Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Definition 1.1.1 (reelle Funktionen mit n Variablen) *Eine Funktion*

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *mit* $(x_1, \ldots, x_n)\,\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $y \in \mathbb{R}$ *heißt reelle Funktion mit mehreren Variablen.*

$\mathbb{D}$ *beschreibt den Definitionsbereich und wir schreiben* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$

Bemerkung 1.1.2 *Definition für Differenzierbarkeit im eindimensionalen Fall: Es sei* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$ f *ist differenzierbar in* x_0*, falls der Grenzwert* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ *existiert. In diesem Fall heißt* $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *die Ableitung von* f *in* x_0 *Man bezeichnet* $f'(x_0)$ *als den Differentialquotienten von* f *im Punkt* x_0*.*

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Definition 1.1.3 $P = (p_1, \ldots, p_n)$ *und* $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ *bezeichnen zwei Punkte im n-dimensionalen Raum* $\mathbb{R}^n$

$|P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n + q_n)^2}$ *heißt Abstand der Punkte* P *und* Q*.*

Die Delta-Umgebung des Punktes P *ist eine Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft* $U_\delta(P) = \left\{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\right\}$*.*

Definition 1.1.4 *Der Punkt* P *heißt innerer Punkt der Menge* M $(M \subset R^n)$*, wenn eine Umgebung des Punktes* P *existiert, für die* $U_\delta \subset M$ *gilt.*

Bemerkung 1.1.5 *Eine Menge heißt <u>offene Menge</u>, wenn dir nur aus inneren Punkten besteht.*

Definition 1.1.6 *Wenn $(x_{0n}, \ldots, x_{0n})$ ein innerer Punkt der Menge D ist und wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ an der Stelle $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ nach x_i partiell differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als partielle Ableitung der Funktion f nach x_i an der Stelle $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$*

Die Funktion f heißt in $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen nach allen Komponenten $x_j (j = 1, \ldots, n)$ existieren.

Die Funktion heißt in $\mathbb{D}$ partiell differenzierbar, wenn f in allen inneren Punkten aus $\mathbb{D}$ partiell differenzierbar ist.

Bemerkung 1.1.7 *Die partielle Ableitung der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ nach der Komponente x_j kann wie folgt bezeichnet werden:*

$f_{x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ *oder* $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}$

Beispiel 1.1.8 *Gesucht sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 * \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) \cdot 2e^{2x_3}$$

Bemerkung 1.1.9 *Die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2)$ berührt die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, f(\bar{x_1}, \bar{x_2}))$ und enthält alle Tangenten an die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P}$.*

Satz 1.1.10 *Es seien $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} -> \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt (x_{01}, x_{02}):*

$$x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02})$$

$$= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.11 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1$

$\to$ *Tangentialebene:* $x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2 \cdot (x_1 - x_{01}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_{02})$

$(x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel 1.1.12 $(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$

$f(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \sin(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot \sqrt[3]{\pi}^2 = -\pi^{\frac{2}{3}}$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot 2\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi} = -2\pi^{\frac{2}{3}}$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} -\pi^{\frac{2}{3}} & -2\pi^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt[3]{\pi} \\ x_2 - \sqrt[3]{\pi} \end{pmatrix} = -\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_1 - \sqrt[3]{\pi}) + -2\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_2 - \sqrt[3]{\pi})$$

$$x_3 = -\pi^{\frac{2}{3}} x_1 - 2\pi^{\frac{2}{3}} x_2 + 3\pi$$

Beispiel 1.1.13 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = |x_1| + x_2$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1$ $|x_1|$ *ist nur für* $x_1 \neq 0$ *differenzierbar, d.h.* f *ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar.*

Definition 1.1.14 (Gradient) *Es sei* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor* $\mathrm{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ *der Gradient von* f *im Punkt* $x \in \mathbb{D} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Bemerkung 1.1.15 *Anstelle von* $\mathrm{grad} f(x)$ *wird auch häufig* $\nabla f(x)$ *geschrieben.*

Beispiel 1.1.16 *Berechnen Sie den Gradienten für:*

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
2. $g(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3$

zu 1. $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

zu 2. $\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2 \cos(x_1 x_2) + x_2 x_3 \\ 2x_1 \cos(x_1 x_2) + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.1.17 *Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.*

Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Im Punkt $(0,0)$ *existieren die partiellen Ableitungen:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta x) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

Aber f *ist in* $(0,0)$ *nicht stetig:*

Es gilt $f(x_1, 0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}$, $f(0, x_2) = 0; x_2 \in \mathbb{R}$

Für $x := x_1 = x_2$*:*

$f(x,x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & (x,x) \neq (0,0) \\ 0 & (x,x) = (0,0) \end{cases}$

Definition 1.1.18 (Stetigkeit) *Die Funktion* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}$ *ist an der Stelle* $\bar{P} = (\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}) \in \mathbb{D}$ *stetig, wenn für den Funktionsgrenzwert*

$$\lim_{P \to \bar{P}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})$$

gilt.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

   $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2 - 1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$

2. Berechnen die den Gradienten der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1-1)\cdot\ln(x_1+1)}{x_2^2+x_3^2+1}$ an der Stelle $(0, 0, 0)$

3. Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion
$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2-(x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ im Punkt
$(0, \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{4}})$

Definition 1.1.19 (k-mal partiell differenzierbar) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt zweimal partiell differenzierbar in x_0, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x_0 wieder partiell differenzierbar sind.*

Man schreibt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$
Dieser Ausdruck heißt dann zweite partielle Ableitung von f.

Allgemein heißt f k-mal partiell differenzierbar, wennn alle (k-1)-ten partiellen Ableitungen von f wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ik}\partial x_{i(k-1)}\ldots\partial x_{i1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{ik}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i(k-1)}\ldots\partial x_{i1}}\right)(x_0) = f_{x_{ik}\ldots x_{i1}}$$

Aufgabe 1.1.20 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2$*
Berechnen Sie alle ersten und zweiten Ableitungen von f und $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2 - x_2^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \cdot 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -2x_1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = +2$$

Definition 1.1.21 (stetig partiell differenzierbar) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$. f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung k stetig sind.*

Satz 1.1.22 (Satz von Schwarz) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle.*

Bemerkung 1.1.23 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Dann spielt die Reihenfolge der Ableitungsvariablen bei der k-ten partiellen Ableitung keine Rolle.*

Aufgabe 1.1.24 *Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$*

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot 2x_1 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) + 2e^{2x_3}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 \left(\cos(x_1^2 + x_2) - 2x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2)\right)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 x_3 \sin(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \sin(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = 4e^{2x_3}$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1 (Betrag eines Vektors) *Der Betrag eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als:*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Definition 1.2.2 (Vektorfunktion) *Eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{D} \to W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$ mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt Vektorfunktion.*

Beispiel 1.2.3 *Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

f hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Definition 1.2.4 (total differenzierbar) *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Die Funktion f heißt total differenzierbar in x_0, falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine Restfunktion $R : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ gibt, für die gilt: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + |x - x_0| \cdot R(x)$ und*

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$$

Satz 1.2.5 (Jacobi-Matrix) *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Weiterhin sei f in x_0 total differenzierbar mit der Matrix*

$$A = (a_{ij}); i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist f in x_0 stetig und alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind in x_0 partiell differenzierbar, wobei gilt: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von f und wird mit $Df(x_0)$ oder $J_f(x_0)$ bezeichnet.

