Optimizacija uz ograničenja tipa jednakosti, metodi smene i ograničene varijacije

Zoran D. Jeličić
Mirna N. Kapetina
19. oktobar 2022.

1 Uvodna razmatranja

U prethodnom poglavlju bavili smo se problemom slobodne optimizacije, gde promenljive stanja nisu bile pritisnute nikakvim ograničenjima. U okviru ovog poglavlja razmatraćemo jedan realističniji problem, gde su uvedena ograničenja [1] na promenljive stanja i ta ograničenja su postavljena u vidu jednakosti.

[1] Kao što ćete videti u nastavku teksta, ova ograničenja su po pravilu posledica fizičkih i logičkih zakonomernosti i njihovo postojanje u značajnoj meri utiče na studiju optimizacionog problema.

Problem optimizacije uz ograničenanja tipa jednakosti, može se formulisati na sledeći način, naći ekstrem funkcije

$$y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\ , \tag{1}$$

pri čemu promenljive stanja x_i moraju da zadovolje sledeći sistem jednačina

Ovaj skup ograničenja ćemo u daljem tekstu zapisivati kao $g_k(\mathbf{x}) = 0$ ili $g_k(x_i) = 0$ za $k = 1, \dots, m$ i $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0\\
&g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0\\
&\vdots\\
&g_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0\\
&\vdots\\
&g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0\ ,
\end{aligned} \tag{2}$$

gde mora da važi uslov $m < n$, odnosno da je broj ograničenja g_k strogo manji od broja promenljivih stanja x_i. Naime, ako taj uslov ne bi bio zadovoljen, rešavanjem sistema jednačina (2) mogli bi da odredimo sve promenljive stanja i tada nam ne bi preostao ni jedan stepen slobode, ni jedno x_i, čijom promenom bi mogli da dođemo do boljeg odnosno najboljeg mogućeg rešenja [2]. U nastavku teksta razmatraćemo četiri optimizaciona postupka, koja su karakteristična za ovu klasu problema, a to su: **metod smene**, **metod ograničene varijacije**, **metod Lagranževih množitelja** i **metod kaznenih funkcija**. U skladu

[2] Problem kod koga je $n \leq m$ naziva se predefinisani problem i za postupak optimizacije je potpuno besmislen.

sa ovom podelom su organizovani i paragrafi koji slede, neke od ovih postupaka prezentovaćemo, bez gubitka na opštosti, isključivo kroz primere, jer verujemo da je intuitivno razumevanje mnogo važnije od formalnih izvođenja.

1.1 *Metod smene*

Prvi korak u primeni ovog metoda jeste rešavanje sistema jednačina ograničenja (2) po m promenljivih, tako dobijena rešenja zamenjujemo[3] u kriterijum optimalnosti (1), kome se sada zbog unetih rešenja redukovala dimenzionalnost na $n-m$ promenljivih, pa kriterijum optimalnosti sada postaje

[3] Zato i naziv **metod smene**.

$$y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-m}) \,. \tag{3}$$

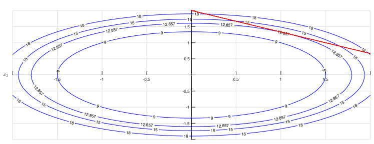
Dalje rešavanje se odvija po principima slobodne optimizacije, opisane u prethodnom poglavlju. Na prvi pogled ovaj postupak je veoma jednostavan, mada smo i intuitivno svesni da rešavanje sistema ograničenja (2) može biti skopčano sa poteškoćama. U nastavku teksta ćemo kroz primere ilustrovati neke prednosti i mane ove metode.

Primer 1. Metod smene, linearna ograničenja.

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \,.$$

promenljive x_1 i x_2 moraju da zadovolje ograničenje slika 1



Slika 1: Projekcija funkcije $y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$ i $2x_1 + 3x_2 = 6$ na ravan x_1, x_2

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \,.$$

Prateći predloženi formalizam **metoda smene** prvi korak je rešavanje ograničenja po jednoj promenljivoj npr. x_1

$$x_1 = \frac{6 - 3x_2}{2} \,.$$

Zamenom ovako dobijenog rešenja u kriterijum optimalnosti dobijamo

$$y = 4\left(\frac{6-3x_2}{2}\right)^2 + 5x_2^2 = 14x_2^2 - 36x_2 + 36 \,.$$

Dalje rešavanje je jednostavno, svodi se na traženje prvog i drugog izvoda za potrebne i dovoljne uslove respektivno, po preostaloj promenljivoj x_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_2} &= 28x_2 - 36 = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{36}{28} = 1.286 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} &= 28 > 0 \quad \text{tačka je minimum} \,. \end{aligned}$$

promenljivu x_1^* izračunavamo iz izraza za smenu kao $x_1^* = 1.071$. Minimalna vrednost kriterijuma optimalnosti je $y(x_1^*, x_2^*) = 12.857$. Kao što se vidi, primena metoda smene je jednostavna i pravolinijska u ovom jednostavnom slučaju.

