

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>2</b>
1.1 Partielle Ableitungen . . . . .	2
1.2 Totale Differenzierbarkeit . . . . .	7
1.3 Extremwerte . . . . .	11
<b>2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>16</b>
2.1 Zweidimensionale Integralrechnung . . . . .	16
2.2 Dreidimensionale Integralrechnung . . . . .	23
<b>3 Differentialgleichungen</b>	<b>25</b>
3.1 Einführung . . . . .	25
3.2 Trennung der Variablen . . . . .	25
3.5 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	26
3.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	28
3.7 Differentialgleichungssysteme (DGLS) . . . . .	31
<b>4 Numerische Methoden</b>	<b>33</b>
4.1 Numerische Methoden . . . . .	33
4.2 Polygonzugverfahren von Euler . . . . .	34
4.3 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	35
<b>5 Weitere Beispiele mathematischer Anwendung in der Informatik</b>	<b>37</b>
5.1 Das Lotka-Volterra-Modell . . . . .	37

# 1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

## 1.1 Partielle Ableitungen

**Definition 1.1.1** (reelle Funktionen mit  $n$  Variablen) *Eine Funktion*

$y = f(x_1, \dots, x_n)$  mit  $(x_1, \dots, x_n) \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  und  $y \in \mathbb{R}$  heißt reelle Funktion mit mehreren Variablen.

$\mathbb{D}$  beschreibt den Definitionsbereich und wir schreiben  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$

**Bemerkung 1.1.2** *Definition für Differenzierbarkeit im eindimensionalen Fall: Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$   $f$  ist differenzierbar in  $x_0$ , falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$  existiert. In diesem Fall heißt  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  die Ableitung von  $f$  in  $x_0$ . Man bezeichnet  $f'(x_0)$  als den Differentialquotienten von  $f$  im Punkt  $x_0$ .*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Definition 1.1.3**  $P = (p_1, \dots, p_n)$  und  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  bezeichnen zwei Punkte im  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$

$$|P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2} \text{ heißt Abstand der Punkte } P \text{ und } Q.$$

Die Delta-Umgebung des Punktes  $P$  ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $U_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\}$ .

**Definition 1.1.4** Der Punkt  $P$  heißt innerer Punkt der Menge  $M$  ( $M \subset \mathbb{R}^n$ ), wenn eine Umgebung des Punktes  $P$  existiert, für die  $U_\delta \subset M$  gilt.

**Bemerkung 1.1.5** Eine Menge heißt offene Menge, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

**Definition 1.1.6** Wenn  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$  ein innerer Punkt der Menge  $D$  ist und wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  an der Stelle  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$

Die Funktion  $f$  heißt in  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$  partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen nach allen Komponenten  $x_j (j = 1, \dots, n)$  existieren.

Die Funktion heißt in  $\mathbb{D}$  partiell differenzierbar, wenn  $f$  in allen inneren Punkten aus  $\mathbb{D}$  partiell differenzierbar ist.

**Bemerkung 1.1.7** Die partielle Ableitung der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  nach der Komponente  $x_j$  kann wie folgt bezeichnet werden:

$$f_{x_j}(x_1, \dots, x_n) \text{ oder } \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

**Beispiel 1.1.8** Gesucht sind die partiellen Ableitungen der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) \cdot 2e^{2x_3}$$

**Bemerkung 1.1.9** Die Tangentialebene an die Funktion  $f(x_1, x_2)$  berührt die Funktion  $f(x_1, x_2)$  im Punkt  $\bar{P} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$  und enthält alle Tangenten an die Funktion  $f(x_1, x_2)$  im Punkt  $\bar{P}$ .

**Satz 1.1.10** Es seien  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion und  $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$ . Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt  $(x_{01}, x_{02})$ :

$$\begin{aligned} x_3 &= f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02}) \\ &= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel 1.1.11** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1$$

→ Tangentialebene:  $x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2 \cdot (x_1 - x_{01}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_{02})$

$$(x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} = 0$$

**Beispiel 1.1.12**  $(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$

$$f(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \sin(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot \sqrt[3]{\pi}^2 = -\pi^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot 2\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi} = -2\pi^{\frac{2}{3}}$$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} -\pi^{\frac{2}{3}} & -2\pi^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt[3]{\pi} \\ x_2 - \sqrt[3]{\pi} \end{pmatrix} = -\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_1 - \sqrt[3]{\pi}) + -2\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_2 - \sqrt[3]{\pi})$$

$$x_3 = -\pi^{\frac{2}{3}}x_1 - 2\pi^{\frac{2}{3}}x_2 + 3\pi$$

**Beispiel 1.1.13** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = |x_1| + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1 |x_1|$  ist nur für  $x_1 \neq 0$  differenzierbar, d.h.  $f$  ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar.

**Definition 1.1.14 (Gradient)** Es sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar.

Dann heißt der Vektor  $\text{grad}f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$  der Gradient von  $f$  im Punkt  $x \in \mathbb{D} =$

$(x_1, \dots, x_n)$ .

**Bemerkung 1.1.15** Anstelle von  $\text{grad}f(x)$  wird auch häufig  $\nabla f(x)$  geschrieben.

**Beispiel 1.1.16** Berechnen Sie den Gradienten für:

$$1. f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$2. g(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3$$

$$\text{zu 1. } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{zu 2. } \nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2 \cos(x_1 x_2) + x_2 x_3 \\ 2x_1 \cos(x_1 x_2) + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 1.1.17** Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.

Betrachtet wird die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Im Punkt  $(0, 0)$  existieren die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta x) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

Aber  $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig:

Es gilt  $f(x_1, 0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}, f(0, x_2) = 0; x_2 \in \mathbb{R}$

Für  $x := x_1 = x_2$ :

$$f(x, x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & (x, x) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, x) = (0, 0) \end{cases}$$

**Definition 1.1.18 (Stetigkeit)** Die Funktion  $y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$  ist an der Stelle  $\bar{P} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{D}$  stetig, wenn für den Funktionsgrenzwert

$$\lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

gilt.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2 - 1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

2. Berechnen die den Gradienten der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1-1) \cdot \ln(x_1+1)}{x_2^2 + x_3^2 + 1}$  an der Stelle  $(0, 0, 0)$

3. Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \text{ im Punkt } (0, \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{4}})$$

**Definition 1.1.19 (k-mal partiell differenzierbar)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion und  $x_0 \in D$ . Die Funktion  $f$  heißt zweimal partiell differenzierbar in  $x_0$ , wenn alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $x_0$  wieder partiell differenzierbar sind.

Man schreibt  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

Dieser Ausdruck heißt dann zweite partielle Ableitung von  $f$ .

