

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>2</b>
1.1 Partielle Ableitungen . . . . .	2
1.2 Totale Differenzierbarkeit . . . . .	7
1.3 Extremwerte . . . . .	11
<b>2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>16</b>
2.1 Zweidimensionale Integralrechnung . . . . .	16
2.2 Dreidimensionale Integralrechnung . . . . .	23
<b>3 Differentialgleichungen</b>	<b>25</b>
3.1 Einführung . . . . .	25
3.2 Trennung der Variablen . . . . .	25
3.5 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	26
3.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	28
3.7 Differentialgleichungssysteme (DGLS) . . . . .	31
<b>4 Numerische Methoden</b>	<b>33</b>
4.1 Numerische Methoden . . . . .	33
4.2 Polygonzugverfahren von Euler . . . . .	34
4.3 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	35

# 1 Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

## 1.1 Partielle Ableitungen

**Definition 1.1.1** (reelle Funktionen mit  $n$  Variablen) *Eine Funktion*

$y = f(x_1, \dots, x_n)$  mit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  und  $y \in \mathbb{R}$  heißt reelle Funktion mit mehreren Variablen.

$\mathbb{D}$  beschreibt den Definitionsbereich und wir schreiben  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$

**Bemerkung 1.1.2** *Definition für Differenzierbarkeit im eindimensionalen Fall:* Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$ , falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$  existiert. In diesem Fall heißt  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  die Ableitung von  $f$  in  $x_0$ . Man bezeichnet  $f'(x_0)$  als den Differentialquotienten von  $f$  im Punkt  $x_0$ .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Definition 1.1.3**  $P = (p_1, \dots, p_n)$  und  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  bezeichnen zwei Punkte im  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$

$$|P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2} \text{ heißt Abstand der Punkte } P \text{ und } Q.$$

Die Delta-Umgebung des Punktes  $P$  ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $U_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\}$ .

**Definition 1.1.4** Der Punkt  $P$  heißt innerer Punkt der Menge  $M$  ( $M \subset \mathbb{R}^n$ ), wenn eine Umgebung des Punktes  $P$  existiert, für die  $U_\delta \subset M$  gilt.

**Bemerkung 1.1.5** Eine Menge heißt offene Menge, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

**Definition 1.1.6** Wenn  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$  ein innerer Punkt der Menge  $D$  ist und wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  an der Stelle  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$

Die Funktion  $f$  heißt in  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$  partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen nach allen Komponenten  $x_j (j = 1, \dots, n)$  existieren.

Die Funktion heißt in  $\mathbb{D}$  partiell differenzierbar, wenn  $f$  in allen inneren Punkten aus  $\mathbb{D}$  partiell differenzierbar ist.

**Bemerkung 1.1.7** Die partielle Ableitung der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  nach der Komponente  $x_j$  kann wie folgt bezeichnet werden:

$$f_{x_j}(x_1, \dots, x_n) \text{ oder } \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

**Beispiel 1.1.8** Gesucht sind die partiellen Ableitungen der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) \cdot 2e^{2x_3}$$

**Bemerkung 1.1.9** Die Tangentialebene an die Funktion  $f(x_1, x_2)$  berührt die Funktion  $f(x_1, x_2)$  im Punkt  $\bar{P} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$  und enthält alle Tangenten an die Funktion  $f(x_1, x_2)$  im Punkt  $\bar{P}$ .

**Satz 1.1.10** Es seien  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion und  $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{D}$ . Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene für den Punkt  $(x_{01}, x_{02})$ :

$$\begin{aligned} x_3 &= f(x_{01}, x_{02}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})(x_2 - x_{02}) \\ &= f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 - x_{01}) \\ (x_2 - x_{02}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel 1.1.11** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1$$

→ Tangentialebene:  $x_3 = f(x_{01}, x_{02}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot x_2^2 \cdot (x_1 - x_{01}) + \cos(x_1 \cdot x_2^2) \cdot 2x_2 \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_{02})$

$$(x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} = 0$$

**Beispiel 1.1.12**  $(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$

$$f(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \sin(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot \sqrt[3]{\pi}^2 = -\pi^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}) = \cos(\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi}^2) \cdot 2\sqrt[3]{\pi} \cdot \sqrt[3]{\pi} = -2\pi^{\frac{2}{3}}$$

$$x_3 = 0 + \begin{pmatrix} -\pi^{\frac{2}{3}} & -2\pi^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt[3]{\pi} \\ x_2 - \sqrt[3]{\pi} \end{pmatrix} = -\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_1 - \sqrt[3]{\pi}) + -2\pi^{\frac{2}{3}} \cdot (x_2 - \sqrt[3]{\pi})$$

$$x_3 = -\pi^{\frac{2}{3}}x_1 - 2\pi^{\frac{2}{3}}x_2 + 3\pi$$

**Beispiel 1.1.13** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = |x_1| + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1 |x_1|$  ist nur für  $x_1 \neq 0$  differenzierbar, d.h.  $f$  ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar.

**Definition 1.1.14 (Gradient)** Es sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar.

Dann heißt der Vektor  $\text{grad}f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$  der Gradient von  $f$  im Punkt  $x \in \mathbb{D} =$

$(x_1, \dots, x_n)$ .

**Bemerkung 1.1.15** Anstelle von  $\text{grad}f(x)$  wird auch häufig  $\nabla f(x)$  geschrieben.

**Beispiel 1.1.16** Berechnen Sie den Gradienten für:

$$1. f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$2. g(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot \sin(x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3$$

$$\text{zu 1. } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{zu 2. } \nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2 \cos(x_1 x_2) + x_2 x_3 \\ 2x_1 \cos(x_1 x_2) + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 1.1.17** Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit.

