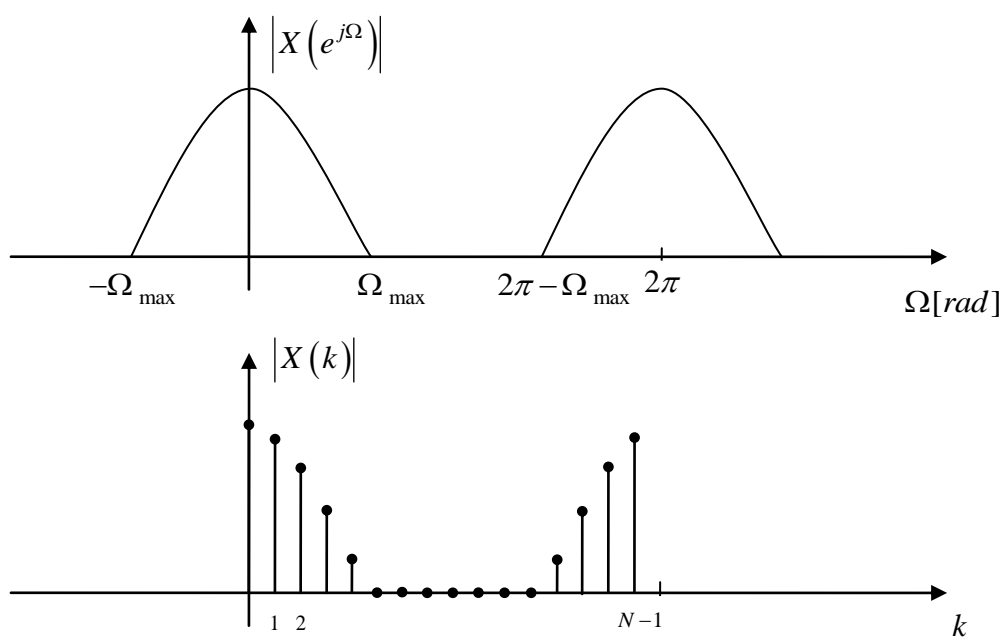


Diskretna Furijeova transformacija - DFT

Furijeova transformacija diskretnog signala $x(n)$, $X(e^{j\Omega})$ je kontinualna funkcija po učestanosti Ω (slika), pa je nepogodna za rad na računaru. Zato se radi odabiranja po učestanosti, pri čemu se dobija diskretna Furijeova transformacija - DFT. DFT je niz konačne dužine N , dobijen odabiranjem jedne periode Furijeove transformacije diskretnog signala $[0, 2\pi]$ u N tačaka (slika).

Odabiranje se vrši sa korakom $\Delta\Omega = 2\pi/N$, što znači da se odbirci uzimaju na učestanostima $\Omega_k = 2\pi k/N$. DFT niz se obeležava kao $\{X(k)\}$, gde je

$$X(k) = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_k=2\pi k/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$



Slika *Furijeova transformacija diskretnog signala (gore) i diskretna Furijeova transformacija (dole)*

Potrebno je odrediti pod kojim uslovima će moći da se rekonstruiše niz $\{x(n)\}$ ako je poznat niz $\{X(k)\}$. Ako je M dužina niza $\{x(n)\}$, rekonstrukcija je moguća ako je $M \leq N$. Ako je niz $\{x(n)\}$ aperiodičan niz beskonačne dužine, mora se izvršiti njegovo odsecanje – dužina niza se ograničava na N , a svi ostali elementi se izjednačavaju sa nulom.

DFT se definiše na sledeći način:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Inverzna DFT se definiše na sledeći način

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k}{N} n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Zadaci

1. Dat je niz $\{x(n)\}$ čiji je n -ti član

$$x(n) = \begin{cases} 1/3, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Izračunati DFT ovog niza za $N=3, N=4$ i $N=8$.

Rešenje:

Polazimo od niza $\{x(n)\} = \{1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, \dots\}$ i vidimo da u sva tri slučaja važi da je broj elemenata niza različitih od nule (samim tim i dužina niza) manja ili jednaka broju tačaka u kojima se računa DFT tj. $M \leq N$.

DFT se računa kao:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{3} e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi k}{N} 3}}{1 - e^{-j \frac{2\pi k}{N}}} \Rightarrow$$

$$X(k) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(3\pi k / N)}{\sin(\pi k / N)} \cdot e^{-j \frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

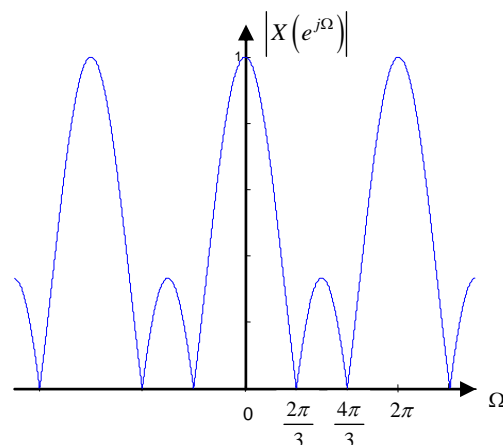
Furijeova transformacija diskretnog signala je:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{3} e^{-j\Omega n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - e^{-j\Omega 3}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(3\Omega / 2)}{\sin(\Omega / 2)} \cdot e^{-j\Omega}$$

pa je amplitudski spektar

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(3\Omega / 2)}{\sin(\Omega / 2)} \right|$$

i prikazan je na slici



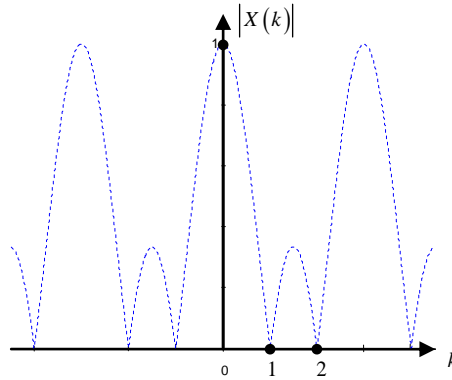
Slika Amplitudski spektar signala $\{x(n)\}$

a) Za $N = 3$ korak diskretizacije je $\Delta\Omega = 2\pi/3$, pa se dobija:

$$|X(k)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/3)} \right|, k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$|X(0)| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1, |X(1)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(\pi)}{\sin(\pi/3)} \right| = 0, |X(2)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(2\pi)}{\sin(2\pi/3)} \right| = 0$$

Amplitudska karakteristika DFT je prikazana na slici



Slika Amplitudska karakteristika DFT za $N = 3$

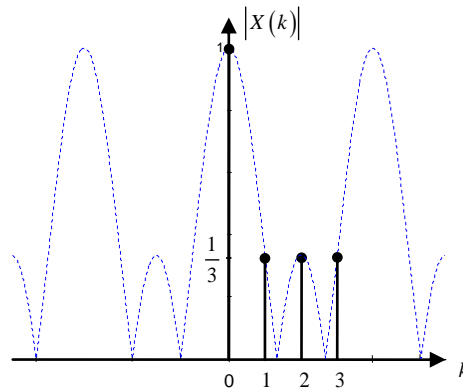
b) Za $N = 4$ korak diskretizacije je $\Delta\Omega = 2\pi/4 = \pi/2$, pa se dobija:

$$|X(k)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(3\pi k/4)}{\sin(\pi k/4)} \right|, k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$$

$$|X(0)| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1, |X(1)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(3\pi/4)}{\sin(\pi/4)} \right| = \frac{1}{3},$$

$$|X(2)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(3\pi/2)}{\sin(\pi/2)} \right| = \frac{1}{3}, |X(3)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{\sin(9\pi/4)}{\sin(3\pi/4)} \right| = \frac{1}{3}$$

