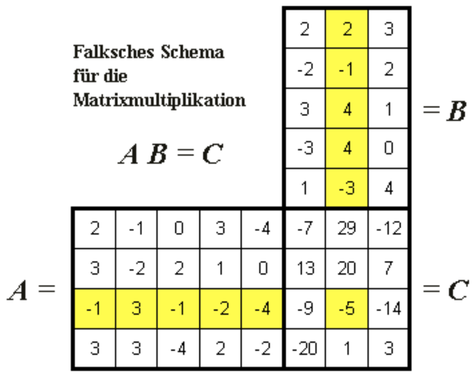
Matrizenmultiplikation mit dem Falkschema



Das Matrixelement c_{32} entsteht aus dem Skalarprodukt der 3. Zeile von A und der 2. Spalte von B:
$(-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 + (-2)\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) = -5$

Einfache Ableitungsregeln

Faktroregel:

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$$

Summenregel:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

$$\Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$$

Produktregel:

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Kettenregel:

$$y = a(b(c(x))) \Rightarrow y' = a'(x) \cdot b'(x) \cdot c'(x)$$

Wichtige Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &\Rightarrow f'(x) \\ \ln(x) &\Rightarrow \frac{1}{x} \\ \arccos(x) &\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Wichtige Rechnungen:

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 0 \\ \cos(0) = \cos(\pi) = \cos(2\pi) &= 0 \\ \sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) &= 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen

Bildung partieller Ableitungen: Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x_1, x_2, x3) = x_1 \cdot x_2 + x3$ lassen sich sich wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 1$$

Berechnung der Tangentialebene: Es seien $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} - > \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt (x_{01}, x_{02}):

$$\begin{aligned} x_3 &= f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02}) \\ &= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zuerst den Punkt (x_{01}, x_{02}) an den Stellen x_{01} und x_{02} einsetzen. Dann ausrechnen und am Ende den Punkt für x_1 und x_2 einsetzen um zum Ergebnis für x3 an dem genannten Punkt zu kommen.

Berechnung Gradient: Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$ der Gradient von f im Punkt $x \in \mathbb{D} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Anstelle von $\text{grad} f(x)$ wird auch häufig $\nabla f(x)$ geschrieben.

Partielle Ableitungen k-ter Ordnung:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt zweimal **partiell differenzierbar** in x_0, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x_0 wieder partiell differenzierbar sind.

Man schreibt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

Dieser Ausdruck heißt dann **zweite partielle Ableitung** von f.

Allgemein heißt f **k-mal partiell differenzierbar**, wennn alle (k-1)-ten partiellen Ableitungen von f wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ik} \partial x_{i(k-1)} \ldots \partial x_{i1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{ik}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i(k-1)} \ldots \partial x_{i1}}\right)(x_0) = f_{x_{ik} \ldots x_{i1}}$$

Satz von Schwarz: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle.

Totale Differenzierbarkeit

Vektorfunktion: Eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{D} \to W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$ mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt **Vektorfunktion**.

Beispiel: Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2, x_3)$ hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Jacobi-Matrix: Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Weiterhin sei f in x_0 total differenzierbar mit der Matrix

$$A = (a_{ij}); i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist f in x_0 stetig und alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind in x_0 partiell differenzierbar, wobei gilt: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.
Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von f und wird mit $Df(x_0)$ oder $J_f(x_0)$ bezeichnet.

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Totale Differenzierbarkeit: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann kann f in der Nähe eines Punktes $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$ angenähert werden.

Es gilt also $f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2) - f(x_{01}, x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=:\Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=:\Delta x_2}$$

also gilt: $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$
Für „beliebig kleines“ Δx_1 und Δx_2 schreiben wir „d“ statt „Δ“ und „$=$“ statt „$\approx$“.

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_2}$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als **totales Differenzial** der Funktion f.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_n}$$

Berechnung linearer maximaler absoluter Fehler:

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_n|$$

Extremwerte

Bestimmung lokales Extremum: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt: $\boxed{\nabla f(x_0) = 0}$ d.h. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0}$

Definitheit einer Matrix: Eine Matrix $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **positiv definit**, falls gilt:

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ldots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0,$$

also $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

A heißt **negativ definit**, falls -A positiv definit ist.

Berechnung der Determinante einer 2x2 Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot b - c \cdot b$$

Berechnung der Determinante einer 3x3 Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - g\cdot e\cdot c\cdot - h\cdot f\cdot a - i\cdot d\cdot b$$