1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Definition 1.1.1 (reelle Funktionen mit n Variablen) *Eine Funktion* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *mit* $(x_1, \ldots, x_n) \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $y \in \mathbb{R}$ *heißt reelle Funktion mit mehreren Variablen.* $\mathbb{D}$ *beschreibt den Definitionsbereich und wir schreiben* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$

Bemerkung 1.1.2 *Definition für Differenzierbarkeit im eindimensionalen Fall: Es sei* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$ f *ist differenzierbar in* x_0*, falls der Grenzwert* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ *existiert. In diesem Fall heißt* $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *die Ableitung von* f *in* x_0 *Man bezeichnet* $f'(x_0)$ *als den Differentialquotienten von* f *im Punkt* x_0*.*

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Definition 1.1.3 $P = (p_1, \ldots, p_n)$ *und* $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ *bezeichnen zwei Punkte im n-dimensionalen Raum* $\mathbb{R}^n$

$|P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n + q_n)^2}$ *heißt Abstand der Punkte* P *und* Q*.*

Die Delta-Umgebung des Punktes P *ist eine Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft* $U_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\}$*.*

Definition 1.1.4 *Der Punkt* P *heißt innerer Punkt der Menge* M $(M \subset R^n)$*, wenn eine Umgebung des Punktes* P *existiert, für die* $U_\delta \subset M$ *gilt.*

Bemerkung 1.1.5 *Eine Menge heißt offene Menge, wenn dir nur aus inneren Punkten besteht.*

Definition 1.1.6 *Wenn* $(x_{0n}, \ldots, x_{0n})$ *ein innerer Punkt der Menge* D *ist und wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *an der Stelle* $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ *nach* x_i *partiell differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als partielle Ableitung der Funktion* f *nach* x_i *an der Stelle* $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$

Die Funktion f *heißt in* $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ *partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen nach allen Komponenten* $x_j (j = 1, \ldots, n)$ *existieren.*

Die Funktion heißt in $\mathbb{D}$ *partiell differenzierbar, wenn* f *in allen inneren Punkten aus* $\mathbb{D}$ *partiell differenzierbar ist.*

Bemerkung 1.1.7 *Die partielle Ableitung der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ nach der Komponente x_j kann wie folgt bezeichnet werden:*
$f_{x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ *oder* $\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}$

Beispiel 1.1.8 *Gesucht sind die partiellen Ableitungen der Funktion* $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 * \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) \cdot 2e^{2x_3}$$

Bemerkung 1.1.9 *Die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2)$ berührt die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, f(\bar{x_1}, \bar{x_2}))$ und enthält alle Tangenten an die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\bar{P}$.*

Satz 1.1.10 *Es seien $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} -> \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion und $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt (x_{01}, x_{02}):*

$$x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02})$$

$$= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.11 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 -> \mathbb{R}$ durch* $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2^2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2$
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1$
$\rightarrow$ *Tangentialebene:* $x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2 \cdot (x_1 - x_{01}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_{02})$
$(x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$
$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} = 0$

Beispiel 1.1.12 $(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$
$f(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \sin(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot \sqrt[3]{\pi}^2 = -\pi^{\frac{2}{3}}$
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot 2\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi} = -2\pi^{\frac{2}{3}}$
$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} -\pi^{\frac{2}{3}} & -2\pi^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt[3]{\pi} \\ x_2 - \sqrt[3]{\pi} \end{pmatrix} = -\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_1 - \sqrt[3]{\pi}) + -2\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_2 - \sqrt[3]{\pi})$
$x_3 = -\pi^{\frac{2}{3}} x_1 - 2\pi^{\frac{2}{3}} x_2 + 3\pi$

Beispiel 1.1.13 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = |x_1| + x_2$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1$ $|x_1|$ *ist nur für* $x_1 \neq 0$ *differenzierbar, d.h.* f *ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar.*

Definition 1.1.14 (Gradient) *Es sei* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor* $\mathrm{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ *der Gradient von* f *im Punkt* $x \in \mathbb{D} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Bemerkung 1.1.15 *Anstelle von* $\mathrm{grad} f(x)$ *wird auch häufig* $\nabla f(x)$ *geschrieben.*

