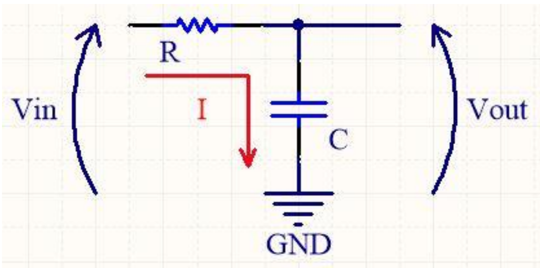
Hardverski interfejsi

Vežbe 3

Zadatak 1. Integrator

Na slici ispod v_{in} predstavlja ulazni napon, a v_{out} izlazni napon (napon na kondenzatoru).



Struja kroz kondenzator:

$$Q = C \cdot U$$

$$I \cdot t = C \cdot U$$

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$i_c = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

U ovom slučaju struja kroz celo kolo *i* je upravo jednaka i_c. U početnom trenutku kodnenzator je prazan. S obzirom da je struja *i* jednosmerna, ona će postojati sve dok se kondenzator ne napuni. Kada se kondenzator napuni, s obzirom na to da struja više ne protiče kroz kolo, izlazni napon v_{out} će biti jednak ulaznom v_{in} (Kirkohov zakon za napone).

Ukoliko obiđemo konturu kroz ovo kolo dobićemo:

$$v_{in} - R \cdot i - v_{out} = 0$$

$$v_{in} - R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}}{dt} - v_{out} = 0$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}}{dt} + v_{out} = v_{in}$$

Primenom Laplasove transformacije dobija se:

$$R \cdot C \cdot \left(s \cdot V_{out}(s) - v_{out}(0-)\right) + V_{out}(s) = V_{in}(s)$$

U početnom trenutku kondenzator je prazan, pa je $v_{out}(0-)$ jednak 0.

$$V_{out}(s) \cdot (sRC + 1) = V_{in}(s)$$

$$V_{out}(s) = \frac{1}{sRC + 1} \cdot V_{in}(s)$$

Ulazni signal v_{in} je Hevisajdov step signal amplitude 1V, pa je $V_{in}(s) = \frac{1}{s}$.

$$V_{out}(s) = \frac{1}{sRC + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$V_{out}(s) = \frac{1}{RC(s + \frac{1}{RC})} \cdot \frac{1}{s}$$

$$V_{out}(s) = \frac{1}{RC} \cdot (\frac{K_1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{K_2}{s})$$

Rešavanjem dela u zagradi iz prethodne jednačine dobijaju se koeficijenti K_1 i K_2:

$$\frac{K_1 \cdot s + K_2(s + \frac{1}{RC})}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{K_1 \cdot s + K_2 \cdot s + K_2 \cdot \frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

$$\frac{s(K_1 + K_2) + K_2 \cdot \frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

$$K_1 + K_2 = 0$$

$$K_2 \cdot \frac{1}{RC} = 1$$

$$K_2 = RC$$

$$K_1 = -RC$$

Vraćanjem koeficijenata u početnu jednačinu dobija se izraz za $V_{out}(s)$:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{RC} \cdot (\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}})$$

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Sada može da se uradi inverzna Laplasova transformacija:

$$v_{out}(t) = h(t) - e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot h(t)$$

