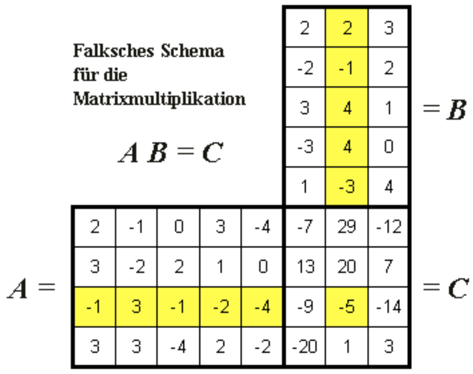
Matrizenmultiplikation mit dem Falkschema



Das Matrixelement c_{32} entsteht aus dem Skalarprodukt der 3. Zeile von A und der 2. Spalte von B:
$(-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) = -5$

Einfache Ableitungsregeln

Faktroregel:

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$$

Summenregel:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

$$\Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$$

Produktregel:

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Kettenregel:

$$y = a(b(c(x))) \Rightarrow y' = a'(x) \cdot b'(x) \cdot c'(x)$$

Wichtige Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &\Rightarrow f'(x) \\ \ln(x) &\Rightarrow \frac{1}{x} \\ \arccos(x) &\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Wichtige Rechnungen:

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 0 \\ \cos(0) = \cos(\pi) = \cos(2\pi) &= 0 \\ \sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) &= 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Klausurtestaufgabe: Gegeben seien die Funktionen f,g durch

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2 - y \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y+z) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel: $D(f \circ g)(x,y) = Df(g(x,y)) \cdot Dg(x,y)$.
Hinweis: Zur Berechnung von $Df(g(x,y))$ berechnen Sie zunächst $Df(x,y,z)$ und setzen Sie anschließend den Ergebnisvektor von $g(x,y)$ ein.

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y+z) & \cos(y+z) \end{pmatrix}$$

$$Df(x+y, x^2-y, 2xy) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x^2 - y + 2xy) & \cos(x^2 - y + 2xy) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 2\cos\alpha(x+y) & \cos\alpha(2x-1) \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen

Bildung partieller Ableitungen: Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x_1, x_2, x3) = x_1 \cdot x_2 + x3$ lassen sich sich wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 1$$

Berechnung der Tangentialebene: Es seien $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} - > \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt (x_{01}, x_{02}):

$$\begin{aligned} x_3 &= f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02}) \\ &= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zuerst den Punkt (x_{01}, x_{02}) an den Stellen x_{01} und x_{02} einsetzen. Dann ausrechnen und am Ende den Punkt für x_1 und x_2 einsetzen um zum Ergebnis für x3 an dem genannten Punkt zu kommen.

Berechnung Gradient: Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$ der Gradient von f im Punkt $x \in \mathbb{D} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Anstelle von $\text{grad} f(x)$ wird auch häufig $\nabla f(x)$ geschrieben.

Partielle Ableitungen k-ter Ordnung:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt zweimal **partiell differenzierbar** in x_0, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x_0 wieder partiell differenzierbar sind.

Man schreibt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

Dieser Ausdruck heißt dann **zweite partielle Ableitung** von f.

Allgemein heißt f **k-mal partiell differenzierbar**, wennn alle (k-1)-ten partiellen Ableitungen von f wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ik} \partial x_{i(k-1)} \ldots \partial x_{i1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{ik}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i(k-1)} \ldots \partial x_{i1}} \right)(x_0) = f_{x_{ik} \ldots x_{i1}}$$

Satz von Schwarz: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle.

Totale Differenzierbarkeit

Vektorfunktion: Eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{D} \to W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$ mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt **Vektorfunktion**.

Beispiel: Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2, x_3)$ hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Jacobi-Matrix: Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Weiterhin sei f in x_0 total differenzierbar mit der Matrix

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist f in x_0 stetig und alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind in x_0 partiell differenzierbar, wobei gilt: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.
Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von f und wird mit $Df(x_0)$ oder $J_f(x_0)$ bezeichnet.

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Totale Differenzierbarkeit: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann kann f in der Nähe eines Punktes $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$ angenähert werden.

Es gilt also $f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2) - f(x_{01}, x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=:\Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=:\Delta x_2}$$

also gilt: $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$
Für „beliebig kleines“ Δx_1 und Δx_2 schreiben wir „d“ statt „Δ“ und „=“ statt „≈“.

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_2}$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als **totales Differenzial** der Funktion f.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_n}$$

Berechnung linearer maximaler absoluter Fehler:

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_n|$$

Extremwerte

Bestimmung lokales Extremum: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt: $\boxed{\nabla f(x_0) = 0}$ d.h. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0}$

Definitheit einer Matrix: Eine Matrix $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **positiv definit**, falls gilt:

$$a_{11} > 0, \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ldots, \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0,$$

also $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n.$

A heißt **negativ definit**, falls -A positiv definit ist.