Beispiel 1.2.6 *Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch*

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ \ln(x^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $D_g(x)$:

$$D_g(x) = \begin{pmatrix} 6x^2 \\ \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2.7

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 \cdot \sin x_2 \\ e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

$$D_f(x_1, x_2) = ?$$

Bemerkung 1.2.8 *Nach Definition 1.2.4 kann eine Funktion $f(x)$, die total differenzierbar ist, in der Nähe von x_0 durch*

$$f(x_0) + D_f(x_0)(x - x_0)$$

angenähert werden.

Da die Annäherungsfunktion linear ist, spricht man auch von Linearisierung.

Hierfür muss aber klar sein, dass f auch wirklich total differenzierbar ist.

Satz 1.2.9 *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, deren Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ alle stetig partiell differenzierbar sind. Dann ist f total differenzierbar.*

Beispiel 1.2.10 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 \sin(x_3)$$

$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + x_2\sin(x_3) & x_1^2 + x_1\sin(x_3) & x_1x_2\cos(x_3) \end{pmatrix}$

f soll in der Nähe des Punktes $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$ angenähert werden. Zur Berechnung der Näherung wird benötigt: $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$2 + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - 3$

Aufgabe 1.2.11 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch*

$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1^2\sin(x_2) & e^{x_1x_2} \end{pmatrix}^T$ *(siehe Aufgabe 1.2.7)*

Berechnen Sie die Näherung der Funktion in der Nähe von $x_0 = (1, 0)$

Aufgabe 1.2.12 *Berechnen Sie die Tangentialebenen an die Funktion*

$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_3 - 1)^2}$ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *im Punkt* $(x_{01}, x_{02}, f(x_{01}, x_{02})) = (0, 1, 1)$.

Verwenden Sie dazu zunächst die Formel für die Tangentialebenen und dann die Formel für die totale Differenzierbarkeit.

Definition 1.2.13 (totale Differenzierbarkeit) *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann kann f in der Nähe eines Punktes $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ durch*

$f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$ *angenähert werden.*

Es gilt also $f(x_1,x_2) = f(x_{01},x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01},x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01},x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$

$$f(x_1,x_2) - f(x_{01},x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01},x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=:\Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01},x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=:\Delta x_2}$$

also gilt: $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$
Für „beliebig kleines“ Δx_1 *und* Δx_2 *schreiben wir „d“ statt „Δ“ und „=“ statt „≈“.*

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01},x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01},x_{02}) \cdot dx_2}$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als <u>totales Differenzial</u> der Funktion f.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_n}$$

Bemerkung 1.2.14 *Mit Hilfe des totalen Differentials kann der Einfluss der Änderung der Inputgrößen auf den Funktionswert abgeschätzt werden.*

Beispiel 1.2.15 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1,x_2) = x_1^2 + \sin(x_1 \cdot x_2)$. *Wir betrachten f in der Nähe des Punktes* $f(x_{01},x_{02}) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

Was passiert wenn wir leicht von dem Wert abweichen?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + \cos(x_1 \cdot x_2)x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 \cdot x_2)x_1$$

$df = 2\sqrt{\pi} + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_1 - \sqrt{\pi}) + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_2 - \sqrt{\pi})$ $df = \sqrt{\pi} \cdot dx_1 + (-\sqrt{\pi}) \cdot dx_2$
Veränderung der Inputgrößen z.B. $dx_1 = 0.1$ $dx_2 = -0.1$
$df = 0.2 \cdot \sqrt{\pi}$

Bemerkung 1.2.16 *Durch Einsetzen der Maximalen absoluten Fehler und Bilden der Beträge ergibt sich der (lineare) maximale absolute Fehler:*

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) \right| \cdot |\Delta x_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) \right| \cdot |\Delta x_n|$$

Aufgabe 1.2.17 *Das Volumen V eines geraden Kreiskegels wird berechnet durch:* $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{k^2 - r^2}$.

r... Radius r=1m und absoluter Fehler von 0.01m

k... Mantellinie k=1.5m und der absolute Fehler: 0.005m

Berechnen Sie den (linearen) maximalen absoluten Fehler.

Papula zu Abschnitt 2 S. 332: 12, 13, 15

1.3 Extremwerte

Definition 1.3.1 (Lokales Extremum) *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung.*

(i) *Ein Punkt* $x_0 \in U$ *heißt* lokales Maximum *von* f*, falls* f *in der Nähe von* x_0 *nicht größer wird als bei* x_0*, das heißt:* $f(x) \leq f(x_0)$ *für alle* x *in der Nähe von* x_0.

(ii) *Ein Punkt* $x_0 \in U$ *heißt* lokales Minimum *von* f*, falls* f *in der Nähe von* x_0 *nicht kleiner wird als bei* x_0*, das heißt:* $f(x) \geq f(x_0)$ *für alle* x *in der Nähe von* x_0.

Ein lokales Extremum *ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.*

Bemerkung 1.3.2 *Wie im eindimensionalen Fall liefert die Differentialrechnung nur Informationen über lokale und nicht über globale Extrema.*

Bemerkung 1.3.3 *Es sei* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in (a, b)$ *mit einem lokalen Extremum in* x_0*. Dann ist* $f'(x_0) = 0$.

Satz 1.3.4 *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und* $f : U \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Besitzt* f *in* $x_0 \in U$ *ein lokales Extremum, so gilt:*

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$

Beispiel 1.3.5 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

$\to x_1 = x_2 = 0$

Das heißt falls es ein Extremum gibt, dann liegt es bei (0,0).

Aufgabe 1.3.6

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\cos(x_1) \cdot \sin(x_2) = 0$
$(x_1 = \pi)$ *od.* $\sin(x_2) = 0$

Bemerkung 1.3.7 *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.*

(i) *Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.*

Definition 1.3.8 *Eine Matrix $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, falls gilt:*

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0,$$

also $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$ *für alle $k = 1, \dots, n$.*

A heißt negativ definit, falls -A positiv definit ist.