Beispiel 1.1.16 *Berechnen Sie den Gradienten für:*

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
2. $g(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3$

zu 1. $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

zu 2. $\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2 \cos(x_1 x_2) + x_2 x_3 \\ 2x_1 \cos(x_1 x_2) + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.1.17 *Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.*
Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Im Punkt $(0,0)$ *existieren die partiellen Ableitungen:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta x) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

Aber f *ist in* $(0,0)$ *nicht stetig:*
Es gilt $f(x_1, 0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}$, $f(0, x_2) = 0; x_2 \in \mathbb{R}$
Für $x := x_1 = x_2$*:*
$f(x, x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & (x,x) \neq (0,0) \\ 0 & (x,x) = (0,0) \end{cases}$

Definition 1.1.18 (Stetigkeit) *Die Funktion* $y = f(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$ *ist an der Stelle* $\bar{P} = (\bar{x_1}, \dots, \bar{x_n}) \in \mathbb{D}$ *stetig, wenn für den Funktionsgrenzwert*

$$\lim_{P \to \bar{P}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x_1}, \dots, \bar{x_n})$$

gilt.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2-(x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$
2. Berechnen die den Gradienten der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1-1)\cdot\ln(x_1+1)}{x_2^2+x_3^2+1}$ an der Stelle $(0, 0, 0)$
3. Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2-(x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ im Punkt $(0, \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{4}})$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1 (Betrag eines Vektors) *Der Betrag eines Vektors* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *ist definiert als:*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Definition 1.2.2 (Vektorfunktion) *Eine eindeutige Abbildung* $f : \mathbb{D} \to W, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, m > 1$ *mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt* <u>*Vektorfunktion.*</u>

Beispiel 1.2.3 *Es sei* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *gegeben durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

f *hat 2 Ergebniskomponenten:*

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Definition 1.2.4 (total differenzierbar) *Es sei* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ *eine Abbildung und* $x_0 \in \mathbb{D}$. *Die Funktion* f *heißt total differenzierbar in* x_0, *falls es eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und eine Restfunktion* $R : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ *gibt, für die gilt:* $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + |x - x_0| \cdot R(x)$ *und*

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$$

Satz 1.2.5 (Jacobi-Matrix) *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{D}$. Weiterhin sei f in x_0 total differenzierbar mit der Matrix*

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist f in x_0 stetig und alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind in x_0 partiell differenzierbar, wobei gilt: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von f und wird mit $Df(x_0)$ oder $J_f(x_0)$ bezeichnet.

Beispiel 1.2.6 *Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch*

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ \ln(x^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $D_g(x)$:

$$D_g(x) = \begin{pmatrix} 6x^2 \\ \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2.7

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 \cdot \sin x_2 \\ e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

$$D_f(x_1, x_2) = ?$$

Bemerkung 1.2.8 *Nach Definition 1.2.4 kann eine Funktion f(x), die total differenzierbar ist, in der Nähe von x_0 durch*

$$f(x_0) + D_f(x_0)(x - x_0)$$

angenähert werden.

Da die Annäherungsfunktion linear ist, spricht man auch von Linearisierung.

Hierfür muss aber klar sein, dass f auch wirklich total differenzierbar ist.

Satz 1.2.9 *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, deren Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ alle stetig partiell differenzierbar sind. Dann ist f total differenzierbar.*

Beispiel 1.2.10 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 \sin(x_3)$$

$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + x_2\sin(x_3) & x_1^2 + x_1\sin(x_3) & x_1x_2\cos(x_3) \end{pmatrix}$

f soll in der Nähe des Punktes $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$ angenähert werden. Zur Berechnung der Näherung wird benötigt: $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$2 + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - 3$

Aufgabe 1.2.11 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1^2 \sin(x_2) & e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}^T$ (siehe Aufgabe 1.2.7)*

Berechnen Sie die Näherung der Funktion in der Nähe von $x_0 = (1, 0)$

Aufgabe 1.2.12 *Berechnen Sie die Tangentialebenen an die Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_3 - 1)^2}$ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x_{01}, x_{02}, f(x_{01}, x_{02})) = (0, 1, 1)$.*

Verwenden Sie dazu zunächst die Formel für die Tangentialebenen und dann die Formel für die totale Differenzierbarkeit.