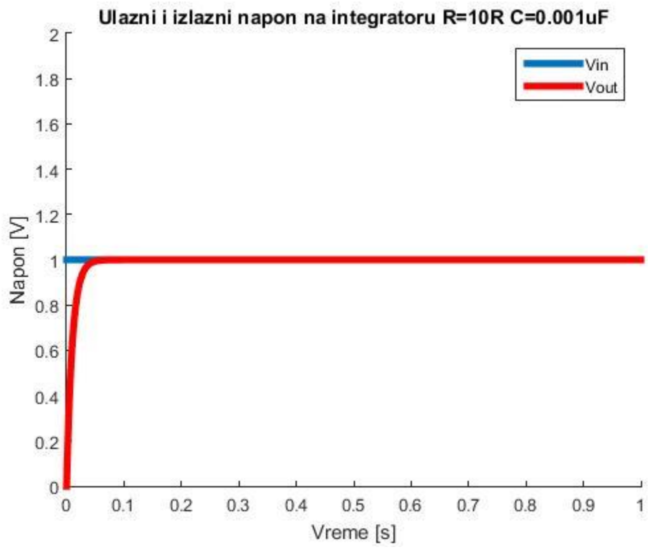
$$v_{out}(t) = h(t) \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

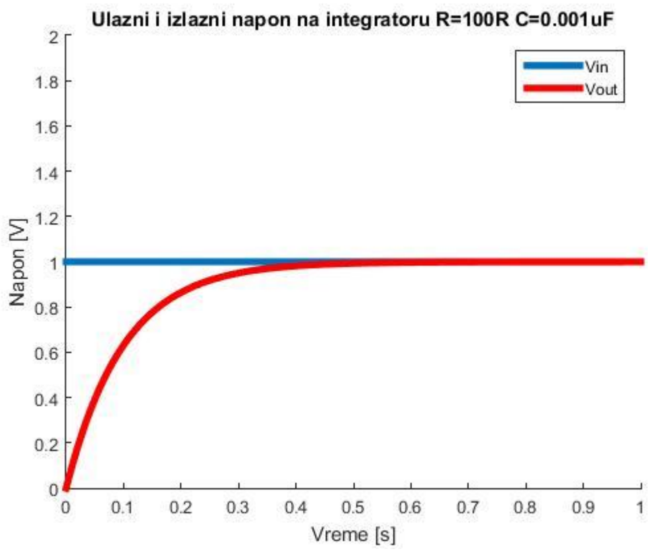
$$\tau = RC$$

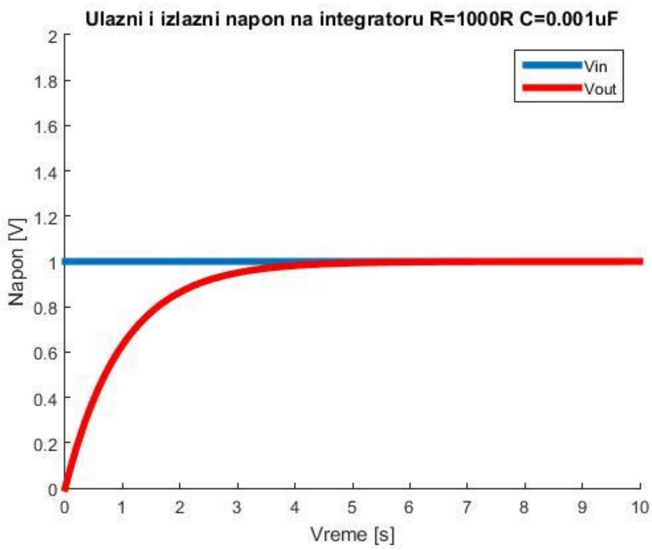
U prethodnoj jednačini proizvod RC predstavlja vremensku konstantu τ. Što je τ veće, to će se kondenzator kasnije napuniti, odnosno napon na njemu $v_{out}(t)$ sporije raste (sporije će dostići vrednost $v_{in}(t)$, koje je u ovom slučaju 1V), i obrnuto. Matematičkim posmatranjem izraza za $v_{out}(t)$ je to više nego očigledno.

Fizičkom analizom prethodne relacije vidi se da dva parametra utiču na to koliko će napon $v_{out}(t)$ brzo da raste. Ukoliko je otpornost R veća, to je struja kroz kolo manja, pa će se kondenzator sporije napuniti (samim tim i napon na njemu će sporije da raste), dok ukoliko je kapacitivnost kondenzatora C veća, potrebno je duže vreme da se, pri istoj stuji, on napuni.

