

# **Mitschrift**

## **Computergrafik**

Martin Lenders

17. April 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1.1	Organisatorisches . . . . .	5
1.1.1	Übungsblätter: . . . . .	5
1.1.2	Programmierung . . . . .	5
1.2	Übersicht . . . . .	5
1.2.1	Fahrplan . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Koordinatensysteme, geometrische Transformationen</b>	<b>7</b>
2.1	kartesische Koordinaten . . . . .	7
2.2	Geometrische Transformationen . . . . .	7
2.3	Homogene Koordinaten . . . . .	8
2.3.1	Allgemeine affine Transformation in homogenen Koordinaten . . . . .	9
2.4	Die projektive Ebene . . . . .	9
2.4.1	Geraden in der projektiven Ebene . . . . .	9
2.4.2	Modelle der projektiven Ebene . . . . .	11
2.4.3	Projektive Punkte zu kartesischen Koordinaten . . . . .	12
2.4.4	Allgemeine projektive Transformationen . . . . .	13



# 1 Einführung

## 1.1 Organisatorisches

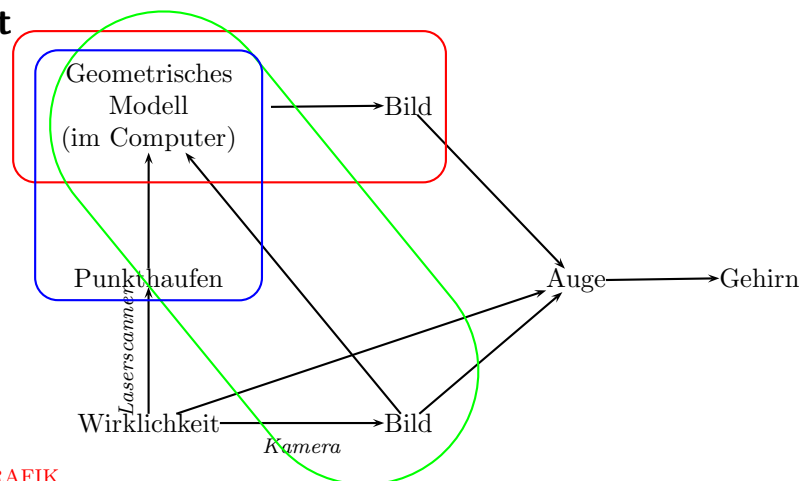
### 1.1.1 Übungsblätter:

- Ausgabe: Mittwoch, Abgabe: Freitag
- Abgabe in Zweiergruppen
- 60% der Punkte müssen erreicht werden
- min. einmal Vorrechnen

### 1.1.2 Programmierung

- Aufgaben in Java gestaltet
- mit OpenGL-Interface
- auf Nachfrage kann auch C/C++ verwendet werden

## 1.2 Übersicht



- **COMPUTERGRAFIK**
- **BILDBEARBEITUNG / BILDERKENNUNG**
- **GEOMETRISCHES RECHNEN / GEOMETRISCHE MODELLIERUNG**

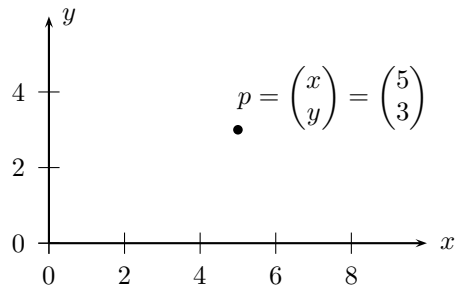
### 1.2.1 Fahrplan

- Koordinatensysteme, geometrische Transformationen
- Licht und Farben
- Rasterung
- Beleuchtung und Schattierung
- rendering-pipeline: vom Modell bis zur gerasterten Bildbearbeitung
- geometrische Modellierung: Kurven, Flächen und Splines
- **Kein Anwendungskurs für OpenGL, JOGL, Javaview etc.!**