Allgemein heißt  $f$  k-mal partiell differenzierbar, wennn alle  $(k-1)$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{(k-1)}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{(k-1)}} \dots \partial x_{i_1}} \right)(x_0) = f_{x_{i_k} \dots x_{i_1}}$$

**Aufgabe 1.1.20** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2$

Berechnen Sie alle ersten und zweiten Ableitungen von  $f$  und  $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2 - x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \cdot 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -2x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = +2$$

**Definition 1.1.21 (stetig partiell differenzierbar)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls  $f$  k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$  stetig sind.

**Satz 1.1.22 (Satz von Schwarz)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle.

**Bemerkung 1.1.23** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann spielt die Reihenfolge der Ableitungsvariablen bei der  $k$ -ten partiellen Ableitung keine Rolle.

**Aufgabe 1.1.24** Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$  ( $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \cdot 2x_1 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \sin(x_1^2 + x_2) + 2e^{2x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) &= 2x_3 (\cos(x_1^2 + x_2) - 2x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= -2x_1 x_3 \sin(x_1^2 + x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \sin(x_1^2 + x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \cos(x_1^2 + x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) &= 4e^{2x_3}\end{aligned}$$

## 1.2 Totale Differenzierbarkeit

**Definition 1.2.1 (Betrag eines Vektors)** Der Betrag eines Vektors

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

**Definition 1.2.2 (Vektorfunktion)** Eine eindeutige Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$  mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt Vektorfunktion.

**Beispiel 1.2.3** Es sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$f$  hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

**Definition 1.2.4 (total differenzierbar)** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $x_0 \in \mathbb{D}$ . Die Funktion  $f$  heißt total differenzierbar in  $x_0$ , falls es eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und eine Restfunktion  $R : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, für die gilt:  $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + |x - x_0| \cdot R(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$$

**Satz 1.2.5 (Jacobi-Matrix)** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $x_0 \in \mathbb{D}$ . Weiterhin sei  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar mit der Matrix

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig und alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind in  $x_0$  partiell differenzierbar, wobei gilt:  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von  $f$  und wird mit  $Df(x_0)$  oder  $J_f(x_0)$  bezeichnet.

**Beispiel 1.2.6** Gegeben sei die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ \ln(x^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $D_g(x)$ :

$$D_g(x) = \begin{pmatrix} 6x^2 \\ \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 1.2.7**

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 \cdot \sin x_2 \\ e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

$$D_f(x_1, x_2) = ?$$



**Bemerkung 1.2.8** Nach Definition 1.2.4 kann eine Funktion  $f(x)$ , die total differenzierbar ist, in der Nähe von  $x_0$  durch

$$f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

angenähert werden.

Da die Annäherungsfunktion linear ist, spricht man auch von Linearisierung.

Hierfür muss aber klar sein, dass  $f$  auch wirklich total differenzierbar ist.

**Satz 1.2.9** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, deren Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  alle stetig partiell differenzierbar sind. Dann ist  $f$  total differenzierbar.

**Beispiel 1.2.10** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 \sin(x_3)$$

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 + x_2 \sin(x_3) & x_1^2 + x_1 \sin(x_3) & x_1 x_2 \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

$f$  soll in der Nähe des Punktes  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$  angenähert werden.

Zur Berechnung der Näherung wird benötigt:  $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

$$f(x_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - 3$$

**Aufgabe 1.2.11** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1^2 \sin(x_2) & e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}^T \quad (\text{siehe Aufgabe 1.2.7})$$

Berechnen Sie die Näherung der Funktion in der Nähe von  $x_0 = (1, 0)$

**Aufgabe 1.2.12** Berechnen Sie die Tangentialebenen an die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_3 - 1)^2} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ im Punkt } (x_{01}, x_{02}, f(x_{01}, x_{02})) = (0, 1, 1).$$

Verwenden Sie dazu zunächst die Formel für die Tangentialebenen und dann die Formel für die totale Differenzierbarkeit.

**Definition 1.2.13 (totale Differenzierbarkeit)** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbare Funktion. Dann kann  $f$  in der Nähe eines Punktes  $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix} \text{ angenähert werden.}$$

$$\text{Es gilt also } f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) - f(x_{01}, x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=:\Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=:\Delta x_2}$$

$$\text{also gilt: } \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$$

Für „beliebig kleines“  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  schreiben wir „d“ statt „ $\Delta$ “ und „=“ statt „ $\approx$ “.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_2$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als totales Differenzial der Funktion  $f$ .

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

**Bemerkung 1.2.14** Mit Hilfe des totalen Differentials kann der Einfluss der Änderung der Inputgrößen auf den Funktionswert abgeschätzt werden.

**Beispiel 1.2.15** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \sin(x_1 \cdot x_2)$ . Wir betrachten  $f$  in der Nähe des Punktes  $f(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

Was passiert wenn wir leicht von dem Wert abweichen?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + \cos(x_1 \cdot x_2)x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 \cdot x_2)x_1$$

$$df = 2\sqrt{\pi} + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_1 - \sqrt{\pi}) + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_2 - \sqrt{\pi}) \quad df = \sqrt{\pi} \cdot dx_1 + (-\sqrt{\pi}) \cdot dx_2$$

Veränderung der Inputgrößen z.B.  $dx_1 = 0.1$   $dx_2 = -0.1$

$$df = 0.2 \cdot \sqrt{\pi}$$

**Bemerkung 1.2.16** Durch Einsetzen der Maximalen absoluten Fehler und Bilden der Beträge ergibt sich der (lineare) maximale absolute Fehler:

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_n|$$

**Aufgabe 1.2.17** Das Volumen  $V$  eines geraden Kreiskegels wird berechnet durch:  $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{k^2 - r^2}$ .

$r \dots$  Radius  $r=1\text{m}$  und absoluter Fehler von  $0.01\text{m}$

$k \dots$  Mantellinie  $k=1.5\text{m}$  und der absolute Fehler:  $0.005\text{m}$

Berechnen Sie den (linearen) maximalen absoluten Fehler.

Papula zu Abschnitt 2 S. 332: 12, 13, 15

## 1.3 Extremwerte

**Definition 1.3.1 (Lokales Extremum)** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.

- (i) Ein Punkt  $x_0 \in U$  heißt lokales Maximum von  $f$ , falls  $f$  in der Nähe von  $x_0$  nicht größer wird als bei  $x_0$ , das heißt:  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x$  in der Nähe von  $x_0$ .
- (ii) Ein Punkt  $x_0 \in U$  heißt lokales Minimum von  $f$ , falls  $f$  in der Nähe von  $x_0$  nicht kleiner wird als bei  $x_0$ , das heißt:  $f(x) \geq f(x_0)$  für alle  $x$  in der Nähe von  $x_0$ .

Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

**Bemerkung 1.3.2** Wie im eindimensionalen Fall liefert die Differentialrechnung nur Informationen über lokale und nicht über globale Extrema.

