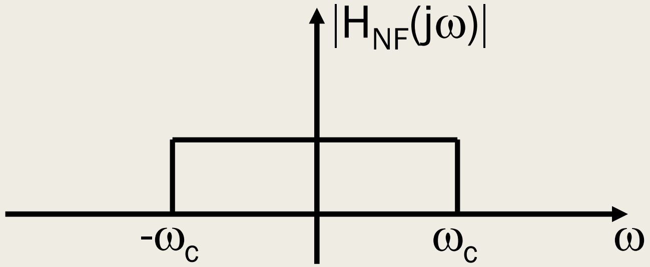
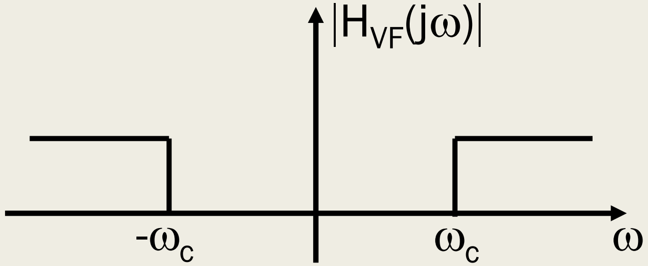
ANALOGNI FILTERI

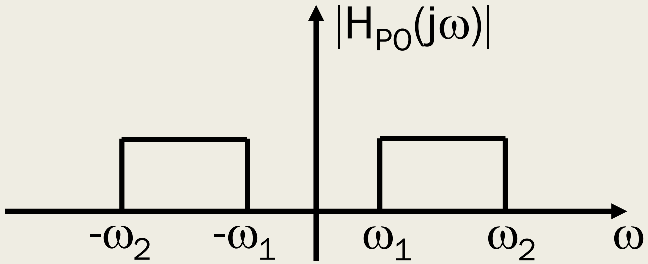
Primena DSP u upravljanju

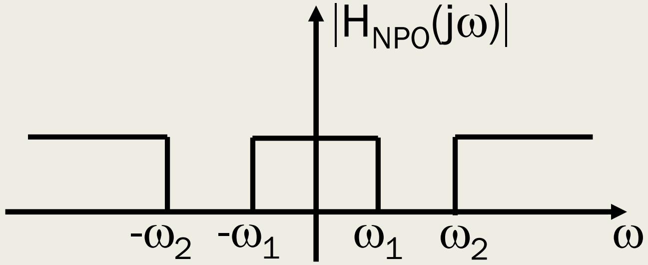
Idealni filteri
Amplitudska karakteristika

- Filter propusnik niskih učestanosti, NF filter
- $H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} 1 \;\; za \; |\omega| \leq \omega_c \\ 0 \;\; za \; |\omega| > \omega_c \end{cases}$
- Filter propusnik visokih učestanosti, VF filter
- $H_{VF}(j\omega) = \begin{cases} 0 \;\; za \; |\omega| < \omega_c \\ 1 \;\; za \; |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$
- Filter propusnik opsega učestanosti, PO filter
- $H_{PO}(j\omega) = \begin{cases} 1 \;\; za \qquad\qquad \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 \;\; za \; 0 < |\omega| < \omega_1 \; i \;\; |\omega| > \omega_2 \end{cases}$
- Filter nepropusnik opsega učestanosti, NPO filter
- $H_{NPO}(j\omega) = \begin{cases} 1 \;\; za \; 0 \leq |\omega| \leq \omega_1 \; i \;\; |\omega| > \omega_2 \\ 0 \;\; za \qquad\qquad \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \end{cases}$

