Frekvencijske karakteristike i Bodeovi dijagrami

Zoran D. Jeličić
Jovana Arsenović
Aleksandra Mitrović
7. novembar 2022.

0.1 Uvod

Posmatrajmo linearni stacionarni sistem opisan funkcijom prenosa G(s). Bodeovi dijagrami omogućavaju analizu sistema u frekvencijskom domenu, pa se kompleksna promenljiva s zamenjuje sa $j\omega$. Kada se na ulaz prethodno definisanog linearnog sistema $G(s)$ dovede prostoperiodični signal, amplitude A i učestanosti ω, na izlazu se takođe dobija prostoperiodični signal ali sa promenjenom amplitudom i fazno je pomeren. Te promene amplitude i faze zavise od ulaznog signala i samog sistema G(s), a njihovu analizu omogućavaju Bodeovi dijagrami.

1 Zadaci

1. Sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2}.$$

Nacrtati Bodeove dijagrame za dati sistem.
Rešenje.
Prelaskom u frekvencijski domen kompleksna promenljiva s se menja sa $j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+3}{j\omega(j\omega+1)^2}.$$

Prvi korak je normalizacija datog izraza:

$$G(j\omega) = 3\frac{j\frac{\omega}{3}+1}{j\omega(j\omega+1)^2}.$$

Moduo ovako dobijenog izraza, izražen u decibelima, je:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log 3 + 20\log\sqrt{(\frac{\omega}{3})^2+1} - 20\log\omega - 40\log\sqrt{\omega^2+1}. \tag{1}$$

Dobijeni izraz se teško može precizno nacrtati zbog nelinearnosti koje se javljaju. Zbog toga se vrši aproksimacija, odnosno crta se asimptotski, a ne realni Bodeov dijagram. Aproksimacija u konkretnom primeru vrši se na sledeći način: posmatramo izraz $20\log\sqrt{(\frac{\omega}{3})^2+1}$, gde možemo zaključiti da će za $\omega > 3$ dominantan član u izrazu ispod korena biti $(\frac{\omega}{3})^2$, pa će se celokupni prethodno spomenuti izraz aproksimirati sa $20\log\sqrt{(\frac{\omega}{3})^2}$. U suprotnom, kada je $\omega < 3$, dominantan član u izrazu ispod korena je 1, pa se aproksimacija prethodnog izraza vrši na sledeći način $20\log\sqrt{1}=0$. Na isti način se vrši aproksimacija i za ostale nelinearne sabirke koje čine (1). U skladu sa tim, određuju se i prelomne učestanosti:

$$\omega_1 = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$\omega_2 = 3\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Na osnovnu datih prelomnih učestanosti mogu da se definišu 3 segmenta na osnovu kojih se crtaju Bodeovi dijagrami:
I segment: $\omega < 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log 3 - 20\log\omega$$
$$|G(0.1j)|_{dB} = 20\log 3 - 20\log 0.1 = 29.54\text{dB}$$
$$|G(1j)|_{dB} = 20\log 3 - 20\log 1 = 9.54\text{dB}$$

II segment: $1\frac{\text{rad}}{\text{s}} < \omega < 3\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log 3 - 20\log\omega - 40\log\omega$$
$$|G(1j)|_{dB} = 29.54\text{dB}$$
$$|G(3j)|_{dB} = 20\log 3 - 20\log 3 - 40\log 3 = -19.08\text{dB}$$

III segment: $\omega > 3\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log 3 + 20\log\frac{\omega}{3} - 20\log\omega - 40\log\omega$$
$$|G(3j)|_{dB} = -19.08\text{dB}$$
$$|G(10j)|_{dB} = 20\log 3 + 20\log\frac{10}{3} - 20\log 10 - 40\log 10 = -40\text{dB}$$
$$|G(100j)|_{dB} = 20\log 3 + 20\log\frac{100}{3} - 20\log 100 - 40\log 100 = -80\text{dB}$$

Na osnovu navedenih izraza crta se asimptotski amplitudski Bodeov dijagram. Da bi se nacrtao fazni Bodeov dijagram neophodno je izračunati argument funkcije prenosa:

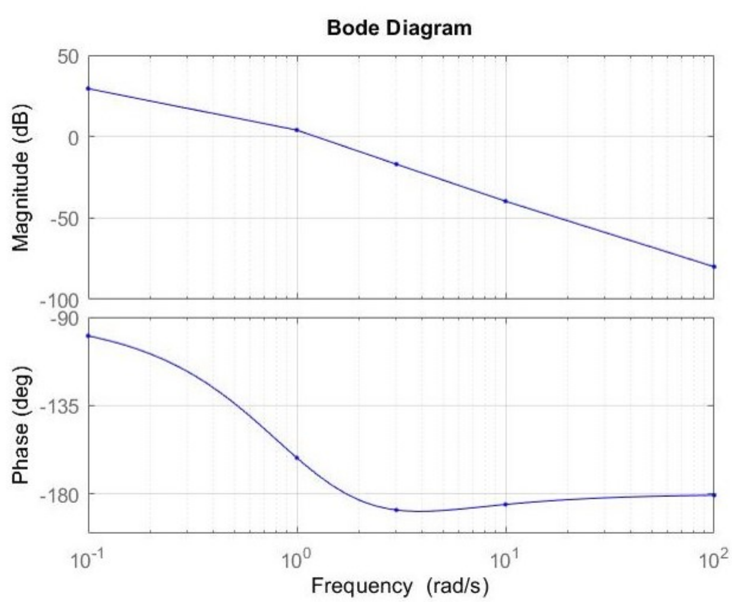
$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = arctg\frac{\omega}{3} - \frac{\pi}{2} - 2arctg\omega$$

Za nekoliko učestanosti, a obavezno za prelomne, se izračuna vrednost argumenta:

$\omega(\frac{\text{rad}}{\text{s}})$	ArgG(jω)(°)
0.1	-99.51
1	-161.56
3	-188.13
10	-185.27
100	-180.57

Na osnovu izraza za argument crta se fazni Bodeov dijagram.

Slika 1: Bodeovi dijagrami



Na slici 1 su prikazani Bodeovi dijagrami, asimptotski amplitudski i fazni dijagrami. Važno je uočiti da je osa na kojoj je prikazana frekvencija u logaritamskoj razmeri (ekvivalentno

rastojanje između dekada).Bitno je podsetiti se i da pol sistema obara amplitudsku karakteristiku za 20 dB po dekadi, dok nula podiže karakteristiku za 20 dB po dekadi.
Na osnovu vrednosti preteka pojačanja i preteka faze može se komentarisati stabilnost sistema u negativnoj zatvorenoj sprezi. Pretek pojačanja određujemo na učestanosti na kojoj fazna karakteristika seče osu od $-180°$, dok se pretek faze određuje na učestanosti na kojoj amplitudska karakteristika seče osu ω. Ukoliko su i pretek pojačanja i pretek faze pozitivni, za takav sistem kažemo da je stabilan. Ukoliko su i pretek faze i pretek pojačanja manji od nule, za takav sistem kažemo da je nestabilan.

2. Za sistem opisan funkcijom prenosa iz prethodnog zadatka proceniti signal na izlazu iz sistema u ustaljenom stanju ukoliko je pobudni signal

$$u(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Rešenje.
Na osnovu ulaznog signala učestanosti $3\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i amplitude 2, izlazni signal je oblika:

$$y(t) = 2|G(j\omega)|\sin\left(3t + \frac{\pi}{3} + \text{Arg}\{G(j\omega)\}\right).$$

Vrednosti za moduo i argument su izračunati u prethodnom zadatku, a mogu se očitati i sa amplitudske i fazne frekvencijske karakteristike:

$$|G(3j)|_{dB} = -19.08\text{dB}$$
$$|G(3j)| = 10^{\frac{1}{20}(-19.08)} = 0.1112$$
$$\text{Arg}\{G(3j)\} = -188.13°\frac{\pi}{180°} = -3.2835.$$

Na kraju, izlazni signal je:

$$y(t) = 2\cdot 0.1112\sin\left(3t + \frac{\pi}{3} - 3.2835\right)$$
$$y(t) = 0.2224\sin(3t - 2.2363).$$

3. Sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)^2}.$$

Proceniti signal na izlazu iz sistema u ustaljenom stanju ukoliko je pobudni signal

$$u(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + 3\cos(4t).$$

Rešenje.
Odziv sistema se može odrediti kao zbir pojedinačnih odziva na prostoperiodične komponente ulaznog signala:

$$y(t) = |G(1j)|\sin\left(t - \frac{\pi}{3} + \mathrm{Arg}\{G(1j)\}\right) + 3|G(3j)|\sin\left(4t + \mathrm{Arg}\{G(4j)\}\right)$$

Moduo i argument računamo prema sledećim izrazima:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega(\omega^2+4)}$$
$$\mathrm{Arg}\{G(j\omega)\} = \pi - \mathrm{arctg}\omega - \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\frac{\pi}{2}$$

Učestanosti koje se javljaju u ulaznom signalu su $1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ i $4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, pa je potrebno odrediti vrednost modua i argumenta na tim učestanositma:

$$|G(1j)| = \frac{\sqrt{1+1}}{1(1+4)} = \frac{\sqrt{2}}{5} = 0.2828$$
$$|G(4j)| = \frac{\sqrt{17}}{4(16+4)} = 0.0515$$
$$\mathrm{Arg}\{G(1j)\} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(1) - 2\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = -0.1419$$
$$\mathrm{Arg}\{G(4j)\} = -1.9693$$

Na kraju, odziv sistema je definisan je sledećim izrazom:

$$y(t) = 0.2828\sin(t - 0.9273) + 0.1545\cos(4t - 1.9693).$$

4. Sistem automatskog upravljanja je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Izabrati strukturu regulatora tako da sistem u nagativnoj povratnoj sprezi ima nultu grešku u ustaljenom stanju ($e_{ss} = 0$) na konstantan ulazni signal i odrediti vrednosti parametara regulatora tako da pretek pojačanja bude veći od 10 dB.
Rešenje.
Kako na ulazu imamo konstantan signal a u sistemu astatizam, da bi greška u ustaljenom stanju bila nula, nije nam potrebno da regulator ima integralno dejstvo, dakle dovljan nam je P regulator. Funkcija prenosa P regulatora je:

$$G_{reg}(s) = K_p$$

Funkciju povratnog prenosa sistema izračunaćemo kao proizvod funkcije prenosa regulatora i funkcije prenosa procesa a to je dato sledećim izrazom:

$$W_p(s) = K_p \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

odnosno,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_{reg}(s)G(s)} = \frac{1}{1 + Kp\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}$$
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + Kp}$$

Konačni izraz za Lasplasovu transformaciju signala greške je:

$$E(s) = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + Kp} R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + Kp} \frac{1}{s}$$

Sada kada imamo izraz za Laplasovu transformaciju signala greške, možemo da primenimo graničnu teoremu, odnosno da napišemo izraz za računanje greške u ustaljenom stanju.

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{s(s+s)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + K_p} \frac{1}{s} = 0$$

Dobijanjem nulte greške u ustaljenom stanju zadovoljen je prvi kriterijum i pokazano je da je izabrani P regulator ispunjava traženi zahtev. Sledeći korak jeste da odredimo parametre tog regulatora, odnosno K_p. Prema drugom kriterijumu zadatka, K_p treba da bude takvo da nam pretek pojačanja bude veći od 10 dB.
Podsetićemo se kako se računa pretek pojačanja prema definiciji

$$\frac{1}{d} = |G(j\omega_\pi)|$$

gde ω_π predstavlja presečnu učestanost preteka pojačanja, koju dobijamo iz sledećeg uslova:

$$\mathrm{Arg}\{G(j\omega_\pi)\} = -\pi$$

Prvi korak jeste prelazak u frekvencijski domen, odnosno kompleksu promenljivu s menjamo sa $j\omega$.

