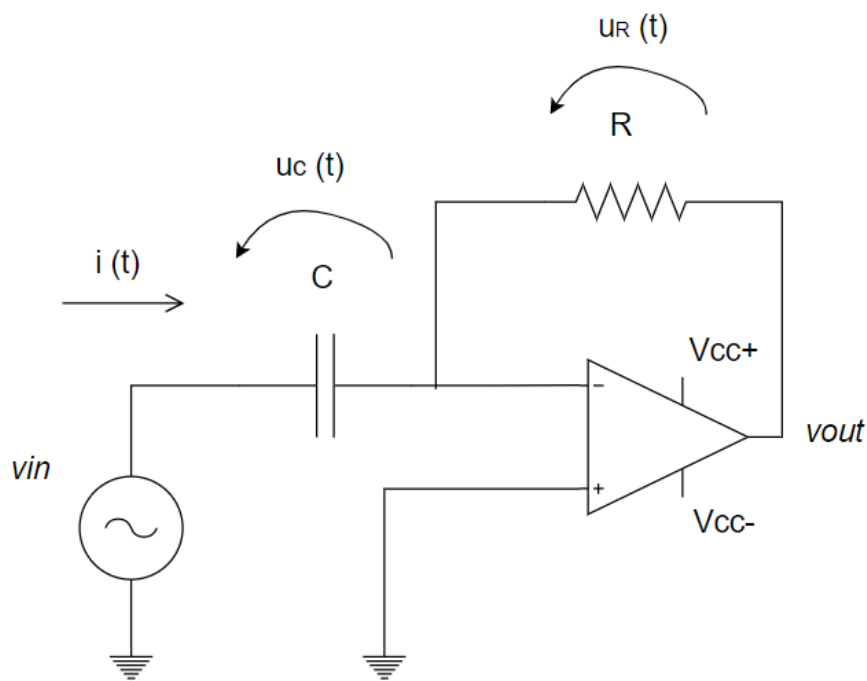


VEŽBA 4

DIFERENCIJATOR

Diferencijator

Diferencijator, ili kolo za diferenciranje, može se realizovati upotrebom operacionog pojačavača u čijoj se povratnoj sprezi nalazi otpornik, a na invertujućem ulazu kondenzator. Idealni diferencijator prikazan je na Slici 1.



Slika 1 – Kolo idealnog diferencijatora sa označenim referentnim smerovima napona i struja.

Jednačina koja opisuje rad diferencijatora pod pretpostavkom da je operacioni pojačavač idealan izvodi se koristeći činjenicu da ista struja teče kroz kondenzator i otpornik.

Struja koja protiče kroz kondenzator izražava se kao:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{d(v_{in}(t) - 0V)}{dt} = C \frac{dv_{in}(t)}{dt},$$

dok se struja koja protiče kroz otpornik izražava kao:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{0V - v_{out}(t)}{R} = \frac{-v_{out}(t)}{R}.$$

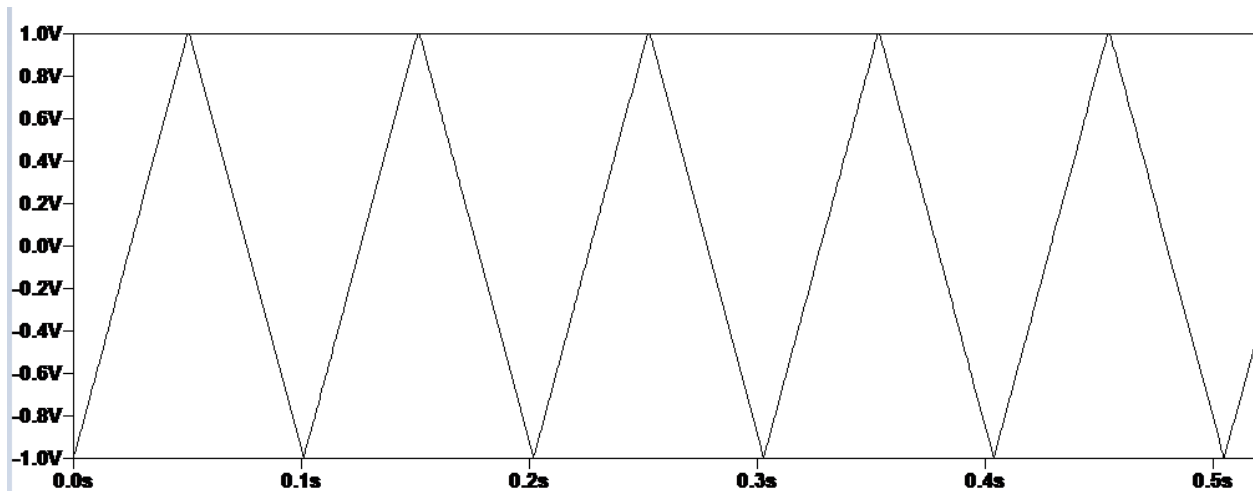
Nakon izjednačavanja ova dva izraza:

$$C \frac{dv_{in}(t)}{dt} = \frac{-v_{out}(t)}{R},$$

može se izraziti i napon na izlazu kola kao:

$$v_{out}(t) = -RC \frac{dv_{in}(t)}{dt}.$$

Zadatak 1. Na ulaz diferencijatora kapacitivnosti 10 nF i otpornosti 500 kΩ dovodi se trougaoni signal periode 0.1 s prikazan na Slici 3. Skicirati 2 periode signala na izlazu ovog kola.



