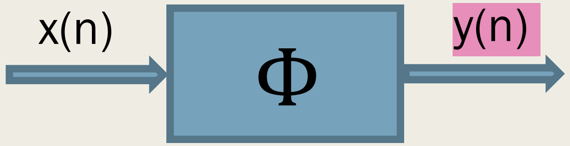
IIR DIGITALNI FILTERI

Primena DSP u upravljanju

IIR diskretni sistemi



- Rekurzivn sistemi opisani diferencnom jednačinom:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$

- a_k i b_k konstante koje definišu karakteristiku sistema
- Funkcija prenosa je sledećeg oblika:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

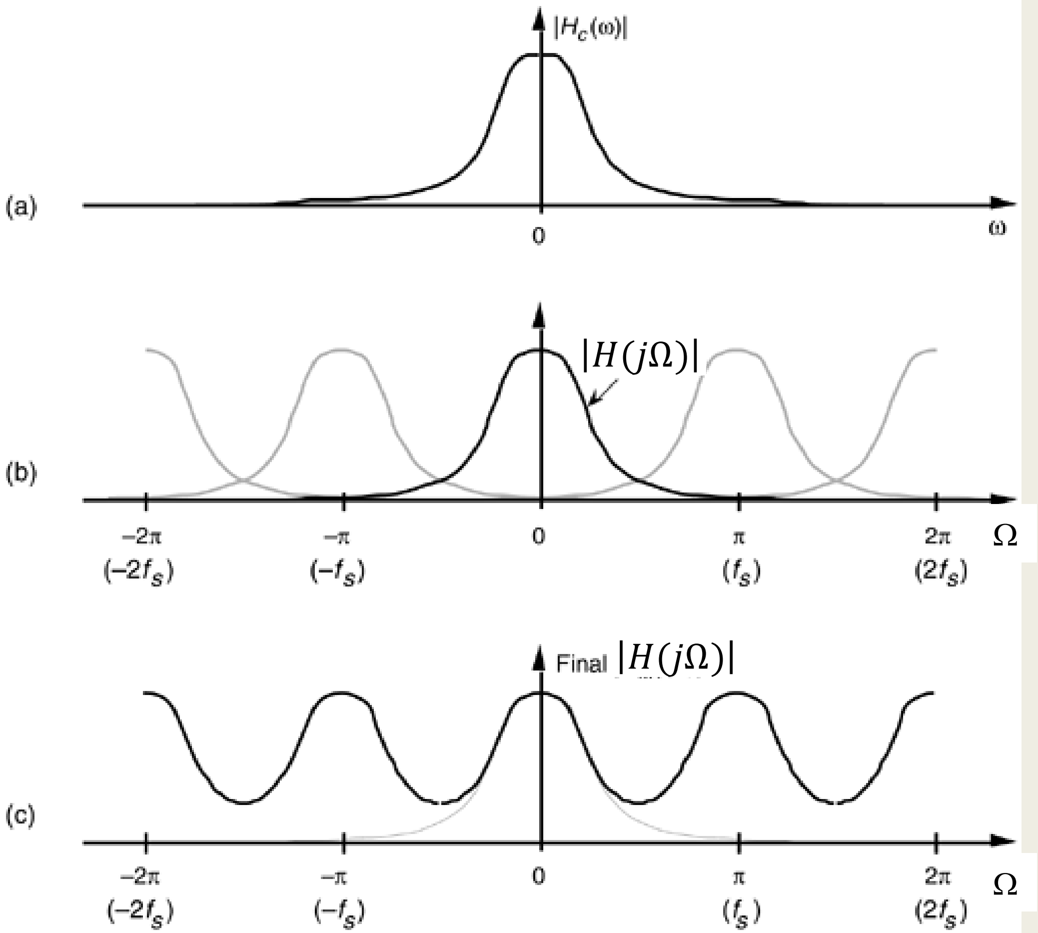
IIR digitalni filter

- Je IIR diskretni sistem
- Funkcija prenosa se najčešće dobija transformacijom analognog prototip filtera
- Analogni prototip filter je analogni filter koji najbolje aproksimira karakteristike željenog digitalnog filtera
- Analogno-digitalne transformacije funkciju prenosa kontinualnog sistema transformišu u funkciju prenosa diskretnog sistema
- Poželjne osobine transformacije:
  - ***Stabilan kauzalan analogni filter transformiše u stabilan kauzalan digitalni filter***
  - *Potrebno je da preslikava levu s poluravan unutar jediničnog kruga z ravni, a desnu poluravan s ravni izvan jediničnog kruga*
  - ***Zadržava neizmenjenu amplitudsku i faznu karakteristiku analognog filtera***
  - *Imaginarnu ($j\omega$) osu s ravni treba da linearno preslika na jedinični krug z ravni što nije moguće*

Impulsno invarijantna transformacija

- Zasniva se na diskretizaciji impulsnog odziva analognog prototip filtera $h_a(t)$
- $h(n) = T_o h_a(t)\Big|_{t=nT_o} = T_o h_a(nT_o)$
- $H(j\Omega) = T_o \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[j(\omega - k\omega_0)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[j(\frac{\Omega}{T_0} - k\frac{2\pi}{T_0})\right]$ jer je $\omega = \frac{\Omega}{T_0}$
- Ako je $H_a(j\omega) = 0\ za\ |\omega| \geq \frac{\pi}{T_0}$ frekvencijki odziv analognog prototipa je ograničen
- Tada je: $H(j\Omega) = H_a(j\omega) = H_a\left(j\frac{\Omega}{T_0}\right)$ za $|\Omega| \leq \pi$