Smatra se da napon na izlazu $v_{out}(t)$ dostigne 99% napona na ulazu $v_{in}(t)$ za 4.7 τ.

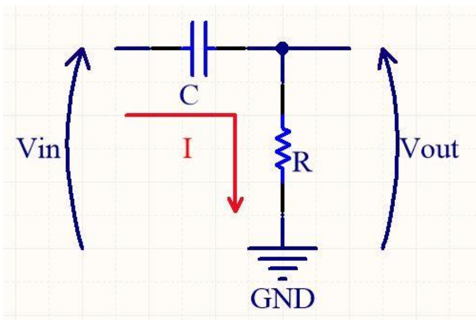






Zadatak 2. Diferencijator

Na slici ispod v_{in} predstavlja ulazni napon, a v_{out} izlazni napon (napon na otporniku).



U početnom trenutku kondenzator C je prazan.

$$i = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

$$v_{in}(t) - v_c(t) - i \cdot R = 0$$

$$i \cdot R = v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_c}{dt} = v_{out}(t)$$

$$v_c(t) = v_{in}(t) - v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{d}{dt}\big(v_{in}(t) - v_{out}(t)\big) = v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt} - R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} = v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Primenom Laplasove transformacije dobija se:

$$R \cdot C \cdot \left(sV_{out}(s) - v_{out}(0-)\right) + V_{out}(s) = R \cdot C \cdot \left(sV_{in}(s) - v_{in}(0-)\right)$$

S obzirom na to da je ulazni signal *$v_{in}(t)$* Hevisajdov step signal i da je:

$$v_{in}(0-) = 0$$

$$v_c(0-) = 0$$

sledi da je i:

$$v_{out}(0-) = 0$$

$$sRC \cdot V_{out}(s) + V_{out}(s) = sRC \cdot V_{in}(s)$$

$$V_{out}(s) \cdot (1 + sRC) = sRC \cdot V_{in}(s)$$

$$V_{out}(s) = \frac{sRC}{(1 + sRC)} \cdot V_{in}(s)$$

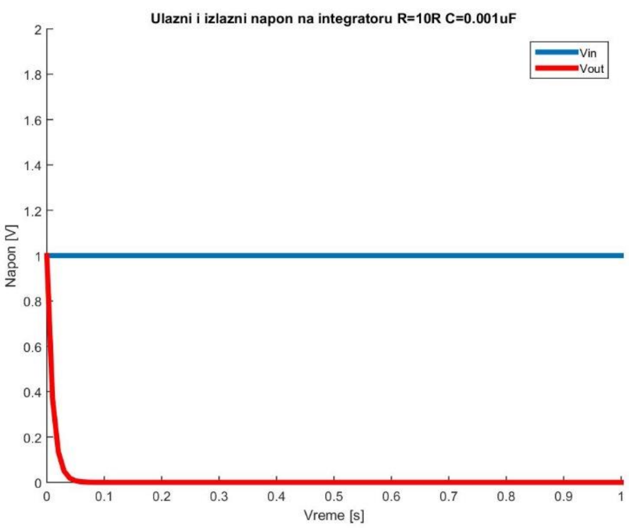
Kao što je rečeno ulazni signal je Hevisajdov step signal, pa je:

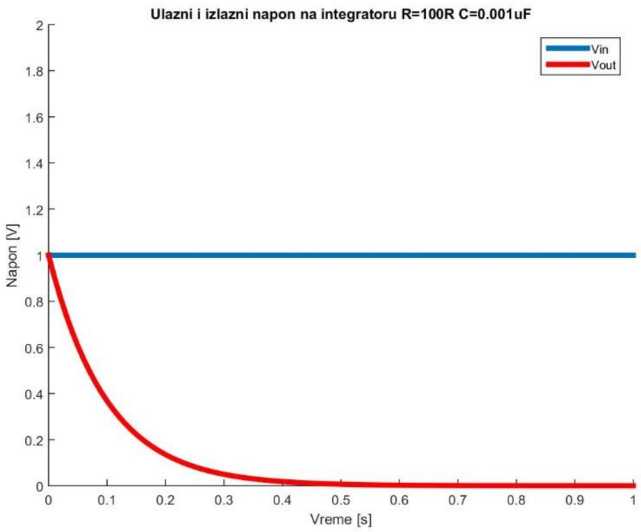
$$V_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

