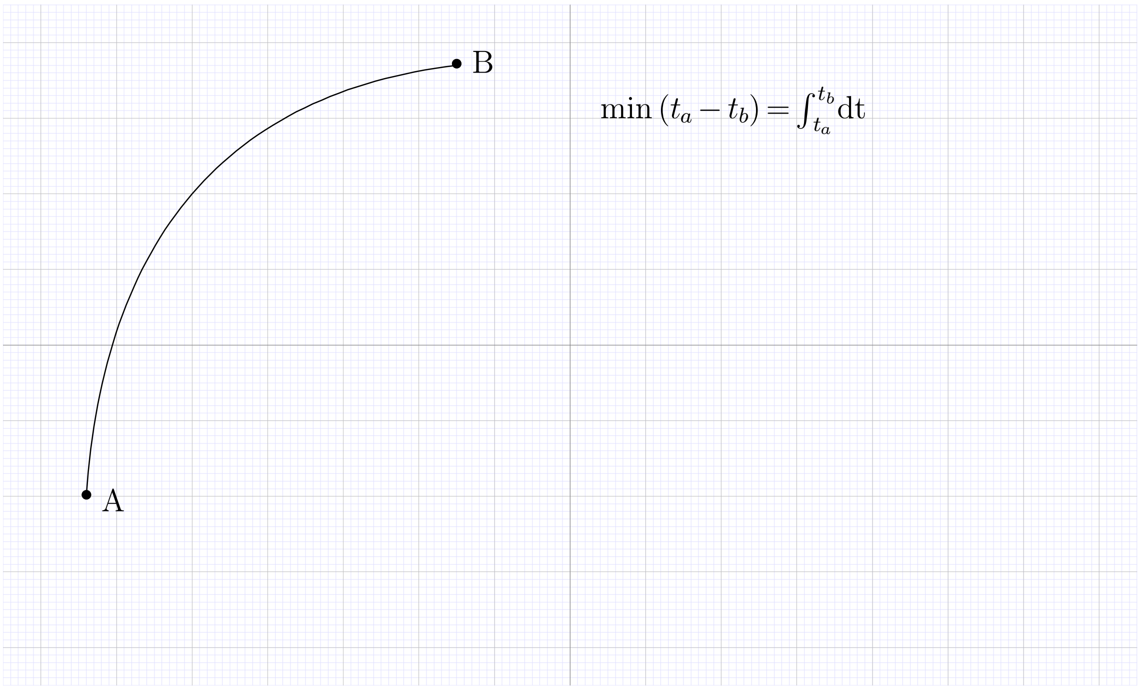
Dinamička optimizacija

Glavna razlika u odnosu na statičku optimizaciju je u tome što rezultat zavisi od neke promenjive: $\mathbf{x(t)}$.



$I = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{dt}$

$F(t, x(t), \dot{x}(t))$ - funkcional, jer zavisi od drugih funckija

t - nezavisna promenjiva

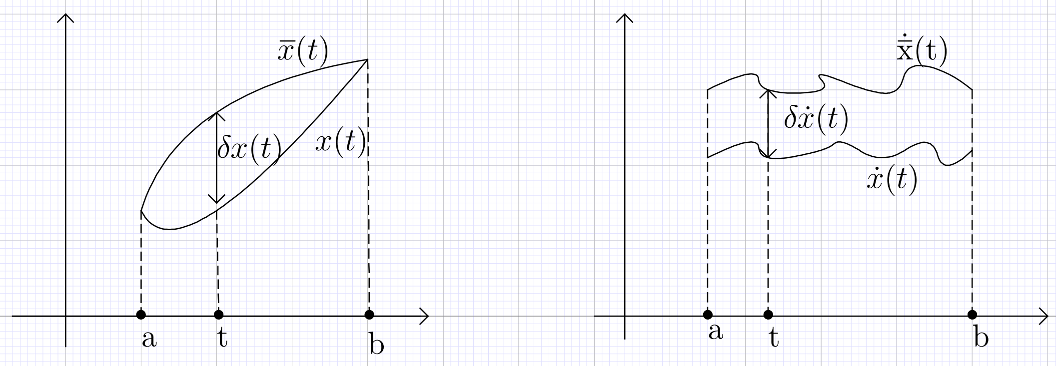
$x(t)$,$\dot{x}(t)$ - zavisne promenjive –> funkcije

Kako je u statičkoj optimizaciji bio cilj naći tačku u kojoj je vrednost funkcije optimalna, tako je u dinamičkoj optimizaciji cilj naći funkciju tačaka $\boldsymbol{x^* = x(t)}$ i saopštava integralu minimalnu ili maksimalnu vrednost. Takvo $x(t)$ se naziva ekstremala.

17. Varijacija funkcije i njena svojstva

Varijacija funkcije je jako mala promena funkcije u njenih izvoda bez promene nezavisne promenjive $\boldsymbol{t}$. Vidimo da se dosta razlikuje od izvoda, jer nam on predstavlja promenu po vremenu, čega ovde nema.

$\boldsymbol{\delta x(t)} = \overline{\mathrm{x}}(\mathbf{t}) - \boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{\varepsilon\phi(t)}$



$\boldsymbol{\delta x(t) = \overline{x}(t) - x(t) = \varepsilon\phi(t)}$

$\boldsymbol{\delta\dot{x}(t) = \dot{\overline{x}}(t) - \dot{x}(t) = \varepsilon\dot{\phi}(t)}$

$\delta x(t)$ – varijacija funkcije
$\overline{x}(t)$ – varirana funkcija
$x(t)$ – ekstremala
ε – jako mala vrednost

Osobine varijacije funkcije:

1. Varijacija nezavisne promenjive: $\delta t = 0$

2. Komutativnost varijacije i izvoda: $\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d\overline{x}}{dt}-\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(\overline{x}-x)=\frac{d}{dt}(\overline{x}-x)$

3. Komutativnost varijacije i integrala:

   $\delta\int x(t)dt = \int \overline{x}(t)dt - \int x(t)dt = \int(\overline{x}(t) - x(t))dt = \int \delta x(t)dt$

18. Potrebni i dovoljni uslovi ekstremuma, Ojler-Lagranževa jednačina

U statičkoj optimizaciji smo razvijali funkciju u Tejlorov red ovako:

$$\boldsymbol{y(x) \approx y(x^*) + (x - x^*)\, y'(x^*) + \frac{(x-x^*)^2 y''(x^*)}{2}}$$

Sada kad je problem drugačije prirode treba da razvijemo funkcional u red i to ćemo uraditi na ovaj način:

$$\boldsymbol{F(t,\overline{x},\dot{\overline{x}}) \approx F(t,x,\dot{x}) + (\overline{x}-x)\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial x} + (\dot{\overline{x}}-\dot{x})\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} + \frac{(\overline{x}-x)^2\frac{\partial^2 F(t,x,\dot{x})}{\partial x^2}}{2} + (\overline{x}-x)(\dot{\overline{x}}-\dot{x})\frac{\partial^2 F(t,x,\dot{x})}{\partial x \partial \dot{x}} + \frac{(\dot{\overline{x}}-\dot{x})^2\frac{\partial^2 F(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^2}}{2}}$$

Možmo primetiti da određene članove možemo da zapišemo ovako:

$(\overline{x} - x) = \delta x = \varepsilon\phi \;\text{–>}\; (\overline{x} - x)^2 = \delta^2 x = \varepsilon^2\phi^2$

$(\dot{\overline{x}} - \dot{x}) = \delta\dot{x} = \varepsilon\dot{\phi} \;\text{–>}\; (\dot{\overline{x}} - \dot{x})^2 = \delta^2\dot{x} = \varepsilon^2\dot{\phi}^2$

$(\overline{x} - x)(\dot{\overline{x}} - \dot{x}) = \varepsilon^2\phi\dot{\phi}$

Pa je samim tim:

$$\boldsymbol{F(t,\ \bar{x},\ \dot{\bar{x}}) \approx F(t,\ x,\ \dot{x}) + \varepsilon\phi\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial x} + \varepsilon\dot{\phi}\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} + \frac{\varepsilon^2\phi^2\frac{\partial^2 F(t,x,\dot{x})}{\partial x^2}}{2} + \varepsilon^2\phi\dot{\phi}\frac{\partial^2 F(t,x,\dot{x})}{\partial x\partial\dot{x}} + \frac{\varepsilon^2\dot{\phi}^2\frac{\partial^2 F(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^2}}{2}}$$

Primećujemo da ne diferenciramo po vremenu, jer kao što znamo ne dolazi do promene vremena.

Mi u suštini optimizujemo $\int_a^b F(t,x(t),\dot{x}(t))$, stim da znamo vrednosti $\boldsymbol{x(t)}$ na početku i kraju, tj. $x(a)=x_a$ i $x(b)=x_b$, a pitamo se koliko je optimizovano $x(t)$ između početka i kraja.

