Amperov zakon

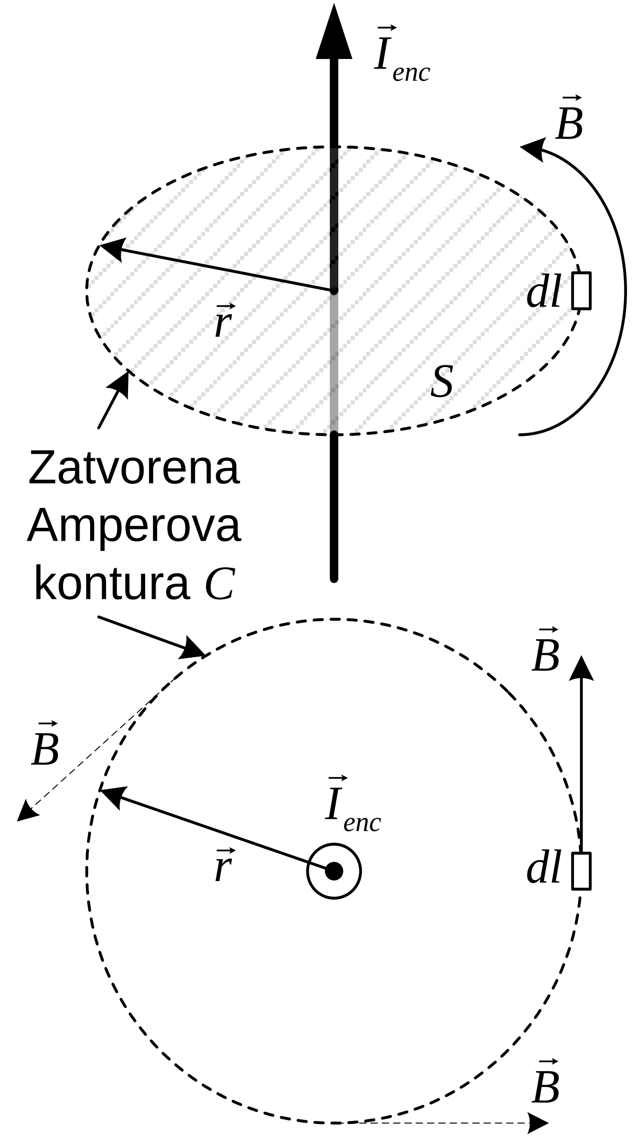
- Amperov zakon kaže da je u pogledu ukupne struje linijski integral magnetnog polja $\vec{B}$ po zatvorenoj konturi C proporcionalan ukupnoj struji I_{enc} koja prolazi kroz površinu S (koju zatvara kontura C)

$$\oint_C B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 \cdot I_{enc}$$

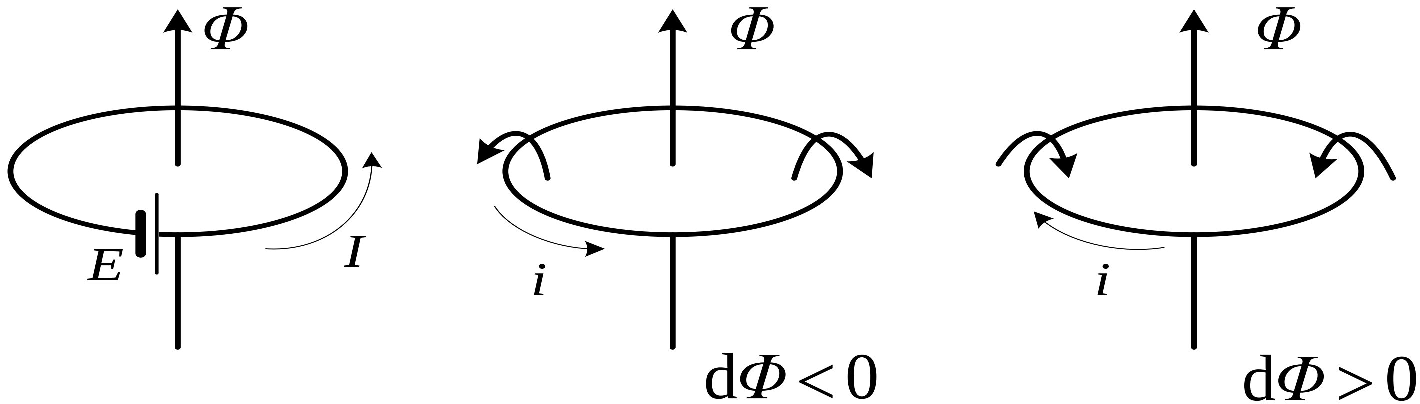
- Kada se ovo proračuna, rezultat je praktično identičan jednačini magnetnog polja za beskonačni linijski provodnik koja se izvodi iz Bio-Savarovog zakona

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_{enc}}{2\pi \cdot r}$$

- Ako sredina nije vakuum ili vazduh μ_o bi trebalo da se zameni permeabilnošću sredine



Induktivnost



Indukovana struja I opire se promeni fluksa i generiše fluks jednak i suprotan $\mathrm{d}\Phi$

Jačina fluksa na nekoj lokaciji meri se gustinom magnetnog fluksa (magnetnom indukcijom), B

$$\Phi = B \cdot S \quad \text{zapravo} \quad \Phi = \oiint_A \vec{B} \cdot dA$$

Na osnovu Amperovog zakona $\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 \cdot I$ i prethodne jednačine, fluks se može izračunati kao $\Phi = L \cdot i$, gde je L induktivnost, parametar koji odgovara geometriji provodnika i magnetnim svojstvima sredine.

