Stabilnost diskretnih sistema

Mirna N. Kapetina
Zoran D. Jeličić

10. april 2020.

Stabilnost predstavlja jedno od osnovnih svojstava svakog dinamičkog sistema. Postoji veći broj formalnih definicija pojma stabilnosti. Kada su procesi nelinearni, pojam stabilnost ne možemo da vežemo za proces već za njegovu radnu tačku, i tada se on odnosi na sposobnost procesa da ostane u okolini tekuće mirne radne tačke nakon delovanja dovoljno malog poremećaja. Pod pojmom „poremećaja" podrazumeva se delovanje spoljašnjeg dejstva koje izvodi proces iz ravnotežnog stanja. Proces može posedovati više radnih tačaka od kojih su neke stabilne, a neke ne.

Formalno stabilnost diskretnih procesa može se definisati na više načina, kao što su stabilnost u smislu Ljapunova, asimptotska i eksponencijalna stabilnost, BIBO stabilnost, kao i druge. [1]

[1] Neke od pomenutih definicija ćemo samo formalno navesti, bez detaljnog objašnjavanja, a posebno će biti naglašene one od intresa za nastavak izlaganja.

Definicija 1. (*Stabilnost radne tačke diskretnog sistema u smislu Ljapunova*) Stanje (radna tačka) diskretnog sistema x_0 je *stabilno* ukoliko za proizvoljno malo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ postoji $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, takvo da važi

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \implies \|x(k) - x_0\| < \varepsilon \ \ (\forall k > 0)\ . \tag{1}$$

Drugim rečima, ukoliko je početno stanje procesa udaljeno od ravnotežnog stanja manje od δ, tada će celokupna daljnja trajektorija procesa biti unutar ε-okoline ravnotežnog stanja.

Definicija 2. (*Asimptotska stabilnost u smislu Ljapunova*) Stanje (radna tačka) diskretnog sistema x_0 je *asimptotski stabilna* ukoliko postoji pozitivan broj δ_1 takav da važi

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_1 \implies \lim_{k\to\infty} x(k) = x_0\ . \tag{2}$$

Drugim rečima, ukoliko je stanje sistema stabilno u smislu Ljapunova, i ukoliko se nakon delovanja dovoljno malog poremećaja proces vraća u ravnotežno stanje, tada je to stanje *asimptotski stabilno.* Ako se proces vraća u ravnotežno stanja bez obzira na intezitet poremećaja, tada kažemo da je radna tačka **globalno asimptotski stabilna**.

Definicija 3. (*Eksponencijalna stabilnost (u smislu Ljapunova)*) Stanje (radna tačka) diskretnog sistema x_0 je *eksponencijalno stabilno* ukoliko postoji pozitivan broj δ_2 i pozitivni brojevi M i $\lambda \in (0, 1)$ takvi da je

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_2 \implies \|x(k) - x_0\| < M\|x(0) - x_0\|\lambda^k \,. \quad (3)$$

Kao i u prethodnoj definiciji, ukoliko (3) važi bez obzira na intenzitet poremećaja, tada kažemo da je radna tačka **globalno eksponencijalno stabilna**.

U sklopu ovog kursa, akcenat je na diskretnim *linearnim* dinamičkim sistemima.

1 *Stabilnost linearnih diskretnih procesa*

U slučaju linearnih procesa, stabilnost nije svojstvo određene radne tačke, već svojstvo samog procesa. Otuda možemo govoriti o asimptotski stabilnim, granično stabilnim i nestabilnim linearnim procesima, bez specificiranja na koju se mirnu radnu tačku procesa pojam stabilnosti odnosi.

Bez obzira na vrednost spoljašnjeg ulaza, svaki asimptotski stabilan linearan proces je ujedno globalno stabilan. Podesećamo da je vremenski kontinualan sistem stabilan ako i samo ako sve njegove svojstvene vrednosti koje su ujedno i koreni karakterističnog polinoma, imaju negativan realni deo. U tom slučaju sopstveni odziv sistema, koji je određen svojstvima fundamentalne matrice sistema, iščezava tokom vremena.

Tako su i diskretni linearni procesi, kao i kontinualni, u potpunosti su određeni svojstvima karakteristične matrice [2], odnosno polovima sistema. Pod stabilnim sistemom podrazumeva se onaj čiji sopstveni odziv teži nuli, odnosni prelazni režim odziva iščezava tokom vremena.

[2] Pojam karakteristične ili svojstvene matrice sistema sada samo uvodimo, a u daljem gradivu će biti detaljno razmatran.

Ukoliko posmatramo sistem sa funkcijom prenosa

$$G(z) = \frac{z}{z - a} \quad (4)$$

njegov sopstveni odziv (impulsni odziv ili kernel sistema) je $g(k) = a^k h(k)$ koji će iščeznuti tokom vremena ukoliko je $|a| < 1$. Taj uslov proizilazi i kao rezultat preslikavanja stabilnih polova iz s-ravni u z-ravni, koji su se preslikali u jedinični krug, odnosno u oblast gde polovi imaju $|z| < 1$. Ukoliko proces ima višestruke polove,

$$G(z) = \frac{\cdots}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)} \tag{5}$$

svojstveni odziv ovakvog sistema je

$$g(k) = (c_1 a_1^k + c_1 a_2^k + \cdots + c_n a_n^k)h(k) \tag{6}$$

Da bi ovaj odziv iščezao, neophodno je da svaki sabirak ovog izraza iščezava da bi sistem bio stabilan, odnosno moduo svih polova mora biti manji od jedan, $|z_i| = |a_i| =< 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Definicija 4. (*Stabilnost linearnih, stacionarnih, vremenski diskretnih procesa*)

Ukoliko sve svojstvene vrednosti procesa (koreni karakterističnog polinoma, polovi) imaju moduo manji od jedan, tada je proces strogo stabilan. Ukoliko nema svojstvenih vrednosti van jedinične kružnice, a sve svojstvene vrednost na jediničnoj kružnici su jednostruke, tada je proces granično stabilan. Ukoliko proces poseduje bar jednu svojsvenu vrednost van jedinične kružnice, ili višestruke svojstvene vrednosti na kružnici proces je nestabilan.

