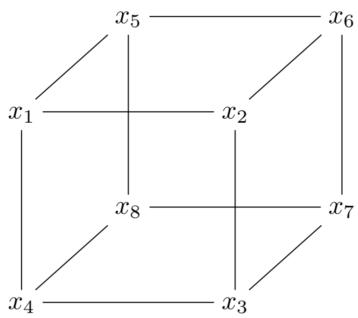
問題

$n \geq 1$ を整数とする．同じサイズの立方体型ランプを隙間なく n^3 個並べて，全体として $n \times n \times n$ の大きな立方体を作る．すると，その外面には各面に $n \times n$ 個，計 $6n^2$ 個の小正方形（外側に見えているランプの外面）が現れる．各ランプは `on/off` のいずれかの状態をもち，外面の小正方形のうち一つを押すと，その小正方形とちょうど反対側にある小正方形を結ぶ直線上の n 個のランプだけが同時に反転（on $\leftrightarrow$ off）する．全ランプの `on/off` の状態が与えられたとき，上記の操作の繰り返しのみですべてのランプを `off` にできるための必要十分条件をなるべく簡潔に記述し，その条件の正しさを証明せよ．

1　Small example

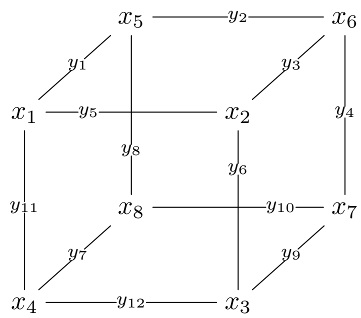
例として、まず $2 \times 2 \times 2$ の立方体を考えます。点灯パターンは次のように書かれます:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \nvDash$$



切り替えパターンは次のように書かれます:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}$$



1 回の切り替え操作は $y_i = 1(\text{true})$ に対応します。切り替え後、光の結果は y_i と接続された x_n および x_m に対して $x_n \oplus y_i$、$x_m \oplus y_i$ となります。したがって、全てのライトが同一の点灯を持つというのは、与えられた $x_1, \ldots, x_8$ に対して、次の式を満たす $y_1, \ldots, y_{12}$ が存在する時です。

$$(x_1 \oplus y_1 \oplus y_5 \oplus y_{11}) \wedge \cdots \wedge (x_8 \oplus y_8 \oplus y_7 \oplus y_{10})$$

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \oplus y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5)\wedge && (1)\\
&(x_2 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_6)\wedge && (2)\\
&(x_3 \oplus y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9)\wedge && (3)\\
&(x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7)\wedge && (4)\\
&(x_5 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_8)\wedge && (5)\\
&(x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4)\wedge && (6)\\
&(x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10})\wedge && (7)\\
&(x_8 \oplus y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8) && (8)
\end{aligned}
$$

各辺に対して 2 回以上の切り替え操作の必要性を考慮する必要があります。どのタイミングでも、切り替え回数が奇数であれば 1 回の切り替えに帰着し、偶数であれば切り替えなしに帰着します。これは排他的論理和の計算によるものです。以上の議論から以下の連立方程式が立式できる。

$$
\begin{cases}
x_1 \oplus y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5 & = 1\\
x_2 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_6 & = 1\\
x_3 \oplus y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9 & = 1\\
x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7 & = 1\\
x_5 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_8 & = 1\\
x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 & = 1\\
x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10} & = 1\\
x_8 \oplus y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8 & = 1
\end{cases}
$$

したがって

$$
\begin{cases}
y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5 & = \neg x_1\\
y_3 \oplus y_5 \oplus y_6 & = \neg x_2\\
y_{12} \oplus y_6 \oplus y_9 & = \neg x_3\\
y_{11} \oplus y_{12} \oplus y_7 & = \neg x_4\\
y_1 \oplus y_2 \oplus y_8 & = \neg x_5\\
y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 & = \neg x_6\\
y_4 \oplus y_9 \oplus y_{10} & = \neg x_7\\
y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8 & = \neg x_8
\end{cases}
$$

連立方程式を掃き出し法で解くことを考える。行基本変形によって矛盾行の存在の有無が解の存在に対応し、つまりボタン押下戦略の有無に対応する。係数が打ち消されるのは、排他的論理和によって打ち消しが発生したときのみであり、その可能性は全方程式をすべて足したときのみである。そこで、全両辺の排他的論理和をとってみると