Faradejev zakon kaže: $$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad e(t) = -\frac{d(L \cdot i)}{dt} = -i \cdot \frac{dL}{dt} - L \cdot \frac{di}{dt}$$

Induktivnost

• Ako su geometrija i magnetna svojstva sredine fiksna, elektromotorna sila jednaka je:

$$e(t) = -i \cdot \underbrace{\cancel{\frac{dL}{dt}}}_{0} - L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

•Zavojnica je element kojim modelujemo efekte magnetnog polja na promenljive u kolu. Energija koja se akumuliše u magnetnom polju utiče na napone i struje u kolima, pa koristimo zavojnice da bismo modelovali te efekte.

•Koeficijent L naziva se sopstvena induktivnost jer predstavlja osobinu provodnika u odnosu na koju promena struje u provodniku “indukuje” (stvara) napon (elektromotornu silu) u tom provodniku.

•SI jedinica za induktivnost je H (Henri)

•Svaka promena struje u provodniku takođe utiče i na susedne provodnike što stvara efekat međusobne induktivnosti.

•Generisana elektromotorna sila $e(t)$ zapravo je posledica trećeg Njutnovog zakona, kao što je rečeno u Lorencovom zakonu:

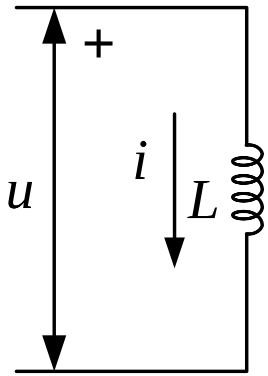
Indukovana elektromotorna sila (ems) uvek stvara struju kojom se magnetno polje suprostavlja inicijalnoj promeni magnetnog fluksa

•Indukovana elektromotorna sila, zbog negativnog predznaka, zapravo se ponaša kao elektrootporna komponenta u kolima.

Zavojnica

Zavojnica se definiše kao pasivni element sa dva kraja, čiji je napon na krajevima proporcionalan prvom izvodu struje kroz taj element.

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

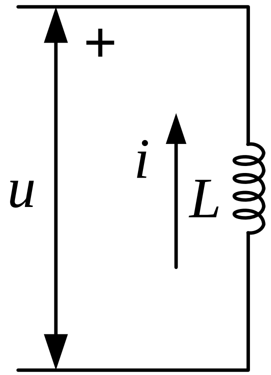


Obeležavanje malim slovima struje i napona koristi se da ukaže na vremenski zavisne veličine.

$$i(t) = i$$

$$u(t) = u$$

Jednostavno se proračunava da je u kolima jednosmernih struja napon na zavojnici jednak nuli. Naravno, ovo je tačno samo za idealnu zavojnicu. Realne zavojnice imaju i unutrašnju otpornost.

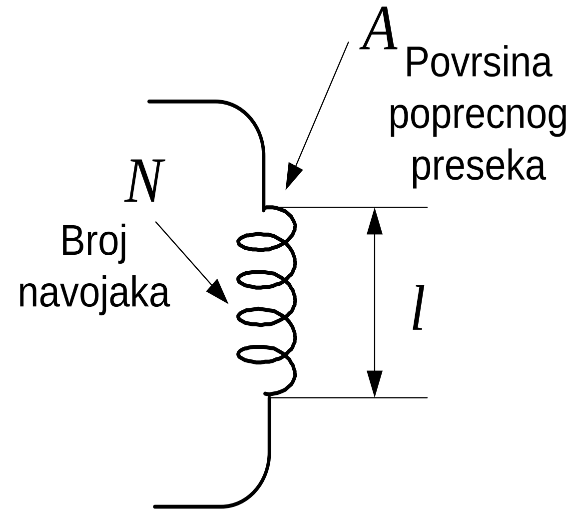


Prethodna formula važi u slučaju usaglašenosti smerova za pasivne elemente. U suprotnom, napon je jednak:

$$u = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Zavojnica

Induktivnost zavojnice zavisi od geometrije i materijala od kojeg je napravljena

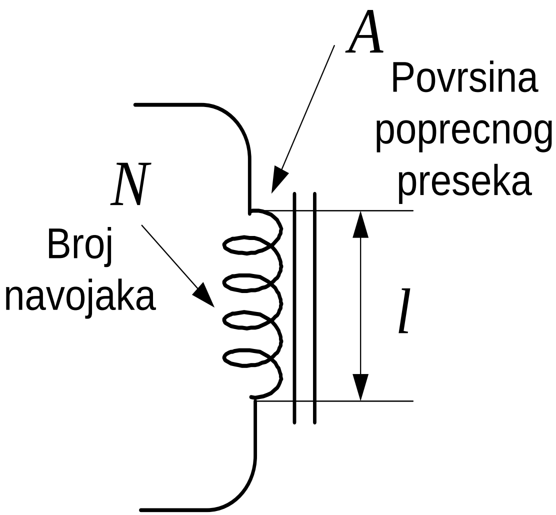


Vazduhom ispunjen kalem:

$$L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$$

gde je μ_o permeabilnost vazduha

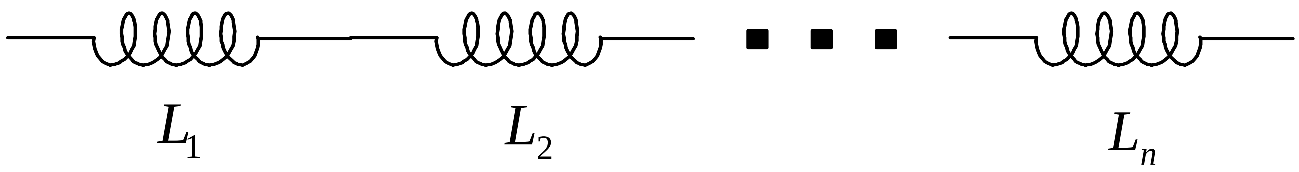
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$