Betrachtet wird die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Im Punkt  $(0, 0)$  existieren die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta x) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

Aber  $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig:

Es gilt  $f(x_1, 0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}, f(0, x_2) = 0; x_2 \in \mathbb{R}$

Für  $x := x_1 = x_2$ :

$$f(x, x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & (x, x) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, x) = (0, 0) \end{cases}$$

**Definition 1.1.18 (Stetigkeit)** Die Funktion  $y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$  ist an der Stelle  $\bar{P} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{D}$  stetig, wenn für den Funktionsgrenzwert

$$\lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

gilt.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2 - 1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

2. Berechnen die den Gradienten der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1-1) \cdot \ln(x_1+1)}{x_2^2 + x_3^2 + 1}$  an der Stelle  $(0, 0, 0)$

3. Berechnen Sie die Tangentialebene an die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_2-1)^2}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \text{ im Punkt } (0, \frac{3}{2}, e^{-\frac{1}{4}})$$

**Definition 1.1.19 (k-mal partiell differenzierbar)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion und  $x_0 \in D$ . Die Funktion  $f$  heißt zweimal partiell differenzierbar in  $x_0$ , wenn alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $x_0$  wieder partiell differenzierbar sind.

Man schreibt  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$

Dieser Ausdruck heißt dann zweite partielle Ableitung von  $f$ .

Allgemein heißt  $f$  k-mal partiell differenzierbar, wenn alle  $(k-1)$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  wieder partiell differenzierbar sind. Man schreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{(k-1)}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{(k-1)}} \dots \partial x_{i_1}} \right)(x_0) = f_{x_{i_k} \dots x_{i_1}}$$

**Aufgabe 1.1.20** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2$

Berechnen Sie alle ersten und zweiten Ableitungen von  $f$  und  $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2 - x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \cdot 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -2x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = +2$$

**Definition 1.1.21 (stetig partiell differenzierbar)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls  $f$  k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$  stetig sind.

**Satz 1.1.22 (Satz von Schwarz)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Die Reihenfolge der Ableitungsvariablen spielt also keine Rolle.

**Bemerkung 1.1.23** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann spielt die Reihenfolge der Ableitungsvariablen bei der  $k$ -ten partiellen Ableitung keine Rolle.

**Aufgabe 1.1.24** Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \sin(x_1^2 + x_2) + e^{2x_3}$  ( $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ )

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot 2x_1 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) + 2e^{2x_3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 (\cos(x_1^2 + x_2) - 2x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 x_3 \sin(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \sin(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = 4e^{2x_3}$$

## 1.2 Totale Differenzierbarkeit

**Definition 1.2.1 (Betrag eines Vektors)** Der Betrag eines Vektors

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

**Definition 1.2.2 (Vektorfunktion)** Eine eindeutige Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow W$ ,  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$  mit mehrdimensionalem Wertebereich heißt Vektorfunktion.

**Beispiel 1.2.3** Es sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$f$  hat 2 Ergebniskomponenten:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

**Definition 1.2.4 (total differenzierbar)** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $x_0 \in \mathbb{D}$ . Die Funktion  $f$  heißt total differenzierbar in  $x_0$ , falls es eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und eine Restfunktion  $R : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, für die gilt:  $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + |x - x_0| \cdot R(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$$

**Satz 1.2.5 (Jacobi-Matrix)** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $x_0 \in \mathbb{D}$ . Weiterhin sei  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar mit der Matrix

$$A = (a_{ij}); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig und alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind in  $x_0$  partiell differenzierbar, wobei gilt:  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die Matrix heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobi-Matrix von  $f$  und wird mit  $Df(x_0)$  oder  $J_f(x_0)$  bezeichnet.

**Beispiel 1.2.6** Gegeben sei die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ \ln(x^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $D_g(x)$ :

$$D_g(x) = \begin{pmatrix} 6x^2 \\ \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 1.2.7**

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 \cdot \sin x_2 \\ e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

$$D_f(x_1, x_2) = ?$$



**Bemerkung 1.2.8** Nach Definition 1.2.4 kann eine Funktion  $f(x)$ , die total differenzierbar ist, in der Nähe von  $x_0$  durch

$$f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

angenähert werden.

Da die Annäherungsfunktion linear ist, spricht man auch von Linearisierung.

Hierfür muss aber klar sein, dass  $f$  auch wirklich total differenzierbar ist.

**Satz 1.2.9** Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, deren Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  alle stetig partiell differenzierbar sind. Dann ist  $f$  total differenzierbar.

**Beispiel 1.2.10** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 \sin(x_3)$$

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 + x_2 \sin(x_3) & x_1^2 + x_1 \sin(x_3) & x_1 x_2 \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

$f$  soll in der Nähe des Punktes  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$  angenähert werden.

Zur Berechnung der Näherung wird benötigt:  $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

$$f(x_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - 3$$

**Aufgabe 1.2.11** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1^2 \sin(x_2) & e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}^T \quad (\text{siehe Aufgabe 1.2.7})$$

Berechnen Sie die Näherung der Funktion in der Nähe von  $x_0 = (1, 0)$

**Aufgabe 1.2.12** Berechnen Sie die Tangentialebenen an die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-2.5x_1^2 - (x_3 - 1)^2} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ im Punkt } (x_{01}, x_{02}, f(x_{01}, x_{02})) = (0, 1, 1).$$

Verwenden Sie dazu zunächst die Formel für die Tangentialebenen und dann die Formel für die totale Differenzierbarkeit.

**Definition 1.2.13 (totale Differenzierbarkeit)** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbare Funktion. Dann kann  $f$  in der Nähe eines Punktes  $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x_{01}, x_{02}) + Df(x_{01}, x_{02}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix} \text{ angenähert werden.}$$

$$\text{Es gilt also } f(x_1, x_2) = f(x_{01}, x_{02}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) - f(x_{01}, x_{02}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_1 - x_{01})}_{=:\Delta x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot \underbrace{(x_2 - x_{02})}_{=:\Delta x_2}$$

$$\text{also gilt: } \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$$

Für „beliebig kleines“  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  schreiben wir „d“ statt „ $\Delta$ “ und „=“ statt „ $\approx$ “.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \cdot dx_2$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als totales Differenzial der Funktion  $f$ .

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

**Bemerkung 1.2.14** Mit Hilfe des totalen Differentials kann der Einfluss der Änderung der Inputgrößen auf den Funktionswert abgeschätzt werden.