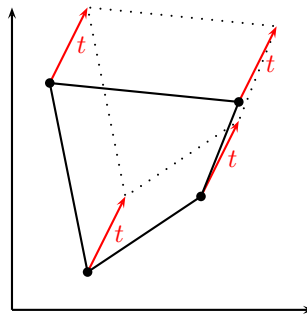
## 2 Koordinatensysteme, geometrische Transformationen

### 2.1 kartesische Koordinaten



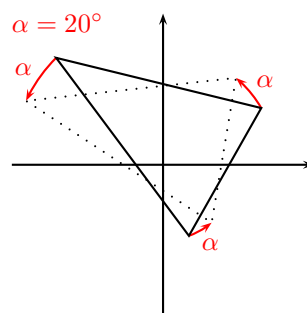
### 2.2 Geometrische Transformationen

- *Translation*:  $p \mapsto p + t$       $t \in \mathbb{R}^2$ , Translationsvektor



- *Rotation* (um den Ursprung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ):

$$p \mapsto M \cdot p \quad M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \text{ Rotationsmatrix}$$



- *Rotation* um den Punkt  $c$ :  $p \mapsto M(p - c) + c = Mp + (c - Mc)$ ,      $c \mapsto c$
- *gleichförmige Skalierung*:

$$p \mapsto \lambda \cdot p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot p, \quad \lambda \neq 0$$

$$\lambda = 1 \quad p \mapsto -p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot p = \text{Spiegelung am Ursprung} = \text{Rotation um } 180^\circ$$

- *Ungleichförmige Skalierung*:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad p \mapsto M \cdot p$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$

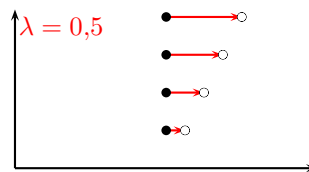
$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  resultiert in der Spiegelung an der  $x$ -Achse

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  resultiert in der Spiegelung an der  $y$ -Achse

- *Scherung*

$$M = \begin{matrix} \text{Scherung auf der } x\text{-Achse} \\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \left( \text{oder} \begin{matrix} \text{Scherung auf der } y\text{-Achse} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$



Flächeninhalt:

- Translationen, Rotationen, Scherungen und Spiegelungen ändern den Flächeninhalt nicht.
- Skalierung ändert den Flächeninhalt um den Faktor  $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

**Definition** Eine Verknüpfung mehrerer dieser Transformationen bildet eine **affine Transformation**. Allgemein ist diese:

$$p \mapsto M \cdot p = b, \quad M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, b \in \mathbb{R}^2, \det M \neq 0$$

Der Flächeninhalt ändert sich um den Faktor  $\det M$

**Definition** Die Verknüpfung von Translation, Rotation und Spiegelung heißt **starre Bewegung** oder **Isometrie**. Allgemein ist diese:

$$p \mapsto Mp + t \text{ mit } \textbf{orthogonaler Matrix } M \text{ (d. h. } \det M = \pm 1)$$

die Isometrien zerfallen:

- **orientierungserhaltende** ( $\det M = 1$ ) und
- **orientierungsumkehrende** ( $\det M = -1$ ) Isometrien

## 2.3 Homogene Koordinaten

**Definition** **Homogene Koordinaten:** Statt  $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  verwendet man eine dritte Koordinate  $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

**Konvention** Die Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$  stellen denselben Punkt dar ( $\lambda \neq 0$ )

Der Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  mit  $z \neq 0$  hat die kartesischen Koordinaten  $\begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$



### 2.3.1 Allgemeine affine Transformation in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & b_1 \\ m_{21} & m_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y + b_1 \\ m_{21}x + m_{22}y + b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen  $M'$  und  $\lambda M'$  beschreiben dieselbe Transformation ( $\lambda \neq 0$ )

$$p \mapsto M'p \text{ mit } M' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \text{ und } \det M' \neq 0$$

$$\det M' \neq 0 \Leftrightarrow m_{33} \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$  o. B. d. A. kann man auch  $m_{33} = 1$  annehmen (Dann kann man die dritte Zeile auch weglassen).

