TPP2024

今年の TPPmark は互換による整列をテーマにしています．この場合，整列のコ ストは比較の数ではなく，整列するのに必要な互換の数です．

例えば，リスト [5, 9, 1, 3, 7] を整列するには，すなわちリスト [1, 3, 5, 7, 9] に変えるには，3 つの互換を適用すればいい．まず位置 1 と 3 を交換し， 次に 2 と 4 を交換し， しまいに 4 と 5 を交換すればいい(ただし位置を 1 から数えた 場合)． 別の見方をすれば，置換 [1 → 3, 2 → 5, 3 → 1, 4 → 2, 5 → 4] を適用する必要がある．線形代数の講義を思い出すと，置換はまず循環に分解 できる．ここでは (1 3) と (2 5 4) である (循環内に各位置が次のものにな り，最後の位置が最初のものになる)．そして循環がまた互換に分解される． 長さ m の循環が(m-1)互換で実現できるので，最適なアルゴリズムが (要素の数 - 循環の数) 個の互換で整列を完成させる．

タスクは以下のとおりである．

1. 置換をその置換を実現する最小の互換の列に変換する関数を書きなさい．
2. この関数の正しさ，そして列の最小性を証明せよ． この際，置換に関する理論が必要だろう．
3. 重複のない自然数のリストを与えられたら，それを整列する最小の互換列を返す関数 を書きなさい．正しさと列の最小性を証明せよ．
4. 重複のありうる自然数のリストを与えられたら，それを整列する最小の互換列を返す関数 を書きなさい．正しさと列の最小性を証明せよ．

位置を 0 から始めてもよい．