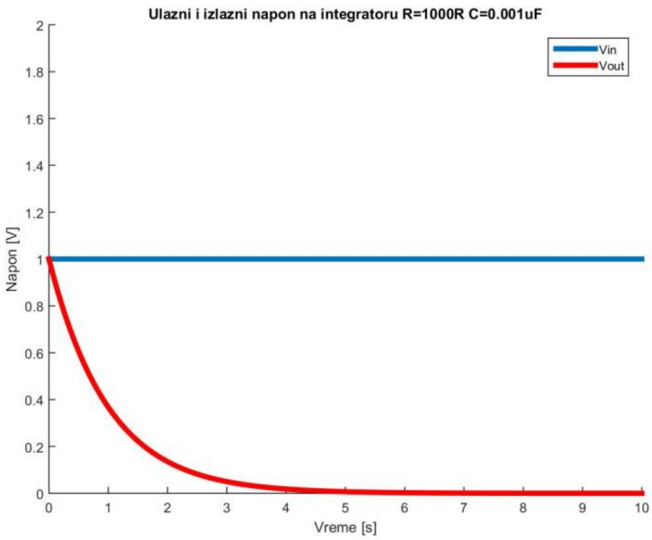
$$V_{out}(s) = \frac{sRC}{(1 + sRC)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{RC}{RC\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Sada je moguće izvršiti inverznu Laplasovu transformaciju:

$$v_{out}(t) = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \cdot h(t)$$







I u ovom slučaju, kao i kod integratora, RC predstavlja vremensku konstantu τ. Što je τ veće, to će se kondenzator u ovom električnom kolu sporije napuniti, s tom razlikom u odnosu na integrator, što u ovom slučaju izlazni napon $v_{out}(t)$ nije napon na kondenzatoru, već na otporniku.

Drugim rečima:

$$v_{out}(t) = v_{in}(t) - v_c(t)$$

U početnom trenutku $t = 0$, kondenzator je prazan, odnosno $v_c(t) = 0$, pa je iz prethodne jednačine:

$$v_{out}(t_0) = v_{in}(t_0)$$

Konkretno u ovom primeru, $v_{out}(t_0) = 1V$.

Kako vreme odmiče, tako se kondenzator puni, napon na njemu $v_c(t)$ raste, odnosno $v_{out}(t)$ opada, sve do jednog trenutka, dok se kondenzator u potpunosti ne napuni, struja kroz kolo ne prestane da teče, a napon na otporniku $v_{out}(t)$ bude jednak 0.

Odnosno, u trenutku kada se kondenzator u potpunosti napuni važe relacije:

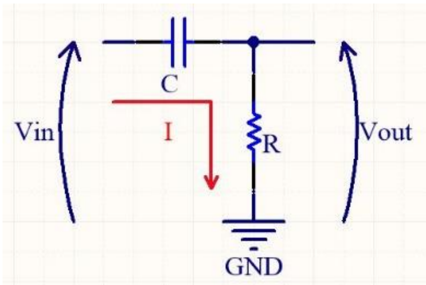
$$v_c(t) = v_{in}(t)$$

$$v_{out}(t) = 0$$

Celokupan proces može se videti na tri grafika iznad. Kao što je već rečeno, u zavisnosti od vremenske konstante τ kondenzator će se brže ili sporije napuniti, a kako na to utiču vrednosti R, odnosno C, objašnjeno je u poglavlju posvećenom integratoru.

