

Struktura digitalnih sistema automatskog upravljanja

Zoran D. Jeličić

Mirna N. Kapetina

Milan R. Rapaić

28. mart 2020.

1 Osnovni pojmovi

U okviru ovog poglavlja, namera nam je da uvedemo osnovne pojmove, definicije i da uvedemo jednoobraznu notaciju, koju ćemo koristiti do kraja kursa. Počecemo od klasifikacije signala prema karakteru nezavine promenjive, objasniti i matematički opisati postupke analogno-digitalne konverzije (A/D), digitalno-analogne konverzije (D/A), a posebnu pažnju ćemo posvetiti modifikaciji i matematičkom opisivanju sistema automatskog upravljanja, koja u sebi sadrže digitalni uređaj (računar) na mestu upravljačkog uređaja.

1.1 Vremenski kontinualni i vremenski diskretni signali

Sa stanovišta sistema automatskog upravljanja, signale kao matematičke reprezentate procesnih promenjivih, suštinski možemo klasifikovati u dve, za nas, najvažnije grupe. Jednu grupu čine *vremeski kontinualni signali*, a drugu grupu čine *vremenski diskretni signali*. I jedni i drugi se, doduše ne ravnopravno, mogu predstaviti vremenskim funkcijama.¹ Odnosno funkcijama, koje kao argument imaju jednu nezavisnu promenjivu *vreme*.²

Kada kažemo *kontinualni signali*, mislimo na signale kod kojih su *vrednosti amplitude poznate (dobro definisane) u svim vrmeneskim trenucima nekog intrevala vremena*, nasuprot njih su *diskretni signali*, kod kojih je *vrednost amplitude poznata samo u određenim diskretnim trenucima vremena, tzv trenucima odabiranja*. Na slici 1 prikazani su kontinualni i diskretni signal, trenuci kT gde $k \in \mathbb{Z}$ (skupu celih brojeva) nazivaju se trenuci odabiranja, a razmak između njih T naziva se vreme odabiranja. Jasno je da su predstavljeni nekauzalni signali, koji se prostiru i na pozitivnom i negativno delu vremenske ose.

¹ Matematički formalno posmatrano signali se predstavljaju u formi funkcija i/ili distribucija, ali radi lakšeg razumevanja, držaćemo se pojma funkcija.

² Signali pored vremena mogu da zavise i od npr prostornih koordinata $(s(t, x, y, z))$ gde su x, y, z prostorne koordinate u Dekartovom koordinatnom sistemu), ali ovakvi sistemi sa „raspodeljenim“ parametrima nisu od interesa u našem kursu.

Vremenski kontinualni signali

Kontinualni signali, koji imaju proizvoljne vrednosti amplitude, nazivaju se **analogni signali**, nasuprot tome kontinualni signali, koji mogu da imaju samo određene diskretne (kvatovane po nivou) vrednosti amplitude, nazivaju se **relejni signali**

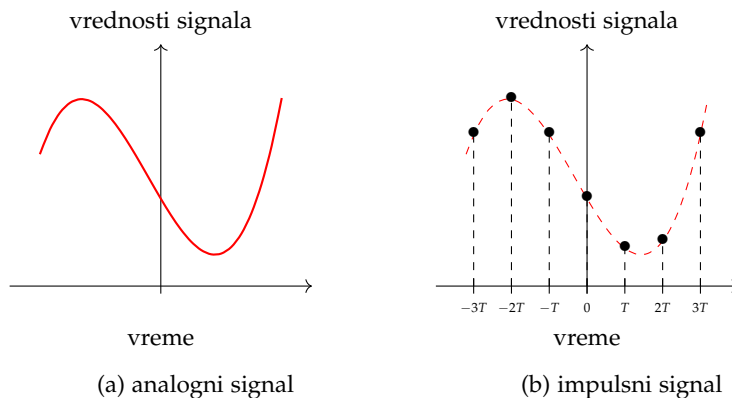
Na slici 2 prikazani su vremenski kontinualni signali, sa $k\Delta$, gde je $k \in \mathbb{Z}$, su označeni kvantni nivoi ili diskretne vrednosti amplitude.

Vremenski diskretni signali

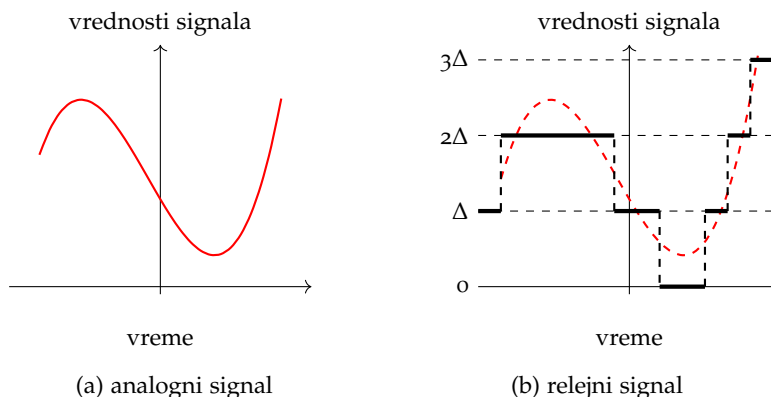
Diskretni signali, koji imaju proizvoljne vrednosti amplitude, nazivaju se **impulsni signali**, nasuprot tome diskretni signali, koji mogu da imaju samo određene diskretne (kvatovane po nivou) vrednosti amplitude, nazivaju se **digitalni signali**

Na slici 3 predstavljeni su analogni i odgovarajući digitalni signal. Konverzija analognog u digitalni signal je tema poglavlja, koje sledi.

Po pravilu kada se kaže kontinualni signal, misli se na analogni signal, slično pojam diskretni signal je sinonim za digitalni signal. Razlozi, za ovo su logični i u nastavku teksta često ćemo i mi koristiti, ove zamenske pojmove i neće biti dilema na šta se tačno odnosi

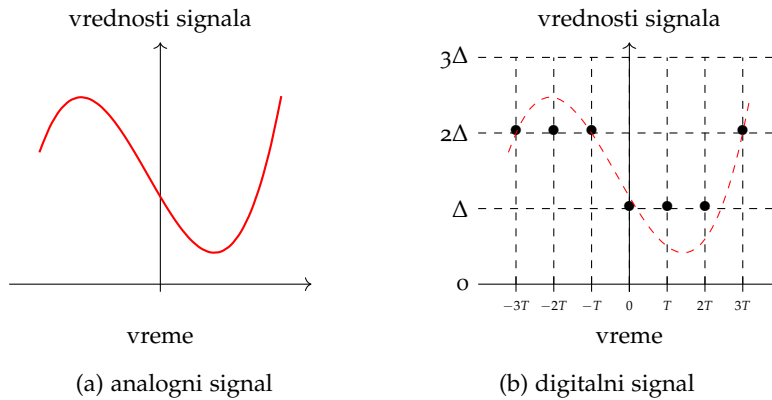


Slika 1: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon vremenske kvantizacije (impulsni signal). Vrednosti impulsnog signala mogu biti proizvoljne, ali su dobro definisane samo na diskretnom skupu trenutaka.