**Bemerkung 1.3.3** Es sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in (a, b)$  mit einem lokalen Extremum in  $x_0$ . Dann ist  $f'(x_0) = 0$ .

**Satz 1.3.4** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Besitzt  $f$  in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum, so gilt:

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

$$\text{d.h. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

**Beispiel 1.3.5**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

$$\rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Das heißt falls es ein Extremum gibt, dann liegt es bei  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 1.3.6**

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(x_1) \cdot \sin(x_2) = 0$$

$$(x_1 = \pi) \text{ od. } \sin(x_2) = 0$$

**Bemerkung 1.3.7** Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $f'(x_0) = 0$ .

(i) Ist  $f''(x_0) > 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.

(ii) Ist  $f''(x_0) < 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.

**Definition 1.3.8** Eine Matrix  $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt positiv definit, falls gilt:

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0,$$

$$\text{also } \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, n.$$

$A$  heißt negativ definit, falls  $-A$  positiv definit ist.

**Beispiel 1.3.9** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\underline{k=1}: 1 > 0$$

$$\underline{k=2}: \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

$\rightarrow A$  ist positiv definit.

**Aufgabe 1.3.10**  $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$-6 < 0 \rightarrow B$  nicht positiv definit

$$-B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1} : 6 > 0$

$$\underline{k=2} : \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 2 > 0$$

$\rightarrow B$  ist negativ definit.

**Aufgabe 1.3.11** Prüfen Sie  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  auf positive Definitheit.

**Bemerkung 1.3.12**  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{2 \times 2}$  ist weder positiv noch negativ definit:  $d_{11} \not> 0 \rightarrow$  nicht positiv definit

$-d_{11} \not< 0 \rightarrow$  nicht negativ definit

**Definition 1.3.13** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und  $x_0 \in U$ . Unter der Hesse-Matrix von  $f$  in  $x_0$  versteht man die Matrix:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 1.3.14** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Gesucht ist die Hesse-Matrix.

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 1.3.15** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \sin(x_3)$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix  $H_f(0, 0, 0)$  &  $H_f(1, 1, 0)$ .

**Satz 1.3.16** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $x_0 \in U$  ein Punkt mit  $\nabla f(x_0) = 0$ .

- (i) Ist  $H_f(x_0)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (ii) Ist  $H_f(x_0)$  negativ definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.
- (iii) Ist  $\underline{U \subset \mathbb{R}^2}$  und gilt  $\det H_f(x_0) < 0$ , so liegt kein Extremwert vor.

**Beispiel 1.3.17** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} := 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\rightarrow (0, 0)$  könnte ein Extremum sein

Überprüfen durch Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$\rightarrow H_f(0, 0)$  positiv definit  $\rightarrow$  in  $(0, 0)$  liegt ein lokales Minimum vor.

**Aufgabe 1.3.18** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.

Kandidaten:  $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**Aufgabe 1.3.19** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$

$$\text{Gradient: } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$$

$$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$$

	$k_1$ gerade	$k_1$ ungerade
$k_2$ gerade	lokales Maximum	kein Extremwert
$k_2$ ungerade	kein Extremwert	lokales Minimum

**Beispiel 1.3.20 (Nebenbedingungen)** Gegeben sei 12m langer Draht, aus dem die Kanten eines Quaders von möglichst großem Volumen hergestellt werden sollen. Gesucht sind die Kantenlängen  $x_1, x_2, x_3$  des optimalen Quaders.

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

$$V = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$$

$$V = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$$

$$\mathbb{D} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 3, \mathbb{D} \text{ ist eine offene Menge}$$

$$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1 x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1 x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix

Beispiel \*\*\*:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Stetigkeit in  $(0, 0)$

$$\bar{P} \lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\text{Es gilt: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{|x \cdot y|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1}$$

**Aufgabe 1.3.21** Papula S.332 zu Abschnitt 2  $\rightarrow$  Aufg. 24

$$(i) f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 13$$

$$(ii) f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 3$$

$$(iii) f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - 25)(x_2 - 2) + 5x_2^2 + 12x_2$$

## 2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

### 2.1 Zweidimensionale Integralrechnung

**Definition 2.1.1 (beschränkt)** Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  heißt beschränkt, wenn es ein Rechteck  $R$  gibt, sodass  $U \subset R$  gilt.

#### Bemerkung 2.1.2

**Bemerkung 2.1.3** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Da ein Volumen betrachtet wird, werden die alten Näherungsrechtecke durch Näherungsquader ersetzt und deren Volumen zusammengezählt.

$U$  wird also in  $n$  kleine Teilbereiche  $u_1, \dots, u_n$  zerlegt. Die Fläche dieser Teilbereiche wird mit  $\delta u_1, \dots, \delta u_n$  bezeichnet.

Zur Berechnung des Rauminhalts des Quaders wird weiterhin die Quaderhöhe benötigt. Dazu wird ein Punkt  $(x_i, y_i) \in U_i$  gewählt und sein Funktionswert  $f(x_i, y_i)$  als Höhe des Quaders betrachtet. Das Teilvolumen beträgt dann  $f(x_i, y_i) \cdot \Delta u_i$

Falls  $U_i$  ein Rechteck ist mit den Seiten  $\Delta x_i$  und  $\Delta y_i$ , so ergibt sich das Teilvolumen

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

Als Näherung für das Gesamtvolumen ergibt sich also

$$V_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Hier wurde der gesamte Definitionsbereich  $U$  in die  $n$  Teilbereiche  $U_1, \dots, U_n$  zerlegt.



Der genaue Wert für das Volumen kann berechnet werden, indem  $n$  gegen  $\infty$  geht. Deshalb wird definiert:

$$\begin{aligned}\int_U f(x, y) dU &= \int_U f(x, y) dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i\end{aligned}$$

Um klarzustellen, dass es sich um ein zweidimensionales Integral handelt, werden oft die zwei Integralsymbole verwendet:

$$\iint_U f(x, y) dU = \iint_U f(x, y) dx dy$$

**Definition 2.1.4 (konvex)** Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  oder  $U \subset \mathbb{R}^3$  heißt konvex, falls für alle Punkte  $x, y \in U$  auch die gesamte Verbindungsstrecke von  $x$  nach  $y$  in  $U$  liegt.

**Bemerkung 2.1.5** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Da  $U$  beschränkt ist, gibt es einen kleinsten vorkommenden  $x$ -Wert  $a$  und einen größten vorkommenden  $x$ -Wert  $b$ .

Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers bei einem beliebigen  $x$ -Wert zwischen  $a$  und  $b$  wird mit  $I(x)$  bezeichnet.

