$$\Phi = \phi(T) = \begin{bmatrix} \cos(aT) & -\sin(aT) \\ \sin(aT) & \cos(aT) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} B \, d\tau$$

$$= \int_0^T \Phi(\tau) B \, d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} \cos(a\tau) & -\sin(a\tau) \\ \sin(a\tau) & \cos(a\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} \cos(a\tau) \\ \sin(a\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\sin(a\tau) \\ -\frac{1}{a}\cos(a\tau) \end{bmatrix} \Bigg|_0^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\sin(aT) \\ -\frac{1}{a}(\cos(aT) - 1) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(aT) & -\sin(aT) \\ \sin(aT) & \cos(aT) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\sin(aT) \\ -\frac{1}{a}(\cos(aT)-1) \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + u(k)$$

Имплементација регулатора у „Simulink-u"

1) Дата је ф-ја дискретног преноса. Реализовати $G(z)$ у симулинку

$G(z) = \frac{z+a}{z-b}$, $a=1$, $b=0,3$ користити Matlab function

2) Дат је систем описан ф-јом преноса $G(s) = \frac{1}{s-2}$.

а) Пројектовати PI регулатор тако да систем буде стабилан након затварања повратне спреге

б) У „Simulinku" симулирати одзив спрегнутог система на степ побуду

3) Дискретизовати регулатор II Ојлеровом трансформацијом. Имплементирати Matlab function, при чему је $T=0,1$.

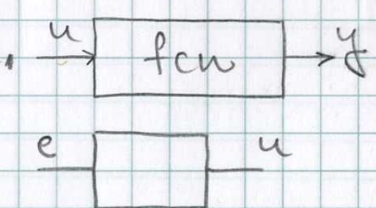
1.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z+a}{z-b}$$

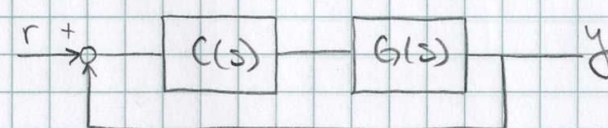
$$zU(z) - bU(z) = zE(z) + aE(z) \quad / z^{-1}$$

$$U(z) = bz^{-1}U(z) + E(z) + az^{-1}E(z) \quad / \mathcal{Z}^{-1}$$

$$u(k) = bu(k-1) + e(k) + ae(k-1)$$



2.



$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

$K_p = 3;$

$K_i = 2;$

$$W_{sp}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

$$= \frac{K_p s + K_i}{s^2 + s(K_p - 2) + K_i} = f(s)$$

$f(s) = s^2 + s(K_p - 2) + K_i$

s^2	1	K_i
s^1	$K_p - 2$	
s^0	K_i	

$K_p - 2 > 0$ $\quad K_i > 0$

$K_p > 2$

Вежбе 11.12.2018.

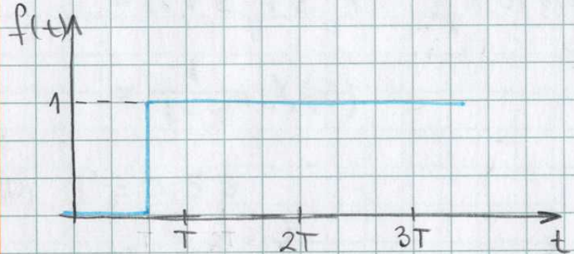
Модификована З трансформација

- Да би се одредила вредности сигнала између тренутака одабирања

$$f(t-T_d),\quad T_d < T \Rightarrow T_d = \alpha T,\ \alpha \in (0,1)$$

$$Z\{f(t-T_d)\} = Z_m\{f(kT)\} \qquad m = 1-\alpha,\ m\in(0,1)$$

1) Одредити модификовану З тр-ју сигнала са слике



$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT-T_d)\, z^{-k}$$

$$= u(0-T_d) + u(T-T_d)\,z^{-1} + u(2T-T_d)\,z^{-2} + \ldots$$

$$= 0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$$

$$= z^{-1}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\right)$$

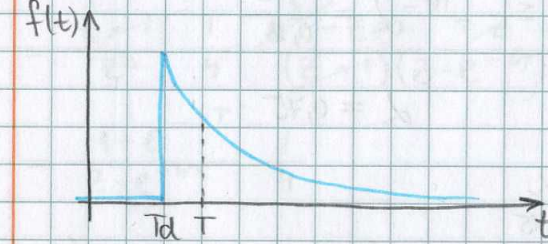
$$= z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{z}}\,\frac{\cancel{z}}{z-1}$$

