Mitschrift
Computergrafik

Martin Lenders

14. April 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **5**
1.1 Organisatorisches . . . 5
1.1.1 Übungsblätter: . . . 5
1.1.2 Programmierung . . . 5
1.2 Übersicht . . . 5
1.2.1 Fahrplan . . . 5

2 Koordinatensysteme, geometrische Transformationen **7**
2.1 kartesische Koordinaten . . . 7
2.2 Geometrische Transformationen . . . 7
2.3 Homogene Koordinaten . . . 8
2.3.1 Allgemeine affine Transformation in homogenen Koordinaten . . . 9

1 Einführung

1.1 Organisatorisches

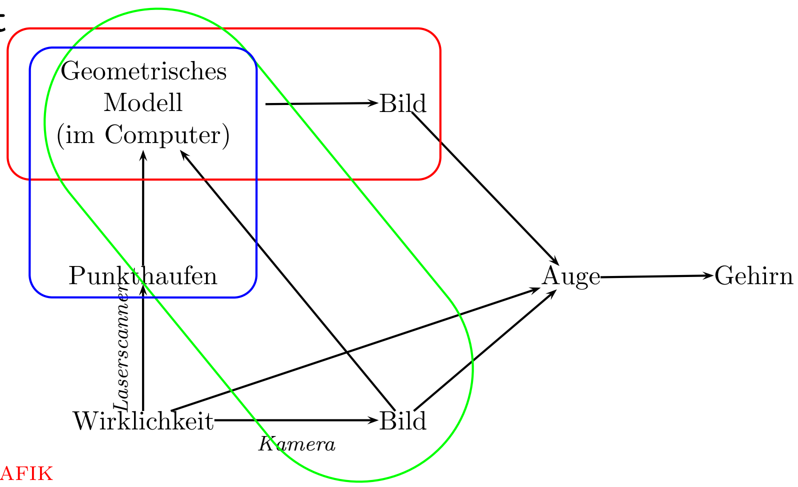
1.1.1 Übungsblätter:

- Ausgabe: Mittwoch, Abgabe: Freitag
- Abgabe in Zweiergruppen
- 60% der Punkte müssen erreicht werden
- min. einmal Vorrechnen

1.1.2 Programmierung

- Aufgaben in Java gestaltet
- mit OpenGL-Interface
- auf Nachfrage kann auch C/C++ verwendet werden

1.2 Übersicht



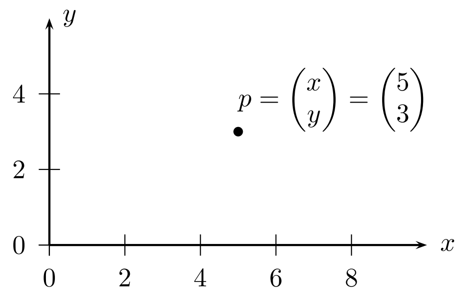
- Computergrafik
- Bildbearbeitung / Bilderkennung
- Geometrisches Rechnen / Geometrische Modellierung

1.2.1 Fahrplan

- Koordinatiensysteme, geometrische Transformationen
- Licht und Farben
- Rasterung
- Beleuchtung und Schattierung
- rendering-pipeline: vom Modell bis zum gerasterten Bildbearbeitung
- geometrische Modellierung: Kurven, Flächen und Splines
- Kein Anwendungskurs für OpenGL, JOGL, Javaview etc.!

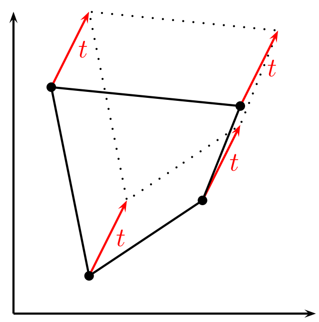
2 Koordinatensysteme, geometrische Transformationen

2.1 kartesische Koordinaten



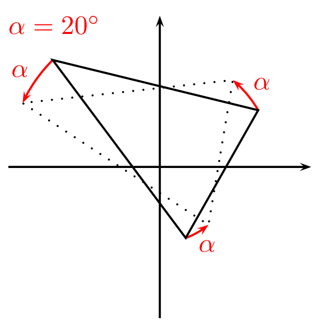
2.2 Geometrische Transformationen

- *Tranlation*: $p \mapsto p + t \qquad t \in \mathbb{R}^2$, Translationsvektor



- *Rotation* (um den Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$):

$$p \mapsto M \cdot p \qquad M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ Rotationsmatrix}$$



- *Rotation* um den Punkt c: $p \mapsto M(p - c) + c = Mp + (c - Mc), \qquad c \mapsto c$
- *gleichförmige Skalierung*:

$$p \mapsto \lambda \cdot p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot p, \qquad \lambda \neq 0$$

$$\lambda = 1 \qquad p \mapsto -p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot p = \text{Spiegelung am Ursprung} = \text{Rotation um } 180°$$

- *Ungleichförmige Skalierung*:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad p \mapsto M \cdot p$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$

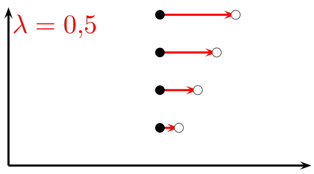
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{resultiert in der Spiegelung an der } x\text{-Achse}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{resultiert in der Spiegelung an der } y\text{-Achse}$$

- *Scherung*

$$M = \overset{\text{Scherung auf der } x\text{-Achse}}{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \left(\text{oder} \quad \overset{\text{Scherung auf der } y\text{-Achse}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$



Flächeninhalt:

- Translationen, Rotationen, Scherungen und Spiegelungen ändern den Flächeninhalt <u>nicht</u>.
- Skalierung ändert den Flächeninhalt um den Faktor $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

Definition Eine Verknüpfung mehrerer dieser Transformationen bildet eine **affine Transformation**. Allgemein ist diese:

$$p \mapsto M \cdot p = b, \qquad M \in \mathbb{R}^{2\times 2}, b \in \mathbb{R}^2, \det M \neq 0$$

Der Flächeninhalt ändert sich um den Faktor $\det M$

Definition Die Verknüpfung von Translation, Rotation und Spiegelung heißt **starre Bewegung** oder **Isometrie**. Allgemein ist diese:

$$p \mapsto Mp + t \text{ mit } \textbf{orthogonaler Matrix } M \text{ (d. h. } \det M = \pm 1)$$

die Isometrien zerfallen:

- **orientierungserhaltende** ($\det M = 1$) und
- **orientierungsumkehrende** ($\det M = -1$) Isometrien

2.3 Homogene Koordinaten

Definition **Homogene Koordinaten**: Statt $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verwendet man eine dritte Koordinate $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Konvention Die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ stellen denselben Punkt dar ($\lambda \neq 0$)

Der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \neq 0$ hat die kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}$

2.3.1 Allgemeine affine Transformation in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & b_1 \\ m_{21} & m_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y + b_1 \\ m_{21}x + m_{22}y + b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen M' und $\lambda M'$ beschreiben dieselbe Transformation ($\lambda \neq 0$)

$$p \mapsto M'p \text{ mit } M' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \text{ und } \det M' \neq 0$$

$$\det M' \neq 0 \Leftrightarrow m_{33} \neq 0 \land \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ o. B. d. A. kann man auch $m_{33} = 1$ annehmen (Dann kann man die dritte Zeile auch weglassen).