- Frekvencijski odzivi analognog i digitalnog filtera se razlikuju samo za konstantu T_o kojom se skalira frekvencijska osa
- Ograničeno $H_a(j\omega)$ je teoretski moguće samo za NF i PO filtere tako da se ova transformacija može primeniti samo na njih
- U praksi ni ovi filteri nemaju ograničen frekvencijski odziv te dolazi do preklapanja frekvencijkog odziva prilikom diskretizacije

Frekvencijski odzivi analognog i digitalnog filtera



Analogni prototip

Preklapanje frekvencijkog odziva pri diskretizaciji

Impulsno invarijantna transformacija

- $H(z) \leftrightarrow H_a(s)$
- Rastavimo $H_a(s)$ na parcijalne razlomke, ako su polovi s_k realni i prosti važi:
- $\boldsymbol{H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{s - s_k}}$ $\quad h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_a(s)]$
- $h_a(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} R_k\, e^{s_k t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
- $h(n) = T_o h_a(nT_o) = \sum_{k=1}^{N} T_o R_k\, e^{s_k n T_o} u(n) = \sum_{k=1}^{N} T_o R_k\, [e^{s_k T_o}]^n u(n)$ Z transformacija
- $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = T_o \sum_{k=1}^{N} R_k \sum_{n=0}^{\infty} [e^{s_k T_o} z^{-1}]^n$
- $\boldsymbol{H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_o R_k}{1 - e^{s_k T_o} z^{-1}}}$
- Pol s_k iz s ravni preslikava se u pol $e^{s_k T_o}$ u z ravni, koeficijenti parcijalnih razlomaka se razlikuju za multiplikativni faktor T_o. Položaj nula se ne može odrediti na ovaj način.
- Ako je pol $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ stabilan znači da je $\sigma_k < 0$ tada je $|e^{s_k T_o}| = \left| e^{\sigma_k T_o} e^{j\omega_k T_o} \right| < 1$

Primer 1:

For the analog transfer function $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$
determine H(z) using impulse invariance method. Ass T=1sec.