Slika 3 – Signal na ulazu u diferencijator.

Rešenje:

Signal na ulazu kola je periodičan pri čemu se jedna perioda signala može opisati na sledeći način:

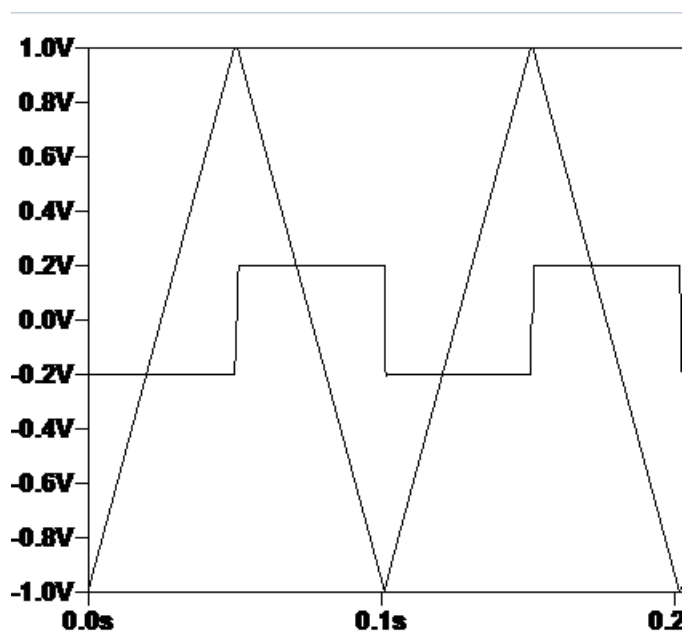
$$v_{in}(t) = \begin{cases} k_1 t + n, & t \in (0, \frac{T}{2}) \\ (k_1 \frac{T}{2} + n) + k_2 (t - \frac{T}{2}), & t \in (\frac{T}{2}, T) \end{cases}$$

Pri tome, n , k_1 i k_2 iznose:

$$n = -1 \text{ V},$$

$$k_1 = \frac{2 \text{ V}}{0.05 \text{ s}} = 40 \frac{\text{V}}{\text{s}},$$

$$k_2 = \frac{-2 \text{ V}}{0.05 \text{ s}} = -40 \frac{\text{V}}{\text{s}}.$$



Slika 4 – Dve periode signala na ulazu i izlazu diferencijatora.

Pošto se izlaz kola računa prema izrazu:

$$v_{out}(t) = -RC \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Za prvu polovinu periode signala, očekivani izlaz iz diferencijatora je:

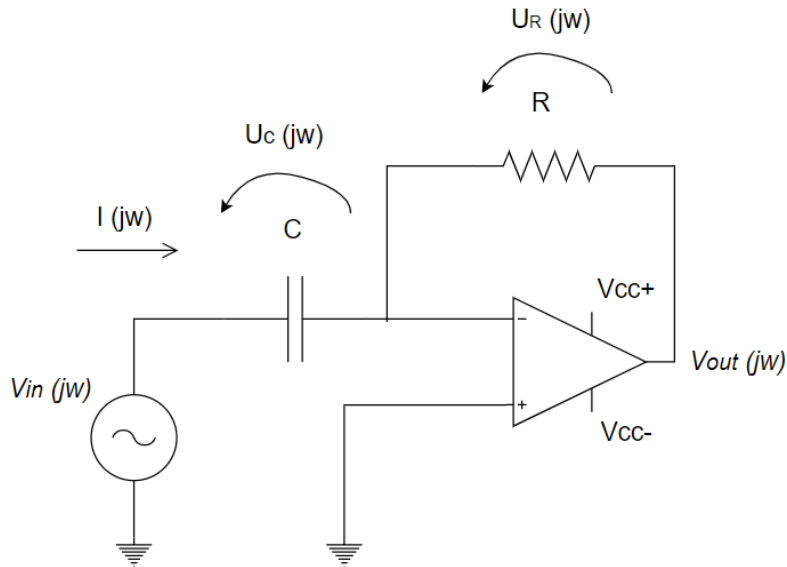
$$v_{out}(t) = -RC \frac{d(k_1 t + n)}{dt} = -RC \frac{d\left(40 \frac{\text{V}}{\text{s}} t - 1\text{V}\right)}{dt} = -5\text{ms} 40 \frac{\text{V}}{\text{s}} = -200\text{mV},$$

dok je za drugu polovinu periode signala, očekivani izlaz jednak:

$$v_{out}(t) = -RC \frac{d\left(\left(k_1 \frac{T}{2} + n\right) + k_2\left(t - \frac{T}{2}\right)\right)}{dt} = -RC \frac{d\left(1V - 40 \frac{V}{s} (t - 0.05s)\right)}{dt} = 5ms \cdot 40 \frac{V}{s} = 200mV.$$

Funkcija prenosa diferencijatora

Analiza kola u frekvencijskom domenu vrši se upotrebom kompleksnih struja i napona. Kolo sa označenim referentnim smerovima kompleksnih struja i napona prikazano je na Slici 5.



