Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Definition 1.1.1 (reelle Funktionen mit n Variablen) *Eine Funktion* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *mit* $(x_1, \ldots, x_n)\,\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $y \in \mathbb{R}$ *heißt reelle Funktion mit mehreren Variablen.* $\mathbb{D}$ *beschreibt den Definitionsbereich und wir schreiben* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$

Bemerkung 1.1.2 *Definition für Differenzierbarkeit im eindimensionalen Fall: Es sei* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$ f *ist differenzierbar in* x_0*, falls der Grenzwert* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ *existiert. In diesem Fall heißt* $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *die Ableitung von* f *in* x_0 *Man bezeichnet* $f'(x_0)$ *als den Differentialquotienten von* f *im Punkt* x_0*.*

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Definition 1.1.3 $P = (p_1, \ldots, p_n)$ *und* $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ *bezeichnen zwei Punkte im n-dimensionalen Raum* $\mathbb{R}^n$

$|P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n + q_n)^2}$ *heißt Abstand der Punkte P und Q.*

Die Delta-Umgebung des Punktes P ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft* $U_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\}$*.*

Definition 1.1.4 *Der Punkt P heißt innerer Punkt der Menge M* $(M \subset R^n)$*, wenn eine Umgebung des Punktes P existiert, für die* $U_\delta \subset M$ *gilt.*

Bemerkung 1.1.5 *Eine Menge heißt offene Menge, wenn dir nur aus inneren Punkten besteht.*

Definition 1.1.6 *Wenn* $(x_{0n}, \ldots, x_{0n})$ *ein innerer Punkt der Menge D ist und wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *an der Stelle* $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ *nach* x_i *partiell differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als partielle Ableitung der Funktion f nach* x_i *an der Stelle* $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$

Die Funktion f heißt in $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ *partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen nach allen Komponenten* $x_j (j = 1, \ldots, n)$ *existieren.*

Die Funktion heißt in $\mathbb{D}$ *partiell differenzierbar, wenn* f *in allen inneren Punkten aus* $\mathbb{D}$ *partiell differenzierbar ist.*

Bemerkung 1.1.7 *Die partielle Ableitung der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ nach der Komponente x_j kann wie folgt bezeichnet werden:*
$f_{x_j}(x_1, \dots, x_n)$ *oder* $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}$

Beispiel 1.1.8 *Gesucht sind die partiellen Ableitungen der Funktion* $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 * \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) \cdot 2e^{2x_3}$$

Bemerkung 1.1.9 *Die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2)$ berührt die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, f(\bar{x_1}, \bar{x_2}))$ und enthält alle Tangenten an die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P}$.*

Satz 1.1.10 *Es seien $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} -> \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt (x_{01}, x_{02}):*

$$x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02})$$

$$= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.11 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2^2)$*
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2$
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1$
$\to$ *Tangentialebene:* $x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2 \cdot (x_1 - x_{01}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_{02})$
$(x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$
$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} = 0$

Beispiel 1.1.12 $(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$
$f(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \sin(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot \sqrt[3]{\pi}^2 = -\pi^{\frac{2}{3}}$
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot 2\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi} = -2\pi^{\frac{2}{3}}$
$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} -\pi^{\frac{2}{3}} & -2\pi^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt[3]{\pi} \\ x_2 - \sqrt[3]{\pi} \end{pmatrix} = -\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_1 - \sqrt[3]{\pi}) + -2\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_2 - \sqrt[3]{\pi})$
$x_3 = -\pi^{\frac{2}{3}} x_1 - 2\pi^{\frac{2}{3}} x_2 + 3\pi$

Beispiel 1.1.13 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = |x_1| + x_2$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1$ $|x_1|$ *ist nur für* $x_1 \neq 0$ *differenzierbar, d.h.* f *ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar.*

Definition 1.1.14 (Gradient) *Es sei* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor* $\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ *der Gradient von* f *im Punkt* $x \in \mathbb{D} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Bemerkung 1.1.15 *Anstelle von* $\operatorname{grad} f(x)$ *wird auch häufig* $\nabla f(x)$ *geschrieben.*

