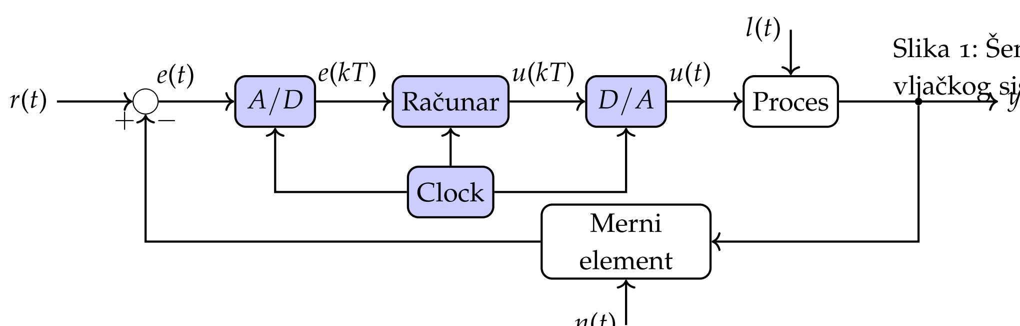
Digitalni ekvivalent funkcije prenosa i algebra funkcije diskretnog prenosa

Zoran D. Jeličić
Mirna N. Kapetina
15. maj 2020.

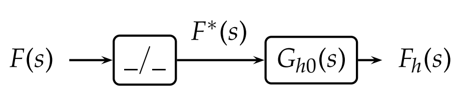
1 Uvodna razmatranja

U okviru ovog poglavlja cilj nam je da zaokružimo postupak matematičkog modelovanja elemenata i fenomena u kolu digitalnog upravljačkog sistema, slika 1.



Slika 1: Šema digitalnog upravljačkog sistema

Da podsetimo, prvo smo matematički opisali postupak A/D i D/A konverzije. Pod pretpostavkom da se radi o idealnom odabiraču i kolu zadrške nultog reda respektivno, dobili smo sledeći prikaz u formi funkcije prenosa



$$G_{h0}(s) = \frac{F_h(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-sT}}{s} \;, \qquad (1)$$

gde je $G_{h0}(s)$ oznaka za funkciju prenosa kola zadrške nultog reda (D/A konvertor), a $F^*(s)$ [1] je kompleksni izlaz idealnog odabirača (A/D konvertor).

Isto tako, u prethodnim poglavljima analizirali smo i načine diskretizacije kontinualnih algoritama upravljanja i kao konačan rezultat

[1] Podsećamo, da smo $F^*(s)$ nazvali kompleksni like povorke odbiraka ili *zvezda transformacija* i da je definisana na sledeći način

$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\mathrm{e}^{-skT}$.

Isto tako podsećamo da smo uveli $\mathfrak{Z}$ transformaciju na sledeći način

$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$.

Sličnost između ova dva izraza je više nego očigledna i lako se ustanovljava veza između dve kompleksne promenjive s i z u sledećoj formi

$z = e^{sT}$.

U prethodnim poglavljima je dublje objašnjena veza između ove dve kompleksne promenjive i na to se nećemo vraćati. Međutim, sa stanovišta ovog poglavlja važno je primetiti da je veza između *zvezda* i $\mathfrak{Z}$ transfomracije prirodna i da se iz domena *zvezda* transformacije, opisanog nelinearnom zavisnošću po kompleksnoj promenjivoj s u z domen prelazi jednostavnom smenom

$F(z) = F^*(s)\big|_{z=e^{sT}}$.

Ova veza između $F^*(s)$ i $F(z)$ je ključna u daljoj matematičkoj studiji u okviru ovog poglavlja.

svih postupaka diskretizacije, dobijali smo *funkciju diskretnog prenosa* regulatora [2] kao odnos kompleksnog izlaza iz računara $U(z)$ i kompleksnog ulaza u računar $E(z)$ odnosno

$$G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \,, \tag{2}$$

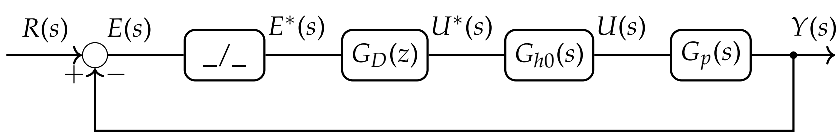
gde smo sa $G_D(z)$ obeležili funkciju diskretnog prenosa regulatora, odnosno zakona upravljanja. U daljem tekstu ćemo se držati ove notacije, ali napominjemo da ćemo u nekim slučajevima iz razloga lakšeg objašnjavanja ili jednostavnijeg prikaza koristiti i $G_R(z)$ i $D(z)$ za opis rada regulatora u diskretnom domenu.

