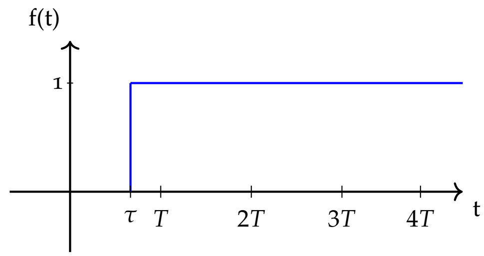
Modifikovana $\mathfrak{Z}$ transformacija

Anja Buljević
Jelena Bulatović

Zadaci:

1. Odrediti $\mathfrak{Z}$ transformaciju signala sa Slike 1.



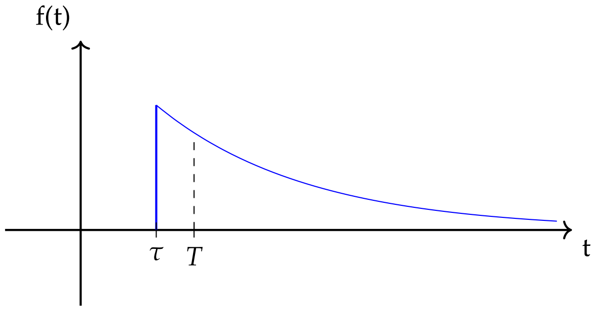
Slika 1: Signal za prvi zadatak.

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
F(z) = \mathfrak{Z}\{f(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT-\tau)z^{-k} \\
&= h(0-\tau) + h(T-\tau)z^{-1} + h(2T-\tau)z^{-2} + ... \\
&= 0 + z^{-1} + z^{-2} + ... \\
&= z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + ...) \\
&= z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{1}{\cancel{z}}\frac{\cancel{z}}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-1}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathfrak{Z}_m\{h(t)\} = \frac{1}{z-1}}$$

2. Odrediti $\mathfrak{Z}$ transformaciju signala $f(t) = e^{-a(t-\tau)}h(t-\tau)$ prikazanog na Slici 2.



Slika 2: Signal za drugi zadatak.

Rešenje:

Sa Slike 2 vidimo da je $\tau < T$. Na predavanjima je rečeno da je $\tau = \alpha T$, $\alpha \in (0,1]$, a $m = 1-\alpha \Rightarrow \tau = (1-m)T$.

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \mathfrak{Z}\{e^{-a(kT-\tau)}h(kT-\tau)\} \\
&= \mathfrak{Z}\{e^{-akT}e^{a\tau}\} \\
&= \mathfrak{Z}\{e^{-akT}e^{a(1-m)T}\} \\
&= \mathfrak{Z}\{e^{a(-kT+T)e^{-amT}}\} \\
&= \mathfrak{Z}\{e^{-aT(k-1)e^{-amT}}\} \\
&= e^{-amT}\cancel{z^{-1}}\frac{\cancel{z}}{z-e^{-aT}} \\
&= \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathfrak{Z}_m\{e^{-at}\} = \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}}
$$

3. Sistem je opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{s+4}e^{-0.15s}$. Naći digitalni ekvivalent sistema ako je:
   (a) T = 0.2s
   (b) T = 0.15s
   (c) T = 0.1s

Rešenje:

(a)

Kašnjenje $\tau = 0.15s$ je manje od periode odabiranja T = 0.2s zbog čega možemo direktno primeniti $\mathcal{Z}_m$ transformaciju.

