

問題 / Problem

自然数を要素とする有限列 $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$ (長さ $k \geq 1$) が **妥当** (*valid*) であるとは、次の性質を満たすこととします。

すべての自然数 m, n について、 $m + a_{m \% k} = n + a_{n \% k}$ ならば $m = n$ である。

たとえば、 $[1, 1, 1]$ や $[2, 0]$ や $[1, 5, 3]$ や $[2, 0, 1, 9]$ は妥当ですが、 $[1, 2, 1]$ や $[3, 0]$ や $[1, 3, 5]$ や $[2, 0, 1, 8]$ は妥当ではありません。このとき、以下の問いにお答えください。

1. 与えられた列が妥当であることを判定する関数 `is_valid` を定義して、その判定が正しいことを証明してください。
2. 長さ k の列 $l=[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$ が妥当であり、自然数 n によって定められる自然数の集合 $\{m \mid m \leq n < m + a_{m \% k}\}$ を $\text{Across}(n)$ で表すことにします。このとき、十分大きな自然数 n について、列 l の要素の総和が $\text{Across}(n)$ の要素数と k の積と一致することを証明してください。

A finite sequence $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$ (of length $k \geq 1$) of natural numbers is said *valid* when it satisfies the following condition:

for all natural numbers m and n , if $m + a_{m \% k} = n + a_{n \% k}$, then $m = n$

For instance, $[1, 1, 1]$, $[2, 0]$, $[1, 5, 3]$, and $[2, 0, 1, 9]$ are valid but $[1, 2, 1]$, $[3, 0]$, $[1, 3, 5]$, and $[2, 0, 1, 8]$ are not. Then please solve the following problems.

1. Define an `is_valid` function that decides whether a given sequence is valid and give a formal proof to the correctness of the defined function.
2. Let a sequence $l=[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$ of length k be valid, and let $\text{Across}(n)$ be a set $\{m \mid m \leq n < m + a_{m \% k}\}$ of natural numbers. Then, give a formal proof that, for a sufficiently large natural number n , the total sum of elements in l is equal to the product of the number of elements in $\text{Across}(n)$ and k .