Beispiel 1.3.9 *Es sei* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\underline{k = 1} : 1 > 0$

$\underline{k = 2} : \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$

$\to$ *A ist positiv definit.*

Aufgabe 1.3.10 $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$-6 < 0 \to$ *B nicht positiv definit*

$-B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{k=1}: 6 > 0$

$\underline{k=2}: \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 2 > 0$

$\to$ *B ist negativ definit.*

Aufgabe 1.3.11 *Prüfen Sie* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *auf positive Definitheit.*

Bemerkung 1.3.12 $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{2\times 2}$ *ist weder positiv noch negativ definit:* $d_{11} \not> 0 \to$ *nicht positiv definit*

$-d_{11} \not> 0 \to$ *nicht negativ definit*

Definition 1.3.13 *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge,* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und* $x_0 \in U$*. Unter der* <u>*Hesse-Matrix*</u> *von* f *in* x_0 *versteht man die Matrix:*

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.3.14 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$*. Gesucht ist die Hesse-Matrix.*

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3.15 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \sin(x_3)$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(0, 0, 0)$ *&* $H_f(1, 1, 0)$*.*

Satz 1.3.16 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $\nabla f(x_0) = 0$.*

(i) *Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.*

(iii) *Ist $\underline{U \subset \mathbb{R}^2}$ und gilt $\det H_f(x_0) < 0$, so liegt kein Extremwert vor.*

Beispiel 1.3.17 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$*

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} := 0 \to x_1 = x_2 = 0$$

$\to (0,0)$ *könnte ein Extremum sein*

Überprüfen durch Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$\to H_f(0,0)$ *positiv definit* $\to$ *in* $(0,0)$ *liegt ein lokales Minimum vor.*

Aufgabe 1.3.18 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$*

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.

Kandidaten: $(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 1.3.19 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$*

Gradient: $$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$$

$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$$

	k_1 *gerade*	k_1 *ungerade*
k_2 *gerade*	*lokales Maximum*	*kein Extremwert*
k_2 *ungerade*	*kein Extremwert*	*lokales Minimum*

Beispiel 1.3.20 (Nebenbedingungen) *Gegeben sei 12m langer Draht, aus dem die Kanten eines Quaders von möglichst großem Volumen hergestellt werden sollen. Gesucht sind die Kantenlängen x_1, x_2, x_3 des optimalen Quaders.*

$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) = 12$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$x_1, x_2, x_3 > 0$

$V = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$

$V = 3x_1x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$

$\mathbb{D} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 3$, $\mathbb{D}$ *ist eine offene Menge*

$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix

*Beispiel ***:*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Stetigkeit in (0,0)

$$\bar{P} \lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})$$

Es gilt: $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} |x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \underbrace{|x \cdot y|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}|}_{\leq 1}$

Aufgabe 1.3.21 *Papula S.332 zu Abschnitt 2 → Aufg. 24*

(i) $f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 13$

(ii) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 3$

(iii) $f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - 25)(x_2 - 2) + 5x_2^2 + 12x_2$

2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionenmit mehreren Variablen

2.1 Zweidimensionale Integralrechnung

Definition 2.1.1 (beschränkt) *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt beschränkt, wenn es ein Rechteck R gibt, sodass $U \subset R$ gilt.*

Bemerkung 2.1.2

Bemerkung 2.1.3 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da ein Volumen betrachtet wird, werden die alten Näherungsrechtecke durch Näherungsquader ersetzt und deren Volumen zusammengezählt.*

U wird also in n kleine Teilbereiche $u_1, \ldots, u_n$ zerlegt. Die Fläche dieser Teilbereiche wird mit $\delta u_1, \ldots, \Delta u_n$ bezeichnet.

Zur Berechnung des Rauminhalts des Quaders wird weiterhin die Quaderhöhe benötigt. Dazu wird ein Punkt $(x_i, y_i) \in U_i$ gewählt und sein Funktionswert $f(x_i, y_i)$ als Höhe des Quaders betrachtet. Das Teilvolumen beträgt dann $f(x_i, y_i) \cdot \Delta u_i$

Falls U_i ein Rechteck ist mit den Seiten Δx_i und Δy_i, so ergibt sich das Teilvolumen

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

Als Näherung für das Gesamtvolumen eribt sich also

$$V_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Hier wurde der gesamte Definitionsbereich U in die n Teilbereiche $U_1, \ldots, U_n$ zerlegt.

Der genaue Wert für das Volumen kann berechnet werden, indem n gegen ∞ geht. Deshalb wird definiert:

$$\int_U f(x,y)dU = \int_U f(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Um klarzustellen, dass es sich um ein zweidimensionales Integral handelt, werden oft die zwei Integralsymbole verwendet:

$$\iint_U f(x,y)dU = \iint_U f(x,y)dxdy$$

Definition 2.1.4 (konvex) *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ oder $U \subset \mathbb{R}^3$ heißt konvex, falls für alle Punkte $x, y \in U$ auch die gesamte Verbindungsstrecke von x nach y in U liegt.*

Bemerkung 2.1.5 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da U beschränkt ist, gibt es einen kleinsten vorkommenden x-Wert a und einen größten vorkommenden x-Wert b.*

Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers bei einem beliebigen x-Wert zwischen a und b wird mit $I(x)$ bezeichnet.

Der Körper, dessen Volumen wir ausrechnen, setzt sich aus all diesen Schnittflächen zusammen. Für jedes $x \in [a,b]$ existiert eine Schnittfläche mit Flächeninhalt $I(x)$, das heißt durch Aufsummieren dieser unendlich vielen Flächeninhalte ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_b^a I(x)dx$$

Der Flächeninhalt von $I(x)$ kann einfach mit einem eindimensionalen Integral berechnet werden.

$$I(x) = \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Satz 2.1.6 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der kleinste in U vorkommende x-Wert und b der größete in U vorkommende x-Wert. Für $x \in [a, b]$ bezeichnen wir den kleinsten y-Wert für den $(x, y) \in U$ gilt, als $y_u(x)$ und den größten y-Wert als $y_o(x)$.*

Dann ist $\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$

Beispiel 2.1.7 (i) $U = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,2]\}$ *und* $f : U \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^2 + y^2$

$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = 2$

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx$$
$$\int_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \right) dx$$
$$\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2^3}{3} \right) dx$$
$$\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x \right]_0^1$$
$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