Primer 1. Komentarisati stabilnost sledećih sistema:

a) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.3)}$
Rešenje:
Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$ *i* $z_2 = -0.3$, *moduo oba pola je manji od 1, odnosno sistem je* ***stabilan****.*

b) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.3)^2(z-1)}$
Rešenje:
Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$, *dvostruki pol* $z_{2,3} = -0.3$ *i* $z_4 = 1$, *moduo prva tri pola je manji od 1, ali se pol* z_4 *nalazi na jediničnoj kružnici pa je sistem* ***granično stabilan****.*

c) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.3)^2(z-1)^3}$
Rešenje:
Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$, $z_{2,3} = -0.3$, *ali i trostruki pol* $z_{4,5,6} = 1$ *koji je na granici stabilnosti. Pojava višestrukih polova na granici stabilnosti iako su ostali polovi stabilni prouzrokovaće da je sistem* ***nestabilan****.*

d) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+1.3)}$
Rešenje:
Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$ i $z_2 = -1.3$. Pol z_2 nalazi se van jedinične kružnice pa je sistem ***nestabilan****.*

Međutim, nije uvek jednostavno i očigledno odrediti polove sistema bez upotrebe softverskih alata namenjenih za rešavanje numeričkih problema. To nam se uvek dešava kada je red karakterističnog polinoma $n > 2$,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0 \, . \tag{7}$$

Tada se koriste različiti alati za analizu stabilnosti, odnosno postupci koji će nam reći kada su koreni ovog karakterističnog polinoma u jediničnom krugu, kao što su algebarski kriterijum (Jurijev, Rautov) ili grafo-analitički (Nikvistov kriterijum).

2 Jurijev kriterijum stabilnosti

Jurijev kriterijum stabilnost polazi od opšteg oblika karakterističnog polinoma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0 \tag{8}$$

na osnovu kog se formira Jurijeva tabela na sledeći način

	z^0	z^1	z^2	z^3	$\dots$	$\dots$	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3			a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	$\dots$	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	$\dots$	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\dots$	c_0		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$2n-3$	m_0	m_1	m_2				

Tabela 1: Jurijeva tabela

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \, , \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \, , \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \, .$$

$$k = 0, \dots, n-1 \quad k = 0, \dots, n-2 \quad k = 0, \dots, n-3$$

Prema Jurijevom kriterijumu stabilnosti, sistem će biti stabilan ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $f(1) > 0$
2. $(-1)^n f(-1) > 0$
3. $|a_0| < |a_n|$
4. $|b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, \ldots, |m_0| > |m_2|$

Jurijev test nam omogućava ispitivanje stabilnosti u zavisnosti i od nepoznatih parametra. Ukoliko jedan od uslova 1.-4. nije zadovoljen za sistem ne možemo tvrditi da li je stabilan, ali ne znamo da li je granično stabilan ili nestabilan.

Primer 2. Dat je sistem čiji je karakteristični polinom

$$f(z) = z^2 + az + b$$

U ravni parametara a x b odrediti oblast stabilnosti sistema.

Rešenje:
Sistem je drugog reda, $n = 2$, i formiraćemo Jurijevu tabelu,

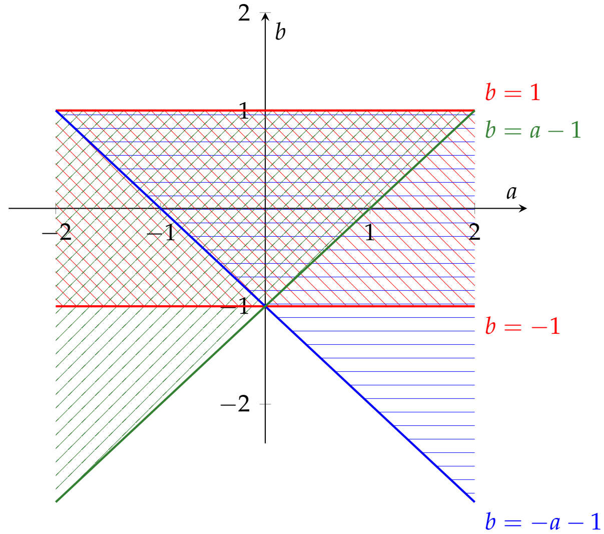
	z^0	z^1	z^2
1	b	a	1

Kako već u prvoj vrsti tabele imamo 3 elementa, dalje se tabela ne popunjava.

Uslovi stabilnosti:

1) $f(1) > 0 \implies 1 + a + b > 0 \implies b > -a - 1$
2) $(-1)^2 f(-1) > 0 \implies 1 - a + b > 0 \implies b > a - 1$
3) $|b| < 1 \implies -1 < b < 1$

Dobijeni uslovi su predstavljeni grafički na slici 1. Za svaku odabranu kombinaciju parametara a i b iz oblasti trougla koji je dobijen kao presek uslova Jurijevog kriterijuma, sistem će biti stabilan.



Slika 1: Oblast stabilnosti iz primera 2.