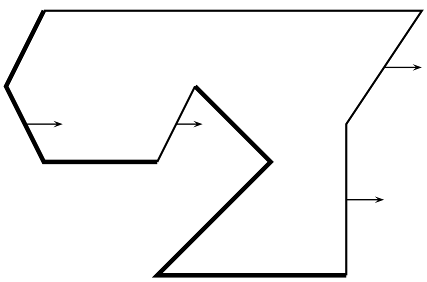
0.1 Anzeigen von benachbarten Flächenstücken (Dreiecken)



Gehört der Rand eines Dreiecks zum Dreieck?
Zu welchem Dreieck?

Gesucht Eine konsistente Regel, die bei mehreren aneienanderstoßenden Flächen feslegt, zu welcher Fläche jeder Bildpunkt gehört.

Eine Möglichkeit Ein Pixel, das auf dem Rand liegt wird (in Gedanken) horizontal nach rechts verschoben. Es gehört zu der Fläche, wo es dann landet. Wenn es dabei auf einer horizontalen Kante liegt, dann wird es zur oberen Fläche gerechnet.



Vorraussetzung Exakte Arithmetik

0.2 Lineare Interpolation in Weltkoordinaten

Interpolation von Helligkeitswerden (Gouraud-Schattierung), von Normalenrichtungen (Phong-Schattierung), bei Texturen immer in *Weltkoordinaten*! Nicht NDC.

Gegeben Eine Strecke P_1P_2 in NDC (oder Bildschirmkoordinaten) als Bild einer Strecke P_1P_2 in Weltkoordinaten.

An den Endpunkten sind Werte I_1, I_2 gegeben
(Intensitätswerte $I_1^R, I_1^G, I_1^B, ...,$ oder Normalenrichtungen $N_1^x, N_1^y, N_1^z, ...$)
Wir wollen diese Werte für die dazwischen liegenden Punkte der Strecke in Weltkoordinaten interpolieren.

Wir kennen die Transformationsmatrix $M = M^{\text{Welt,NDC}}$:

$$M\begin{pmatrix} x_{\text{Welt}} \\ y_{\text{Welt}} \\ z_{\text{Welt}} \\ w_{\text{Welt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{NDC}} \\ y_{\text{NDC}} \\ z_{\text{NDC}} \\ w_{\text{NDC}} \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{\text{NDC}} \\ y_1^{\text{NDC}} \\ z_1^{\text{NDC}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} x_2^{\text{NDC}} \\ y_2^{\text{NDC}} \\ z_2^{\text{NDC}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \text{ in homogenen Weltkoordinaten} = M^{-1}\begin{pmatrix} x_1^{\text{NDC}} \\ y_1^{\text{NDC}} \\ z_1^{\text{NDC}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\text{Welt}} \\ y_1^{\text{Welt}} \\ z_1^{\text{Welt}} \\ w_1^{\text{Welt}} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x_1^{\text{Welt}}/w_1^{\text{Welt}} \\ y_1^{\text{Welt}}/w_1^{\text{Welt}} \\ z_1^{\text{Welt}}/w_1^{\text{Welt}} \end{pmatrix} \text{ in kartesischen Weltkoordinaten}$$

Annahme: $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear $I(P_1) = I_1 \qquad I(P_2) = I_2$

Betrachte eine „homogene Erweiterung“: $\hat{I} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ von I

$$\hat{I}\left(\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\\ \lambda w\end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \hat{I}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\right) \qquad \hat{I}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}\right) = I\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)$$

1. Die Funktion $\hat{I}$ ist linear;
2. Aus $\hat{I}$ kann man I ausrechnen:

$$I\left(\text{Punkt } \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} \text{ in homogenen Koordinaten}\right) = \frac{1}{w} \cdot \hat{I}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\right)$$

$$I\left(\text{Punkt in homogenen Koordinaten } \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\right) =$$

$$I\left(\text{Punkt in homogenen Koordinaten } \begin{pmatrix}x/w\\ y/w\\ z/w\\ 1\end{pmatrix}\right) = \hat{I}\left(\begin{pmatrix}x/w\\ y/w\\ z/w\\ 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{w} \cdot \hat{I}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\right)$$

$$I\left(\text{Punkt in karthesischen Koordinaten } \begin{pmatrix}x/w\\ y/w\\ z/w\end{pmatrix}\right) =$$

1. Berechne P_1 und P_2 in homogenen Weltkoordinaten:

$$\begin{pmatrix}x_1^{\text{Welt}}\\ y_1^{\text{Welt}}\\ z_1^{\text{Welt}}\\ w_1^{\text{Welt}}\end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix}x_1^{\text{NDC}}\\ y_1^{\text{NDC}}\\ z_1^{\text{NDC}}\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}x_2^{\text{Welt}}\\ y_2^{\text{Welt}}\\ z_2^{\text{Welt}}\\ w_2^{\text{Welt}}\end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix}x_2^{\text{NDC}}\\ y_2^{\text{NDC}}\\ z_2^{\text{NDC}}\\ 1\end{pmatrix}$$