Primer 2. Metod smene, nelinearna ograničenja.

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 \ .$$

promenljive x_1 i x_2 moraju da zadovolje ograničenje

$$g = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \ .$$

Inspekcijom ograničenja prirodno bi bilo uvesti smenu po promenljivoj x_1^2, međutim u prvom koraku mi smo se opredelili za smenu $x_2^2 = 1 - x_1^2$, tj $x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$. U ovom slučaju moguća su dva rešenja

1. $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$
$$y = \sqrt{1 - x_1^2} - x_1^2 \ .$$
U ovom slučaju može se pokazati da je stacionarna tačka $x_1^* = 0$ i odgovarajuća vrednost $x_2^* = 1$.

2. $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$
$$y = -\sqrt{1 - x_1^2} - x_1^2 \ .$$
Stacionarne tačke u ovom slučaju su $x_1^* = 0$ ($x_2^* = -1$) i $x_1^* = \pm = 0.866$ ($x_2^* = -0.5$).

Proverom mogućih rešenja, ustanovljavamo da sva zadovoljavaju ograničenje, a na osnovu drugih izvoda lako dobijamo karaktere stacionarnih tačaka.

Stacionarne tačke	1	2	3	4
x_1	0	0	0.866	−0.866
x_2	1	−1	−0.5	−0.5
y	1	−1	−1.25	−1.25
karakter	Maksimum	Maksimum	Minimum	Minimum

Tabela 1: Karakter stacionarnih tačaka

Na osnovu karaktera drugog izvoda i vrednosti funkcije, ustanovili smo da je **tačka 1** globalni maksimum, **tačka 2** lokalni maksimum, a da **tačka 3** i **tačka 4** predstavljaju globalni minimum.

Pretpostavimo sada da smo se opredelili za drugu smenu

$x_1^2 = 1 - x_2^2$, tada kriterijum optimalnosti postaje

$$y = x_2 - 1 + x_2^2 \,.$$

Iz potrebnih uslova ekstrema lako dobijamo da je $x_2^* = -0.5$ ($x_1^* = \pm 0.866$), a iz dovoljnih uslova da se radi o minimumu. Poređenjem dobijenih rezultata, uočavamo da ova smena nije obuhvatila sva moguća rešenja iz prethodnog primera, odnosno da je metod smene osetljiv na izbor promenljive po kojoj rešavamo optimizacioni problem u slučaju složenijih ograničenja. Rešenje koje nedostaje je očigledno maksimum (jer smo minimum našli) i to rešenje treba potražiti na granici [4]. U ovom konkretnom slučaju iz $x_1^2 = 1 - x_2^2$ nedvosmisleno sledi da je granična vrednost za promenljivu x_2 vrednost ± 1 i da je to baš vrednost, koja nam nedostaje iz Tabele 1.

[4] Činjenicu da se u optimizacionim problemima sa ograničenjima rešenje nalazi na granici sada prvi put napominjemo, u daljoj studiji složenijih ograničenja, linearnog programiranja pa i dinamičke optimizacije u duhu Pontrjagina ovo će biti polazna osnova pri iznalaženju optimalnih rešenja.

Rezimirajući ovaj paragraf i metod smene, treba reći da je u slučaju malog broja linearnih ograničenja ovaj metod lako primenjiv i predstavlja solidan optimizacioni postupak. Međutim, kada su ograničenja opisana nelinearnim jednačinama postupak je veoma osetljiv na izbor promenljivih po kojima se vrši optimizacija i u tim slučajevima se ne preporučuje, a pri primeni moraju se proveriti i svi granični slučajevi, koji mogu da ukažu na postojanje dodatnih mogućih rešenja.

Preformulisaćemo dobro poznatu rečenicu svi linearni sistemi liče jedni na druge, a da je nelinearni sistem nelinearan na svoj način. Čitaocima je poznato da opšta teroija nelinearnih jednačina ne postoji i da rešavanje sistema nelinearnih jednačina ne mora da garantuje egzistenciju rešenja, stoga je nelinearnost ključno ograničenje u primeni metoda smene.