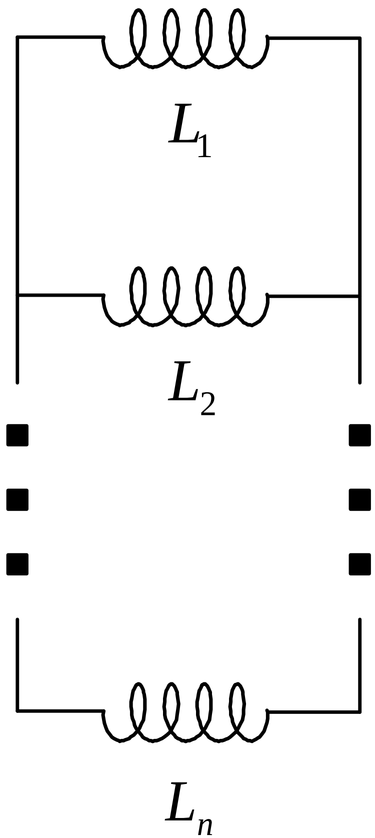
Induktivnost se povećava ako se koristi feromagnetno jezgro, jer μ_r može da ima velike vrednosti

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r A N^2}{l}$$

Redna i paralelna veza zavojnica



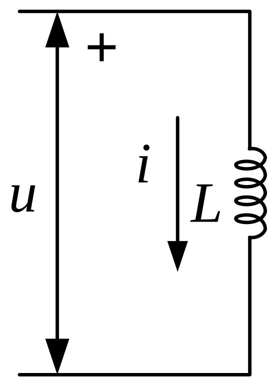
$$L_e = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$



$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

Kada nekoliko zavojnica međusobno povežemo, njihova ekvivalentna induktivnost računa se na isti način kao kod otpornika – pod uslovom da ne postoje međusobne induktivnosti.

Energija koja se akumuliše u zavojnici



$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$p = u \cdot i = \left(L \cdot \frac{di}{dt} \right) \cdot i$$

Kako snaga predstavlja brzinu prenosa energije:

$$p = \frac{dw}{dt},$$

energija se može izračunati kao:

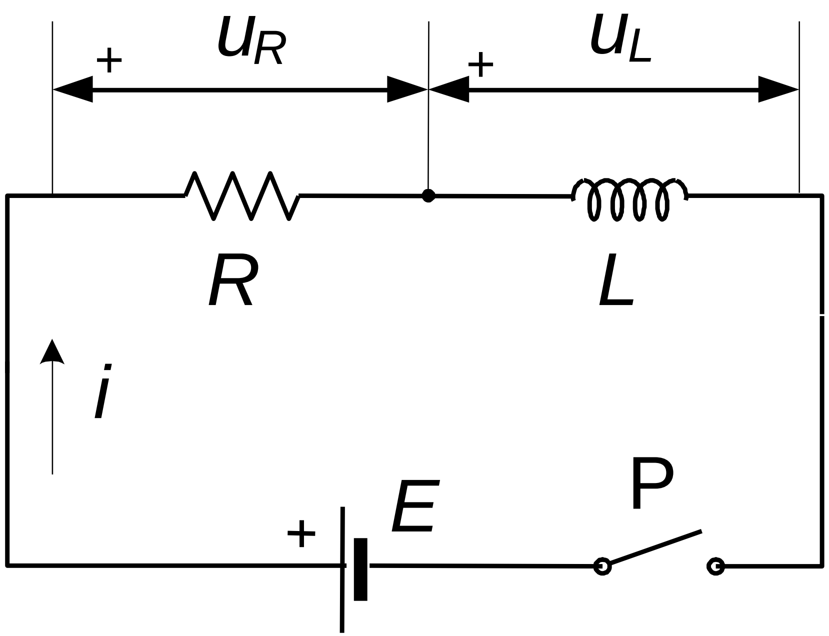
$$w = \int_{-\infty}^{t} p \cdot dt = \int_{-\infty}^{t} \left(L \cdot \frac{di}{dt} \right) \cdot i \cdot dt = L \cdot \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i \cdot di = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t) - \frac{1}{2} L \cdot i^2(-\infty)$$