**Beispiel 1.2.15** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \sin(x_1 \cdot x_2)$ . Wir betrachten  $f$  in der Nähe des Punktes  $f(x_{01}, x_{02}) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

Was passiert wenn wir leicht von dem Wert abweichen?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + \cos(x_1 \cdot x_2)x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 \cdot x_2)x_1$$

$$df = 2\sqrt{\pi} + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_1 - \sqrt{\pi}) + \cos(\pi) \cdot \sqrt{\pi} \cdot (x_2 - \sqrt{\pi}) \quad df = \sqrt{\pi} \cdot dx_1 + (-\sqrt{\pi}) \cdot dx_2$$

Veränderung der Inputgrößen z.B.  $dx_1 = 0.1$   $dx_2 = -0.1$

$$df = 0.2 \cdot \sqrt{\pi}$$

**Bemerkung 1.2.16** Durch Einsetzen der Maximalen absoluten Fehler und Bilden der Beträge ergibt sich der (lineare) maximale absolute Fehler:

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_n|$$

**Aufgabe 1.2.17** Das Volumen  $V$  eines geraden Kreiskegels wird berechnet durch:  $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{k^2 - r^2}$ .

$r \dots$  Radius  $r=1\text{m}$  und absoluter Fehler von  $0.01\text{m}$

$k \dots$  Mantellinie  $k=1.5\text{m}$  und der absolute Fehler:  $0.005\text{m}$

Berechnen Sie den (linearen) maximalen absoluten Fehler.

Papula zu Abschnitt 2 S. 332: 12, 13, 15

## 1.3 Extremwerte

**Definition 1.3.1 (Lokales Extremum)** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.

- (i) Ein Punkt  $x_0 \in U$  heißt lokales Maximum von  $f$ , falls  $f$  in der Nähe von  $x_0$  nicht größer wird als bei  $x_0$ , das heißt:  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x$  in der Nähe von  $x_0$ .
- (ii) Ein Punkt  $x_0 \in U$  heißt lokales Minimum von  $f$ , falls  $f$  in der Nähe von  $x_0$  nicht kleiner wird als bei  $x_0$ , das heißt:  $f(x) \geq f(x_0)$  für alle  $x$  in der Nähe von  $x_0$ .

Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

**Bemerkung 1.3.2** Wie im eindimensionalen Fall liefert die Differentialrechnung nur Informationen über lokale und nicht über globale Extrema.

**Bemerkung 1.3.3** Es sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in (a, b)$  mit einem lokalen Extremum in  $x_0$ . Dann ist  $f'(x_0) = 0$ .

**Satz 1.3.4** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Besitzt  $f$  in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum, so gilt:

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

$$\text{d.h. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

**Beispiel 1.3.5**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

$$\rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Das heißt falls es ein Extremum gibt, dann liegt es bei  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 1.3.6**

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(x_1) \cdot \sin(x_2) = 0$$

$$(x_1 = \pi) \text{ od. } \sin(x_2) = 0$$

**Bemerkung 1.3.7** Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $f'(x_0) = 0$ .

(i) Ist  $f''(x_0) > 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.

(ii) Ist  $f''(x_0) < 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.

**Definition 1.3.8** Eine Matrix  $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt positiv definit, falls gilt:

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0,$$

$$\text{also } \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, n.$$

$A$  heißt negativ definit, falls  $-A$  positiv definit ist.

**Beispiel 1.3.9** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\underline{k=1}: 1 > 0$$

$$\underline{k=2}: \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

$\rightarrow A$  ist positiv definit.

**Aufgabe 1.3.10**  $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$-6 < 0 \rightarrow B$  nicht positiv definit

$$-B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1} : 6 > 0$

$$\underline{k=2} : \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 2 > 0$$

$\rightarrow B$  ist negativ definit.

**Aufgabe 1.3.11** Prüfen Sie  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  auf positive Definitheit.

**Bemerkung 1.3.12**  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{2 \times 2}$  ist weder positiv noch negativ definit:  $d_{11} \not> 0$

$\rightarrow$  nicht positiv definit

$-d_{11} \not< 0 \rightarrow$  nicht negativ definit

**Definition 1.3.13** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und  $x_0 \in U$ . Unter der Hesse-Matrix von  $f$  in  $x_0$  versteht man die Matrix:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 1.3.14** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Gesucht ist die Hesse-Matrix.

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 1.3.15** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \sin(x_3)$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix  $H_f(0, 0, 0)$  &  $H_f(1, 1, 0)$ .

**Satz 1.3.16** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $x_0 \in U$  ein Punkt mit  $\nabla f(x_0) = 0$ .

- (i) Ist  $H_f(x_0)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (ii) Ist  $H_f(x_0)$  negativ definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.
- (iii) Ist  $\underline{U \subset \mathbb{R}^2}$  und gilt  $\det H_f(x_0) < 0$ , so liegt kein Extremwert vor.

**Beispiel 1.3.17** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} := 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\rightarrow (0, 0)$  könnte ein Extremum sein

Überprüfen durch Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$\rightarrow H_f(0, 0)$  positiv definit  $\rightarrow$  in  $(0, 0)$  liegt ein lokales Minimum vor.

**Aufgabe 1.3.18** Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.

Kandidaten:  $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**Aufgabe 1.3.19** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$

$$\text{Gradient: } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -\sin x_1 = -\sin x_2 = 0$$

$$(k_1\pi, k_2\pi), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Hesse-Matrix

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(k_1\pi, k_2\pi) = \begin{pmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{pmatrix}$$

	$k_1$ gerade	$k_1$ ungerade
$k_2$ gerade	lokales Maximum	kein Extremwert
$k_2$ ungerade	kein Extremwert	lokales Minimum

**Beispiel 1.3.20 (Nebenbedingungen)** Gegeben sei 12m langer Draht, aus dem die Kanten eines Quaders von möglichst großem Volumen hergestellt werden sollen. Gesucht sind die Kantenlängen  $x_1, x_2, x_3$  des optimalen Quaders.

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

$$V = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$$

$$V = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$$

$$\mathbb{D} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 3, \mathbb{D} \text{ ist eine offene Menge}$$

$$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1 x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1 x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix

Beispiel \*\*\*:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Stetigkeit in  $(0, 0)$

$$\bar{P} \lim_{P \rightarrow \bar{P}} f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\text{Es gilt: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{|x \cdot y|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1}$$

**Aufgabe 1.3.21** Papula S.332 zu Abschnitt 2  $\rightarrow$  Aufg. 24

$$(i) f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 13$$

$$(ii) f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2(1 - x_2) - x_2^3 + 12x_2 + 3$$

$$(iii) f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - 25)(x_2 - 2) + 5x_2^2 + 12x_2$$

## 2 Grundlagen der Integralrechnung reeller Funktionen mit mehreren Variablen

### 2.1 Zweidimensionale Integralrechnung

**Definition 2.1.1 (beschränkt)** Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  heißt beschränkt, wenn es ein Rechteck  $R$  gibt, sodass  $U \subset R$  gilt.