Amplitudska karakteristika DFT je prikazana na slici

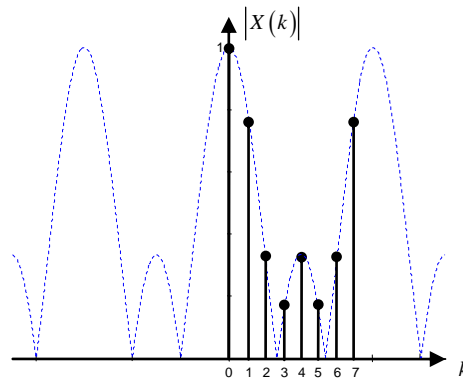


Slika Amplitudska karakteristika DFT za $N = 4$

c) Za $N = 8$ korak diskretizacije je $\Delta\Omega = 2\pi/8 = \pi/4$, pa se dobija:

$$\{|X(k)|\} = \{1, 0.8047, 1/3, 0.1381, 1/3, 0.1381, 1/3, 0.8047\}$$

Amplitudska karakteristika DFT je prikazana na slici



Slika Amplitudska karakteristika DFT za $N = 4$

2. Dat je signal $g(n) = a^n h(n)$, $|a| < 1$. Odrediti njegovu Furijeovu transformaciju i DFT u N tačaka.

Rešenje:

Furijeova transformacija diskretnog signala $g(n)$, pri čemu je $\{g(n)\}$ beskonačan niz je:

$$G(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

Ako $G(e^{j\Omega})$ diskretizujemo u N tačaka, dobijamo:

$$G(k) = G(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_k=2\pi k/N} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi k/N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Šta se dobija inverznom DFT od $G(k)$?

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi k/N}} e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (ae^{-j2\pi k/N})^r = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-r)k/N} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \frac{1 - e^{j\frac{2\pi(n-r)N}{N}}}{1 - e^{j\frac{2\pi(n-r)}{N}}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \frac{1 - e^{j2\pi(n-r)}}{1 - e^{j\frac{2\pi(n-r)}{N}}} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \frac{e^{j\frac{2\pi(n-r)}{2}} \sin(\pi(n-r))}{e^{j\frac{2\pi(n-r)}{2N}} \sin(\frac{\pi(n-r)}{N})} \end{aligned}$$

Ovaj izraz je različit od nule samo za $r = n + mN, m \in \mathbf{Z}$, pa je:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi k(-mN)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} a^r \cdot N = \sum_{m=0}^{\infty} a^n \cdot a^{mN} = \frac{a^n}{1 - a^N}$$

Originalni signal je bio $g(n) = a^n h(n)$. Vidimo da je $g(n) \neq x(n)$, ali je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 - a^N} = a^n = g(n)$$

3. Dat je pravougaoni impuls $x(t)$ dužine 1s i amplitude 1. Diskretni signal $x(n)$ dobija se tako što se signal $x(t)$ diskretizuje sa periodom odabiranja 0.125s.

- Odrediti Furijeovu transformaciju, amplitudski i fazni spektar signala $x(t)$. Skicirati spektre na osi ω .
- Odrediti Furijeovu transformaciju, amplitudski i fazni spektar dobijenog diskretnog signala.
- Odrediti izraz za diskretnu Furijeovu transformaciju diskretnog signala. Na osnovu dobijenog izraza izračunati DFT niz ovog signala u 4 tačke. Nacrtati module tačaka DFT niza na Ω i na F osi.
- Na osnovu tačaka DFT niza proceniti vrednost komponenti u amplitudskom spektru kontinualnog signala. Skicirati procenjene vrednosti na osi ω .

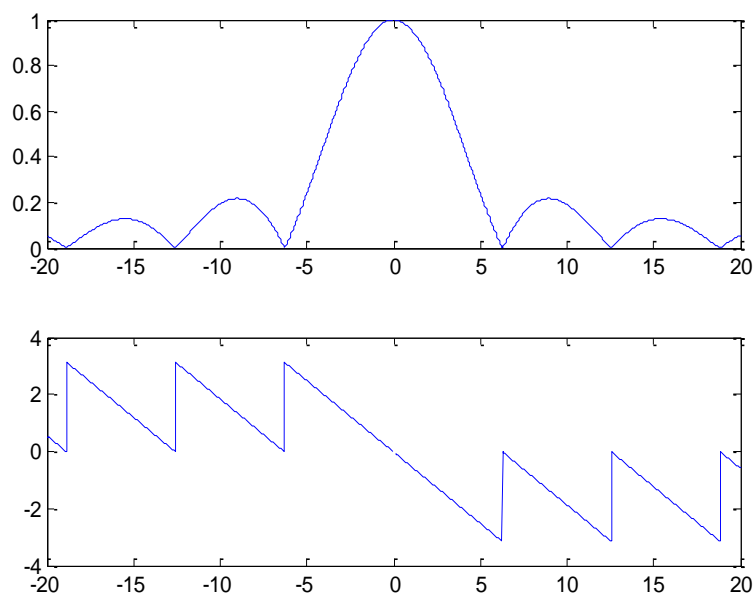
Rešenje:

a) Furijeova transformacija signala $x(t)$ je

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^1 = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega}) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \cdot e^{-j\omega/2} \Rightarrow$$

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right| \quad \text{amplitudski spektar}$$

$$\arg\{X(j\omega)\} = -\frac{\omega}{2} + \arg\left\{ \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right\} \quad \text{fazni spektar}$$



Slike Amplitudski i fazni spektar signala $x(t)$

- b) Nakon diskretizacije sa periodom $T=0.125s$, dobija se sledeći niz:
 $\{x(n)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$. Furijeova transformacija diskretnog signala $x(n)$ je:

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^8 e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j9\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \\ &= \frac{e^{-j9\Omega/2} \cdot 2j \sin(9\Omega/2)}{e^{-j\Omega/2} \cdot 2j \sin(\Omega/2)} = \frac{\sin(9\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \cdot e^{-j4\Omega} \Rightarrow \\ \left| X(e^{j\Omega}) \right| &= \left| \frac{\sin(9\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right|, \quad \arg\{X(e^{j\Omega})\} = -4\Omega + \arg\left\{ \frac{\sin(9\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right\} \end{aligned}$$

- c) Diskretna Furijeova transformacija je:

$$X(k) = X(e^{j\Omega_k}), \text{ gde je } \Omega_k = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow X(k) = \frac{\sin(9\pi k / N)}{\sin(\pi k / N)} \cdot e^{-j\frac{8\pi k}{N}}$$