[2] Radi potpunosti treba reći, da smo se mi do sada bavili samo diskretizacijom kontinualnih zakona upravljanja. Postoje i algoritmi upravljanja, koji se dobijaju direktno u diskretnoj formi i oni će biti predmet poglavlja, koji slede

Pretpostavimo da je funkcije prenosa procesa[3] sa slike 1 $G_p(s)$. Takođe za trenutak, bez gubitka na opštosti, zanemarimo šum merenja $n(t)$ i poremećaj $l(t)$. Uz usvojene matematičke modele A/D i D/A konverzije [4] i diskretnom funkcijom prenosa regulatora, principska šema sa slike 1 može da se transformiše na sledeći način

[3] Podsećamo da *Proces* objedinjuje svu kontinualnu dinamiku objekta upravljanja, izvršnog organa...

[4] Iz dosadašnjeg teksta jasno je da je funkcija *Clock* inherentno usvojena u matematičkim modelima konverzije i regulatora



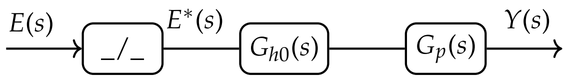
Slika 2: Blok dijagram digitalnog upravljačkog sistema modelovan funkcijama prenosa

Lako je primetiti da smo na slici 2 pretpostavili jediničnu dinamiku merenog elementa u povratnoj sprezi. Složeniju dinamiku ovog dela upravljačkog sistema, razmatraćemo u drugom delu ovog poglavlja.

Važno je primetiti sledeće: prisustvo idealnog odabirača i kola zadrške nultog reda ograničavaju dinamiku odziva $Y(s)$ tj. $y(t)$, jer promene na ulazu u funkciju prenosa procesa $G_p(s)$ nisu proizvoljne, nego su moguće samo u trenucima odabiranja (zbog odabirača), a između trenutaka odabiranja ulazne vrednosti su nepromenjive (zbog kola zadrške nultog reda). Odnosno, funkcija prenosa $G_p(s)$ vidi promene ulaza svakih T sekundi što čini i njegovu dinamiku na neki način diskretnom. Sa druge strane, izračunavanje funkcije povratnog prenosa[5] može biti skopčano sa velikim poteškoćama zbog raznorodne dinamike elemenata direktne grane (kontinualne i diskretne). Vrednujući obe ove činjenice, da je dinamika odziva praktično određena samo u trenucima odabiranja, a da je kombinacija diskretnih i kontinualnih elemenata matematički zahtevna, imalo bi puno smisla kontinualne elemente direktne grane svesti na diskretan oblik i analizu sistema u potpunosti svesti na alate i postupke karakteristične za diskretne sisteme. U postupku prevođenja kontinualnih elemenata direktne grane u diskretan oblik, očigledno funkcija **diskretnog** prenosa regulatora nije od interesa, već su od interesa druge dve funkcije

[5] U ovom slučaju jedinične povratne sprege, to bi bio proizvod svih elemenata u direktnoj grani, kao odnos $Y(s)/E(s)$

prenosa u kontinualnom obliku G_{h0} i $G_p(s)$. Odnosno, pokušaćemo da nađemo funkciju diskretnog prenosa sistema, koji bi u otvorenoj sprezi (direktnoj grani) izgledao kao na slici 3.



Slika 3: Direktna grana digitalnog upravljačkog sistema

Kao što je već rečeno, u nastavku nam je cilj da nađemo odnos kompleksnog izlaza i kompleksnog ulaza u z domenu sistema sa slike 3, odnosno $\frac{Y(z)}{E(z)}$ što bi predstavljalo *digitalni ekvivalent funkcije prenosa procesa* $G_p(s)$.