Slika 2: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon nivojske (amplitudske) kvantizacije (relejni signal). Relejni signal je dobro definisan u proizvoljnom trenutku vremena, ali može uzimati vrednosti amplitude samo vrednosti iz diskretnog skupa.

Namera nam je da u ovom poglavlju objasnimo principe analogno-digitalne konverzije. Razmotićemo ključne fizičke fenomene, sa



Slika 3: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon vremenske i kvantizacije po nivou (digitalni signal). Digitalni signal u diskretnim trenucima vremena uzima vrednosti amplitude iz datog diskretnog skupa.

aspekta obrade signala u cilju lakšeg matematičkog opisivanja istih u nastavku ovog teksta.

1.2 A/D konverzija

U toku procesa A/D konverzije analogni signal se zamenjuje digitalnim kroz postupke vremenske i amplitudske (nivojske) kvantizacije.

U procesu diskretizacije, vrednosti analognih signala se beleže samo u određenim, jasno definisanim vremenskim trenucima koje nazivamo trenucima odabiranja, tj. trenucima odbirkovanja. Vrednosti signala između trenutaka odabiranja se odbacuju, ne uzimaju se u obzir. U velikoj većini praktično interesantnih slučajeva interval između dva trenutka odabiranja je konstantne dužine, te je samo odabiranje periodičan proces. U tom se slučaju interval između dva trenutka odabiranja naziva periodom odabiranja, a za samo odabiranje se kaže da je *jednoliko* ili *uniformno*. Period odabiranja se obično obeležava sa T . U okviru ovog teksta u najvećem broju slučajeva posmatraćemo isključivo slučaj jednolikog odbirkovanja, te to dalje nećemo posebno naglašavati. Postupak A/D konverzije razdvojićemo u dve celine: *vremensko odbirkovanje*, koje će se pokazati kao ključno i dominantno u studiji digitalnih upravljačkih sistema i *amplitudska diskretizacija*, koja unosi nelinearnosti u čitav postupak, ali se taj efekat u većini slučajeva može zanemariti.

Operaciju vremenskog odbirkovanja obeležavaćemo zvezdicom u gornjem desnom indeksu. Sa f^* ćemo obeležavati signal f kvantovan (diskretizovan) po vremenu. Pretpostavićemo, bez gubitka opštosti, da je proces odbirkovanja sinhronizovan sa početnim (nultim) vremenskim trenutkom. Drugim rečima, pretpostavićemo da se odbirkovanje vrši u trenucima $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $t_2 = 2T$, itd. Uopšte, k -ti odbirak se uzima u trenutku $t_k = kT$, gde je T period odbirkovanja. Signal f^* možemo zapisati u sledećem obliku

$$f^*(t) = \begin{cases} f(kT) & , \quad t = kT \\ \text{nedefinisano} & , \quad t \neq kT \end{cases} \quad (1)$$

U intervalu između dva trenutka odabiranja vrednost vremenski odbirkovanog signala nije definisana, što je i jasno naglašeno u prethodnom izrazu (1). Podsećamo, da signal f^* koji je vremenski diskretan a amplitudski kontinualan nazivamo impulsnim signalom. Uvedeni naziv će biti opravdan izlaganjima koja slede. Vremenska kvantizacija ilustrovana je dijagramima na slici 1.

Sem vremenskog odbirkovanja, u procesu diskretizacije dolazi i do amplitudskog (nivojskog) odbirkovanja signala ili kvantizacije. Naime, vrednosti signala se pohranjuju u digitalne registre (memorijske lokacije) konačne širine. Širina registra se definiše brojem bita i određuje rezoluciju A/D konvertora. U praksi se najčešće sreću konvertori širine 8, 12 i 16 bita. U registar širine n bita može biti pohranjeno 2^n različitih vrednosti. Otuda je razlika između dve uzastopne vrednosti koje se mogu prikazati u digitalnom registru širine n bita izražena u procentima punog opsega

$$\Delta = \text{LSB} = \frac{100\%}{2^n - 1}.$$

Jasno, što je Δ manje, odnosno što je n veće, to je veća preciznost A/D konvertora i manja je greška koju konverzija unosi. Skraćenica LSB potiče od engleskog termina „Least Significant Bit”, u značenju „bit najmanje značajnosti”. Pri promeni digitalnog zapisa vrednosti signala za jedan na najmanje značajnom mestu, odgovarajuća promena reprezentovane analogne veličine je Δ . Nije teško zaključiti da je greška koja se unosi u procesu amplitudske kvantizacije manja ili jednaka $\frac{\Delta}{2}$. Ukoliko je merni uređaj podešen tako da meri vrednosti signala u opsegu (f_{\min}, f_{\max}) , tada možemo pisati

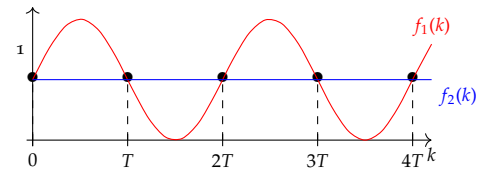
$$\tilde{f}(t) = f_{\min} + j\Delta, \quad (2)$$

gde je j nenegativan ceo broj ($j \in \mathbb{Z}$) takav da važi

$$|f(t) - (f_{\min} + j\Delta)| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (3)$$

Prethodni izraz ukazuje da će nakon nivojske (amplitudske) kvantizacije signali uzeti najbližu raspoloživu diskretnu vrednost. Signal \tilde{f} koji je odbirkovan samo nivojski, ali ne i vremenski, nazivamo relejnim signalom. Relejni signal je dobro definisan u svakom trenutku vremena, vrednosti može menjati u bilo kom trenutku, ali može uzimati samo vrednosti iz diskretnog skupa $f_{\min} + j\Delta, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Proces amplitudske kvantizacije ilustrovan je slikom 2. Čitaocu skrećemo pažnju da se u registrima digitalnog uređaja zapisuju samo celi

Na slici 4 prikazan je važan fenomen, koji ćemo mnogo puta ponoviti tokom ovog teksta, a to je da dva različita vremenska signala f_1 i f_2 mogu imati isti diskretni ekvivalent f^* , odnosno da su u daljoj obradi diskretnog signala, oni za nas identični



Slika 4: Vremenska diskretizacija dva različita signala f_1 i f_2 u vremenskom domenu, koji daju isti diskretn signal

Realni A/D konvertori nisu podjednako precizni čitavom širinom radnog opsega. Pomenuti nelinearni efekat je međutim, sekundaran i nije od većeg značaja za dalja razmatranja u okviru ovog teksta, te ga od sada zanemarujemo. Odnosno, po pravilu broj bita, koji se koristi prilikom konverzije je dovoljan da se ovaj efekat može zanemariti. Što praktično znači, da je vremenska diskretizacija dominantna i da ćemo samo nju matematički opisivati u nasatvku.

brojevi $0, 1, 2, \dots, n-1$, a da se ovi brojevi tek na osnovu poznavanja kalibracije mernog uređaja i svojstava A/D konvertora interpretiraju kao brojne vrednosti $f_{\min}, f_{\min} + \Delta, f_{\min} + 2\Delta, \dots, f_{\min} + (n-1)\Delta$.