1.2 *Metod ograničene varijacije*

U prethodnom paragrafu, koji je posvećen metodu smene, formalizam iznalaženja optimalnog rešenja podelili smo u dva koraka: prvi je izračunavanje m promenljivih iz ograničenja, a zatim, u drugom koraku, diferenciranje preostalih $n - m$ promenljivih. U slučaju da su ograničenja nelinearna, prvi korak se dramatično komplikuje, odnosno rešavanje sistema jednačina ne mora da vodi lako do rešenja optimizacionog problema. **Metod ograničene varijacije** suštinski ima obrnuti sled koraka: prvo diferenciramo i iz diferencijala izražavamo $n - m$ ”dozvoljenih” priraštaja promenljivih[5], a preostalih m rešenja nalazimo iz jednačina ograničenja. Prednost ovoga pristupa leži u činjenici da su prvih $n - m$ jednačina linearne po priraštajima promenljivih, što ih čini rešivim u duhu teorije lienarne algebre.

[5] Pretpostavljamo da su čitaoci familijarni sa pojmom priraštaj promenljivih dx_i, dozvoljeni priraštaj je onaj, koji zadovoljava i jednačine ograničenja, više detalja će biti dato u nastavku teksta.

Slično kao ranije počećemo našu studiju sa kriterijumom optimalnosti, koji zavisi od dve promenljive $y = y(x_1, x_2)$, a zatim ćemo slučaj uopštiti na slučaj većeg broja promenljivih. Cilj nam je naći ekstrem funkcije

$$y = y(x_1, x_2) \,, \tag{4}$$

pod uslovom da su promenljive stanja međusobno vezane sledećom relacijom

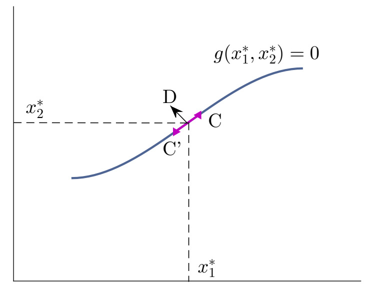
$$g(x_1, x_2) = 0 \,. \tag{5}$$

Ako je tačka (x_1^*, x_2^*) ekstrem funkcije, tada u toj tački važe potrebni uslovi ekstrema

$$dy = 0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 \,, \tag{6}$$

gde je dy totalni diferencijal funkcije, a ova relacija važi samo za dozvoljene priraštaje dx_1 i dx_2, slika 2. U tački ekstrema dodatno mora da važi $g(x_1^*, x_2^*) = 0$. Dozvoljeni priraštaji, moraju da obezbede da sva pomeranje iz tačke ekstrema $(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2)$ i dalje zadovoljavaju ograničenje

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0 \,. \tag{7}$$



Slika 2: Dozvoljene vrednosti priraštaja dx_i su one koje vode u tačke C i C′, jer u njima važi $g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0$. Priraštaji, koji bi vodili u tačku D nisu dozvoljeni jer se tačka nalaz van ograničenja $g(x_1, x_2) = 0$.

Razvojem u red izraza (7), uz male vrednosti dx_1 i dx_2, možemo zanemariti članove višeg reda, pa lako dobijamo

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \,, \tag{8}$$

Uz pretpostavku da je $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$ možemo izraziti dozvoljeni priraštaj dx_2 iz prethodnog izraza kao

$$dx_1 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} dx_2 \,. \tag{9}$$

Zamenom izraza (9) u (6) dobijamo

$$dy = 0 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) dx_2 \,. \tag{10}$$

Za proizvoljnu vrednost dx_1 jednakost (10) je zadovoljena samo pod pretpostvakom da je izraz u zagradi jednak nuli ili kada važi

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) = 0 \,. \tag{11}$$

Ovaj izraz (11) predstavlja **potrebne** uslove lokanog ekstrema funkcije dve promenljive, prilikom izračunavanja samih tačaka potrebno je uzeti u obzir i jednačinu ograničenja (5). Napominjemo da razmatranje dovoljnih uslova nije od interesa u našoj studiji. Izraz (11) može se zapisati u matričnoj formi, u formi Jakobijana[6]

$$J\left(\frac{y, g}{x_2, x_1} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix} \,, \tag{12}$$

pri čemu se uslov $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$, zapisuje $J(\frac{g}{x_1}) \neq 0$. U opštijem slučaju kada kriterijum optimalnosti zavisi od n promenljivih i m ograničenja u tački ekstrema važi

[6] Carl Gustav Jacob Jacobi (10 Decembar 1804 – 18 Februar 1851), nemački matematičar, mentor kolege iz prethodnog poglavlja.

$$
\begin{aligned}
& y = y(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\
& g_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \quad k = 1, \ldots, m \,.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Izraze (6) i (8) možemo uopštiti na sledeći način

$$
dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i = 0 \tag{14}
$$

i

$$
dg_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = 0 \,. \tag{15}
$$

Ponovo napominjemo su sa dx_i obeleženi dopustivi/dozvoljeni priraštaji, oni priraštaji, koji pri pomeranju iz tačke ekstrema obezebeđuju da je stalno zadovoljeno ograničenje $g_k(x_i) = 0$. Slično kao u (9). Iz m jednačina možemo izračunati isto toliko dozvoljenih priraštaja u sledećoj proceduri, jednačina (16) se može zapisati u formi

$$
\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} dx_j \quad \text{za} \quad k = 1, \ldots, m \tag{16}
$$