Beispiel 1.1.16 *Berechnen Sie den Gradienten für:*

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
2. $g(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3$

zu 1. $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

zu 2. $\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2 \cos(x_1 x_2) + x_2 x_3 \\ 2x_1 \cos(x_1 x_2) + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.1.17 *Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.*
Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Im Punkt $(0,0)$ *existieren die partiellen Ableitungen:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta x) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

Aber f *ist in* $(0,0)$ *nicht stetig:*
Es gilt $f(x_1, 0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}$, $f(0, x_2) = 0; x_2 \in \mathbb{R}$
Für $x := x_1 = x_2$*:*
$f(x,x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & (x,x) \neq (0,0) \\ 0 & (x,x) = (0,0) \end{cases}$

Definition 1.1.18 (Stetigkeit) *Die Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}$ ist an der Stelle $\bar{P} = (\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}) \in \mathbb{D}$ stetig, wenn für den Funktionsgrenzwert*

$$\lim_{P \to \bar{P}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})$$

gilt.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$
2. Berechnen die den Gradienten der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1-1)\cdot\ln(x_1+1)}{x_2^2+x_3^2+1}$ an der Stelle $(0, 0, 0)$
3. Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2-(x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ im Punkt $(0, \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{4}})$

Definition 1.1.19 (k-mal partiell differenzierbar) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt zweimal partiell differenzierbar in x_0, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x_0 wieder partiell differenzierbar sind.*

Man schreibt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

Dieser Ausdruck heißt dann zweite partielle Ableitung von f.

Allgemein heißt f k-mal partiell differenzierbar, wennn alle (k-1)-ten partiellen Ableitungen von f wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ik} \partial x_{i(k-1)} \ldots \partial x_{i1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{ik}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i(k-1)} \ldots \partial x_{i1}}\right)(x_0) = f_{x_{ik} \ldots x_{i1}}$$

Aufgabe 1.1.20 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2$*

Berechnen Sie alle ersten und zweiten Ableitungen von f und $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2 - x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \cdot 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -2x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = +2$$

Definition 1.1.21 (stetig partiell differenzierbar) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$. f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung k stetig sind.*

Satz 1.1.22 (Satz von Schwarz) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle,*

Bemerkung 1.1.23 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Dann spielt die Reihenfolge der Ableitungsvariablen bei der k-ten partiellen Ableitung keine Rolle.*

Aufgabe 1.1.24 *Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$*

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot 2x_1 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) + 2e^{2x_3}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3\left(\cos(x_1^2 + x_2) - 2x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2)\right)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 x_3 \sin(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \sin(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1^2 + x_2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = 4e^{2x_3}$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1 (Betrag eines Vektors) *Der Betrag eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als:*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Definition 1.2.2 (Vektorfunktion) *Eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{D} \to W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$ mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt Vektorfunktion.*

Beispiel 1.2.3 *Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

f hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Definition 1.2.4 (total differenzierbar) *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Die Funktion f heißt total differenzierbar in x_0, falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine Restfunktion $R : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ gibt, für die gilt: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + |x - x_0| \cdot R(x)$ und*

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$$

Satz 1.2.5 (Jacobi-Matrix) *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Weiterhin sei f in x_0 total differenzierbar mit der Matrix*

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Dann ist f in x_0 stetig und alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind in x_0 partiell differenzierbar, wobei gilt: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von f und wird mit $Df(x_0)$ oder $J_f(x_0)$ bezeichnet.

Beispiel 1.2.6 *Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch*

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ \ln(x^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $D_g(x)$:

$$D_g(x) = \begin{pmatrix} 6x^2 \\ \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2.7

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 \cdot \sin x_2 \\ e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

$$D_f(x_1, x_2) =?$$

Bemerkung 1.2.8 *Nach Definition 1.2.4 kann eine Funktion $f(x)$, die total differenzierbar ist, in der Nähe von x_0 durch*

$$f(x_0) + D_f(x_0)(x - x_0)$$

angenähert werden.

Da die Annäherungsfunktion linear ist, spricht man auch von Linearisierung.

Hierfür muss aber klar sein, dass f auch wirklich total differenzierbar ist.