$I(\bar{x})-I(x)=\int_a^b F(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\mathrm{dt}-\int_a^b F(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{dt}=$

$=\int_a^b [F(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))-F(t,x(t),\dot{x}(t))]\mathrm{dt}$

$I(\bar{x})-I(x)=\varepsilon\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}\phi+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}\big]\mathrm{dt}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_a^b\Big[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\phi^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\phi\dot{\phi}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\dot{\phi}^2\Big]\mathrm{dt}$

Kao što smo tražili potreban uslov ekstrema, to da je prvi izvod jednak nula u statičkoj optimizaciji, tako ovde tražimo da je prva varijacija integrala jednaka nuli.

Ovde možemo videti da je prvi sabirak zapravo prva varijacija, dok je drugi druga varijcija. Takođe analogija sa time da prva varijacija treba biti jednaka nuli dobija matematički smisao, jer nam je nepoznat znak od ε, pa onda je moramo anulirati, dok je znak od ε^2 pozitivan tako da se onda radi od minimumu kad je $\delta^2 x>0$, a o maksimumu kada je $\delta^2 x<0$. U praksi se retko izvode konkretni dokazi za drugu varijaciju,jer je kompleksno izvođenje dokaza, a možemo naslutiti o čemu se radi iz prirode problema.

Zbog toga sada ćemo gledati samo prvu varijaciju integrala.

$\delta I=\varepsilon\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}\phi+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}\big]\mathrm{dt}$

Vidimo da se javljaju i ϕ i $\dot{\phi}$. Ovo se stalno dešava u dinamičkoj optimizaciji tako da trebamo svesti jedan na drugi. Ovo je čest mehanizam svođenja koji smo imali prilike da vidimo kada smo dokazivali zašto Laplasova transformacija izvda ima oblik kakav ima.

$\frac{d}{\mathrm{dt}}\big[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\big]=\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}\longrightarrow\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}=\frac{d}{\mathrm{dt}}\big[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\big]-\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi$

Kada to uvrstimo u prvu varijaciju integrala dobijamo:

$\delta I=\varepsilon\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}\phi+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}\big]\mathrm{dt}=\varepsilon\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}\phi+\frac{d}{\mathrm{dt}}\big[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\big]-\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\big]\mathrm{dt}=$

$=\varepsilon\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi|_a^b+\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}\phi\varepsilon-\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\varepsilon\big]\mathrm{dt}=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_a^b+\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big]\delta x\,\mathrm{dt}$

$\delta I=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_a^b+\int_a^b\big[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big]\delta x\,\mathrm{dt}=0$

Zbog početnih uslova $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_a^b=0$, jer nama funkcija ne varira u početnoj i krajnjoj tački, tj. odstupanje ekstremale od varirane funkcije je 0 pa samim tim:

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\delta x(b)-\delta x(a))=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(0-0)=0$

Ostaje nam $\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,\mathrm{dt}$, da treba da bude 0, pa samim tim $\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right] = 0$, i ovaj potreban uslov za postojanje ekstremale nazivamo **Ojler-Lagranževa jednačina**.

Što se tiče dovoljnih uslova za postojanje ekstrema, moramo pogledati elemente druge varijacije $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\phi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\phi\dot{\phi} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\dot{\phi}^2\right]\mathrm{dt}$. Kako znamo da zbog ε daje male promene, član koji će da prednjači u ovoj jednačini će biti $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\dot{\phi}^2$, jer promena izvoda funkcije koja se malo menja idalje može biti velika. Samim tim iz toga nam proističu **Ležandrovi uslovi**:

1. Ako je $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} > 0$ onda se radi o minimumu

2. Ako je $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} < 0$ onda se radi o maksimumu

19. Struktura Ojler-Lagranževe jednačine za neke specijalne slučajeve

$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{dt}$

$\delta I = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}\phi + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}\right]\mathrm{dt} = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}\phi + \frac{d}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\right] - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\right]\mathrm{dt} =$

$= \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}\phi\varepsilon - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\phi\varepsilon\right]\mathrm{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,\mathrm{dt}$

$\delta I = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,\mathrm{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$

Kako da integralimo diferencijalnu jednačinu drugog reda? Napravimo dve diferencijalne jednačine prvog reda, a ako ne možemo to da uradimo onda se radi o sprecijalnim slučajevima. Te specijalne slučajeve nazivamo prvi integrali, jer mi njihova struktura garantuje da će se raditi o diferencijalnoj jednačini prvog reda. Oni se u mehanici nazivaju zakoni održanja.

Prva opcija je da nam integral ne zavisi od $x(t) \Rightarrow I(x) = \int_a^b F(t, \dot{x}(t))$. Zbog toga Ojler-Lagranževa jednačina ima oblik $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$, jer parcijalnog izvoda po x neće biti.

$\frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \mathbf{const.}}$

Druga opcija je da nam integral ne zavisi od $t \Rightarrow I(x) = \int_a^b F(x(t), \dot{x}(t))$. Za ovaj slučaj bitno je napraviti razliku između totalnog diferencijala i parcijalnog izvoda. Parcijalni izvod postoji samo ako se javlja eksplicitna zavisnost funkcijonala po vremenu. Totalni diferencijal se računa po svim funkcijama koje zavise od vremena. Samim tim je: $\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}$. Iz Ojler-Lagranževa jednačinae znamo $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ i kada to uvrstimo u $\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}$ dobijamo:

$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} \leftrightarrow \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right) \leftrightarrow \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right) - \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dt}} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} - F\right) = 0$

Pa na kraju dobijamo:

$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} - F = \mathrm{const.}}$

20. Uopštenja, funkcional zavisi od više funkcija

$I(x) = \int_a^b F(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x_1}(t), \dot{x_2}(t), \ldots, \dot{x_n}(t))\mathrm{dt}$

$I(x) = \int_a^b F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t))\mathrm{dt} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$\delta I = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta \dot{x_i} \right]\mathrm{dt} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta \dot{x_i} = \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i \right) - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i$

$\delta I = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i \right) - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i \right]\mathrm{dt}$

$\delta I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i|_a^b + \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} \right]\delta x_i \mathrm{dt} = 0$

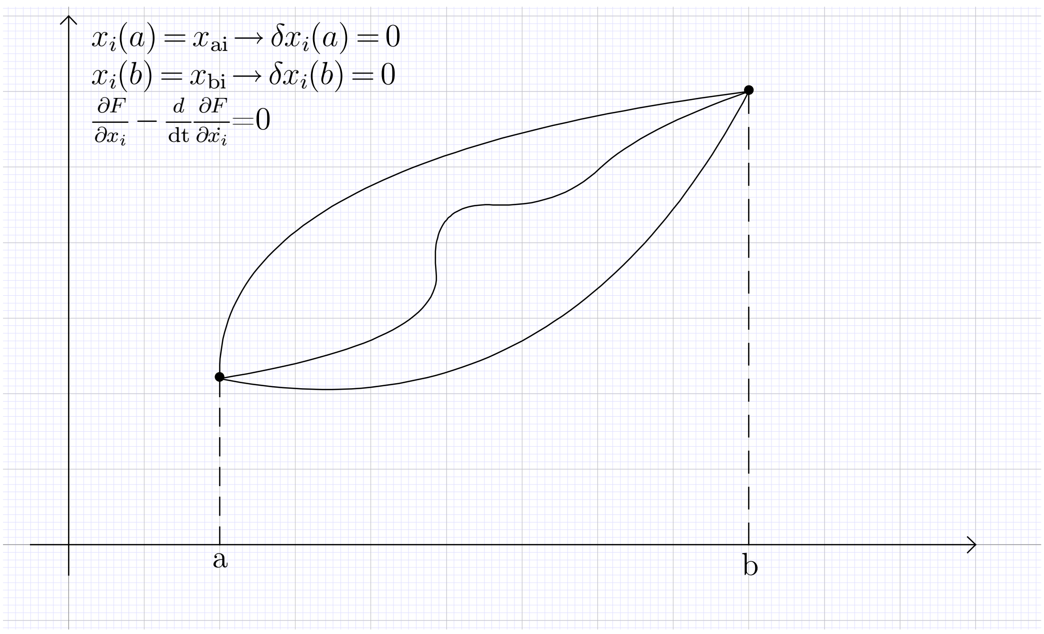
Zbog početnih uslova $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i|_a^b = 0$, tako da nam ostaje Ojler-Lagranževa jednačina ovog oblika: $\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} \right] = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$