Berechnung der Determinante einer 2x2 Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) - (c \cdot b)$$

Berechnung der Determinante einer 3x3 Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (a\cdot e\cdot i) + (b\cdot f\cdot g) + (c\cdot d\cdot h)$$

$$-(g\cdot e\cdot c) - (h\cdot f\cdot a) - (i\cdot d\cdot b)$$

Hesse Matrix: Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$. Unter der **Hesse-Matrix** von f in x_0 versteht man die Matrix:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Aussagen über Extremstellen: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $\nabla f(x_0) = 0$.

1. Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.
2. Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.
3. Ist $textbfU \subset \mathbb{R}^2$ und gilt $\det H_f(x_0) < 0$, so liegt kein Extremwert vor.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$

Gradient: $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$

$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$$

	k_1 gerade	k_1 ungerade
k_2 gerade	lokales Maximum	kein Extremwert
k_2 ungerade	kein Extremwert	lokales Minimum

Integralrechnung

Grundlegendes zu Mehrfachintegralen: Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da U beschränkt ist, gibt es einen kleinsten vorkommenden x-Wert a und einen größten vorkommenden x-Wert b.
Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers bei einem beliebigen x-Wert zwischen a und b wird mit $I(x)$ bezeichnet.
Der Körper, dessen Volumen wir ausrechnen, setzt sich aus all diesen Schnittflächen zusammen. Für jedes $x \in [a, b]$ existiert eine Schnittfläche mit Flächeninhalt $I(x)$, das heißt durch Aufsummieren dieser unendlich vielen Flächeninhalte ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_b^a I(x)dx$$

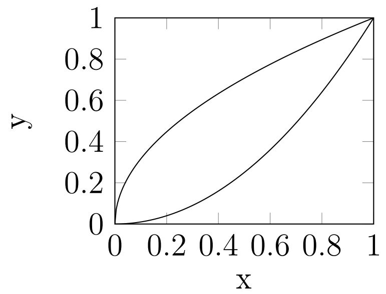
Der Flächeninhalt von $I(x)$ kann einfach mit einem eindimensionalen Integral berechnet werden.

$$I(x) = \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Beispiel: $U = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$



$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy \right) dx = \frac{33}{140}$

Ebenso im Dreidimensionalen: Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der in U kleinste vorkommende x-Wert und b der größte.
Für $x \in [a; b]$ bezeichnen wir den kleinsten y-Wert, für den es ein z gibt, sodass $(x, y, z) \in U$ gilt, mit $y_u(x)$, und den größten mit $y_o(x)$.
Schließlich bezeichnen wir für zulässiges (x,y) mit $z_u(x, y)$ den kleinsten z-Wert, sodass $(x, y, z) \in U$, und mit $z_o(x, y)$ den größten z-Wert. Dann ist

$$\iiint_U f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \left(\int_{z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Beispiel:

1. $U = [-1; 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

   $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

   $int^1_{-1} \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 + y^2 + z^2 dz \right) dy \right) dx$

2. $U = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x \leq 1, y \leq x, z \leq y\}$

   $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z$

Differentialgleichungen

Trennung der Variablen: Gegeben sei die Gleichung $y' = xy$. Gesucht ist die Funktion $y(x)$.
$y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{dx}{dy} = xy \to_{y \neq 0} \frac{dy}{y} = xdx$

Wronski-Determinante: Es sei L_H die Lösungsmenge einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dann gibt es n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung und es gilt: $L_H = \{c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\} | c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.
Aus den Grundlösungen $y_1, \ldots, y_n$ lässt sich also mit Hilfe von Linearkombinationen die gesamte Lösungsmenge berechnen.
Weiterhin sind n Lösungen $y_1, y_n \in L_H$ genau dann linear unabhängig, wenn für die **Wronski- Determinante** folgendes gilt:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Dabei genügt schon $W(x) \neq 0$ für ein x.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: Für die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

wird ein Ansatz verwendet, der eine e-Funktion enthält.

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$
Differenzieren und Einsetzen des Ansatzes führt zu:
$e^{\lambda x} \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)} = 0$
wird 0, falls λ eine Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ist.

Charakteristisches Polynom: Es sei $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.
Dann heißt das Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
charakteristisches Polynom der Differentialgleichung.