Satz 1.2.9 *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, deren Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ alle stetig partiell differenzierbar sind. Dann ist f total differenzierbar.*

Beispiel 1.2.10 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 \sin(x_3)$$

$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + x_2\sin(x_3) & x_1^2 + x_1\sin(x_3) & x_1x_2\cos(x_3) \end{pmatrix}$

f soll in der Nähe des Punktes $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$ angenähert werden. Zur Berechnung der Näherung wird benötigt: $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$2 + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - 3$

Aufgabe 1.2.11 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch*

$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1^2\sin(x_2) & e^{x_1x_2} \end{pmatrix}^T$ (siehe Aufgabe 1.2.7)

Berechnen Sie die Näherung der Funktion in der Nähe von $x_0 = (1, 0)$

Aufgabe 1.2.12 *Berechnen Sie die Tangentialebenen an die Funktion*

$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_3-1)^2}$ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x_{01}, x_{02}, f(x_{01}, x_{02})) = (0, 1, 1)$.

Verwenden Sie dazu zunächst die Formel für die Tangentialebenen und dann die Formel für die totale Differenzierbarkeit.

Definition 1.2.13 (totale Differenzierbarkeit) *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann kann f in der Nähe eines Punktes $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$ angenähert werden.*

Es gilt also $f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2) - f(x_{01}, x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=:\Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=:\Delta x_2}$$

also gilt: $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$

Für „beliebig kleines“ Δx_1 und Δx_2 schreiben wir „d“ statt „Δ“ und „=“ statt „$\approx$“.

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_2}$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als <u>totales Differenzial</u> der Funktion f.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_n}$$

Bemerkung 1.2.14 *Mit Hilfe des totalen Differentials kann der Einfluss der Änderung der Inputgrößen auf den Funktionswert abgeschätzt werden.*

Beispiel 1.2.15 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \sin(x_1 \cdot x_2)$. *Wir betrachten* f *in der Nähe des Punktes* $f(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

Was passiert wenn wir leicht von dem Wert abweichen?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + \cos(x_1 \cdot x_2)x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 \cdot x_2)x_1$$

$df = 2\sqrt{\pi} + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_1 - \sqrt{\pi}) + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_2 - \sqrt{\pi})$ $df = \sqrt{\pi} \cdot dx_1 + (-\sqrt{\pi}) \cdot dx_2$

Veränderung der Inputgrößen z.B. $dx_1 = 0.1$ $dx_2 = -0.1$

$df = 0.2 \cdot \sqrt{\pi}$

Bemerkung 1.2.16 *Durch Einsetzen der Maximalen absoluten Fehler und Bilden der Beträge ergibt sich der (lineare) maximale absolute Fehler:*

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_n|$$

Aufgabe 1.2.17 *Das Volumen* V *eines geraden Kreiskegels wird berechnet durch:* $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{k^2 - r^2}$.

r... Radius r=1m und absoluter Fehler von 0.01m

k... Mantellinie k=1.5m und der absolute Fehler: 0.005m

Berechnen Sie den (linearen) maximalen absoluten Fehler.

Papula zu Abschnitt 2 S. 332: 12, 13, 15

1.3 Extremwerte

Definition 1.3.1 (Lokales Extremum) *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung.*

(i) *Ein Punkt* $x_0 \in U$ *heißt* *lokales Maximum* *von* f, *falls* f *in der Nähe von* x_0 *nicht größer wird als bei* x_0, *das heißt:* $f(x) \leq f(x_0)$ *für alle* x *in der Nähe von* x_0.

(ii) *Ein Punkt* $x_0 \in U$ *heißt* *lokales Minimum* *von* f, *falls* f *in der Nähe von* x_0 *nicht kleiner wird als bei* x_0, *das heißt:* $f(x) \geq f(x_0)$ *für alle* x *in der Nähe von* x_0.

Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Bemerkung 1.3.2 *Wie im eindimensionalen Fall liefert die Differentialrechnung nur Informationen über lokale und nicht über globale Extrema.*

Bemerkung 1.3.3 *Es sei* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in (a, b)$ *mit einem lokalen Extremum in* x_0. *Dann ist* $f'(x_0) = 0$.

Satz 1.3.4 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt:*

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$

Beispiel 1.3.5 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

$\to x_1 = x_2 = 0$
Das heißt falls es ein Extremum gibt, dann liegt es bei (0,0).

Aufgabe 1.3.6

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\cos(x_1) \cdot \sin(x_2) = 0$
$(x_1 = \pi)$ *od.* $\sin(x_2) = 0$

Bemerkung 1.3.7 *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.*

(i) *Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.*

Definition 1.3.8 *Eine Matrix $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, falls gilt:*

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ldots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0,$$

also $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$ *für alle $k = 1, \ldots, n$.*
A heißt negativ definit, falls -A positiv definit ist.