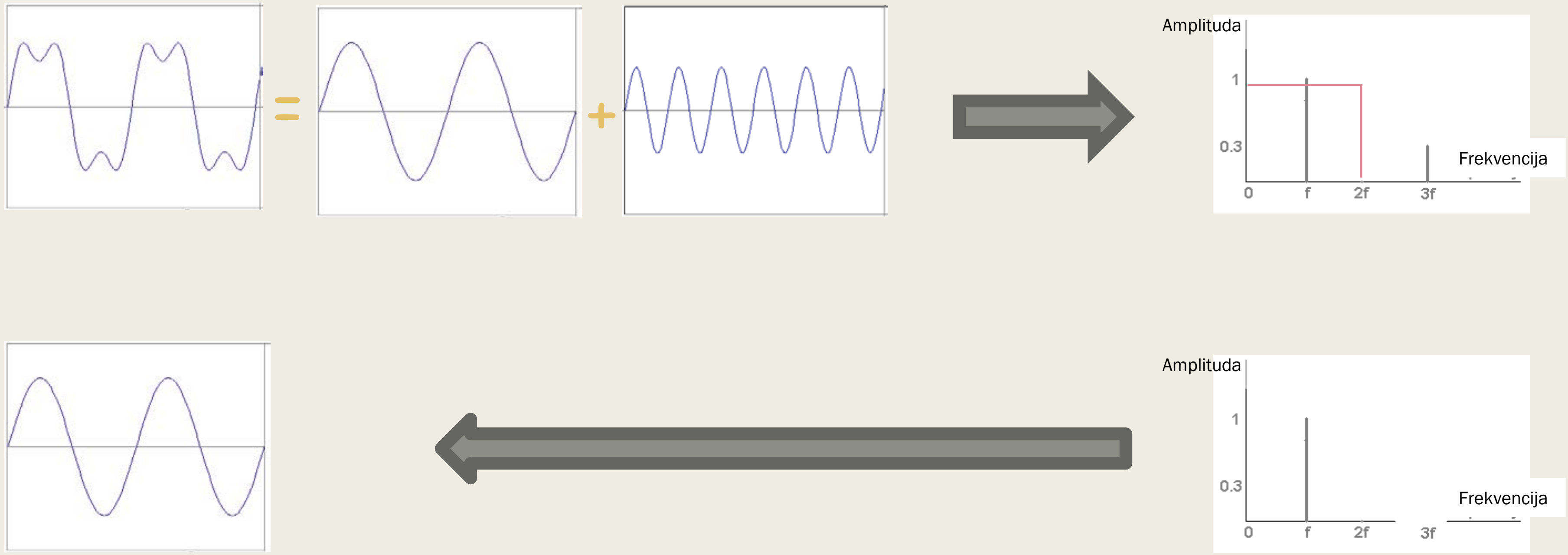




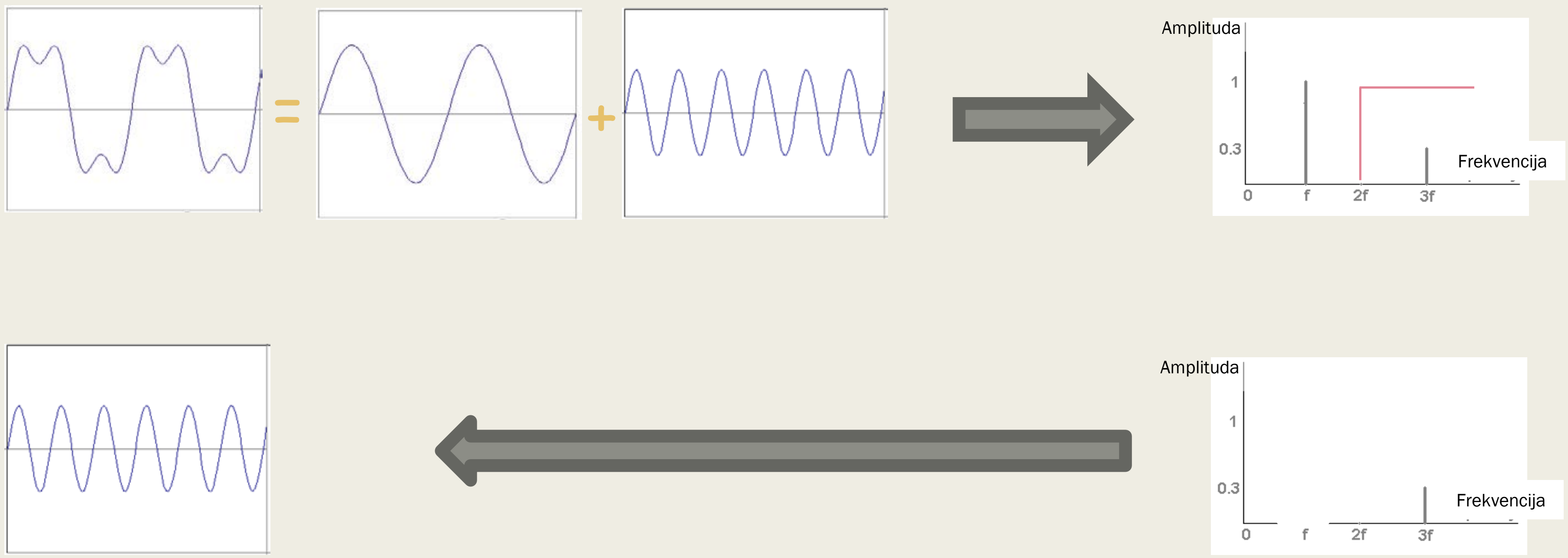




Primer NF filter

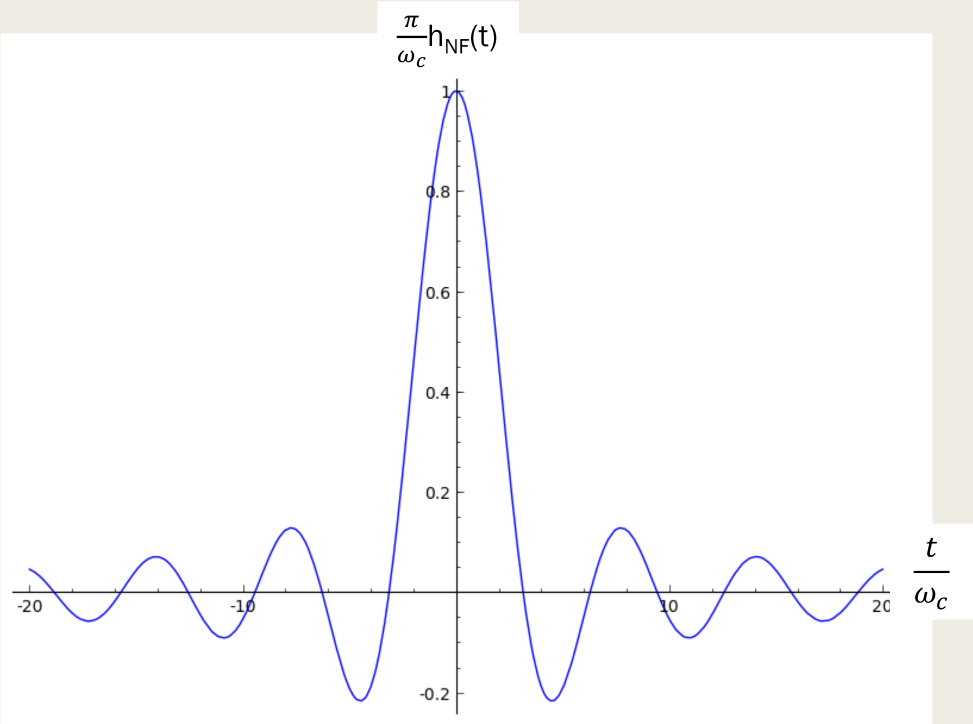


Primer VF filter



NF filter nulte fazne karakteristike

- Frekvencijski odziv: $\boldsymbol{H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} 1 \;\; za\; |\omega| \leq \omega_c \\ 0 \;\; za\; |\omega| > \omega_c \end{cases}}$
- Impulsni odziv: $h_{NF}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{NF}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j t} e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$
- $h_{NF}(t) = \frac{1}{2\pi j t}\left[e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}\right] = \frac{1}{\pi t}\sin(\omega_c t) \;\Rightarrow \boldsymbol{h_{NF}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{sin(\omega_c t)}{\omega_c t}}$



NF filter linearne fazne karakteristike

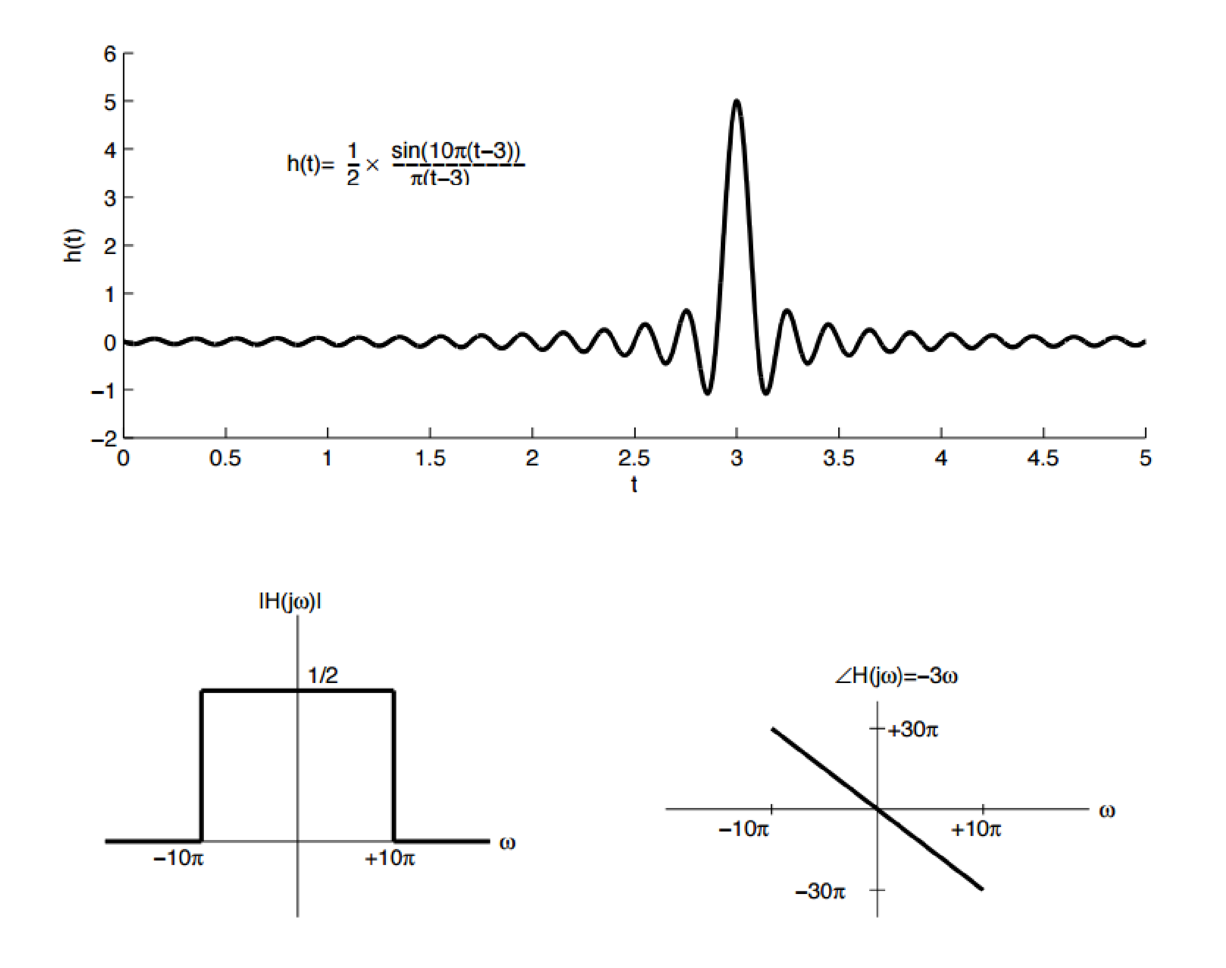
- Frekvencijski odziv: $\boldsymbol{H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & za\ |\omega| \le \omega_c \\ 0 & za\ |\omega| > \omega_c \end{cases}}$