$$W_p(j\omega) = K_p \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

Presečnu učestanost preteka pojačanja funkcije prenosa, kako smo malo pre spomeuli, dobijamo iz izraza za argument koji izjednačavamo sa $-\pi$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Arg}\{G(j\omega_\pi)\} = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\omega_\pi - \mathrm{arctg}\frac{\omega_\pi}{2} \\
-&\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\omega_\pi - \mathrm{arctg}\frac{\omega_\pi}{2} = -\pi \\
&\mathrm{arctg}\omega_\pi + \mathrm{arctg}\frac{\omega_\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\
&\mathrm{arctg}\frac{\omega_\pi + \frac{\omega_\pi}{2}}{1 - \frac{\omega_\pi^2}{2}} = \frac{\pi}{2} \\
&1 - \frac{\omega_\pi^2}{2} = 0 \\
&\omega_\pi^2 = 2 \\
&\omega_\pi = \sqrt{2}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Sada kada je određena presečna učestanost preteka pojačanja, možemo da odredimo pretek pojačanja, preko koga ćemo kasnije odrediti parametar regulatora. Pretek pojačanja se računa prema formuli:

$$\frac{1}{d} = |W_p(j\omega_\pi)|.$$

Odnosno, moduo računamo kao:

$$\begin{aligned}
|W_p(j\omega)| &= \frac{K_p}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \\
|W_p(j\omega_\pi)| &= \frac{K_p}{\sqrt{2}\sqrt{2+1}\sqrt{2+4}} = \frac{K_p}{6},
\end{aligned}$$

odnosno za pretek pojačanja dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d} &= \frac{K_p}{6} \\
d &= \frac{6}{K_p}.
\end{aligned}$$

Kako je u uslovu zadatka dat pretek pojačanja u dB, neophodno je te dB konvertovati u apsolutne jedinice.

$$\begin{aligned}
d_{dB} &> 10 \\
d &> \sqrt{10}
\end{aligned}$$

Sada je konačno moguće odrediti vrednost parametra K_p.

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{K_p} > \sqrt{10} \\
&6 > K_p\sqrt{10} \\
&K_p < \frac{6}{\sqrt{10}} \\
&K_p < 1.8974
\end{aligned}$$

5. Dat je signal $f(t) = \sin(10t) + \cos(10000t)$. Projektovati filtar koji propušta samo korisni deo signala.
Rešenje.
Dati signal se sastoji iz dve prostoperiodične komponente, jedna je na $10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ a druga je na $10000\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Brzopromenljive komponente, komponente na visokim učestanostima najčešće predstavljaju šum, nepoželjni signal. Dakle korisni deo signala je na nižim frekvencijama i filtar koji projektujemo treba da bude propusnik niskih učestanosti.
Dakle, želimo da projektujemo filtar koji propušta (sa jediničnim pojačanjem u apsolutnim jedinicama ili nultim pojačanjem u dB) niske komponente do $10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a nakon te učestanosti slabi signal (odnosno pojačava signal sa negativnim pojačanjem):

$$G(s) = K\frac{1}{s+10}$$

Da bismo izvršili projektovanje filtra do kraja, neophodno je da odredimo K. Za početak ćemo preći u kompleksni domen i izvršiti normalizaciju funkcije prenosa:

$$G(j\omega) = K\frac{1}{j\omega+10}$$
$$G(j\omega) = \frac{\frac{K}{10}}{j\frac{\omega}{10}+1}$$

Pojačanje, odnosno moduo ove funkcije izraženo u decibelima se računa na osnovu sledećeg izraza:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\frac{K}{10} - 20\log\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1}$$

Pojačanje na frekvencijama ispod $10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ želimo da bude 0db, odnosno jedinično pojačanje u apsolutnim jedinicama:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\frac{K}{10} = 0$$

Odnosno, dobijamo sledeće vrednosti:

$$20\log\frac{K}{10} = 0$$
$$\log\frac{K}{10} = 0$$
$$\frac{K}{10} = 10^0 = 1$$
$$K = 10$$

Sada kada imamo i vrednost za K, možemo da definišemo konačno kako glasi funkcija prenosa našeg NF filtra.

$$G(s) = \frac{10}{s+10}$$

Na kraju, proveramo koliko će ovako projektovani filtar da oslabi signal na frekvenciji $10000\frac{\text{rad}}{\text{s}}$:

$$|G(10000j)|_{dB} = 20\log\frac{10}{10} - 20\log\frac{10000}{10} = -20\log 10^3 = -60\text{dB}$$
$$|G(10000j)| = 10^{\frac{1}{20}(-60)} = 10^{-3} = 0.001.$$