Beispiel 1.3.9 *Es sei* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
$\underline{k = 1} : 1 > 0$
$\underline{k = 2} : \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$
$\to$ *A ist positiv definit.*

Aufgabe 1.3.10 $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$-6 < 0 \rightarrow$ *B nicht positiv definit*

$-B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{k=1}: 6 > 0$

$\underline{k=2}: \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 2 > 0$

$\rightarrow$ *B ist negativ definit.*

Aufgabe 1.3.11 *Prüfen Sie* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *auf positive Definitheit.*

Bemerkung 1.3.12 $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{2\times 2}$ *ist weder positiv noch negativ definit:* $d_{11} \not> 0 \rightarrow$ *nicht positiv definit*

$-d_{11} \not> 0 \rightarrow$ *nicht negativ definit*

Definition 1.3.13 *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge,* $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und* $x_0 \in U$*. Unter der* *<u>Hesse-Matrix</u>* *von* f *in* x_0 *versteht man die Matrix:*

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.3.14 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$*. Gesucht ist die Hesse-Matrix.*

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3.15 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ *durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \sin(x_3)$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(0, 0, 0)$ *&* $H_f(1, 1, 0)$*.*

Satz 1.3.16 *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge,* $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und* $x_0 \in U$ *ein Punkt mit* $\nabla f(x_0) = 0$*.*

(i) *Ist* $H_f(x_0)$ *positiv definit, so hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum.*

(ii) *Ist* $H_f(x_0)$ *negativ definit, so hat* f *in* x_0 *ein lokales Maximum.*

(iii) *Ist* $\underline{U \subset \mathbb{R}^2}$ *und gilt* $\det H_f(x_0) < 0$*, so liegt kein Extremwert vor.*

Beispiel 1.3.17 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$

$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} := 0 \to x_1 = x_2 = 0$

$\to (0,0)$ *könnte ein Extremum sein*

Überprüfen durch Hesse-Matrix

$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$

$\to H_f(0,0)$ *positiv definit* $\to$ *in* $(0,0)$ *liegt ein lokales Minimum vor.*

Aufgabe 1.3.18 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.

Kandidaten: $(0,0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 1.3.19 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$

Gradient: $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$

$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Hesse-Matrix

$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$

$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$

	k_1 *gerade*	k_1 *ungerade*
k_2 *gerade*	*lokales Maximum*	*kein Extremwert*
k_2 *ungerade*	*kein Extremwert*	*lokales Minimum*

Beispiel 1.3.20 (Nebenbedingungen) *Gegeben sei 12m langer Draht, aus dem die Kanten eines Quaders von möglichst großem Volumen hergestellt werden sollen. Gesucht sind die Kantenlängen* x_1, x_2, x_3 *des optimalen Quaders.*

$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) = 12$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$x_1, x_2, x_3 > 0$

$V = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$

$V = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$

$\mathbb{D} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 3$, *$\mathbb{D}$ ist eine offene Menge*
$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
Berechnen Sie die Hesse-Matrix
*Beispiel ***:*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Stetigkeit in (0,0)

$$\bar{P} \lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})$$

Es gilt: $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} |x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \underbrace{|x \cdot y|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}|}_{\leq 1}$

Aufgabe 1.3.21 *Papula S.332 zu Abschnitt 2 $\rightarrow$ Aufg. 24*

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 13$
2. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 3$
3. $f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - 25)(x_2 - 2) + 5x_2^2 + 12x_2$

2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionenmit mehreren Variablen

2.1 Zweidimensionale Integralrechnung

Definition 2.1.1 (beschränkt) *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt* <u>*beschränkt*</u>*, wenn es ein Rechteck R gibt, sodass $U \subset R$ gilt.*

Bemerkung 2.1.2

Bemerkung 2.1.3 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da ein Volumen betrachtet wird, werden die alten Näherungsrechtecke durch Näherungsquader ersetzt und deren Volumen zusammengezählt.*

U wird also in n kleine Teilbereiche $u_1, \ldots, u_n$ zerlegt. Die Fläche dieser Teilbereiche wird mit $\delta u_1, \ldots, \Delta u_n$ bezeichnet.