(ii) $U = \{(x,y) : x \geq 0, x \leq 1, y \leq x, y \geq 0\}$

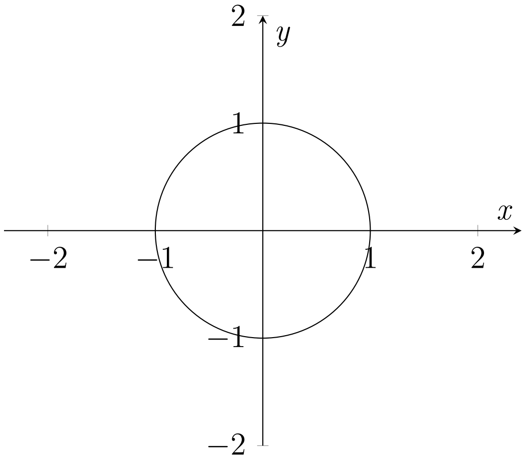
$f : U \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$

$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = x$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x x \cdot \sin(y)dy \right) dx$$
$$\int_0^1 \left(\left[x \cdot -\cos(y) \right]_0^x \right) dx$$
$$-\int_0^1 \left(x \cdot \cos(x) + x \right) dx$$
$$-\left[x \cdot \sin(x) + \cos(x) + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$
$$-\left(1 \cdot \sin(1) + \cos(1) + \frac{1^2}{2} - \cos(0) \right) = -\sin(1) - \cos(1) + \frac{3}{2}$$

(iii) $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$f : U \to \mathbb{R}, f(x, y) = 1$



$$\iint_U (1)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left([y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

Einschub *Substitution:* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\int f(x(t)) \cdot x'(t)dt = \int f(x)dx$

$x(t) = \sin(t) \to t = \arcsin(x)$

$\int f(x)dx = \int \sqrt{1 - x^2}dx = \int f(\sin(t)) \cdot x'(t)dt = \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot \cos(t)dt$

$= \int \cos(t)\cdot\cos(t)dt = \cos(t)\cdot\sin(t) + \int \sin(t)\cdot\sin(t)dt = \int \sin^2(t)dt = \int 1 - \cos^2(t)dt$

$= \cos(t) \cdot \sin(t) + t - \int \cos^2(t)dt$

$\to \int \cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$

Rücksubstitution

$\frac{x}{2} \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$

$\cos(t) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$

$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2}$

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \left[x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$\arcsin(1)-\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

Satz 2.1.8 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der kleinste in U vorkommende y-Wert und b der größte in U vorkommende y-Wert.*

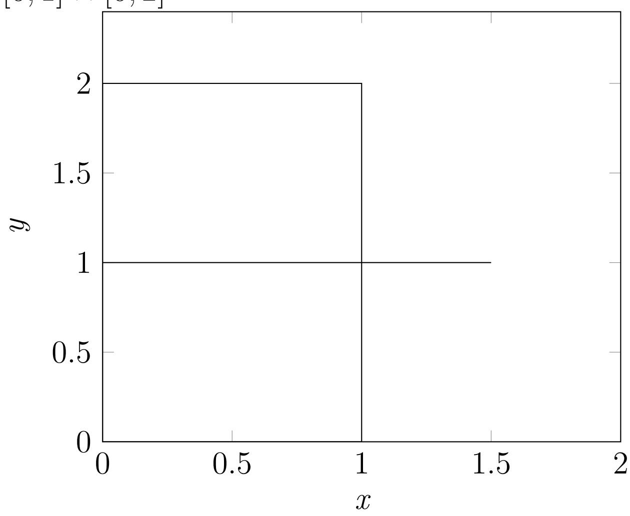
Für $y \in [a;b]$ bezeichnen wir den kleinsten x-Wert, für den $(x,y) \in U$ gilt als $x_u(y)$ und den größten als $x_o(y)$.

Dann ist $\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f(x,y)dx\right) dy$

Beispiel 2.1.9

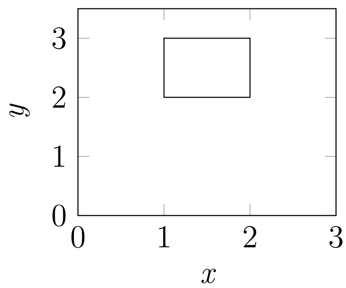
$$\iint_U x^2+y^2 dxdy$$

$U = [0,1]\times[0,2]$



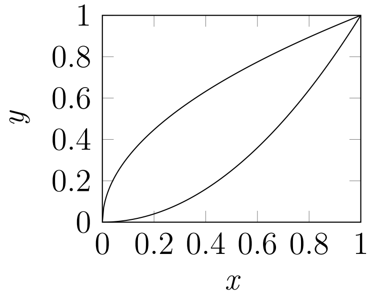
Aufgabe 2.1.10 $f : U \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^2+y$

(i) $U = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3\}$



$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_2^3 (x^2+y)dy\right) dx = \frac{29}{6}$

(ii) $U = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$



$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy\right) dx = \frac{33}{140}$

Einschub (Terassenpunkte) *Jeder Punkt $x_0 \in D_f$ (Definitionsbereich) einer Funktion $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ heißt kritischer Punkt von f.*

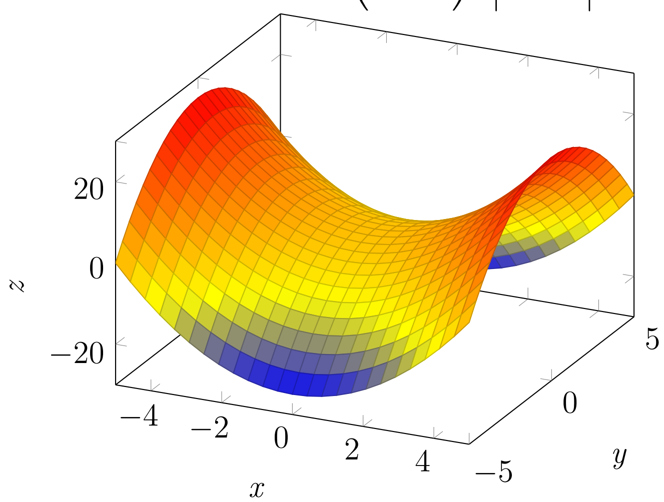
Jeder kritische Punkt, von f, der nicht gleichzeitig ein lokales Extremum ist, heißt Terassenpunkt von f.