- Struja u kolima ne postoji ukoliko ne postoji neki izvor snage, pa se može pretpostaviti da je:

$$i(-\infty) = 0,$$

- Energija akumulisana u zavojnici jednaka je:

$$w(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t)$$



$$E - u_R - u_L = 0$$

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E$$

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t)$$

$i_p = const$ - partikularno rešenje $i_p = \dfrac{E}{R}$

$i_h(t)$ - rešenje homogene diferencijalne jednačine

$$L \cdot \frac{di_1}{dt} + R \cdot i_h = 0$$

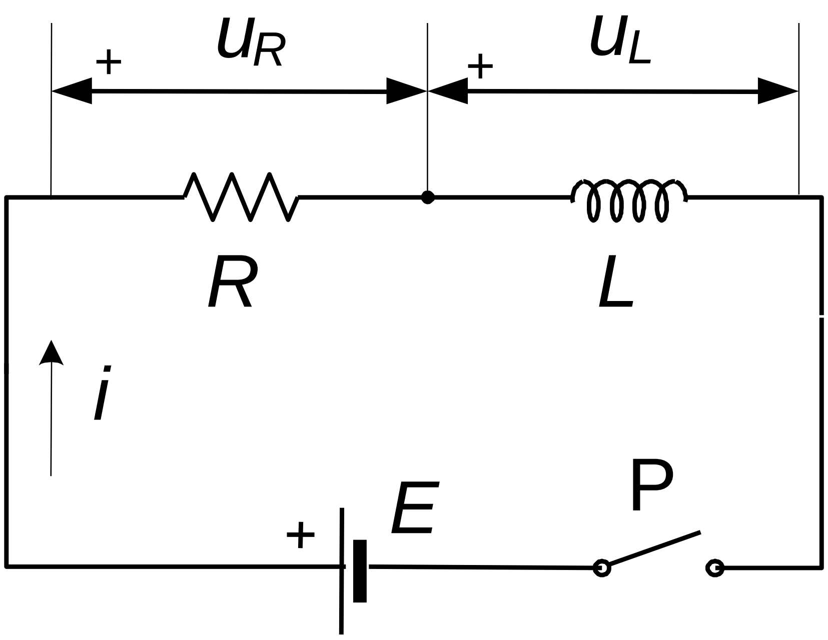
$$L \cdot \frac{di_h}{dt} = -\frac{R}{i_h} \Rightarrow \frac{di_h}{i_h} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln i_h = -\frac{R}{L} \cdot t + k_1$$

$$i_h = k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t)$$

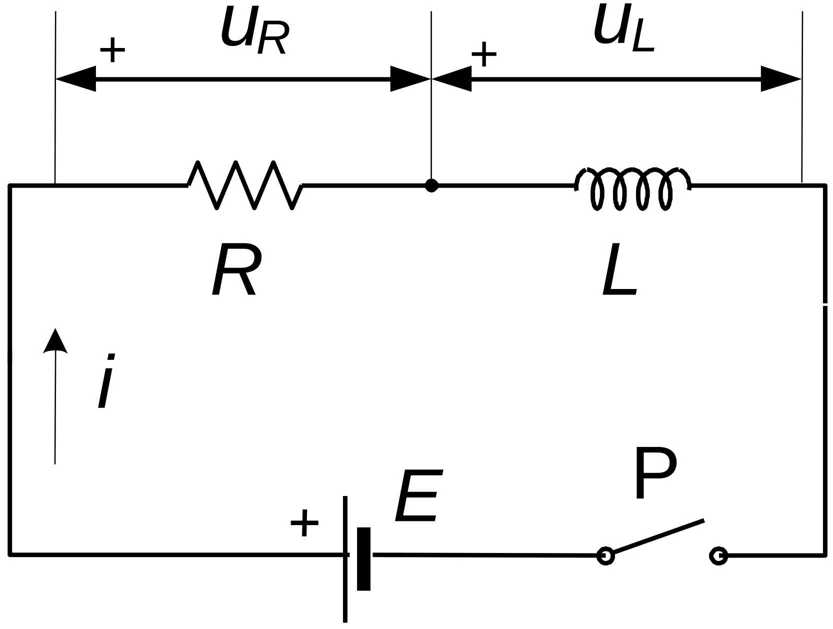
$$i(t) = \frac{E}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$



$$i(t)=\frac{E}{R}+k\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$ $$i(t=0)=0$$ - početni uslov

$$i(t=0)=0\Rightarrow\frac{E}{R}+k\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot 0}=0\Rightarrow k=-\frac{E}{R}$$