Zur Berechnung des Rauminhalts des Quaders wird weiterhin die Quaderhöhe benötigt. Dazu wird ein Punkt $(x_i, y_i) \in U_i$ gewählt und sein Funktionswert $f(x_i, y_i)$ als Höhe des Quaders betrachtet. Das Teilvolumen beträgt dann $f(x_i, y_i) \cdot \Delta u_i$

Falls U_i ein Rechteck ist mit den Seiten Δx_i und Δy_i, so ergibt sich das Teilvolumen

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

Als Näherung für das Gesamtvolumen eribt sich also

$$V_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Hier wurde der gesamte Definitionsbereich U in die n Teilbereiche $U_1, \ldots, U_n$ zerlegt. Der genaue Wert für das Volumen kann berechnet werden, indem n gegen ∞ geht. Deshalb wird definiert:

$$\int_U f(x, y) dU = \int_U f(x, y) dx dy$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Um klarzustellen, dass es sich um ein zweidimensionales Integral handelt, werden oft die zwei Integralsymbole verwendet:

$$\iint_U f(x,y)dU = \iint_U f(x,y)dxdy$$

Definition 2.1.4 (konvex) *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ oder $U \subset \mathbb{R}^3$ heißt konvex, falls für alle Punkte $x, y \in U$ auch die gesamte Verbindungsstrecke von x nach y in U liegt.*

Bemerkung 2.1.5 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da U beschränkt ist, gibt es einen kleinsten vorkommenden x-Wert a und einen größten vorkommenden x-Wert b.*

Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers bei einem beliebigen x-Wert zwischen a und b wird mit $I(x)$ bezeichnet.

Der Körper, dessen Volumen wir ausrechnen, setzt sich aus all diesen Schnittflächen zusammen. Für jedes $x \in [a,b]$ existiert eine Schnittfläche mit Flächeninhalt $I(x)$, das heißt durch Aufsummieren dieser unendlich vielen Flächeninhalte ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_b^a I(x)dx$$

Der Flächeninhalt von $I(x)$ kann einfach mit einem eindimensionalen Integral berechnet werden.

$$I(x) = \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Satz 2.1.6 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der kleinste in U vorkommende x-Wert und b der größete in U vorkommende x-Wert. Für $x \in [a,b]$ bezeichnen wir den kleinsten y-Wert für den $(x,y) \in U$ gilt, als $y_u(x)$ und den größten y-Wert als $y_o(x)$.*

Dann ist $\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$

Beispiel 2.1.7

1. *$U = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,2]\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2$*

   $a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = 2$

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2^3}{3} \right) dx$$

$$\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x \right]_0^1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

2. $U = \{(x,y) : x \geq 0, x \leq 1, y \leq x, y \geq 0\}$

$f : U \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$

$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = x$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x x \cdot \sin(y) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left([x \cdot -\cos(y)]_0^x \right) dx$$

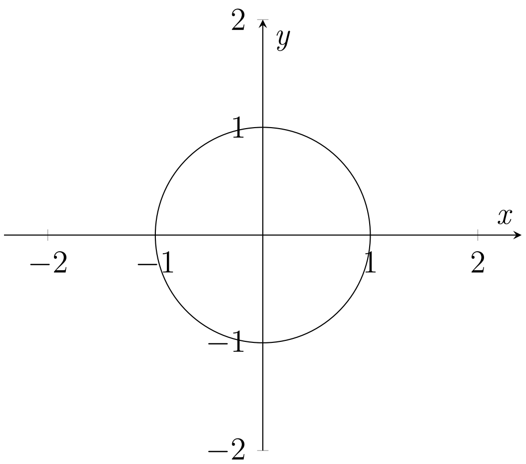
$$-\int_0^1 \left(x \cdot \cos(x) + x \right) dx$$

$$-\left[x \cdot \sin(x) + \cos(x) + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$-\left(1 \cdot \sin(1) + \cos(1) + \frac{1^2}{2} - \cos(0) \right) = -\sin(1) - \cos(1) + \frac{3}{2}$$

3. $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$f : U \to \mathbb{R}, f(x,y) = 1$



$$\iint_U (1)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left([y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