Es sei $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom $P(x)$ habe k reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $P(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \ldots (x-\lambda_k)^{m_k}$, d.h. λ_j ist m_j-fache Nullstelle von P. Dann bilden die Funktionen

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1} \cdot e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, x \cdot e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2-1} \cdot e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \quad \vdots \\ e^{\lambda_k x}, x \cdot e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x} \end{array}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Inhomogene Differentialgleichung: Liegt eine inhomogene Differentialgleichung mit Störfunktion $b(x)$ vor, so kann in einigen Fällen eine geeignete Ansatzfunktion zur Lösung der Differentialgleichung verwendet werden:
Liegt zum Beispiel die Störfunktion in der folgenden Form vor
$b(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, so kann die folgende Ansatzfunktion verwendet werden:
$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Beispiel: Zu lösen ist $y''' - 3y' - 2y = 4x^2$

Zunächst homogene Differentialgleichung betrachten: $y''' - 3y' - 2y = 0, P(x) = x^3 - 3x - 2$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $y(x) = c_1xe^{-x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

Ansatz für die Störfunktion: Da $b(x) = x^2$ ein Polynom 2. Grades ist, wird der Ansatz $\underbrace{\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0}_{y_P}$ verwendet.

${y_P}''' = 0, {y_P}'' = 2\alpha_2, {y_P}' = 2\alpha_2x + \alpha_1$

$-6\alpha_2x - 3\alpha_1 - 2\alpha_2x^2 - \alpha_1x - 2\alpha_0 = 4x^2$

$x^2\underbrace{(-2\alpha_2)}_{4} + x\underbrace{(-6\alpha_2 - \alpha_1)}_{0} + \underbrace{(-3\alpha_1 - 2\alpha_0)}_{0} = 4x^2 + 0x + 0$

$\alpha_2 = -2, \alpha_1 = 6, \alpha_0 = -9$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $y(x) = c_1xe^{-x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} - 2x^2 + 6x - 9,\ x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$

Differentialgleichungssysteme (DGLS)

Definition: Ein System von m Gleichungen, dass die unbekannten Funktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ sowie deren Ableitungen
$y_1{}'(x), y_1{}''(x), \dots, y_1{}^{(n_1)}(x), \dots, y_m{}'(x), y_m{}''(x), \dots, y_m{}^{(n_m)}(x)$ enthält, heißt **Differentialgleichungssystem**.

Beispiel: Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$y_1{}' = -2y_1 + 8y_2 \ (*)$$
$$y_2{}' = -4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \ (**)$$

Eliminationsmethode:

$(*)$ ableiten: $y_1{}'' = -2y_1{}' + 8y_2{}'$

$(**)$ einsetzen: $y_1{}'' = -2y_1{}' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64$

$y_1' = -2y_1 + 8y_2 (*)$

$y_2') - 4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 (**)$

$y_1'' = -2y_1 + 8(-4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8)$

$= -2y_1' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64\overline{(*)}'$

$(*)$ umstellen nach y_2

$y_2 = \frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1$

Einsetzen in $\overline{(*)}'$

$\to y_1'' = -2y_1' = -32y_1 + 48(\frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1) + 80x^2 + 128x - 64$

$y_1'(-2+6) + y_1(-32+12) + 89x^2 + 128x - 64$

$\to y_1''' - 4y_1' + 20y_1 = 80x^2 + 128x - 64 (***)$

$\to$ homogene DGL $\to$ charakteristisches Polynom:

$P(x) = x^2 - 4x + 20$

$a = 0; b = -4; c = 20$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm 4i$

$y_1 = \cos(4x) \cdot e^{2x}$

$y_2 = \sin(4x) \cdot e^{2x}$ (Eulersche Form)

$e^{\lambda x} = e^{(2+4i)x} = e^{2x}(\cos(4x) + i\sin(4x))$

Ansatz für die inhomogene Lösung:

$y_p = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$

$y_p' = 2\alpha_2 x + \alpha_1, y_p'' = 2\alpha_2, y_p'''(x) = 0$

Einsetzen in (***) für y_1, y_1', y_1''

$2\alpha_2 - 4(2\alpha_2 x + \alpha_1) + 20(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) = 80x^2 + 128x - 64$

Sortieren: $x^2(20\alpha_2) + x(-8\alpha_2 + 20\alpha_1) + (2\alpha_2 - 4\alpha_1 + 20\alpha_0)$

Koeffizientenvergleich $20\alpha_2 = 80$ usw.

$\alpha_0 = -2$

$\alpha_1 = 8$

$\alpha_2 = 4$

$y_1(x) = \underbrace{c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x}}_{\text{Homogene LSG}} + \underbrace{4x^2 + 8x - 2}_{\text{Partikuläre LSG}}$

(****)

$x \in \mathbb{R}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_2 = \frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1$

$y_1'(x) = -4c_1 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 2c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 4c_2 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 2c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 8x + 8$

$= e^{2x} \cdot \cos(4x)(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2) + e^{2x} \cdot \sin(4x)(-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2) + x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

Vektorschreibweise:

$c_1 = 2D_1$

$c_2 = 2D_2$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D_1 \\ D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x} \cdot \cos(4x) + \begin{pmatrix} 2D_2 \\ -D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x} \cdot \sin(4x) + \begin{pmatrix} 4x^2 + 8x - 2 \\ x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R} D_i \in \mathbb{R}$