21. Prirodni granični uslovi-uslovi transverzalnosti

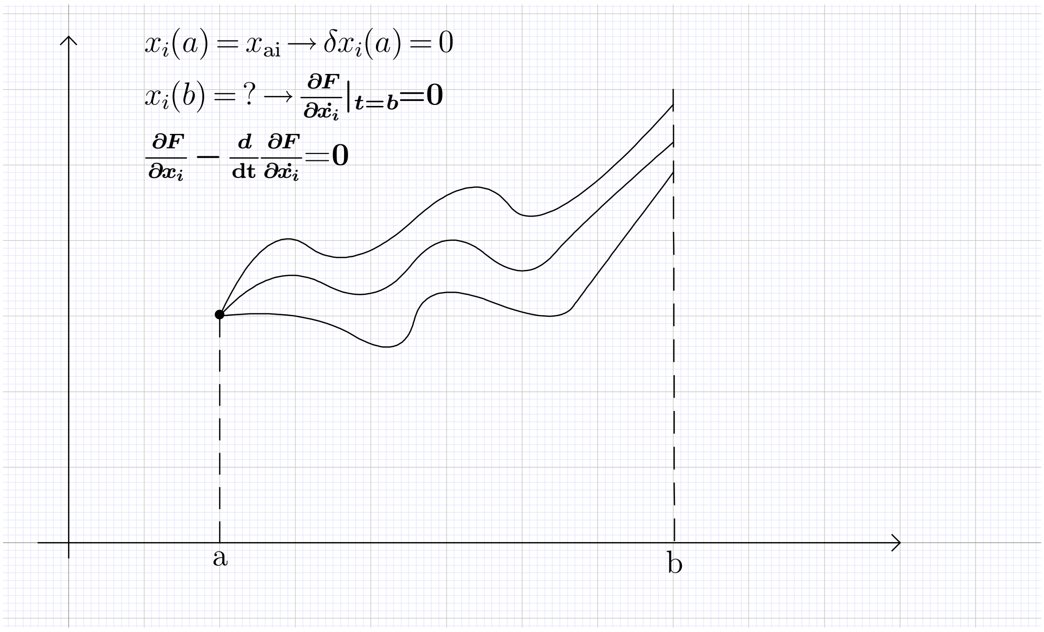
$I(x) = \int_a^b F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t))\mathrm{dt} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$\delta I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i|_a^b + \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} \right]\delta x_i \mathrm{dt} = 0$

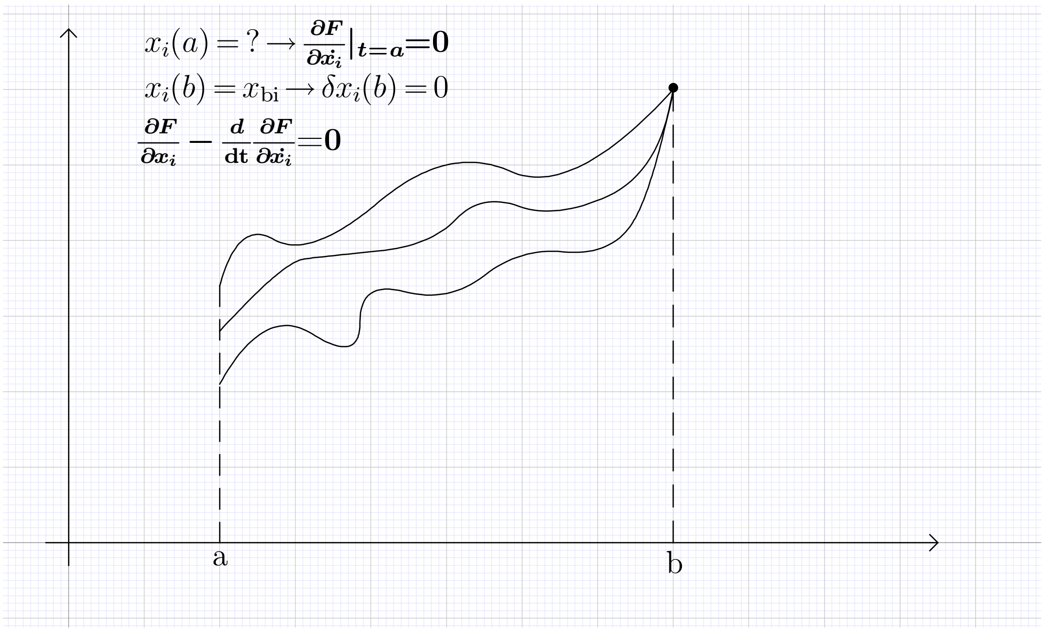
1. Poznate su obe granice pa funkcija ne varira ni u početnoj ni u krajnjoj tački



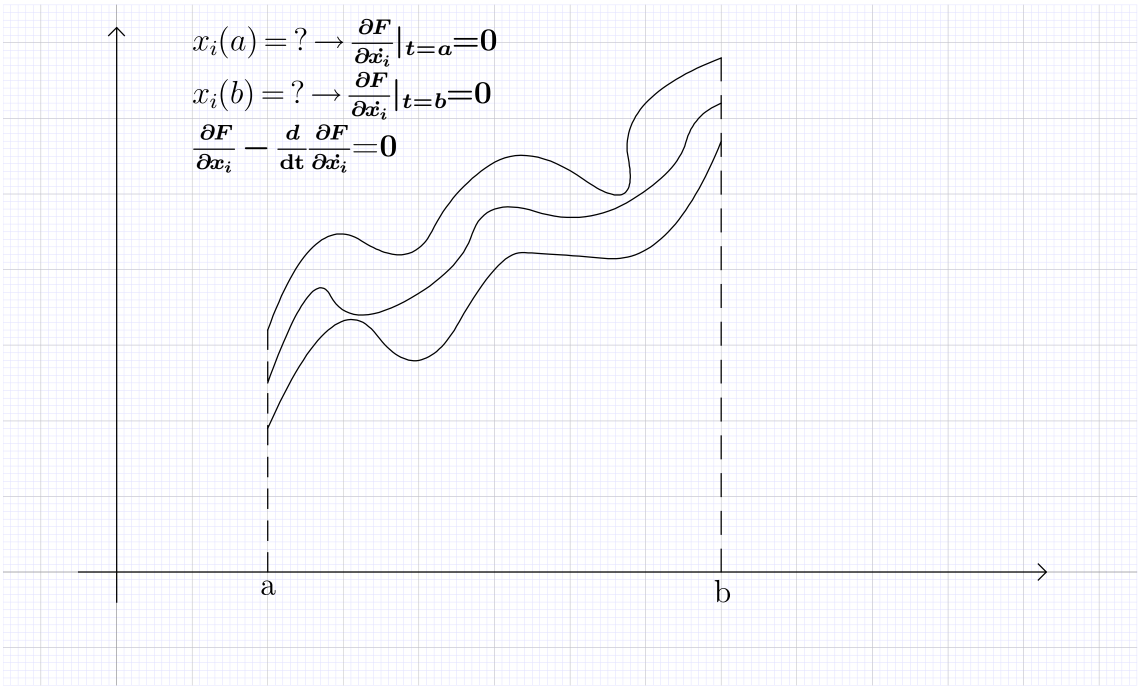
2. Poznata je samo donja granice pa funkcija varira krajnjoj tački



3. Poznata je samo gornja granice pa funkcija varira početnoj tački



4. Nije poznata ni gornja ni donja granica tako da funkcija varira i u početnoj i u krajnjoj tački



U slučajevima pod 2, 3 i 4 varijacija u početnim i krajnjim tačkama može svakako biti 0, ali nam to mora reći optimizacioni algoritam.

22. Problemi Bolca tipa

Šta se dešava ukoliko ne želimo jasno da definišemo početak i kraj našeg problema. Kao primer možemo uzeti zagrevanje sobe. Recimo da želimo da je zagrejemo na $20°C$, ali želimo da vodimo računa o tome koliko se troši energije. Ukoliko je energetski efikasnije zagrejavati do $19.5°C$, a nama ne pravi nikakvu razliku pola stepena onda je bolje tako odraditi. To bi mogli zapisati ovako:

$I = P(x(b) - 20)^2 + \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{dt}$

Ovde koristimo kazenu funckiju da bi uzeli u obračun da želimo da završimo u $20°C$.U zavisnosti od toga koliko jako želimo da to bude baš $20°C$, korekciju možemo izvršiti promenom pondera **P**. Npr. ukoliko želimo da to sigurno bude $20°C$, uzimamo da je P=100, ukoliko želimo da integral i kaznena funkcija budu iste važnosti u našoj optimizaciji uzimamo da je P=1, i ukoliko baš želimo da nam naš integral kaže gde ćemo završiti stavimo da je P=0.1 .

Problemi Bolca tipa se definišu na sličan način:

$I = \psi[x(a), x(b)] + \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{dt}$, gde je $\psi[x(a), x(b)]$ takozvani Bolca član.

