

# Matrizenmultiplikation mit dem Falkschema

Falksches Schema  
für die  
Matrixmultiplikation

$$A \cdot B = C$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = C$$

Das Matrixelement  $c_{32}$  entsteht aus dem Skalarprodukt  
der 3. Zeile von  $A$  und der 2. Spalte von  $B$ :  
 $(-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) = -5$

## Einfache Ableitungsregeln

**Faktorregel:**

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$$

**Summenregel:**

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

$$\Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$$

**Produktregel:**

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

**Quotientenregel:**

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

**Kettenregel:**

$$y = a(b(c(x))) \Rightarrow y' = a'(x) \cdot b'(x) \cdot c'(x)$$

**Wichtige Ableitungen:**

$$f(x) \Rightarrow f'(x)$$

$$\ln(x) \Rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\arccos(x) \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Wichtige Rechnungen:**

$$\ln(1) = 0$$

# Partielle Ableitungen

**Bildung partieller Ableitungen:** Die partiellen Ableitungen einer Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_3$  lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= 1 \cdot x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= 1\end{aligned}$$

**Berechnung der Tangentialebene:** Es seien  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion und  $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$ . Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt  $(x_{01}, x_{02})$ :

$$\begin{aligned}x_3 &= f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02}) \\ &= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Zuerst den Punkt  $(x_{01}, x_{02})$  an den Stellen  $x_{01}$  und  $x_{02}$  einsetzen. Dann ausrechnen und am Ende den Punkt für  $x_1$  und  $x_2$  einsetzen um zum Ergebnis für  $x_3$  an dem genannten Punkt zu kommen.

**Berechnung Gradient:** Es sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad \text{der Gradient von } f \text{ im Punkt } x \in \mathbb{D} = (x_1, \dots, x_n).$$

Anstelle von  $\text{grad} f(x)$  wird auch häufig  $\nabla f(x)$  geschrieben.

## Partielle Ableitungen k-ter Ordnung:

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion und  $x_0 \in D$ . Die Funktion  $f$  heißt zweimal **partiell differenzierbar** in  $x_0$ , wenn alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $x_0$  wieder partiell differenzierbar sind.

Man schreibt  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

Dieser Ausdruck heißt dann **zweite partielle Ableitung** von  $f$ .

Allgemein heißt  $f$  **k-mal partiell differenzierbar**, wennn alle  $(k-1)$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{(k-1)}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{(k-1)}} \dots \partial x_{i_1}} \right)(x_0) = f_{x_{i_k} \dots x_{i_1}}$$

**Satz von Schwarz:** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle.

# Totale Differenzierbarkeit

**Vektorfunktion:** Eine eindeutige Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$  mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt Vektorfunktion.

**Beispiel:** Es sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2, x_3)$  hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

**Jacobi-Matrix:** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $x_0 \in \mathbb{D}$ . Weiterhin sei  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar mit der Matrix

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig und alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind in  $x_0$  partiell differenzierbar, wobei gilt:  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ .

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch

Jacobi-Matrix von  $f$  und wird mit  $Df(x_0)$  oder  $J_f(x_0)$  bezeichnet.

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Totale Differenzierbarkeit** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbare Funktion. Dann kann  $f$  in der Nähe eines Punktes  $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$  durch  $f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$  angenähert werden.

$$\text{Es gilt also } f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) - f(x_{01}, x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=: \Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=: \Delta x_2}$$

$$\text{also gilt: } \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$$

Für „beliebig kleines“  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  schreiben wir „d“ statt „ $\Delta$ “ und „=“ statt „ $\approx$ “.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_2$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als totales Differenzial der Funktion  $f$ .

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$