Diferencijalne jednačine

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

30. novembar 2022.

0.1 Homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo opšti oblik homogene diferencijalne jednačine drugog reda

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \,.$$

Za datu diferencijalnu jednačinu formira se karakteristična jednačina oblika

$$am^2 + bm + c = 0 \,,$$

čiji su koreni

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \,.$$

U zavisnosti od vrednosti korena $m_{1,2}$ razmatraćemo sledeće slučajeve:

1. Koreni su realni i različiti.
   Opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine u ovom slučaju je

   $$\boxed{y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}.}$$

   Primer 1.
   Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

   $$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0 \,.$$

   Rešenje.
   Prvi korak je formiranje karakteristične jednačine oblika

   $$m^2 + 7m + 12 = 0 \,.$$

   Rešenja dobijene kvadratne jednačine su

   $$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} \\ m_1 &= -\frac{8}{2} = -4 \\ m_2 &= -\frac{6}{2} = -3 \,. \end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih vrednosti korena m_1, m_2 možemo formirati rešenje zadate diferencijalne jednačine

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x} \; .$$

2. Koreni su konjugovano kompleksni.
   U ovom slučaju, prethodno definisane korene m_1 i m_2 možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} m_1 &= p + jq \\ m_2 &= p - jq \; . \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (1) sledi

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(p+j1)x} + c_2 e^{(p-jq)x} = c_1 e^{px} e^{jqx} + c_2 e^{px} e^{-jqx} = \\ &= e^{px}\Big(c_1 e^{jqx} + c_2 e^{-jqx}\Big) = e^{px}\Big(c_1\Big(\cos(qx) + j\sin(qx)\Big) + c_2\Big(\cos(qx) - j\sin(qx)\Big)\Big) = \\ &= e^{px}\Big(\cos(qx)(c_1 + c_2) + j\sin(qx)(c_1 - c_2)\Big) = e^{px}\Big(A\cos(qx) + B\sin(qx)\Big) \; , \end{aligned}$$

gde je $A = c_1 + c_2$ i $B = j(c_1 - c_2)$.

Na kraju, dobijen je opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine

$$\boxed{y(x) = e^{px}(A\cos(qx) + B\sin(qx)).}$$

Primer 2.
Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0 \; .$$

Rešenje.
Polazimo od karakteristične jednačine

$$m^2 + 2m + 5 = 0 \; ,$$

čija su rešenja

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4j}{2} = -1 \pm 2j \\ m_1 &= -1 + 2j \\ m_2 &= -1 - 2j \; . \end{aligned}$$

U skladu sa dobijenim vrednostima za m_1 i m_2, dobijamo rešenje zadate diferencijalne jednačine

$$y(x) = e^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big) \; .$$

3. Koreni su realni i jednaki.
   U slučaju kada je $m_1 = m_2$ opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine je

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}.}$$

Primer 3.
Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0\ .$$

Rešenje.
Ponavljajući proceduru iz prethodna dva primera dobijamo

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$
$$(m-2)^2 = 0\ .$$

Rešenja dobijene kvadratne jednačine su

$$m_1 = m_2 = 2\ ,$$

pa je rešenje zadate diferencijalne jednačine

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}\ .$$

0.2 Nehomogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo opšti oblik nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + y = f(x)\ .$$

Rešenje ovako definisane diferencijalne jednačine se sastoji iz ***homogenog*** i ***partikularnog*** dela

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\ .$$

Oblik partikularnog rešenja nehomogene diferencijalne jednačine zavisi od oblika funkcije $f(x)$, pa se može formirati tabela na osnovu koje ćemo određivati partikularno rešenje u zavisnosti od funkcije $f(x)$.

f(x)	$y_p(x)$
α	A
$\alpha x^n, n \in N$	$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$
αe^{rx}	Ae^{rx}
$\alpha \cos(kx)$ $\alpha \sin(kx)$	$A\cos(kx) + B\sin(kx)$
$\alpha x^n e^{rx}\cos(kx)$ $\alpha x^n e^{rx}\sin(kx)$	$(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n)e^{rx}\cos(kx)+$ $+(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_{n-1}x + B_n)e^{rx}\sin(kx)$

Primer 4.
Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

$$\ddot{y} + 9y = 2x^2 + 4x + 7 \ .$$

Rešenje.
Data diferencijalna jednačina je nehomogena pri čemu je

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 7 \ .$$

Rešenje nehomogene diferencijalne jednačine se sastoji iz homogenog i partikularnog dela