Solution

Given $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$

Using partial fraction we can write

$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$= \frac{2}{s-(-1)} - \frac{2}{s-(-2)}$$

$$A = (s+1)\frac{2}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$B = (s+2)\frac{2}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2} = -2$$

Using impulse invariance technique we have, if

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s-p_k} \quad \text{then} \quad H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1-e^{p_k T} z^{-1}}$$

i.e., $(s-p_k)$ is transformed to $1-e^{p_k T}z^{-1}$.

There are two poles $p_1 = -1$ and $p_2 = -2$. So

$$H(z) = \frac{2}{1-e^{-T}z^{-1}} - \frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

For $T = 1$ sec

$$H(z) = \frac{2}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{2}{1-e^{-2}z^{-1}}$$

$$= \frac{2}{1-0.3678z^{-1}} - \frac{2}{1-0.1353z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.465z^{-1}}{1-0.503z^{-1}+0.04976z^{-2}}$$

Bilinearna transformacija

- Izbegava se preklapanje frekvencijkog odziva pri diskretizaciji
- Dolazi do nelinearnog sabijanja frekvencija imaginarna osa $-\infty < \omega < \infty$ preslikava se u segment diskretnih učestanosti $-\pi < \Omega < \pi$
- Bilinearna transformacija: $s = \frac{2}{T_o}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]$
- $H(z) = H_a\left\{\frac{2}{T_o}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]\right\}$
- Inverzna transformacija: $z = \frac{1+\frac{T_o}{2}s}{1-\frac{T_o}{2}s}$ odnosno $z = \frac{1+\frac{T_o}{2}(\sigma+j\omega)}{1-\frac{T_o}{2}(\sigma+j\omega)} = \frac{1+\sigma\frac{T_o}{2}+j\omega\frac{T_o}{2}}{1-\sigma\frac{T_o}{2}-j\omega\frac{T_o}{2}}$
- Pa važi: $\sigma < 0 \;\Rightarrow |z| < 1$; $\sigma > 0 \;\Rightarrow |z| > 1$
- Za $\sigma = 0 \;\Rightarrow |z| = 1$ važi $e^{j\Omega} = \frac{1+j\omega\frac{T_o}{2}}{1-j\omega\frac{T_o}{2}}$ pa je $\omega = \frac{2}{T_o}\tan\frac{\Omega}{2}$, odnosno $\Omega = 2\tan^{-1}\frac{\omega T_o}{2}$
- Odlična amplitudska karakteristika, ali nelinearna fazna karakteristika
- Ukoliko se zahteva očuvanje fazne karakteristike treba koristiti impulsno invarijantnu transformaciju umesto bilinearne

Bilinearna transformacija primena

- Ako je zadata specifikacija - gabarit **digitalnog filtera:** Ω_p i Ω_a
- Za svaku diskretnu učestanost Ω_i iz specifikacije se odredi ekvivalentna učestanost analognog prototipa filtera ω_i na sledeći način:

$$\omega_i = \frac{2}{T_o}\tan\frac{\Omega_i}{2} \qquad \text{predistorzija učestanosti}$$

- Projektuje se analogni prototip sa ovako zadatom specifikacijom i određuje se njegova funkcija prenosa
- Primenom bilinearne transformacije dobija se funkcija prenosa digitalnog filtera
- Granične učestanosti će biti na pozicijama koje su definisane u gabaritu digitalnog filtera
- Odlična amplitudska karakteristika, ali nelinearna fazna karakteristika
- Ukoliko se zahteva očuvanje fazne karakteristike treba koristiti impulsno invarijantnu transformaciju umesto bilinearne