Einschub *Substitution:* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$\int f(x(t)) \cdot x'(t)dt = \int f(x)dx$

$x(t) = \sin(t) \rightarrow t = \arcsin(x)$

$\int f(x)dx = \int \sqrt{1-x^2}dx = \int f(\sin(t)) \cdot x'(t)dt = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)dt$

$= \int \cos(t)\cdot\cos(t)dt = \cos(t)\cdot\sin(t) + \int \sin(t)\cdot\sin(t)dt = \int \sin^2(t)dt = \int 1-\cos^2(t)dt$

$= \cos(t) \cdot \sin(t) + t - \int \cos^2(t)dt$

$\rightarrow \int \cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$

Rücksubstitution

$\frac{x}{2} \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$

$\cos(t) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$

$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2}$

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]_{-1}^{1}$$

$$\arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Satz 2.1.8 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der kleinste in U vorkommende y-Wert und b der größte in U vorkommende y-Wert.*

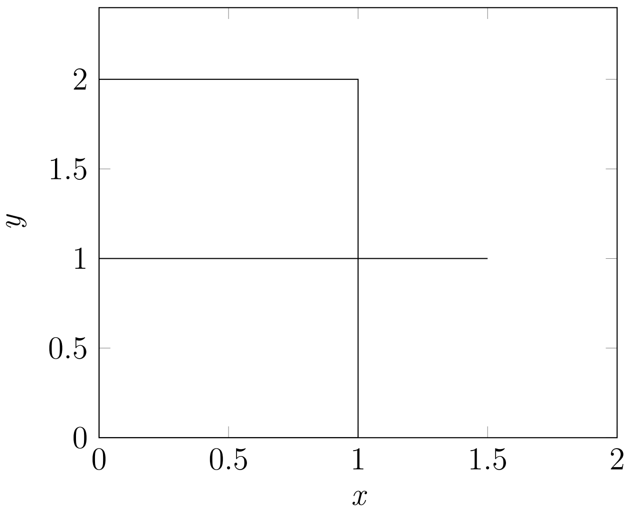
Für $y \in [a; b]$ bezeichnen wir den kleinsten x-Wert, für den $(x, y) \in U$ gilt als $x_u(y)$ und den größten als $x_o(y)$.

Dann ist $\iint_U f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f(x, y)dx \right) dy$

Beispiel 2.1.9

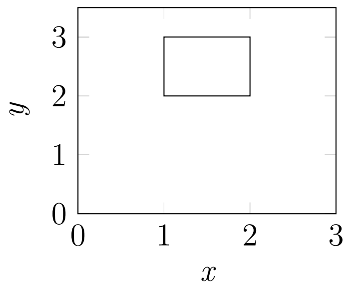
$$\iint_U x^2 + y^2 dxdy$$

$U = [0, 1] \times [0, 2]$



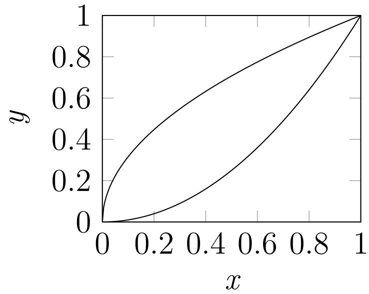
Aufgabe 2.1.10 *$f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$*

1. $U = \{(x, y) : 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3\}$

   $\iint_U f(x, y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_2^3 (x^2 + y)dy \right) dx = \frac{29}{6}$

2. $U = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

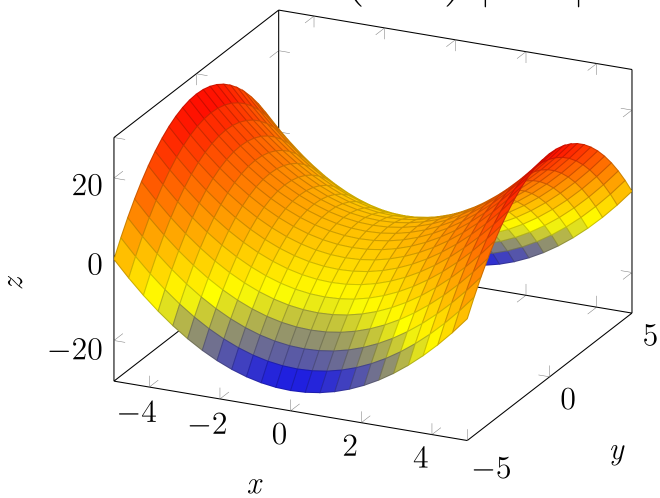
   $\iint_U f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy \right) dx = \frac{33}{140}$