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \ .$$

- homogeno rešenje:

  Homogeno rešenje se dobija izjednačavanjem početne diferencijalne jednačine sa nulom

  $$\ddot{y} + 9y = 0 \ .$$

  Karakteristična jednačina je

  $$\begin{aligned} m^2 + 9 &= 0 \\ m_1 &= 3j \\ m_2 &= -3j \ . \end{aligned}$$

  Kako su koreni karakteristične jednačine konjugovano kompleksni, možemo formirati homogeno rešenje zadate diferencijalne jednačina

  $$y_h(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) \ .$$

- partikularno rešenje:

  S obzirom da je

  $$f(x) = 2x^2 + 4x + 7 \ ,$$

  možemo formirati partikularno rešenje na sledeći način

  $$\begin{aligned} y_p(x) &= A_0x^2 + A_1x + A_2 + B_0x + B_1 + C_0 = \\ &= A_ox^2 + (A_1 + B_0)x + A_2 + B_1 + C_0 = \\ &= a_0x^2 + a_1x + a_2 \ , \end{aligned}$$

  gde je $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1 + B_0$ i $a_2 = A_1 + B_1 + C_0$.

Kako je početna diferencijalna jednačina drugog reda, neophodno je odrediti prvi i drugi izvod dobijenog partikularnog rešenja. Prvi izvod je

$$\dot{y}_p(x) = 2a_0 x + a_1 \ ,$$

dok je drugi izvod

$$\ddot{y}_p(x) = 2a_0 \ .$$

Uvrštavanjem prvog i drugog izvoda u početnu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} 2a_0 + 9(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) &= 2x^2 + 4x + 7 \\ 2a_0 + 9a_0 x^2 + 9a_1 x + 9a_2 &= 2x^2 + 4x + 7 \\ 9a_0 x^2 + 9a_1 x + (2a_0 + 9a_2) &= 2x^2 + 4x + 7 \ . \end{aligned}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa obe strane znaka jednakosti sledi

$$\begin{aligned} 9a_0 = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{9} \\ 9a_1 = 4 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = \frac{4}{9} \\ 2a_0 + 9a_2 = 7 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{59}{81} \ . \end{aligned}$$

Sledi da je partikularno rešenje zadate diferencijalne jednačine

$$y_p(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{59}{81} \ .$$

Na kraju, sabiranjem homogenog i partikularnog rešenja dobija se rešenje početne nehomogene diferencijalne jednačine

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{59}{81} \ .$$

Primer 5.
Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 3e^{-2x} + e^{3x} \ .$$

Rešenje.
Data diferencijalna jednačina je nehomogena pri čemu je

$$f(x) = 3e^{-2x} + e^{3x} \ .$$

Kao i u prethodnom primeru, rešenje nehomogene diferencijalne jednačine se sastoji iz homogenog i partikularnog dela

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \ .$$

- homogeno rešenje:

  Izjednačavanje početnog izraza za nulom dobijamo

  $$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0\ .$$

  Karakteristična jednačina je

  $$m^2 + 5m + 6 = 0\ ,$$

  a njena rešenja su

  $$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \\ m_1 &= -\frac{6}{2} = -3 \\ m_2 &= -\frac{4}{2} = -2\ . \end{aligned}$$

  Na osnovu dobijenih vrednosti m_1 i m_2 formira se homogeno rešenje zadate diferencijalne jednačine

  $$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}\ .$$

- partikularno rešenje:

  Partikularno rešenje formiramo na osnovu funkcije

  $$f(x) = 3e^{-2x} + e^{3x}\ .$$

  Kako se član e^{-2x} pojavljuje i u homogenom rešenju, partikularno rešenje će biti oblika

  $$y_p(x) = Axe^{-2x} + Be^{3x}\ .$$

  Početna diferencijalna jednačina je drugog reda pa određujemo prvi i drugi izvod dobijenog partikularnog rešenja

  $$\begin{aligned} \dot{y}_p(x) &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} + 3Be^{3x} \\ \ddot{y}_p(x) &= 3e^{-2x} + e^{3x}\ . \end{aligned}$$

  Smenom dobijenih vrednosti u početnu diferencijalnu jednačinu sledi

  $$3e^{-2x} + e^{3x} + 5(Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} + 3Be^{3x}) + 6(Axe^{-2x} + Be^{3x}) = 3e^{-2x} + e^{3x}\ .$$