$\delta I = \frac{\partial \psi}{\partial x(a)}\delta x(a) + \frac{\partial \psi}{\partial x(b)}\delta x(b) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,\mathrm{dt}$

$\delta I = \frac{\partial \psi}{\partial x(a)}\delta x(a) + \frac{\partial \psi}{\partial x(b)}\delta x(b) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b}\delta x(b) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a}\delta x(a) + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,\mathrm{dt}$

Potreban uslov postojanja ekstremale:

$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0}$

$\frac{\partial \psi}{\partial x(a)}\delta x(a) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a}\delta x(a) = \left[\boldsymbol{\frac{\partial \psi}{\partial x(a)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a}}\right]\boldsymbol{\delta x(a) = 0}$

$\frac{\partial \psi}{\partial x(b)}\delta x(b) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b}\delta x(b) = \left[\boldsymbol{\frac{\partial \psi}{\partial x(b)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b}}\right]\boldsymbol{\delta x(b) = 0}$

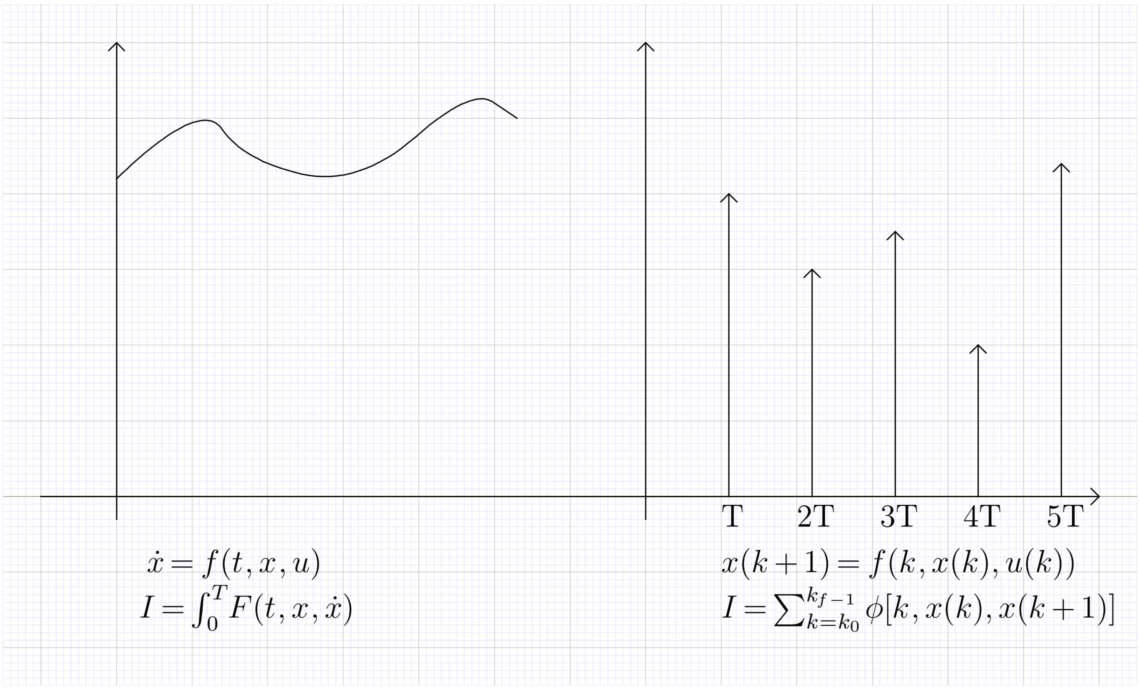
Ukoliko se Bolca član zapiše kao $\psi[t, x(t)]|_a^b$ to je onda isto kao da smo zapisali $\psi[b, x(b)]$-$\psi[a, x(a)]$ pa će varijacija po Bolca članu biti $\frac{\partial \psi}{\partial x(b)}\delta x(b) - \frac{\partial \psi}{\partial x(a)}\delta x(a)$ i samim tim potrebni uslovi će biti:

$\frac{\partial \psi}{\partial x(a)}\delta x(a) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a}\delta x(a) = \left[\boldsymbol{\frac{\partial \psi}{\partial x(a)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a}}\right]\boldsymbol{\delta x(a) = 0}$

$\frac{\partial \psi}{\partial x(b)}\delta x(b) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b}\delta x(b) = \left[\boldsymbol{\frac{\partial \psi}{\partial x(b)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b}}\right]\boldsymbol{\delta x(b) = 0}$

Jedina izmena je - u + kod donje granice.

23. Ojler-Lagranževa jednačina za diskretne sisteme



$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left[\frac{\partial \phi[k, x(k), x(k+1)]}{\partial x(k)}\delta x(k) + \frac{\partial \phi[k, x(k), x(k+1)]}{\partial x(k+1)}\delta x(k+1)\right]$

Sada imamo sličan problem kao i sa analognim sistemom, gde smo prelazili sa $\delta \dot{x}$ na δx. Ovde treba da pređemo sa $\delta x(k+1)$ na $\delta x(k)$.

$\sum_{k=k_0}^{k_f-1}\frac{\partial \phi[k, x(k), x(k+1)]}{\partial x(k+1)}\delta x(k+1) \xrightarrow{k+1=m} \sum_{k=k_0+1}^{k_f}\frac{\partial \phi[m-1, x(m-1), x(m)]}{\partial x(m)}\delta x(m)$

Sada zamenimo m sa k:

$\sum_{k=k_0+1}^{k_f} \frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)}\delta x(k)$ i pošto vidimo da fali član gde je $k=k_0$, a takođe vidimo da imamo višak član gde je $k=k_f$.

$\pm \frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)}\delta x(k)\Big|_{k=k_0}^{k=k_f} + \sum_{k=k_0+1}^{k_f} \frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)}\delta x(k)$

Sada kada vraćamo u prvu varijaciju integrala koristimo negativan član za $k=k_f$ i pozitivan član za $k=k_0$ tako da nam van sume ostaju pozitivan član za $k=k_f$ i negativan član za $k=k_0$.

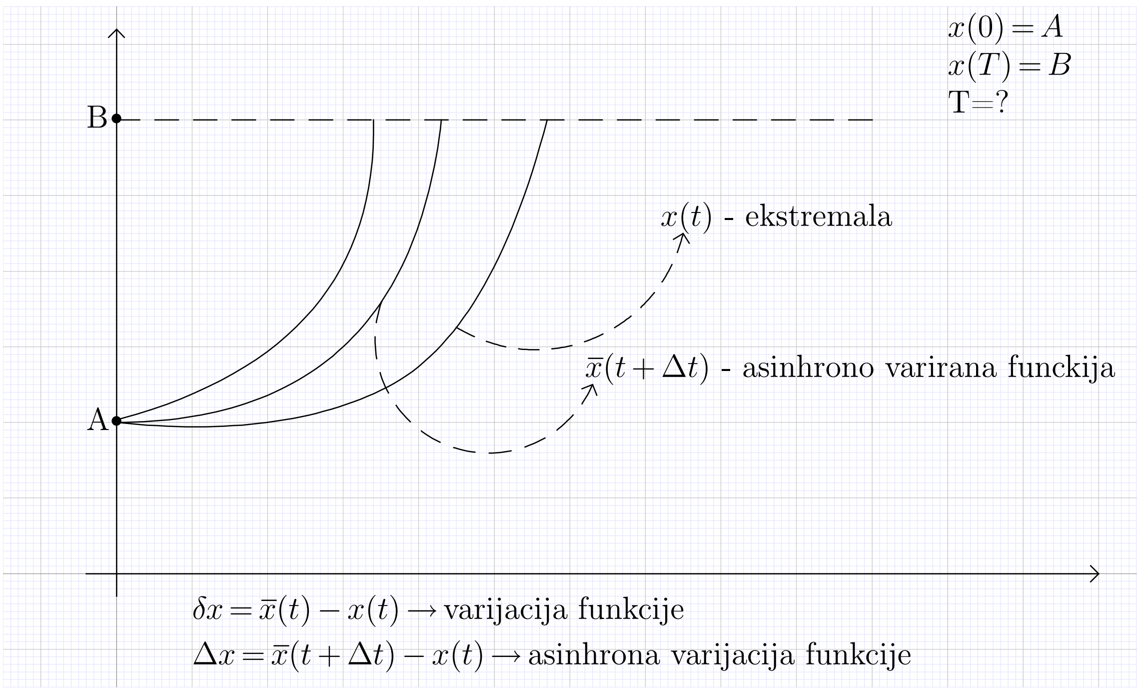
$\delta I = \frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)}\delta x(k)\Big|_{k_0}^{k_f} + \sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left[\frac{\partial\phi[k,x(k),x(k+1)]}{\partial x(k)} + \frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)}\right]\delta x(k)$

Tako da $\frac{\partial\phi[k,x(k),x(k+1)]}{\partial x(k)} + \frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)} = 0$ predstavlja Ojler-Lagranževu jednačinu za diskretne sisteme, a da bi potrebni uslovi za postojanje ekstrema bili ispunjeni potrebno je da je cela prva varijacija integrala 0, tako da je potrebno i da je $\frac{\partial\phi[k-1,x(k-1),x(k)]}{\partial x(k)}\Big|_{k_0}^{k_f} = 0$.

24. Asinhrono variranje. Problem potere.

Asinhrono variranje

Ukoliko imamo problem gde nam vremenski interval nije poznat, onda moramo koristiti asinhronu varijaciju.