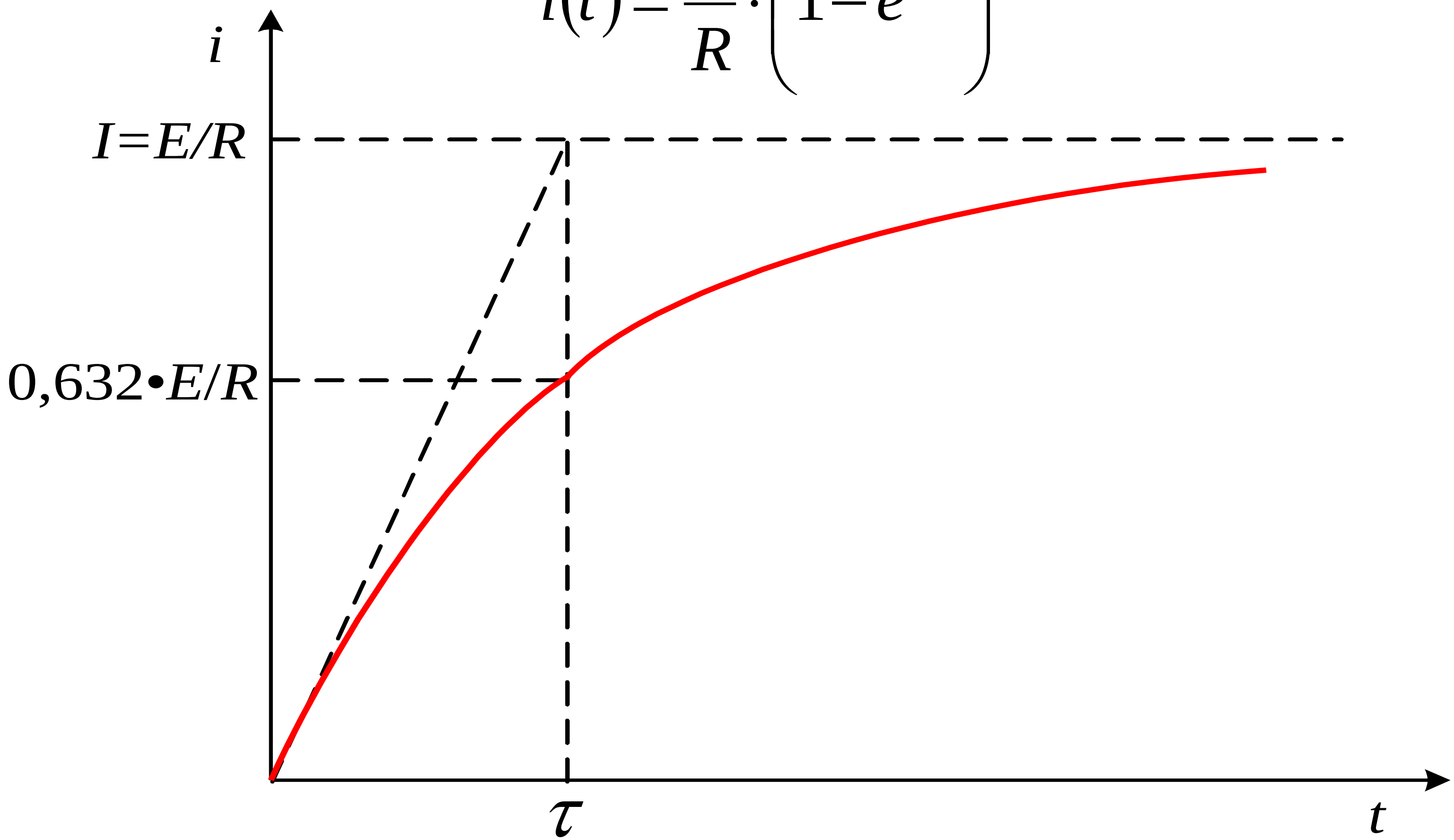
$$i(t)=\frac{E}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$



$$\tau=\frac{L}{R}$$ - vremenska konstanta

$$i(t)=\frac{E}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Struja dostiže 99% konačne vrednosti nakon pet τ i to se obično usvaja kao vreme nakon kojeg je prelazni proces završen.

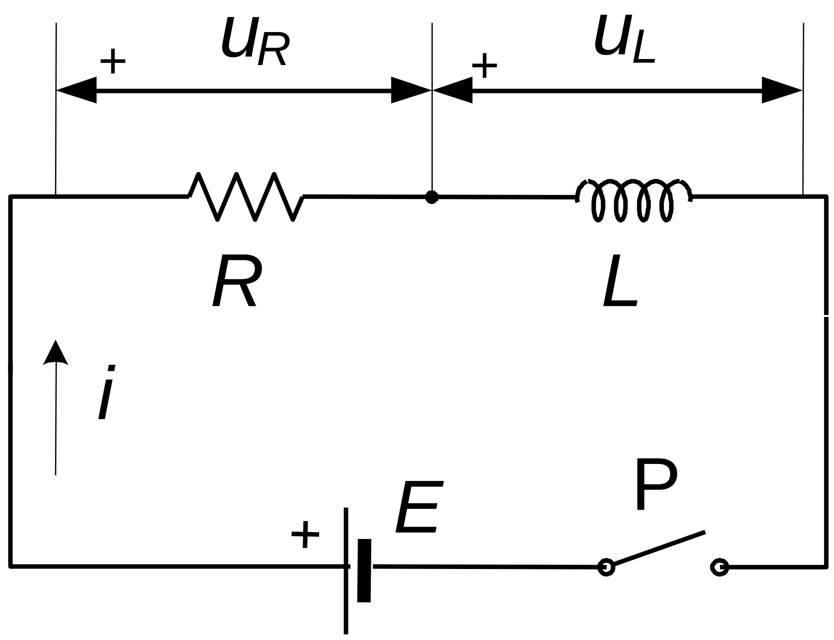
- Brzina porasta struje:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{R} \cdot \frac{d\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)}{dt} = \frac{E}{R} \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}$$

Energetski procesi u induktivnom kolu po uključenju izvora



$$\left. L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E \right\} \cdot i \cdot dt$$

$$L \cdot i \cdot di + R \cdot i^2 \cdot dt = E \cdot i \cdot dt$$

- utrošena energija na zagrevanje otpornika u intervalu 0 - *t*

$$\int_0^t R \cdot i^2 \cdot dt = R \cdot \int_0^t \left(\frac{E}{R}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{E^2}{R} \cdot \int_0^t \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}}\right) dt =$$

$$= \frac{E^2}{R} \cdot \left[t + 2 \cdot \frac{L}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{L}{2 \cdot R} \cdot e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} \right]\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{E^2}{R} \cdot \left(t + 2 \cdot \frac{L}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{L}{2 \cdot R} \cdot e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} - \frac{2 \cdot L}{R} + \frac{L}{2 \cdot R} \right) =$$

$$= \frac{E^2}{R} \cdot \left(t + 2 \cdot \frac{L}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{L}{2 \cdot R} \cdot e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{L}{R} \right)$$

