modified at 20:30, Sep. 28th, 2020

SAT/SMT ソルバで解を探索するような問題にしてみました．それぞれ手証明も可能です．回答は nakasho yamaguchi-u.ac.jp まで送付をお願いします．

I made problems to find the solutions using SAT/SMT solvers. You can also prove them without solvers. Please send your answer to nakasho yamaguchi-u.ac.jp.

問 1.

124 本のベクトルからなる集合 $X = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{0,\pm1,\pm\sqrt{2}\}\} \setminus \{(0,0,0)\}$ の各要素を白または黒に塗り分けることを考えます． このとき，次の 2 条件 a), b) を満たすようにベクトルを白または黒に塗り分けることはできないことを証明してください．

- a) 2 つの直交するベクトルのうち，少なくとも 1 本は黒色である．
- b) 互いに直交し合う 3 つのベクトルのうち，少なくとも 1 本は白色である．

Consider painting each element of the set $X = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{0,\pm1,\pm\sqrt{2}\}\} \setminus \{(0,0,0)\}$ of 124 vectors white or black. Prove that the vectors cannot be painted white or black in such a way that the following two conditions a) and b) are met.

- a) Whenever two of the vectors are orthogonal, at least one is black.
- b) Whenever three of the vectors are mutually orthogonal, at least one is white.

問 2.

条件 c) を満たしつつ，条件 a) と b) の少なくとも一方は成り立たないように，ベクトルの集合 X からできるだけ多くの要素を減らしてください． （ヒント: 33 本までは減らせることが知られています．）

- c) 集合内に互いに直交し合う 3 つのベクトルの集合が少なくとも 1 つは存在する．

Reduce as many elements as possible from the set of vectors X such that at least one of the conditions a) and b) does not hold while condition c) is satisfied. (Hint: It is known that you can reduce the number to 33.)

- c) There is at least one set of three mutually orthogonal vectors in the set.

問 3.

より一般的に n 次元 (n > 3) の場合に拡張してください． このとき問題は，条件 c’) を満たしつつ，条件 a) と b’) の少なくとも一方は成り立たないように， n 次元ベクトルの集合を見つけることとなります．

- a) 2 つの直交するベクトルのうち，少なくとも 1 本は黒色である．
- b’) 互いに直交し合う n 本のベクトルのうち，少なくとも 1 本は白色である．
- c’) 集合内に互いに直交し合う n 本のベクトルの集合が少なくとも 1 つは存在する．

一般の場合はとても難しいです．特定の n (> 3) に対して，このようなベクトルの集合を構成する回答も歓迎します．

More generally, extend it to the case of n dimensions (n > 3). The problem is to find a set of n-dimensional vectors such that at least one of the conditions a) and b’) does not hold while condition c’) is satisfied.

- a) Whenever two of the vectors are orthogonal, at least one is black.
- b’) Whenever n vectors are mutually orthogonal, at least one is white.
- c’) There exists at least one set of n vectors in the set that are mutually orthogonal to each other.

The general case is very difficult. The constitution of such a set of vectors for a particular n (> 3) is also welcome.