Der Körper, dessen Volumen wir ausrechnen, setzt sich aus all diesen Schnittflächen zusammen. Für jedes  $x \in [a, b]$  existiert eine Schnittfläche mit Flächeninhalt  $I(x)$ , das heißt durch Aufsummieren dieser unendlich vielen Flächeninhalte ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b I(x) dx$$

Der Flächeninhalt von  $I(x)$  kann einfach mit einem eindimensionalen Integral berechnet werden.

$$I(x) = \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Satz 2.1.6** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $a$  der kleinste in  $U$  vorkommende  $x$ -Wert und  $b$  der größte in  $U$  vorkommende  $x$ -Wert. Für  $x \in [a, b]$  bezeichnen wir den kleinsten  $y$ -Wert für den  $(x, y) \in U$  gilt, als  $y_u(x)$  und den größten  $y$ -Wert als  $y_o(x)$ .

Dann ist  $\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$

**Beispiel 2.1.7** (i)  $U = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = 2$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \int_0^2 (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left( \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \right) dx \\ & \int_0^1 \left( 2x^2 + \frac{2^3}{3} \right) dx \\ & \left[ \frac{2}{3} x^3 + \frac{8}{3} x \right]_0^1 \\ & \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

(ii)  $U = \{(x, y) : x \geq 0, x \leq 1, y \leq x, y \geq 0\}$

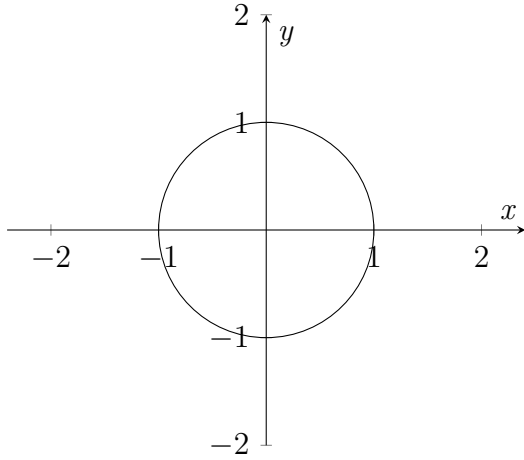
$f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x \cdot \sin(y)$

$$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = x$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \int_0^x x \cdot \sin(y) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left( [x \cdot -\cos(y)]_0^x \right) dx \\ & - \int_0^1 (x \cdot \cos(x) + x) dx \\ & - \left[ x \cdot \sin(x) + \cos(x) + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ & - \left( 1 \cdot \sin(1) + \cos(1) + \frac{1^2}{2} - \cos(0) \right) = -\sin(1) - \cos(1) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(iii) \ U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1$$



$$\begin{aligned} \iint_U (1) \, dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

**Einschub** *Substitution:*  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\int f(x(t)) \cdot x'(t) dt = \int f(x) dx$$

$$x(t) = \sin(t) \rightarrow t = \arcsin(x)$$

$$\int f(x) dx = \int \sqrt{1-x^2} dx = \int f(\sin(t)) \cdot x'(t) dt = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt$$

$$= \int \cos(t) \cdot \cos(t) dt = \cos(t) \cdot \sin(t) + \int \sin(t) \cdot \sin(t) dt = \int \sin^2(t) dt = \int 1 - \cos^2(t) dt$$

$$= \cos(t) \cdot \sin(t) + t - \int \cos^2(t) dt$$

$$\rightarrow \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$$

*Rücksubstitution*

$$\frac{x}{2} \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$$

$$\cos(t) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2}$$

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]_{-1}^1$$

$$\arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

**Satz 2.1.8** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $a$  der kleinste in  $U$  vorkommende  $y$ -Wert und  $b$  der größte in  $U$  vorkommende  $y$ -Wert.

Für  $y \in [a; b]$  bezeichnen wir den kleinsten  $x$ -Wert, für den  $(x, y) \in U$  gilt als  $x_u(y)$  und den größten als  $x_o(y)$ .

Dann ist  $\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f(x, y) dx \right) dy$

**Beispiel 2.1.9**

$$\iint_U x^2 + y^2 dx dy$$

$$U = [0, 1] \times [0, 2]$$



**Aufgabe 2.1.10**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y$

(i)  $U = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}$



$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_1^2 \left( \int_2^3 (x^2 + y) dy \right) dx = \frac{29}{6}$$

(ii)  $U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$



$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy \right) dx = \frac{33}{140}$$

**Einschub (Terrassenpunkte)** Jeder Punkt  $x_0 \in D_f$  (Definitionsbereich) einer Funktion  $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla f(x_0) = 0$  heißt kritischer Punkt von  $f$ .

Jeder kritische Punkt, von  $f$ , der nicht gleichzeitig ein lokales Extremum ist, heißt Terrassenpunkt von  $f$ .

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

$\rightarrow (0, 0)$  ist Kandidat

$$\text{Hessematrix: } H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-4 < 0}}$$



**Aufgabe 2.1.11** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten  $(2, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 0)$



$$f_1(x) = -3x + 3$$

$$f_2(x) = 2x - 2$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$U_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, f_1(x) \leq y \leq f_3(x)\}$$

$$U_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, f_2(x) \leq y \leq f_3(x)\}$$

$$\int_0^1 \left( \int_{f_1(x)}^{f_3(x)} 1 dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_{f_2(x)}^{f_3(x)} 1 dy \right) dx$$

**Aufgabe 2.1.12** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen  $f_1(x) = x^2 - 1$  und  $f_2(x) = 3x + 3$  begrenzt wird.



$$\int_{-1}^4 \left( \int_{x^2-1}^{3x+3} 1 dy \right) dx$$

**Aufgabe 2.1.13** Berechnen Sie  $\int_0^\infty x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1$ ,  $x_2 > 0$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left( e^{-cx_2} \left( -c - \frac{1}{x_2} \right) + \frac{1}{x_2} \right)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c}{e^{cx_2}} = \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{x_2 e^{cx_2}} = 0$$

$$\int_0^\infty x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1 = \frac{1}{x_2}$$

## 2.2 Dreidimensionale Integralrechnung

**Satz 2.2.1** *Es seien  $U \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $a$  der in  $U$  kleinste vorkommende  $x$ -Wert und  $b$  der größte.*

*Für  $x \in [a; b]$  bezeichnen wir den kleinsten  $y$ -Wert, für den es ein  $z$  gibt, sodass  $(x, y, z) \in U$  gilt, mit  $y_u(x)$ , und den größten mit  $y_o(x)$ .*

*Schließlich bezeichnen wir für zulässiges  $(x, y)$  mit  $z_u(x, y)$  den kleinsten  $z$ -Wert, sodass  $(x, y, z) \in U$ , und mit  $z_o(x, y)$  den größten  $z$ -Wert. Dann ist*

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \left( \int_{z_u(x, y)}^{z_o(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