Slika 5 – Kolo idealnog diferencijatora sa označenim referentnim smerovima kompleksnih napona i struja.

Kompleksna struja kroz kondenzator se sada može izraziti kao količnik kompleksnog napona koji je generisan na kondenzatoru i impedanse kondenzatora:

$$I(jw) = \frac{U_c(jw)}{Z_c(jw)} = \frac{V_{in}(jw) - 0V}{Z_c(jw)} = \frac{V_{in}(jw)}{\frac{1}{jwC}} = jwC V_{in}(jw),$$

dok se struja koja teče kroz otpornik može izraziti kao količnik napona na otporniku i otpornosti otpornika:

$$I(jw) = \frac{U_R(jw)}{R} = \frac{0V - V_{out}(jw)}{R} = \frac{-V_{out}(jw)}{R}.$$

Izjednačavanjem ove dve struje:

$$I(j\omega) = \frac{-V_{out}(j\omega)}{R} = j\omega C V_{in}(j\omega)$$

može se izraziti količnik izlazne i ulazne veličine, što predstavlja funkciju prenosa kola:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -j\omega CR,$$

odnosno,

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -sCR.$$

Na osnovu funkcije prenosa može se zaključiti da kolo ima nulu u nuli.

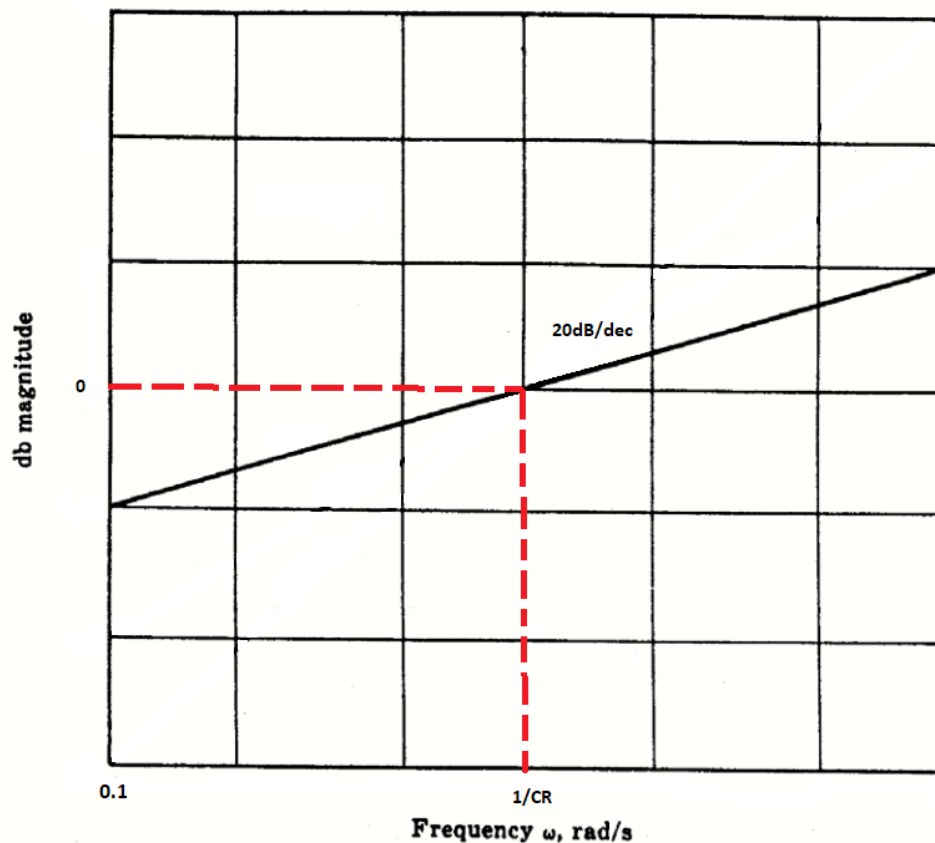
Amplitudska karakteristika kola se može izraziti kao:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \sqrt{(-\omega CR)^2} = \omega CR,$$

dok, kada se izrazi u decibelima, dobija se:

$$20 \log \left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = 20 \log \omega CR,$$

i prikazana je na Slici 6.