$$\alpha = \frac{\tau}{T} = \frac{0.15}{0.2} = \frac{3}{4}$$
$$m = 1 - \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
G_{DE}(z) &= \mathcal{Z}\{G_{HO}(s)G(s)\} \\
&= \mathcal{Z}\Big\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+4}e^{-0.15s}\Big\} \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\Big\{\frac{1}{s(s+4)}e^{-0.15s}\Big\} \\
&= \Big(\frac{z}{z-1}\Big)\mathcal{Z}_m\Big\{\frac{1}{s(s+4)}\Big\}\Big|_{m=\frac{1}{4}} \\
&= \Big(\frac{z}{z-1}\Big)\Big(\mathcal{Z}_m\Big\{\frac{1/4}{s}-\frac{1/4}{s+4}\Big\}\Big)\Big|_{m=\frac{1}{4}} \\
&= \frac{z-1}{z}\frac{1}{4}\Big(\mathcal{Z}_m\Big\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+4}\Big\}\Big)\Big|_{m=\frac{1}{4}} \\
&= \frac{z-1}{z}\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-4mT}}{z-e^{-4T}}\Big] \\
&= \frac{1}{4}\frac{\cancel{z-1}}{z}\frac{z-e^{-4T}-ze^{-T}+e^{-T}}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-4T})} \\
&= \frac{1}{4}\frac{z(1-e^{-T})+(e^{-T}-e^{-4T})}{z(z-e^{-4T})}
\end{aligned}$$

(b)

U ovom slučaju i kašnjenje i perioda odabiranja su $T = \tau = 0.15s$, što znači da ne postoji $\mathcal{Z}_m$ transformacija, već se radi obična $\mathcal{Z}$ transformacija pri čemu sistem kasni za jednu periodu.

$$\alpha = \frac{\tau}{T} = \frac{0.15}{0.15} = 1$$
$$m = 1 - \alpha = 0$$

$$\begin{aligned}
G_{DE}(z) &= \mathcal{Z}\Big\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+4}e^{-0.15}\Big\} \\
&= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\Big\{\frac{1}{s(s+4)}e^{-Ts}\Big\} \\
&= \frac{z-1}{z}z^{-1}\mathcal{Z}\Big\{\frac{1/4}{s}-\frac{1/4}{s+4}\Big\} \\
&= \frac{1}{4}\frac{z-1}{z^2}\Big(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-4T}}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\cancel{(z-1)}(\cancel{z}-e^{-4T}-\cancel{z}+1)}{z\cancel{(z-1)}(z-e^{-4T})} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1-e^{-4T}}{z(z-e^{-4T})}
\end{aligned}$$

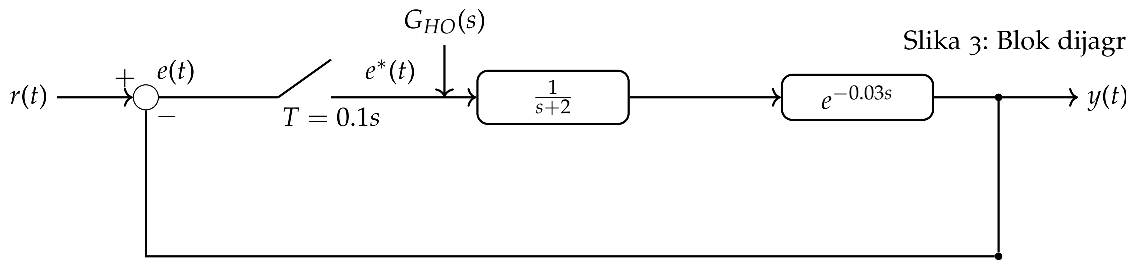
(c)

$$
\begin{aligned}
G_{DE}(z) &= \mathfrak{Z}\Big\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+4}e^{-0.15s}\Big\} \\
&= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\Big\{\frac{1}{s(s+4)}e^{-0.1s}e^{-0.05s}\Big\} \\
&= \frac{z-1}{z}z^{-1}\mathfrak{Z}_m\Big\{\frac{1}{s(s+4)}\Big\}\Big|_{m=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{z-1}{z^2}\Big(\mathfrak{Z}_m\Big\{\frac{1}{s}\Big\}\Big|_{m=\frac{1}{2}} - \mathfrak{Z}_m\Big\{\frac{1}{s+4}\Big\}\Big|_{m=\frac{1}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\frac{z-1}{z^2}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-4mT}}{z-e^{-4T}}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\frac{z(1-e^{-2T})+(e^{-2T}-e^{-4T})}{z^2(z-e^{-4T})}
\end{aligned}
$$

U ovom slučaju primećujemo da je kašnjenje veće od periode odabiranja, zbog čega nije moguće direktno primeniti $\mathfrak{Z}_m$ transformaciju koja je definisana kada je $\tau < T$. Neophodno je pre primene $\mathfrak{Z}_m$ transformacije svesti kašnjenje na oblik $\tau < T$, a to ćemo postići izražavanjem kašnjenja preko celih perioda i „ostatka".

$$
\begin{aligned}
\tau &= 0.05 \\
\alpha &= \frac{\tau}{T} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5 \\
m &= 1-\alpha = 0.5
\end{aligned}
$$

4. Ispitati stabilnost sistema sa Slike 3.



Slika 3: Blok dijagram sistema.