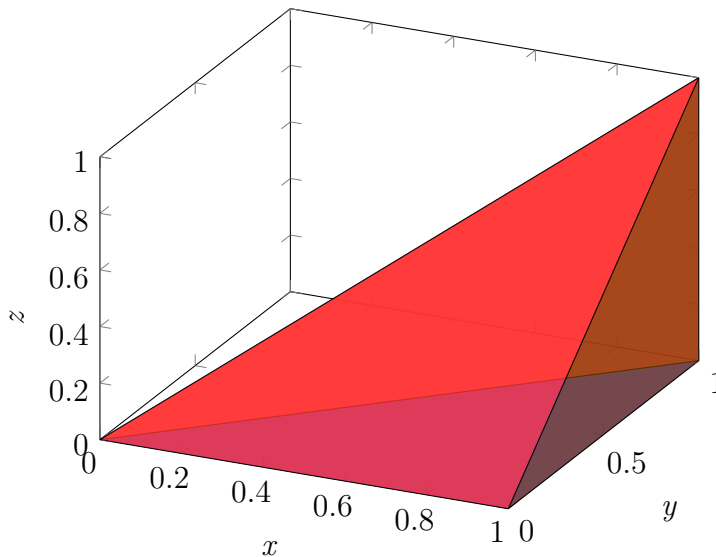
**Beispiel 2.2.2** (i)  $U = [-1; 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^2 x^2 + y^2 + z^2 dz \right) dy \right) dx$$

(ii)  $U = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x \leq 1, y \leq x, z \leq y\}$

$$f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z$$



$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^y xy^2 z dz \right) dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{70}$$

**Einschub (Geometrische Betrachtungen zur Tangentialebene)** Die Rolle, die die Kurventangente bei einer Funktion von einer Variablen spielt, übernimmt die sogenannte Tangentialebene bei einer Funktion von zwei Variablen  $z = f(x, y)$ . Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt  $P = (x_0, y_0, z_0)$  an die Bildfläche von  $z = f(x, y)$  angelegten Tangenten. In der unmittelbaren Umgebung ihres Berührungspunktes  $P$  besitzen Fläche und Tangentialebene im Allgemeinen keinen weiteren gemeinsamen Punkt.

Herleitung der Funktionsgleichung dieser Tangentialebene in der Form:  $z = ax + by + c$

Die unbekannten Koeffizienten  $a, b, c$  werden aus den bekannten Eigenschaften der Tangentialebene bestimmt.

Fläche und Tangentialebene besitzen im Berührungspunkt  $P$  die gleiche Steigung. Das bedeutet, dass dort die entsprechenden partiellen Ableitungen erster Ordnung übereinstimmen müssen. Die partiellen Ableitungen der Tangentialebene sind  $z_x(x, y) = a$  und  $z_y(x, y) = b$ , die der Funktion  $z = f(x, y)$  lauten  $z_x(x, y) = f_x(x, y)$  und  $z_y(x, y) = f_y(x, y)$ . An der Berührungsstelle  $(x_0, y_0)$  gilt demnach:  $a = f_x(x_0, y_0)$  und  $b = f_y(x_0, y_0)$ .

Somit sind die Koeffizienten  $a$  und  $b$  bestimmt.

Außerdem ist  $P$  ein gemeinsamer Punkt von Fläche und Tangentialebene:  $z_0 = ax_0 + by_0 + c \rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0$

Einsetzen in die Gleichung für die Tangentialebene:

$$z = ax + by + z_0 - ax_0 - by_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$



# 3 Differentialgleichungen

## 3.1 Einführung

**Definition 3.1.1 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)** Eine Gleichung der Form  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  für eine unbekannte Funktion  $y = f(x)$  und deren Ableitungen heißt gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

**Bemerkung 3.1.2** Neben gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es auch partielle Differentialgleichungen, diese werden aber in dieser Vorlesung nicht behandelt.

**Beispiel 3.1.3** Betrachtet wird eine elastische Feder in Gleichgewichtslage. Wird an den Punkt  $P_0$  ein Körper der Masse  $m$  angehängt, so hat die Feder zum Zeitpunkt  $t$  eine gewisse Auslenkung  $y(t)$ . Unter Vernachlässigung der Reibung gilt für die Rückstellkraft  $F$  der Feder, die auf die Masse  $m$  wirkt:  $F = -c \cdot y(t)$ . Dabei bezeichnet  $c$  die Federkonstante.

Wegen  $F = m \cdot y''(t)$  gilt:  $m \cdot y''(t) = -c \cdot y(t)$  also  $m \cdot y''(t) + c \cdot y(t) = 0$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int x dx \rightarrow \ln |y| = \frac{x^2}{2} + c \\ \rightarrow |y(x)| &= e^{\frac{x^2}{2} + c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \underbrace{e^c}_{c_1}, c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## 3.2 Trennung der Variablen

**Beispiel 3.2.1** Gegeben sei die Gleichung  $y' = xy$ .

Gesucht ist die Funktion  $y(x)$ .

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dx}{dy} = xy \rightarrow_{y \neq 0} \frac{dy}{y} = x dx$$

**Definition 3.2.2 (Differentialgleichungen mit getrennten Variablen)** Es seien  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle,  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $g(y) \neq 0$

für alle  $y \in \mathcal{I}$ . Dann heißt die Differentialgleichung  $y' = f(x) \cdot g(y)$  eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Auf diese Differentialgleichung lässt sich das gleiche Verfahren anwenden wie in Beispiel 3.2.1. Es kann eine allgemeine Lösungsformel abgeleitet werden.

**Einschub (Klausurtestaufgabe)** Gegeben seien die Funktionen  $f, g$  durch  $g(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 - y \\ 2xy \end{pmatrix}$ ,  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y + z) \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von  $f \circ g$  mit Hilfe der Kettenregel:  $D(f \circ g)(x, y) = Df(g(x, y)) \cdot Dg(x, y)$ .

Hinweis: Zur Berechnung von  $Df(g(x, y))$  berechnen Sie zunächst  $Df(x, y, z)$  und setzen Sie anschließend den Ergebnisvektor von  $g(x, y)$  ein.

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y + z) & \cos(y + z) \end{pmatrix}$$

$$Df(x + y, x^2 - y, 2xy) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x^2 - y + 2xy) & \cos(x^2 - y + 2xy) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ 2 \cos \alpha(x + y) & \cos \alpha(2x - 1) \end{pmatrix}$$

Papula S. 519 zu Abschnitt 1 Aufg. 1; S. 520 zu Abschnitt 2 Aufg. 4a+d, 5a+c

## 3.5 Lineare Differentialgleichungen

**Definition 3.5.1 (Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung)** Es seien  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

heißt homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Ist weiterhin  $b : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so heißt die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

**Definition 3.5.2 (linear unabhängig)** Eine Menge von Funktionen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  heißt linear unabhängig, wenn man keine Funktion aus den anderen linear kombinieren kann, d.h. für eine beliebige Funktion  $y_i$  gibt es keine Kombination der Form  $y_i(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_{i-1} y_{i-1}(x) + c_{i+1} y_{i+1}(x) + \cdots + c_n y_n(x)$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

Falls man ein  $y_i$  aus den anderen Funktionen linear kombinieren kann, heißt die Menge linear abhängig.