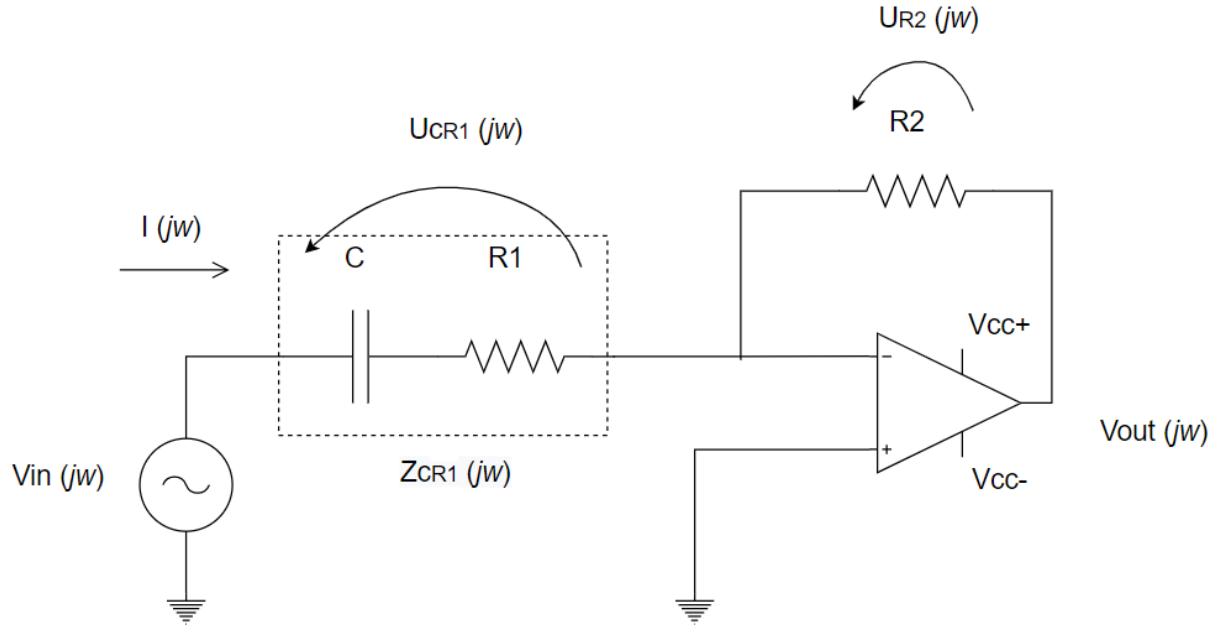


Slika 6 – Bodeova amplitudska karakteristika idealnog diferencijatora.

Na osnovu karakteristike može se zaključiti da kolo ima veliko pojačanje na visokim frekvencijama. Pošto se na visokim frekvencijama javlja šum, ovo kolo se u praksi ne koristi. Umesto toga se koristi praktičan diferencijator.

Praktičan diferencijator

Praktičan diferencijator u odnosu na kolo idealnog diferencijatora ima dodati pol u funkciji prenosa. Ovo se postiže dodavanjem otpornika redno vezanog sa kondenzatorom koji se nalazi na invertujućem ulazu kola. Dodati pol uzrokuje zaravnjivanje amplitudske karakteristike kola, i omogućava diferencijiranje samo do granične učestanosti koja je određena učestanošću tog pola. Kolo je prikazano na Slici 7.



Slika 7 – Kolo praktičnog diferencijatora sa označenim referentnim smerovima kompleksnih napona i struja.

Struja kroz rednu vezu kondenzatora i otpornika koji se nalaze na invertujućem ulazu kola može se izraziti kao količnik napona koji se javlja na ovim komponentama, $U_{CR1}(jw)$, i ekvivalentne impedanse koja je rezultat redne veze kondenzatora i otpornika, $Z_{CR1}(jw)$:

$$I(jw) = \frac{U_{CR1}(jw)}{Z_{CR1}(jw)} = \frac{V_{in}(jw) - 0V}{R_1 + Z_C(jw)} = \frac{V_{in}(jw)}{R_1 + \frac{1}{jwC}} = \frac{V_{in}(jw)jwC}{jwCR_1 + 1}.$$

Struja koja teče kroz otpornik može se izraziti kao količnik napona na otporniku i otpornosti otpornika, i isto kao i u slučaju idealnog diferencijatora iznosi:

$$I(jw) = \frac{U_R(jw)}{R_2} = \frac{-V_{out}(jw)}{R_2}.$$

Izjednačavanjem ove dve struje:

$$I(jw) = \frac{-V_{out}(jw)}{R_2} = \frac{V_{in}(jw)jwC}{jwCR_1 + 1}$$

može se izraziti funkcija prenosa kola kao:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{j\omega CR_2}{j\omega CR_1 + 1} = -\frac{j\omega CR_2}{\frac{j\omega}{\frac{1}{CR_1}} + 1},$$

odnosno,

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{sCR_2}{\frac{s}{\frac{1}{CR_1}} + 1}.$$

Na osnovu funkcije prenosa može se zaključiti da kolo pored nule u nuli ima i pol na kružnoj učestanosti $\frac{1}{CR_1}$. Ovaj pol će ujedno predstaviti i prelomnu učestanost amplitudske karakteristike.