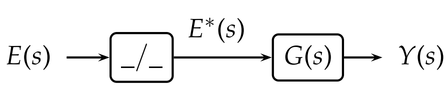
2 Digitalni ekvivalent funkcija prenosa

Obratimo pažnju na sliku 3, u direktnoj grani posle odabirača logično dolazi kolo zadrške, jer jedino kontinualni signal možemo da dovedemo na ulaz funkcije prenosa $G_p(s)$. Odnosno, postojanje odabirača nameće postojanje kola zadrške i ta dva elementa predstavljaju neraskidivu celinu i kao takvi su u ranijim poglavljima modelovani. Ovu činjenicu, ma koliko trivijalno izgledala, moramo napomenuti da bi izbegli nedoumice i zaista razumeli sve postupke u nastavku teksta.

Uputno bi bilo grupisati dve funkcije prenosa u njihov ekvivalent, odnosno zapisati kao

$$G(s) = G_{h0}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_p(s) \ . \tag{3}$$

Koristeći izraz (3), slika 3 sada dobija sledeću formu[6]



Dalje je jasno da se odziv sistema $Y(s)$ izračunava kao

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \ . \tag{4}$$

Pod pretpostavkom da se $y(t)$ može izračunati u svim trenucima odabiranja i na osnovu *osobine kompleksnog lika povorke odbiraka* dobijamo sledeći izraz

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s) = \big(G(s)E^*(s)\big)^* \ , \tag{5}$$

[6] Ova forma prikaza je dosta važna i često se sreće u literaturi. Naime, ako posle odabirača nije eksplicitno uveden blok kola zadrške nultog reda, tada se **podrazumeva** da kolo zadrške postoji i da se inhrentno nalazi u okviru prve kontinualne funkcije prenosa posle odabirača. U suprotnom takav blok dijagram ne bi imao smisla.

gde je ω_s učestanost odabiranja. Ovaj prelaz iz izraza (4) u izraz (5) može se opisati kao: *primenili smo zvezda transformaciju na levu i desnu stranu izraza* (4). Daljom transformacijom jednačine (4) dobijamo

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s) E^*(s + jk\omega_s) \; , \tag{6}$$

poštujući osobine periodičnosti kompleksnog lika povorke odbiraka, odnosno ranije dokazanu činjenicu da je

$$E^*(s + jk\omega_s) = E^*(s) \; , \tag{7}$$

izraz (6) postaje

$$Y^*(s) = E^*(s) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s) = E^*(s) G^*(s) \; . \tag{8}$$

Koristeći dobro poznatu vezu između izraza $E^*(s)$ i $E(z)$, logično sledi da je

$$Y(z) = E(z) G(z) \; , \tag{9}$$

gde je $G(z)$ funkcija diskretnog prenosa, koja predstavlja digitalni ekvivalent funkcije prenosa *procesa* $G_p(s)$. Kao što se vidi iz izraza (9) $G(z)$ opisuje ponašanje sistema u diskretnim vremenskim trenucima, kao odnos kompleksnog lika povorke odbiraka sa izlaza i ulaza sistema [7]. Da bi ilustrovali teorijska razmatranja izneta u okviru ovog poglavlja, iznećemo jedan primer izračunavanja digitalnog ekvivalenta funkcije prenosa procesa. Napominjemo da je primer od velike važnosti za dalje razumevanje gradiva i od suštinskog značaja u studiji praktičnih problema. Dobra vest je da je matematički aparat za rešavanje ovih problema, već ranije razmatran u studiji diskretizacije filtara pod drugim imenom, pa neće biti većih problema u rešavanju ovih zadataka.

[7] Ovaj pristup izračunavanja funkcije diskretnog prenosa je opšti po karakteru i polazi od osobina *zvezda transformacije*. Ceo postupak se može u opštem slučaju opisati na sledeći način. Pretpostavimo da su veze između funkcija kompleksnih promenjivih

$$A(s) = B(s)F^*(s)$$

gde je $F^*(s) = f(0) + f(T)e^{-sT} + f(2T)e^{-2sT} + f(3T)e^{-3sT}$.... Tada, ako primenimo *zvezda transformaciju* na levu i desnu stranu prethodnog izraza, dobijamo

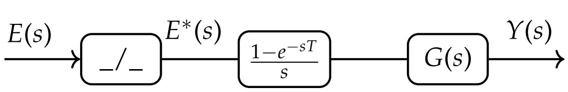
$$A^*(s) = B^*(s)F^*(s),$$

odnosno, koristeći dobro poznatu vezu $()^*$ i $\mathfrak{Z}$ transformacije, direktno dobijamo

$$A(z) = B(z)F(z),$$

gde je $B(z) = \mathfrak{Z}\big(B(s)\big)$, a $F(z) = F^*(s)|_{z=e^{sT}}$.

