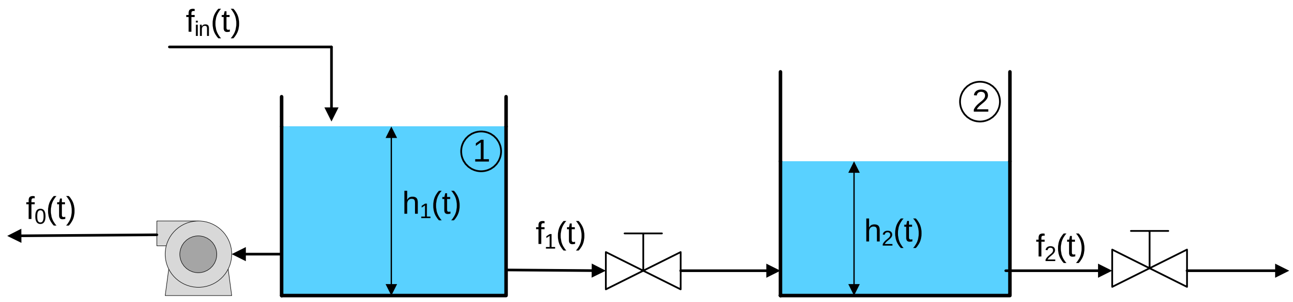
1 Linearizacija modela ventila[1]



Pad pritiska ($\Delta P(t)$) na ventilu između dva rezervoara je jednak razlici između ulaznog ($P_u(t)$) i izlaznog ($P_i(t)$) pritiska

$$\Delta P(t)=P_u(t) - P_i(t) = (P_a + \rho g h_1(t)) - (P_a + \rho g h_2(t)) \qquad 1.1$$

gde je: $P_a(t)$ – atmosferski pritisak; $\rho g h_1(t)$ – hidrostatički pritisak i rezervoaru 1; $\rho g h_2(t)$ - hidrostatički pritisak i rezervoaru 2; ρ – specifična masa fluida [kg/m^3]; g – gravitaciono ubrzanje 9,81 [m/s^2]; h – nivo fluida u rezervoaru [m].

Protok kroz ventil (f_v) je definisan sledećim izrazom

$$f_V = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}} \qquad 1.2$$

gde je: C_v – konstrukciona konstanta ventila (tablični podatak) $\left[\frac{m^3}{s\sqrt{Pa}}\right]$; ΔP – pad pritiska na ventilu [Pa];

G_f – relativna gustina fluida u odnosu na gustinu vode na 4°C $\left(G_f = \frac{\rho_{fluida}\left[\frac{kg}{m^3}\right]}{\rho_{H_2O}\left[\frac{kg}{m^3}\right]} \right)$.

Protok kroz ventil 1 ($f_1(t)$) je

$$f_1(t) = C_{V1}\sqrt{\frac{\rho g(h_1(t) - h_2(t))}{G_f}} = C^*_{V1}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}\ , \qquad 1.3$$

a kroz ventil 2 ($f_2(t)$)

$$f_2(t) = C_{V2}\sqrt{\frac{\rho g h_2(t)}{G_f}} = C^*_{V2}\sqrt{h_2(t)} \qquad 1.4$$

1.1 Linearizacija

Linearizacija nelinearne funkcije $f(x(t))$ se vrši njenim razvijanjem u Tejlorov red u okolini radne tačke $(\bar{x})$

$$f(x(t)) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} (x(t) - \bar{x}) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\bar{x}} (x(t) - \bar{x})^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{\bar{x}} (x(t) - \bar{x})^3 + \dots \qquad 1.5$$

Uobičajeno se uzimaju samo prva dva člana reda

[1] C.A. Smith, A.B.Corripio; Principles and practice of automatic control, John Wiley and Sons, 1997, pp. 145-147

$$f(x(t)) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \left(x(t) - \bar{x}\right) \qquad 1.6$$

što predstavlja linearnu zavisnost.

