

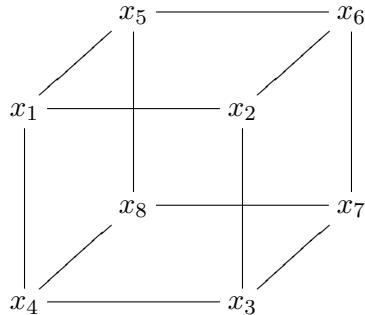
問題

$n \geq 1$ を整数とする。同じサイズの立方体型ランプを隙間なく n^3 個並べて、全体として $n \times n \times n$ の大きな立方体を作る。すると、その外面には各面に $n \times n$ 個、計 $6n^2$ 個の小正方形（外側に見えているランプの外面）が現れる。各ランプは on/off のいずれかの状態をもち、外面の小正方形のうち一つを押すと、その小正方形とちょうど反対側にある小正方形を結ぶ直線上の n 個のランプだけが同時に反転 ($\text{on} \leftrightarrow \text{off}$) する。全ランプの on/off の状態が与えられたとき、上記の操作の繰り返しのみですべてのランプを off にできるための必要十分条件となるべく簡潔に記述し、その条件の正しさを証明せよ。

1 Small example

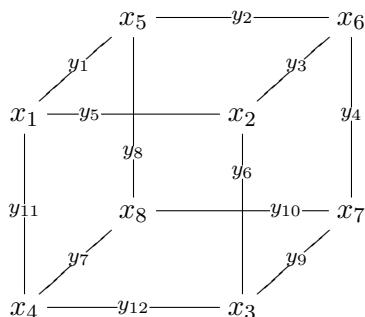
例として、まず $2 \times 2 \times 2$ の立方体を考えます。点灯パターンは次のように書かれます：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{K}$$



切り替えパターンは次のように書かれます：

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}$$



1回の切り替え操作は $y_i = 1(\text{true})$ に対応します。切り替え後、光の結果は y_i と接続された x_n および x_m に対して $x_n \oplus y_i$ 、 $x_m \oplus y_i$ となります。したがって、全てのライ

トが同一の点灯を持つというのは、与えられた x_1, \dots, x_8 に対して、次の式を満たす y_1, \dots, y_{12} が存在する時です。

$$(x_1 \oplus y_1 \oplus y_5 \oplus y_{11}) \wedge \cdots \wedge (x_8 \oplus y_8 \oplus y_7 \oplus y_{10})$$

$$(x_1 \oplus y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5) \wedge \quad (1)$$

$$(x_2 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_6) \wedge \quad (2)$$

$$(x_3 \oplus y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9) \wedge \quad (3)$$

$$(x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7) \wedge \quad (4)$$

$$(x_5 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_8) \wedge \quad (5)$$

$$(x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4) \wedge \quad (6)$$

$$(x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10}) \wedge \quad (7)$$

$$(x_8 \oplus y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8) \quad (8)$$

各辺に対して 2 回以上の切り替え操作の必要性を考慮する必要があります。どのタイミングでも、切り替え回数が奇数であれば 1 回の切り替えに帰着し、偶数であれば切り替えなしに帰着します。これは排他的論理和の計算によるものです。以上の議論から以下の連立方程式が立式できる。

$$\begin{cases} x_1 \oplus y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5 = 1 \\ x_2 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_6 = 1 \\ x_3 \oplus y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9 = 1 \\ x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7 = 1 \\ x_5 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_8 = 1 \\ x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 = 1 \\ x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10} = 1 \\ x_8 \oplus y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8 = 1 \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5 = \neg x_1 \\ y_3 \oplus y_5 \oplus y_6 = \neg x_2 \\ y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9 = \neg x_3 \\ y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7 = \neg x_4 \\ y_1 \oplus y_2 \oplus y_8 = \neg x_5 \\ y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 = \neg x_6 \\ y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10} = \neg x_7 \\ y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8 = \neg x_8 \end{cases}$$

連立方程式を掃き出し法で解くことを考える。行基本変形によって矛盾行の存在の有無が解の存在に対応し、つまりボタン押下戦略の有無に対応する。係数が打ち消され

るのは、排他的論理和によって打ち消しが発生したときのみであり、その可能性は全方程式をすべて足したときのみである。そこで、全両辺の排他的論理和をとってみると

$$\begin{aligned}(y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5) \oplus \cdots \oplus (y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8) &= \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_8 \\ 0 &= \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_8 \\ 0 &= x_1 \oplus \cdots \oplus x_8\end{aligned}$$

つまり y_i の値に関係なく x_j は上記の条件を満たす必要がある。そしてこのとき掃き出し法によって以下の解を得る。

$$y_1 = \neg x_1 \oplus y_5 \oplus y_{11} \quad (9)$$

$$y_3 = \neg x_2 \oplus y_5 \oplus y_6 \quad (10)$$

$$y_{12} = \neg x_3 \oplus y_6 \oplus y_9 \quad (11)$$

$$y_7 = \neg x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \quad (12)$$

$$y_2 = \neg x_5 \oplus y_1 \oplus y_8 \quad (13)$$

$$y_4 = \neg x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \quad (14)$$

$$y_{10} = \neg x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \quad (15)$$

2 General case

まず、ランプの点灯パターンを次のように表します:

$$f : x_{i,j,k} \mapsto (y_{-,j,k}, y_{i,-,k}, y_{i,j,-})$$

ここで、 $1 \leq i, j, k \leq n$ です。次に、切り替えパターンが成立するための条件を次のように表します:

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} x_{i,j,k} \oplus y_{-,j,k} \oplus y_{i,-,k} \oplus y_{i,j,-} = 1$$

以上の議論から以下の連立方程式が立式できる

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{1,1,1} \oplus y_{-,1,1} \oplus y_{1,-,1} \oplus y_{1,1,-} & = 1 \\ & \vdots \\ x_{i,j,k} \oplus y_{-,j,k} \oplus y_{i,-,k} \oplus y_{i,j,-} & = 1 \\ & \vdots \\ x_{n,n,n} \oplus y_{-,n,n} \oplus y_{n,-,n} \oplus y_{n,n,-} & = 1 \end{array} \right.$$

すなわち、

$$\begin{cases} y_{-,1,1} \oplus y_{1,-,1} \oplus y_{1,1,-} &= \neg x_{1,1,1} \\ \vdots \\ y_{-,j,k} \oplus y_{i,-,k} \oplus y_{i,j,-} &= \neg x_{i,j,k} \\ \vdots \\ y_{-,n,n} \oplus y_{n,-,n} \oplus y_{n,n,-} &= \neg x_{n,n,n} \end{cases}$$

このとき、掃き出し法によって解が存在するのは、右辺が 1 になるときである。

$$\bigoplus_{\substack{x=x_1, x_2 \\ y=y_1, y_2 \\ z=z_1, z_2}} \neg x_{x,y,z} = 1 \iff \bigoplus_{\substack{x=x_1, x_2 \\ y=y_1, y_2 \\ z=z_1, z_2}} x_{x,y,z} = 1$$

したがって、この条件が必要十分条件となる。

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq x_1 < x_2 \leq n \\ 1 \leq y_1 < y_2 \leq n \\ 1 \leq z_1 < z_2 \leq n}} \bigoplus_{\substack{x=x_1, x_2 \\ y=y_1, y_2 \\ z=z_1, z_2}} x_{x,y,z} = 1$$