Primer 1 (Digitalni ekvivalent funkcije prenosa procesa)**.** Cilj nam je da konkretizujemo izračunavanje funkcije diskretnog prenosa, za sistem sa slike



Prateći formalizme date izrazima (4) do (9) možemo lako izvesti sledeće

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) E^*(s) \; ,$$

primenom $()^*$ transformacije na levu i desnu stranu izraza dobija se

$$Y^*(s) = \Big(\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\Big)^* E^*(s)\ .$$

Koristeći direktnu vezu između $()^*$ i $\mathfrak{Z}$ transformacije[8] dobija se

$$Y(z) = \mathfrak{Z}\Big(\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\Big)E(z)\ ,$$

[8] Podsećamo da je $\mathfrak{Z}$ transformacija definisana nad vremsnkim domenom, a da je direktna primena $\mathfrak{Z}$ transformacije na kompleksne promenjive, samo kraća forma zapisivanja.

uvođenjem smene $z = e^{sT}$ možemo pojednostaviti prethodni izraz

$$Y(z) = (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right)E(z)\ .$$

Ako uvedemo oznaku $G_s(s) = \frac{G(s)}{s}$ logički sledi

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\big(G_s(s)\big)\ .$$

Konačno digitalni ekvivalent funkcije prenosa *procesa* se izračunava na sledeći način

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\big(G_s(s)\big) = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\ . \tag{10}$$

Izraz (10) je centralni za izračunavanje digitalnog ekvivalenta funkcije prenosa. Pažljivom posmatraču neće promaći činjenica da je izraz (10) u potpunosti ekvivalentan jednačini po kojoj se izračunava diskretni ekvivalent, koji čuva odziv na step pobudu[9]. Odnosno izraz (10) je jednačina koju smo izveli u poglavlju *Step invarijantna diskretizacija*.

[9] Ova ekvivalencija izraza za izračunavanje digitalnih ekvivalenata dovodi do toga da se ova dva postupka, ponekad u literaturi ne razdvajaju i nazivaju jedinstveno *step invarijantna diskretizacija*. Međutim bez obzira na isti krajnji rezultat, početne pretpostavke i postupak izvođenja se ipak suštinski razlikuju.

Pretpostavimo dalje da je funkcija prenosa $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}\ ,$$

tada se u skladu sa izrazom (10) dobija

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\ .$$

Detaljno izvođenje prethodnog izraza, kao i MATLAB implementaciju možete naći u drugom primeru poglavlja o diskretizaciji digitalnih regulatora.

U nastavku teksta, pažnju ćemo posvetiti algebri funkcije diskretnog prenosa, odnosno rešavanju sistema složene strukture, koja uključuje povratnu spregu i višestruku A/D i D/A konverziju.

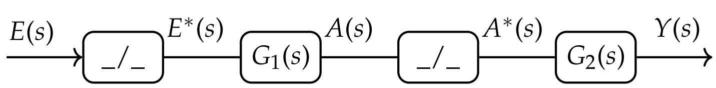
3 Algebra funkcije diskretnog prenosa

Pretpostavljamo da su čitaoci upoznati sa osnovnim principima i pravilima izračunavanja ekvivalenta funkcije prenosa, funkcije povratnog prenosa i funkcije spregnutog prenosa u kontinualnom domenu. Međutim pored osnovnih pravila o rednoj, paralelnoj ili povratnoj vezi između blokova funkcija prenosa u diskretnom domenu je od izuzetne važnosti analizirati i položaj A/D i D/A konvertora u kolu. Pokazaće se da je izračunavanje ekvivalenta funkcije prenosa znatno složenije nego kod kontinualnih sistema, a da veoma često i pored jednostavne strukture blok dijagrama nije uvek moguće.