$$= \frac{1}{z-1}$$

$$Z_m\{u(t)\} = \frac{1}{z-1}$$

2) Одредити З тр-ју сигнала $f(t) = e^{-a(t-T_d)}u(t-T_d)$



$$T_d = \alpha T \rightarrow T_d = (1-m)T$$

$$m = 1-\alpha,\ m\in(0,1),\ \alpha\in(0,1)$$

$$F(z) = Z\left\{e^{-a(kT-T_d)}u(kT-T_d)\right\}$$

$$= Z\left\{e^{-akT}e^{+aT_d}u(kT-T_d)\right\}$$

$$= Z\left\{e^{-akT}e^{a(1-m)T}u(kT-(1-m)T)\right\}$$

$$= Z\left\{e^{-akT}e^{aT}e^{-amT}u(kT-T_d)\right\}$$

$$= Z\left\{e^{-aT(k-1)}e^{-amT}u(k-1)T\right\}$$ када нам је $\alpha = 1$

$$= e^{-amT}\,z^{-1}\,\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

кашњење због $(k-1)$

$$= \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$$

$$Z_m\{e^{-at}\} = \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$$

3) Систем је описан ф-јом преноса $G(s) = \frac{1}{s+4}e^{-0{,}15s}$. Наћи дигитални еквивалент ако је

a) $T = 0{,}2\,s$

b) $T = 0{,}15\,s$

c) $T = 0{,}1\,s$

a) $$G_{DE}(z) = Z\left\{G_{H_0}(s)\,G(s)\right\}$$

$$= Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\,\frac{1}{s+4}\,e^{-0{,}15s}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-0{,}15 s} \right\} \qquad \alpha T = \tau \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{T}$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-\underbrace{0{,}75\, T}_{\tau} s} \right\} \qquad \alpha = \frac{0{,}15}{0{,}2}$$

$$\alpha = 0{,}75$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}_m\left\{ \frac{1}{s(s+4)} \right\}\Big|_{m=1/4} \qquad m = 1-\alpha,\quad m = 1-0{,}75,\quad m = 0{,}25 = 1/4$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}_m\left\{ \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+4} \right\}\Big|_{m=1/4}$$

$$= (1-z^{-1})\, \frac{1}{4}\left[\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s}\right\}_{m=1/4} - \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s+4}\right\}_{m=1/4} \right]$$

$$= (1-z^{-1})\, \frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-4\frac{1}{4}T}}{z-e^{-4T}} \right]$$

$$= (1-z^{-1})\, \frac{1}{4}\, \frac{z - e^{-4T} - ze^{-T} + e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-4T})}$$

$$= \frac{\cancel{z-1}}{z}\, \frac{1}{4}\, \frac{z(1-e^{-T}) + e^{-T} - e^{-4T}}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-4T})}$$

$$= \frac{1}{4}\, \frac{z(1-e^{-T}) + e^{-T} - e^{-4T}}{z(z-e^{-4T})}$$

в) $G_{DE}(z) = \mathcal{Z}\{ G_{H0}(s)\, G(s) \}$

$$= \mathcal{Z}\left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s}\, \frac{1}{s+4}\, e^{-0{,}15 s} \right\}$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-0{,}15 s} \right\} \qquad \alpha T = \tau,\quad \alpha = \frac{\tau}{T},\quad \alpha = 1$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-Ts} \right\}$$

$$= (1-z^{-1})\, z^{-1}\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} \right\}$$

$$= \frac{z-1}{z^2}\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+4} \right\}$$

$$= \frac{z-1}{z^2}\, \frac{1}{4}\left[\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \right]$$

$$= \frac{z-1}{z^2}\, \frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-4T}} \right]$$

$$= \frac{\cancel{z-1}}{z^2}\, \frac{1}{4}\, \frac{\cancel{z^2} - ze^{-4T} \cancel{- z^2} + z}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-4T})}$$