- nagomilana energija magnetnog polja

$$\int_0^t L \cdot i \cdot di = E^2 \cdot \frac{L}{R^2} \cdot \left(-e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2 \cdot R}{L} \cdot t} + \frac{1}{2} \right)$$

- energija izvora

$$\int_0^t E \cdot i \cdot dt = \frac{E^2}{R} \cdot \left[t + \frac{L}{R} \cdot \left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - 1 \right) \right]$$

- trenutne vrednosti snaga

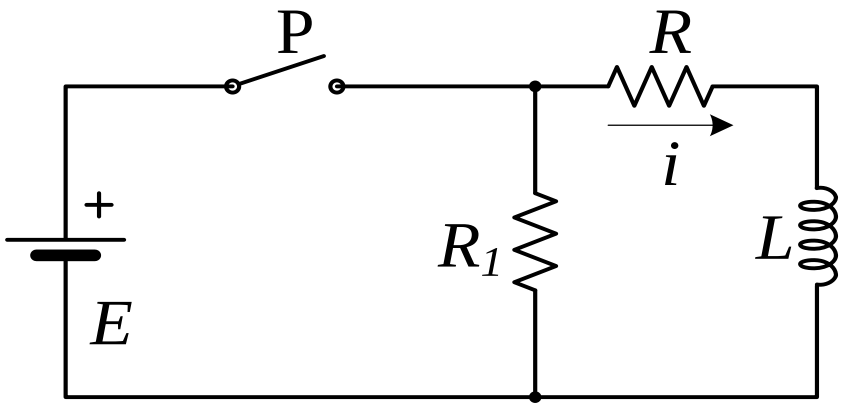
$$L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i^2 = E \cdot i$$

$$p_m(t) = \frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right)$$

$$p_R(t) = \frac{E^2}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right)^2$$

$$p(t) = p_m(t) + p_R(t) = \frac{E^2}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right)$$

Isključenje izvora jednosmerne elektromotorne sile iz induktivnog kola



1. stacionarno stanje u slučaju da je prekidač P zatvoren

$$I = \frac{E}{R} \quad \left(u_L = L \cancelto{0}{\frac{di}{dt}} = 0 \right)$$

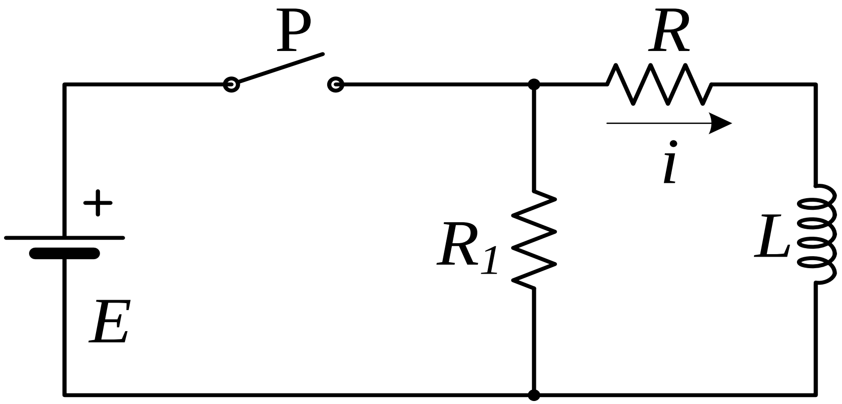
$$I_1 = \frac{E}{R_1}$$

2. prelazno stanje – prekidač P otvoren

$$-L\cdot\frac{di}{dt}-R_1\cdot i-R\cdot i=0$$

$$-L\cdot\frac{di}{dt}-\left(R_1+R\right)\cdot i=0$$

$$-L\cdot\frac{di}{dt}-R_e\cdot i=0\Rightarrow\frac{di}{dt}=-\frac{R_e}{L}dt$$



$$\ln i=-\frac{R_e}{L}\cdot t+k_1$$

$$i(t)=k\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t};\tau=\frac{L}{R_e}$$