- Impulsni odziv: $\boldsymbol{h_{NF}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{sin[\omega_c(t-\tau)]}{\omega_c(t-\tau)}}$

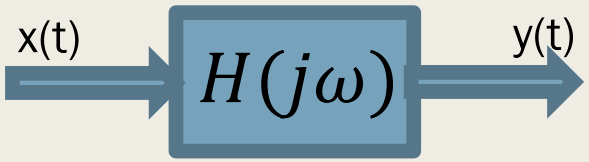
- Primer:

- $H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\omega 3} & za\ |\omega| \le 10\pi \\ 0 & za\ |\omega| > 10\pi \end{cases}$

- $h(t) = \frac{10\pi}{2\pi} \cdot \frac{sin[10\pi(t-3)]}{10\pi(t-3)}$



Linearna fazna karakteristika



- Kakav je značaj linearne fazne karakteristike?
- Ako je $H(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ posmatrajmo kako to utiče na pojedinačni *i*-ti harmonik
- $x(t) = \sin \omega_i t \Rightarrow y(t) = \sin(\omega_i t + \varphi_i) = \sin(\omega_i t - \omega_i \tau) = \sin[\omega_i (t - \tau)]$
- Dakle svaki harmonik će biti zakašnjen za identično vreme τ sekundi
- Odnosno ceo signal y(t) biće zakašnjen za τ sekundi i neće biti izobličen
- Grupno kašnjenje: $\tau_d = -\frac{d\angle H(j\omega)}{d\omega}$ je konstantno za sisteme sa linearnom faznom karakteristikom
- Uopšteno linearna fazna karakteristika je data izrazom:
- $\angle H(j\omega) = k_1 + k_2\omega$; k_1 i k_2 su realne konstante

Gabarit filtera

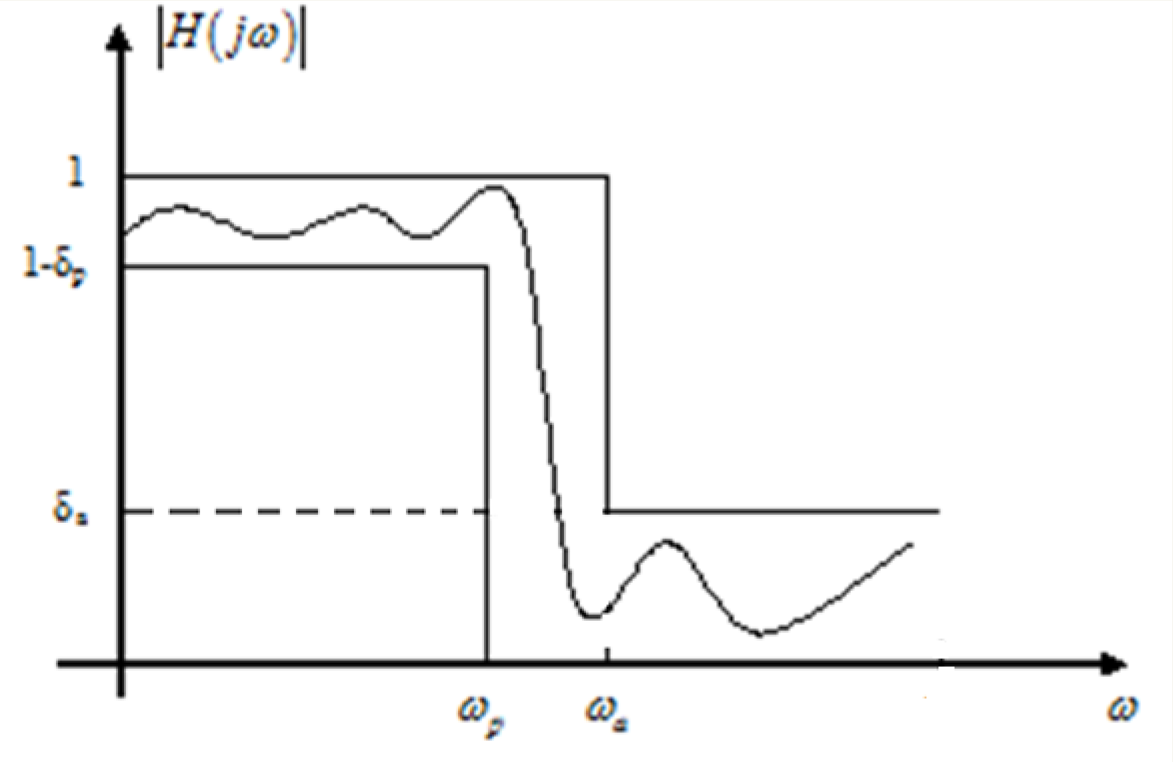
ω_p - granična učestanost propusnog opsega,

ω_a - granična učestanost nepropusnog opsega,

δ_p - dozvoljena varijacija amplitude u propusnom opsegu i

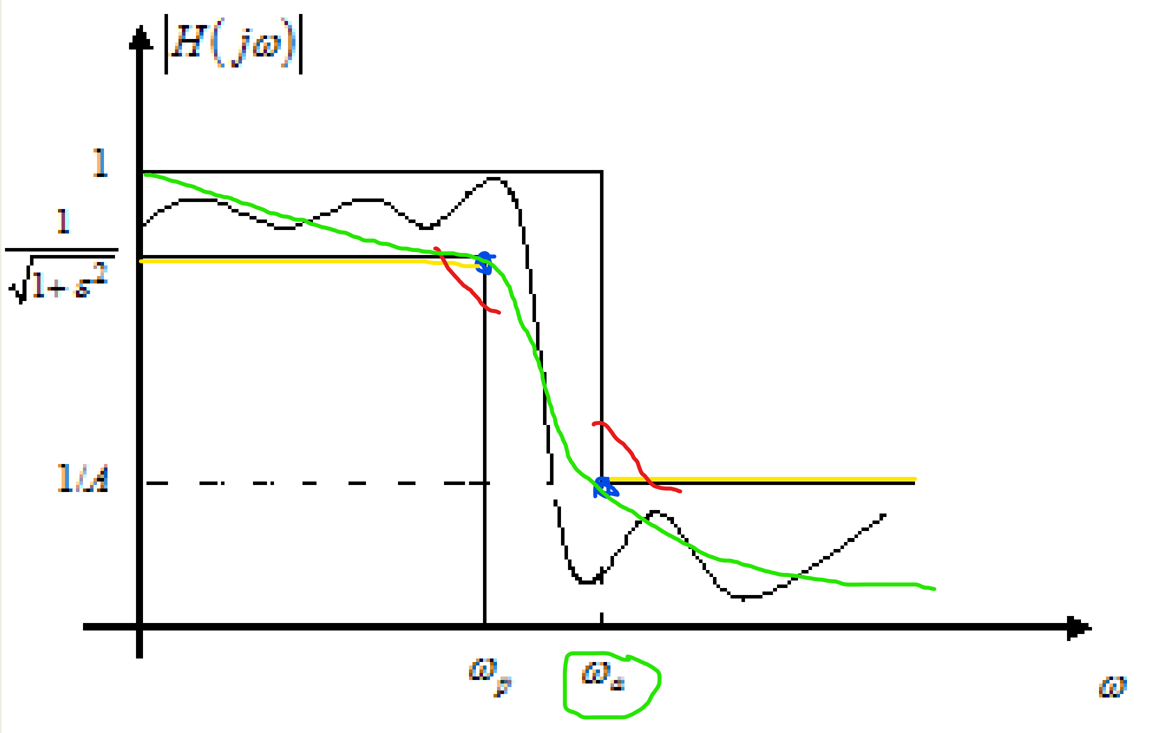
δ_a - dozvoljena varijacija amplitude u nepropusnom opsegu.