  Sređivanjem prethodnog izraza dobijamo

  $$Ae^{-2x} + 30Be^{3x} = 3e^{-2x} + e^{3x}\ ,$$

  nakon čega se izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobija

  $$\begin{aligned} A &= 3 \\ 30B &= 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Smenom izračunatih vrednosti dobijamo partikularno rešenje zadate diferencijalne jednačine

$$y_p(x) = 3xe^{-2x} + \frac{1}{30}e^{3x} .$$

Na kraju, sabiranjem homogenog i partikularnog rešenja dobija se

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + 3xe^{-2x} + \frac{1}{30}e^{3x} .$$

0.3 *Diferencijalne jednačine višeg reda*

Opšti oblik diferencijalne jednačine n-tog reda je

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = f(x) .$$

Na osnovu opšteg oblika diferencijalne jednačine višeg reda možemo zaključiti da se radi o nehomogenoj diferencijalnoj jednačine čije rešenje se sastoji iz homogenog i partikularnog dela

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) ,$$

pri čemu se homogeno rešenje, kao i u prethodnim primerima, formira izjednačavanjem diferencijalne jednačine sa nulom

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = 0 .$$

Dobijena homogena diferencijalna jednačina se rešava formiranjem karakteristične jednačine

$$m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0 ,$$

čiji su koreni $m_1, m_2, \ldots, m_n$. U zavisnoti od vrednosti korena, rešenje je oblika

$$y_h(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx} ,$$

ukoliko su koreni realni i različiti, odnosno

$$y_h(x) = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x} ,$$

ukoliko su koreni realni i jednaki, pri čemu je višestrukost korena označena sa k.

Partikularno rešenje se formira na osnovu oblika funkcije $f(x)$.

Primer 6.

Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

$$y^{IV} + 8y'' + 14y = -\sin(x) .$$

Rešenje.

Data diferencijalna jednačina je nehomogena, pa se rešenje sastoji iz homogenoh i partikularnog dela

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \; .$$

- homogeno rešenje:

  Formiramo karakterističnu jednačinu

  $$m^4 + 8m^2 + 16 = 0 \; .$$

  Jednačinu ovog oblika možemo rešiti uviđenjem smene $p = m^2$ nakon čega sledi

  $$\begin{aligned} p^2 + 8p + 16 &= 0 \\ (p+4)^2 &= 0 \\ p_1 = p_2 &= -4 \; . \end{aligned}$$

  Kako je početna jednačina četvrtog stepena, vraćanjem u smenu $p = m^2$ dobijaju se rešenja

  $$\begin{aligned} m_1 &= 2j \\ m_2 &= -2j \\ m_3 &= 2j \\ m_4 &= -2j \; . \end{aligned}$$

  Koreni su konjugovano kompleksni pa je homogeno rešenje zadate diferencijalne jednačine

  $$y_h(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + Cx\cos(2x) + Dx\sin(2x) \; .$$

- partikularno rešenje:

  Partikularno rešenje određujemo na osnovu funkcije

  $$f(x) = -\sin(x) \; .$$

  Sledi

  $$y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) \; .$$

  Da bismo odredili vrednost konstanti c_1 i c_2, potrebno je odrediti četvrti izvod partikularnog rešenja i uvrstiti ga u početnu diferencijalnu jednačinu

  $$\begin{aligned} y_p'(x) &= -c_1\sin(x) + c_2\cos(x) \\ y_p''(x) &= -c_1\cos(x) - c_2\sin(x) \\ y_p'''(x) &= c_1\sin(x) - c_2\cos(x) \\ y_p^{IV}(x) &= c_1\cos(x) + c_2\sin(x) \; . \end{aligned}$$

Nakon smene u početnu diferencijalnu jednačinu dobija se

$$c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + 8(-c_1\cos(x) - c_2\sin(x)) + 16(c_1\cos(x) + c_2\sin(x)) = -\sin(x)\ .$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa obe strane znaka jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} 9c_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1 = 0 \\ 9c_2 = -1 \quad &\Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{9}\ . \end{aligned}$$

Sledi da je partikularno rešenje

$$y_p(x) = -\frac{1}{9}\sin(x)\ .$$

Sabiranjem homogenog i partikularnog rešenja dobija se

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + Cx\cos(2x) + Dx\sin(2x) - \frac{1}{9}\sin(x)\ .$$