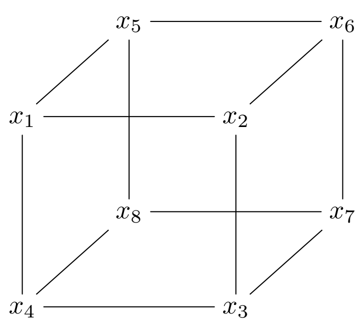
問題

$n \geq 1$ を整数とする．同じサイズの立方体型ランプを隙間なく n^3 個並べて，全体として $n \times n \times n$ の大きな立方体を作る．すると，その外面には各面に$n \times n$ 個，計 $6n^2$ 個の小正方形（外側に見えているランプの外面）が現れる．各ランプは `on/off` のいずれかの状態をもち，外面の小正方形のうち一つを押すと，その小正方形とちょうど反対側にある小正方形を結ぶ直線上の n 個のランプだけが同時に反転（on $\leftrightarrow$ off）する．全ランプの `on/off` の状態が与えられたとき，上記の操作の繰り返しのみですべてのランプを `off` にできるための必要十分条件をなるべく簡潔に記述し，その条件の正しさを証明せよ．

1 Small example

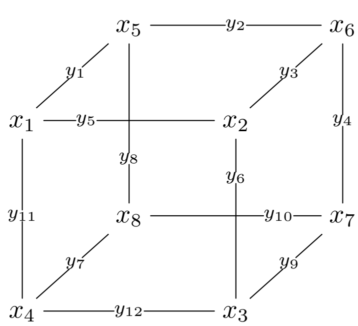
例として、まず $2 \times 2 \times 2$ の立方体を考えます。点灯パターンは次のように書かれます:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \nvDash$$



切り替えパターンは次のように書かれます:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}$$



1 回の切り替え操作は $y_i = 1(\mathrm{true})$ に対応します。切り替え後、光の結果は y_i と接続された x_n および x_m に対して $x_n \oplus y_i$、$x_m \oplus y_i$ となります。したがって、全てのライトが同一の点灯を持つというのは、与えられた $x_1, \ldots, x_8$ に対して、次の式を満たす $y_1, \ldots, y_{12}$ が存在する時です。

$$(x_1 \oplus y_1 \oplus y_5 \oplus y_{11}) \wedge \cdots \wedge (x_8 \oplus y_8 \oplus y_7 \oplus y_{10})$$

$$\begin{align}
&(x_1 \oplus y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5)\wedge \tag{1}\\
&(x_2 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_6)\wedge \tag{2}\\
&(x_3 \oplus y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9)\wedge \tag{3}\\
&(x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7)\wedge \tag{4}\\
&(x_5 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_8)\wedge \tag{5}\\
&(x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4)\wedge \tag{6}\\
&(x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10})\wedge \tag{7}\\
&(x_8 \oplus y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8) \tag{8}
\end{align}$$

各辺に対して 2 回以上の切り替え操作の必要性を考慮する必要があります。どのタイミングでも、切り替え回数が奇数であれば 1 回の切り替えに帰着し、偶数であれば切り替えなしに帰着します。これは排他的論理和の計算によるものです。以上の議論から以下の連立方程式が立式できる。

$$\begin{cases}
x_1 \oplus y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5 & = 1\\
x_2 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_6 & = 1\\
x_3 \oplus y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9 & = 1\\
x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7 & = 1\\
x_5 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_8 & = 1\\
x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 & = 1\\
x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10} & = 1\\
x_8 \oplus y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8 & = 1
\end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases}
y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5 & = \neg x_1\\
y_3 \oplus y_5 \oplus y_6 & = \neg x_2\\
y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9 & = \neg x_3\\
y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7 & = \neg x_4\\
y_1 \oplus y_2 \oplus y_8 & = \neg x_5\\
y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 & = \neg x_6\\
y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10} & = \neg x_7\\
y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8 & = \neg x_8
\end{cases}$$

連立方程式を掃き出し法で解くことを考える。行基本変形によって矛盾行の存在の有無が解の存在に対応し、つまりボタン押下戦略の有無に対応する。

係数が打ち消されるのは、排他的論理和によって打ち消しが発生したときのみであり、その可能性は全方程式をすべて足したときのみである。そこで、全両辺の排他的論理和をとってみると

$$\begin{aligned}(y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5) \oplus \cdots \oplus (y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8) &= \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_8 \\ 0 &= \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_8 \\ 0 &= x_1 \oplus \cdots \oplus x_8\end{aligned}$$

つまり y_iの値に関係なく x_jは上記の条件を満たす必要がある。そしてこのとき掃き出し法によって以下の解を得る。

$$y_1 = \neg x_1 \oplus y_5 \oplus y_{11} \tag{9}$$
$$y_3 = \neg x_2 \oplus y_5 \oplus y_6 \tag{10}$$
$$y_{12} = \neg x_3 \oplus y_6 \oplus y_9 \tag{11}$$
$$y_7 = \neg x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \tag{12}$$
$$y_2 = \neg x_5 \oplus y_1 \oplus y_8 \tag{13}$$
$$y_4 = \neg x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \tag{14}$$
$$y_{10} = \neg x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \tag{15}$$

2 General case

まず、ランプの点灯パターンを次のように表します:

$$f : x_{i,j,k} \mapsto (y_{-,j,k}, y_{i,-,k}, y_{i,j,-})$$

ここで、$1 \leq i, j, k \leq n$ です。次に、切り替えパターンが成立するための条件を次のように表します:

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} x_{i,j,k} \oplus y_{-,j,k} \oplus y_{i,-,k} \oplus y_{i,j,-} = 1$$

以上の議論から以下の連立方程式が立式できる

$$\begin{cases} x_{1,1,1} \oplus y_{-,1,1} \oplus y_{1,-,1} \oplus y_{1,1,-} & = 1 \\ & \vdots \\ x_{i,j,k} \oplus y_{-,j,k} \oplus y_{i,-,k} \oplus y_{i,j,-} & = 1 \\ & \vdots \\ x_{n,n,n} \oplus y_{-,n,n} \oplus y_{n,-,n} \oplus y_{n,n,-} & = 1 \end{cases}$$

すなわち、

$$
\begin{cases}
y_{-,1,1} \oplus y_{1,-,1} \oplus y_{1,1,-} & = \neg x_{1,1,1} \\
 & \vdots \\
y_{-,j,k} \oplus y_{i,-,k} \oplus y_{i,j,-} & = \neg x_{i,j,k} \\
 & \vdots \\
y_{-,n,n} \oplus y_{n,-,n} \oplus y_{n,n,-} & = \neg x_{n,n,n}
\end{cases}
$$

これが成立するのは、以下のとおりである

$$
\bigoplus_{\substack{y=y_1,y_2 \\ y=y_1,y_2 \\ z=y_1,y_2}} \neg x_{x,y,z} = 1 \iff \bigoplus_{\substack{y=y_1,y_2 \\ y=y_1,y_2 \\ z=y_1,y_2}} x_{x,y,z} = 1
$$

したがって、この条件が必要十分条件となる。

$$
\bigwedge_{\substack{1 \leq y_1 < y_2 \leq n \\ 1 \leq y_1 < y_2 \leq n \\ 1 \leq y_1 < y_2 \leq n}} \bigoplus_{\substack{y=y_1,y_2 \\ y=y_1,y_2 \\ z=y_1,y_2}} x_{x,y,z} = 1
$$