- Definiše izgled amplitudske karakteristike filtera
- Dozvoljene tolerancije amplitudske karakteristike, odnosno dozvoljeno odstupanje od karakteristike idealnog filtera
- Propusni opseg: $1-\delta_p \le |H(j\omega)| \le 1, \quad 0 \le \omega \le \omega_p$
- Nepropusni opseg: $0 \le |H(j\omega)| \le \delta_a, \quad \omega_a \le \omega$
- Prelazna zona: $\omega_p < \omega < \omega_a$



Gabarit filtera

BATERVORT



Projektovanje filtra

- Gabarit filtra opisuje dozvoljenu zonu u kojoj mora da se nalazi amplitudska karakteristika
- Aproksimacija predstavlja pronalaženje funkcije prenosa LVI sistema najnižeg reda čija amplitudska karakteristika zadovoljava gabarit
- Svaki LVI sistem nenultog reda se ponaša kao filter, ali za projektovanje filtara se koriste „standardizovani“ oblici koji daju dobre rezultate
- Nakon dobijanja funkcije prenosa vrši se implementacija, odnosno izgradnja filtera

Batervortova aproksimacija

- Batervortova (Butterworth) aproksimacija ide alne amplitudske karakteristike filtra izvedena je pod pretpostavkom da je amplitudska karakteristika maksimalno ravna u koordinatnom početku.
- To znači da je u slučaju funkcije *N*-tog reda, prvih 2*N*-1 izvoda kvadrata amplitudske karakteristike jednako nuli za $\omega = 0$
- Batervortove aproksimacije amplitudska karakteristika je striktno monotona u propusnom i nepropusnom opsegu. Kvadrat amplitudske karakteristike koji zadovoljava ove uslove je dat sledećim izrazom:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left({}^{\omega}/_{\omega_p}\right)^{2N}}$$

Parametar ε se može odrediti iz a_p na sledeći način:

$$a_p = -20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right] = 20\log\left[\sqrt{1+\varepsilon^2}\right] = 10\log(1+\varepsilon^2)$$

$$\log(1+\varepsilon^2) = \frac{a_p}{10} \Rightarrow (1+\varepsilon^2) = 10^{\frac{a_p}{10}} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{a_p}{10}} - 1}}$$

Red filtera N se može odrediti iz a_a na sledeći način:

$$a_a = -20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left({\omega_a}/{\omega_p}\right)^{2N}}}\right] = 20\log\left[\sqrt{1+\varepsilon^2\left({\omega_a}/{\omega_p}\right)^{2N}}\right] = 10\log\left[1+\varepsilon^2\left({\omega_a}/{\omega_p}\right)^{2N}\right]$$

$$1+\varepsilon^2\left({\omega_a}/{\omega_p}\right)^{2N} = 10^{\frac{a_a}{10}} \Rightarrow \left({\omega_a}/{\omega_p}\right)^{2N} = \frac{10^{\frac{a_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}$$

$$2N\log\left({\omega_a}/{\omega_p}\right) = \log\left[\frac{10^{\frac{a_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}\right] \Rightarrow \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{\log\left[\frac{10^{\frac{a_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}\right]}}{\boldsymbol{2\log\left({\omega_a}/{\omega_p}\right)}}$$

Za N se uzima prvi veći ceo broj

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left({}^{s}/_{j\omega_p} \right)^{2N}}$$

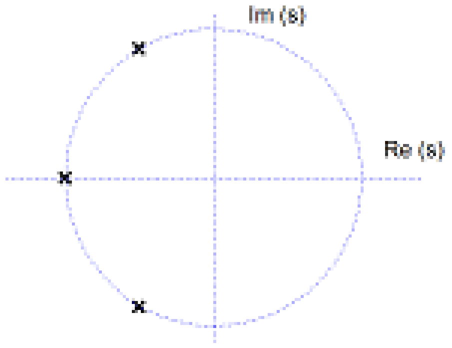
Polinom u imeniocu ima 2N korena (s_k), koji se mogu odrediti na sledeći način:

$$1 + \varepsilon^2 \left({}^{s_k}/_{j\omega_p} \right)^{2N} = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 \left({}^{s_k}/_{j\omega_p} \right)^{2N} = -1 = e^{j(\pi + 2k\pi)} \Rightarrow \left(\frac{s_k}{j\omega_p} \right)^{2N} = \frac{e^{j(\pi+2k\pi)}}{\varepsilon^2}$$

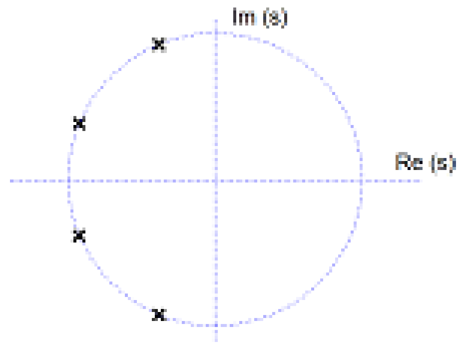
$$\frac{s_k}{j\omega_p} = \frac{e^{j\frac{\pi+2k\pi}{2N}}}{\sqrt[N]{\varepsilon}} \Rightarrow s_k = j\omega_p \frac{e^{j\frac{\pi+2k\pi}{2N}}}{\sqrt[N]{\varepsilon}}$$

$$\boldsymbol{s_k = \frac{\omega_p}{\sqrt[N]{\varepsilon}} e^{j\frac{\pi(2k+N+1)}{2N}} \quad , k = 0, 1, \dots, 2N-1}$$

Koreni su raspoređeni na krugu poluprečnika $\omega_p / \sqrt[N]{\varepsilon}$ na jednakim ugaonim rastojanjima od π / N. Po uslovu stabilnosti, svi polovi funkcije prenosa moraju da leže u levoj poluravni ravni kompleksne učestanosti s, pa su onda polovi funkcije $H(s)$ oni iz leve poluravni, a polovi funkcije $H(-s)$ oni iz desne poluravni. Raspored polova za N=3 i N=4 je prikazan je na sledećoj slici:

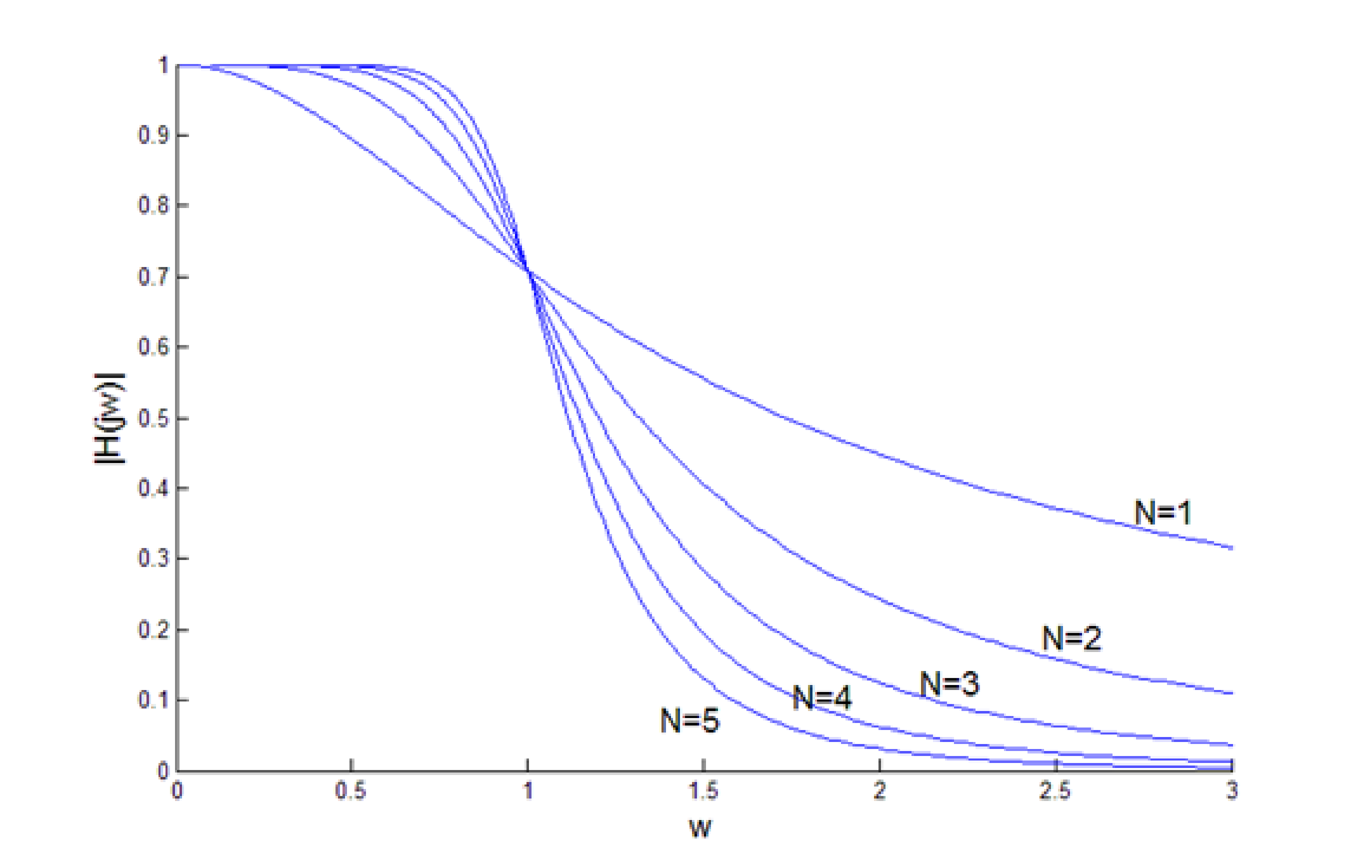


Slika 1 - Raspored polova Batervortovog filtra za ε=1: N = 3



Slika 2 - Raspored polova Batervortovog filtra za ε=1: N = 4

Amplitudska karakteristika Batervortovog filtera



Čebiševljeva aproksimacija prve vrste

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}$$

Gde je $T_N(x)$ Čebiševljev polinom dat izrazom:

$$T_N(x) = \begin{cases} cos[N\cos^{-1}x], & |x| \le 1 \\ cosh[N\cosh^{-1}x], & |x| \ge 1 \end{cases}$$

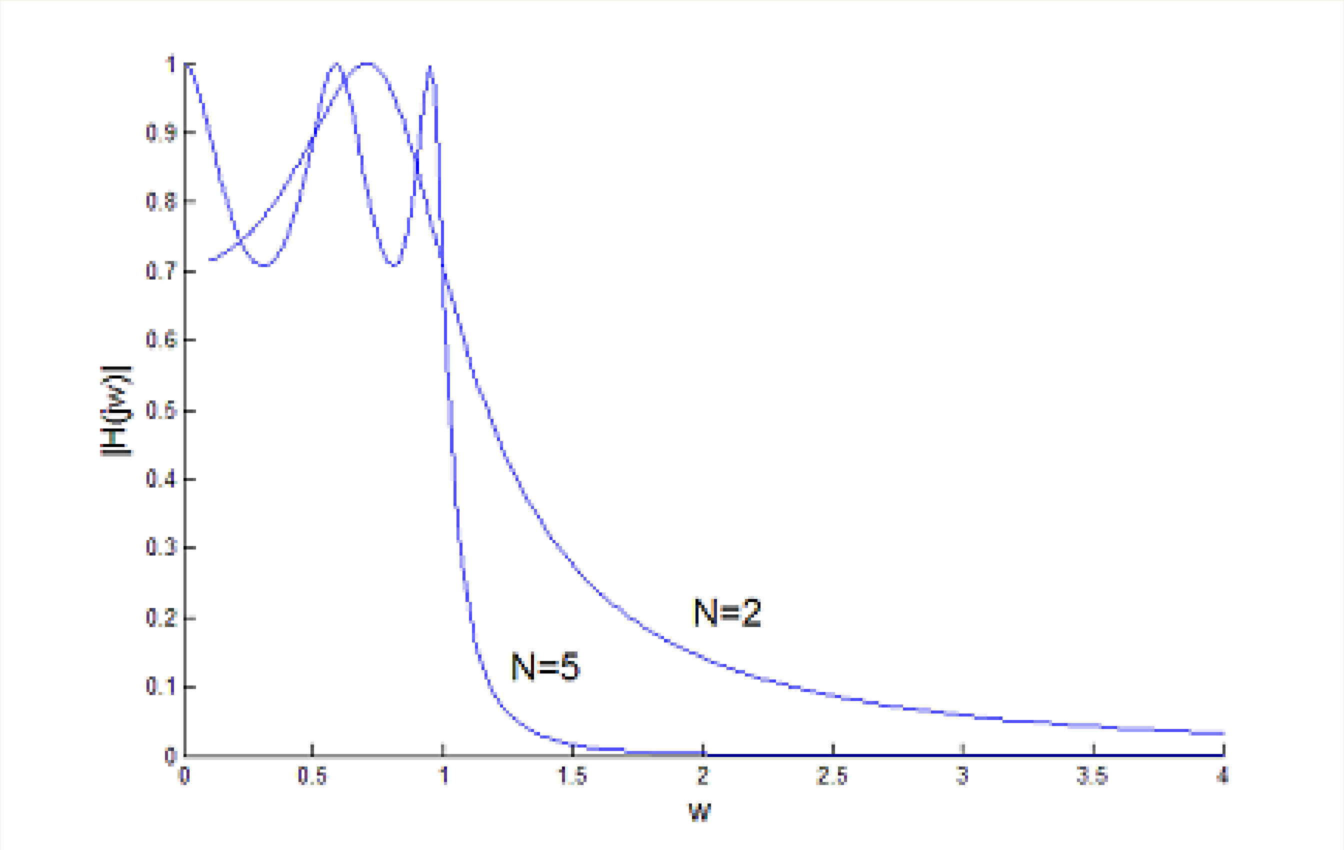
Ili na sledeći način:

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \qquad T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{\mathbf{10^{\frac{a_p}{10}} - 1}}$$

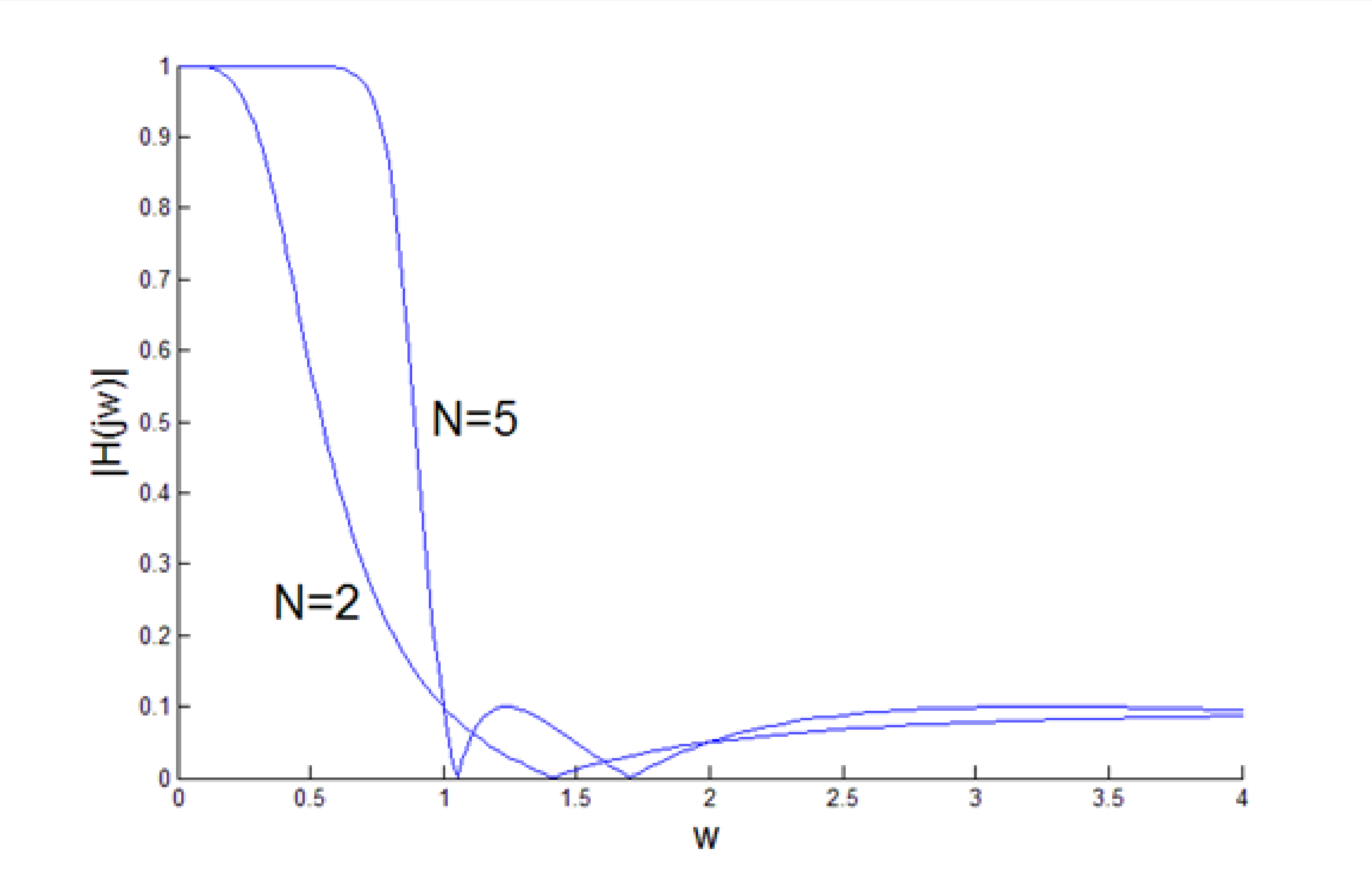
$$\boldsymbol{N} \ge \frac{\mathbf{cosh}^{-1}\sqrt{\frac{\mathbf{10^{\frac{a_a}{10}} - 1}}{\mathbf{10^{\frac{a_p}{10}} - 1}}}}{\mathbf{cosh}^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\boldsymbol{\omega_p}}\right)}$$

Amplitudska karakteristika Čebiševljeva filtera prve vrste



Ovakva aproksimacija je odlična u nepropusnom opsegu

Čebiševljeva aproksimacija druge vrste



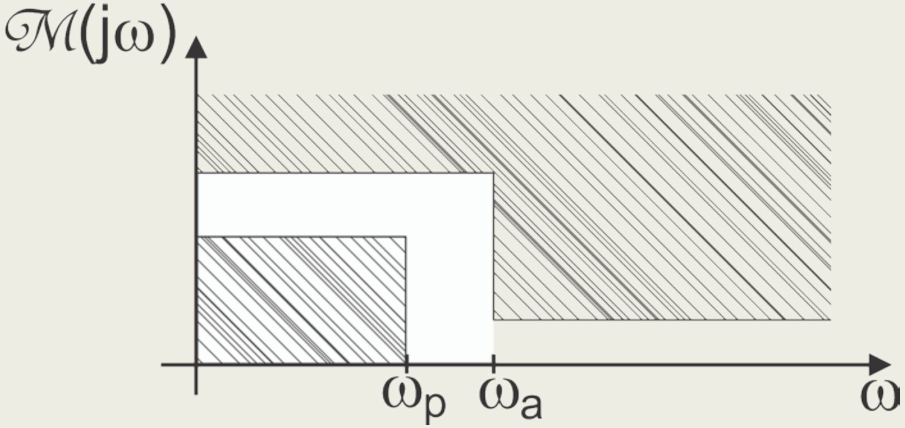
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2\left({}^{\omega}/_{\omega_p}\right)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left({}^{\omega}/_{\omega_p}\right)}$$

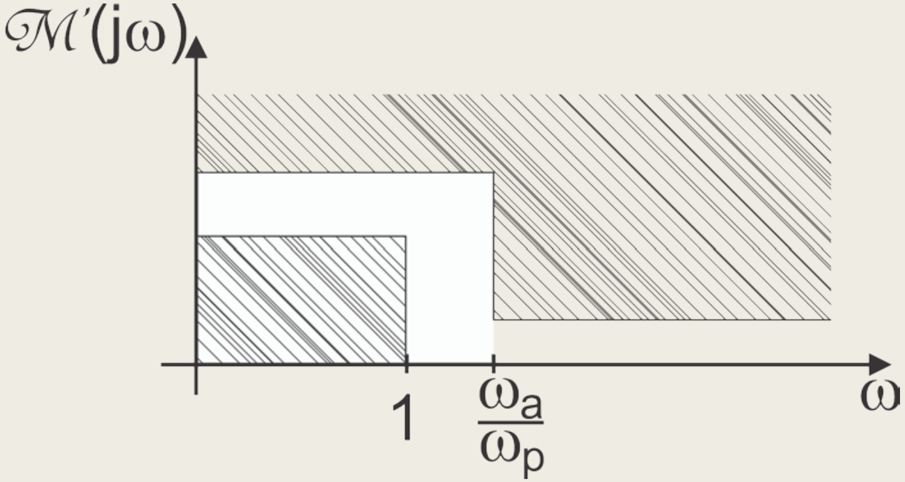
Ovakva aproksimacija je odlična u propusnom opsegu.