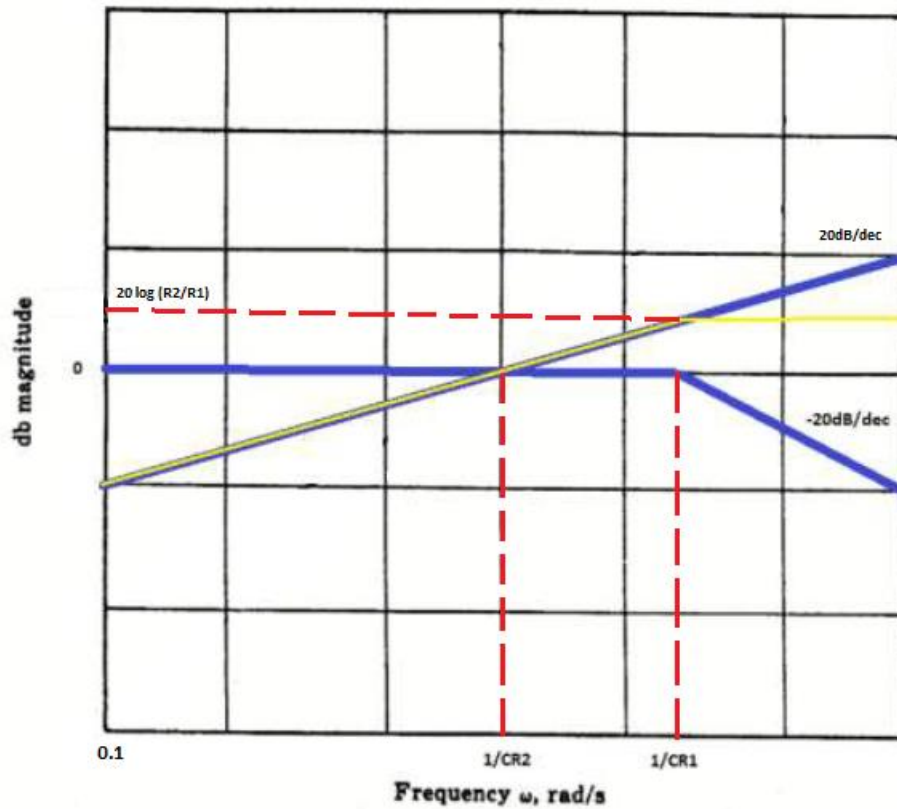
Amplitudska karakteristika kola se može izraziti kao:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{\sqrt{(wCR_2)^2}}{\sqrt{(\frac{w}{\frac{1}{CR_1}})^2 + 1}} = \frac{wCR_2}{\sqrt{(\frac{w}{\frac{1}{CR_1}})^2 + 1}},$$

dok se amplitudska karakteristika izražena u decibelima može izraziti kao:

$$20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| \right) = 20 \log(wCR_2) - 20 \log \left(\sqrt{(wCR_1)^2 + 1} \right),$$

i prikazana je na Slici 8.



Slika 8 – Bodeova amplitudska karakteristika kola praktičnog diferencijatora.

Na osnovu Bodeove amplitudske karakteristike može se zaključiti da kada je učestanost signala mnogo manja od granične učestanosti $\frac{1}{CR_1}$, kolo se ponaša kao diferencijator, dok kada je mnogo veća od ove učestanosti kolo se ponaša kao pojačavač faktora pojačanja $\frac{R_2}{R_1}$.

Odnosno, kada je $w \ll \frac{1}{CR_1}$, Bodeova amplitudska karakteristika se svodi na:

$$20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(jw)}{V_{in}(jw)} \right| \right) = 20 \log(wCR_2),$$

dok, kada je $w \gg \frac{1}{CR_1}$, Bodeova amplitudska karakteristika se svodi na:

$$\begin{aligned} 20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(jw)}{V_{in}(jw)} \right| \right) &= 20 \log(wCR_2) - 20 \log \left(\sqrt{(wCR_1)^2} \right) = 20 \log(wCR_2) - 20 \log(wCR_1) \\ &= 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned}$$

Spomenuta granična učestanost se još naziva i graničnom učestanošću propusnog opsega kola, i kaže se da se praktični diferencijator ponaša kao filter propusnih visokih frekvencija.

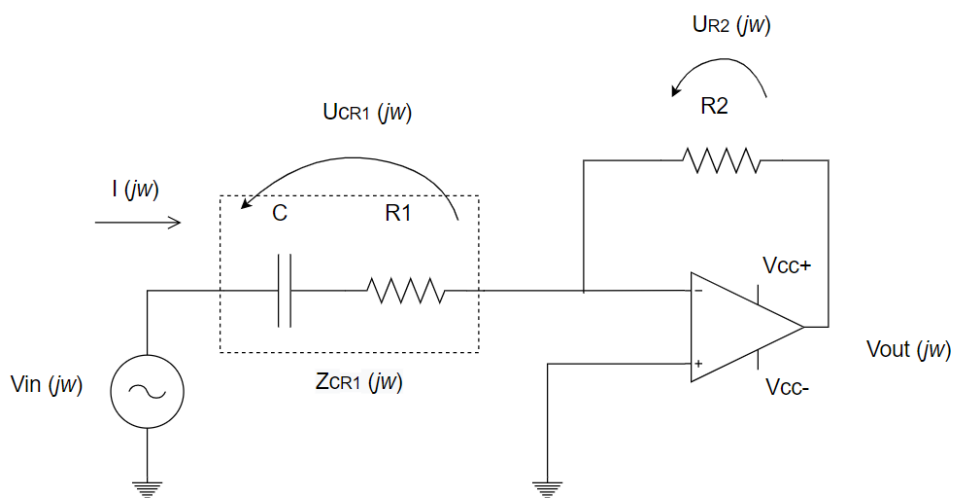
Zadatak 2. Projektovati kolo praktičnog diferencijatora tako da granična frekvencija propusnog opsega bude 500 Hz, a pojačanje u propusnom opsegu iznosi 10, ukoliko je na raspolaganju kondenzator kapacitivnosti 1uF. Simulirati rad kola u LTSpice-u za slučaj da se na ulazu nalazi:

- signal sinusoide amplitude 1V i frekvencije 10 Hz
- trougao signal frekvencije 10 Hz, koji se opisuje sledećim izrazom:

$$v_{in}(t) = \begin{cases} 40 \frac{V}{s} t - 1V, & t \in (0, \frac{T}{2}) \\ 1V - 40 \frac{V}{s} (t - \frac{T}{2}), & t \in (\frac{T}{2}, T) \end{cases}$$

Rešenje:

Kolo praktičnog diferencijatora prikazano je na Slici 9.