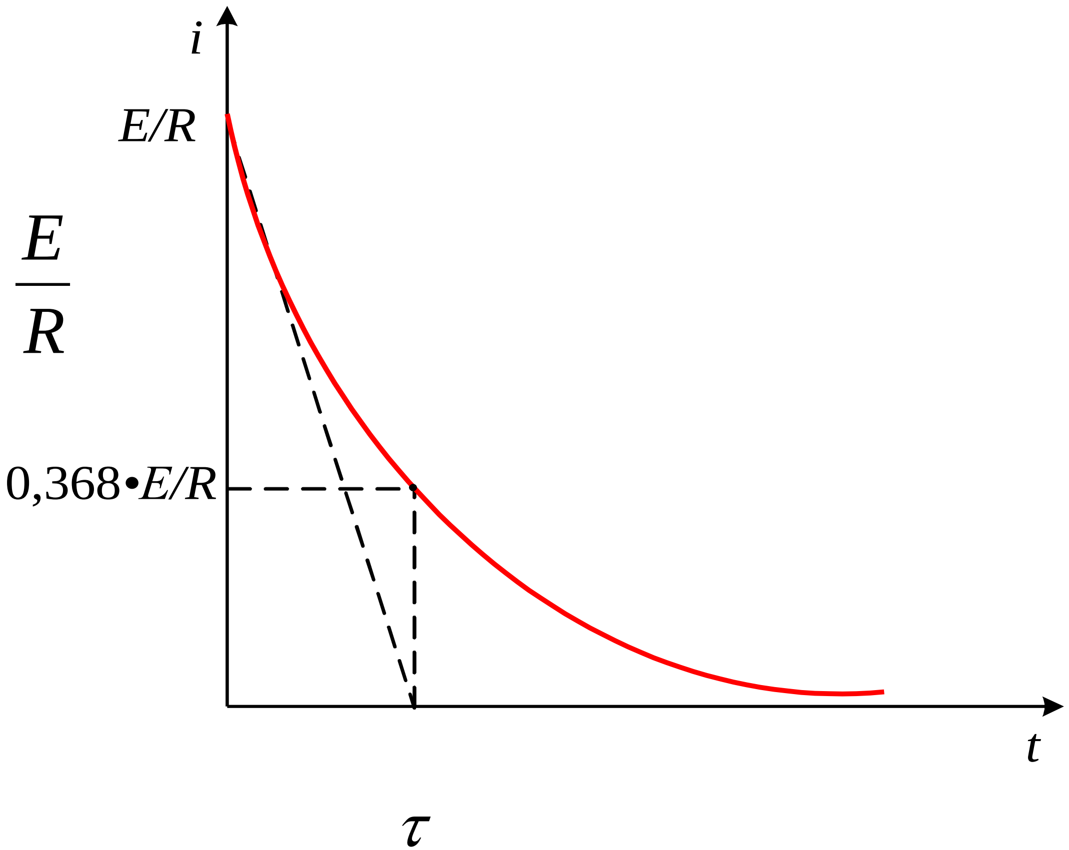
$$i(t)=k\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

• početni uslov

$$i(t=0) = I = \frac{E}{R}$$

$$i(t=0) = \frac{E}{R} = k \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} \Rightarrow k = \frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$-L \cdot \frac{di}{dt} = E \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$-L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{E}{R} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{R_1 + R}{L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$-L \cdot \frac{di}{dt} = E \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

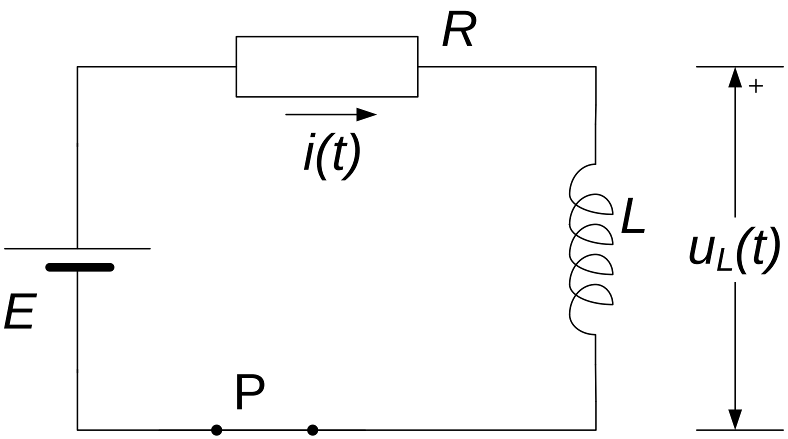
$$-L \cdot \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = E \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)$$

$$W_R = \int_0^{+\infty} (R + R_1) \cdot i^2 \cdot dt = \int_0^{+\infty} (R + R_1) \cdot \frac{E^2}{R^2} \cdot e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} \cdot dt =$$

$$= (R + R_1) \cdot \frac{E^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R + R_1} \cdot e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} \Bigg|_{+\infty}^{0} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{E}{R} \right)^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

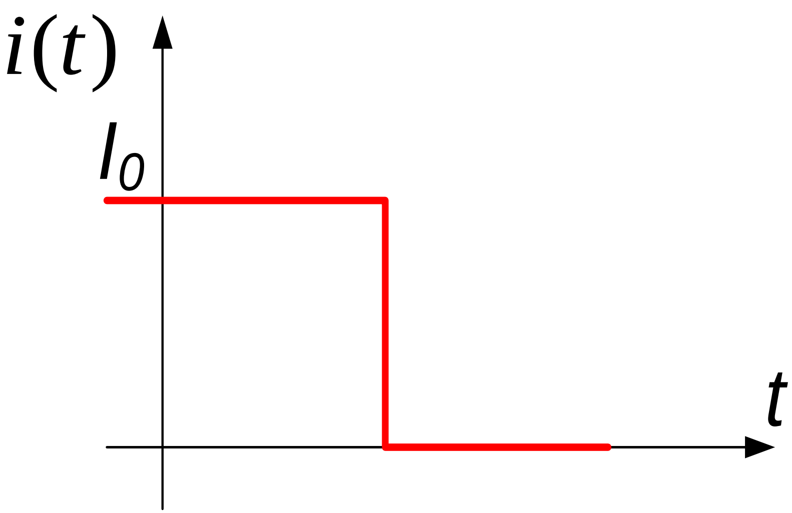
Otvaranje prekidača u kolu sa zavojnicom