Beispiel:

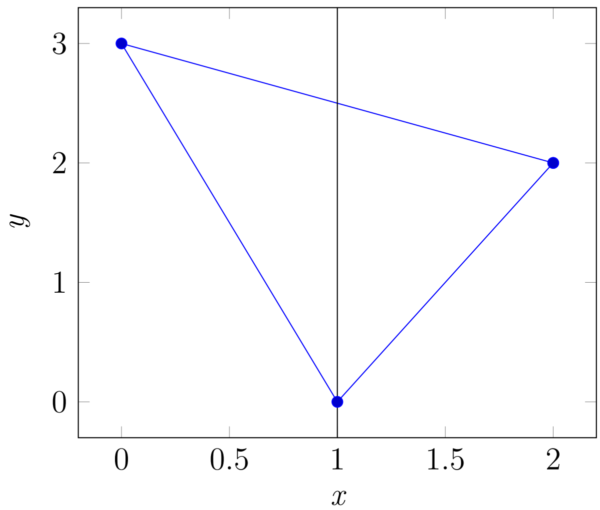
$f(x,y) = x^2 - y^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$

$\to (0,0)$ *ist Kandidat*

Hessematrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{-4 < 0}}$

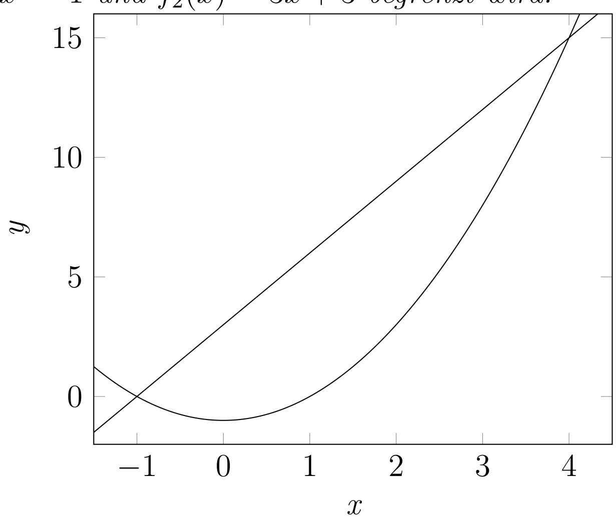


Aufgabe 2.1.11 *Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten* $(2,2), (0,3), (1,0)$



$f_1(x) = -3x + 3$
$f_2(x) = 2x - 2$
$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
$U_1 = \big\{(x, y) : 0 \le x \le 1, f_1(x) \le y \le f_3(x)\big\}$
$U_2 = \big\{(x, y) : 1 \le x \le 2, f_2(x) \le y \le f_3(x)\big\}$
$\int_0^1 \left(\int_{f_1(x)}^{f_3(x)} 1dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_{f_2(x)}^{f_3(x)} 1dy\right) dx$

Aufgabe 2.1.12 *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen* $f_1(x) = x^2 - 1$ *und* $f_2(x) = 3x + 3$ *begrenzt wird.*



$\int_{-1}^4 \left(\int_{x^2-1}^{3x+3} 1dy\right) dx$

Aufgabe 2.1.13 *Berechnen Sie* $\int_0^\infty x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1,\ x_2 > 0$

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^C x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1$$

$$\lim_{c\to\infty}\left(e^{-cx_2}\left(-c-\frac{1}{x_2}\right)+\frac{1}{x_2}\right)$$

$$\lim_{c\to\infty}-\frac{c}{e^{cx_2}}=\lim_{c\to\infty}-\frac{1}{x_2e^{cx_2}}=0$$

$$\int_0^\infty x_1x_2\cdot e^{-x_1x_2}dx_1=\frac{1}{x_2}$$

2.2 Dreidimensionale Integralrechnung

Satz 2.2.1 *Es seien $U\subset\mathbb{R}^3$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f:U\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der in U kleinste vorkommende x-Wert und b der größte.*

Für $x\in[a;b]$ bezeichnen wir den kleinsten y-Wert, für den es ein z gibt, sodass $(x,y,z)\in U$ gilt, mit $y_u(x)$, und den größten mit $y_o(x)$.

Schließlich bezeichnen wir für zulässiges (x,y) mit $z_u(x,y)$ den kleinsten z-Wert, sodass $(x,y,z)\in U$, und mit $z_o(x,y)$ den größten z-Wert. Dann ist

$$\iiint_U f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)}\left(\int_{z_u(x,y)}^{z_o(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

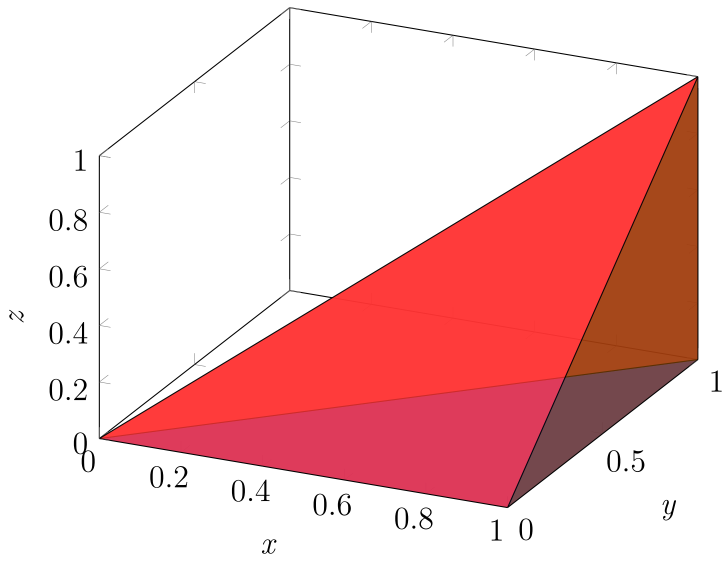
Beispiel 2.2.2 (i) $U=[-1;1]\times[0,1]\times[0,2]$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$int_{-1}^1\left(\int_0^1\left(\int_0^2 x^2+y^2+z^2dz\right)dy\right)dx$

(ii) $U=\{(x,y,z):x,y,z\geq 0,x\leq 1,y\leq x,z\leq y\}$

$f(x,y,z)=x\cdot y^2\cdot z$



$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y xy^2 z dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{70}$

Einschub (Geometrische Betrachtungen zur Tangentialebene) *Die Rolle, die die Kurventangente bei einer Funktion von einer Variablen spielt, übernimmt die sogenannte Tangentialebene bei einer Funktion von zwei Variablen* $z = f(x, y)$. *Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *an die Bildfläche von* $z = f(x, y)$ *angelegten Tangenten. In der unmittelbaren Umgebung ihres Berührungspunktes* P *besitzen Fläche und Tangentialebene im Allgemeinen keinen weiteren gemeinsamen Punkt.*

Herleitung der Funktionsgleichung dieser Tangentialebene in der Form: $z = ax + by + c$

Die unbekannten Koeffizienten a, b, c *werden aus den bekannten Eigenschaften der Tangentialebene bestimmt.*

Fläche und Tangentialebene besitzen im Berührungspunkt P *die gleiche Steigung. Das bedeutet, dass dort die entsprechenden partiellen Ableitungen erster Ordnung übereinstimmen müssen. Die partiellen Ableitungen der Tangentialebene sind* $z_x(x, y) = a$ *und* $z_y(x, y) = b$, *die der Funktion* $z = f(x, y)$ *lauten* $z_x(x, y) = f_x(x, y)$ *und* $z_y(x, y) = f_y(x, y)$. *An der Berührungsstelle* (x_0, y_0) *gilt demnach:* $a = f_x(x_0, y_o)$ *und* $b = f_y(x_0, y_0)$.