3.1 Algebra funkcije diskretnog prenosa u otvorenoj povratnoj sprezi

U okviru ovog poglavlja razmotrićemo tri tipska primera za izračunavanje funkcije diskretnog prenosa u otvorenoj povratnoj sprezi. Ova tri primera su reprezentativna i pokrivaju najčešće scenarije u studiji diskretnih sistema u otvorenoj sprezi i/ili direktnoj grani.

Posmatrajmo diskretni sistem strukture kao na slici 4.



Slika 4: Algebra funkcije prenosa diskretnog sistema u otvorenoj sprezi, prvi slučaj.

Gde su $G_1(s)$ i $G_2(s)$ kontinualne funkcije prenosa koje sadrže i kolo zadrške nultog reda, kao što je detaljno objašnjeno u prethodnom paragrafu. Sa slike 4 je lako uspostaviti sledeće relacije

$$A(s) = G_1(s)E^*(s) \,, \tag{11}$$

iz koje se na osnovu izraza (4) do (9) dobija

$$A(z) = G_1(z)E(z) \,. \tag{12}$$

Na identičan način izračunavamo

$$Y(s) = G_2(s)A^*(s) \,, \tag{13}$$

odnosno

$$Y(z) = G_2(z)A(z) \,. \tag{14}$$

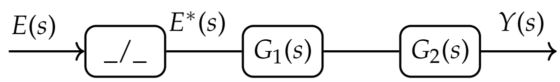
Konačno vezu između diskretnog izlaza $Y(z)$ i diskretnog ulaza $E(z)$ dobijamo kao

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)E(z) \,, \tag{15}$$

Odnosno ekvivalenta funkcije prenosa $G(z)$, kao odnos kompleksnog izlaza i ulaza $\frac{Y(z)}{E(z)}$ izračunava se po sledećem obrascu

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) \,, \tag{16}$$

Drugi tipski primer, koji ćemo razmatrati, pretpostavlja strukturu sistema kao na slici



Slika 5: Algebra funkcije prenosa diskretnog sistema u otvorenoj sprezi, drugi slučaj.

Gde su $G_1(s)$ i $G_2(s)$ kontinualne funkcije prenosa, ali prateći logiku iz prethodnog paragrafa samo funkcije prenosa $G_1(s)$ sadrži kolo zadrške nultog reda. Sa slike 5 se lako izračunava

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)E^*(s) \,. \tag{17}$$

Primenom *zvezda* transformacije na levu i desnu stranu izraza (17) dobijamo

$$Y^*(s) = \Big(G_1(s)G_2(s)\Big)^* E^*(s) \,. \tag{18}$$

Za izračunavanje izraza (18) korišćena osobina *zvezda* transformacije objašnjena u prethodnom paragrafu u izrazima (6) do (8). Primenom ekvivalencije $\mathfrak{Z}$ i *zvezda* transformacije dobijamo

$$Y(z) = \mathfrak{Z}\Big(G_1(s)G_2(s)\Big)E(z) \,, \tag{19}$$

izraz (19) se može zapisati i u kompakatnijoj formi

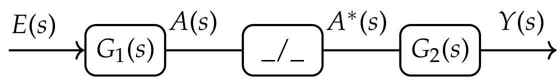
$$Y(z) = \underline{G_1G_2}(z)E(z) \,. \tag{20}$$

Podvučeni izraz $\underline{G_1G_2}(z)$ označava da se prvo pomnože $G_1(s)G_2(s)$ pa se traži $\mathfrak{Z}$ transformacija proizvoda. Odnosno, ekvivalentna funkcija prenosa $G(z)$, koja daje odnos kompleksnog izlaza i ulaza $\frac{Y(z)}{E(z)}$ sada je

$$G(z) = \underline{G_1G_2}(z) \,. \tag{21}$$

Poređenjem izraza (16) i (21) jasno je da se ne radi o istim izrazima, $G_1(z)G_2(z) \neq \underline{G_1G_2}(z)$, odnosno da u zavisnosti od broja i položaja odabirača zavisi izgled funkcije diskretnog prenosa. Ovakva nejednoznačnost nije postojala kod kontinualnih sistema, što studiju diskretnih sistema čini značajno složenijom.

