Optimalno upravljanje

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

15. decembar 2022.

1 Uvodna razmatranja

Posmatrajmo sistem koji je opisan skupom diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_k), \quad i = 1, ..., n, \quad k = 1, ..., m,$$

gde su x_i promenljive stanja, u_k upravljačke (ulazne) promenljive (često samo upravljanje) i t je nezavisna promenljiva.

Naš zadatak je da pronađemo optimalno upravljanje $u = u_{opt}$, odnosno optimalan način na koji menjamo ulaz kako bismo dobili željeni izlaz. Kvalitet izlaza ocenjujemo kriterijumom optimalnosti

$$I = \int_0^T F(t, x_i, u_k) dt.$$

Pretpostavićemo da je $x_i(0) = \alpha_i$ i da je T poznato.
Formiramo prošireni kriterijum optimalnosti

$$\overline{I} = \int_0^T \left\{ F(t, x_i, u_k) - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)[\dot{x}_i - f_i(t, x_i, u_k)] \right\} dt.$$

Ovaj problem se svodi na pronalaženje optimuma **Hamiltonove funkcije**

$$H(t, x_i, u_k, p_i) = F(t, x_i, u_k) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(t, x_i, u_k).$$

Nakon zamene Hamiltonove funkcije u $\overline{I}$ dobijamo

$$\overline{I} = \int_0^T \left[H(t, x_i, u_k, p_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i \right] dt.$$

Potrebni uslovi za pronalaženje optimuma su

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial u_k} &= 0. \end{aligned}$$

Ukoliko je T specificirano, onda imamo sledeći *prirodno granični uslov*

$$\boxed{p_i(T) = 0.}$$

1.1 Zadaci

1. Dinamički proces opisan je diferencijalnom jednačinom $\dot{x} = u$ uz granični uslov $x(0) = a$. Odrediti ekstremalu $x(t)$ i optimalno upravljanje $u(t)$ koji kriterijumu optimalnosti

$$I = \int_0^T \frac{1}{2}(x^2 + u^2)dt$$

saopštavaju ekstremnu vrednost, pri čemu je T poznato.

Rešenje.

Formiramo Hamiltonovu funkciju

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + pu.$$

Sada koristimo kanonske jednačine:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = u \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \implies u + p = 0. \end{aligned}$$

Rešavamo dobijeni sistem jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u = -p \Big/ \frac{d}{dt} \\ \dot{p} &= -x \\ \ddot{x} &= -\dot{p} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} - x &= 0 \\ r^2 - 1 &= 0 \\ r_{1/2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Dobijamo opšti oblik ekstemale

$$\boxed{x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}.$$

Pošto je $\dot{x} = u = -p$, odavde sledi

$$\begin{aligned} p(t) &= -\dot{x}(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ u(t) &= c_1 e^t - c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Korišćenjem početnih uslova dobijamo

$$x(0) = a \implies c_1 + c_2 = a$$
$$x(T) =? \implies \boxed{p(T) = 0} \implies -c_1 e^T + c_2 e^{-T} = 0.$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti za konstante c_1 i c_2

$$c_1 = \frac{ae^{-T}}{e^T + e^{-T}}$$
$$c_2 = \frac{ae^T}{e^T + e^{-T}}.$$

Konačno dobijamo ekstremalu i optimalno upravljanje

$$x(t) = \frac{ae^{-T}}{e^T + e^{-T}} e^t + \frac{ae^T}{e^T + e^{-T}} e^{-t}$$
$$u(t) = \frac{ae^{-T}}{e^T + e^{-T}} e^t - \frac{ae^T}{e^T + e^{-T}} e^{-t}.$$

2. Dinamički proces opisan je diferencijalnom jednačinom $\ddot{x} + x = u$ uz granične uslove $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2} = 1)$ i $\dot{x}(0) = 0$. Odrediti $x_1(t)$, $x_2(t)$ i optimalno upravljanje $u(t)$ koji kriterijumu optimalnosti

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt$$

saopštavaju ekstremnu vrednost, pri čemu je T poznato.

Rešenje.

Sistem je opisan diferencijalnom jednačinom drugog reda, pa moramo da „spustimo" red jednačine uvođenjem smena na sledeći način:

$$x_1 = x \Big/ \frac{d}{dt} \qquad \dot{x_1} = x_2$$
$$x_2 = \dot{x} \Big/ \frac{d}{dt} \qquad \dot{x_2} = \ddot{x} = u - x_1$$

Hamiltonova funkcija ima sledeći oblik

$$H = F + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i = u^2 + p_1 x_2 + p_2(u - x_1).$$

Sada koristimo kanonske jednačine:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = x_2 \\
\dot{x_2} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = u - x_1 \\
\dot{p_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2 \\
\dot{p_2} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \\
\frac{\partial H}{\partial u} &= 2u + p_2 = 0 \implies u = -\frac{p_2}{2}.
\end{aligned}$$