Izraze ovog oblika: $\overline{x}(t+\Delta t)$, uvek možemo da razvijemo u Tejlorov red:

$\overline{x}(t+\Delta t) \approx \overline{x}(t) + \dot{\overline{x}}\Delta t$ i znamo da je: $\delta x = \overline{x}(t) - x(t) \leftrightarrow \overline{x}(t) = \delta x + x(t)$, kao i da je : $\dot{\overline{x}} = \delta\dot{x} + \dot{x}(t)$, pa samim tim:

$\overline{x}(t+\Delta t) = \delta x + x(t) + (\delta\dot{x} + \dot{x}(t))\Delta t \rightarrow \overline{x}(t+\Delta t) - x(t) = \delta x + \delta\dot{x}\Delta t + \dot{x}(t)\Delta t$

$\overline{x}(t+\Delta t) - x(t) = \Delta x = \delta x + \dot{x}(t)\Delta t$, jer je $\delta\dot{x}\Delta t \approx 0$

$\boldsymbol{\Delta x = \delta x + \dot{x}(t)\Delta t}$

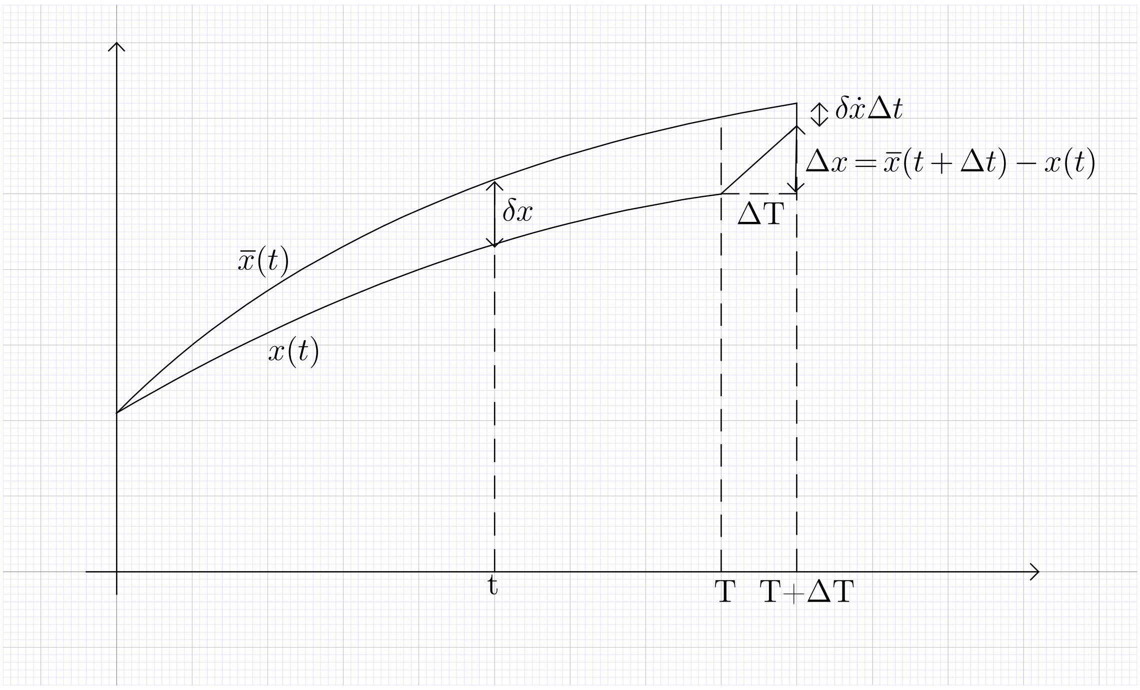
$\boldsymbol{\Delta f = \delta f + \dot{f}(t)\Delta t}$

Da li je operacija asinhrone varijacije komutativna sa operacijom diferenciranja?

$\Delta\dot{x} = \delta\dot{x} + \ddot{x}(t)\Delta t$

$(\dot{\Delta x}) = \delta\dot{x} + \ddot{x}(t)\Delta t + \dot{x}(\dot{\Delta t})$

Zbog ovoga operacije nisu komutativne.



Kako će izgledati naš integral kada na njega primenimo asinhrono variranje?

Pošto je $\Delta f = \delta f + \dot{f}(t)\Delta t$ onda je:

$\Delta I = \delta\int_{t_0}^{t_1} F dt + F\Delta t|_{t_0}^{t_1}$ jer je $I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{dt}$

$\Delta I = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,\mathrm{dt} + F\Delta t|_{t_0}^{t_1} = 0$

$\Rightarrow$**Ojler − Lagranževa jednacina:** $\boldsymbol{\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right] = 0}$

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x|_{t_0}^{t_1} + F\Delta t|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad i \qquad \delta x = \Delta x - \dot{x}\Delta t$

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\Delta x - \dot{x}\Delta t)|_{t_0}^{t_1} + F\Delta t|_{t_0}^{t_1} = 0$

$\Rightarrow$**Složeni izraz za granične uslove:** $\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta x|_{t_0}^{t_1} + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} = 0}$

Samim tim kod:

$I(x) = \int_a^b F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t))\mathrm{dt} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{je sve analogno:}$

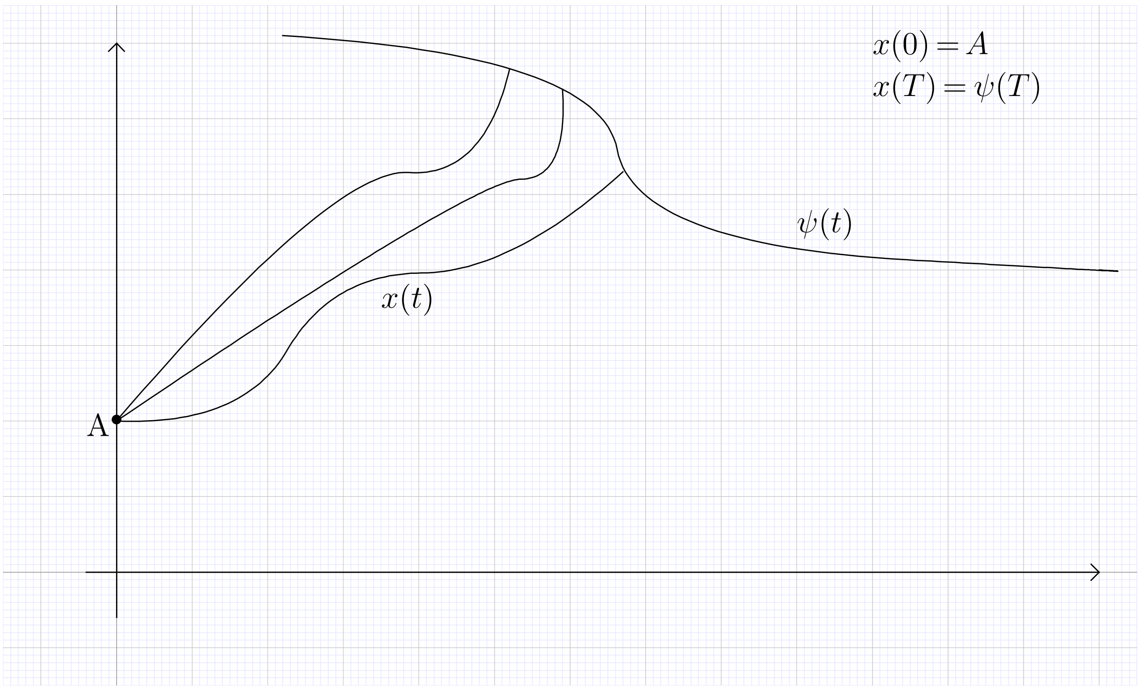
$\text{Ojler} - \text{Lagranževa jednacina:} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\right] = 0$

$\text{Složeni izraz za granične uslove:} \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\Delta x_i|_{t_0}^{t_1} + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\dot{x}_i\right)\Delta t|_{t_0}^{t_1} = 0$

Problem potere

Problem potere opisuje problem kojim naša ekstremala treba da se treba da se sustretne sa krajnjom tačkom, ali pošto ne znamo u kom vremenskom trenutku, samim tim ne možemo ukazati tačno na tačku, već će to biti neki skup tačaka, tj. neka funkcija $\psi(t)$.