#### Bemerkung 2.1.2

**Bemerkung 2.1.3** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Da ein Volumen betrachtet wird, werden die alten Näherungsrechtecke durch Näherungsquader ersetzt und deren Volumen zusammengezählt.

$U$  wird also in  $n$  kleine Teilbereiche  $u_1, \dots, u_n$  zerlegt. Die Fläche dieser Teilbereiche wird mit  $\delta u_1, \dots, \delta u_n$  bezeichnet.

Zur Berechnung des Rauminhalts des Quaders wird weiterhin die Quaderhöhe benötigt. Dazu wird ein Punkt  $(x_i, y_i) \in U_i$  gewählt und sein Funktionswert  $f(x_i, y_i)$  als Höhe des Quaders betrachtet. Das Teilvolumen beträgt dann  $f(x_i, y_i) \cdot \Delta u_i$

Falls  $U_i$  ein Rechteck ist mit den Seiten  $\Delta x_i$  und  $\Delta y_i$ , so ergibt sich das Teilvolumen

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

Als Näherung für das Gesamtvolumen ergibt sich also

$$V_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i$$

Hier wurde der gesamte Definitionsbereich  $U$  in die  $n$  Teilbereiche  $U_1, \dots, U_n$  zerlegt.



Der genaue Wert für das Volumen kann berechnet werden, indem  $n$  gegen  $\infty$  geht. Deshalb wird definiert:

$$\begin{aligned}\int_U f(x, y) dU &= \int_U f(x, y) dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta U_i\end{aligned}$$

Um klarzustellen, dass es sich um ein zweidimensionales Integral handelt, werden oft die zwei Integralsymbole verwendet:

$$\iint_U f(x, y) dU = \iint_U f(x, y) dx dy$$

**Definition 2.1.4 (konvex)** Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  oder  $U \subset \mathbb{R}^3$  heißt konvex, falls für alle Punkte  $x, y \in U$  auch die gesamte Verbindungsstrecke von  $x$  nach  $y$  in  $U$  liegt.

**Bemerkung 2.1.5** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Da  $U$  beschränkt ist, gibt es einen kleinsten vorkommenden  $x$ -Wert  $a$  und einen größten vorkommenden  $x$ -Wert  $b$ .

Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers bei einem beliebigen  $x$ -Wert zwischen  $a$  und  $b$  wird mit  $I(x)$  bezeichnet.

Der Körper, dessen Volumen wir ausrechnen, setzt sich aus all diesen Schnittflächen zusammen. Für jedes  $x \in [a, b]$  existiert eine Schnittfläche mit Flächeninhalt  $I(x)$ , das heißt durch Aufsummieren dieser unendlich vielen Flächeninhalte ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b I(x) dx$$

Der Flächeninhalt von  $I(x)$  kann einfach mit einem eindimensionalen Integral berechnet werden.

$$I(x) = \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Satz 2.1.6** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $a$  der kleinste in  $U$  vorkommende  $x$ -Wert und  $b$  der größte in  $U$  vorkommende  $x$ -Wert. Für  $x \in [a, b]$  bezeichnen wir den kleinsten  $y$ -Wert für den  $(x, y) \in U$  gilt, als  $y_u(x)$  und den größten  $y$ -Wert als  $y_o(x)$ .

Dann ist  $\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) dy \right) dx$

**Beispiel 2.1.7** (i)  $U = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = 2$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \int_0^2 (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left( \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \right) dx \\ & \int_0^1 \left( 2x^2 + \frac{2^3}{3} \right) dx \\ & \left[ \frac{2}{3} x^3 + \frac{8}{3} x \right]_0^1 \\ & \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

(ii)  $U = \{(x, y) : x \geq 0, x \leq 1, y \leq x, y \geq 0\}$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x \cdot \sin(y)$

$a = 0, b = 1, y_u(x) = 0, y_o(x) = x$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \int_0^x x \cdot \sin(y) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left( [x \cdot -\cos(y)]_0^x \right) dx \\ & - \int_0^1 (x \cdot \cos(x) + x) dx \\ & - \left[ x \cdot \sin(x) + \cos(x) + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ & - \left( 1 \cdot \sin(1) + \cos(1) + \frac{1^2}{2} - \cos(0) \right) = -\sin(1) - \cos(1) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(iii) \ U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1$$



$$\begin{aligned} \iint_U (1) \, dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

**Einschub** *Substitution:*  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\int f(x(t)) \cdot x'(t) dt = \int f(x) dx$$

$$x(t) = \sin(t) \rightarrow t = \arcsin(x)$$

$$\int f(x) dx = \int \sqrt{1-x^2} dx = \int f(\sin(t)) \cdot x'(t) dt = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt$$

$$= \int \cos(t) \cdot \cos(t) dt = \cos(t) \cdot \sin(t) + \int \sin(t) \cdot \sin(t) dt = \int \sin^2(t) dt = \int 1 - \cos^2(t) dt$$

$$= \cos(t) \cdot \sin(t) + t - \int \cos^2(t) dt$$

$$\rightarrow \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$$

*Rücksubstitution*

$$\frac{x}{2} \cdot \cos(t) + \frac{t}{2} + C$$

$$\cos(t) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2}$$

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]_{-1}^1$$

$$\arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

**Satz 2.1.8** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $a$  der kleinste in  $U$  vorkommende  $y$ -Wert und  $b$  der größte in  $U$  vorkommende  $y$ -Wert.*

*Für  $y \in [a; b]$  bezeichnen wir den kleinsten  $x$ -Wert, für den  $(x, y) \in U$  gilt als  $x_u(y)$  und den größten als  $x_o(y)$ .*

*Dann ist  $\iint_U f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f(x, y) dx \right) dy$*

**Beispiel 2.1.9**

$$\iint_U x^2 + y^2 dx dy$$

$$U = [0, 1] \times [0, 2]$$



**Aufgabe 2.1.10**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y$

(i)  $U = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}$



$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_1^2 \left( \int_2^3 (x^2 + y) dy \right) dx = \frac{29}{6}$$

(ii)  $U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$



$$\iint_U f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy \right) dx = \frac{33}{140}$$

**Einschub (Terassenpunkte)** Jeder Punkt  $x_0 \in D_f$  (Definitionsbereich) einer Funktion  $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla f(x_0) = 0$  heißt kritischer Punkt von  $f$ .