Einschub (Terassenpunkte) *Jeder Punkt $x_0 \in D_f$ (Definitionsbereich) einer Funktion $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ heißt kritischer Punkt von f.*

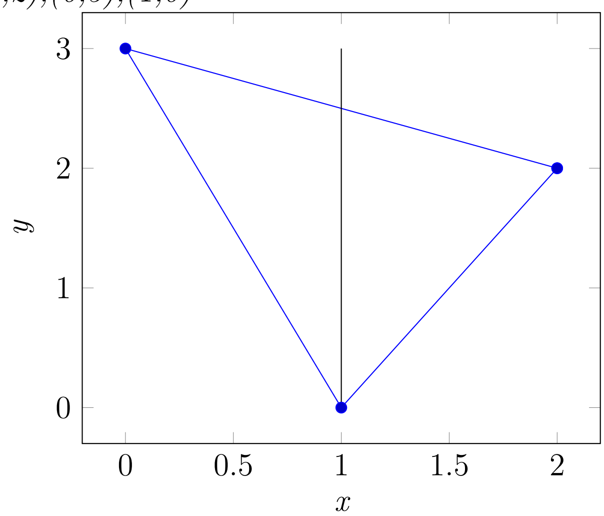
Jeder kritische Punkt, von f, der nicht gleichzeitig ein lokales Extremum ist, heißt Terassenpunkt von f.

Beispiel:

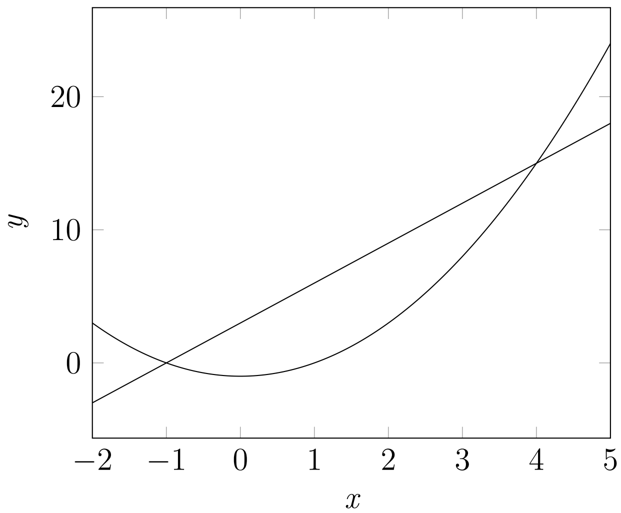
$f(x,y) = x^2 - y^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$
$\rightarrow (0,0)$ *ist Kandidat*
Hessematrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{-4 < 0}}$



Aufgabe 2.1.11 *Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten (2,2),(0,3),(1,0)*



Aufgabe 2.1.12 *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen* $f_1(x) = x^2 - 1$ *und* $f_2(x) = 3x + 3$ *begrenzt wird.*



Aufgabe 2.1.13 *Berechnen Sie* $\int_0^\infty x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1, x_2 > 0$

$$\lim_{c \to \infty} \int_0^C$$

2.2 Dreidimensionale Integralrechnung

Satz 2.2.1 *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^3$ *eine beschränkte und konvexe Menge und* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Weiterhin sei* a *der in* U *kleinste vorkommende* x*-Wert und* b *der größte.*

Für $x \in [a; b]$ *bezeichnen wir den kleinsten* y*-Wert, für den es ein* z *gibt, sodass* $(x, y, z) \in U$ *gilt, mit* $y_u(x)$*, und den größten mit* $y_o(x)$*.*

Schließlich bezeichnen wir für zulässiges (x,y) mit $z_u(x, y)$ *den kleinsten* z*-Wert, sodass* $(x, y, z) \in U$*, und mit* $z_o(x, y)$ *den größten* z*-Wert. Dann ist*

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \left(\int_{z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Beispiel 2.2.2

1. $U = [-1; 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

   $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

2. $U = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x \leq 1, y \leq x, z \leq y\}$

   $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z$