Uvođenjem smena, prirodno granične uslove sada zapisujemo

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= 0 \\
x_1(\frac{\pi}{2}) &= 1 \\
x_2(0) &= 0 \\
x_2(\frac{\pi}{2}) &=? \implies \boxed{p_2(\frac{\pi}{2}) = 0}.
\end{aligned}$$

Rešavamo dobijeni sistem jednačina

$$\begin{aligned}
\dot{p_1} = p_2 \Big/ \frac{d}{dt} &\implies \ddot{p_1} = -p_1 \\
\dot{p_2} = -p_1 \Big/ \frac{d}{dt} &\implies \ddot{p_2} = -p_2 \\
\ddot{p_2} + p_2 &= 0 \\
r^2 + 1 &= 0 \\
p_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t.
\end{aligned}$$

Korišćenjem prirodno graničnog uslova $p_2(\frac{\pi}{2}) = 0$ dobijamo da je $c_2 = 0$. Odavde sledi

$$\begin{aligned}
p_2(t) &= c_1 \cos t \\
u(t) &= -\frac{c_1}{2} \cos t
\end{aligned}$$

Dalje tražimo x_1 i x_2.

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} = x_2 \Big/ \frac{d}{dt} &\implies \ddot{x_1} = \dot{x_2} = u - x_1 \\
\ddot{x_1} + x_1 &= -\frac{c_1}{2} \cos t.
\end{aligned}$$

Rešavamo ovu nehomogene diferencijalnu jednačinu

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_{1h}(t) + x_{1p}(t) \\
x_{1h} &= c_3 \cos t + c_4 \sin t \\
x_{1p} &= t(A \cos t + B \sin t) \\
\dot{x_{1p}} &= A \cos t + B \sin t + t(-A \sin t + B \cos t) \\
\ddot{x_{1p}} &= -A \sin t + B \cos t - A \sin t + B \cos t + t(-B \sin t - A \cos t) \\
-2A \sin t + 2B \cos t &= -\frac{c_1}{2} \cos t \\
A = 0 \quad B &= -\frac{c_1}{4} \\
x_{1p} &= -\frac{c_1}{4} t \sin t \\
x_1(t) &= c_3 \cos t + c_4 \sin t - \frac{c_1}{4} t \sin t
\end{aligned}
$$

Korišćenjem početnih uslova dobijamo sledeće vrednosti konstanti

$$
\begin{aligned}
c_3 &= 0 \\
c_4 &= 0 \\
c_1 &= -\frac{8}{\pi}
\end{aligned}
$$

Konačno dobijamo ekstremale i optimalno upravljanje

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{2}{\pi} t \sin t \\
x_2(t) &= \frac{2}{\pi} (\sin t + t \cos t) \\
u(t) &= \frac{4}{\pi} \cos t.
\end{aligned}
$$

3. Odrediti optimalno upravljanje za sistem opisan sledećim diferencijalnim jednačinama

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -x_1 + u \\
\dot{x_2} &= x_1
\end{aligned}
$$

i granični uslovi su $x(0) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ tako da $I = \int_0^T (x_2 + u^2) dt$ bude u minimumu. Vremenski interval je poznat i zadat.

Rešenje.

Hamiltonova funkcija ima sledeći oblik

$$
H = F + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i = x^2 + u^2 + p_1(-x_1 + u) + p_2 x_1.
$$

Sada koristimo kanonske jednačine:

$$\dot{x_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = -x_1 + u$$
$$\dot{x_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = x_1$$
$$\dot{p_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 - p_2$$
$$\dot{p_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -1$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + p_1 = 0 \implies u = -\frac{p_1}{2}.$$

Prirodno granični uslovi su

$$p_1(T) = 0$$
$$p_2(T) = 0.$$

Ukoliko integralimo izraz $\dot{p_2} = -1$ dobijamo

$$p_2(t) = -t + c_1$$
$$p_2(T) = 0$$
$$-T + c_1 = 0$$
$$c_1 = T$$
$$\boxed{p_2(t) = T - t.}$$

Nastavljamo dalje rešavanje

$$\dot{p_1} - p_1 = -p_2$$
$$\dot{p_1} - p_1 = T - t$$
$$p_{1h} = c_1 e^t$$
$$p_{1p} = At + B$$
$$\dot{p_{1p}} = A$$
$$A - At + B = t - T$$
$$A = -1 \quad B = T - 1$$
$$p_1(t) = c_1 e^t - t + T - 1 = c_1 e^t - (t - T) - 1$$
$$p_1(t) = 0 \implies c_1 = e^{-T}.$$

Odavde možemo da odredimo upravljanje

$$\boxed{u(t) = -\frac{p_1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + t - T - e^{(t-T)}\right).}$$