**Beispiel 3.5.3** Es sei  $n = 2$ ,  $y_1(x) = \sin(x)$ ,  $y_2(x) = 17 \sin(x)$

Dann ist  $\{y_1, y_2\}$  linear abhängig, da für  $c = 17$  gilt:  $y_2 = c y_1$ .

**Satz 3.5.4 (Wronski-Determinante)** Es sei  $L_H$  die Lösungsmenge einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dann gibt es  $n$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  der Differentialgleichung und es gilt:  $L_H = \{c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$ .

Aus den Grundlösungen  $y_1, \dots, y_n$  lässt sich also mit Hilfe von Linearkombinationen die gesamte Lösungsmenge berechnen.

Weiterhin sind  $n$  Lösungen  $y_1, y_n \in L_H$  genau dann linear unabhängig, wenn für die Wronski-Determinante folgendes gilt:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Dabei genügt schon  $W(x) \neq 0$  für ein  $x$ .

**Aufgabe 3.5.5** Berechnen Sie die Wronski-Determinante

- (i)  $n = 2$ ,  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$
- (ii)  $n = 3$ ,  $y_1(x) = 1$ ,  $y_2(x) = x$ ,  $y_3(x) = x^2$
- (iii)  $n = 2$ ,  $y_1(x) = \sin(x)$ ,  $y_2(x) = 17 \sin(x)$

**Definition 3.5.6 (Fundamentalsystem)** Sind die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  linear unabhängige Funktionen einer linearen homogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, dann heißt die Menge  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

## 3.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

**Definition 3.6.1 (lin. homo. Differentialgleichung mit konst. Koeffizienten)** Die Gleichung  $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$  mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  heißt lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

**Bemerkung 3.6.2** Für die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

wird ein Ansatz verwendet, der eine  $e$ -Funktion enthält.

Ansatz:  $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$

Differenzieren und Einsetzen des Ansatzes führt zu:

$$e^{\lambda x} (\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{= 0}) = 0$$

wird 0, falls  $\lambda$  eine Nullstelle des Polynoms  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  ist.

**Definition 3.6.3 (charakteristisches Polynom)** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Dann heißt das Polynom  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  charakteristisches Polynom der Differentialgleichung.

**Satz 3.6.4** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P(x)$ , dann ist  $y(x) = e^{\lambda x}$  eine Lösung der Differentialgleichung.

**Aufgabe 3.6.5** (i) Zu lösen ist:  $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$P(x) = x^2 - 3x + 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}$$

(ii) Zu lösen ist  $y''' - y'' - 2y' = 0$

**Satz 3.6.6** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom  $P(x)$   $n$  verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat. Dann bilden die Funktionen  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Jede Lösung der Differentialgleichung hat deshalb die Form  $y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n x}$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel 3.6.7** Zu lösen ist  $y'' - 2y' + y = 0$

$$P(x) = x^2 - 2x + 1, \lambda_{1,2} = 1$$

$$y_1(x) = e^x$$

$$\text{Ansatz für die zweite Lösung: } y_2(x) = x \cdot e^x$$

**Satz 3.6.8** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom  $P(x)$  habe  $k$  reelle Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  mit  $P(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , d.h.  $\lambda_j$  ist  $m_j$ -fache Nullstelle von  $P$ . Dann bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} \cdot e^{\lambda_1 x} \\ &e^{\lambda_2 x}, x \cdot e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} \cdot e^{\lambda_2 x} \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &e^{\lambda_k x}, x \cdot e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

**Aufgabe 3.6.9** (i) Zu lösen ist  $y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

Lösung:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \text{ (3-fache NST)}$$

$$y_1(x) = e^{0x} = 1$$

$$y_2(x) = e^x$$

$$y_3(x) = x \cdot e^x$$

$$y_4(x) = x^2 \cdot e^x$$

(ii) Zu lösen ist das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ mit } y(0) = 1, y'(0) = 1$$

**Bemerkung 3.6.10** Liegt eine inhomogene Differentialgleichung mit Störfunktion  $b(x)$  vor, so kann in einigen Fällen eine geeignete Ansatzfunktion zur Lösung der Differentialgleichung verwendet werden:

Liegt zum Beispiel die Störfunktion in der folgenden Form vor

$b(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , so kann die folgende Ansatzfunktion verwendet werden:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

**Beispiel 3.6.11** Zu lösen ist  $y''' - 3y' - 2y = 4x^2$

Zunächst homogene Differentialgleichung betrachten:  $y''' - 3y' - 2y = 0, P(x) = x^3 - 3x - 2$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:  $y(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Ansatz für die Störfunktion: Da  $b(x) = x^2$  ein Polynom 2. Grades ist, wird der Ansatz  $\underbrace{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}_{y_P}$  verwendet.

$$y_P''' = 0, y_P'' = 2\alpha_2, y_P' = 2\alpha_2 x + \alpha_1$$

$$-6\alpha_2 x - 3\alpha_1 - 2\alpha_2 x^2 - \alpha_1 x - 2\alpha_0 = 4x^2$$

$$x^2 \underbrace{(-2\alpha_2)}_4 + x \underbrace{(-6\alpha_2 - \alpha_1)}_0 + \underbrace{(-3\alpha_1 - 2\alpha_0)}_0 = 4x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha_2 = -2, \alpha_1 = 6, \alpha_0 = -9$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:  $y(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} - 2x^2 + 6x - 9, x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 3.6.12** Lösen Sie  $y''' - 3y' - 2y = 100 \sin(2x)$

$$b(x) = a \cdot \sin(cx) + b \cdot \cos(cx) \rightarrow \text{Ansatz: } \alpha \cdot \sin(cx) + \beta \cdot \cos(cx)$$

Lösung:

$$y_p(x) = \alpha \cdot \sin(cx) + \beta \cdot \cos(cx); cx = 2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha = -1, \beta = 7$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-x} - \sin(2x) + 7 \cos(2x); x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 1 \rightarrow 1 = c_1 \cdot 1 + 0 \rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(0) = 1 \rightarrow y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 \cdot x \cdot e^{2x} = 1$$

$$c_2 \cdot x e^{2x}$$

$$c_2(1e^{2x} + x \cdot 2e^{2x})$$

### 3.7 Differentialgleichungssysteme (DGLS)

**Definition 3.7.1 (Differentialgleichungssysteme)** Ein System von  $m$  Gleichungen, dass die unbekannten Funktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  sowie deren Ableitungen  $y_1'(x), y_1''(x), \dots, y_1^{(n_1)}(x), \dots, y_m'(x), y_m''(x), \dots, y_m^{(n_m)}(x)$  enthält, heißt Differentialgleichungssystem.