Ako računamo DFT niz u 4 tačke $\Rightarrow N=4 \Rightarrow k=0, 1, 2, 3$, pa je:

$$X(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(9\pi k / N)}{\sin(\pi k / N)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{9\pi}{N} \cos(9\pi k / N)}{\frac{\pi}{N} \cos(\pi k / N)} = 9$$

$$X(1) = \frac{\sin(9\pi / 4)}{\sin(\pi / 4)} \cdot e^{-j\frac{8\pi}{4}} = 1$$

$$X(2) = \frac{\sin(9\pi \cdot 2 / 4)}{\sin(\pi \cdot 2 / 4)} \cdot e^{-j\frac{8\pi \cdot 2}{4}} = 1$$

$$X(3) = \frac{\sin(9\pi \cdot 3 / 4)}{\sin(\pi \cdot 3 / 4)} \cdot e^{-j\frac{8\pi \cdot 3}{4}} = 1$$

- d)

$$k=0 \Rightarrow \Omega_0 = 0 \text{ rad} \Rightarrow \omega_0 = 0 \text{ rad} / s$$

$$k=1 \Rightarrow \Omega_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{2T} = 4\pi \text{ rad} / s$$

$$k=2 \Rightarrow \Omega_2 = \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi \text{ rad} \Rightarrow \omega_2 = 8\pi \text{ rad} / s$$

$$k=3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{2\pi \cdot 3}{4} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \omega_3 = 12\pi \text{ rad} / s$$

Procena spektra kontinualnog signala na osnovu spektra diskretnog signala može da se izvrši na sledeći način:

$$\left| X(j\omega) \right|_p = T \cdot \left| X(e^{j\Omega}) \right|,$$

pa je

$$|X(j\omega_0)|_p = T \cdot |X(e^{j\Omega_0})| = 0.125 \cdot 9 = 1.125$$

$$|X(j\omega_1)|_p = T \cdot |X(e^{j\Omega_1})| = 0.125 \cdot 1 = 0.125$$

$$|X(j\omega_2)|_p = T \cdot |X(e^{j\Omega_2})| = 0.125 \cdot 1 = 0.125$$

$$|X(j\omega_3)|_p = T \cdot |X(e^{j\Omega_3})| = 0.125 \cdot 1 = 0.125$$

Prave vrednosti spektra kontinualnog signala za date učestanosi se dobijaju na osnovu izraza za amplitudski spektar kontinualnog signala koji je izveden u tački a):

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right|$$

$$|X(j\omega_0)| = \left| \frac{\sin(\omega_0/2)}{\omega_0/2} \right| = 1$$

$$|X(j\omega_1)| = \left| \frac{\sin(\omega_1/2)}{\omega_1/2} \right| = \left| \frac{\sin(4\pi/2)}{4\pi/2} \right| = 0$$

$$|X(j\omega_2)| = \left| \frac{\sin(\omega_2/2)}{\omega_2/2} \right| = \left| \frac{\sin(8\pi/2)}{8\pi/2} \right| = 0$$

$$|X(j\omega_3)| = \left| \frac{\sin(\omega_3/2)}{\omega_3/2} \right| = \left| \frac{\sin(12\pi/2)}{12\pi/2} \right| = 0$$

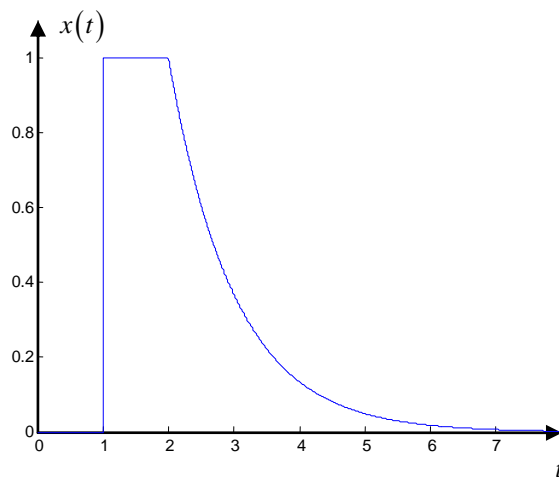
Procenjene vrednosti se ne slažu sa pravim vrednostima pošto smo procenjivali spektar u samo 4 tačke, a dužina signala je veća.

4. Dat je signal:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \text{ s} \\ 1, & 1 \leq t < 2 \text{ s} \\ e^{-(t-2)}, & t \geq 2 \text{ s} \end{cases}$$

- Odrediti Furijeovu transformaciju ovog signala.
- Diskretizovati signal $x(t)$ sa periodom odabiranja $T = 250$ ms. Odrediti Furijeovu transformaciju tako diskretizovanog signala.

Signal $x(t)$ je prikazan na slici

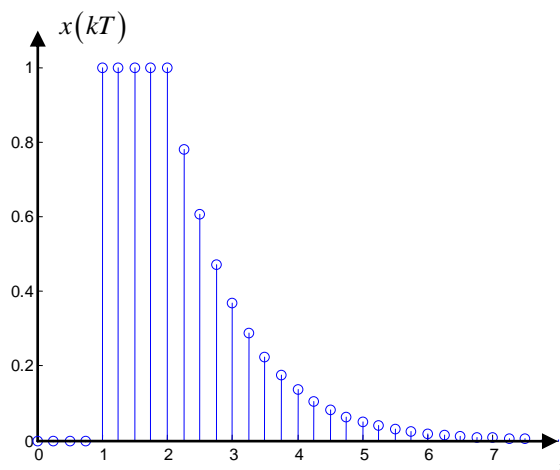


Slika Signal $x(t)$

a) Furijeova transformacija ovog signala je

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 e^{-j\omega t} dt + \int_2^{\infty} e^{-(t-2)} \cdot e^{-j\omega t} dt = \\
 &= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_1^2 - e^2 \cdot \frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-(1+j\omega)t} \Big|_2^{\infty} = \frac{e^{-j\omega} (1+j\omega) - e^{-2j\omega}}{j\omega(1+j\omega)}
 \end{aligned}$$

b) Signal diskretizovan sa periodom $T = 250$ ms prikazan je na slici



Slika Signal $x(t)$ diskretizovan sa periodom $T = 250$ ms

Furijeova transformacija diskretnog signala je:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^3 0 \cdot e^{-j\Omega n} + \sum_{n=4}^7 e^{-j\Omega n} + \sum_{n=8}^{\infty} e^{-(nT-2)} \cdot e^{-j\Omega n} = \\
&= \sum_{n=0}^7 e^{-j\Omega n} - \sum_{n=0}^3 e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} \cdot e^2 \cdot e^{-j\Omega n} - \sum_{n=0}^7 e^{-nT} \cdot e^2 \cdot e^{-j\Omega n} = \\
&= \frac{1-e^{-j8\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} - \frac{1-e^{-j4\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-T-j\Omega)n} - e^2 \cdot \sum_{n=0}^7 e^{(-T-j\Omega)n} = \\
&= \frac{e^{-j4\Omega} - e^{-j8\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{e^2}{1-e^{-T-j\Omega}} - \frac{e^2 \cdot (1-e^{-8(T+j\Omega)})}{1-e^{-T-j\Omega}} = \frac{e^{-j4\Omega} - e^{-j8\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{e^{(2-8T)} \cdot e^{-j8\Omega}}{1-e^{-(T+j\Omega)}}
\end{aligned}$$

Za $T = 250$ ms dobija se

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{e^{-j4\Omega} - e^{-j8\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{e^{-j8\Omega}}{1-e^{-(0.25+j\Omega)}}.$$

FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE DFT

Posmatrajmo prostoperiodičnu kompleksnu sekvencu $x(n) = e^{j\Omega_0 n} = e^{j2\pi n f_0 / f_s}$, proizvoljne učestanosti f_0 . DFT ovog signala je:

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{f_0}{f_s}n} \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)n} = \\
&= \frac{1 - e^{-j2\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)N}}{1 - e^{-j2\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)}} = \frac{e^{-j\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)N} \cdot 2j \sin \pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)N}{e^{-j\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)} \cdot 2j \sin \pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)} = \frac{\sin \pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)N}{\sin \pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)} \cdot e^{-j\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)(N-1)}
\end{aligned}$$

Amplitudska karakteristika data je izrazom:

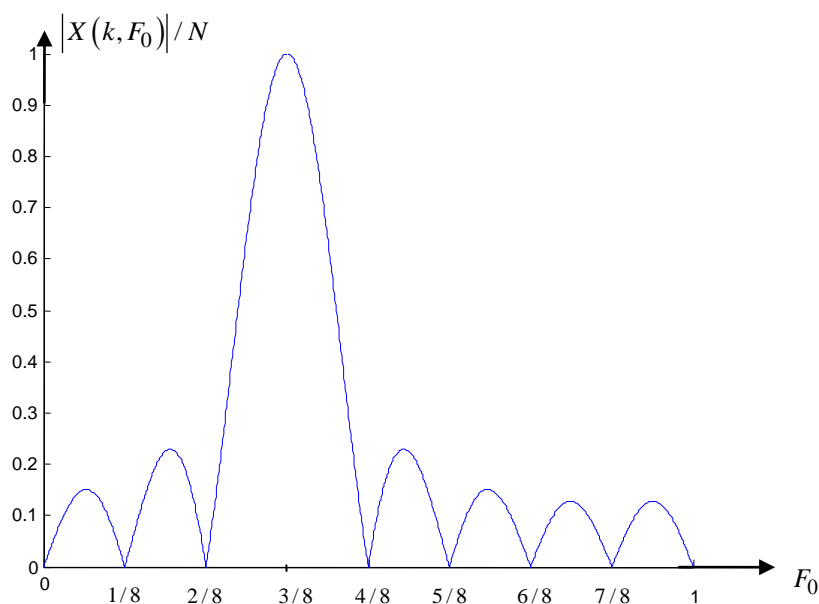
$$|X(k)| = \left| \frac{\sin \pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)N}{\sin \pi \left(\frac{k}{N} - \frac{f_0}{f_s}\right)} \right| = \left| \frac{\sin \pi \left(\frac{k}{N} - F_0\right)N}{\sin \pi \left(\frac{k}{N} - F_0\right)} \right|,$$

gde je $F_0 = f_0 / f_s$ diskretna učestanost signala $x(n)$.

Iz jednačine se vidi da amplituda k -te komponente u spektru zavisi od broja tačaka DFT N i od učestanosti signala F_0 . Komponenta $|X(k)|$ ima maksimalnu vrednost kada se učestanost F_0 poklapa sa učestanošću te komponente, dakle pri $F_0 = k / N$. Deo amplitudske karakteristike u okolini frekvencije $F_0 = k / N$ čini glavni luk. U slučajevima kada se F_0 poklapa sa učestanošću neke druge spektralne komponente DFT-a, $F_0 = l / N$, $l \neq k$, amplitudska karakteristika k -tog elementa ima vrednost nula. Kada se F_0 ne poklapa ni sa jednom od učestanosti izračunavanja DFT-a, amplitude $|X(k)|$ imaju

vrednosti različite od nule, što znači da će F_0 doprineti vrednostima svih spektralnih komponenti (ovi delovi amplitudske karakteristike koji se nalaze između nula čine bočne lukove). Postojanje bočnih lukova, odnosno nepoklapanje učestanosti signala sa nekom od učestanosti izračunavanja DFT –a dovodi do pojave koja se naziva curenje spektra. Da bi se smanjilo curenje spektra, primenjuju se razne modifikacije ulaznog signala $x(n)$.

Amplitudska karakteristika prikazana je na sledećoj slici



Slika Normalizovana amplitudska karakteristika DFT za slučaj $N = 8$ i $k = 3$

Sa slike se vidi da je širina glavnog luka dvostruko veća od frekvencijskog razmaka DFT odbiraka, što znači da će se glavni lukovi susednih DFT odbiraka preklapati sa jednom polovinom svoje širine. Ako učestanost ulaznog signala pada u region preklapanja dve susedne komponente, njena amplituda ne može biti precizno detektovana jer će proizvesti značajne vrednosti dva DFT odbirka.

Frekvencijska selektivnost DFT definiše se kao sposobnost razdvajanja komponenata u spektru ulaznog signala. Komponente koje pripadaju glavnom luku ne mogu se razdvojiti. To znači da selektivnost DFT zavisi od broja tačaka u kojima se računa DFT, ali i od načina modifikacije ulazne sekvence radi smanjenja curenja spektra jer modifikacija utiče na širinu glavnog luka.

Primer

Dat je signal $x(t) = \cos \omega_0 t$. Nacrtati DFT ovog signala u 8 tačaka ako je: 1) $F_0 = 3/8$ i 2) $F_0 = 3/7$. Objasniti dobijene rezultate.

MODIFIKACIJA SIGNALA PROZORSKIM FUNKCIJAMA

Da bi se popravile frekvencijske karakteristike DFT, odbirci ulaznog signala $x(n)$ se mogu pomnožiti odbircima težinske, odnosno prozorske funkcije $w(n)$:

$$x_p(n) = w(n) \cdot x(n)$$

Furijeova transformacija signala $x_p(n)$ je:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot x(n) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W(n) \cdot X(k-n)$$

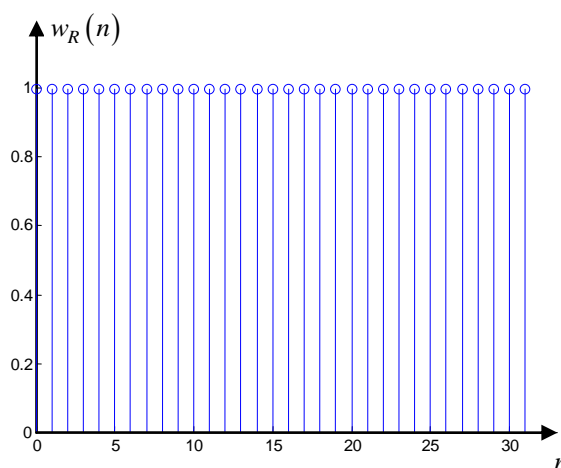
i predstavlja cirkularnu konvoluciju spektra ulaznog signala i prozorske funkcije. Modifikacija ulaznog signala će biti minimalna ukoliko spektar prozorske funkcije što više liči na delta impuls tj. ako mu je glavni luk što uži, a bočni lukovi što manji.