Jeder kritische Punkt, von  $f$ , der nicht gleichzeitig ein lokales Extremum ist, heißt Terassenpunkt von  $f$ .

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

$\rightarrow (0, 0)$  ist Kandidat

$$\text{Hessematrix: } H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-4 < 0}}$$



**Aufgabe 2.1.11** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten  $(2, 2), (0, 3), (1, 0)$



$$f_1(x) = -3x + 3$$

$$f_2(x) = 2x - 2$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$U_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, f_1(x) \leq y \leq f_3(x)\}$$

$$U_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, f_2(x) \leq y \leq f_3(x)\}$$

$$\int_0^1 \left( \int_{f_1(x)}^{f_3(x)} 1 dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_{f_2(x)}^{f_3(x)} 1 dy \right) dx$$

**Aufgabe 2.1.12** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen  $f_1(x) = x^2 - 1$  und  $f_2(x) = 3x + 3$  begrenzt wird.



$$\int_{-1}^4 \left( \int_{x^2-1}^{3x+3} 1 dy \right) dx$$

**Aufgabe 2.1.13** Berechnen Sie  $\int_0^\infty x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1$ ,  $x_2 > 0$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left( e^{-cx_2} \left( -c - \frac{1}{x_2} \right) + \frac{1}{x_2} \right)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c}{e^{cx_2}} = \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{x_2 e^{cx_2}} = 0$$

$$\int_0^\infty x_1 x_2 \cdot e^{-x_1 x_2} dx_1 = \frac{1}{x_2}$$

## 2.2 Dreidimensionale Integralrechnung

**Satz 2.2.1** *Es seien  $U \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte und konvexe Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $a$  der in  $U$  kleinste vorkommende  $x$ -Wert und  $b$  der größte.*

*Für  $x \in [a; b]$  bezeichnen wir den kleinsten  $y$ -Wert, für den es ein  $z$  gibt, sodass  $(x, y, z) \in U$  gilt, mit  $y_u(x)$ , und den größten mit  $y_o(x)$ .*

*Schließlich bezeichnen wir für zulässiges  $(x, y)$  mit  $z_u(x, y)$  den kleinsten  $z$ -Wert, sodass  $(x, y, z) \in U$ , und mit  $z_o(x, y)$  den größten  $z$ -Wert. Dann ist*

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \left( \int_{z_u(x, y)}^{z_o(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

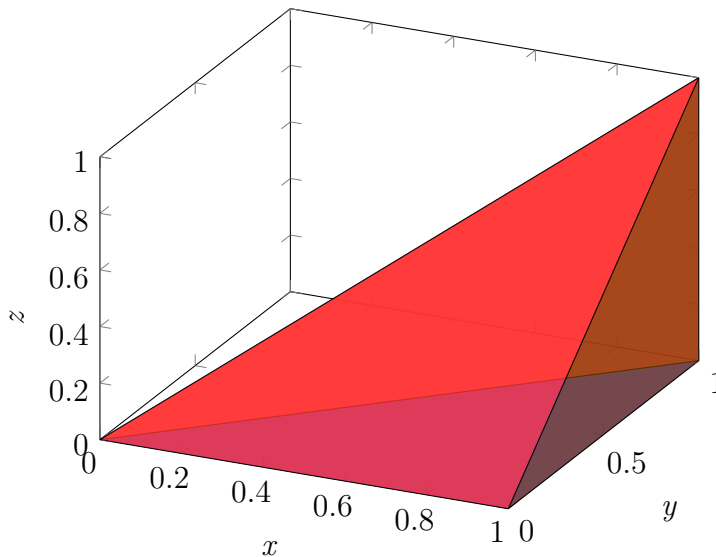
**Beispiel 2.2.2** (i)  $U = [-1; 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^2 x^2 + y^2 + z^2 dz \right) dy \right) dx$$

(ii)  $U = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x \leq 1, y \leq x, z \leq y\}$

$$f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z$$



$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^y xy^2 z dz \right) dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{70}$$

**Einschub (Geometrische Betrachtungen zur Tangentialebene)** Die Rolle, die die Kurventangente bei einer Funktion von einer Variablen spielt, übernimmt die sogenannte Tangentialebene bei einer Funktion von zwei Variablen  $z = f(x, y)$ . Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt  $P = (x_0, y_0, z_0)$  an die Bildfläche von  $z = f(x, y)$  angelegten Tangenten. In der unmittelbaren Umgebung ihres Berührungspunktes  $P$  besitzen Fläche und Tangentialebene im Allgemeinen keinen weiteren gemeinsamen Punkt.

Herleitung der Funktionsgleichung dieser Tangentialebene in der Form:  $z = ax + by + c$

Die unbekannten Koeffizienten  $a, b, c$  werden aus den bekannten Eigenschaften der Tangentialebene bestimmt.

Fläche und Tangentialebene besitzen im Berührungspunkt  $P$  die gleiche Steigung. Das bedeutet, dass dort die entsprechenden partiellen Ableitungen erster Ordnung übereinstimmen müssen. Die partiellen Ableitungen der Tangentialebene sind  $z_x(x, y) = a$  und  $z_y(x, y) = b$ , die der Funktion  $z = f(x, y)$  lauten  $z_x(x, y) = f_x(x, y)$  und  $z_y(x, y) = f_y(x, y)$ . An der Berührungsstelle  $(x_0, y_0)$  gilt demnach:  $a = f_x(x_0, y_0)$  und  $b = f_y(x_0, y_0)$ .

Somit sind die Koeffizienten  $a$  und  $b$  bestimmt.

Außerdem ist  $P$  ein gemeinsamer Punkt von Fläche und Tangentialebene:  $z_0 = ax_0 + by_0 + c \rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0$

Einsetzen in die Gleichung für die Tangentialebene:

$$z = ax + by + z_0 - ax_0 - by_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$



# 3 Differentialgleichungen

## 3.1 Einführung

**Definition 3.1.1 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)** Eine Gleichung der Form  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  für eine unbekannte Funktion  $y = f(x)$  und deren Ableitungen heißt gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

**Bemerkung 3.1.2** Neben gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es auch partielle Differentialgleichungen, diese werden aber in dieser Vorlesung nicht behandelt.