Frekvencijske transformacije analognih filtara

- Metode projektovanja funkcije prenosa analognog filtera su definisane za NF filtar jedinične granične učestanosti propusnog opsega.
- Funkcija prenosa drugih tipova filtara (VF, PO, NPO) se mogu izvesti iz funkcije prenosa NF filtra primenom frekvencijkih transformacija.
- Frekvencijske transformacije specifikaciju realnog NF, VF, PO ili NPO filtera transformišu u specifikaciju odgovarajućeg NF prototipa.
- NF prototip je NF filter jedinične granične učestanosti propusnog opsega

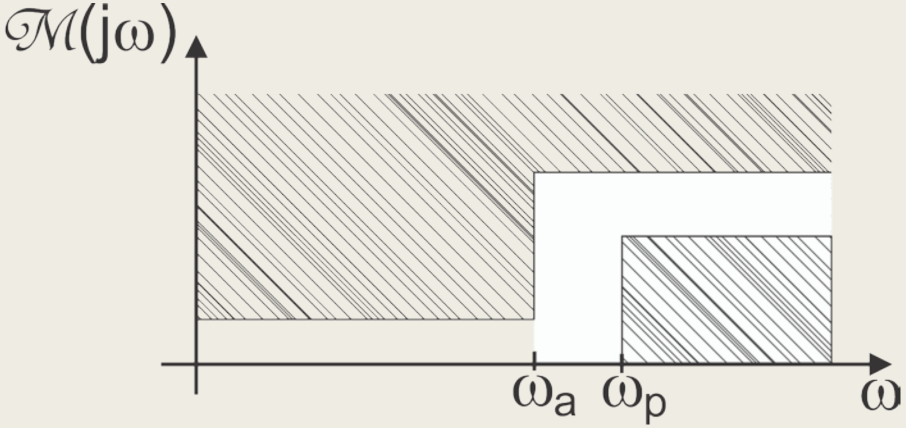
Transformacija NF -> NF prototip

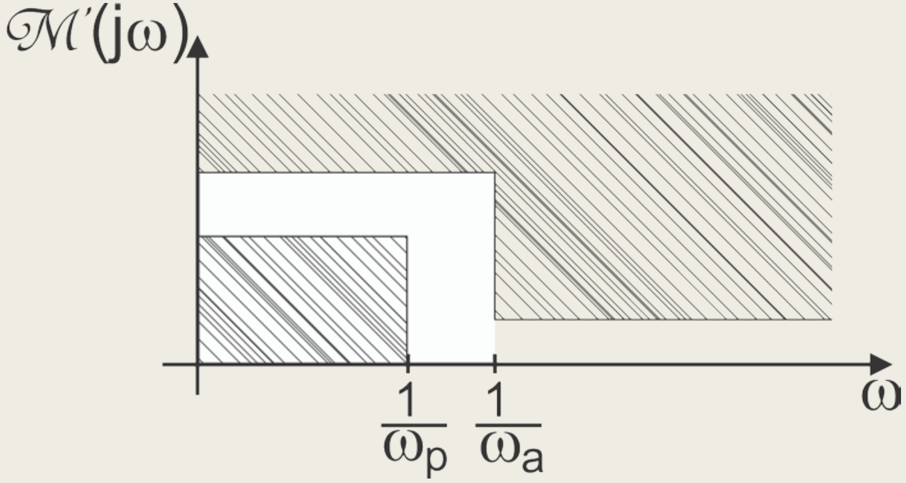


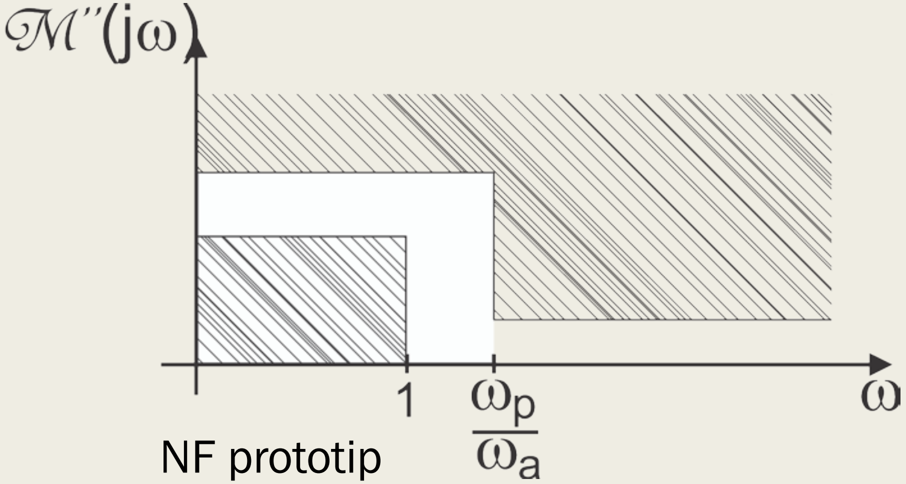


- Normalizacija: Sve frekvencije na gabaritu se podele sa ω_p i dobija se NF prototip
- Denormalizacija: Nakon aproksimacije funkcije prenosa u funkciji prenosa vrši se smena: $s \rightarrow \frac{s}{\omega_p}$
- Rezultat je funkcija prenosa NF filtra željenog gabarita