**Beispiel 3.7.2** Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = -2y_1 + 8y_2 \quad (*)$$

$$y_2' = -4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \quad (**)$$

*Eliminationsmethode:*

$$(*) \text{ ableiten: } y_1'' = -2y_1' + 8y_2'$$

$$(**) \text{ einsetzen: } y_1'' = -2y_1' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64$$

$$y_1' = -2y_1 + 8y_2 \quad (*)$$

$$y_2' = -4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \quad (**)$$

$$y_1'' = -2y_1 + 8(-4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8)$$

$$= -2y_1' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64 \quad (\overline{*})'$$

$$(*) \text{ umstellen nach } y_2$$

$$y_2 = \frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1$$

$$\text{Einsetzen in } (\overline{*})'$$

$$\rightarrow y_1'' = -2y_1' = -32y_1 + 48(\frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1) + 80x^2 + 128x - 64$$

$$y_1'(-2 + 6) + y_1(-32 + 12) + 89x^2 + 128x - 64$$

$$\rightarrow y_1''' - 4y_1' + 20y_1 = 80x^2 + 128x - 64 \quad (***)$$

$$\rightarrow \text{homogene DGL} \rightarrow \text{charakteristisches Polynom: } P(x) = x^2 - 4x + 20$$

$$a = 0; b = -4; c = 20$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 4i$$

$$y_1 = \cos(4x) \cdot e^{2x}$$

$$y_2 = \sin(4x) \cdot e^{2x} \quad (\text{Eulersche Form})$$

$$e^{\lambda x} = e^{(2+4i)x} = e^{2x}(\cos(4x) + i \sin(4x))$$

*Ansatz für die inhomogene Lösung:*

$$y_p = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$y'_p = 2\alpha_2 x + \alpha_1, y''_p = 2\alpha_2, y'''_p(x) = 0$$

*Einsetzen in  $(***)$  für  $y_1, y'_1, y''_1$*

$$2\alpha_2 - 4(2\alpha_2 x + \alpha_1) + 20(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) = 80x^2 + 128x - 64$$

$$\text{Sortieren: } x^2(20\alpha_2) + x(-8\alpha_2 + 20\alpha_1) + (2\alpha_2 - 4\alpha_1 + 20\alpha_0)$$

*Koeffizientenvergleich  $20\alpha_2 = 80$  usw.*

$$\alpha_0 = -2, \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 4$$

$$y_1(x) = \underbrace{c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x}}_{\text{Homogene LSG}} + \underbrace{4x^2 + 8x - 2}_{\text{Partikuläre LSG}} \quad (***)$$

$$x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_2 = \frac{1}{8}y'_1 + \frac{1}{4}y_1$$

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= -4c_1 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 2c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 4c_2 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 2c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 8x + 8 \\ &= e^{2x} \cdot \cos(4x)\left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2\right) + e^{2x} \cdot \sin(4x)\left(-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2\right) + x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Vektorschreibweise:*

$$c_1 = 2D_1$$

$$c_2 = 2D_2$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D_1 \\ D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x \cdot \cos(4x)} + \begin{pmatrix} 2D_2 \\ -D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x \cdot \sin(4x)} + \begin{pmatrix} 4x^2 + 8x - 2 \\ x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}, D_i \in \mathbb{R}$



# 4 Numerische Methoden

## 4.1 Numerische Methoden

**Beispiel 4.1.1** Gegeben ist die DGL mit Anfangsbedingung  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Gesucht ist die Lösung  $y(x)$  im Bereich von  $x = x_0 = a$  bis  $x = x_n = b$  die durch den Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  geht.

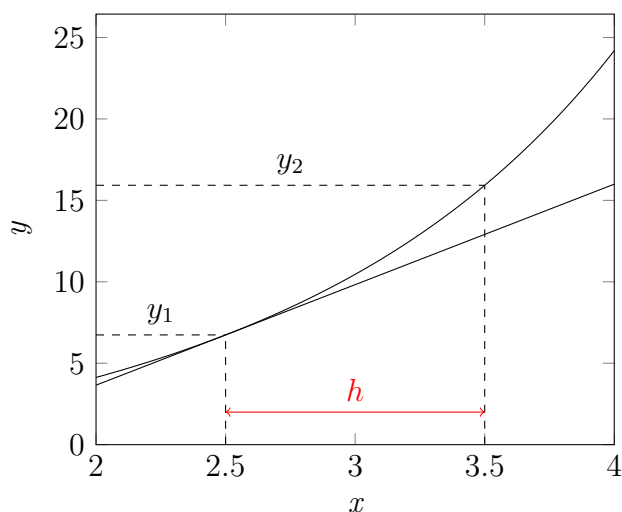
Das Intervall  $[a, b]$  wird in  $n$  Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  unterteilt mit  $x_{i+1} = x_i + h, (i = 0, 1, \dots, n-1), h = \frac{b-a}{n}$ .

Da die Schrittweite  $h$  hier immer gleich groß ist, wird von äquidistanten Stützstellen gesprochen.

Zunächst wird das Intervall  $[x_0, x_1]$  betrachtet. Die gesuchte Funktion  $y(x)$  verläuft durch den Punkt  $P_0$ .

In diesem Punkt hat sie die Steigung  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ .

Mit Hilfe der Tangente in  $P_0$ , die diese Steigung  $y'_0$  hat, kann der Punkt  $P_1(x_1, y_1)$  bestimmt werden.



Dieser Punkt wird im allgemeinen nicht auf der unbekannten exakten Lösungskurve

$y = y(x)$  liegen. Der Näherungswert  $y_1$  wird von dem exakten Wert verschieden sein, und zwar im allgemeinen umso mehr, je größer die Schrittweite  $h$  gewählt wurde.

Da  $y'(x) = f(x, y(x))$  gilt und damit  $f(x, y(x))$  genau die Steigung  $y'(x)$  der gesuchten exakten Lösung  $y(x)$  ist, gilt näherungsweise für  $h \neq 0$ :  $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$  oder  $y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y(x))$ .

Es gilt also  $y_1 = y_0 + h \cdot y'_0$ .

Die Schrittweite  $h$  muss nicht fest gewählt werden, es können auch verschiedene Schrittweiten  $h_i$  gewählt werden mit  $x_{i+1} = x_i + h_i (i = 0, \dots, n-1)$ .