Somit sind die Koeffizienten a *und* b *bestimmt.*

Außerdem ist P *ein gemeinsamer Punkt von Fläche und Tangentialebene:* $z_0 = ax_0 + by_0 + c \rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0$

Einsetzen in die Gleichung für die Tangentialebene:

$z = ax + by + z_0 - ax_0 - by_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$

3 Differentialgleichungen

3.1 Einführung

Definition 3.1.1 (Gewöhnliche Differentialgleichungen) *Eine Gleichung der Form* $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ *für eine unbekannte Funktion* $y = f(x)$ *und deren Ableitungen heißt* *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.*

Bemerkung 3.1.2 *Neben gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es auch partielle Differentialgleichungen, diese werden aber in dieser Vorlesung nicht behandelt.*

Beispiel 3.1.3 *Betrachtet wird eine elastische Feder in Gleichgewichtslage. Wird an den Punkt* P_0 *ein Körper der Masse* m *angehängt, so hat die Feder zum Zeitpunkt* t *eine gewisse Auslenkung* $y(t)$*. Unter Vernachlässigung der Reibung gilt für die Rückstellkraft* F *der Feder, die auf die Masse* m *wirkt:* $F = -c \cdot y(t)$*. Dabei bezeichnet* c *die Federkonstante.*

Wegen $F = m \cdot y''(t)$ *gilt:* $m \cdot y''(t) = -c \cdot y(t)$ *also* $m \cdot y''(t) + c \cdot y(t) = 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx \to \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\to |y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \underbrace{e^c}_{c_1}, c_1 \in \mathbb{R}$$

3.2 Trennung der Variablen

Beispiel 3.2.1 *Gegeben sei die Gleichung* $y' = xy$.

Gesucht ist die Funktion $y(x)$.

$y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{dx}{dy} = xy \to_{y \neq 0} \frac{dy}{y} = xdx$

Definition 3.2.2 (Differentialgleichungen mit getrennten Variablen) *Es seien* $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ *offene Intervalle,* $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *und* $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen und* $g(y) \neq 0$

für alle $y \in \mathcal{J}$. Dann heißt die Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Auf diese Differentialgleichung lässt sich das gleiche Verfahren anwenden wie in Beispiel 3.2.1. Es kann eine allgemeine Lösungsformel abgeleitet werden.

Einschub (Klausurtestaufgabe) *Gegeben seien die Funktionen f,g durch* $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2-y \\ 2xy \end{pmatrix}$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y+z) \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel: $D(f \circ g)(x,y) = Df(g(x,y)) \cdot Dg(x,y)$.

Hinweis: Zur Berechnung von $Df(g(x,y))$ berechnen Sie zunächst $Df(x,y,z)$ und setzen Sie anschließend den Ergebnisvektor von $g(x,y)$ ein.

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y+z) & \cos(y+z) \end{pmatrix}$$

$$Df(x+y, x^2-y, 2xy) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x^2-y+2xy) & \cos(x^2-y+2xy) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 2\cos\alpha(x+y) & \cos\alpha(2x-1) \end{pmatrix}$$

Papula S. 519 zu Abschnitt 1 Aufg. 1; S. 520 zu Abschnitt 2 Aufg. 4a+d,5a+c

3.5 Lineare Differentialgleichungen

Definition 3.5.1 (Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung) *Es seien $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}; \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Gleichung*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

heißt homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Ist weiterhin $b : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so heißt die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Definition 3.5.2 (linear unabhängig) *Eine Menge von Funktionen $\{y_1, \ldots, y_n\}$ heißt linear unabhängig, wenn man keine Funktion aus den anderen linear kombinieren kann, d.h. für eine beliebige Funktion y_i gibt es keine Kombination der Form $y_i(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_{i-1} y_{i-1}(x) + c_{i+1} y_{i+1}(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.*

Falls man ein y_i aus den anderen Funktionen linear kombinieren kann, heißt die Menge linear abhängig.

Beispiel 3.5.3 *Es sei $n = 2, y_1(x) = \sin(x), y_2(x) = 17\sin(x)$*

Dann ist $\{y_1, y_2\}$ linear abhängig, da für $c = 17$ gilt: $y_2 = cy_1$.

Satz 3.5.4 (Wronski-Determinante) *Es sei L_H die Lösungsmenge einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dann gibt es n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung und es gilt: $L_H = \{c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\} | c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.*

Aus den Grundlösungen $y_1, \ldots, y_n$ lässt sich also mit Hilfe von Linearkombinationen die gesamte Lösungsmenge berechnen.

Weiterhin sind n Lösungen $y_1, y_n \in L_H$ genau dann linear unabhängig, wenn für die Wronski-Determinante folgendes gilt:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Dabei genügt schon $W(x) \neq 0$ für ein x.

Aufgabe 3.5.5 *Berechnen Sie die Wronski-Determinante*

(i) $n = 2, y_1(x) = x, y_2(x) = x^2$

(ii) $n = 3, y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^2$

(iii) $n = 2, y_1(x) = \sin(x), y_2(x) = 17\sin(x)$

Definition 3.5.6 (Fundamentalsystem) *Sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängige Funktionen einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung, dann heißt die Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.*

3.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.6.1 (lin. homo. Differentialgleichung mit konst. Koeffizienten) *Die Gleichung $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ heißt lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.*

Bemerkung 3.6.2 *Für die Gleichung*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

wird ein Ansatz verwendet, der eine e-Funktion enthält.

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$

Differenzieren und Einsetzen des Ansatzes führt zu:

$e^{\lambda x} \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)} = 0$

wird 0, falls λ eine Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ist.

Definition 3.6.3 (charakteristisches Polynom) *Es sei $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.*

Dann heißt das Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ charakteristisches Polynom der Differentialgleichung.