Slično, kao u slučaju dve promenljive, ako su jednačine (16) linearno nezavisne [7] tada možemo rešiti sistem od m dopustivih priraštaja u funkciji preostalih $n - m$ priraštaja. Uvrštavanjem tako dobijenog rešenja u (14) dobijamo

[7] Uslove linerane nezavisnosti se zapisuju u formi $J\left(\frac{g_1, g_2, \cdots g_m}{x_1, x_2, \ldots, x_m}\right) \neq 0$, videti uslov iz slučaja sa dve promenljive.

$$
dy = \frac{1}{J\left(\frac{g_1, g_2, \cdots g_m}{x_1, x_2, \ldots, x_m}\right)} \sum_{k=m+1}^{n} J_k\left(\frac{y, g_1, g_2, \cdots g_m}{x_k, x_1, x_2, \ldots, x_m}\right) dx_k = 0 \,, \tag{17}
$$

gde je

$$
J_k\left(\frac{y, g_1, g_2, \cdots g_m}{x_k, x_1, x_2, \ldots, x_m}\right) = \begin{vmatrix}
\frac{\partial y}{\partial x_k} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_m} \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}
\end{vmatrix} \,. \tag{18}
$$

Ako posmatramo izraz pod sumom u (17) očigledno je da za proizvoljne vrednosti dozvoljenih priraštaja jednakost može biti zadovoljena samo ako je

$$
J_k\left(\frac{y, g_1, g_2, \cdots g_m}{x_k, x_1, x_2, \ldots, x_m}\right) = 0 \quad \text{za} \quad k = m+1, m+2, \ldots, n \,. \tag{19}
$$

Jednačina (19) uz ograničenja

$$
g_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \quad k = 1, \ldots, m \,. \tag{20}
$$

predstavljaju potrebne uslove ekstrema funkcije više promenljivih sa ograničenjima tipa jednakosti. U nastavku ćemo kroz primere ilustrovati primenu metoda ograničene varijacije, iz pedagoških razloga smo jedan primer ostavili nerešen. Bilo bi nam izuzetno drago da ga sami rešite i javite nam rešenje, siguran sam da ćemo taj napor znati da cenimo.

Primer 3. Metod ograničene varijacije, dve promenljive, jedno ograničenje.

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \ .$$

promenljive x_1 i x_2 moraju da zadovolje ogrančenje

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \ .$$

Ovaj sistem ima dve promenljive $n = 2$ i jedno ograničenje $m = 1$, stoga nam je potrebna samo jedna Jakobijeva matrica, tj

$$J\left(\frac{y, g}{x_2, x_1}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10x_2 & 8x_1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20x_2 - 24x_1 = 0 \ .$$

Iz poslednjeg izraza lako izračunavamo da je $x_1 = \frac{5}{6}x_2$. Zamenom ovako dobijenog rešenja u jednačinu ograničenja

$$2\left(\frac{5}{6}x_2\right) + 3x_2 = 6 \ ,$$

dobijene su stacionarne tačke za ovaj problem $x_2^* = 1.286$ i $x_1^* = 1.071$.

Primer 4. Metod ograničene varijacije, tri promenljive, dva ograničenja.

Posmatrajmo linearni kriterijum optimalnosti sa tri promenljive stanja

$$y(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3 \ .$$

promenljive x_1, x_2, x_3 moraju da zadovolje ograničenja

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0 \\ g_2 &= 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem ima tri promenljive $n = 3$ i dva ograničenja $m = 2$, stoga nam je potrebna samo jedna Jakobijeva matrica dimenzija 3x3,

$$J\left(\frac{y, g_1, g_2}{x_3, x_2, x_1}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 6x_3 & 2x_1 & 4x_2 \\ -3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4x_1 - 164x_2 - 390x_3 = 0 \ .$$

Iz Jakobijana i jednačina ograničenja možemo izračunati stacionarne tačke

Stacionarne tačke	x_1	x_2	x_3	y
Tačka 1	0.947	0.207	-0.0772	5.08
Tačka 2	0.534	0.535	-0.219	-0.346

Tabela 2: Stacionarne tačake

Primer 5. Metod ograničene varijacije, zadatak za vežbu.

Kriterijum optimalnosti ima četiri promenljive stanja

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) \ .$$

promenljive x_1, x_2, x_3,x_4 moraju da zadovolje ograničenja

$$g_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$
$$g_2 = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

Odrediti stacionarne tačke, primenom metode ograničene varijacije.