## 4.2 Polygonzugverfahren von Euler

Wenn äquidistante Stützstellen  $x_i = x_0 + i \cdot h (i = 1, \dots, n)$  verwendet werden, wird die beschriebene Methode  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$  das Polygonzugverfahren von Euler genannt.

Algorithmus: (Polygonzugverfahren von Euler)

Gegeben: Schrittweite von  $h = \frac{b-a}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Berechne für  $i = 0, \dots, n-1$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

**Beispiel 4.2.1** Gegeben sei  $y' = x \cdot y$  mit  $y(0) = 1$ .

Exakte Lösung:  $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$  ( $\Delta$ ).

$$x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot \underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0 \cdot y_0} = 1 + 0.1 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot \underbrace{f(x_1, y_1)}_{x_1 \cdot y_1} = 1 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 1 = 1.01$$

$$h = 0.1$$

$x$	$y(x)$	$y_i$
0.0		
0.1		
0.2		
0.3		
0.4		
0.5		
0.6		
0.7		
0.8		
0.9		
1.0		

Skizzieren sie den Vergleich zwischen  $y(x)$  und  $y_i(h = 0.1)$

$h = 0.05$

## 4.3 Runge-Kutta-Verfahren

Mit der am linken Randpunkt  $P_0$  des betreffenden Intervalls berechneten Steigung  $f(x_i, y_i)$  wird bis zur Mitte  $y_i + \frac{h}{2}$  des Intervalls gegangen.

Dort wird die Steigung im Punkt  $P_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$  berechnet, die in der folgenden Form dargestellt werden kann:

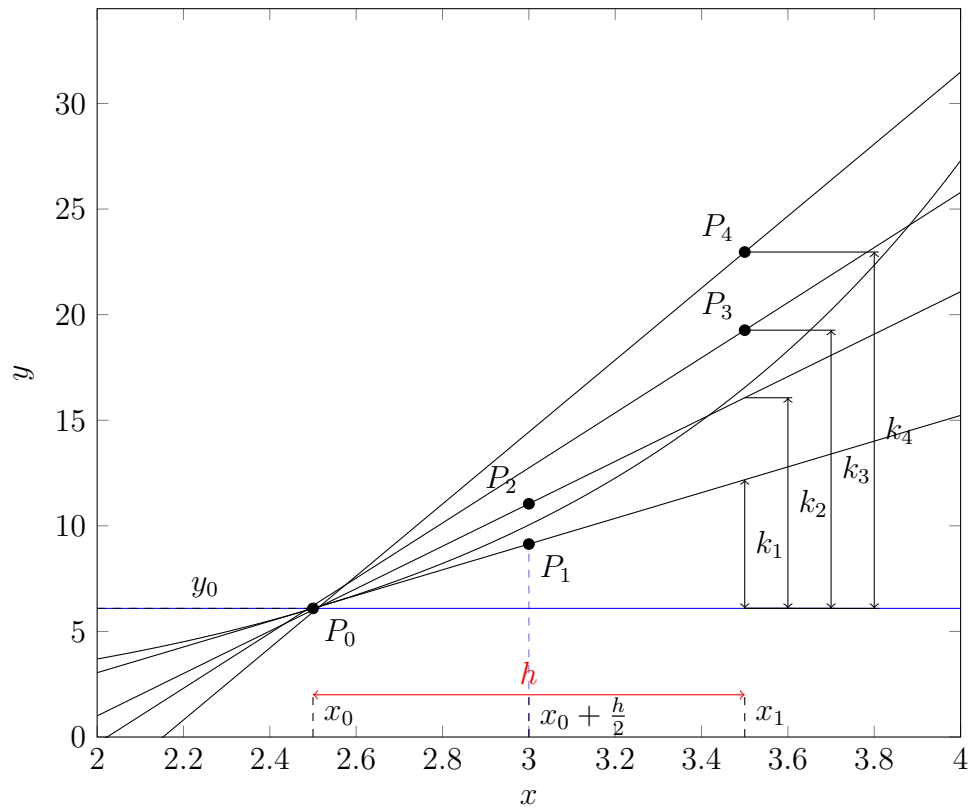
$$\frac{k_2}{2} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \text{ mit } k_1 = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Nun wird erneut vom linken Randpunkt  $P_0$  aus mit der neuen Richtung bis zum Punkt  $P_2$  in der Mitte des Intervalls gegangen, dessen Koordinaten  $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$  sind.

Mit der in  $P_2$  berechneten Steigung  $f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) = \frac{k_3}{h}$  wird vom linken Randpunkt aus bis zum Punkt  $P_3(x_i + h, y_i + k_3)$  gegangen, in dem ebenfalls die Steigung  $f(x_i + h, y_i + k_3) = \frac{k_4}{h}$  berechnet wird.

Auch mit dieser Steigung wird von  $P_0$  aus das Intervall mit der Breite  $h$  überbrückt bis zum Punkt  $P_4$  mit den Koordinaten  $(x_i + h, y_i + k_4)$ .

Damit gibt es vier Richtungen, in denen das Intervall überbrückt werden kann. Die beiden in der Intervallmitte berechneten Steigungen werden bei der Mittelwertbildung mit dem Gewichtungsfaktor 2 berücksichtigt.



$$\frac{k_2}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

(Steigung in  $P_1$ )

$$\frac{k_3}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

Gesuchter Punkt:  $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$

$$P_3(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$\frac{k_4}{h} = f(x_1, y_0 + k_3)$$

Also wird  $k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$y_{i+1} = y_i + k$$

# 5 Weitere Beispiele mathematischer Anwendung in der Informatik

## 5.1 Das Lotka-Volterra-Modell

Betrachtet wird ein Räuber-Beute-Modell bezüglich Haien und anderen Fischen.

Der Mathematiker Vito Voltaire ging von folgenden Grundannahmen aus:

- ohne Fische sterben die Haie an Nahrungsmangel
- ohne Haie vermehren sich die Fische ungebremst

Es wird ein einfaches Modell für exponentielles Wachstum verwendet:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x, r > 0$$

$x(t)$  Anzahl der Fische zur Zeit  $t$

$r$  Proportionalitätsfaktor (verschieden für unterschiedliches Verhalten verschiedener Lebewesen).

$$\frac{dy}{dt} = -s \cdot y, s > 0$$

$y(t)$  Anzahl der Haie zur Zeit  $t$

$s$  Proportionalitätsfaktor (verschieden für unterschiedliches Verhalten verschiedener Lebewesen).

Zur Modellierung der Interaktionen zwischen Haien und Fischen hat Volterra die folgenden Annahmen getroffen:

- die Haie vermehren sich proportional zum Produkt aus Zahl der Haie und Fische, während sich die Anzahl der Fische entsprechend verringert. (wenig Haie vermehren sich bei reichlich Futter ungefähr mit derselben Rate)