PRAVOUGAONA PROZORSKA FUNKCIJA

Pravougaona prozorska funkcija definiše se na sledeći način:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

i za $N = 32$ prikazana je na sledećoj slici:

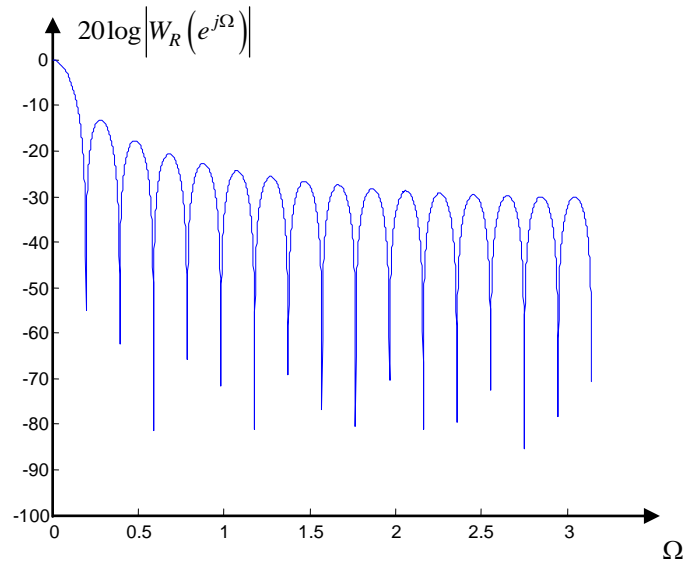


Slika Pravougaona prozorska funkcija, $N = 32$

Pravougaona prozorska funkcija ne vrši nikakvu modifikaciju ulaznog signala, osim eventualnog odsecanja. Spektar pravougaone prozorske funkcije dat je izrazom:

$$W_R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_R(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega N / 2)}{\sin(\Omega / 2)} e^{-j\Omega(N-1)/2}$$

Amplitudski spektar pravougaone prozorske funkcije prikazan je na sledećoj slici:



Slika Amplitudski spektar pravougaone prozorske funkcije, $N = 32$

Širina glavnog luka je $4\pi/N$, a slabljenje prvog bočnog luka je 13.23dB. Viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -6 dB/oktavi. Kao što smo videli, množenje signala prozorskom funkcijom u vremenskom domenu, kao posledicu ima konvoluciju u frekvencijskom domenu. Kada se formira konvolucija u frekvencijskom domenu između spektra ulaznog signala i spektra prozorske funkcije, zbog postojanja jakih bočnih lukova, nastaje značajna modifikacija spektra ulaznog signala što nije dobro. Jaki bočni lukovi su posledica naglog prekida sekvence $w_R(n)$. Zbog toga se definišu mnoge druge prozorske funkcije koje imaju postepen prelaz od centra prema krajevima i u njihovom spektru bočni lukovi su znatno slabiji.

TROUGAONA ILI BARTLETOVA PROZORSKA FUNKCIJA

Trougaona ili Bartlettova (*Bartlett*) prozorska funkcija definiše se na sledeći način:

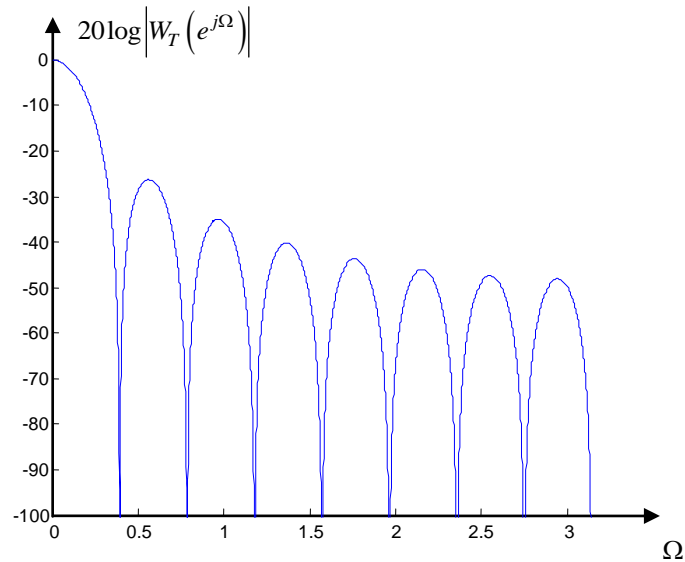
$$w_T(n) = \begin{cases} 2n/N, & n = 0, 1, \dots, N/2 \\ w_T(N-n), & n = (N/2)+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

i prikazana je na sledećoj slici:

Trougaona prozorska funkcija je simetrična, a njen spektar je dat izrazom:

$$W_T(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_T(n) e^{-j\Omega n} = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin(\Omega N/4)}{\sin(\Omega/2)} \right)^2 e^{-j\Omega(N/2-1)}$$

Amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije prikazan je na sledećoj slici:



Slika Amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije, $N = 32$

Širina glavnog luka je $8\pi / N$, a slabljenje prvog bočnog luka je 26.6dB. Viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -12 dB/oktavi.

PROZORSKE FUNKCIJE KOSINUSNOG (SINUSNOG) TIPA

Da bi se još više smanjili bočni lukovi, potrebno je ostvariti još blaži prelaz u blizini krajeva prozorske funkcije. To se može ostvariti korišćenjem kosinusnih (sinusnih) funkcija oblika $\cos^\alpha x$ ili $\sin^\alpha x$. Za spektralnu analizu pomoću DFT pogodnije su sinusne funkcije oblika

$$w(n) = \sin^\alpha \left(\frac{n\pi}{N} \right), n = 0, 1, \dots, N-1$$

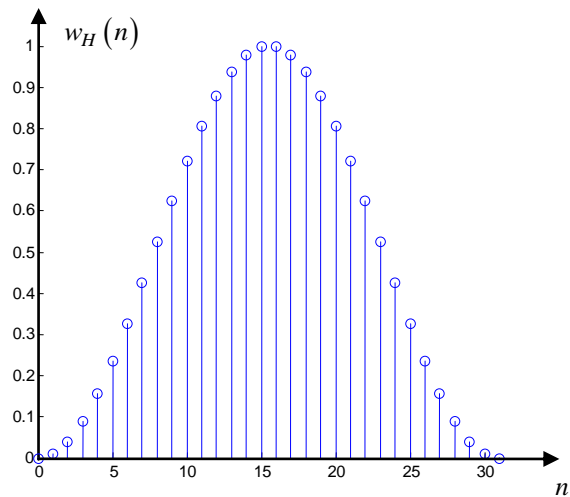
Gde parametar α može da uzima vrednosti $1 \leq \alpha \leq 4$.