## 2.4 Die projektive Ebene

**Definition** Die (reelle) **projektive Ebene**  $P^2$  besteht aus den Äquivalenzklassen von Punkten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

wobei  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$  denselben Punkt darstellen ( $\lambda \neq 0$ )

### 2.4.1 Geraden in der projektiven Ebene

Gerade in  $\mathbb{R}^2$  (kartesische Koordinaten):

$$y = ax + b \text{ (Gerade darf nicht senkrecht sein)}$$

$$ax + by = -c$$

$$\Updownarrow$$

Gerade in Homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Allgemeine Gleichung einer Geraden in  $P^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = 0 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  die Gleichung erfüllt, dann erfüllt auch  $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$  die Gleichung.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$  stellen dieselbe Gerade dar.

**projektive Punkte**  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Skalierung egal.

**projektive Gerade**  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Skalierung egal

**Satz** Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  liegt auf der Geraden  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

**Satz** Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

**Beweis** Gerade  $\forall \lambda : \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ .

Schnittpunkt:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

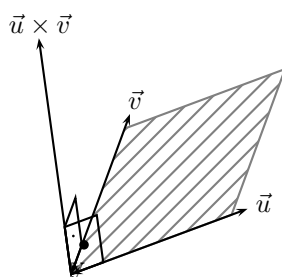
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

Koeffizientenmatrix  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ ,  $\text{rg } A = 2$

$\Rightarrow$  Lösungsmenge ist eindimensional

$$L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist ein projektiver Punkt}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ kann als } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \text{ berechnet werden (Kreuzprodukt)}$$



**Satz** Durch zwei verschiedene Punkte geht es genau eine Geraden

**Beweis** gleich wie oben:  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  mit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  vertauschen.

**Dualitätsprinzip** Man kann in einem Satz der projektiven Geometrie der Ebene „Punkte“ und „Geraden“ vertauschen und es bleibt ein gültiger Satz.

### 2.4.2 Modelle der projektiven Ebene

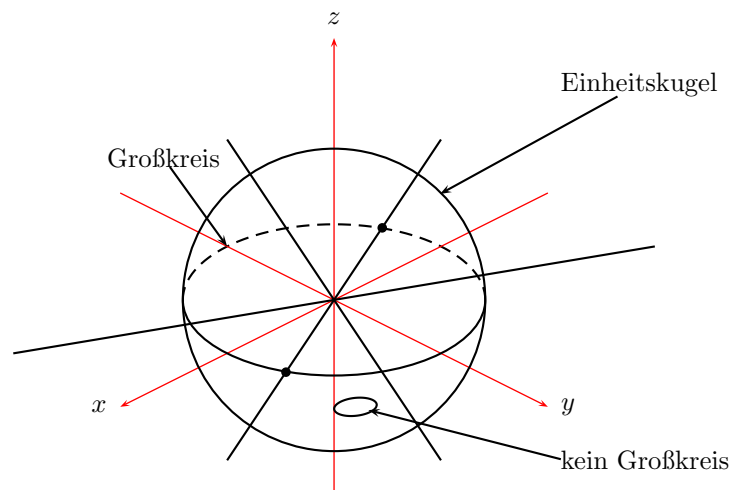
1. *Räumliches Modell der projektiven Ebene*  $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \dots$  Geraden durch den Ursprung im  $\mathbb{R}^3$  entsprechen den projektiven Punkten.