Slika 9 – Kolo praktičnog diferencijatora sa označenim referentnim smerovima kompleksnih struja i napona.

Izjednačavanjem struja koje teku kroz rednu vezu kondenzatora i otpornika na invertujućem ulazu kola i kroz otpornik u povratnoj sprezi (postupak je naveden u prethodnom odeljku, pa će sada biti preskočen), izvodi se funkcija prenosa praktičnog diferencijatora kao:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{j\omega CR_2}{j\omega CR_1 + 1} = -\frac{j\omega CR_2}{\frac{1}{CR_1} + 1}.$$

*Izraz za funkciju prenosa ovog kola (kao i kola idealnog diferencijatora) se može izvesti i polazenjem od toga da se pojačavač ponaša kao invertujući, odnosno, direktnom primenom izraza za pojačanje invertujućeg pojačavača:

$$V_{out}(j\omega) = -\frac{Z_{R2}}{Z_{CR1}} V_{in}(j\omega).$$

Nadalje se izražava amplitudska karakteristika kola kao moduo funkcije prenosa:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{\sqrt{(\omega CR_2)^2}}{\sqrt{(\frac{\omega}{CR_1})^2 + 1}} = \frac{\omega CR_2}{\sqrt{(\frac{\omega}{CR_1})^2 + 1}}.$$

Pošto se kružna prelomna učestanost računa prema izrazu:

$$\omega_g = 2\pi f_g = \frac{1}{CR_1},$$

a u zadatku je dato da linijska granična učestanost, f_g , iznosi 500 Hz, otpornost R_1 se može izračunati kao:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_g C} = 318 \, \Omega.$$

Kada je učestanost signala mnogo veća od prelomne učestanosti $\frac{1}{CR_1}$, amplitudska karakteristika se svodi na:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{R_2}{R_1},$$

što predstavlja i pojačanje kola u propusnom opsegu.

Na osnovu ovoga, izračunava se otpornost R_2 koja iznosi 3180Ω .

S druge strane, kada je učestanost signala mnogo manja od prelomne učestanosti, funkcija prenosa se aproksimira kao:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -j\omega CR_2,$$

odnosno:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -sCR_2,$$

što predstavlja funkciju prenosa idealnog diferencijatora.

Na osnovu ove funkcije prenosa, izlazna veličina u kompleksnom domenu se može predstaviti kao:

$$V_{out}(s) = -sCR_2 V_{in}(s).$$

Inverznom Laplasovom transformacijom ove funkcije dobija se i zavisnost izlazne od ulazne veličine u vremenskom domenu:

$$v_{out}(t) = -CR_2 \frac{dv_{in}(t)}{dt},$$

što je izraz koji karakteriše rad idealnog diferencijatora. Da bi se kolo praktičnog diferencijatora ponašalo kao idealan diferencijator, u praksi je dovoljno da učestanost ulaznog signala bude 10 puta manja od prelomne učestanosti amplitudske karakteristike kola.

Frekvencije pobudnih signala su prema zadatku jednake 10 Hz, pa se očekuje da će nad ovim signalima biti izvršeno diferenciranje.

Za slučaj pod a) na izlazu kola se očekuje signal:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= -CR_2 \frac{d(1V \sin(20\pi t))}{dt} = -CR_2 1V \cos(20\pi t) 20\pi = -1\mu F 3180\Omega 62.8 \frac{\text{rad}}{s} \cos(20\pi t) \\ &= -199 \text{ mV} \cos(20\pi t). \end{aligned}$$

Dok se za slučaj pod b) na izlazu kola očekuje signal četvrtki čija je prva poluperioda određena izrazom:

$$v_{out}(t) = -CR_2 \frac{dv_{in}}{dt} = -CR_2 \frac{d\left(40 \frac{V}{s} t - 1V\right)}{dt} = -3.18ms \cdot 40 \frac{V}{s} = -127.2 mV,$$

dok je za drugu polovinu periode signala, očekivani izlaz jednak:

$$v_{out}(t) = -CR_2 \frac{dv_{in}}{dt} = -CR_2 \frac{d\left(1V - 40 \frac{V}{s} (t - 0.05s)\right)}{dt} = 3.18ms \cdot 40 \frac{V}{s} = 127.2 mV.$$

LTSpice

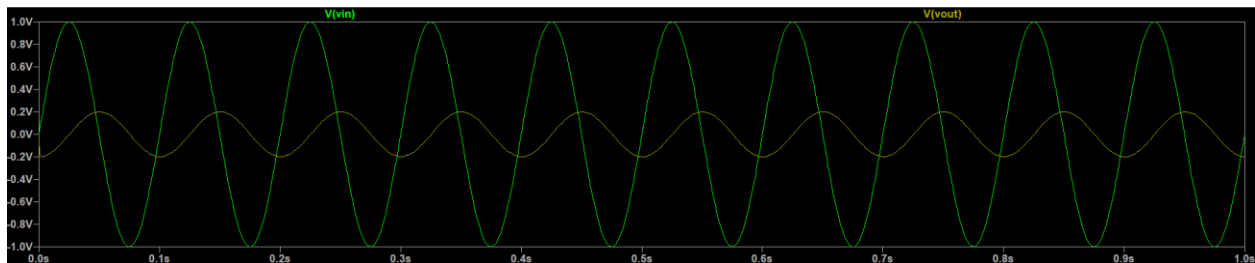
Rešenje Zadatka 2

1. Simulacija u vremenskom domenu

Vreme trajanja simulacije podešeno na 1 s – očekujemo 10 perioda signala u plotu.