U trećem tipskom slučaju diskretnog sistema u otvorenoj sprezi, struktura sistema je u sledećem obliku



Slika 6: Algebra funkcije prenosa diskretnog sistema u otvorenoj sprezi, treći slučaj.

Sa slike je jasno da važe sledeće relacije

$$Y(s) = G_2(s)A^*(s)\ , \tag{22}$$

i

$$A(s) = G_1(s)E(s)\ . \tag{23}$$

Primenom *zvezda* transformacije na izraz (23) dobijamo

$$A^*(s) = \Big(G_1(s)E(s)\Big)^*\ , \tag{24}$$

a daljom zamenom izraza (24) u (22) sledi

$$Y^*(s) = \Big(G_1(s)E(s)\Big)^* G_2^*(s)\ , \tag{25}$$

Konačno, dobro poznatom vezom između *zvezda* i $\mathfrak{Z}$ transformacije izraz (25) postaje

$$Y(z) = \mathfrak{Z}\Big(G_1(s)E(s)\Big)^* G_2(z) = \underline{G_1E}(z)G_2(z)\ . \tag{26}$$

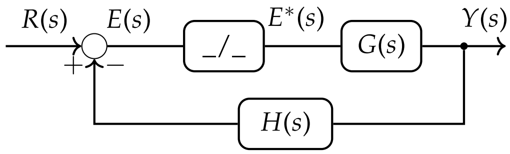
Iz izraza (26) nedvosmisleno sledi da eksplicitna veza između kompleksnog ulaza $E(z)$ i kompleksnog izlaza $Y(z)$ u formi funkcije diskretnog prenosa **ne postoji**. Odnosno, $E(s)$ nije moguće samostalno „diskretizovati", već samo kao deo proizvoda sa $G_1(s)$, što je očigledno posledica položaja idealnog odabirača u kolu. Ovaj zaključak, da funkcija diskretnog prenosa ne mora da postoji, je jako važan u našoj daljoj studiji digitalnih upravljačkih sistema. Napominjemo, ovo praktično znači da je moguće izračunati odziv sistema $Y(z)$, ali ne i na primer analizirati karaktersitike sistema na osnovu položaja polova funkcije diskretnog prenosa.

U nastavku teksta razmatraćemo algebru funkcije prenosa sistema, koji se opisuju u formi povratne sprege.

3.2 *Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezi*

U okviru ovog poglavlja razmotrićemo tri tipska primera za izračunavanje funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezi. Ova tri primera su reprezentativna i pokrivaju najverovatnije scenarije u studiji diskretnih sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi.

Počećemo našu studiju od sistema, koji je prikazan na slici 7



Slika 7: Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezi, prvi slučaj

Gde je naravno $G(s)$ proširena sa kolom zadrške nultog reda. Sa slike 7 lako se mogu postaviti sledeće relacije

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \;, \tag{27}$$

i vezu koja opisuje povratnu spregu

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \;. \tag{28}$$

Zamenom izraza (27) u (28), lako se dobija

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \;, \tag{29}$$

primenom *zvezda* transformacije na izraze (27) i (29) sledi

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s) \;, \tag{30}$$

i

$$E^*(s) = R^*(s) - \Big(G(s)H(s)\Big)^* E^*(s) \;. \tag{31}$$

Koristeći vezu između *zvezda* i $\mathfrak{Z}$ transformacije, izraz za grešku (31) postaje

$$E(z) = R(z) - \underline{GH}(z)E(z) \;, \tag{32}$$

odnosno dobijamo važan izraz za grešku sistema kao

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + \underline{GH}(z)} \;. \tag{33}$$

Konačno, veza kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ dobija se kombinovanjem izraza (33) i (30) kao

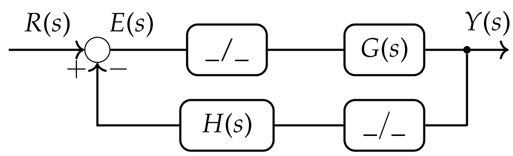
$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + \underline{GH}(z)} R(z) \;. \tag{34}$$

Ekvivalentna funkcija spregnutog prenosa $W_s(z)$ kao odnos kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ dobija se u sledećoj formi

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + \underline{GH}(z)} \;. \tag{35}$$

Druga dva tipska slučaja za izračunavanje funkcije diskretnog prenosa sistema sa zatvorenom povratnom spregom, nećemo detaljno izvoditi. Mislimo da su dosadašnja izvođenja dovoljna da ih čitalac sam savlada, a mi ćemo ih dati u svom konačnom obliku.