Satz 3.6.4 *Es sei $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(x)$, dann ist $y(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung.*

Aufgabe 3.6.5 (i) *Zu lösen ist:* $y'' - 3y' + 2y = 0$

$P(x) = x^2 - 3x + 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}$

(ii) *Zu lösen ist* $y''' - y'' - 2y' = 0$

Satz 3.6.6 *Es sei* $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$ *eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom* $P(x)$ n *verschiedene reelle Nullstellen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *hat. Dann bilden die Funktionen* $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$ *ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Jede Lösung der Differentialgleichung hat deshalb die Form* $y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n \cdot e^{\lambda_n x}$ *mit* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.6.7 *Zu lösen ist* $y'' - 2y' + y = 0$

$P(x) = x^2 - 2x + 1, \lambda_{1,2} = 1$

$y_1(x) = e^x$

Ansatz für die zweite Lösung: $y_2(x) = x \cdot e^x$

Satz 3.6.8 *Es sei* $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$ *eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom* $P(x)$ *habe* k *reelle Nullstellen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *mit* $P(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\ldots(x-\lambda_k)^{m_k}$, *d.h.* λ_j *ist* m_j*-fache Nullstelle von* P. *Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1} \cdot e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, x \cdot e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2-1} \cdot e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \qquad \vdots \\ e^{\lambda_k x}, x \cdot e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x} \end{array}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Aufgabe 3.6.9 (i) *Zu lösen ist* $y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

Lösung:

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ *(3-fache NST)*

$y_1(x) = e^{0x} = 1$

$y_2(x) = e^x$

$y_3(x) = x \cdot e^x$

$y_3(x) = x^2 \cdot e^x$

(ii) *Zu lösen ist das folgende Anfangswertproblem:*

$y'' - 4y' + 4y = 0$ *mit* $y(0) = 1, y'(0) = 1$

Bemerkung 3.6.10 *Liegt eine inhomogene Differentialgleichung mit Störfunktion* $b(x)$ *vor, so kann in einigen Fällen eine geeignete Ansatzfunktion zur Lösung der Differentialgleichung verwendet werden:*

Liegt zum Beispiel die Störfunktion in der folgenden Form vor $b(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, so kann die folgende Ansatzfunktion verwendet werden:*

$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Beispiel 3.6.11 *Zu lösen ist* $y''' - 3y' - 2y = 4x^2$

Zunächst homogene Differentialgleichung betrachten: $y''' - 3y' - 2y = 0, P(x) = x^3 - 3x - 2$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $y(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Ansatz für die Störfunktion: Da $b(x) = x^2$ *ein Polynom 2. Grades ist, wird der Ansatz* $\underbrace{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}_{y_P}$ *verwendet.*

$y_P{}''' = 0, y_P{}'' = 2\alpha_2, y_P{}' = 2\alpha_2 x + \alpha_1$

$-6\alpha_2 x - 3\alpha_1 - 2\alpha_2 x^2 - \alpha_1 x - 2\alpha_0 = 4x^2$

$x^2 \underbrace{(-2\alpha_2)}_{4} + x \underbrace{(-6\alpha_2 - \alpha_1)}_{0} + \underbrace{(-3\alpha_1 - 2\alpha_0)}_{0} = 4x^2 + 0x + 0$

$\alpha_2 = -2, \alpha_1 = 6, \alpha_0 = -9$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $y(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} - 2x^2 + 6x - 9,\ x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3.6.12 *Lösen Sie* $y''' - 3y' - 2y = 100\sin(2x)$

$b(x) = a \cdot \sin(cx) + b \cdot \cos(cx) \rightarrow$ *Ansatz:* $\alpha \cdot \sin(cx) + \beta \cdot \cos(cx)$

Lösung:

$y_p(x) = \alpha \cdot \sin(cx) + \beta \cdot \cos(cx); cx = 2$

Koeffizientenvergleich:

$\alpha = -1, \beta = 7$

$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-x} - \sin(2x) + 7\cos(2x); x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1 \rightarrow 1 = c_1 \cdot 1 + 0 \rightarrow c_1 = 1$

$y'(0) = 1 \rightarrow y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 \cdot x \cdot e^{2x} = 1$

$c_2 \cdot xe^{2x}$
$c_2(1e^{2x} + x \cdot 2e^{2x})$

3.7 Differentialgleichungssysteme (DGLS)

Definition 3.7.1 (Differentialgleichungssysteme) *Ein System von m Gleichungen, dass die unbekannten Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ sowie deren Ableitungen* $y_1{}'(x), y_1{}''(x), \ldots, y_1{}^{(n_1)}(x), \ldots, y_m{}'(x), y_m{}''(x), \ldots, y_m{}^{(n_m)}(x)$ *enthält, heißt* <u>*Differentialgleichungssystem*</u>*.*

Beispiel 3.7.2 *Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem*

$$y_1{}' = -2y_1 + 8y_2 \; (*)$$
$$y_2{}' = -4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \; (**)$$

Eliminationsmethode:

$(*)$ *ableiten:* $y_1{}'' = -2y_1{}' + 8y_2{}'$
$(**)$ *einsetzen:* $y_1{}'' = -2y_1{}' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64$
$y_1' = -2y_1 + 8y_2 \; (*)$
$y_2' - 4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \; (**)$
$y_1'' = -2y_1 + 8(-4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8)$
$= -2y_1' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64 \quad \overline{(*)}'$
$(*)$ *umstellen nach* y_2
$y_2 = \frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1$
Einsetzen in $\overline{(*)}'$
$\rightarrow y_1'' = -2y_1' = -32y_1 + 48(\frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1) + 80x^2 + 128x - 64$
$y_1'(-2+6) + y_1(-32+12) + 89x^2 + 128x - 64$
$\rightarrow y_1''' - 4y_1' + 20y_1 = 80x^2 + 128x - 64 \; (***)$
$\rightarrow$ *homogene DGL* $\rightarrow$ *charakteristisches Polynom:* $P(x) = x^2 - 4x + 20$
$a = 0; b = -4; c = 20$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm 4i$
$y_1 = \cos(4x) \cdot e^{2x}$
$y_2 = \sin(4x) \cdot e^{2x}$ *(Eulersche Form)*
$e^{\lambda x} = e^{(2+4i)x} = e^{2x}(\cos(4x) + i\sin(4x))$

Ansatz für die inhomogene Lösung:

$y_p = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$

$y_p' = 2\alpha_2 x + \alpha_1, y_p'' = 2\alpha_2, y_p'''(x) = 0$

Einsetzen in $(***)$ *für* y_1, y_1', y_1''