2. Berechne $\hat{I}_1$ und $\hat{I}_2$ an diesem Punkt in $\mathbb{R}^4$

$$I(P_1) = I_1 = \frac{1}{w} \cdot \hat{I}_1$$

$$\boxed{\hat{I}_1 = w_1^{\text{Welt}} \cdot I_1,\ \hat{I}_2 = w_2^{\text{Welt}} \cdot I_2}$$

3. Lineare Interpolation $P(\lambda) = \lambda_2 + (1-\lambda)P_1$ in NDC

Gesucht $I(\lambda) = I(P(\lambda))$

$$\begin{pmatrix}x(\lambda)\\ y(\lambda)\\ z(\lambda)\\ 1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\\ 1\end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{I} = \lambda \cdot \hat{I}_2 + (1-\lambda)\hat{I}_1}$$

$$\boxed{w^{\text{Welt}}(\lambda) = \lambda \cdot w_2^{\text{Welt}} + (1-\lambda)w_1^{\text{Welt}}} \qquad I(\lambda) = \frac{\hat{I}(\lambda)}{w^{\text{Welt}}(\lambda)}$$

Zusammenfassung $w_1^{\text{Welt}}, w_2^{\text{Welt}} =$ letzte Komponente von $M^{-1}\left(\cdots\right)$

$$\boxed{I(\lambda)} = \frac{\overbrace{w_2^{\text{Welt}} \cdot I_2}^{\hat{I}_2} \cdot \lambda + \overbrace{w_1^{\text{Welt}} \cdot I_1}^{\hat{I}_1} \cdot (1-\lambda)}{w_2^{\text{Welt}}\lambda + w_1^{\text{Welt}}(1-\lambda)}$$

Einbau in Füllalgorithmus zusätzlich

FuelleGerade(x_1, $x_2, y, z_1, z_2, w_1, w_2, I_1, I_2$)

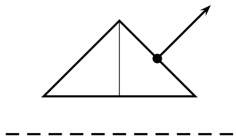
$\hat{I}_1 = w_1 I_1$
$\hat{I}_2 = w_2 I_2$
$\Delta\hat{I} = \ldots$
$\Delta w = \ldots$
$\vdots$
while $x < x_2$
Setpixel($x, y, \ldots, I$)
$x := x + 1$
$z := z + \Delta z$
$\hat{I} := \hat{I} + \Delta I$ // Zaehler
$w := w + \Delta w$ // Nenner
$I = \frac{\hat{I}}{w}$

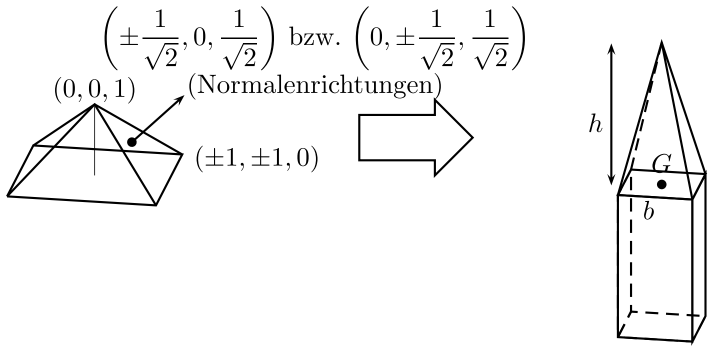
analog für mehrere Größen I^R, I^G, I^B nimmt man $\hat{I}^R$, $\hat{I}^G$, $\hat{I}^B$, w und Δw braucht man nur einmal.

Bemerkung Die z-Koordinate kann man direkt in NDC interpolieren

0.3 Transformation von Normalvektoren bei affinen Transformationen

z. B. Objektkoordinaten auf Weltkoordinaten





$$T = \begin{pmatrix} b/2 & 0 & 0 & g_x \\ 0 & b/2 & 0 & g_y \\ 0 & 0 & h & g_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b}$$

Ebene im Urbildraum

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \vec{n}^T \cdot \vec{x} = c \right\} \qquad \vec{n}\ldots\text{Normalenvektor, } c \in \mathbb{R}$$

$$T(E) = \{\underbrace{A \cdot \vec{x} + b}_{=\bar{x}} \mid \vec{n}^T \cdot \vec{x} = c\}$$

$$Ax + b = \bar{x} \qquad x = A^{-1}(\bar{x} - b)$$

$$
\begin{aligned}
T(E) &= \left\{ \bar{x} \;\middle|\; n^T A^{-1} (\bar{x} - b) = c \right\} \\
&= \left\{ \bar{x} \;\middle|\; n^T A^{-1} \bar{x} = c + n^T A^{-1} b \right\} \\
&= \left\{ \bar{x} \;\middle|\; \underbrace{\left(\left(A^{-1}\right)^T n \right)^T}_{\text{Normalvektor der Ebene} T(E)} \bar{x} = \bar{c} \right\}
\end{aligned}
$$

Bei einer Affinen Transformation mit 3×3-Transformationsmatrix A muss man Nornalvektoren nicht mit A, sondern von links nach rechts mit $(A^{-1})^T$ multiplizieren und anschließend *normieren*. (Vektoren als Spalten betrachten)

Falls A orthogonal ist, dann ist $A^T = A^{-1}$, $(A^{-1})^T = A$