HANOVA PROZORSKA FUNKCIJA

Za $\alpha = 2$ dobija se Hanova (Hann) prozorska funkcija:

$$w_H(n) = \sin^2 \left(\frac{n\pi}{N} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2n\pi}{N} \right) \right), n = 0, 1, \dots, N-1$$

koja je prikazana na sledećoj slici:

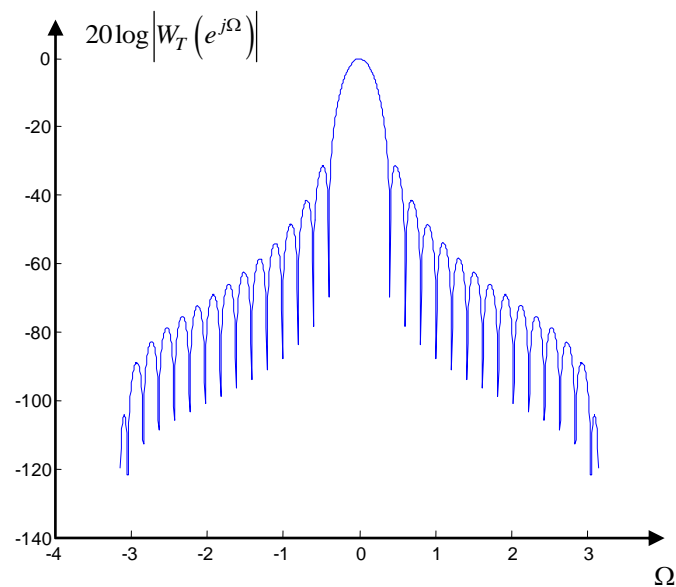


Slika Hanova prozorska funkcija, $N = 32$

Spektar Hanove prozorske funkcije dat je izrazom:

$$W_H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} W_R(e^{j\Omega}) - \frac{1}{4} \left(W_R(e^{j(\Omega-2\pi/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi/N)}) \right)$$

gde je $W_R(e^{j\Omega})$ spektar pravougaone prozorske funkcije.



Slika Amplitudski spektar Hanove prozorske funkcije, $N = 32$

Širina glavnog luka je $8\pi/N$, a slabljenje prvog bočnog luka je 31.2dB. Viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -18 dB/oktavi.

HEMINGOVA PROZORSKA FUNKCIJA

Hemingova (Hamming) prozorska funkcija predstavlja poboljšanu Hanovu prozorsku funkciju. Generalizovana Hanova prozorska funkcija data je izrazom

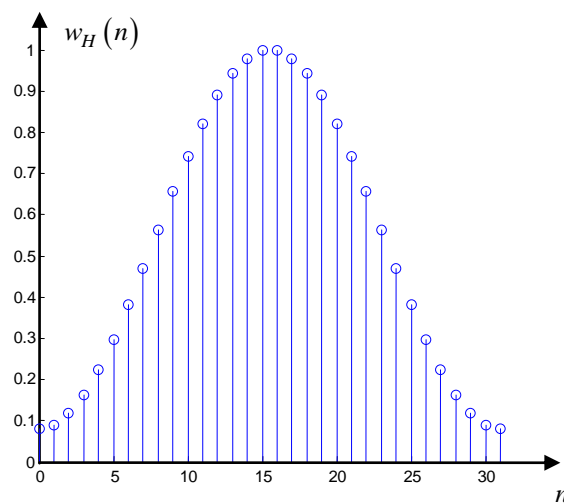
$$w_H(n) = \alpha_H - (1 - \alpha_H) \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Njen spektar dat je izrazom:

$$W_H(e^{j\Omega}) = \alpha_H W_R(e^{j\Omega}) - \frac{1}{2}(1 - \alpha_H) \left(W_R(e^{j(\Omega - 2\pi/N)}) + W_R(e^{j(\Omega + 2\pi/N)}) \right)$$

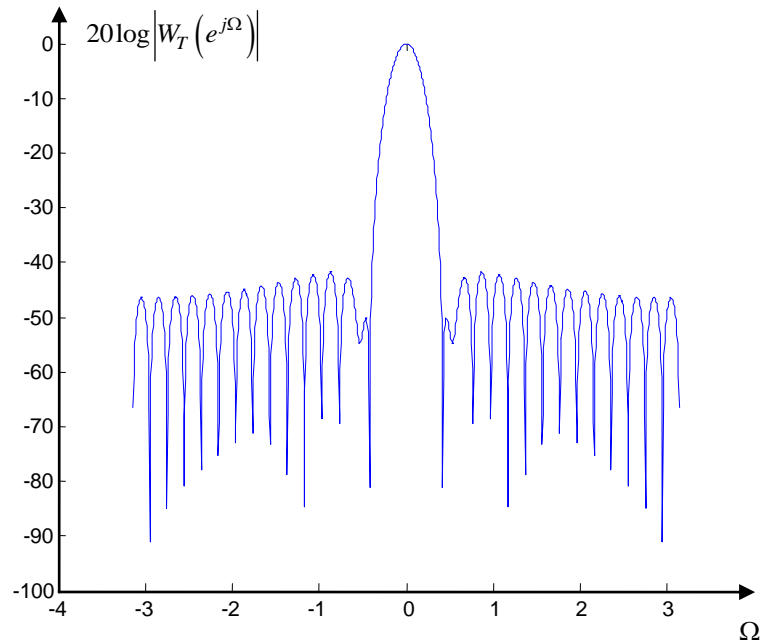
gde je $W_R(e^{j\Omega})$ spektar pravougaone prozorske funkcije.

Za vrednost parametra $\alpha_H = 25/46$, generalizovana Hanova prozorska funkcija naziva se Hemingova prozorska funkcija i prikazana je na sledećoj slici:



Slika Hemingova prozorska funkcija, $N = 32$

Amplitudski spektar Hemingove prozorske funkcije prikazan je na slici



Slika Amplitudski spektar Hemingove prozorske funkcije, $N = 32$

Širina glavnog luka je $8\pi / N$, a slabljenje prvog bočnog luka je 42.43dB. Viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -6 dB/oktavi.

BLEKMANOVA PROZORSKA FUNKCIJA

Generalizovana Blekmanova (Blackman) prozorska funkcija data je izrazom:

$$w_B(n) = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N-1$$

gde koeficijenti a_m zadovoljavaju uslov:

$$\sum_{m=0}^M a_m = 1$$

Spektar generalizovane Blekmanove prozorske funkcije je

$$W_B(e^{j\Omega}) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{2} \left(W_R(e^{j(\Omega - 2\pi m/N)}) + W_R(e^{j(\Omega + 2\pi m/N)}) \right)$$

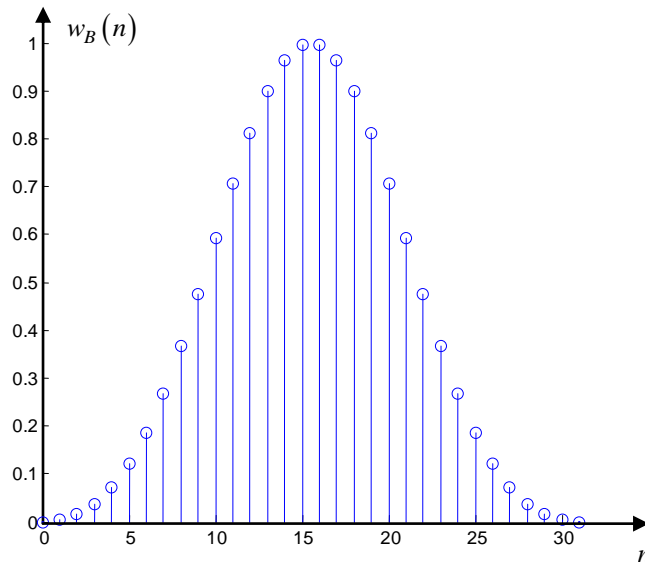
Ovoj klasi pripadaju i Hanova i Hemingova prozorska funkcija ($M = 1$). Bolji rezultati mogu da se dobiju za $M > 1$. Za $M = 2$, nule funkcije $W_B(e^{j\Omega})$ se postavljaju na učestanosti $7\pi / N$ i $9\pi / N$ i odgovaraju pozicijama maksimuma trećeg i četvrtog bočnog luka pravougaone prozorske funkcije, pri čemu se dobijaju parametri:

$$a_0 = 0.42659071 \approx 0.42$$

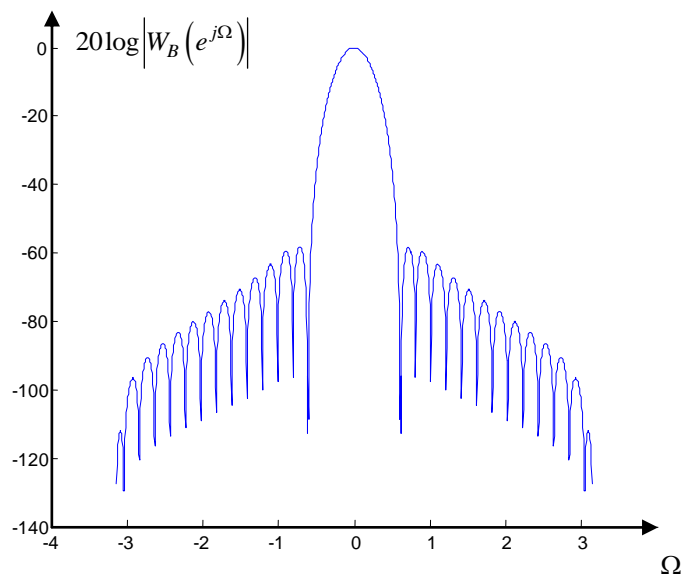
$$a_1 = 0.49656062 \approx 0.50$$

$$a_2 = 0.07684867 \approx 0.08$$

Funkcija koja koristi ove aproksimativne vrednosti, naziva se Blekmanova prozorska funkcija.



Slika *Blekmanova prozorska funkcija*, $N = 32$



Slika *Amplitudski spektar Blekmanove prozorske funkcije*, $N = 32$

Širina glavnog luka je $12\pi / N$, a slabljenje prvog bočnog luka je 58dB. Viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -18 dB/oktavi. Dobre osobine u pogledu slabljenja bočnih lukova ostvarene su na račun povećanja širine glavnog luka.

KAJZEROVA PROZORSKA FUNKCIJA

Kajzerova (Kaiser) prozorska funkcija predstavlja diskretnu aproksimaciju funkcije ograničenog trajanja T_K koja maksimizira energiju sadržanu u opsegu učestanosti B_K pomoću modifikovane Beselove funkcije prve vrste nultog reda:

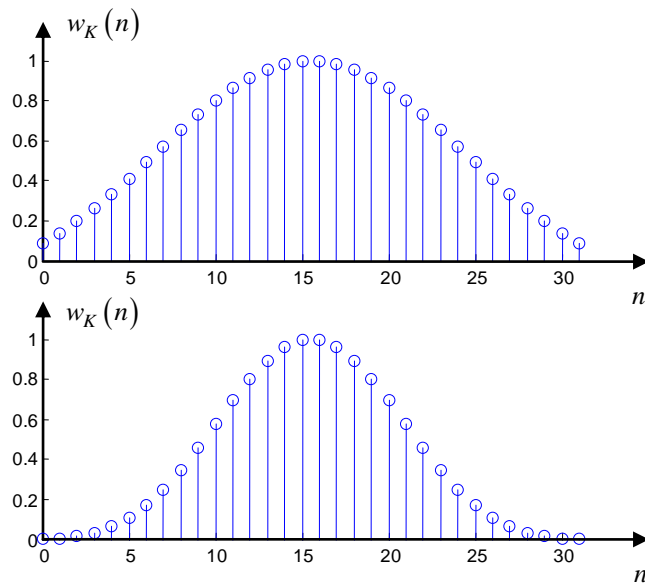
$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(x/2)^k}{k!} \right)^2$$

Kajzerova prozorska funkcija data je izrazom:

$$w_K(n) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(1-2n/(N-1))^2}\right)}{I_0(\beta)}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

gde je $\beta = 0.5T_K B_K$.

Na sledećoj slici prikazane su Kajzerove prozorske funkcije za dve različite vrednosti parametra β .



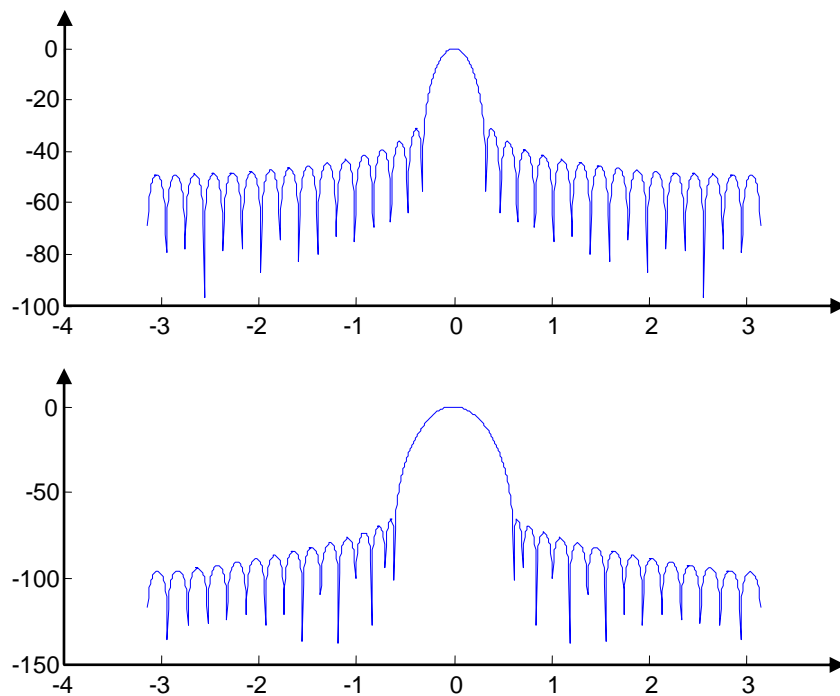
Slika Kajzerove prozorske funkcije za $N = 32$ i $\beta = 4$ (gore) i $\beta = 9$ (dole)

Kajzerova prozorska funkcija pruža mogućnost da se izborom parametra β i N podesi širina glavnog luka $\Delta\Omega_0$ (od čega zavisi frekvencijska selektivnost, tj. sposobnost razdvajanja po frekvenciji) i slabljenje bočnog luka u spektru prozorske funkcije A_{sl} (od čega zavisi curenje spektra). Na osnovu željenog slabljenja A_{sl} i širine $\Delta\Omega_0$, određuju se β i N prema sledećim empirijskim formulama:

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{sl} \leq 13.26dB \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26), & 13.26dB < A_{sl} \leq 60dB \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3), & 60dB < A_{sl} \leq 120dB \end{cases}$$

$$N \approx \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta\Omega_0} + 1$$

Spektri Kajzerovih prozorskih funkcija za $N = 32$ i dve različite vrednosti parametra β ($\beta = 4$ i $\beta = 9$) dati su na sledećoj slici:



Slika Spektri Kajzerove prozorske funkcije za $N = 32$ i $\beta = 4$ (gore) i $\beta = 9$ (dole)

Kajzerovom prozorskom funkcijom se ostvaruje kompromis između dužine sekvence, frekvencijske rezolucije i curenja spektra.