$I = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{dt}$



$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta x|_0^T + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta t|_0^T = 0,$ a znamo da funkcija za $x = 0$ ne varira ashinhrono jer je

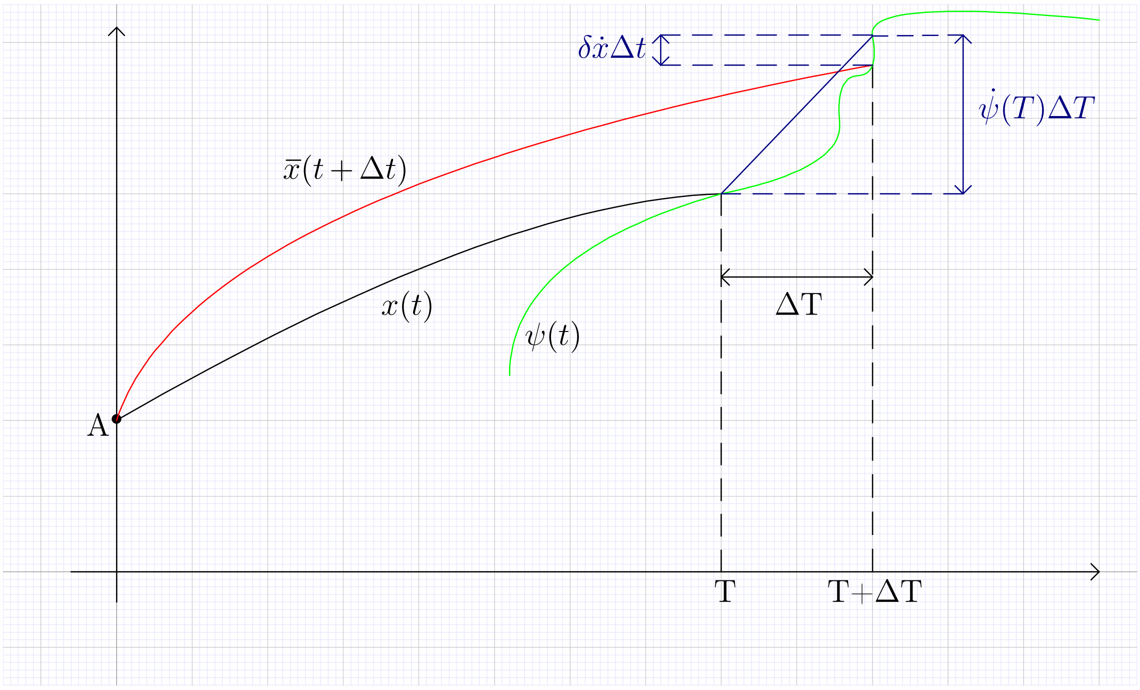
$\Delta x(0) = \delta x(0) + \dot{x}(t)\Delta t(0) = 0$ plus je $\Delta t(0)$ i uz član $\left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)$ tako da možemo odbaciti donje granice.

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta x|_0^T + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta t\Big|_0^T = 0 \leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta x(T) + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta T = 0$

Sada se treba otarasiti nekako $\Delta x(T)$ tako da bi mogli da je predstavimo preko jedine poznate veze sa običnom varijacijom: $\Delta x(T)=\delta x(T)+\dot{x}(T)\Delta T$, stim da će obična varijacija δx u T biti jednaka 0, jer ja znam vrednost $x(T)=\psi(T)$ pa je zbog toga: $\Delta x(T)=\dot{\psi}(T)\Delta T$.

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta x(T)+\left(F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta T=0 \leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\psi}(T)\Delta T+\left(F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta T=0$

$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\psi}-\dot{x})+F=0} \quad$ za $\quad t=T$



25. Minimizacija funkcionala pri postojanju algebarskih ograničenja.(Varijacioni problemi sa ograničenjima u vidu algebarskih jednačina)

$I(x)=\int_a^b F(t,x_i(t),\dot{x_i}(t))\mathrm{dt} \quad$ za $\quad i=1,2,\ldots,n$

$g_k(x)=0 \quad$ za $\quad k=1,2,\ldots,m$

$m\leqslant n$

$\bar{I}=\int_a^b F(t,x_i(t),\dot{x_i}(t))+\sum_{k=1}^m \lambda_k(t)g_k(t,x_{1,\ldots,}x_n)\mathrm{dt}$

$\delta\bar{I}=0$

$\delta\bar{I}=\int_a^b\left\{\sum_{k=1}^n\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta\dot{x_i}+\sum_{k=1}^m\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\delta x_i\right]+\sum_{k=1}^m g_k\delta\lambda_k\right\}\mathrm{dt}=0$

Ovde je $g_k\delta\lambda_k$ u tom obliku jer je $\frac{\partial\lambda_k(t)g_k(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial\lambda_k(t)}=g_k(t,x_1,\ldots,x_n)$.

U izrazu za $\delta\bar{I}$ očigledna stvar koja štrči je $\delta\dot{x_i}$ tako da to moramo svesti na δx_i.

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta\dot{x_i} = \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i\right) - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i$ pa je dalje:

$$\delta \bar{I} = \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i\right) - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\delta x_i \right] + \sum_{k=1}^m g_k \delta\lambda_k \right\} \mathrm{dt} = 0$$

$$\delta \bar{I} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}\delta x_i \Big|_a^b + \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right] \delta x_i + \sum_{k=1}^m g_k \delta\lambda_k \right\} \mathrm{dt} = 0$$

Iz ovog izraza mozemo zaključiti da Ojler-Lagranževa jednačina dobija oblik:

$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0}$ i takođe nam je potreban uslov za postojanje ekstremale da je $\boldsymbol{g_k = 0}$.

Mogli smo i sa ”manje matematike” doći do istog ovog zaključka. Ukoliko proširimo funkcional i zapišemo ga sada kao:

$\phi = F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) g_k(t, x_i)$ i primenimo klasičnu Ojler-Lagranževu jednačinu dobijamo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x_i}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\lambda_k}} = 0 \Rightarrow g_k = 0$$

26. Varijacioni problemi sa ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina.

$I(x) = \int_a^b F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) \mathrm{dt} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$f_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m$

$m \leqslant n$

$\phi = F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) f_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t))$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x_i}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f}{\partial \dot{x_i}}\right) = 0}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\lambda_k}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{f_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) = 0}$$

27. Varijacioni problemi sa integralnim ograničenjima – Izoperimetrijski problem.

$I(x) = \int_a^b F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) \mathrm{dt} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$\int_a^b G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) = A_k \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m$

$m \leqslant n$

$\phi = F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t))$

$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\phi}{\partial \dot{x_i}} = 0$

$\int_a^b G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) = A_k$

Primećujemo da je ovde $\lambda_k = \text{const.}$ To možemo i da dokažemo.

$\int_a^b G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) = z_k(t)$

$G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) = \dot{z_k}(t) \quad i \quad z_k(a) = 0 \quad i \quad z_k(b) = A_k$

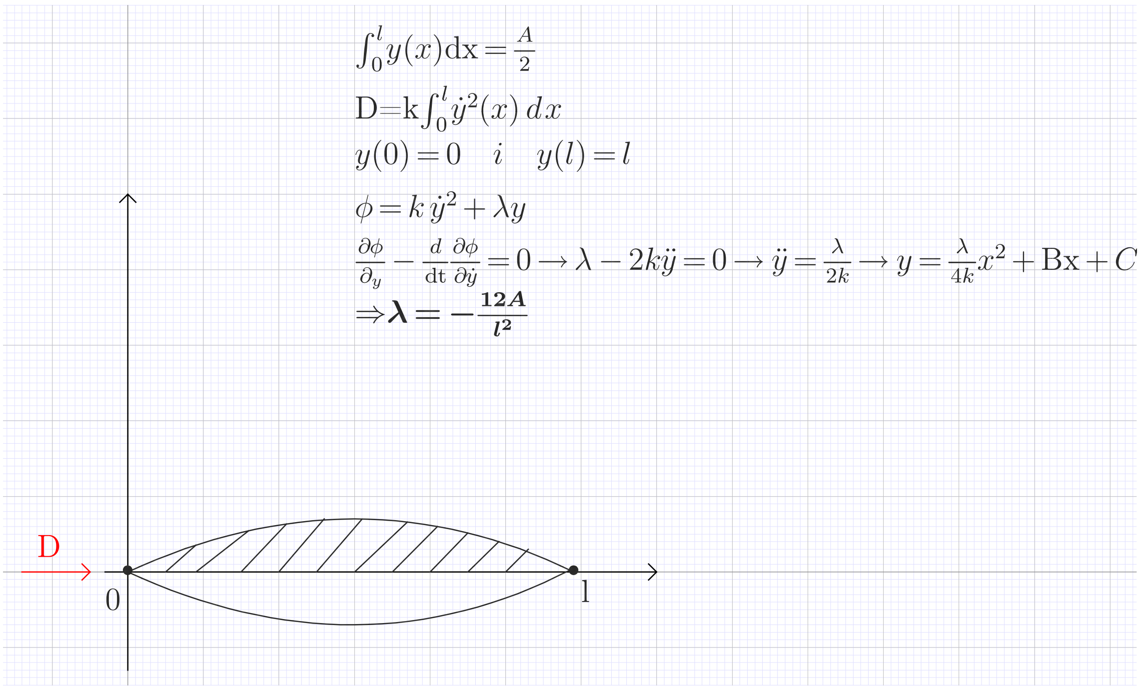
$G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) - \dot{z_k}(t) = 0$

$\phi = F(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (G_k(t, x_i(t), \dot{x_i}(t)) - \dot{z_k}(t))$

$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\phi}{\partial \dot{x_i}} = 0$

$\frac{\partial\phi}{\partial z_k} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\phi}{\partial \dot{z_k}} = 0 \rightarrow \frac{d}{\mathrm{dt}}\lambda_k = 0 \rightarrow \lambda_k = \text{const.}$

Odrediti optimalni oblik poprečnog preseka krila aviona, tako da sila bude najmanja ukoliko je unapred zadataka površina.



Treba obratiti pažnju na to kada dobijemo da rešavamo diferencijalnu jednačinu, a ne znamo kog je znaka λ.