Digitalni signal je signal koji je jednovremeno odbirkovan (diskretizovan, kvantovan) kako po vremenu tako i po amplitudi. Otuda bi se za digitalni signal mogla koristiti oznaka

$$\tilde{f}^*(t) = \begin{cases} f_{\min} + j\Delta & , \quad t = kT, f(kT) \in f_{\min} + [(j - \frac{1}{2})\Delta, (j + \frac{1}{2})\Delta) \\ \text{nedefinisano} & , \quad t \neq kT \end{cases} . \quad (4)$$

Dijagrami na slici 3 ilustruju efekte vremenske i nivojske kvantizacije signala, odnosno promene koje u analogni signal unosi postupak analogno-digitalne konverzije.

Kvantizacija, kako vremenska tako i amplitudska, izobličava signal. Međutim, postoji bitna razlika između prirode izobličenja koje unose vremensko i amplitudsko odbirkovanje. *Postupak vremenske kvantizacije je linearan*. Za ma koja dva signala f i g , te za ma koje dve skalarne veličine a i b , važi

$$(af(t) + bg(t))^* = af^*(t) + bg^*(t) .$$

Nasuprot tome, proces nivojske kvantizacije je nelinearan

$$\overline{af(t) + bg(t)} \neq a\tilde{f}(t) + b\tilde{g}(t) .$$

Otuda je formalna analiza efekata vremenske kvantizacije daleko jednostavnija od formalne analize efekata amplitudske. *Srećom, u savremenim sistemima automatskog upravljanja odbirkovanje po vremenu je dominantan efekat, a nivojska kvantizacija se obično može zanemariti*. To je upravo pristup koji ćemo prihvatiti u okviru ovog teksta.

Da rezimiramo, smatraćemo da A/D konvertor unosi isključivo vremensku diskretizaciju, te da vrednosti signala nakon diskretizacije mogu biti proizvoljne. Otuda ćemo sve razmatrane signale suštinski smatrati impulsnim, što nećemo posebno naglašavati. Signal f^* ćemo često nazivati povorkom odbiraka signala f .

1.3 D/A konverzija

U procesu digitalno-analogne konverzije vrši se aproksimacija analognog signala na osnovu njegovih odbiraka. Postupak rekonstrukcije vrednosti funkcije između trenutaka naziva se i intepolacija. U najčešće sretanom slučaju vrednosti signala se jednostavno zadržavaju (ostaju nepromenjene) između dva uzastopna trenutka odabiranja. U tom slučaju, digitalno-analogni konvertor se uspešno opisuje kao

jasno definisanim trenucima između dva intervala odabiranja, digitalni regulatori imaju nešto manju slobodu pri izdavanju upravljanja u odnosu na analogne regulatore. Ove i slične nedostatke, međutim, digitalni uređaji u potpunosti nadomešćuju svojom prilagodljivošću i fleksibilnošću, mogućnošću jednostavne izmene parametara i strukture upravljačkog algoritma. Konačno, digitalni uređaji omogućavaju implementaciju mnogih naprednih upravljačkih algoritama koji bi se veoma teško implementirali u analognoj tehnici. Izlaz iz *Računara* je digitalna veličina $u(kT)$, koja se kroz *D/A* konevrtor prilagođava kontinualno karakteru *Procesa*, pri čemu podsećamo da pod našom pretpostavkom da *D/A* radi kao Kolo zadržke nultog reda upravljačka promenjiva se ne menja u toku jedne periode odabiranja.

Primer 1 (Pseudokod diskretnog PI regulatora). U okviru primera, namera nam je da pokažemo, diferencnu jednačinu, koja opisuje jednu moguću verziju PI algoritma upravljanja

$$u((k+1)T) = K_p * e(kT) + I((k-1)T) + K_i * e(kT) * T + u_0;$$

i odgovarajući pseudokod, koji bi pratio implementaciju diferencne jednačine

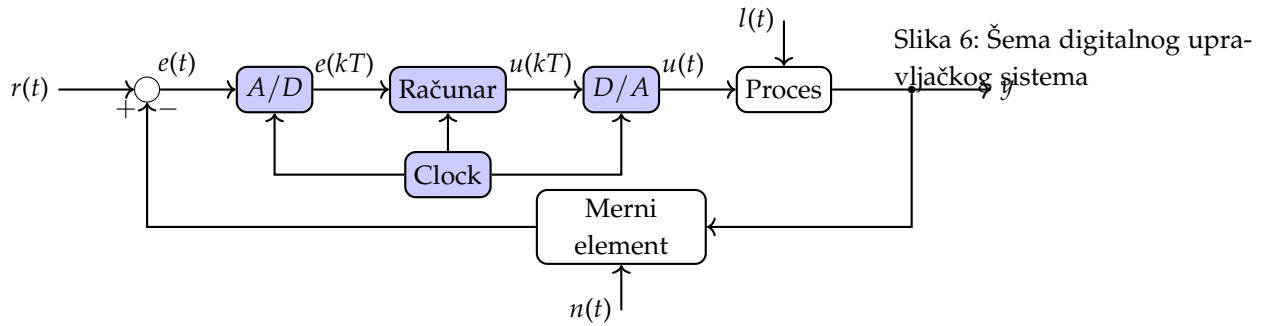
```

1 error_prior = 0
2 integral_prior = 0
3 KP = value for Kp
4 KI = value for Ki
5 bias = 0
6 while(1) {
7     error = desired_value - actual_value
8     integral = integral_prior + KI*error * iteration_time
9     output = KP*error + integral + bias
10    error_prior = error
11    integral_prior = integral
12    sleep(iteration_time)
13 }
14
```

Ovaj primer služi samo da uvede čitaoca u materiju i da razume formu diskretnih algoritama i mogućih softverskih izvedbi. Detaljno izvođenje, ovih i sličnih algoritama biće detaljnije razmatran kasnije.

Važno je napomenuti da sat ili *Clock* naglašava činjenicu da digitalni uređaji (računar) najčešće očitavaju vrednosti spoljašnjih signala periodično. Isto tako, periodično se osvežavaju i vrednosti upravljačkih signala. Vremenski interval između dva uzastopna osvežavanja ulaznih i izlaznih signala digitalnog uređaja nazivali smo intervalom odabiranja, ili češće periodom odabiranja. *Unutar intervala odabiranja povratna sprega je efektivno prekinuta i objekat upravljanja radi u otvorenoj sprezi.*⁴

⁴ Pogledti poslednji red pseudokoda u Primer 1



Slika 6: Šema digitalnog upravljačkog sistema

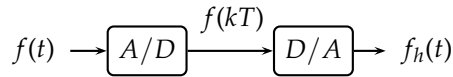
Pri projektovanju upravljačkog algoritma neophodno je odrediti matematički model procesa „sa stanovišta digitalnog regulatora”, odnosno odrediti vezu između digitalnog upravljačkog i digitalnog (ili digitalizovanog) merenog signala. Postupak formiranja vremenski diskretnog modela „ekvivalentnog” vremenski kontinualnom modelu procesa naziva se diskretizacijom (ili ponekad: digitalizacijom) vremenski kontinualnih (analognih) modela. Ovoj tematici su posvećena poglavlja koja slede.