Smatra se da će napon na izlazu $v_{out}(t)$ da opadne na 0.01V za 4.7 τ.

Zadatak 3. Odrediti napon na izlazu diferencijatora, ako je $v_{in}(t) = h(t) - h(t-5)$.



U početnom trenutku kondenzator C je prazan.

$$i = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

$$v_{in}(t) - v_c(t) - i \cdot R = 0$$

$$i \cdot R = v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_c}{dt} = v_{out}(t)$$

$$v_c(t) = v_{in}(t) - v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{d}{dt}\big(v_{in}(t) - v_{out}(t)\big) = v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt} - R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} = v_{out}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Primenom Laplasove transformacije dobija se:

$$R \cdot C \cdot \big(sV_{out}(s) - v_{out}(0-)\big) + V_{out}(s) = R \cdot C \cdot \big(sV_{in}(s) - v_{in}(0-)\big)$$

S obzirom na to da je:

$$v_{in}(0-) = 0$$

$$v_c(0-) = 0$$

sledi da je i:

$$v_{out}(0-) = 0$$

$$sRC \cdot V_{out}(s) + V_{out}(s) = sRC \cdot V_{in}(s)$$

$$V_{out}(s) \cdot (1 + sRC) = sRC \cdot V_{in}(s)$$

$$V_{out}(s) = \frac{sRC}{(1 + sRC)} \cdot V_{in}(s)$$

$$V_{in}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-5s}$$

$$V_{out}(s) = \frac{sRC}{(1 + sRC)} \cdot \frac{1}{s} - \frac{sRC}{(1 + sRC)} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-5s}$$

$$V_{out}(s) = \frac{RC}{(1 + sRC)} - \frac{RC}{(1 + sRC)} \cdot e^{-5s}$$

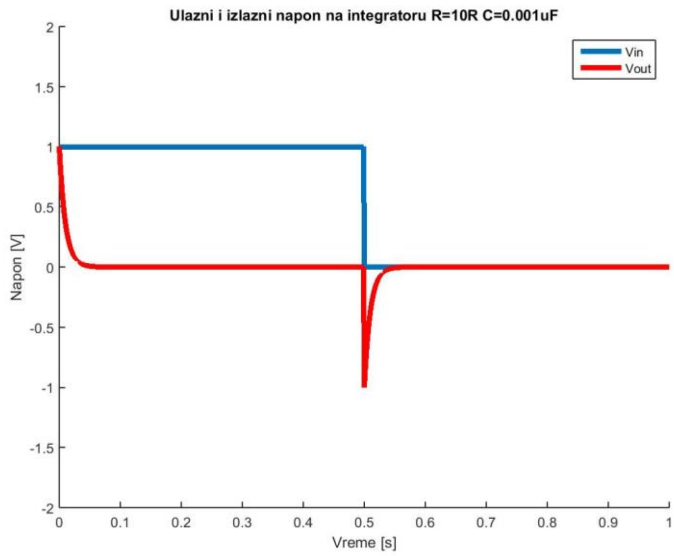
Zahvaljujući teoremi linearnosti Laplasove transformacije, moguće je za svaki od elemenata razlike u jednačini iznad računati posebno inverznu Laplasovu transformaciju.

$$V_{out}(s) = \frac{RC}{RC(s + \frac{1}{RC})} - \frac{RC}{RC(s + \frac{1}{RC})} \cdot e^{-5s}$$