Drugi tipski primer je dat na slici 8, napominjemo da obe funkcije prenosa $G(s)$ i $H(s)$ moraju da sadrže u sebi kola zadrške nultog reda.



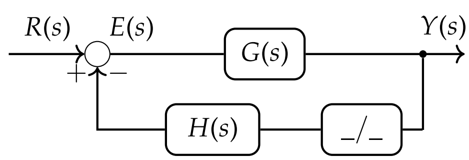
Slika 8: Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezi, drugi slučaj

Ekvivalentna funkcija spregnutog prenosa $W_s(z)$ kao odnos kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ dobija se u sledećoj formi

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \ . \tag{36}$$

Jasno je da je postojanje odabirača u povratnoj sprezi, uzrokovalo razdvajanje funkcija prenosa $G(z)$ i $H(z)$, sličan primer imali smo u studiji problema u otvorenoj povratnoj sprezi i nećemo ga posebno objašnjavati.

Treći tipski primer je dat na slici 9, kao što je i logično funkcija prenosa $H(s)$ sadrži u sebi kolo zadrške nultog reda.



Slika 9: Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezi, treći slučaj

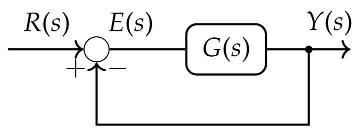
Ekvivalentna funkcija spregnutog prenosa $W_s(z)$ kao odnos kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ **ne postoji**, ali se može izračunati zavisnost izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ u sledećoj formi

$$Y(z) = \frac{\underline{GR}(z)}{1 + \underline{GH}(z)} \ . \tag{37}$$

Jedna lična napomena autora, ako ste u stanju da samostalno da izračunate izraze (36) i (37), mislimo da ste ovu lekciju uspešno savladali.

Na kraju pažnju čitalaca, usmeravamo na jedan veoma važan primer. Kroz ovaj primer, jasno će se uočiti razlika između kontinualnih sistema i ograničenja, koja se nameću posle postupka diskretizacije. Prema iskustvu autora, razumevanje principa i načina razmišljanja, koja se uvode u okviru ovog primera, može puno pomoći u inženjerskoj praksi.

Primer 2 (Analiza stabilnosti digitalnog ekvivalenta)**.** Počećemo našu studiju od kontinualnog sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi, prikazanog na slici 10



Slika 10: Blok dijagram kontinualnog sistema

Funkcija prenosa sistema $G(s)$ je poznata i zadata kao

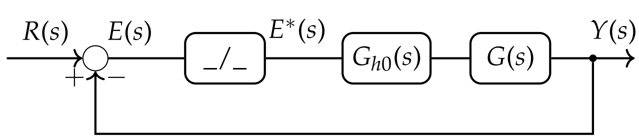
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} ,$$

Za analizu stabilnosti kontinualnog sistema sa slike potrebna nam je karakteristična jednačina sistema, koja se za ovaj sistem sa jediničnom povratnom spregom izračunava kao

$$1 + G(s) = s^2 + s + K = 0 .$$

Analizom stabilnosti, na osnovu karakteristične jednačine, lako dobijamo da je kontinualni sistem stabilan za svako $K > 0$.

Pretpostavimo sada sledeće, diskretizovaćemo signal greške idealnim odabiračem i odmah zatim ćemo ga preko kola zadrške nultog reda vratiti u kontinualni domen. Kao što je objašnjeno ranije, diskretizacija podrazumeva gubitak dela informacija i prelazak u diskretan domen analize. Matematički, to bi značilo izračunavanje digitalnog ekvivalenta funkcije prenosa $G(s)$, zatim odgovarajuće funkcije spregnutog prenosa i karakterističnog polinoma diskretnog sistema. Analiza stabilnosti bi bio poslednji korak u našoj studiji. Diskretni sistem, na način kako smo ga opisali uz A/D i D/A konverziju izgleda kao na slici 11.