3 Matematički model odabiranja i zadržske

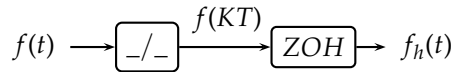
U okviru ovog, po naešm mišljenju centralnog poglavlja, razmotrićemo matematičke modele A/D i D/A koverzije, kao i izmene u matematičkim formalizmima i načinu razmišljanja, koje ovi elementi uvode u sisteme automatskog upravljanja. Ako pogledamo sliku 6, suštinski jedina dva nova elementa⁵, koje nismo razmatrali u okviru kontinualnih sistema automatskog upravljanja jesu A/D i D/A konvertor i ponavljamo cilj nam je da ih matematički opišemo. Kao što je poznato matematički modeli su svojevrsna karikatura realnog sistema, odnosno u modelovanju naglašavamo dominantne osobine, a neke manje važene svesno zanemarujemo.

Sa slike 6 ćemo izdvojiti A/D i D/A konvertor i staviti ih u rednu vezu slika 7. Što bi suštinski značilo, na ulazu se nalazi kontinualni signal $f(t)$, koji prolaskom kroz A/D konvertor postaje diskretni signal $f(kT)$, a u nastavku D/A konverzijom iz ovog diskretnog signala dobijamo kontinualni signal $f_h(t)$. Važno je primetiti, da signal sa izlaza $f_h(t)$ nije jednak signalu sa ulaza $f(t)$, bez obzira što nije izvršena nikakva suštinska obrada signala, već „samo” transformacija u diskretni oblik i odmah zatim vraćanje u kontinualnu formu. Ova izmenjenost ulaznog signala, je logična posledica gubitka dela informacije prilikom diskretizacije i načina interpolacije karakteristične za D/A konverziju (pogledati prethodna poglavlja).

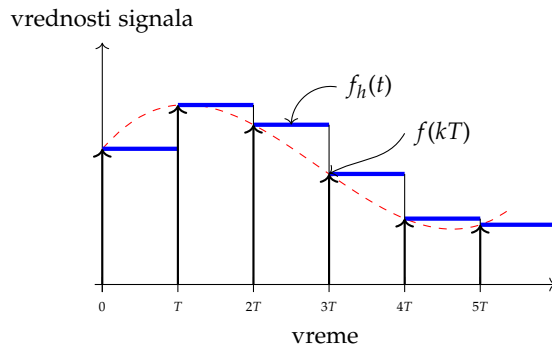
⁵ Pošli smo od činjenice da je regulator postojao u kontinualnim sistemima automatskog upravljanja, a da je na njegovo mesto došao digitalni uređaj.



U cilju dobijanja adekvatnog matematičkog modela, kojim bi se dobila veza između ulaznog signala $f(t)$ i izlaznog signala $f_h(t)$, usvojicemo određene pretpostavke. Prva pretpostavka da A/D konvertor radi, kao idealan odabirač, što znači da se odbirici sa slike 1 mogu predstaviti kao povorka ponderesanih Dirakovih impulsa, čija je površina jednaka amplitudi odbirka.⁶ Druga pretpostavka je da D/A konvertor radi, kao kolo zadržke nultog reda, odnosno da se interpolacija vrednosti signala između trenutaka odabiranja vrši polinomijalnom aproksimacijom, konkretno polinomom nultog reda (eng. *Zero Order Hold*, ZOH). Uz ove pretpostavke slika 7 sad dobija sledeći oblik



U skladu sa aproksimacijama, koje smo usvojili, na slici 9 smo prikazali signale $f(t)$, $f(kT)$ i $f_h(t)$



Da bismo lakše formulisali vezu između signala sa slike, posmatraćemo prvo signal $f_h(t)$, u intervalu od $0 \leq t < T$, kao na slici 10. Na osnovu teorije sistema automatskog upravljanja, slaganja signala, lako možemo izvesti da je

$$f_h(t) = f(0) [h(t) - h(t - T)], \quad \text{za } 0 \leq t < T, \quad (5)$$

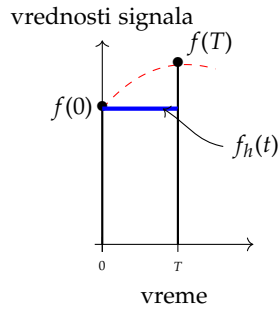
gde je $h(t)$ Hevisajdov odskočni signal, $f(0)$ vrednost signala $f(t)$ u trenutku odabiranja $k = 0$ (1). Prateći rezon, prikazan na ovom ograničenom intervalu vremena, lako možemo uopštiti izraz (5) na ceo vremenski interval, gde dobijamo

Slika 7: A/D i D/A konverzija u postupku izvođenja matematičkog modela odabiranja i zadržke

⁶ Ovo praktično znači da je za nas digitalni signal u stvari impulsni signal, gde impulsi imaju zanemarljivu širinu.

Slika 8: Ilustracija matematičkog modela odabiranja i zadržke uz pretpostavku da A/D konvertor radi kao idealni odabirač, a D/A konvertor ima funkciju kola zadržke nultog reda

Slika 9: Signali pre i posle idealnog odabirača i kola zadržke nultog reda



Slika 10: Signali pre i posle idealnog odabirača i kola zadržke nultog reda u intervalu $0 \leq t < T$

$$\begin{aligned} f_h(t) = & f(0) [h(t) - h(t - T)] + \\ & + f(T) [h(t - T) - h(t - 2T)] + \\ & + f(2T) [h(t - 2T) - h(t - 3T)] + \\ & + f(3T) [h(t - 3T) - h(t - 4T)] + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Odnosno, u kompaktnijoj formi

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [h(t - kT) - h(t - kT - T)] \quad (7)$$

S obzirom da je signal f_h na izlazu kola zadržke vremenski kontinualan, možemo ga analizirati primenom Laplasove transformacije. Kako je $\mathcal{L}\{h(t - \tau)\} = \frac{1}{s}e^{-s\tau}$, bez većih problema nalazimo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_h(t)\} = F_h(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \frac{1}{s} (e^{-skT} - e^{-s(kT+T)}) \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT}. \end{aligned} \quad (8)$$

Izraz (3) ima centralnu ulogu u našim budućim razmatranjima. Veliki broj osobina diskretnih sistema upravo sledi iz ovog izraza i biće predmet naših razmatranja u poglavljima, koja slede. Ovaj izraz (3) objedinjuje matematički model odabiranja i zadržke, odnosno A/D i D/A konverzije i u tom izrazu, drugi član

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} \quad (9)$$

u jedinstvenom modelu odabiranja i zadržke predstavlja, idealni odabirač, a $F^*(s)$ ⁷ se naziva Komplexni lik povorke odbiraka ili tačnije Komplexni lik idealno odbirkovanog signala. Kada bi se malo logički vratili unazad, $F^*(s)$ predstavlja matematički model A/D

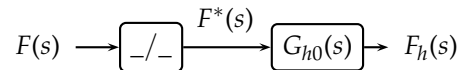
⁷ U literaturi funkcija kompleksne promenljive označena sa * predstavlja tzv. Zvezda transformaciju (eng. *Star transform*), ovaj termin uz dodatna pojašnjenja, korišćemo u delovima teksta, koji sledi.

konvertora, koji važi pod ranije usvojenim pretpostavkama. Preostali deo izraza (3), respektujući deo, koji predstavlja idealni odabirač (3), daje funkciju prenosa kola zadržke nultog reda, odnosno našeg pretpostavljenog oblika D/A konvertora

$$G_{h0}(s) = \frac{F_h(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \quad (10)$$

gde je $G_{h0}(s)$ oznaka za funkciju prenosa kola zadržke nultog reda.