projektive Gerade  $\equiv$  Ebene durch den Ursprung

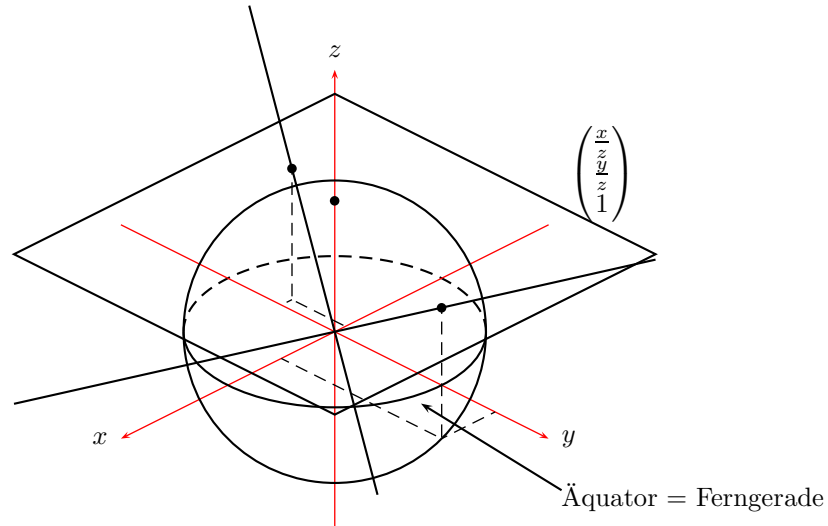
2. *Kugelmodell der projektiven Ebene* entsteht durch Schnitt des räumlichen Modells mit der Einheitskugel

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$



projektiver Punkt  $\equiv$  Paar gegenüberliegender Punkte auf der Einheitskugel  
 projektive Gerade  $\equiv$  Großkreise

## 2.4.3 Projektive Punkte zu kartesischen Koordinaten



Schnitt der Geraden  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \lambda$  im  $\mathbb{R}^3$  mit Ebene  $z = 1$ :  $z \cdot \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{z}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \cdot \frac{1}{z} \\ y \cdot \frac{1}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

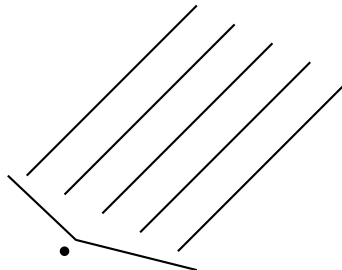
**Satz** Die Punkte  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  mit  $z = 0$  haben *keine* Entsprechung in der euklidischen Ebene: Jede projektive Gerade hat als Bild in der euklidischen Ebene eine Gerade, mit einer Ausnahme: die Gerade  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Definition** Die Punkte des projektiven Raumes, die keine euklidische Entsprechung haben, heißen **Fernpunkte**. Die Gerade  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  **Ferngerade**.

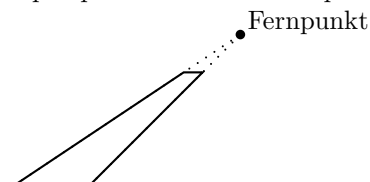
**Satz** Zwei Geraden der euklidischen Ebene sind genau dann *parallel*, wenn ihr Schnittpunkt ein Fernpunkt ist.

**Satz** Die Punkte, die auf der Ferngeraden liegen, sind genau die Fernpunkte

**Satz** Es gibt zu jeder Schaar paralleler Geraden genau einen Fernpunkt.



Anschaulich ist ein Fernpunkt äquivalent zu perspektivischen Sammelpunkten:



### 2.4.4 Allgemeine projektive Transformationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } M = \mathbb{R}^{3 \times 3}, \det M \neq 0$$

(Punkte bleiben Punkte, Geraden bleiben Geraden, Inzidenz bleibt erhalten)

**Definition** Affine Transformationen sind jene Transformationen, bei denen die Fernpunkte Fernpunkte bleiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$\forall x, y : m_{31}x + m_{32}y + m_{33} \cdot 0 = 0 \Rightarrow m_{31} = m_{32} = 0$$