Definition 1.2.13 (totale Differenzierbarkeit) *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann kann f in der Nähe eines Punktes $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$ angenähert werden.*

Es gilt also $f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$

1.3 Extremwerte

Definition 1.3.1 (Lokales Extremum) *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.*

(i) Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt <u>lokales Maximum</u> von f, falls f in der Nähe von x_0 nicht größer wird als bei x_0, das heißt: $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x in der Nähe von x_0.

(ii) Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt <u>lokales Minimum</u> von f, falls f in der Nähe von x_0 nicht kleiner wird als bei x_0, das heißt: $f(x) \geq f(x_0)$ für alle x in der Nähe von x_0.

Ein <u>lokales Extremum</u> ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Bemerkung 1.3.2 *Wie im eindimensionalen Fall liefert die Differentialrechnung nur Informationen über lokale und nicht über globale Extrema.*

Bemerkung 1.3.3 *Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ mit einem lokalen Extremum in x_0. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Satz 1.3.4 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt:*

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$

Beispiel 1.3.5 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

$\to x_1 = x_2 = 0$
D.h. falls es ein Extremum gibt, dann liegt es bei (0,0).

Aufgabe 1.3.6

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\cos(x_1) \cdot \sin(x_2) = 0$
$(x_1 = \pi)$ *od.* $\sin(x_2) = 0$

Bemerkung 1.3.7 *Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.*

(i) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(ii) Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Definition 1.3.8 *Eine Matrix $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt <u>positiv definit</u>, falls gilt:* $a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ldots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0$, *also* $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$ *für alle $k = 1, \ldots, n$.*
A heißt <u>negativ definit</u>, falls -A positiv definit ist.

Beispiel 1.3.9 *Es sei* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
$\underline{k=1} : 1 > 0$
$\underline{k=2} : \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$
$\to$ *A ist positiv definit.*

Aufgabe 1.3.10 $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$-6 < 0 \to$ *B nicht positiv definit*

$-B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{k=1}: 6 > 0$

$\underline{k=2}: \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 2 > 0$

$\to$ *B ist negativ definit.*

Aufgabe 1.3.11 *Prüfen Sie* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *auf positive Definitheit.*

Bemerkung 1.3.12 $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{2\times 2}$ *ist weder positiv noch negativ definit:* $d_{11} \not> 0 \to$ *nicht positiv definit*

$-d_{11} \not> 0 \to$ *nicht negativ definit*

Definition 1.3.13 *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge,* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und* $x_0 \in U$. *Unter der* <u>*Hesse-Matrix*</u> *von* f *in* x_0 *versteht man die Matrix:*

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.3.14 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. *Gesucht ist die Hesse-Matrix.*

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3.15 *Gegeben sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *durch*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \sin(x_3)$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(0,0,0)$ *&* $H_f(1,1,0)$.

Satz 1.3.16 *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge,* $f : U \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und* $x_0 \in U$ *ein Punkt mit* $\nabla f(x_0) = 0$.

(i) Ist $H_f(x_0)$ *positiv definit, so hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum.*

(ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(iii) Ist $\underline{U \subset \mathbb{R}^2}$ und gilt $\det H_f(x_0) < 0$, so liegt kein Extremwert vor.

Beispiel 1.3.17 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$*

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} := 0 \to x_1 = x_2 = 0$$

$\to (0,0)$ *könnte ein Extremum sein*
Überprüfen durch Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$\to H_f(0,0)$ *positiv definit* $\to$ *in* $(0,0)$ *liegt ein lokales Minimum vor.*

Aufgabe 1.3.18 *Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$*
Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.
Kandidaten: $(0,0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 1.3.19 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$*

Gradient: $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$

$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$
Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$$

	k_1 *gerade*	k_1 *ungerade*
k_2 *gerade*	*lokales Maximum*	*kein Extremwert*
k_2 *ungerade*	*kein Extremwert*	*lokales Minimum*

Beispiel 1.3.20 (Nebenbedingungen) *Gegeben sei 12m langer Draht, aus dem die Kanten eines Quaders von möglichst großem Volumen hergestellt werden sollen. Gesucht sind die Kantenlängen x_1, x_2, x_3 des optimalen Quaders.*