a)

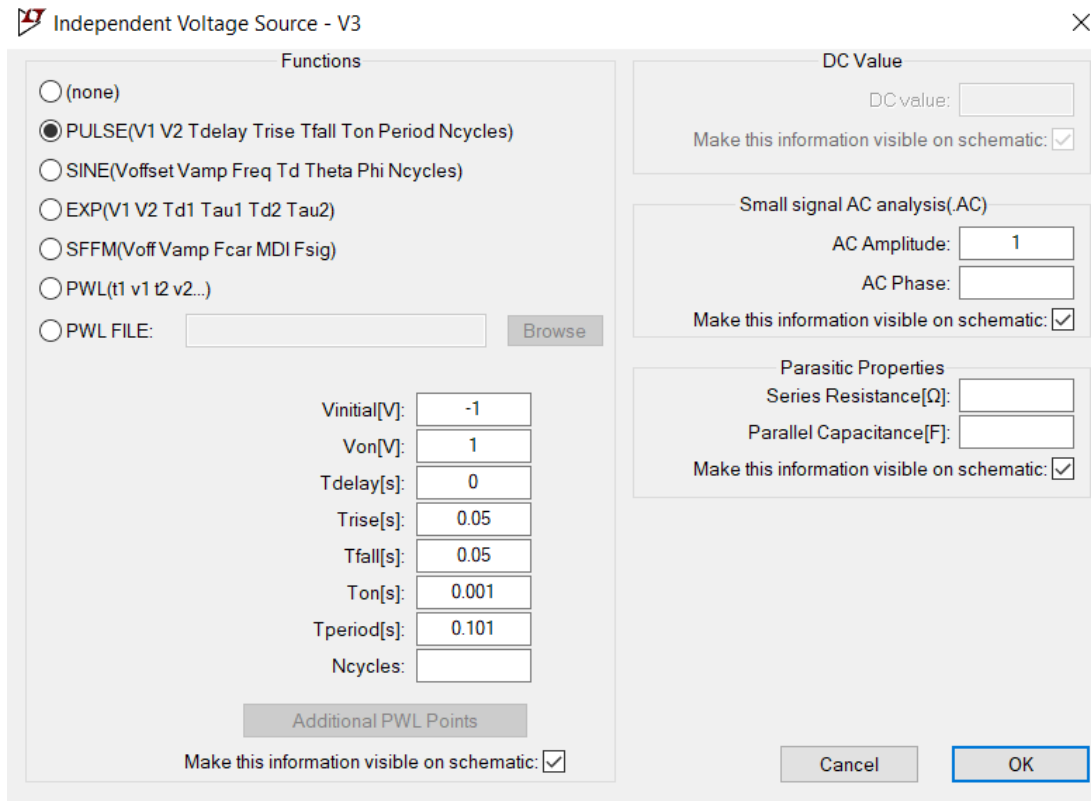
Rezultati simulacije u vremenskom domenu – ulaz i izlaz kola prikazani su na Slici 10.



Slika 10 – Rezultati simulacije kada je na ulazu kola sinusoida.

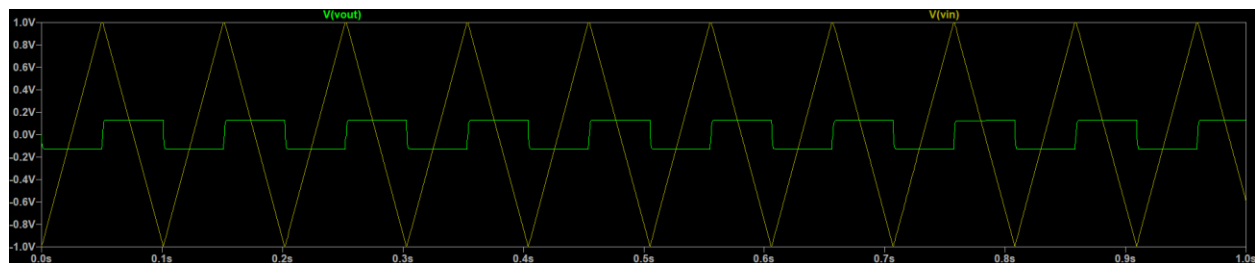
b)

Trougaoni signal se zadaje odabirom funkcije PULSE. Parametri podešeni u skladu sa zahtevima zadatka dati su na Slici 11.



Slika 11 – Vrednosti parametara trougaonog signala koji se dovodi na ulaz kola.

Rezultati simulacije u vremenskom domenu – ulaz i izlaz kola prikazani su na Slici 12.