*Сигурно долази

$$= \frac{1-e^{-4T}}{z-e^{-4T}}\, \frac{1}{4}$$

г) $G_{DE}(z) = \mathcal{Z}\{ G_{H0}(s)\, G(s) \}$

$$= \mathcal{Z}\left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s}\, \frac{1}{s+4}\, e^{-0{,}15 s} \right\}$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-0{,}15 s} \right\} \qquad \alpha T = \tau,\quad \alpha = \frac{\tau}{T},\quad \alpha = \frac{0{,}15}{0{,}1},\quad \alpha = 1{,}5,\quad 1{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$= (1-z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-Ts} e^{-\frac{1}{2}Ts} \right\}$$

$$= (1-z^{-1})\, z^{-1}\, \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s(s+4)} e^{-1/2\, Ts} \right\}$$

$$= (1-z^{-1})\, z^{-1}\, \mathcal{Z}_m\left\{ \frac{1}{s(s+4)} \right\}_{m=1/2} \qquad m = 1-\alpha,\quad m = 1-1/2,\quad m = 1/2$$

$$= \frac{z-1}{z^2}\, \mathcal{Z}_m\left\{ \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+4} \right\}_{m=1/2}$$

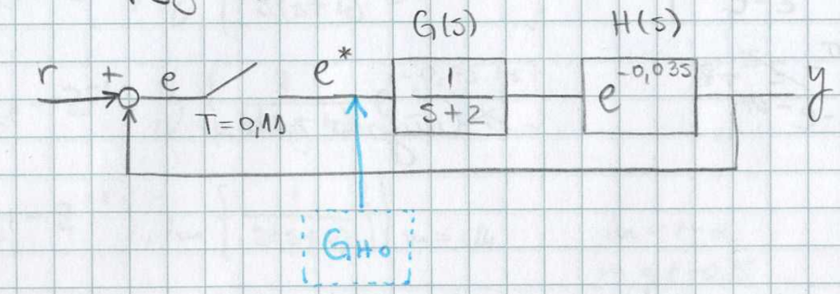
$$= \frac{z-1}{z^2}\, \frac{1}{4}\left[\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \right]$$

$$= \frac{z-1}{z^2}\, \frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-\cancel{4}^{2}\frac{1}{2}T}}{z-e^{-4T}} \right]$$

$$= \frac{\cancel{z-1}}{z^2}\, \frac{1}{4}\left[\frac{z - e^{-4T} - ze^{-2T} + e^{-2T}}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-4T})} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\, \frac{z(1-e^{-2T}) + e^{-2T} - e^{-4T}}{z^2(z-e^{-4T})}$$

4) Наћи ф-ју преноса система са слике



$$Y^*(s) = E^*(s)\, G_{H0}GH^*(s)$$

$$= (R^*(s) - Y^*(s))\, G_{H0}GH^*(s)$$

$$Y^*(s) = R^*(s)\, G_{H0}GH^*(s) - Y^*(s)\, G_{H0}GH^*(s)$$

$$Y^*(s)\left[1 + G_{H0}GH^*(s)\right] = R^*(s)\, G_{H0}GH^*(s)$$

$$\frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G_{H0}GH^*(s)}{1+G_{H0}GH^*(s)}$$

$$G_{H0}GH^*(s) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\,\frac{1}{s+2}\,e^{-0,03s}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\,e^{-0,03s}\right\} \qquad \alpha T = \tau,\quad \alpha = \frac{\tau}{T}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\,e^{-0,3Ts}\right\} \qquad \alpha = \frac{0,03}{0,1},\quad \alpha = 0,3$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}_{m=0,7} \qquad m = 1-\alpha,\quad m = 1-0,3,\quad m = 0,7$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+2}\right\}_{m=0,7}$$

$$= (1-z^{-1})\,\frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2\cdot 0,7T}}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\,\frac{1}{2}\,\frac{z-e^{-2T}-ze^{-1,4T}+e^{-1,4T}}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

$$= \frac{\cancel{z-1}}{z}\,\frac{1}{2}\,\frac{z(1-e^{-1,4T})+e^{-1,4T}-e^{-2T}}{(\cancel{z-1})(z-e^{-2T})}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z\underbrace{(1-e^{-1,4T})}_{a}+\underbrace{e^{-1,4T}-e^{-2T}}_{b}}{z(z-e^{-2T})}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{az+b}{z(z-e^{-2T})}$$

