

1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Definition 1.1.1 (reelle Funktionen mit n Variablen) Eine Funktion $y = f(x_1, \dots, x_n)$ mit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion mit mehreren Variablen. \mathbb{D} beschreibt den Definitionsbereich und wir schreiben $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$

Bemerkung 1.1.2 Definition für Differenzierbarkeit im eindimensionalen Fall: Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ f ist differenzierbar in x_0 , falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die Ableitung von f in x_0 . Man bezeichnet $f'(x_0)$ als den Differentialquotienten von f im Punkt x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definition 1.1.3 $P = (p_1, \dots, p_n)$ und $Q = (q_1, \dots, q_n)$ bezeichnen zwei Punkte im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n

$|P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}$ heißt Abstand der Punkte P und Q .

Die Delta-Umgebung des Punktes P ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n mit der Eigenschaft $U_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\}$.

Definition 1.1.4 Der Punkt P heißt innerer Punkt der Menge M ($M \subset \mathbb{R}^n$), wenn eine Umgebung des Punktes P existiert, für die $U_\delta \subset M$ gilt.

Bemerkung 1.1.5 Eine Menge heißt offene Menge, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

Definition 1.1.6 Wenn (x_{01}, \dots, x_{0n}) ein innerer Punkt der Menge D ist und wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$ nach x_i partiell differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als partielle Ableitung der Funktion f nach x_i an der Stelle $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$

Die Funktion f heißt in $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$ partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen nach allen Komponenten x_j ($j = 1, \dots, n$) existieren.

Die Funktion heißt in \mathbb{D} partiell differenzierbar, wenn f in allen inneren Punkten aus \mathbb{D} partiell differenzierbar ist.

Bemerkung 1.1.7 Die partielle Ableitung der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ nach der Komponente x_j kann wie folgt bezeichnet werden:

$$f_{x_j}(x_1, \dots, x_n) \text{ oder } \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

Beispiel 1.1.8 Gesucht sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) \cdot 2e^{2x_3}$$

Bemerkung 1.1.9 Die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2)$ berührt die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ und enthält alle Tangenten an die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt \bar{P} .

Satz 1.1.10 Es seien $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt (x_{01}, x_{02}) :

$$\begin{aligned} x_3 &= f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02}) \\ &= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 1.1.11 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1$$

→ Tangentialebene: $x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2 \cdot (x_1 - x_{01}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_{02})$

$$(x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel 1.1.12 $(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$

$$f(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \sin(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot \sqrt[3]{\pi}^2 = -\pi^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot 2\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi} = -2\pi^{\frac{2}{3}}$$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} -\pi^{\frac{2}{3}} & -2\pi^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt[3]{\pi} \\ x_2 - \sqrt[3]{\pi} \end{pmatrix} = -\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_1 - \sqrt[3]{\pi}) + -2\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_2 - \sqrt[3]{\pi})$$

$$x_3 = -\pi^{\frac{2}{3}}x_1 - 2\pi^{\frac{2}{3}}x_2 + 3\pi$$

Beispiel 1.1.13 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = |x_1| + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1 |x_1|$ ist nur für $x_1 \neq 0$ differenzierbar, d.h. f ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar.

Definition 1.1.14 (Gradient) Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

Dann heißt der Vektor $\text{grad}f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ der Gradient von f im Punkt $x \in \mathbb{D} = (x_1, \dots, x_n)$.

Bemerkung 1.1.15 Anstelle von $\text{grad}f(x)$ wird auch häufig $\nabla f(x)$ geschrieben.

Beispiel 1.1.16 Berechnen Sie den Gradienten für:

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

2. $g(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3$

zu 1. $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

zu 2. $\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2 \cos(x_1 x_2) + x_2 x_3 \\ 2x_1 \cos(x_1 x_2) + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.1.17 Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.

Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Im Punkt $(0, 0)$ existieren die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta x) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

Aber f ist in $(0, 0)$ nicht stetig:

Es gilt $f(x_1, 0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}, f(0, x_2) = 0; x_2 \in \mathbb{R}$

Für $x := x_1 = x_2$:

$$f(x, x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & (x, x) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, x) = (0, 0) \end{cases}$$

Definition 1.1.18 (Stetigkeit) Die Funktion $y = f(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$ ist an der Stelle $\bar{P} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{D}$ stetig, wenn für den Funktionsgrenzwert

$$\lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

gilt.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2-1)^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$
2. Berechnen die den Gradienten der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1-1) \cdot \ln(x_1+1)}{x_2^2 + x_3^2 + 1}$ an der Stelle $(0, 0, 0)$
3. Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2-1)^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ im Punkt $(0, \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{4}})$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1 (Betrag eines Vektors) Der Betrag eines Vektors $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Definition 1.2.2 (Vektorfunktion) Eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$ mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt Vektorfunktion.

Beispiel 1.2.3 Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

f hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Definition 1.2.4 (total differenzierbar) Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Die Funktion f heißt total differenzierbar in x_0 , falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine Restfunktion $R : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, für die gilt: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + |x - x_0| \cdot R(x)$ und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$$

Satz 1.2.5 (Jacobi-Matrix) Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Weiterhin sei f in x_0 total differenzierbar mit der Matrix

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist f in x_0 stetig und alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind in x_0 partiell differenzierbar, wobei gilt: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von f und wird mit $Df(x_0)$ oder $J_f(x_0)$ bezeichnet.