Transformacija VF -> NF prototip



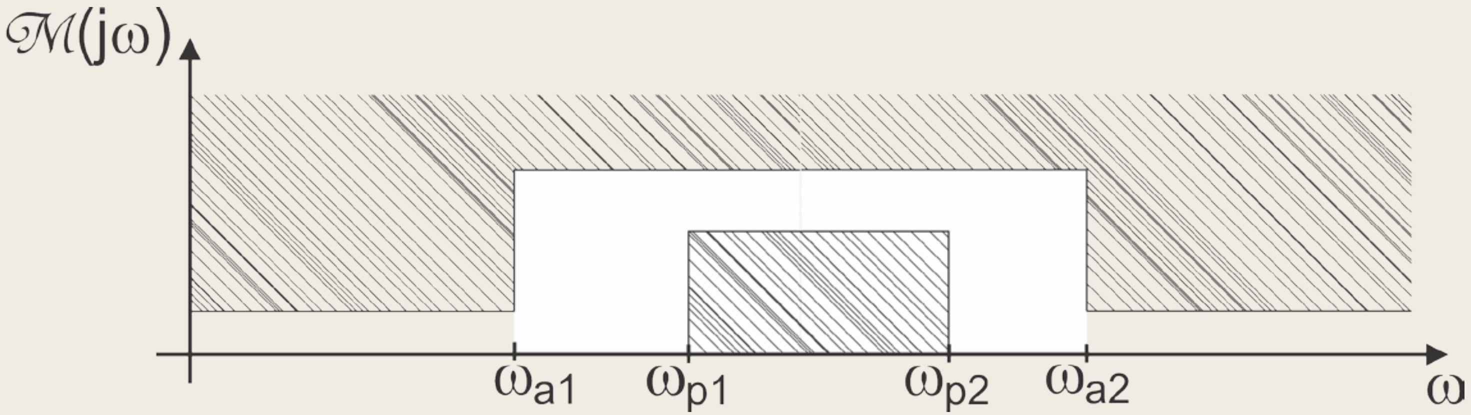




NF prototip

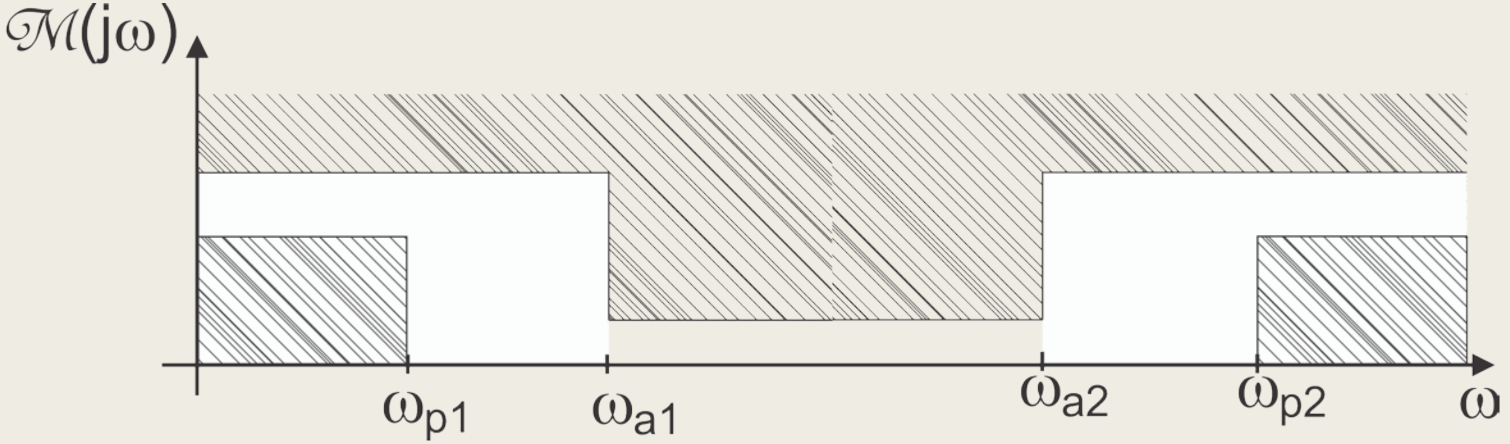
- Aproksimacija funkcija prenosa NF prototipa
- Denormalizacija učestanosti: $s \rightarrow \frac{s}{\omega_p}$
- U tako dobijenoj funkciji prenosa izvrši se smena: $s \rightarrow \frac{1}{s}$

Transformacija PO -> NF prototip



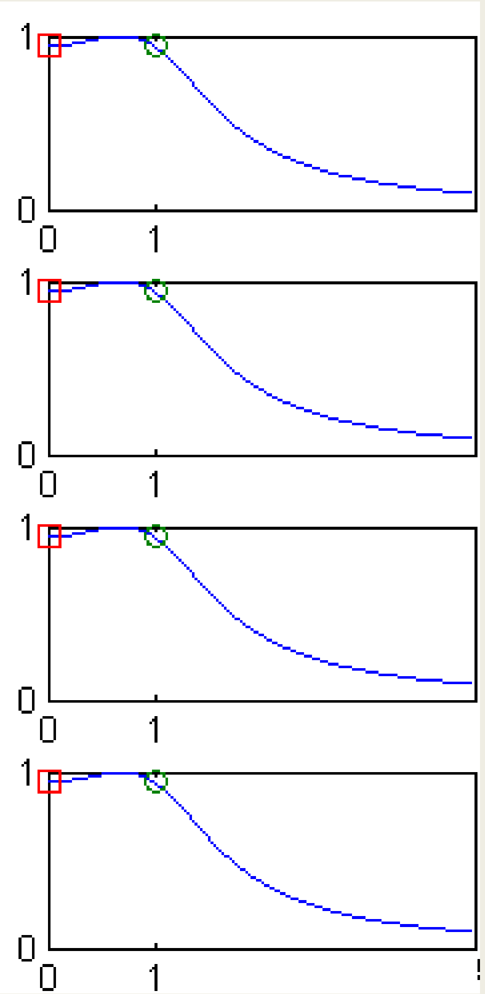
- $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$ $\quad \omega_p = \frac{\omega_{p2}^2 - \omega_0^2}{\omega_{p2}}$ $\quad \omega_a = \frac{\omega_{a2}^2 - \omega_0^2}{\omega_{a2}}$ ili $\omega_a = \frac{\omega_0^2 - \omega_{a1}^2}{\omega_{a1}}$
- Uzima se ono ω_a koje daje užu prelaznu zonu
- Normalizacija -> aproksimacija funkcije prenosa NF prototipa -> denormalizacija
- U funkciji prenosa se vrši zamena $\boldsymbol{s \rightarrow \frac{s^2+\omega_0^2}{s}}$
- Vrednosti nula i polova se dobijaju kao rešenje: $s_{PO} = \frac{s_{NF} \pm \sqrt{s_{NF}^2 - 4\omega_0^2}}{2}$
- Red PO filtera je dvostruko veći od reda NF prototipa

Transformacija NPO -> NF prototip



- $\omega_0 = \sqrt{\omega_{a1}\omega_{a2}}$ $\quad \omega_p = \frac{\omega_{a1}}{\omega_0^2 - \omega_{a1}^2}$ $\quad \omega_a = \frac{\omega_{p1}}{\omega_0^2 - \omega_{p1}^2}$ ili $\omega_a = \frac{\omega_{p2}}{\omega_{p2}^2 - \omega_0^2}$
- Uzima se ono ω_a koje daje užu prelaznu zonu
- Normalizacija -> aproksimacija funkcije prenosa NF prototipa -> denormalizacija
- U funkciji prenosa se vrši zamena $s \to \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
- Vrednosti nula i polova se dobijaju kao rešenje: $s_{NPO} = \frac{1/s_{NF} \pm \sqrt{1/s_{NF}^2 - 4\omega_0^2}}{2}$
- Red NPO filtera je dvostruko veći od reda NF prototipa

Frekvencijske transformacije sumarno

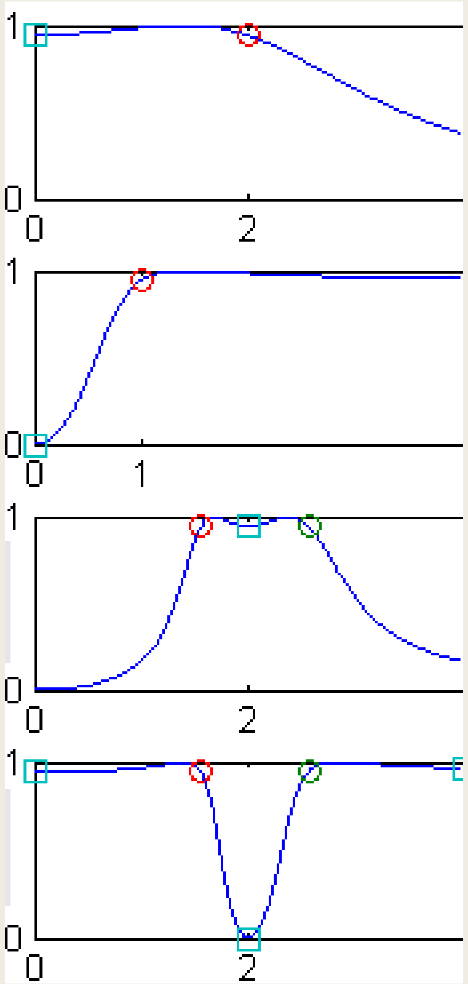


$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_p}$$

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{s}$$

$$s \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$



$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{a1}\omega_{a2}}$$