今回は，最長共通部分列(LCS)に関する問題です．解答は問い合わせ先までお送りください．

定義

ここでは部分列として，連続するとは限らないものを考えます．一般に長さ n の列の部分列は最大で 2^n 通りあります．例えば ABC の部分列は ε, A, B, C, AB, BC, AC, ABC の 8 つです（ε は空列）．

二つの有限列 s, t の共通部分列とは，s の部分列でも t の部分列でもあるような列のことをいい，最長共通部分列とは共通部分列の中で最も長いものをいいます．最長共通部分列は一意とは限りません．例えば，AB と BA はいずれも ABA と BAB の最長共通部分列です．

問題

1. 二つの有限列 s と t を受け取って，その最長共通部分列（の一つ）を返す関数 LCS を定義してください．列はリストなど使用する証明支援系にある適切なデータ構造を使ってください．また，列の要素の型は自然数など適当な型に固定して構いません．
2. 定義した関数が共通部分列を返す，つまり LCS s t が s と t のいずれの部分列にもなっていることを証明してください（必要ならば，部分列であることを表す述語も定義した上で）．
3. 定義した関数が返す共通部分列が最長である，つまり u も s と t の共通部分列ならば u の長さは LCS s t の長さ以下であることを証明してください．

最長共通部分列を求めるアルゴリズムとしてよく知られているのは動的計画法によるものです（Wikipedia にも解説があります）が，ここでは実装の方針は問いません．素朴に全数探索するアルゴリズムも考えられますし，証明が簡潔に書けることを重視しても面白いかもしれません．