Beispiel 1.2.6 Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ \ln(x^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $D_g(x)$:

$$D_g(x) = \begin{pmatrix} 6x^2 \\ \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2.7

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 \cdot \sin x_2 \\ e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

$$D_f(x_1, x_2) = ?$$

Bemerkung 1.2.8 Nach Definition 1.2.4 kann eine Funktion $f(x)$, die total differenzierbar ist, in der Nähe von x_0 durch

$$f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

angenähert werden.

Da die Annäherungsfunktion linear ist, spricht man auch von Linearisierung.

Hierfür muss aber klar sein, dass f auch wirklich total differenzierbar ist.

Satz 1.2.9 Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, deren Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m alle stetig partiell differenzierbar sind. Dann ist f total differenzierbar.

Beispiel 1.2.10 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 \sin(x_3)$$

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 + x_2 \sin(x_3) & x_1^2 + x_1 \sin(x_3) & x_1 x_2 \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

f soll in der Nähe des Punktes $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$ angenähert werden. Zur Berechnung der Näherung wird benötigt: $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

1.3 Extremwerte

Definition 1.3.1 (Lokales Extremum) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

- (i) Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt lokales Maximum von f , falls f in der Nähe von x_0 nicht größer wird als bei x_0 , das heißt: $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x in der Nähe von x_0 .
- (ii) Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt lokales Minimum von f , falls f in der Nähe von x_0 nicht kleiner wird als bei x_0 , das heißt: $f(x) \geq f(x_0)$ für alle x in der Nähe von x_0 .

Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Bemerkung 1.3.2 Wie im eindimensionalen Fall liefert die Differentialrechnung nur Informationen über lokale und nicht über globale Extrema.

Bemerkung 1.3.3 Es sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ mit einem lokalen Extremum in x_0 . Dann ist $f'(x_0) = 0$.

Satz 1.3.4 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt:

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

$$\text{d.h. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

Beispiel 1.3.5 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

$$\rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

D.h. falls es ein Extremum gibt, dann liegt es bei $(0, 0)$.

Aufgabe 1.3.6

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

Bemerkung 1.3.7 Es sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.

- (i) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Definition 1.3.8 Eine Matrix $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit,

$$\text{falls gilt: } a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0, \text{ also } \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} >$$

0 für alle $k = 1, \dots, n$.

A heißt negativ definit, falls $-A$ positiv definit ist.

Beispiel 1.3.9 Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\underline{k=1} : 1 > 0$$

$$\underline{k=2} : \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

$\rightarrow A$ ist positiv definit.

Aufgabe 1.3.10 $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$-6 < 0 \rightarrow B \text{ nicht positiv definit}$$

$$-B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k=1} : 6 > 0$$

$$\underline{k=2} : \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 2 > 0$$

$\rightarrow B$ ist negativ definit.

Aufgabe 1.3.11 Prüfen Sie $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ auf positive Definitheit.

Bemerkung 1.3.12 $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{2 \times 2}$ ist weder positiv noch negativ definit: $d_{11} \not> 0$

\rightarrow nicht positiv definit

$-d_{11} \not> 0 \rightarrow$ nicht negativ definit

Definition 1.3.13 Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$. Unter der Hesse-Matrix von f in x_0 versteht man die Matrix:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.3.14 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Gesucht ist die Hesse-Matrix.

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3.15 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \sin(x_3)$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(0, 0, 0)$ & $H_f(1, 1, 0)$.

Satz 1.3.16 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $\nabla f(x_0) = 0$.

- (i) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.
- (iii) Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ und gilt $\det H_f(x_0) < 0$, so liegt kein Extremwert vor.

Beispiel 1.3.17 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} := 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\rightarrow (0, 0)$ könnte ein Extremum sein

Überprüfen durch Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$\rightarrow H_f(0, 0)$ positiv definit \rightarrow in $(0, 0)$ liegt ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 1.3.18 Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.

Kandidaten: $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 1.3.19 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$

$$\text{Gradient: } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$$

$$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$$

	k_1 gerade	k_1 ungerade
k_2 gerade	lokales Maximum	kein Extremwert
k_2 ungerade	kein Extremwert	lokales Minimum

Beispiel 1.3.20 (Nebenbedingungen) Gegeben sei 12m langer Draht, aus dem die Kanten eines Quaders von möglichst großem Volumen hergestellt werden sollen. Gesucht sind die Kantenlängen x_1, x_2, x_3 des optimalen Quaders.

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

$$V = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$$

$$V = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$$

$$\mathbb{D} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 3, \mathbb{D} \text{ ist eine offene Menge}$$

$$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1 x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1 x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix

Aufgabe 1.3.21 Papula S.332 zu Abschnitt 2 -j Aufg. 24

$$1. f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 13$$

$$2. f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 3$$

$$3. f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - 25)(x_2 - 2) + 5x_2^2 + 12x_2$$