DOLF-ČEBIŠEVljeVA PROZORSKA FUNKCIJA

Problem određivanja optimalne prozorske funkcije može se posmatrati kao optimizacioni problem određivanja prozorske funkcije čiji centralni luk ima minimalnu širinu za zadato slabljenje bočnih lukova.

Odbirci spektra Dolf-Čebiševljeve (Dolph-Chebyshev) prozorske funkcije dati su sledećim izrazom:

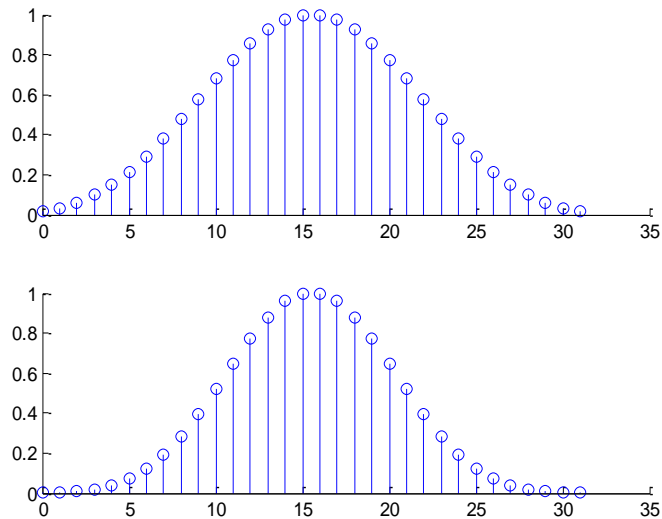
$$W_D(k) = (-1)^k \frac{\cos\left(N \cos^{-1}\left(\beta \cos\left(\pi k / N\right)\right)\right)}{\cosh\left(N \cosh^{-1}(\beta)\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

gde je

$$\beta = \cosh\left(\frac{1}{N} \cosh^{-1}\left(10^\alpha\right)\right),$$

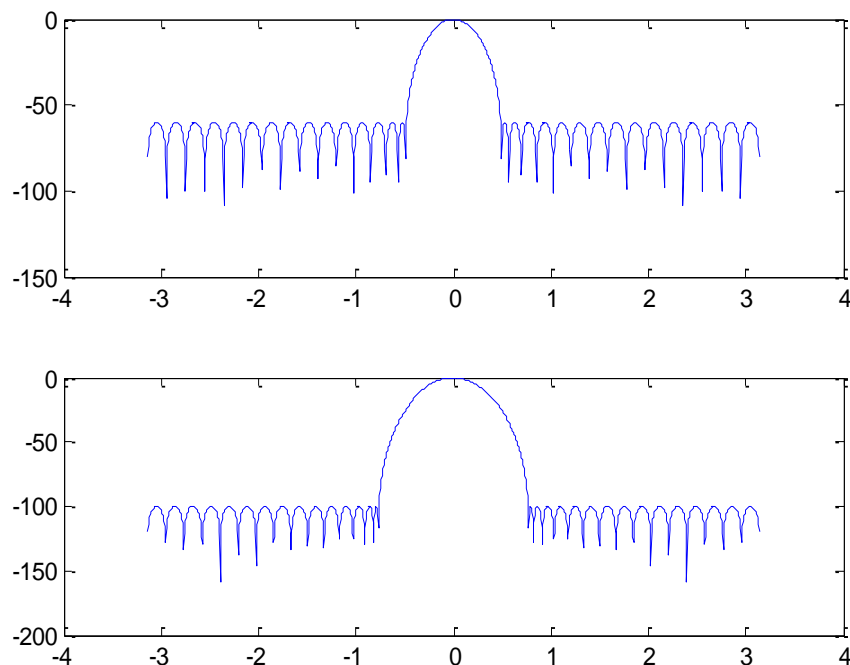
a α predstavlja logaritam odnosa amplitude centralnog luka i amplitude jednakih bočnih lukova.

Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije za $N = 32$ i dve različite vrednosti slabljenja bočnih opsega prikazane su na sledećim slikama:



Slika Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije za $N = 32$ i slabljenjem bočnih opsega od 60dB (gore) i 100dB (dole)

Odgovarajući spektri dati su na sledećoj slici:



Slika Amplitudski spektri Dolf-Čebiševljevih prozorskih funkcija za $N = 32$ i slabljenjem bočnih opsega od 60dB (gore) i 100dB (dole)

KVALITATIVNO POREĐENJE PROZORSKIH FUNKCIJA

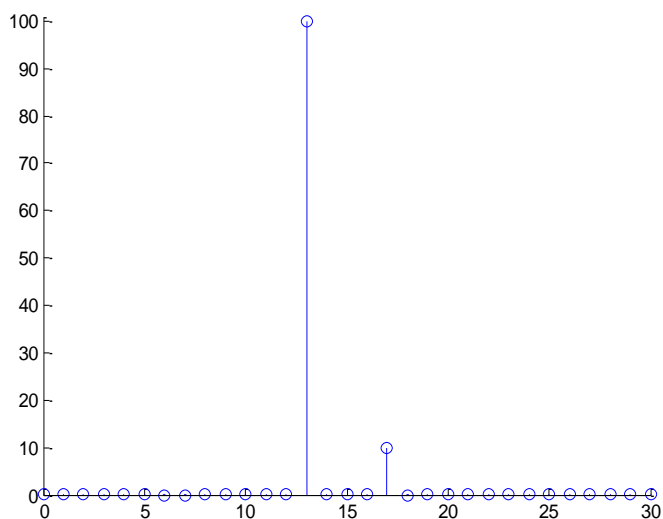
Da bi ispitali uticaj prozorske funkcije na kvalitet analize spektra signala, jedan ulazni signal ograničićemo različitim prozorskim funkcijama.

Primer

Dat je signal

$$x(n) = 1000 \cos\left(2\pi \frac{26}{N}n\right) + 10 \cos\left(2\pi \frac{33}{N}n\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Radi se o signalu koji se sastoji od dve sinusoidalne komponente različitih amplituda, čije su učestanosti takve da odgovaraju 26. i 33. komponenti u DFT nizu bez obzira na dužinu sekvence N . Spektar ovog signala prikazan je na sledećoj slici:



Boxcar

Triang

KVANTITATIVNO POREĐENJE PROZORSKIH FUNKCIJA

Najvažniji parametri koji služe za poređenje prozorskih funkcija su:

- širina glavnog luka,
- slabljenje bočnih lukova i
- brzina kojom amplitude bočnih lukova opadaju sa porastom učestanosti

i prikazani su u tabeli.

PROZORSKA FUNKCIJA	ŠIRINA GLAVNOG LUKA	SLABVLJENJE PRVOG BOČNOG LUKA [dB]	OPADANJE LUKOVA [dB / oktavi]
Pravougaona	$4\pi / N$	13.2	6

Trougaona	$8\pi / N$	26.6	12
Hanova	$8\pi / N$	31.2	18
Hemingova	$8\pi / N$	42.4	6
Blekmanova	$12\pi / N$	58	18
Kajzerova ($\beta = 4$)		31.2	6
Kajzerova ($\beta = 9$)		65.9	6
Dolf-Čebiševljeva			0
Dolf-Čebiševljeva			0