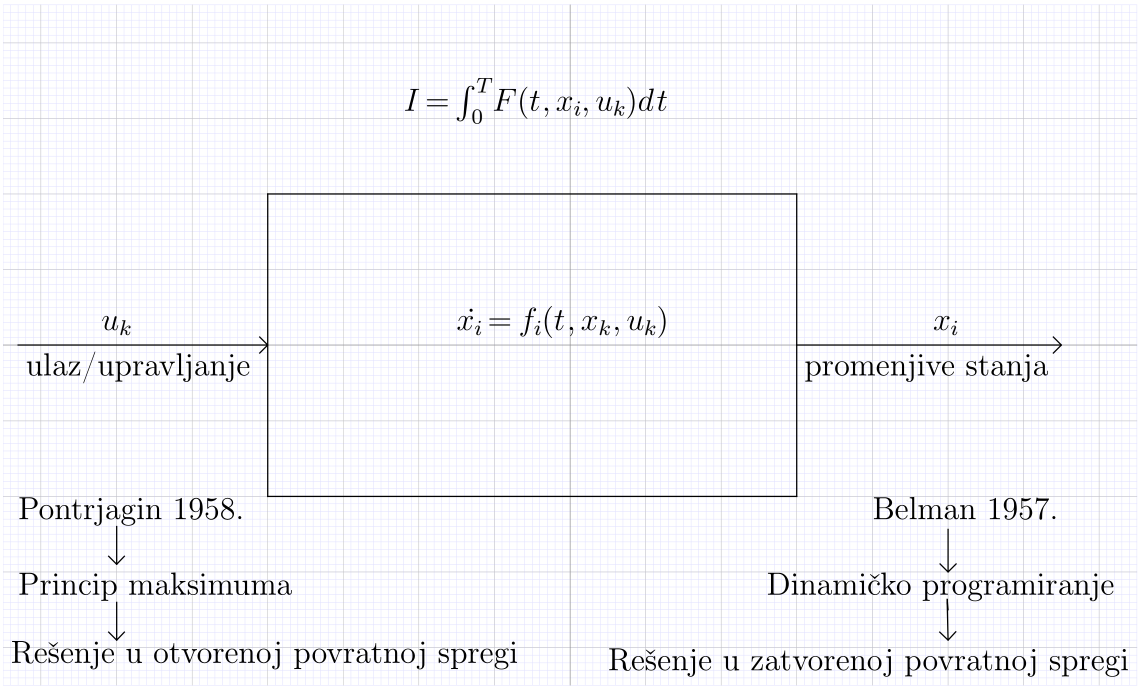
$\ddot{x} + \lambda x = 0 \rightarrow r^2 + \lambda = 0 \rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$

Zbog ovog će u zavisnosti od znaka λ nasa diferencijalna jednačina imati 2 rešenja, a možemo imati dobru pretpostavku o tome koje je zapravo rešenje na osnovu početnih uslova.

28. Princip maksimuma

$I = \int_0^T F(t, x_i, \dot{x}_i)dt$ i zadataka je kao i do sad naći $x(t)$.

$f_k(t, x_i, \dot{x}_i) = 0$



Mi se bavimo principom maksimuma, jer kolko god ono bilo "komplikovano", rešenje u zatvorenoj povratnoj spregi je znatno komplikovanije.

$\dot{x}_i = f_i(t, x_k, u_k)$ gde je $i = 1, \ldots, n$ i $k = 1, \ldots, m$

$x_i(0) = \alpha_i$ i $T -$ poznato

$I = \int_0^T F(t, x_i, \dot{x}_i)dt$

$\bar{I} = \int_0^T [F(t, x_i, \dot{x}_i) - \sum_{i=1}^n p_i(t)(\dot{x}_i - f_i(t, x_k, u_k))]dt \rightarrow \delta\bar{I} = 0$, a Lagranžev množitlj je ovde $p_i(t)$, jer radimo po Pontrjaginovoj ideji. Oni se takođe nazivaju i generalisani impulsi.

Ali Pontrjagin kaže da se traženje ekstremale našeg problema optimalnog upravljanja svodi na traženje, $\min/\max\{H(t, x_k, u_k, p_i)\}$ gde $H(t, x_k, u_k, p_i)$ nazivamo Hamiltonijan/Hamiltonova funkcija.

$H(t, x_k, u_k, p_i) = F(t, x_i, \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i(t, x_k, u_k) \rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 0$ ili je rešenje na granici

Ideja za ovu teoriju dolazi iz analitičke mehanike. Hamiltonova funckije predstavlja zbir potencijalne i kinetičke energije. Kako svako telo želi da zauzme stanja sa minimumom energije, tako i ovaj sistem, i mi tražimo taj minimum energije.

Hajde da dokažemo ovo tako što Hamiltonovu funckiju vratimo u jednačinu za $\bar{I}$ pa onda tražimo $\delta\bar{I}$ tako da je jednako 0.

$\bar{I} = \int_0^T [H(t, x_k, u_k, p_i) - \sum_{i=1}^n p_i(t)\dot{x}_i]dt$

Kako nam sve sem u_k ide od 1 do n, a x_k ide od 1 do m, imaćemo dve sume u varijaciji integrala.

$\delta\bar{I} = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \dot{x}_i\delta p_i - p_i\delta\dot{x}_i \right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k \right\} dt = 0$

Ovaj izraz možemo da grupišemo u ono uz δx_i i ono uz δx_i, a problem nam pravi $\delta\dot{x}_i$, što ćemo svesti na δx_i kao i do sad.

$p_i\delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(p_i\delta x_i) - \dot{p}_i\delta x_i$ pa je samim tim:

$\delta\bar{I} = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \dot{x}_i\delta p_i - \left(\frac{d}{dt}(p_i\delta x_i) - \dot{p}_i\delta x_i \right) \right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k \right\} dt = 0$

$\delta\bar{I} = -\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T + \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{p}_i \right)\delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{x}_i \right)\delta p_i \right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k \right\} dt = 0$

Da bi $\delta\bar{I} = 0$,tj. potrebni uslovi ekstremale su da, svi izarazi pored ovih varijacija moraju biti jednaki 0.

$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{p}_i = 0 \rightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{x}_i = 0 \rightarrow \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0$

Kako je $H(t, x_k, u_k, p_i) = F(t, x_i, \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i(t, x_k, u_k)$ tako ove jednačine možemo zapisati i kao:

$\boldsymbol{\dot{x}_i = f_i(t, x_k, u_k)}$

$\boldsymbol{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}}$

$\boldsymbol{\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0}$

Ovaj sistem jednačina se naziva kanonski sistem jednačina. Kao što možemo videti imamo $2n$ diferencijalnih jednačina i m algebarskih jednačina.

Možemo primeiti da, da bi $\delta\bar{I} = 0$, nam fali da još anuliramo $-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T$. Kako je $\boldsymbol{x_i(0) = \alpha_i}$ samim tim je $\delta x_i(0) = 0$, pa nam ostaje još $-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_{t=T}$, pa pošto tu $\delta x_i(T)$ ne mora biti 0, dobijamo prirodni granični uslov da je $\boldsymbol{p_i(T) = 0}$.

Kada nam je "nešto" poznatno i na početku i na kraju:$x_i(0) = \alpha_i$ i $p_i(T) = 0$, takav problem nazivamo **dvotačkasti granični probem**. Ne može se uvek rešiti ovaj problem.

Dovoljni uslovi bi onda bili da je $\delta\bar{I} > 0$ za minimum i $\delta\bar{I} < 0$ za maksimum. Da li mogli da napravimo neke jednostavnije uslove?

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_k^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial u_m^2} \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial^2 H}{\partial u_k^2} > 0 \rightarrow \text{MIN}$ i $\frac{\partial^2 H}{\partial u_k^2} < 0 \rightarrow \text{MAX}$

Ukoliko ovo pokaže da se radi o minimumu ili maksimumu onda se sigurno radi o minimumu ili maksimumu. Ako ne moramo dalje ispitivati nekom matricom, ali se to ne radi jer se već potrebni uslovi toliko teško traže, da se skoro svi zadovoljavaju njima.

Kako upostiti rešavanje ovog sistema jednačina.

$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial H}{\partial t}$

Ukoliko je $H(x,u,p)$, tj. ne zavisi ekspilictno od t onda je:

$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u}$

Ako sam našao rešenje preko kanonskih jednačina onda će:

$\dot{x_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(t, x_k, u_k)$

$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{H = \text{const.}} \rightarrow H(0) = H(T)$

Kako Hamiltonova funkcija predstavlja ukupnu energiju sistema, onda $H = \text{const.}$ predstavlja zakon održanja energije.

29. Optimalno upravljanje, slučaj nespecificiranog vremenskog intervala.

$\dot{x_i} = f_i(t, x_i, u_k) \quad i = 1, \ldots, n \quad k = 1, \ldots, m$

$I = \int_0^T F(t, x_i, u_k) dt$

$x_i(0) = \alpha_i$

$x_i(T) = \beta_i$

$T = ?$

Problem u klasi optimalnog upravljanja tako da rešavamo pravolinijski.