Konačno, naš matematički model odabiranja i zadržke, započet opisom slike 7, dobija oblik funkcije prenosa slika 11, koji je pogodan za dalju analizu i primenu.



Slika 11: Matematički model odabiranja i zadržke u formi funkcije prenosa.

Radi potpunosti ovog teksta, kratko ćemo se osvrnuti na rekonstrukciju vrednosti signala između dva trenutka odabiranja, odnosno na D/A konverziju. Najčešći način rekonstrukcije signala ovog tipa je polinomijalna interpolacija. Tako npr ako želimo da utvrdimo vrednost signala $f_h(t)$ između dva trenutka odabiranja $kT \leq t < (k+1)T$, možemo iskoristi Tejlorovu formu razvoja u red, koristeći poznate vrednosti signala f (i njegovih izvoda) u tački KT

$$f_h(t) = f(kT) + f'(kT)(t - KT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t - KT)^2 + \dots \quad (11)$$

Ako se prilikom rekonstrukcija signala (11), uzme u obzir samo prvi član izraza sa desne strane znaka jednakosti

$$f_h(t) = f(kT), \quad (12)$$

naš pretpostavljeni D/A konvertor će raditi kao kolo zadržke nultog reda⁸ ili produživač signala (pamti vrednost dok ne dođe sledeća). Ova aproksimacija je svakako najmanje tačna, ali izvesno najjednostavnija u praktičnoj implemetaciji, što joj daje i najveću potentnost u praktičnoj primeni.

Sa druge strane, ako se u rekonstrukciji signala (11) koristite prva dva člana izraza sa desne strane znaka jednakosti

$$f_h(t) = f(kT) + f'(kT)(t - KT). \quad (13)$$

D/A konvertor se naziva Kolo zadržke prvog reda (enl. First Order Hold, FOH). Bez obzira, što je ova aproksimacija po pravilu tačnija, nego kod kola zadržke nultog reda, praktična implementacija je značajno složenija. Naime, za numeričku interpretaciju diferencijala prvog reda, potrebno nam je poznavanje vrednost funkcije $f(t)$ u

⁸ Sada je jasno da se atribut "nultog reda" odnosi na red polinoma, koji se koristi u interpolaciji signala između dva trenutka odabiranja

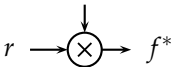
bar dve tačke odabiranja (npr. $f(k)$ i $f(k-1)$) što dodatno usložnjava konstrukciju D/A konvertora, koji sad zahteva memorijski element i dodatno vreme konverzije za izračunavanje izvoda u tački. Čitaocu prepuštamo, da pokuša samostalno i uz pomoć preporučene literature izvede funkciju prenosa kola zadržke prvog reda.

U nastavku teksta, analiziraćemo frekventne karakteristike idelnog odabirača i kola zadržke nultog reda. Osobine, koje iz ove analize slede, dramatično utiču na ponašanje digitalnih upravljačkih sistema, tako da zaslužuju našu posebnu pažnju.

Numerička interpretacija diferencijala je od posebnog značaja u digitalnim upravljačkim sistemima i posebni ćemo se baviti tom temom u poglavljima, koja slede.

4 Osobine idealno odbirkovanog signala

Sada ćemo ispitati vezu između frekvencijskog sadržaja (spektralnih svojstava) polaznog analognog signala i njemu odgovarajućeg idealno odbirkovanog signala. Konkretno, bavićemo se pitanjem pod kojim se uslovima i na koji način originalan, analogni signal može rekonstruisati iz svojih odbiraka. Razmatranja u nastavku su u tesnoj vezi sa periodičnošću kompleksnog lika povorke odbiraka.

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$


Interesantno je primetiti da je povorka jediničnih Dirakovih impulsa periodičan signal sa periodom jednakim periodu odabiranja. Dalje, svaki periodičan signal se može razviti u red kompleksnih eksponencijalnih funkcija – Furijeov red. Konkretno, svaki periodičan signal s sa periodom T se može zapisati u obliku

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t},$$

gde se koeficijenti razvoja računaju na osnovu izraza

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Pri izračunavanju koeficijenata Furijeovog razvoja integracija se vrši u intervalu $(-T/2, T/2)$. Kako impulsi deluju u trenucima odabiranja, dakle u trenucima $0, \pm T, \pm 2T, \dots$ jedini impuls aktivan u intervalu integracija jeste centralni impuls, $\delta(t)$. Otuda je

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T},$$

te je posledično

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn \frac{2\pi}{T} t}. \quad (14)$$

Slika 12: Postupak idealnog odbirkovanja kao amplitudska modulacija povorke jediničnih Dirakovih impulsa.

Razvojem povorke Dirakovih impulsa u Furijeov red, data je povorka prikazana u vidu superpozicije kompleksnih eksponencijalnih signala. Koristeći se dobro poznatom teoremom o pomeranju kompleksnog lika Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a),$$

neposredno nalazimo vezu između Laplasove transformacije analognog signala i Laplasove transformacije njemu odgovarajućeg idealno odbirkovanog signala. Konkretno, idealno odbirkovani signal možemo zapisati u obliku

$$f^*(t) = f(t)s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)e^{jn\frac{2\pi}{T}t}.$$

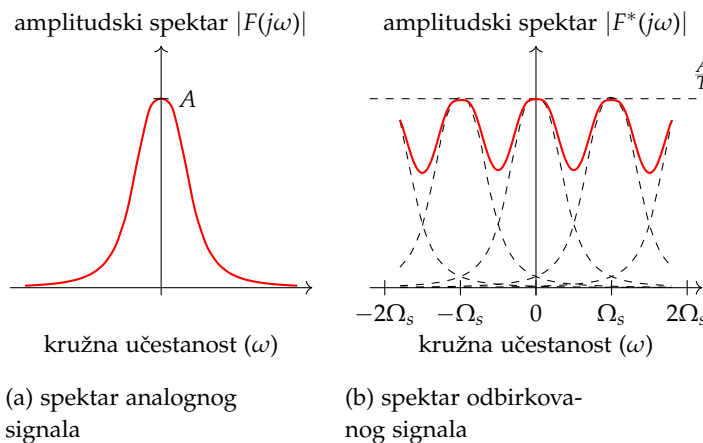
Stoga je

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\},$$

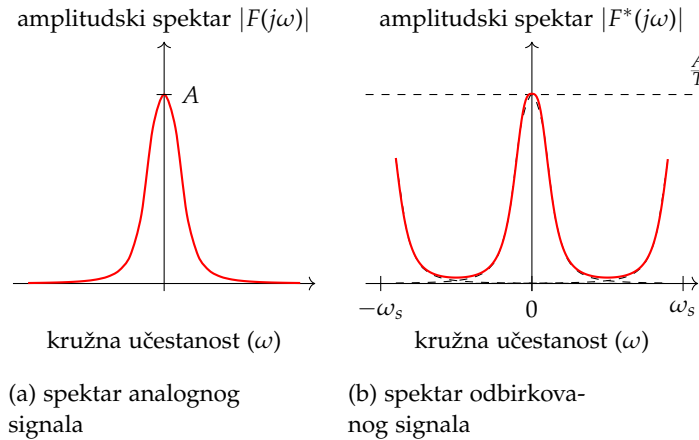
odnosno

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\frac{2\pi}{T}). \quad (15)$$