$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) = 12$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
$x_1, x_2, x_3 > 0$
$V = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$
$V = 3x_1x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$

$\mathbb{D} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 3$, $\mathbb{D}$ *ist eine offene Menge*
$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
Berechnen Sie die Hesse-Matrix
*Beispiel ***:*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Stetigkeit in (0,0)

$$\bar{P} \lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}$$

Es gilt: $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} |x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \underbrace{|x \cdot y|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}|}_{\leq 1}$

Aufgabe 1.3.21 *Papula S.332 zu Abschnitt 2 $\rightarrow$ Aufg. 24*

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 13$
2. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 3$
3. $f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - 25)(x_2 - 2) + 5x_2^2 + 12x_2$

2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionenmit mehreren Variablen

2.1 Zweidimensionale Integralrechnung

Definition 2.1.1 (beschränkt) *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt* <u>*beschränkt*</u>*, wenn es ein Rechteck R gibt, sodass $U \subset R$ gilt.*

Bemerkung 2.1.2

Bemerkung 2.1.3 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da ein Volumen betrachtet wird, werden die alten Näherungsrechtecke durch Näherungsquader ersetzt und deren Volumen zusammengezählt.*

U wird also in n kleine Teilbereiche $u_1, \ldots, u_n$ zerlegt. Die Fläche dieser Teilbereiche wird mit $\delta u_1, \ldots, \Delta u_n$ bezeichnet.

Zur Berechnung des Rauminhalts des Quaders wird weiterhin die Quaderhöhe benötigt. Dazu wird ein Punkt $(x_i, y_i) \in U_i$ gewählt und sein Funktionswert $f(x_i, y_i)$ als Höhe des Quaders betrachtet. Das Teilvolumen beträgt dann $f(x_i, y_i) \cdot \Delta u_i$

Falls U_i ein Rechteck ist mit den Seiten Δx_i und Δy_i, so ergibt sich das Teilvolumen

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

Als Näherung für das Gesamtvolumen eribt sich also

$$V_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Hier wurde der gesamte Definitionsbereich U in die n Teilbereiche $U_1, \ldots, U_n$ zerlegt. Der genaue Wert für das Volumen kann berechnet werden, indem n gegen ∞ geht. Deshalb wird definiert:

$$\int_U f(x, y) dU = \int_U f(x, y) dx dy$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Um klarzustellen, dass es sich um ein zweidimensionales Integral handelt, werden oft die zwei Integralsymbole verwendet:

$$\iint_U f(x,y)dU = \iint_U f(x,y)dxdy$$

Definition 2.1.4 (konvex) *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ oder $U \subset \mathbb{R}^3$ heißt konvex, falls für alle Punkte $x, y \in U$ auch die gesamte Verbindungsstrecke von x nach y in U liegt.*

Bemerkung 2.1.5 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da U beschränkt ist, gibt es einen kleinsten vorkommenden x-Wert a und einen größten vorkommenden x-Wert b.*

Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers bei einem beliebigen x-Wert zwischen a und b wird mit $I(x)$ bezeichnet.

Der Körper, dessen Volumen wir ausrechnen, setzt sich aus all diesen Schnittflächen zusammen. Für jedes $x \in [a,b]$ existiert eine Schnittfläche mit Flächeninhalt $I(x)$, das heißt durch Aufsummieren dieser unendlich vielen Flächeninhalte ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_b^a I(x)dx$$

Der Flächeninhalt von I(x) kann einfach mit einem eindimensionalen Integral berechnet werden.

$$I(x) = \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Satz 2.1.6 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei a der kleinste in U vorkommende x-Wert und b der größete in U vorkommende x-Wert. Für $x \in [a,b]$ bezeichnen wir den kleinsten y-Wert für den $(x,y) \in U$ gilt, als $y_u(x)$ und den größten y-Wert als $y_o(x)$.*

Dann ist $\iint_U f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$

Beispiel 2.1.7 *1. $U = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,2]\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2$*

$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = 2$

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2^3}{3} \right) dx$$

$$\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x \right]_0^1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

2. $U = \{(x, y) : x \geq 0, x \leq 1, y \leq x, y \geq 0\}$
   $f : U \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = x \cdot \sin(y)$