**Beispiel 3.1.3** Betrachtet wird eine elastische Feder in Gleichgewichtslage. Wird an den Punkt  $P_0$  ein Körper der Masse  $m$  angehängt, so hat die Feder zum Zeitpunkt  $t$  eine gewisse Auslenkung  $y(t)$ . Unter Vernachlässigung der Reibung gilt für die Rückstellkraft  $F$  der Feder, die auf die Masse  $m$  wirkt:  $F = -c \cdot y(t)$ . Dabei bezeichnet  $c$  die Federkonstante.

Wegen  $F = m \cdot y''(t)$  gilt:  $m \cdot y''(t) = -c \cdot y(t)$  also  $m \cdot y''(t) + c \cdot y(t) = 0$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int x dx \rightarrow \ln |y| = \frac{x^2}{2} + c \\ \rightarrow |y(x)| &= e^{\frac{x^2}{2} + c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \underbrace{e^c}_{c_1}, c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## 3.2 Trennung der Variablen

**Beispiel 3.2.1** Gegeben sei die Gleichung  $y' = xy$ .

Gesucht ist die Funktion  $y(x)$ .

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dx}{dy} = xy \rightarrow_{y \neq 0} \frac{dy}{y} = x dx$$

**Definition 3.2.2 (Differentialgleichungen mit getrennten Variablen)** Es seien  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle,  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $g(y) \neq 0$

für alle  $y \in \mathcal{I}$ . Dann heißt die Differentialgleichung  $y' = f(x) \cdot g(y)$  eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Auf diese Differentialgleichung lässt sich das gleiche Verfahren anwenden wie in Beispiel 3.2.1. Es kann eine allgemeine Lösungsformel abgeleitet werden.

**Einschub (Klausurtestaufgabe)** Gegeben seien die Funktionen  $f, g$  durch  $g(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 - y \\ 2xy \end{pmatrix}$ ,  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y + z) \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von  $f \circ g$  mit Hilfe der Kettenregel:  $D(f \circ g)(x, y) = Df(g(x, y)) \cdot Dg(x, y)$ .

Hinweis: Zur Berechnung von  $Df(g(x, y))$  berechnen Sie zunächst  $Df(x, y, z)$  und setzen Sie anschließend den Ergebnisvektor von  $g(x, y)$  ein.

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y + z) & \cos(y + z) \end{pmatrix}$$

$$Df(x + y, x^2 - y, 2xy) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x^2 - y + 2xy) & \cos(x^2 - y + 2xy) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ 2 \cos \alpha(x + y) & \cos \alpha(2x - 1) \end{pmatrix}$$

Papula S. 519 zu Abschnitt 1 Aufg. 1; S. 520 zu Abschnitt 2 Aufg. 4a+d, 5a+c

## 3.5 Lineare Differentialgleichungen

**Definition 3.5.1 (Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung)** Es seien  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

heißt homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Ist weiterhin  $b : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so heißt die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

**Definition 3.5.2 (linear unabhängig)** Eine Menge von Funktionen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  heißt linear unabhängig, wenn man keine Funktion aus den anderen linear kombinieren kann, d.h. für eine beliebige Funktion  $y_i$  gibt es keine Kombination der Form  $y_i(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_{i-1} y_{i-1}(x) + c_{i+1} y_{i+1}(x) + \cdots + c_n y_n(x)$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

Falls man ein  $y_i$  aus den anderen Funktionen linear kombinieren kann, heißt die Menge linear abhängig.

**Beispiel 3.5.3** Es sei  $n = 2$ ,  $y_1(x) = \sin(x)$ ,  $y_2(x) = 17 \sin(x)$

Dann ist  $\{y_1, y_2\}$  linear abhängig, da für  $c = 17$  gilt:  $y_2 = c y_1$ .

**Satz 3.5.4 (Wronski-Determinante)** Es sei  $L_H$  die Lösungsmenge einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dann gibt es  $n$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  der Differentialgleichung und es gilt:  $L_H = \{c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$ .

Aus den Grundlösungen  $y_1, \dots, y_n$  lässt sich also mit Hilfe von Linearkombinationen die gesamte Lösungsmenge berechnen.

Weiterhin sind  $n$  Lösungen  $y_1, y_n \in L_H$  genau dann linear unabhängig, wenn für die Wronski-Determinante folgendes gilt:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Dabei genügt schon  $W(x) \neq 0$  für ein  $x$ .

**Aufgabe 3.5.5** Berechnen Sie die Wronski-Determinante

(i)  $n = 2, y_1(x) = x, y_2(x) = x^2$

(ii)  $n = 3, y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^2$

(iii)  $n = 2, y_1(x) = \sin(x), y_2(x) = 17 \sin(x)$

**Definition 3.5.6 (Fundamentalsystem)** Sind die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  linear unabhängige Funktionen einer linearen homogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, dann heißt die Menge  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

## 3.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

**Definition 3.6.1 (lin. homo. Differentialgleichung mit konst. Koeffizienten)** Die Gleichung  $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$  mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  heißt lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

**Bemerkung 3.6.2** Für die Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

wird ein Ansatz verwendet, der eine  $e$ -Funktion enthält.

Ansatz:  $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$

Differenzieren und Einsetzen des Ansatzes führt zu:

$$e^{\lambda x} (\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{=0}) = 0$$

wird 0, falls  $\lambda$  eine Nullstelle des Polynoms  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  ist.

**Definition 3.6.3 (charakteristisches Polynom)** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Dann heißt das Polynom  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  charakteristisches Polynom der Differentialgleichung.

**Satz 3.6.4** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P(x)$ , dann ist  $y(x) = e^{\lambda x}$  eine Lösung der Differentialgleichung.