$H(t, x_k, u_k, p_i) = F(t, x_i, \dot{x_i}) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i(t, x_k, u_k)$

$\bar{I} = \int_0^T [H(t, x_k, u_k, p_i) - \sum_{i=1}^n p_i(t)\dot{x_i}] dt$

Kako vremenski interval nije poznat koristimo asinhronu varijaciju.

$\Delta x = \delta x + \dot{x}\Delta t \rightarrow \Delta \int_0^T F(t, x_i, u_k) dt = \delta \int_0^T F(t, x_i, u_k) dt + \dot{F}\Delta t|_0^T$

$\Delta\bar{I} = \int_0^T \left\{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \dot{x}_i\delta p_i - p_i\delta\dot{x}_i\right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right\} dt + [H - \sum_{i=1}^n p_i\dot{x}_i]\Delta t|_0^T = 0$

$p_i\delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(p_i\delta x_i) - \dot{p}_i\delta x_i$ pa je samim tim:

$\Delta\bar{I} = [H - \sum_{i=1}^n p_i\dot{x}_i]\Delta t|_0^T + \int_0^T \left\{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \dot{x}_i\delta p_i - \left(\frac{d}{dt}(p_i\delta x_i) - \dot{p}_i\delta x_i\right)\right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right\} dt = 0$

$\Delta\bar{I} = -\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T + [H - \sum_{i=1}^n p_i\dot{x}_i]\Delta t|_0^T + \int_0^T \left\{\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{p}_i\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{x}_i\right)\delta p_i\right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right\} dt = 0$

$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(t, x_k, u_k)$

$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0$

Ovo predstavlja $2n$ diferencijalnih i m algebarskih jednačina. Iz početnih uslova sada želimo da nađemo vreme T.

$x_i(0) = \alpha_i$

$x_i(T) = \beta_i$

$T = ?$

Uz koje uslove je $-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T + [H - \sum_{i=1}^n p_i\dot{x}_i]\Delta t|_0^T = 0$?

$-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T + [H - \sum_{i=1}^n p_i\dot{x}_i]\Delta t|_0^T = H\Delta t|_0^T - \sum_{i=1}^n (\delta x_i + \dot{x}_i\Delta t)p_i|_0^T =$

$= H\Delta t|_0^T - \sum_{i=1}^n \Delta x_i\, p_i|_0^T = 0$

$x_i(0) = \alpha_i \rightarrow \Delta x_i(0) = 0$

$x_i(T) = \beta_i \rightarrow \Delta x_i(T) = 0$

$\Rightarrow -\sum_{i=1}^n \Delta x_i\, p_i|_0^T = 0$

$\Delta t(0) = 0$

$\Delta t(T) = ?$

Pa samim tim da bi i $H\Delta t|_{t=T} = 0$ mora da $\boldsymbol{H(T) = 0}$.

Primer: Regulisanje mokraćne kiseline u krvi

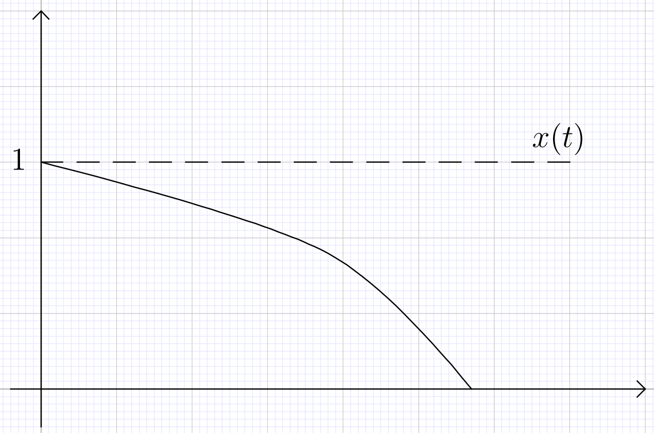
Jednačina koja opisuje sistem: $\dot{x} = 1 - x$

Početni uslovi: $x(0) = 1$

$\dot{x} = 1 - x \qquad x(0) = 1$

Mi želimo da upravljanjem dovedemo mokraćnu kiselinu upravljanjem na 0:

$\dot{x} = 1 - x + u \qquad x(T) = 0$



Lek treba da se daje u konačnom vremenu, ali ne naglo tako jer bi tolika količina leka za jako malo vreme bila jako toksična.

Imamo dva suprotsavljena zahteva. Prvi, da se da lek sa što manje vremena:

$I_1 = \int_0^T dt$

Drugi, ne smemo da preteramo sa upravljanjem:

$I_2 = \int_0^T u^2 dt$

Tako da nam treba zajednički kriterijum optimalnosti:

$I = I_1 + I_2 = \int_0^T (1 + u^2) dt$, ali da bi mogli upravljati i vremenom pišemo kao:

$I = \frac{1}{2} \int_0^T (k^2 + u^2) dt$, gde nam je sada k samo ponder, $\frac{1}{2}$ je tu da bi se lakše manipulisalo matematičkim operacijama.

$H = \frac{1}{2}(k^2 + u^2) + p(1 - x + u)$

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = 1 - x + u$

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p \rightarrow p(t) = c_1 e^t$

$\frac{\partial H}{\partial u_k} = u + p = 0 \rightarrow u(t) = -c_1 e^t$

Kako da odredim konstantu c_1 bez rešavanja $\dot{x} = 1 - x + u$.

$H = \frac{1}{2}(k^2 + u^2) + p(1 - x + u) \qquad H(T) = 0 \qquad u = -p$

$H = \frac{1}{2}(k^2 + u^2) - u(1 - x + u) \rightarrow H = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}u^2 - u(1 - x + u)$

$H(0) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}u^2(0) - u(0)(1 - x(0) + u(0))$

Znamo iz početnih uslova da je $x(0)=1$, pa zbog toga:

$H(0)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}u^2(0)-u(0)(1-1)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}u^2(0)$

Pošto je $u(t)=-c_1e^t$ onda je $u(0)=-c_1e^0=-c_1$.

$H(0)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}u^2(0)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}c_1^2 \rightarrow k^2=c_1^2 \rightarrow \boldsymbol{c1=\pm k}$

Ukoliko ovo ne bi bio fizički problem, onda bi morali da probamo oba rešenja i k i $-k$. Kako ovde to nije slučaj, i mi znamo da treba da povećavamo koncentraciju leka, onda znamo i da treba upravljanje da bude pozitivno. Kako je upravljanje oblika $u(t)=-c_1e^t$ onda znam da je $c1=-k$ da bi se ta dva minusa skratila.

$\dot{x}=1-x+u=1-x+ke^t \rightarrow x(t)=1-\frac{k}{2}e^t+\frac{k}{2}e^{-t}$

Pošto je $x(T)=0$ i $x(t)=1-k\,\mathrm{sh}(t)$:

$1-k\,\mathrm{sh}(T)=0 \rightarrow \mathrm{sh}(T)=\frac{1}{k} \rightarrow T=\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{k}\right)$

Ako bi $k\rightarrow 0$ onda bi $T\rightarrow\infty$, a kada bi $k\rightarrow\infty$ onda bi $T\rightarrow\frac{1}{k}$. A rešenje će biti negde između u obliku hiperboličnog sinusa.

30. Optimalno upravljanje, Bolca problem

$\dot{x}_i=f_i(t,x_i,u_k) \qquad i=1,\ldots,n \qquad k=1,\ldots,m$

$x_i(0)=\alpha_i$

$I=\psi[T,x_i(T)]+\int_0^T F(t,x_i,u_k)dt$

$0\leqslant t\leqslant T \rightarrow$ vremenski interval je poznat i zadat

$H(t,x_k,u_k,p_i)=F(t,x_i,\dot{x}_i)+\sum_{i=1}^n p_i(t)f_i(t,x_k,u_k)$

$\bar{I}=\psi[T,x_i(T)]+\int_0^T[H-\sum_{i=1}^n p_i\dot{x}_i]dt$

$\delta\bar{I}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}\delta x_i(T)-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T+\int_0^T\left\{\sum_{i=1}^n\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{p}_i\right)\delta x_i+\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{x}_i\right)\delta p_i\right]+\sum_{k=1}^m\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right\}dt=0$

Potrebi uslovi:

$\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{x}_i=0\rightarrow \boldsymbol{\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}}$

$\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{p}_i=0\rightarrow \boldsymbol{\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}}$

$\boldsymbol{\frac{\partial H}{\partial u_k}=0}$

Ostaje još i $\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}\delta x_i(T)-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i|_0^T=0$.

Pošto je $x_i(0)=\alpha_i$ onda je $\delta x_i=0$. Ostaje nam $\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}\delta x_i(T)-\sum_{i=1}^n p_i\delta x_i(T)=0$.

$\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}-p_i(T)\right)\delta x_i=0$ pa onda $\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}-p_i(T)=0$ pa je onda $\boldsymbol{\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}=p_i(T)}$.