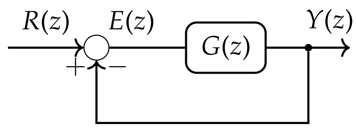


Slika 11: Blok dijagram digitalnog sistema

Upućujemo čitaoca na prethodni primer ili na poglavlje *Digitalni ekvivalent funkcije prenosa*, odakle se jasno vidi da se digitalni ekvivalent funkcije prenosa $G(s)$ izračunava na sledeći način

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left(\frac{K}{s^2(s+1)}\right).$$

Uvođenjem digitalnog ekvivalemta $G(z)$ sistem sa slike 11 se sada može predstaviti na sledeć način, slika 12



Slika 12: Blok dijagram diskretnog sistema - digitalni ekvivalent

Digitalni sistem predstavljen slikom 12 je sada osnova dalje analize diskretnog sistema. Prvi korak u analizi, je dalje izračunavanje funkcije diskretnog prenosa $G(z)$

$$\begin{aligned}
G(z) =& \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left(\frac{K}{s^2(s+1)}\right) = K\frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \\
=& K\frac{z-1}{z}\left(\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right) \\
=& K\frac{(T-1-e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}.
\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da je vreme odabiranja $T = 1s$, tada $G(z)$ postaje

$$G(z) = K\frac{0.3679z + 0.2642}{(z-0.3679)(z-1)}.$$

Karakteristični polinom [10] je imenilac funkcije spregnutog prenosa, odnosno

[10] Analogno, izračunavanju karakterističnog polinoma kontinualnog sistema $1 + G(z)$

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = K\frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K}.$$

Karakteristična jednačina potrebna za analizu stabilnosti sistema je

$$f(z) = z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K = 0.$$

Kao se radi o polinomu drugog reda, analiza stabilnosti primenom Jurijevog kriterijuma je znatno olakšana i svodi se na sledeće

1. $f(1) > 0$ ili $1 + (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K > 0$, što se svodi na uslov $K > 0$

2. $(-1)^2 f(-1) > 0$ ili $1 - (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K > 0$, što se svodi na $K < 26.382$

3. $|0.3679 + 0.2642K| < 1$, što se svodi na $-5.1755 < K < 2.3925$

Objedinjući ova tri uslova Jurijevog kriterijuma, dobijamo da pojačanje mora da bude u opsegu $0 < K < 2.3925$, da bi diskretni sistem bio stabilan. Podsećamo da je odgovarajući kontinualan sistem bio stabilan za svako $K > 0$.

Rezimirajući ovaj primer, primećeujemo da smo od početnog apsolutno stabilnog kontinualnog sistema $K > 0$, uvođenjem A/D i D/A konverzije, bez ikakve dodatne obrade signala, dobili uslovno stabilan sistem, sa veoma uskim dozvoljenim opsegom za pojačanje $0 < K < 2.3925$. Sem u nekim specijalnim slučajevima[11], ovo je markantna osobina diskretnih sistema, da imaju suženi opseg parametara, koji opredeljuju stabilnost sistema. Primera radi, zamislite da smo za kontinualni slučaj, dobili željeno ponašanje sistema za parametar $K = 3$, ako bi zadržali istu vrednost paramtera i posle diskretizacije[12] dobili bi smo nestabilan sistem. U inženjerskoj praksi, posebno ako vreme odabiranja nije dovoljno malo, ovo može da predstavlja veliki problem. Odnosno, ako vreme odabiranja nije dovoljno malo, analogija ponašanja kontinualnih i diskretnih sistema je prilično narušena i mora se zaista voditi računa o dozvoljenom opsegu parametara.

Kako smo više puta spomenuli pojam „dovoljno malo vreme odabiranja", čitaocu ostavljamo da ponovi analizu stabilnosti iz ovog primera za $T = 0.1s$ i izvede zaključke samostalno.

[11] Ovi specijalni slučajevi, nisu od posebnog značaja i više predstavljaju matematički trik, nego pravilo.

[12] Na primer, uveli smo digitalni regulator, koji ima samo proporcionalno dejstvo.