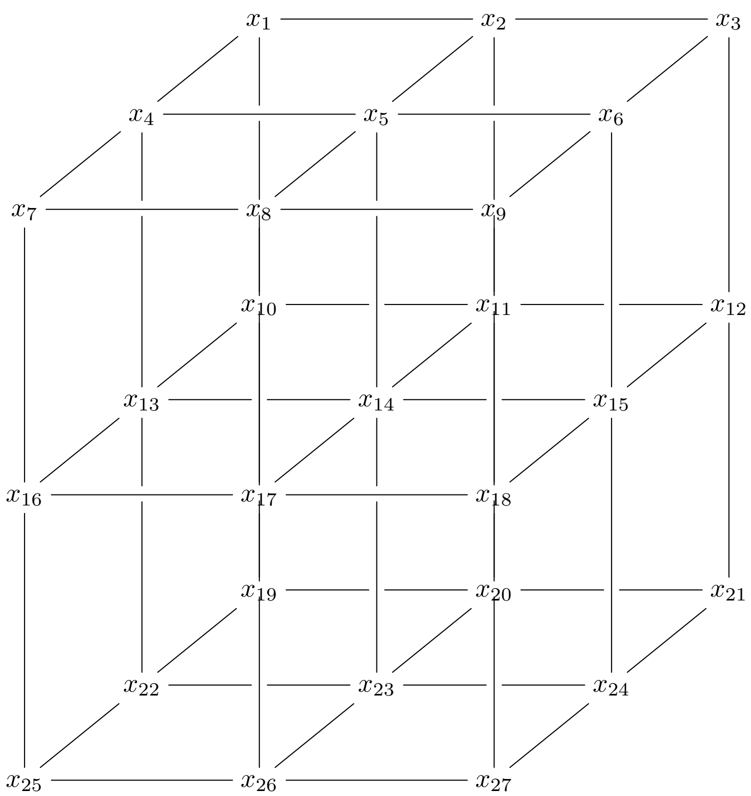
$$
\begin{aligned}
(y_1 \oplus y_{11} \oplus y_5) \oplus \cdots \oplus (y_{10} \oplus y_7 \oplus y_8) &= \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_8\\
0 &= \neg x_1 \oplus \cdots \oplus \neg x_8\\
0 &= x_1 \oplus \cdots \oplus x_8
\end{aligned}
$$

つまり y_iの値に関係なく x_jは上記の条件を満たす必要がある。そしてこのとき掃き出し法によって以下の解

を得る。

$$y_1 = \neg x_1 \oplus y_5 \oplus y_{11} \tag{9}$$
$$y_3 = \neg x_2 \oplus y_5 \oplus y_6 \tag{10}$$
$$y_{12} = \neg x_3 \oplus y_6 \oplus y_9 \tag{11}$$
$$y_7 = \neg x_4 \oplus y_{11} \oplus y_{12} \tag{12}$$
$$y_2 = \neg x_5 \oplus y_1 \oplus y_8 \tag{13}$$
$$y_4 = \neg x_6 \oplus y_2 \oplus y_3 \tag{14}$$
$$y_{10} = \neg x_7 \oplus y_4 \oplus y_9 \tag{15}$$

2 Larger example



$$(x_1 \otimes y_{1,4,7} \otimes y_{1,2,3} \otimes y_{1,10,19}) \wedge \cdots \wedge (x_{27} \otimes y_{25,26,27} \otimes y_{21,24,27} \otimes y_{9,18,27})$$

$$y_{1,2,3} \otimes \cdots \otimes y_{25,26,27} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{27}$$

3 General case

$$f : x_{i,j,k} \mapsto (y_{-,j,k}, y_{i,-,k}, y_{i,j,-})$$

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n}\bigwedge_{j=1,\ldots,n}\bigwedge_{k=1,\ldots,n} x_{i,j,k}\oplus y_{-,j,k}\oplus y_{i,-,k}\oplus y_{i,j,-}$$

$$\begin{cases} x_{1,1,1}\oplus y_{-,1,1}\oplus y_{1,-,1}\oplus y_{1,1,-} & =1 \\ & \vdots \\ x_{i,j,k}\oplus y_{-,j,k}\oplus y_{i,-,k}\oplus y_{i,j,-} & =1 \\ & \vdots \\ x_{n,n,n}\oplus y_{-,n,n}\oplus y_{n,-,n}\oplus y_{n,n,-} & =1 \end{cases}$$

掃き出し法の最中で矛盾行が存在するとすれば、それはすべての行を足した時のみである。なぜならば係数行列を足した時 0 となるのは、各変数について偶数回ずつ足す時のみだからである。しかし、変数の表れ方から係数がすべて偶数になりうるのは、総和の時のみであり、それも n が偶数の時しか発生しない。

$$\bigoplus_n y_{-,1,1}\oplus\cdots\oplus\bigoplus_n y_{n,n,-} = x_{1,1,1}\oplus\cdots\oplus x_{n,n,n}$$

$$\bigoplus_n y_{*,*,*} = \begin{cases} 0 & \text{if n is even} \\ y_{*,*,*} & \text{if n is odd} \end{cases}$$

3.1 Odd case