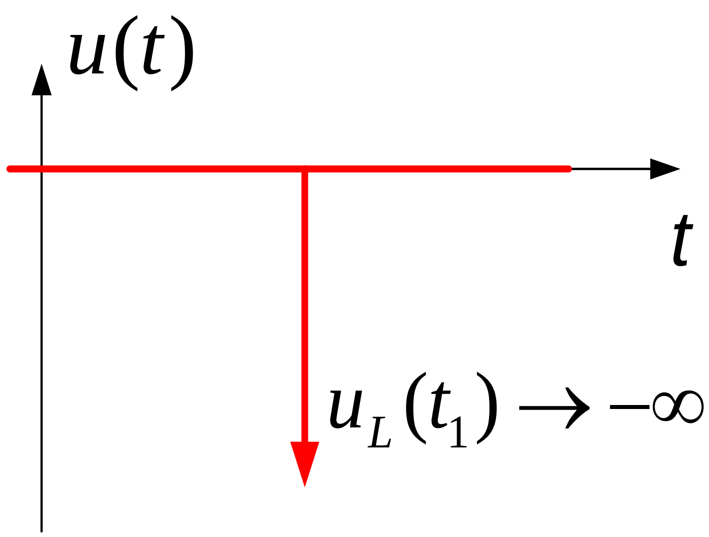


$$I_0 = \frac{E}{R}$$

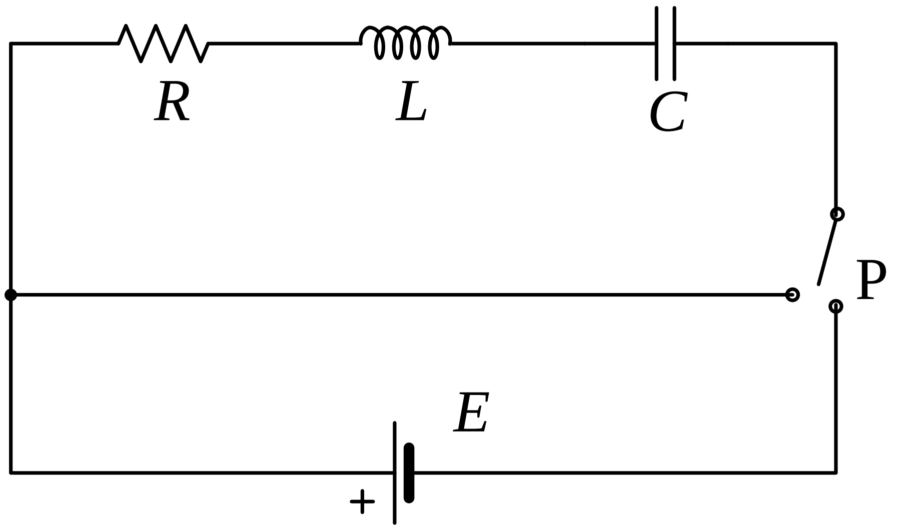
$$u_{\mathrm{L}}(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

U trenutku $t=t_1$ se otvara prekidač





Rasterećivanje kondenzatora u rednom R-L-C kolu



$$-L\cdot\frac{di}{dt}-R\cdot i+\frac{q}{C}=0$$

$$L\cdot\frac{d^2q}{dt^2}+R\cdot\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$L\cdot S^2+R\cdot S+\frac{1}{C}=0$$

$$S_{1,2}=-\frac{R}{2\cdot L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2\cdot L}\right)^2-\frac{1}{L\cdot C}}$$

$$S_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

D>0 – aperiodično

$$q(t) = k_1 \cdot e^{S_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{S_2 \cdot t}$$

D=0 – kritično periodično

$$q(t) = k_1 \cdot e^{S \cdot t} + k_2 \cdot t \cdot e^{S \cdot t}$$

D<0 – prigušeno oscilatorno

$$q(t) = k_1 \cdot e^{S_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{S_2 \cdot t}$$

$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_1$$

$$q(t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \psi)$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot [\alpha \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \psi) - \omega_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \psi)]$$

- početni uslovi

$$q(t=0) = C \cdot E \Rightarrow C \cdot E = A \cdot \sin\psi$$
$$i(t=0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \sin\psi = \omega_1 \cdot \cos\psi$$

$$\psi = arctg\,\frac{\omega_1}{\alpha}$$

$$A = \frac{C \cdot E}{\sin\psi} = C \cdot E \cdot \sqrt{1 + ctg^2\psi} = \frac{E}{\omega_1} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$q(t) = Q_m \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot t + \psi\right)$$
$$Q_m = \frac{E}{\omega_1} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_m \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \psi)$$

$$U_m = \frac{E}{\omega_1 \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$i(t) = \frac{A}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot t + \psi - arctg\,\frac{\omega_1}{\alpha}\right)$$

$$i(t) = I_m \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)$$

$$I_m = \frac{E}{\omega_1 \cdot L}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{E}{\omega_1} \cdot \left[-\alpha \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \omega_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \right]$$

$$u_L(t) = U_m \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \psi)$$

$$\frac{i(t)}{i(t+T_1)} = \frac{I_m \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)}{I_m \cdot e^{-\alpha \cdot (t+T_1)} \cdot \sin(\omega_1 \cdot (t+T_1))} = e^{\alpha \cdot T_1}$$

$$\delta = \ln\left(e^{\alpha \cdot T_1}\right) = \alpha \cdot T_1$$

$$\delta = \frac{\pi \cdot R}{\omega_1 \cdot L} = \frac{\pi \cdot R}{L \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}}}$$