Sada je moguće napisati izraz za male promene $\Delta f(t)$ i $\Delta x(t)$ u okolini radne tačke $\left(\bar{x}\right)$

$$f(x(t)) - f(\bar{x}) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \left(x(t) - \bar{x}\right) \qquad 1.7$$

odnosno

$$\Delta f(x(t)) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \Delta x(t). \qquad 1.8$$

Izraz (1.1) predstavlja linearizovani model funkcije $f(x(t))$. Radi jednostavnijeg zapisivanja, iz prethodnog izraza se izostavlja Δ, tako da linearizovani model poprima oblik

$$f(x(t)) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} x(t). \qquad 1.9$$

Naravno, mora se voditi računa da je prethodno napisani izraz (1.8) <u>linearizovani model</u> i da je on validan samo u okolini radne tačke $\left(\bar{x}\right)$.

U konkretnom slučaju koji se razmatra, radna tačka je definisana nivoom vode rezervoarima *1* i *2*: $\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)$.
Razmatra se dvodimenzionalni prostor i linearizacija se vrši određivanjem koeficijenata po h_1 i h_2. Izraz za linearizaciju modela (1.3) je

$$f_1(t) = \bar{f}_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_{\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)} \left[h_1(t) - \bar{h}_1\right] + \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_{\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)} \left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.10$$

Uvrštavanjem izraza za $f_1(t)$ iz (1.3) u (1.10) sledi

$$f_1(t) = \bar{f}_1 + \left.\frac{\partial\left(C_{V1}^{*}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)_1}\right)}{\partial h_1}\right|_{\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)} \left[h_1(t) - \bar{h}_1\right] + \left.\frac{\partial\left(C_{V1}^{*}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}\right)}{\partial h_2}\right|_{\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)} \left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.11$$

Nakon određivanja prvih izvoda je

$$f_1(t) = \bar{f}_1 + \left.\frac{C_{V1}^{*}}{2\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}\right|_{\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)} \left[h_1(t) - \bar{h}_1\right] + \left.\frac{-C_{V1}^{*}}{2\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}\right|_{\left(\bar{h}_1;\bar{h}_2\right)} \left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.12$$

Uvodeći smenu

$$C_1 = \frac{C_{V1}^{*}}{2\sqrt{\bar{h}_1(t) - \bar{h}_2(t)}}, \qquad 1.13$$

Izraz (1.12) se može napisati kao

$$f_1(t) = \bar{f}_1 + C_1\left[h_1(t) - \bar{h}_1\right] - C_1\left[h_2(t) - \bar{h}_2\right] \qquad 1.14$$

ili

$$f_1(t) - \bar{f}_1 = C_1\left[h_1(t) - \bar{h}_1\right] - C_1\left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.15$$

Obzirom da linearizovani model važi za male promene signala u okolini stacionarnog stanja, na osnovu izraza (1.7) i (1.8), izraz (1.15) se može zapisati u obliku

$$\Delta f_1(t) = C_1 \Delta h_1(t) - C_1 \Delta h_2(t)\,. \qquad 1.16$$

Uobičajeno je da se u linearizovanom modelu izostavlja Δ (izraz (1.9)), tako da je konačan oblik linearizovanog modela ventila 1

$$f_1(t) = C_1\left(h_1(t) - h_2(t)\right). \qquad 1.17$$

Slično prethodnom izvođenju za ventil 1, za ventil 2 se može pisati

$$f_2(t) = \bar{f}_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_{(\bar{h}_1;\bar{h}_2)} \left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.18$$

$$f_2(t) = \bar{f}_2 + \left.\frac{\partial\left(C^*_{V2}\sqrt{h_2(t)}\right)}{\partial h_2}\right|_{(\bar{h}_1;\bar{h}_2)} \left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.19$$

$$f_2(t) = \bar{f}_2 + \left.\frac{C^*_{V2}}{2\sqrt{h_2(t)}}\right|_{(\bar{h}_1;\bar{h}_2)} \left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.20$$

Uvodeći smenu

$$C_2 = \frac{C^*_{V2}}{2\sqrt{\bar{h}_2(t)}}\,, \qquad 1.21$$

Izraz (1.20) se može napisati kao

$$f_2(t) = \bar{f}_2 + C_2\left[h_2(t) - \bar{h}_2\right] \qquad 1.22$$

ili

$$f_2(t) - \bar{f}_2 = C_2\left[h_2(t) - \bar{h}_2\right]. \qquad 1.23$$

Na kraju

$$\Delta f_2(t) = C_2 \Delta h_2(t)\,, \qquad 1.24$$

odnosno,

$$f_2(t) = C_2 h_2(t)\,. \qquad 1.25$$