**Aufgabe 3.6.5** (i) Zu lösen ist:  $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$P(x) = x^2 - 3x + 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}$$

(ii) Zu lösen ist  $y''' - y'' - 2y' = 0$

**Satz 3.6.6** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom  $P(x)$   $n$  verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat. Dann bilden die Funktionen  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Jede Lösung der Differentialgleichung hat deshalb die Form  $y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n x}$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel 3.6.7** Zu lösen ist  $y'' - 2y' + y = 0$

$$P(x) = x^2 - 2x + 1, \lambda_{1,2} = 1$$

$$y_1(x) = e^x$$

$$\text{Ansatz für die zweite Lösung: } y_2(x) = x \cdot e^x$$

**Satz 3.6.8** Es sei  $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$  eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom  $P(x)$  habe  $k$  reelle Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  mit  $P(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , d.h.  $\lambda_j$  ist  $m_j$ -fache Nullstelle von  $P$ . Dann bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} \cdot e^{\lambda_1 x} \\ &e^{\lambda_2 x}, x \cdot e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} \cdot e^{\lambda_2 x} \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &e^{\lambda_k x}, x \cdot e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

**Aufgabe 3.6.9** (i) Zu lösen ist  $y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

Lösung:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \text{ (3-fache NST)}$$

$$y_1(x) = e^{0x} = 1$$

$$y_2(x) = e^x$$

$$y_3(x) = x \cdot e^x$$

$$y_4(x) = x^2 \cdot e^x$$

(ii) Zu lösen ist das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ mit } y(0) = 1, y'(0) = 1$$

**Bemerkung 3.6.10** Liegt eine inhomogene Differentialgleichung mit Störfunktion  $b(x)$  vor, so kann in einigen Fällen eine geeignete Ansatzfunktion zur Lösung der Differentialgleichung verwendet werden:

Liegt zum Beispiel die Störfunktion in der folgenden Form vor

$b(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , so kann die folgende Ansatzfunktion verwendet werden:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

**Beispiel 3.6.11** Zu lösen ist  $y''' - 3y' - 2y = 4x^2$

Zunächst homogene Differentialgleichung betrachten:  $y''' - 3y' - 2y = 0, P(x) = x^3 - 3x - 2$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:  $y(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Ansatz für die Störfunktion: Da  $b(x) = x^2$  ein Polynom 2. Grades ist, wird der Ansatz  $\underbrace{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}_{y_P}$  verwendet.

$$y_P''' = 0, y_P'' = 2\alpha_2, y_P' = 2\alpha_2 x + \alpha_1$$

$$-6\alpha_2 x - 3\alpha_1 - 2\alpha_2 x^2 - \alpha_1 x - 2\alpha_0 = 4x^2$$

$$x^2 \underbrace{(-2\alpha_2)}_4 + x \underbrace{(-6\alpha_2 - \alpha_1)}_0 + \underbrace{(-3\alpha_1 - 2\alpha_0)}_0 = 4x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha_2 = -2, \alpha_1 = 6, \alpha_0 = -9$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:  $y(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} - 2x^2 + 6x - 9, x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 3.6.12** Lösen Sie  $y''' - 3y' - 2y = 100 \sin(2x)$

$$b(x) = a \cdot \sin(cx) + b \cdot \cos(cx) \rightarrow \text{Ansatz: } \alpha \cdot \sin(cx) + \beta \cdot \cos(cx)$$

Lösung:

$$y_p(x) = \alpha \cdot \sin(cx) + \beta \cdot \cos(cx); cx = 2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha = -1, \beta = 7$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-x} - \sin(2x) + 7 \cos(2x); x \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 1 \rightarrow 1 = c_1 \cdot 1 + 0 \rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(0) = 1 \rightarrow y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 \cdot x \cdot e^{2x} = 1$$

$$c_2 \cdot x e^{2x}$$

$$c_2(1e^{2x} + x \cdot 2e^{2x})$$

### 3.7 Differentialgleichungssysteme (DGLS)

**Definition 3.7.1 (Differentialgleichungssysteme)** Ein System von  $m$  Gleichungen, dass die unbekannten Funktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  sowie deren Ableitungen  $y_1'(x), y_1''(x), \dots, y_1^{(n_1)}(x), \dots, y_m'(x), y_m''(x), \dots, y_m^{(n_m)}(x)$  enthält, heißt Differentialgleichungssystem.

**Beispiel 3.7.2** Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = -2y_1 + 8y_2 \quad (*)$$

$$y_2' = -4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \quad (**)$$

*Eliminationsmethode:*

$$(*) \text{ ableiten: } y_1'' = -2y_1' + 8y_2'$$

$$(**) \text{ einsetzen: } y_1'' = -2y_1' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64$$

$$y_1' = -2y_1 + 8y_2 \quad (*)$$

$$y_2' = -4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8 \quad (**)$$

$$\begin{aligned} y_1'' &= -2y_1 + 8(-4y_1 + 6y_2 + 10x^2 + 16x - 8) \\ &= -2y_1' - 32y_1 + 48y_2 + 80x^2 + 128x - 64 \quad (\overline{*})' \end{aligned}$$

$$(*) \text{ umstellen nach } y_2$$

$$y_2 = \frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1$$

$$\text{Einsetzen in } (\overline{*})'$$

$$\rightarrow y_1'' = -2y_1' = -32y_1 + 48(\frac{1}{8}y_1' + \frac{1}{4}y_1) + 80x^2 + 128x - 64$$

$$y_1'(-2 + 6) + y_1(-32 + 12) + 89x^2 + 128x - 64$$

$$\rightarrow y_1''' - 4y_1' + 20y_1 = 80x^2 + 128x - 64 \quad (***)$$

$$\rightarrow \text{homogene DGL} \rightarrow \text{charakteristisches Polynom: } P(x) = x^2 - 4x + 20$$

$$a = 0; b = -4; c = 20$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 4i$$

$$y_1 = \cos(4x) \cdot e^{2x}$$

$$y_2 = \sin(4x) \cdot e^{2x} \quad (\text{Eulersche Form})$$

$$e^{\lambda x} = e^{(2+4i)x} = e^{2x}(\cos(4x) + i \sin(4x))$$

Ansatz für die inhomogene Lösung:

$$y_p = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$y'_p = 2\alpha_2 x + \alpha_1, y''_p = 2\alpha_2, y'''_p(x) = 0$$