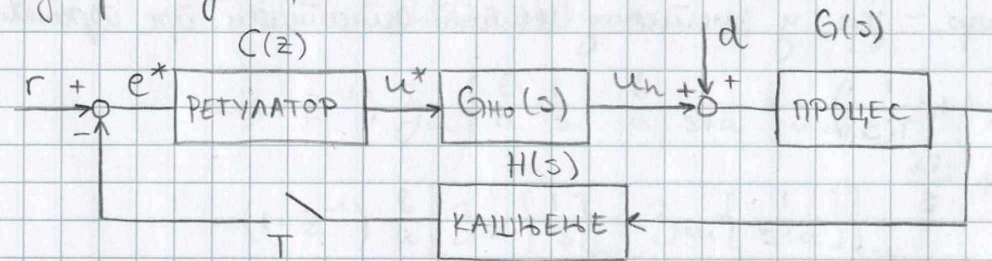
$$\frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{az+b}{z(z-e^{-2T})}}{1+\frac{1}{2}\,\frac{az+b}{z(z-e^{-2T})}}$$

$$= \frac{az+b}{2z(z-e^{-2T})+az+b}$$

$$= \frac{az+b}{2z^2-2ze^{-2T}+az+b}$$

$$= \frac{az+b}{2z^2+z(a-2e^{-2T})+b}$$

5) Формирати управљачки алгоритам који ће регулисати ниво воде у резервоару. Вода се у резервоар доводи кроз цеви код којих услед старости долази до цурења воде на спојевима. Рачунар на ком је имплементиран управљачки алгоритам је удаљен од резервоара, због чега је сензору потребно 0,04s да би био очитан на рачунару. Периода одабирања је 0,1s.



Модел процеса: $\dot{h} = \frac{1}{A_1} q - \frac{A_0}{A_1}\sqrt{2gh}$ $\qquad h = H_0 + \Delta h$

$y = h$ $\qquad q = Q_0 + \Delta q$

Линеаризација: $\Delta\dot{h} = \frac{\partial f}{\partial h}\Big|_{H_0,Q_0}\Delta h + \frac{\partial f}{\partial q}\Big|_{H_0,Q_0}\Delta q$

$$\Delta y = \frac{\partial f_1}{\partial h}\Big|_{H_0,Q_0}\Delta h + \frac{\partial f_1}{\partial q}\Big|_{H_0,Q_0}\Delta q$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{A_0}{A_1}\frac{1}{2\sqrt{2gh}}2g \qquad \frac{\partial f}{\partial g} = \frac{1}{A_1} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial h} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial g} = 0$$

$$= -\frac{A_0}{A_1}\sqrt{\frac{g^2}{2gh}}$$

$$= -\frac{A_0}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$\Delta\dot{h} = \underbrace{-\frac{A_0}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2H_0}}}_{a}\Delta h + \underbrace{\frac{1}{A_1}}_{b}\Delta g$$

$$\Delta y = \Delta h$$

$$\Delta\dot{h} = -a\Delta h + b\Delta g \quad /\mathcal{L}$$

$$\Delta y = \Delta h$$

$$sH(s) = -aH(s) + bQ(s)$$

$$H(s)[s+a] = bQ(s)$$

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{b}{s+a} = G(s)$$

PI регулатор - јер у систему немамо астатизам пре поремећаја

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$= K_p + \frac{K_i}{s}$$

Користимо Тустинову апроксимацију

$$s = \frac{T}{2}\frac{z-1}{z+1}$$

$$C(z) = K_p + K_i\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

$$= K_p + \frac{K_iT(z+1)}{2(z-1)}$$

$$= \frac{2K_pz - 2K_p + zK_iT + K_iT}{2(z-1)}$$

$$= \cancel{\frac{2}{2}}\frac{K_pz - K_p + z\frac{K_iT}{2} + \frac{K_iT}{2}}{z-1}$$

$$= \frac{z\underbrace{\left(K_p + \frac{K_iT}{2}\right)}_{p} + \underbrace{\left(\frac{K_iT}{2} - K_p\right)}_{q}}{z-1}$$