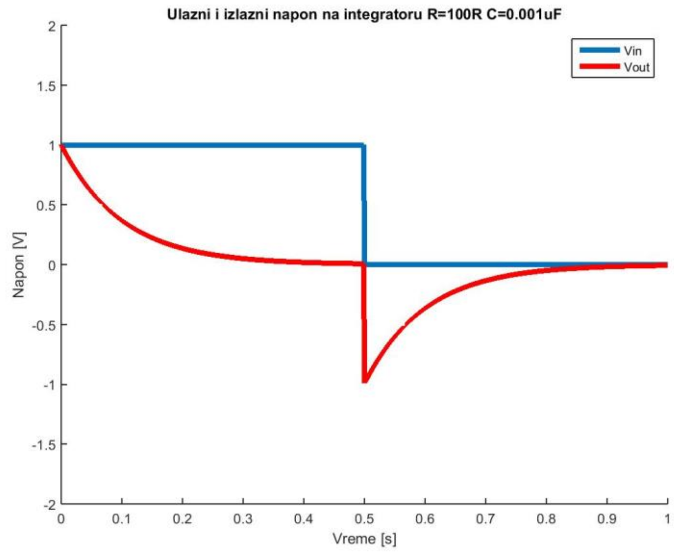
$$V_{out}(s) = \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} - \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} \cdot e^{-5s}$$

$$v_{out}(t) = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \cdot h(t) - e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t-5)} \cdot h(t-5)$$

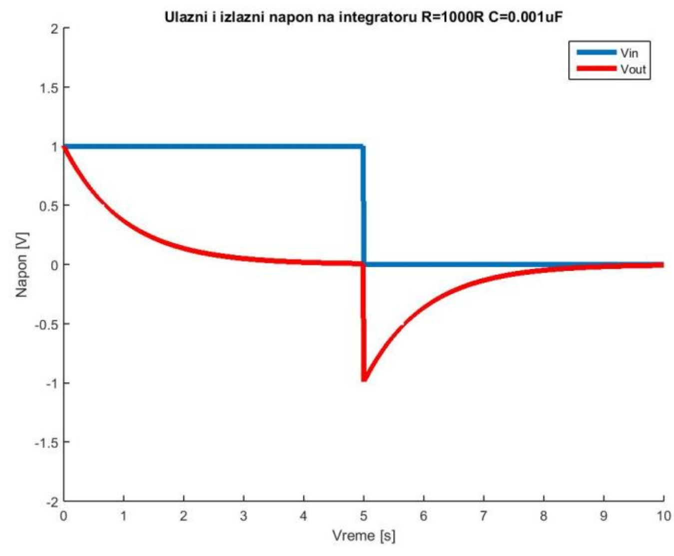
Na slikama ispod prikazan je izlazni napon $v_{out}(t)$ u zavisnosti od ulaznog $v_{in}(t)$, pri nekoliko kombinacija vrednosti R i C.



Ulazni i izlazni napon na integratoru R=10R C=0.001uF
Vin
Vout
Napon [V]
Vreme [s]



Ulazni i izlazni napon na integratoru R=100R C=0.001uF
Vin
Vout
Napon [V]
Vreme [s]



Ulazni i izlazni napon na integratoru R=1000R C=0.001uF
Vin
Vout
Napon [V]
Vreme [s]

Na prethodnim graficima važno je primetiti da je u trenutku $t = 5$ ulazni napon postavljen na 0 ($v_{in}(t = 5) = 0$).

S obzirom na to i da je u tom trenutku kondenzator u potpunosti napunjen (naravno pod uslovom dovoljno „male“ RC konstante), odnosno da je $v_c(t = 5) = 1$V, sledi da je:

$$v_{out}(t = 5) = -v_c(t = 5) = -1V$$

odnosno nakon pete sekunde važi (opet na osnovu Kirhofovog zakona za napone):

$$v_{out}(t) = -v_c(t)$$

Dalje se kondenzator C postepeno prazni preko otpornika R, smanjuje se napon $v_c(t)$, a samim tim se i $v_{out}(t)$ približava 0, sve dok i jedan i drugi ne postanu jednaki 0. Kao što se iz izraza za $v_{out}(t)$ vidi, pražnjenje kondenzatora, odnosno amplitudsko smanjivanje izlaznog napona takođe je određeno vremenskom konstantom τ tj. proizvodom RC.