Einsetzen in  $(***)$  für  $y_1, y'_1, y''_1$

$$2\alpha_2 - 4(2\alpha_2 x + \alpha_1) + 20(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) = 80x^2 + 128x - 64$$

$$\text{Sortieren: } x^2(20\alpha_2) + x(-8\alpha_2 + 20\alpha_1) + (2\alpha_2 - 4\alpha_1 + 20\alpha_0)$$

Koeffizientenvergleich  $20\alpha_2 = 80$  usw.

$$\alpha_0 = -2, \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 4$$

$$y_1(x) = \underbrace{c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x}}_{\text{Homogene LSG}} + \underbrace{4x^2 + 8x - 2}_{\text{Partikuläre LSG}} \quad (***)$$

$$x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_2 = \frac{1}{8}y'_1 + \frac{1}{4}y_1$$

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= -4c_1 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 2c_1 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 4c_2 \cdot \cos(4x)e^{2x} + 2c_2 \cdot \sin(4x)e^{2x} + 8x + 8 \\ &= e^{2x} \cdot \cos(4x)\left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2\right) + e^{2x} \cdot \sin(4x)\left(-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2\right) + x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vektorschreibweise:

$$c_1 = 2D_1$$

$$c_2 = 2D_2$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D_1 \\ D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x \cdot \cos(4x)} + \begin{pmatrix} 2D_2 \\ -D_1 + D_2 \end{pmatrix} e^{2x \cdot \sin(4x)} + \begin{pmatrix} 4x^2 + 8x - 2 \\ x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}, D_i \in \mathbb{R}$



# 4 Numerische Methoden

## 4.1 Numerische Methoden

**Beispiel 4.1.1** Gegeben ist die DGL mit Anfangsbedingung  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Gesucht ist die Lösung  $y(x)$  im Bereich von  $x = x_0 = a$  bis  $x = x_n = b$  die durch den Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  geht.

Das Intervall  $[a, b]$  wird in  $n$  Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  unterteilt mit  $x_{i+1} = x_i + h, (i = 0, 1, \dots, n-1), h = \frac{b-a}{n}$ .

Da die Schrittweite  $h$  hier immer gleich groß ist, wird von äquidistanten Stützstellen gesprochen.

Zunächst wird das Intervall  $[x_0, x_1]$  betrachtet. Die gesuchte Funktion  $y(x)$  verläuft durch den Punkt  $P_0$ .

In diesem Punkt hat sie die Steigung  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ .

Mit Hilfe der Tangente in  $P_0$ , die diese Steigung  $y'_0$  hat, kann der Punkt  $P_1(x_1, y_1)$  bestimmt werden.

Dieser Punkt wird im allgemeinen nicht auf der unbekannten exakten Lösungskurve  $y = y(x)$  liegen. Der Näherungswert  $y_1$  wird von dem exakten Wert verschieden sein, und zwar im allgemeinen umso mehr, je größer die Schrittweite  $h$  gewählt wurde.

Da  $y'(x) = f(x, y(x))$  gilt und damit  $f(x, y(x))$  genau die Steigung  $y'(x)$  der gesuchten exakten Lösung  $y(x)$  ist, gilt näherungsweise für  $h \neq 0$ :  $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$  oder  $y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y(x))$ .

Es gilt also  $y_1 = y_0 + h \cdot y'_0$ .

Die Schrittweite  $h$  muss nicht fest gewählt werden, es können auch verschiedene Schrittweiten  $h_i$  gewählt werden mit  $x_{i+1} = x_i + h_i (i = 0, \dots, n-1)$ .

## 4.2 Polygonzugverfahren von Euler

Wenn äquidistante Stützstellen  $x_i = x_0 + i \cdot h (i = 1, \dots, n)$  verwendet werden, wird die beschriebene Methode  $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$  das Polygonzugverfahren von Euler genannt.

Algorithmus: (Polygonzugverfahren von Euler)

Gegeben: Schrittweite von  $h = \frac{b-a}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Berechne für  $i = 0, \dots, n-1$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

**Beispiel 4.2.1** Gegeben sei  $y' = x \cdot y$  mit  $y(0) = 1$ .

Exakte Lösung:  $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$  ( $\Delta$ ).

$$x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot \underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0 \cdot y_0} = 1 + 0.1 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot \underbrace{f(x_1, y_1)}_{x_1 \cdot y_1} = 1 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 1 = 1.01$$

$$h = 0.1$$

$x$	$y(x)$	$y_i$
0.0		
0.1		
0.2		
0.3		
0.4		
0.5		
0.6		
0.7		
0.8		
0.9		
1.0		

Skizzieren sie den Vergleich zwischen  $y(x)$  und  $y_i (h = 0.1)$

$$h = 0.05$$

## 4.3 Runge-Kutta-Verfahren

Mit der am linken Randpunkt  $P_0$  des betreffenden Intervalls berechneten Steigung  $f(x_i, y_i)$  wird bis zur Mitte  $y_i + \frac{h}{2}$  des Intervalls gegangen.

Dort wird die Steigung im Punkt  $P_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$  berechnet, die in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$\frac{k_2}{2} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \text{ mit } k_1 = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Nun wird erneut vom linken Randpunkt  $P_0$  aus mit der neuen Richtung bis zum Punkt  $P_2$  in der Mitte des Intervalls gegangen, dessen Koordinaten  $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$  sind.

Mit der in  $P_2$  berechneten Steigung  $f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) = \frac{k_3}{h}$  wird vom linken Randpunkt aus bis zum Punkt  $P_3(x_i + h, y_i + k_3)$  gegangen, in dem ebenfalls die Steigung  $f(x_i + h, y_i + k_3) = \frac{k_4}{h}$  berechnet wird.

Auch mit dieser Steigung wird von  $P_0$  aus das Intervall mit der Breite  $h$  überbrückt bis zum Punkt  $P_4$  mit den Koordinaten  $(x_i + h, y_i + k_4)$ .

Damit gibt es vier Richtungen, in denen das Intervall überbrückt werden kann. Die beiden in der Intervallmitte berechneten Steigungen werden bei der Mittelwertbildung mit dem Gewichtungsfaktor 2 berücksichtigt.

ToDo: Grafik

$$\frac{k_2}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

(Steigung in  $P_1$ )

$$\frac{k_3}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

Gesuchter Punkt:  $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$

$$P_3(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$\frac{k_4}{h} = f(x_1, y_0 + k_3)$$

Also wird  $k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$y_{i+1} = y_i + k$$