Prethodno dobijeni izraz jasno iskazuje vezu između kompleksnih likova idealno odbirkovanog i polaznog, analognog signala. *Primarni efekat odbirkovanja jeste da se spektar analognog signala beskonačno multiplicira, preslikava simetrično oko svakog celobrojnog umnoška kružne učestanosti odabiranja.* Ova pojava je shematski ilustrovana dijagramom na slici 13. Nakon odbirkovanja polazni spektar se preslikava oko učestanosti $\pm \frac{2\pi}{T}$, $\pm 2\frac{2\pi}{T}$, ... Ukupni spektar nakon odbirkovanja se dobija zbrajanjem svih slika originalnog spektra. Očigledno je sa dijagrama na slici 13 da će dobijeni spektar biti izobličen ukoliko se slike spektra analognog signala međusobno preklapaju.



Slika 13: Na slici levo prikazan je amplitudski spektar nekog analognog signala $|F(j\omega)|$. Na slici desno prikazan je amplitudski spektar istog signala nakon odbirkovanja $|F^*(j\omega)|$. Slika ilustruje slučaj isuviše male frekvencije odabiranja.



Slika 14: Na slici levo prikazan je amplitudski spektar analognog signala $|F(j\omega)|$. Na slici desno prikazan je amplitudski spektar istog signala nakon odbirkovanja $|F^*(j\omega)|$. Slika ilustruje slučaj pravilnog izbora frekvencije odabiranja. Obratiti pažnju da se spektar analognog signala može „rekonstruisati” na osnovu spektra diskretizovanog signala, izdvajanjem centralnog dela spektra širine ω_s .

Ukoliko se, međutim, pojedine slike ne preklapaju, tada je moguće potpuno rekonstruisati spektar analognog iz spektra idealno odbirkovanog signala. Drugim rečima, moguće je potpuno rekonstruisati signal iz odbiraka. Očigledno je na osnovu dijagrama sa slike 13 da do preklapanja slika neće doći ukoliko je analogni signal ograničenog spektra, tj. ukoliko je $|F(j\omega)| = 0$ za svako $|\omega| > \omega_{\max}$, te ukoliko je najveća frekvencija u signalu ω_{\max} barem dvostruko manja od frekvencije odbirkovanja. Ukoliko sa $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ označimo kružnu učestanost odabiranja, tada je signal moguće idealno rekonstruisati iz svojih odbiraka jedino ukoliko je

$$\omega_{\max} < \frac{1}{2} \omega_s. \quad (16)$$

Ilustracije radi, ovakav slučaj je prikazan dijagramom na slici 14.

Jasno, ukoliko ne dolazi do preklapanja preslikanih spektara, tada se spektar polaznog analognog signala, te dakle i sam analogni signal mogu rekonstruisati prostim filtriranjem idealno odbirkovanog signala pomoću odgovarajućeg niskopropusnog filtra. *U tom je slučaju kompleksni lik analognog signala $F(s)$ zapravo jedna perioda kompleksnog lika povorke odbiraka $F^*(s)$.* Ovo zapažanje čini srž dobro poznate Teoreme odabiranja.

Tvrđenje 1 (Teorema odabiranja. Nikvist-Šenonova teorema.). Ukoliko je spektar signala f identički jednak nuli za sve učestanosti veće ili jednake ω_{\max} , tj. ukoliko je $F(j\omega) = 0$ za svako $\omega \geq \omega_{\max}$ i ukoliko je frekvencija odbirkovanja $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ veća od $2\omega_{\max}$ tada se signal f može idealno rekonstruisati iz svojih odbiraka.

Za datu frekvenciju odabiranja ω_s učestanost najbrže dopustive spektralne komponente je $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$. Ova učestanost se naziva Nikvistovom učestanošću.

Teorema odabiranja tvrdi da je idealnu rekonstrukciju moguće ostvariti ukoliko se signal menja dovoljno sporo. Zapravo, svaka po-

vorka odbiraka odgovara neograničenom broju međusobno različitih kontinualnih signala. Rekonstrukciju je moguće ostvariti ukoliko je traženi signal ujedno i „najsporiji” mogući. Idealna rekonstrukcija se postiže propuštanjem idealno odbirkovanog signala kroz idealni niskopropusni filter koji odseca sve spektralne komponente na učestanostima iznad Nikvistove učestanosti. *Na žalost, idealni niskopropusni filter nije moguće realizovati.* U praksi se rekonstrukcija vrši pomoću različitih sklopova, najčešće pomoću „kola zadržke nultog reda” koje između dva trenutka odabiranja zadržava vrednost prethodnog odbirka. O kolu zadržke nultog reda biće više reči u nastavku. Pokazaćemo, između ostalog, da se ovakav sklop zaista ponaša kao neidealni filter propusnik niskih učestanosti.

Primer 2.

Posmatrajmo prostoperiodične signale

$$f_1(t) = \cos(2\pi t),$$

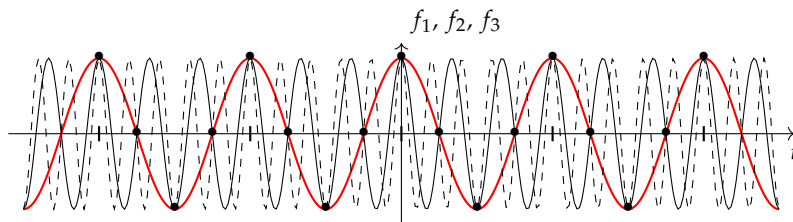
$$f_2(t) = \cos(2\pi t + \frac{2\pi}{T}t),$$

$$f_3(t) = \cos(2\pi t + 2\frac{2\pi}{T}t),$$

koji se odbirkuju periodom $T = 0.5$. Jasno je da će vrednosti sva tri signala u trenucima odabiranja biti identične. Naime, za svako celobrojno n i svako realno ω , važi

$$\cos(\omega kT + n\frac{2\pi}{T}kT) = \cos(\omega kT + nk2\pi) = \cos(\omega kT).$$

Drugim rečima, nemoguće je razlikovati prostoperiodične signale samo na osnovu njihovih odbiraka ukoliko im se učestanost razlikuje za celobrojan umnožak frekvencije odabiranja. Ova je pojava ilustrovan na dijagramom na slici 15.