$2\alpha_2 - 4(2\alpha_2 x + \alpha_1) + 20(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) = 80x^2 + 128x - 64$

Sortieren: $x^2(20\alpha_2) + x(-8\alpha_2 + 20\alpha_1) + (2\alpha_2 - 4\alpha_1 + 20\alpha_0)$

Koeffizientenvergleich $20\alpha_2 = 80$ *usw.*

$\alpha_0 = -2, \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 4$

$y_1(x) = \underbrace{c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x}}_{\text{Homogone LSG}} + \underbrace{4x^2 + 8x - 2}_{\text{Partikuläre LSG}} \; (****)$

$x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_2 = \frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1$

$y_1'(x) = -4c_1 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 2c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 4c_2 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 2c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 8x + 8$

$= e^{2x} \cdot \cos(4x)(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2) + e^{2x} \cdot \sin(4x)(-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2) + x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

Vektorschreibweise:

$c_1 = 2D_1$

$c_2 = 2D_2$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D_1 \\ D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x} \cdot \cos(4x) + \begin{pmatrix} 2D_2 \\ -D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x} \cdot \sin(4x) + \begin{pmatrix} 4x^2 + 8x - 2 \\ x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R} D_i \in \mathbb{R}$

4 Numerische Methoden

4.1 Numerische Methoden

Beispiel 4.1.1 *Gegeben ist die DGL mit Anfangsbedingung* $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Gesucht ist die Lösung $y(x)$ *im Bereich von* $x = x_0 = a$ *bis* $x = x_n = b$ *die durch den Punkt* $P_0(x_0, y_0)$ *geht.*

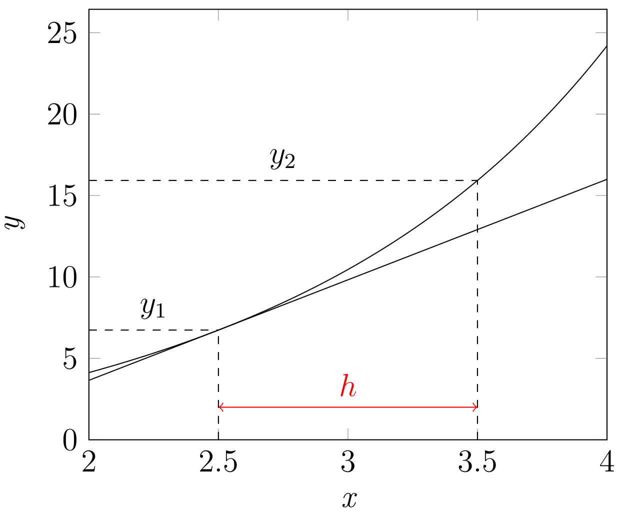
Das Intervall $[a, b]$ *wird in* n *Teilintervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *unterteilt mit* $x_{i+1} = x_i + h, (i = 0, 1, \ldots, n-1), h = \frac{b-a}{n}$.

Da die Schrittweite h *hier immer gleich groß ist, wird von äquidistanten Stützstellen gesprochen.*

Zunächst wird das Intervall $[x_0, x_1]$ *betrachtet. Die gesuchte Funktion* $y(x)$ *verläuft durch den Punkt* P_0.

In diesem Punkt hat sie die Steigung $y_0' = f(x_0, y_0)$.

Mit Hilfe der Tangente in P_0*, die diese Steigung* y_0' *hat, kann der Punkt* $P_1(x_1, y_1)$ *bestimmt werden.*



Dieser Punkt wird im allgemeinen nicht auf der unbekannten exakten Lösungskurve

$y = y(x)$ liegen. Der Näherungswert y_1 wird von dem exakten Wert verschieden sein, und zwar im allgemeinen umso mehr, je größer die Schrittweite h gewählt wurde.

Da $y'(x) = f(x, y(x))$ gilt und damit $f(x, y(x))$ genau die Steigung $y'(x)$ der gesuchten exakten Lösung $y(x)$ ist, gilt näherungsweise für $h \neq 0$: $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$

oder $y(x + h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y(x))$.

Es gilt also $y_1 = y_0 + h \cdot y'_0$.

Die Schrittweite h muss nicht fest gewählt werden, es können auch verschiedene Schrittweiten h_i gewählt werden mit $x_{i+1} = x_i + h_i (i = 0, \ldots, n-1)$.

4.2 Polygonzugverfahren von Euler

Wenn äquidistante Stützstellen $x_i = x_0 + i \cdot h (i = 1, \ldots, n)$ verwendet werden, wird die beschriebene Methode $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ das Polygonzugverfahren von Euler genannt.

Algorithmus: (Polygonzugverfahren von Euler)

Gegeben: Schrittweite von $h = \frac{b-a}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Berechne für $i = 0, \ldots, n-1$

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

Beispiel 4.2.1 *Gegeben sei $y' = x \cdot y$ mit $y(0) = 1$.*

Exakte Lösung: $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$ (Δ).

$x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$

$x_1 = x_0 + h = 0.1$

$y_1 = y_0 + h \cdot \underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0 \cdot y_0} = 1 + 0.1 \cdot 0 \cdot 1 = 1$

$x_2 = x_1 + h = 0.2$

$y_2 = y_1 + h \cdot \underbrace{f(x_1, y_1)}_{x_1 \cdot y_1} = 1 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 1 = 1.01$

$h = 0.1$

x	$y(x)$	y_i
0.0		
0.1		
0.2		
0.3		
0.4		
0.5		
0.6		
0.7		
0.8		
0.9		
1.0		

Skizzieren sie den Vergleich zwischen $y(x)$ und $y_i(h = 0.1)$

$h = 0.05$

4.3 Runge-Kutta-Verfahren

Mit der am linken Randpunkt P_0 des betreffenden Intervalls berechneten Steigung $f(x_i, y_i)$ wird bis zur Mitte $y_i + \frac{h}{2}$ des Intervalls gegangen.
Dort wird die Steigung im Punkt $P_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$ berechnet, die in der folgenden Form dargestellt werden kann:
$\frac{k_2}{2} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$ mit $k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$.
Nun wurd erneut vom linken Randpunkt P_0 aus mit der neuen Richtung bis zum Punkt P_2 in der Mitte des Intervalls gegangen, dessen Koordinaten $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$ sind.
Mit der in P_2 berechneten Steigung $f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) = \frac{k3}{h}$ wird vom linken Randpunkt aus bis zum Punkt $P_3(x_i + h, y_i + k3)$ gegangen, in dem ebenfalls die Steigung $f(x_i + h, y_i + k_3) = \frac{k_4}{h}$ berechnet wird.