Rešenje:

Da bismo mogli da komentarišemo stabilnost prikazanog sistema koji sadrži i kašnjenje, potrebno je da prvo odredimo funkciju spregnutog prenosa, a zatim ćemo na osnovu polova karakterističnog polinoma moći komentarisati stabilnost.

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s+2} \\
H(s) &= e^{-0.03s} \\
Y^*(s) &= E^*(s)\underline{G_{HO}HG^*(s)} = \Big(R^*(s) - Y^*(s)\Big)\underline{G_{HO}HG^*(s)} \\
G_{DE}(z) &= \frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = \frac{\underline{G_{HO}HG^*(s)}}{1+\underline{G_{HO}HG^*(s)}}
\end{aligned}
$$

$m = 1 - \frac{\tau}{T} = 1 - \frac{0.03}{0.1} = \frac{7}{10}$

$$
\begin{aligned}
\underline{G_{HO}HG^*(s)} &= \mathfrak{Z}\Big\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+2}e^{-0.03s}\Big\} \\
&= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\Big\{\frac{1}{s(s+2)}e^{-0.03s}\Big\} \\
&= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}_m\Big\{\frac{1}{s(s+2)}\Big\}\Big|_{m=\frac{7}{10}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}_m\Big\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\Big\}\Big|_{m=\frac{7}{10}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{z-1}{z}\Big(\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{z(1-e^{-\frac{7}{5}T})+(e^{-\frac{7}{5}T}-e^{-2T})}{z(z-e^{-2T})}
\end{aligned}
$$

Radi jednostavnijeg zapisa, uvešćemo sledeće smene:

$$
\begin{aligned}
a &= 1-e^{-\frac{7}{5}T} \\
b &= e^{-\frac{7}{5}T}-e^{-2T},
\end{aligned}
$$

pa dobijamo

$$\underline{G_{HO}HG^*(s)} = \frac{1}{2}\frac{az+b}{z(z-e^{-2T})}.$$

Konačno dobijamo funkciju prenosa celog sistema:

$$
\begin{aligned}
G_{DE}(z) &= \frac{\underline{G_{HO}HG^*(s)}}{1+\underline{G_{HO}HG^*(s)}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\frac{az+b}{z(z-e^{-2T})}}{1+\frac{1}{2}\frac{az+b}{z(z-e^{-2T})}} \\
&= \frac{az+b}{2z^2+z(a-2e^{-2T})+b}
\end{aligned}
$$

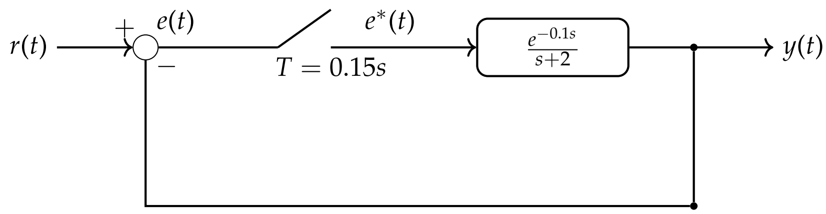
Polovi[1] sistema su:

$$z_1 = 0.7182, z2 = 0.0352.$$

Oba pola se nalaze unutar jedinične kružnice, tako da je dobijeni sistem stabilan. Pošto se polovi nalaze na pozitivnom delu realne ose z ravni možemo reći da je odziv sistema aperiodičan.

[1] **Napomena**: koreni karakterističnog polinoma (polovi) se mogu izračunati u MATLAB-u korišćenjem funkcije **roots**. Pogledati MATLAB-ov help za ovu funkciju.

Domaći: Naći odziv sistema na jediničnu step pobudu za sistem dat na Slici 4.



Slika 4: Blok dijagram sistema.