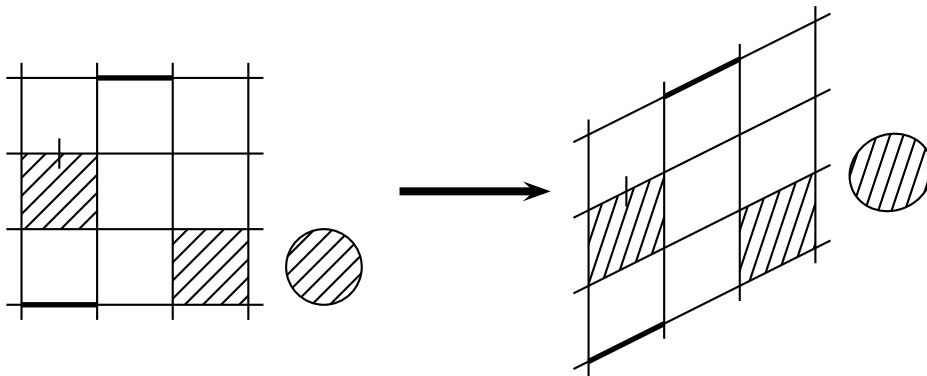
$$\det M \neq 0$$

$$\det M = \underbrace{m_{33}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}}_0 \Rightarrow \text{o. B. d. A. } m_{33} = 1$$

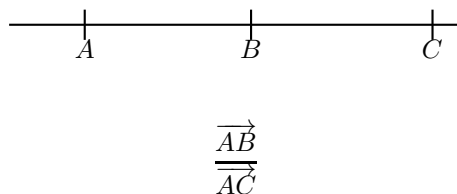
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{lineare Transformation}} + \overbrace{\begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}}^{+ \text{ Translation}}$$

Affine Transformation:

- parallele Geraden bleiben parallel



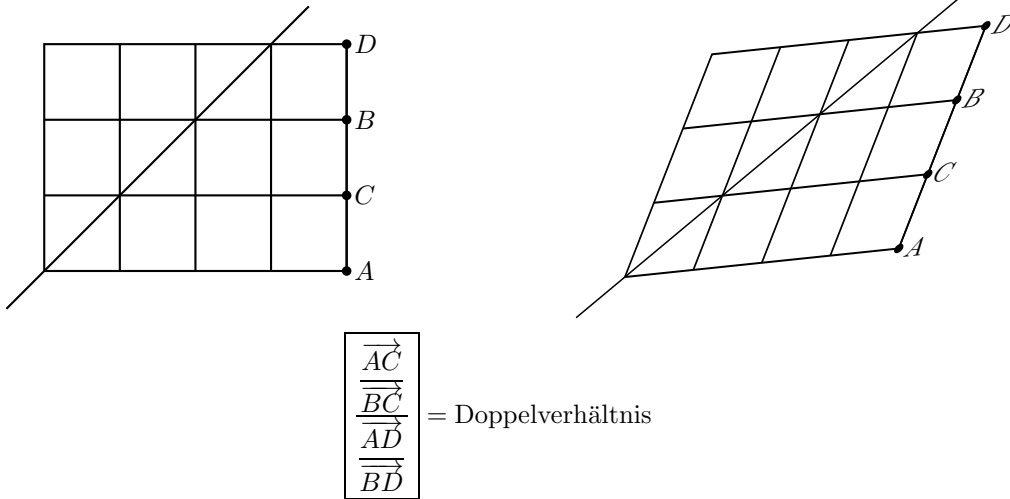
- erhalten das Teilverhältnis auf parallelen Geraden



Starre Bewegungen (Isometrien, euklidische Transformationen):

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal } M^T = M^{-1} \text{ erhalten Längen, Winkel und Flächen}$$

## Doppelverhältnis



**Bemerkung** projektive Transformationen erhalten das sogenannte Doppelverhältnis

**Ausblick** projektiver Raum; wird beschrieben durch homogene Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Kartesische Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  entsprechen homogenen Koordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda \end{pmatrix}$  ( $\lambda \neq 0$ , bel.).