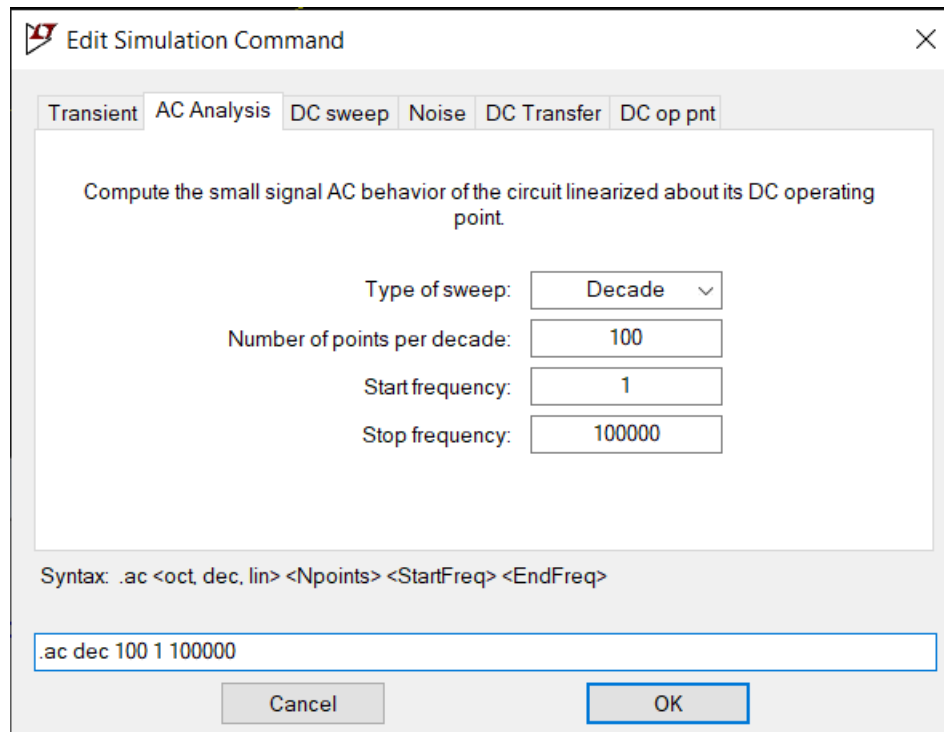


Slika 12 – Rezultati simulacije kada je na ulazu kola trougaoni signal.

2. Simulacija u frekvencijskom domenu

Simulacija u frekvencijskom domenu, tj. za naizmenični režim rada kola daje mogućnost prikaza amplitudske i fazne karakteristike kola. Parametri kojima se podešava ovaj režim simulacije su: skaliranje apscise (linearno, dekadno, oktavno), broj simulacionih, tj. test tačaka, i frekvencijski opseg za koji će biti prikazane karakteristike.

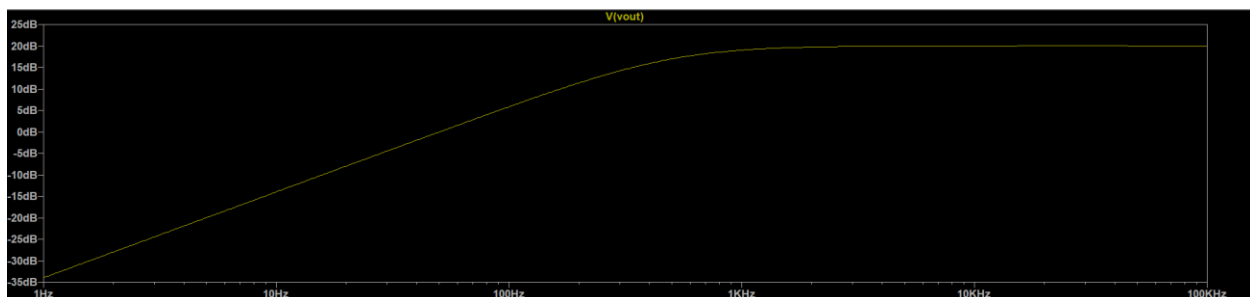
Na Slici 13 prikazana su podešavanja za kolo dato u zadatku. Frekvencijski opseg je odabran tako da se njime obuhvati prelaz karakteristike iz nepropusnog u propusni opseg, kako bi mogla da se ispita vrednost amplitudske karakteristike u propusnom opsegu, kao i slabljenje na graničnoj učestanosti propusnog opsega.



Slika 13 – *Podešavanje naizmeničnog režima simulacije.*

Pored navedenog, potrebno je definisati i koji će izvor signala u kolu biti zamenjen generatorom sinusoide tokom simulacije u naizmeničnom režimu (pogledati Sliku 11).

Amplitudska karakteristika praktičnog diferencijatora datog u zadatku prikazana je na Slici 14.



Slika 14 – *Amplitudska karakteristika praktičnog diferencijatora – ponaša se kao filter propusnik visokih učestanosti.*

Kolo se ponaša kao filter propusnik visokih učestanosti pri čemu pojačanje u propusnom opsegu iznosi 20 dB, dok na graničnoj učestanosti dolazi do slabljenja za 3 dB u odnosu na ovo pojačanje:

$$20 \log \left| \frac{V_{out}}{V_{in}}(j\omega_{gr}) \right| = 20 \log \left(\frac{\frac{1}{CR_1} CR_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{CR_1} \right)^2 + 1}} \right),$$

$$20 \log \left| \frac{V_{out}}{V_{in}}(j\omega_{gr}) \right| = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log(\sqrt{2}) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 3 \text{ dB}.$$