Колика је грешка у устаљеном стању ако је $r(t) = d(t) = h(t)$

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd}$$

e_{ssr}:

$$\frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{1 + C(z)G_{H_0}GH^*(s)}$$

$$G_{H_0}GH^*(s) = \mathcal{Z}\{G_{H_0}(s)G(s)H(s)\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{b}{s+a}e^{-0{,}04s}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{b}{s(s+a)}e^{-0{,}04s}\right\}$$

$\alpha T = \tau$

$\alpha = \frac{\tau}{T}$

$\alpha = \frac{0{,}04}{0{,}1}$

$\alpha = 0{,}4$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{b}{(s+a)s}e^{-0{,}4Ts}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}_m\left\{\frac{b}{s(s+a)}\right\}_{m=0{,}6}$$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}_m\left\{\frac{b}{a}\frac{1}{s} - \frac{b}{a}\frac{1}{s+a}\right\}_{m=0{,}6}$$

$$= (1-z^{-1})\frac{b}{a}\left[\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s}\right\}_{m=0{,}6} - \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s+a}\right\}_{m=0{,}6}\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}\frac{b}{a}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-a0{,}6T}}{z-e^{-aT}}\right]$$

$$= \frac{\cancel{z-1}}{z}\frac{b}{a}\frac{z - e^{-aT} - ze^{-a0{,}6T} + e^{-0{,}6aT}}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-aT})}$$

$$= \frac{b}{a}\frac{z\underbrace{(1-e^{-0{,}6aT})}_{l} + \underbrace{e^{-0{,}6aT} - e^{-aT}}_{\cdot b = n}}{z(z-e^{-aT})}$$

$$= \frac{zl + n}{z(z-e^{-aT})}$$

$$\frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{1+\frac{zl+n}{z(z-e^{-aT})}\,\frac{zp+q}{z-1}}$$

$$= \frac{z(z-e^{-aT})(z-1)}{z(z-e^{-aT})(z-1)+(zl+n)(zp+q)}$$

$$e_{ssr} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\,\frac{z(z-e^{-aT})(z-1)}{z(z-e^{-aT})(z-1)+(zl+n)(zp+q)}\,\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}}$$

$$= 0$$

e_{ssd}:

$$\frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{-GH^*(s)}{1+C(z)G_{H0}GH^*(s)}$$

$$GH^*(s) = \mathcal{Z}\{G(s)H(s)\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{b}{s+a}e^{-0,04s}\right\}$$

$$\alpha T = \tau \qquad \alpha = \frac{\tau}{T} \qquad \alpha = 0,4$$

$$m = 1-\alpha \qquad m = 1-0,4 \qquad m = 0,6$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{b}{s+a}e^{-0,4Ts}\right\}$$

$$= \mathcal{Z}_m\left\{\frac{b}{s+a}\right\}_{m=0,6}$$

$$= b\,\frac{e^{-0,6aT}}{z-e^{-aT}} \quad d$$

$$= \frac{d}{z-e^{-aT}}$$

$$\frac{E^*(s)}{D^*(s)} = \frac{-\frac{d}{z-e^{-aT}}}{1+\frac{zp+q}{z-1}\,\frac{zl+n}{z(z-e^{-aT})}}$$

$$= \frac{\frac{-d}{\cancel{z-e^{-aT}}}}{\frac{z(z-1)(z-e^{-aT})+(zp+q)(zl+n)}{z(z-1)(\cancel{z-e^{-aT}})}}$$

$$= \frac{-dz(z-1)}{z(z-1)(z-e^{-aT})+(zp+q)(zl+n)}$$

$$e_{ssd} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\,\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}}\,\frac{-dz(z-1)}{z(z-1)(z-e^{-aT})+(zp+q)(zl+n)}$$

$$= 0$$

Вежбе 18.12.2018.