Bilinearna transformacija primena

- Ako je zadata specifikacija - gabarit **analognog filtera:** ω_p i ω_a
- Određuje se funkcija prenosa analognog prototipa $H_a(s)$
- Bilinearna transformacija daje funkcija prenosa digitalnog filtera, ali pošto ne važi da je $\omega = \frac{\Omega}{T_0}$ već je $\omega = \frac{2}{T_o}\tan\frac{\Omega}{2}$ granične učestanosti ovako dobijenog filtera bi bile:
  $\Omega_p = 2\tan^{-1}\frac{\omega_p T_o}{2}$ i $\Omega_a = 2\tan^{-1}\frac{\omega_a T_o}{2}$ umesto $\Omega_p = \omega_p T_o$ i $\Omega_a = \omega_a T_o$
- Rešenje: pre bilinearne transformacije izvršiti NF-NF transformaciju kako bi pomerili $\omega_p \to \omega_{p1}$ i $\omega_a \to \omega_{a1}$ $\Omega_p = 2\tan^{-1}\frac{\omega_{p1} T_o}{2} = \omega_p T_o$ smenom $s \to s\frac{\omega_p}{\omega_{p1}}$ u $H_a(s)$
- Iz jednakosti $2\tan^{-1}\frac{\omega_{p1} T_o}{2} = \omega_p T_o \Rightarrow \frac{\omega_{p1} T_o}{2} = \tan(\frac{\omega_p T_o}{2})$ pa je $\omega_{p1} = \frac{2}{T_o}\tan(\frac{\omega_p T_o}{2})$
- Smena $s \to s\frac{\omega_p}{\omega_{p1}} = s\frac{\omega_p T_o}{2\tan(\frac{\omega_p T_o}{2})}$
- Nad tako dobijenom funkcijom prenosa primeni se bilinearna transformacija, odnosno promenljiva s se zameni sa izrazom: $s = \frac{2}{T_o}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]$

Primer 2:

Čebiševljev filter 3. reda $f_p = 1KHz,\ a_p \le 1dB$ frekvencija odabiranja $f_o = 8KHz$

$$H_a(s) = \frac{0.4913}{s^3+0.9883s^2+1.2384s+0.4913}$$

- $s \to s\frac{\omega_p}{\omega_{p1}} = s\frac{\omega_p T_o}{2\tan(\frac{\omega_p T_o}{2})} = s\frac{\pi f_p}{f_o \tan(\frac{\pi f_p}{f_o})}$ i $s = \frac{2}{T_o}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]$

Pa je ukupna smena $s \to \frac{2}{T_o}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]\frac{\pi f_p}{f_o \tan(\frac{\pi f_p}{f_o})} = \frac{2\pi f_p}{\tan(\frac{\pi f_p}{f_o})}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right] = 15.169\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]$

$$H(z) = 0.0211\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1-1.8664z^{-1}+1.4986z^{-2}-0.4637z^{-3}} \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)[1 - 1.8664z^{-1} + 1.4986z^{-2} - 0.4637z^{-3}] = X(z)[0.0211 + 0.0633z^{-1} + 0.0633z^{-2} + 0.0211z^{-3}]$$

$$y(n) = 0.0211x(n) + 0.0633x(n-1) + 0.0633x(n-2) + 0.211x(n-3) + 1.8664y(n-1) - 1.498y(n-2) + 0.4637y(n-3)$$

Korekcija fazne karakteristike

- $H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z)$ pa je $H(j\Omega) = H_{min}(j\Omega) \cdot H_{ap}(j\Omega)$
- $H_{min}(z)$ funkcija minimalne faze = sve nule i polovi se nalaze unutar jediničnog kruga. Tu spadaju funkcije prenosa filtera dobijene bilinearnom transformacijom
- Pošto je $\left|H_{ap}(j\Omega)\right| = 1$ amplitudska karakteristika je: $|H(j\Omega)| = |H_{min}(j\Omega)|$
- Zadatak optimizacije je: $\tau(\Omega) = \tau_{min}(\Omega) + \tau_{ap}(\Omega) = \tau_c = const$ u propusnom opsegu
- Odnosno: $\tau_{ap}(\Omega) = \tau_c - \tau_{min}(\Omega)$
- Koriste se numeričke optimizacione metode kako bi se prethodni zahtev približno zadovoljio, nemoguće je u potpunosti.
- Primer $H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1}-a_k}{1-a_k z^{-1}} \prod_{k=N_1}^{N_2} \frac{a_{2k}+a_{1k}z^{-1}+z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$