Slika 15: Ilustracija primera 2. Signal f_1 prikazan je punom, debelom linijom. Signali f_2 i f_3 prikazani su tankim linijama, punom i isprekidanom tim redom.

Prethodno razmatrani primer jasno ilustruje još jednu neobično važnu pojavu. Naime, ukoliko pretpostavimo da je mereni analogni signal u prethodnom primeru 2 zapravo f_2 , nakon odbirkovanja činiće se da je zapravo odbirkovani signal bio f_1 . Kažemo da je signal f_1 alijas signala f_2 (eng. *alias*). Uopšte pojava da se nakon neadekvatnog odbirkovanja signali više prividno zamenjuju signalima niže

učestanosti naziva se preklapanjem učestanosti ili alijasingom (eng. *aliasing*).

Merene vrednosti procesnih veličina su obično niskofrekventni signali, dok se šumovi merenja i drugi poremećaji veoma često nalaze lokalizovani na višim učestanostima. Pri sintezi sistema automatskog upravljanja, učestanost odabiranja se obično bira relativno niskom, tako da se ovi brzi poremećaji redovno nalaze iznad Nikvistovog opsega. Pri analogno-digitalnoj konverziji, usled pojave preklapanja učestanosti, brzi poremećaji se mogu lažno detektovati u vidu svojih niskofrekventnih alijasa. Da bi se ova pojava predupredila, analogni signal se pre odbirkovanja obavezno filtrira niskopropusnim filtrom koji odseca sve spektralne komponente merenog signala koje se nalaze na učestanostima iznad Nikvistove. Ovakav filter se naziva antialijasing filtrom (eng. *antialiasing filter*).

Napomena 1. Spektralni sadržaj praktično interesantnih signala gotovo nikada nije ograničen, u smislu da se gotovo nikada ne može odrediti granična učestanost ω_{\max} takva da je $|F(j\omega)| = 0$ uvek kada je $\omega > \omega_{\max}$. Uprkos tome, signali koje posmatramo su najčešće *približno lokalizovani* u frekvencijskom domenu, odnosno spektar signala je značajno različit od nule samo u izvesnom opsegu frekvencija. Signali se praktično diskretizuju tako što se perioda odabiranja bira na način da se pravilno odbirkuju ove primarne, dominantne komponente merenog signala.

Napomena 2. Ova napomena je od suštinske važnosti za razumevanje uticaja procesa odabiranja, odnosno multipliciranja spektra, na sisteme automatskog upravljanja. Ako $F(s)$ ima pol u s_1 tada $F^*(s)$ ima polove u $F(s_1 + jn\omega_s)$ gde n pripada skupu celih brojeva ($n \in \mathbb{Z}$). Dokaz ove činjenice, direktno sledi iz (15) i nije je potrebno posebno potvrđivati. Mnogo su interesantnije posledice ovog tvrđenja. To znači da će se polovi iz osnovnog spektra, preslikavati i van tog opsega. Kolo zadržke nultog reda, će kao niskopropusni filter obezbediti postojanje samo polova iz osnovnog dela spektra. Međutim, veći su problem neželjeni polovi, koji postoje u višem delu spektra, a koji se posle odabiranja javljaju i u okviru primarnog pojasa i menjaju dinamiku sistema. Ovaj alijasing efekat se rešava antialijasing filtrom u sklopu A/D konvertora, slično kao što smo već objašnjavali u prethodnom paragrafu.

5 Frekvencijska karakteristika kola zadržke nultog reda

Kolo zadržke vrši interpolaciju vrednosti analognog signala na osnovu odbiraka. U razmatranjima vezanim za Nikvist-Šenonovu teorem zaključili smo da se idealna rekonstrukcija postiže propuštanjem idealno odbirkovanog signala kroz nisko-propusni filter koji odseca spektralne komponente na učestanostima iznad Nikvistove. Od interesa je stoga razmotriti i spektralne karakteristike kola zadržke nultog reda. Frekvencijska karakteristika kola zadržke nultog reda je

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}. \quad (17)$$

S obzirom da je

$$1 - e^{-j\omega T} = e^{-\frac{j\omega T}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}} \right) = e^{-\frac{j\omega T}{2}} 2j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right),$$

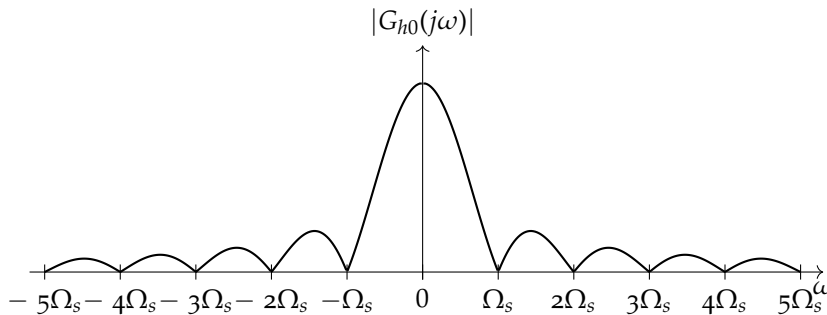
možemo pisati

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega} e^{-\frac{j\omega T}{2}} = T \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{j\omega T}{2}}. \quad (18)$$

Konačno zaključujemo da je

$$|G_{h0}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right|. \quad (19)$$

Amplitudska karakteristika kola zadržke nultog reda prikazana je na slici 16. Vidimo da se kolo zadržke ni u kom slučaju ne može smatrati „idealnim” niskopropusnim filterom. Naime, kolo zadržke unosi izvesno slabljenje u osnovnom opsegu, a što je daleko značajnije, propušta i komponente signala u bočnim opsezima. Ove visokofrekventne komponente idealno odbirkovanog signala koje se ne priguše u dovoljnoj meri u procesu D/A konverzije su odgovorne za skokovitu promenu vrednosti signala na izlazu kola zadržke.



Slika 16: Amplitudska karakteristika kola zadržke nultog reda.

Treba primetiti i još jednu važnu činjenicu, većina fenomena, koji su posledica odabiranja i zadržke su opisane nelinearnim članovima u kompleksnom domenu. Načini prevazilaženja, ovih problema su tema poglavlja, koja slede.

6 Izbor perioda odabiranja

Nikvist-Šenonova teorema daje uslove pod kojima se vremenski kontinualan signal *ograničenog spektra* može idealno rekonstruisati na osnovu vrednosti svojih odbiraka. U praksi se ova teorema koristi aproksimativno, s obzirom da većina signala koji se sreću u praksi ima neograničen spektar. U slučaju određivanja digitalnog ekvivalenta kontinualnog procesa pitanje izbora periode odabiranja se dalje usložnjava, s obzirom da svojstva odziva zavise ne samo od karakteristika samog procesa, već i od svojstava pobude (koja nije poznata u trenutku kada se vrši diskretizacija).