Математички модел у простору стања

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad /\mathcal{Z}$$

$$G(z) = C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma + D$$

$$zX(z) - \cancel{X(0)}^{\,0} = \Phi X(z) + \Gamma U(z)$$

$$X(z)(zI-\Phi) = \Gamma U(z)$$

$$X(z) = (zI-\Phi)^{-1}\Gamma U(z)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

$$Y(z) = C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma U(z) + DU(z)$$

$$Y(z) = U(z)\left(C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma + D\right)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma + D$$

1) Дат је систем описан мат. моделом у простору стања

$$x_1(k+1) = -0,5\,x_1(k) + 0,1\,x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = -0,3\,x_2(k) + 0,2\,x_1(k)$$
$$y(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 \\ 0,2 & -0,3 \end{bmatrix}}_{\Phi} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$(zI-\Phi)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(zI-\Phi)}{\det(zI-\Phi)}$$

$$(zI-\Phi) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & z+0{,}3 \end{bmatrix}$$

$$\det(zI-\Phi) = (z+0{,}5)(z+0{,}3) - 0{,}2$$
$$= z^2 + 0{,}8z + 0{,}13$$

$$\operatorname{adj}(zI-\Phi) = \begin{bmatrix} z+0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & z+0{,}5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z+0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & z+0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$(zI-\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z+0{,}3}{z^2+0{,}8z+0{,}13} & \frac{0{,}1}{z^2+0{,}8z+0{,}13} \\ \frac{0{,}2}{z^2+0{,}8z+0{,}13} & \frac{z+0{,}5}{z^2+0{,}8z+0{,}13} \end{bmatrix}$$

$$G(z) = C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times2} \begin{bmatrix} \frac{z+0{,}3}{\Delta} & \frac{0{,}1}{\Delta} \\ \frac{0{,}2}{\Delta} & \frac{z+0{,}5}{\Delta} \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z+0{,}5}{z^2+0{,}8z+0{,}13} & \frac{z+0{,}6}{z^2+0{,}8z+0{,}13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z+0{,}5}{z^2+0{,}8z+0{,}13} \end{bmatrix}$$

2) Дат је континуални систем описан мат. моделом у простору стања. Дискретизовати дати систем ако је периода одабирања $T = \ln 2$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\underbrace{\Phi}_{\text{фундаментална ф-ја}} = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{(sI-A)^{-1}}_{\text{резолвентна ф-ја}}\Big\}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = (s+1)(s+2)$$

$$\operatorname{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\Phi = \Phi(T) = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-\ln 2} & 0 \\ 0 & e^{-2\ln 2} \end{bmatrix} \qquad e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-2\ln 2} = \frac{1}{e^{2\ln 2}} = \frac{1}{e^{\ln 2^2}} = \frac{1}{4}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} B\, d\tau$$

$$= \int_0^T \Phi(\tau) B\, d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 2e^{-2\tau} & 3e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-\tau} & -e^{-\tau} \\ 2\frac{-1}{2} e^{-2\tau} & 3\frac{-1}{2} e^{-2\tau} \end{bmatrix}\Bigg|_0^T$$

$$= \begin{bmatrix} -(e^{-T}-1) & -(e^{-T}-1) \\ -(e^{-2T}-1) & -\frac{3}{2}(e^{-2T}-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 9/8 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

3) Дат је мат. модел у простору стања. Дискретизовати сист. са периодом T

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \longrightarrow \text{модел осцилатора}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x + u$$

$$\Phi = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & a \\ -a & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = s^2 + a^2$$

$$\operatorname{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s & a \\ -a & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & -a \\ a & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+a^2} & \frac{-a}{s^2+a^2} \\ \frac{a}{s^2+a^2} & \frac{s}{s^2+a^2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} \cos(at) & -\sin(at) \\ \sin(at) & \cos(at) \end{bmatrix}$$