Većina objekata upravljanja ima niskopropusnu frekvencijsku karakteristiku: propušta ili pojačava spore komponente pobudnog signala, a prigušuje brze. Sem toga, u okviru digitalne upravljačke petlje ispred upravljanog procesa se uvek nalazi kolo zadržke (nultog reda) koje je i samo niskopropusnog karaktera. Iza procesa, na ulazu regulacionog uređaja, uvek se nalazi antialijasing filter koji dodatno prigušuje brze komponente merene procesne veličine. Uzimajući sve navedeno u obzir, jasno je da su frekvencijske karakteristike izlaznog signala ograničene frekvencijskim karakteristikama upravljanog procesa. Pri tome, treba voditi računa o tome da upravljački algoritam menja dinamiku upravljanog procesa. Pri izboru periode odabiranja treba imati u vidu željeni propusni opseg procesa nakon zatvaranja povratne sprege, a ne pre.

U postupku odbirkovanja signala neizbežno dolazi do gubitka informacija. Otuda bi se moglo zaključiti da je svaki digitalni upravljački sistem inferioran u odnosu na odgovarajući analogni. Međutim, kvalitet rada upravljačkih sistema i sistema za obradu signala uopšte ne zavisi samo od količine raspoloživih informacija, već i od načina na koji se raspoložive informacije koriste. Upravo se tu nalazi osnovna prednost digitalnih algoritama. Upotreba digitalne tehnike omogućava implementaciju složenijih i fleksibilnijih algoritama, koji se lakše proširuju i prilagođavaju konkretnim problemima. Jasno je, međutim, da se sa povećanjem frekvencije odbirkovanja, odnosno sa smanjenjem trajanja perioda, povećava količina informacija na osnovu kojih digitalni uređaj formira upravljački algoritam, a samim tim se poboljšava i ponašanje upravljanog procesa nakon zatvaranja povratne sprege.

Sem o količini informacija koja se zadržava nakon odbirkova-

nja, pri izboru periode odabiranja treba voditi računa i o vremenu neophodnom da se implementira upravljački algoritam. Digitalni upravljački uređaji periodično osvežavaju vrednosti ulaznih i izlaznih veličina, a u međuvremenu izvršavaju sam upravljački algoritam i vrše druge operacije neophodne za pravilno funkcionisanje uređaja. Ukoliko je period odabiranja isuviše kratak digitalni uređaj neće biti u mogućnosti da izvrši sve operacije neophodne za sračunavanje upravljačkih signala. *Otuda je frekvencija odabiranja sa donje strane ograničena teoremom odabiranja, a sa gornje složenosti upravljačkog algoritma i brzinom digitalnog upravljačkog uređaja.*

Pri izboru periode odabiranja takođe treba voditi računa o tačnosti raspoloživog vremenski kontinualnog (analognog) modela procesa čiji se digitalni ekvivalent traži. Konkretno, većina matematičkih modela dobro opisuje ponašanje procesa na niskim učestanostima, ali postaje sve nepreciznija kako učestanosti ulaznih signala rastu. Izborom visoke učestanosti odbirkovanja širi se Nikvistov pojas, odnosno raste maksimalna učestanost pobudnog signala koju generiše upravljački signal. Brze komponente upravljačkog signala mogu pobuditi nemodelovane komponente dinamike procesa, te se posledično projektovano ponašanje upravljačke petlje može u mnogome razlikovati od ostvarenog. Slično, merne nesigurnosti (šumovi) su tipično lokalizovane na visokim frekvencijama. Izborom dovoljno niske učestanosti odbirkovanja znatan deo mernih nesigurnosti može biti „odsečen” usled prisustva antialiasing filtra. Otuda se izborom relativno velikog perioda odabiranja može poboljšati utpornost upravljačke petlje na šum merenja.

U većini upravljačkih petlji očekuje se dejstvo spoljašnjih poremećaja. Izbor periode odabiranja treba uskladiti i sa dejstvom ovih neželjenih spoljnih uticaja. Odbirkovanje, naime, mora biti dovoljno brzo kako bi upravljački uređaj stigao da dovoljno brzo reaguje na pojavu poremećaja, te ga odgovarajućom upravljačkom akcijom poništi (kompenzuje). U slučajevima kada upravljački uređaj nije u stanju da kompenzuje poremećaj odgovarajućom korektivnom akcijom, neophodno je izdati odgovarajući alarm (signalizaciju kvara). Isuviše velika perioda odabiranja onemogućava pravovremenu reakciju na poremećaj.

Ukoliko se učestanost odbirkovanja izabere isuviše velikom, može doći do problema pri implementaciji digitalnih algoritama. Naime, u tom je slučaju neophodno vršiti izračunavanja sa velikim brojem značajnih cifara. Posledično, veoma brze upravljačke algoritme nije, u opštem slučaju, moguće implementirati na digitalnom uređaju sa malom širinom memorijske reči.

Iskustvena je preporuka da učestanost odbirkovanja treba birati 3 do 4 puta većom od granične učestanosti propusnog opsega procesa.

Granična učestanost se može definisati kao učestanost nakon koje pojačanje procesa pada ispod -3 decibela. Ukoliko označimo kružnu učestanost odbirkovanja sa Ω_s , a graničnu učestanost sa ω_{gr} , možemo pisati

$$\Omega_s \approx (3,4) \cdot \omega_{gr} . \quad (20)$$

U slučaju aperiodičnih procesa, alternativna iskustvena preporuka je da se period odabiranja bira od 4 do 10 puta kraćim od vremena uspona (T_r). Ova preporuka ima kvalitativno isti smisao kao prethodna.

$$T \approx \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right) \cdot T_r \quad (21)$$

U slučaju oscilatornih procesa, pri izboru periode odabiranja naročitu pažnju valja posvetiti frekvenciji sopstvenih oscilacija. Konkretno, položaj polova procesa drugog reda se može opisati pomoću neprigušene prirodne učestanosti ω_0 i koeficijenta relativnog prigušenja ω_n . Nakon zatvaranja povratne sprege koeficijent relativnog prigušenja procesa ξ je najčešće približno 0,7. U tom slučaju, iskustvena preporuka za izbor periode odabiranja je

$$T \approx \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{\omega_0} . \quad (22)$$

U slučaju slabije prigušenih sistema, sopstvene oscilacije su izražene, te je i periodu odabiranja neophodno izabrati nešto kraćom.

Konačno, napominjemo da su svi prethodno navedeni kriterijumi za izbor perioda odabiranja *samo preporuke*. Izbor periode odabiranja je jedno od osnovnih pitanja pri projektovanju digitalnih upravljačkih sistema. Pravilan izbor periode odabiranja u mnogome zavisi od fizičke prirode upravljano sistema, njegove namene, tipa izvršnog organa, kvaliteta merenja, karakteristika raspoloživog upravljačkog hardvera, tačnosti raspoloživog matematičkog modela procesa, tipova očekivanih poremećaja i zahtevnosti upravljačkog algoritma. Sve ove kriterijume treba uzeti u obzir pri konačnom izboru učestanosti odbirkovanja. a i zadržke su opisane nelinearnim članovima u kompleksnom domenu. Načini prevazilaženja, ovih problema su tema poglavlja, koje sledi.