Uvod u dinamičku optimizaciju

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

15. decembar 2022.

1 Uvodno razmatranje

U dinamičkoj optimizaciji kriterijum optimalosti se definiše na sledeći način

$$I = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

gde t predstavlja nezavisno promenljivu, $x(t)$ predstavlja zavisno promenljivu funkciju, $\dot{x}(t)$ predstavlja prvi izvod funkcije $x(t)$ po t i tkđ. je zavisno promenljiva funkcija, a podintegralna funkcija $F(t, x(t), \dot{x}(t))$ se naziva funkcionalom[1].

[1] Funkcional je funkcija koja kao argument ima funkciju.

Razmatranje ćemo započeti najjednostavnijim slučajem, odnosno pretpostavićemo da su vrednosti $x(a)$ i $x(b)$ poznate.
Osnovni zadatak dinamičke optimizacije je da nađe funkciju $x(t)$ koja pripada određenoj klasi funkcija (zadovoljava početne uslove), a određenom integralu I saopštava ekstremnu vrednost.

1.1 Potrebni i dovoljni uslovi ekstremuma

$$\begin{aligned}
I(\overline{x}(t)) - I(x(t)) &= \int_a^b F(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t))dt - \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\
&= \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}\Phi + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\Phi}\right]dt + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Phi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\Phi\dot{\Phi} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\dot{\Phi}^2\right]dt \\
&= \delta I + \delta^2 I
\end{aligned}$$

Potrebni uslovi ekstremuma

Potreban uslov postojanja ekstremale je

$$\boxed{\delta I = 0.}$$

Nakon sređivanja izraza, potrebni uslovi se svode na **Ojler-Lagranžovu jednačinu** oblika

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.}$$

Dovoljni uslovi ekstremuma

Ukoliko je $\delta^2 I > 0$ za tu ekstremalu kažemo da je minimum, a ukoliko je $\delta^2 I < 0$ za tu ekstremalu kažemo da je maksimum.
Ove uslove možemo da svedemo na **Ležandrove uslove**:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} > 0 \implies \text{Minimum}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} < 0 \implies \text{Maksimum}$$

1.2 *Zadaci*

1. Naći ekstremalu $x(t)$ koja integralu

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dot{x}^2(t) - x^2(t)]dt$$

saopštava ekstremnu vrednost ukoliko je $x(0) = 0$ i $x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Rešenje.

Potreban uslov:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$-2x - 2\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} + x = 0$$

Diferencijalnu jednačinu rešavamo transformacijom u karakterističnu jednačinu nakon čega dobijamo

$$r^2 + 1 = 0$$
$$r_{1/2} = \pm i$$
$$x(t) = c_1 cos(t) + c_2 sin(t).$$

Pronašli smo opšte rešenje, ali nama treba ono koje prolazi kroz unapred definisane tačke.

$$x(0) = 0 \implies \boxed{c_1 = 0}$$
$$x(\frac{\pi}{2}) = 1 \implies \boxed{c_2 = 1}$$

Konačno dobijamo ekstremalu

$$x(t) = sin(t).$$

Kako bismo ispitali karakter dobijane ekstremale, iskoristićemo Ležandrove uslove.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2 > 0 \implies \text{Minimum}$$

2. Naći ekstremalu $x(t)$ koja integralu

$$I = \int_0^2 [x^2(t) + 2x(t)\dot{x}() + \dot{x}^2(t)]dt$$

saopštava ekstremnu vrednost ukoliko je $x(0) = 0$ i $x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Rešenje.

Potreban uslov:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\ddot{x} - x = 0$$

Diferencijalnu jednačinu rešavamo transformacijom u karakterističnu jednačinu nakon čega dobijamo

$$r^2 + 1 = 0$$
$$r_{1/2} = \pm 1$$
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Pronašli smo opšte rešenje, ali nama treba ono koje prolazi kroz unapred definisane tačke.

$$x(0) = 1 \implies c_1 + c_2 = 1 \implies c_1 = 1 - c_2$$
$$x(2) = -3 \implies c_1 e^2 + c_2 e^{-2} = -3$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti za konstante c_1 i c_2

$$c_1 = \frac{2e^2 - e^{-2} + 3}{e^2 - e^{-2}}$$
$$c_2 = \frac{e^2 + 3}{e^2 - e^{-2}}.$$

Kako bismo ispitali karakter dobijane ekstremale, iskoristićemo Ležandrove uslove.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2 > 0 \implies \text{Minimum}$$

3. Naći krivu $y(x)$ minimalne dužine koja spaja tačke A(2, 10) i B(3, 15).

Rešenje.

Kriterijum optimalnosti u ovom slučaju je

$$I = \int_s ds,$$

gde ds računamo po sledećem obrascu

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{dx^2(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} \\ &= \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \\ &= \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je kriterijum optimalnosti

$$I = \int_2^3 \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Poznati su nam i granični uslovi $y(2) = 10$ i $y(3) = 15$.

Potreban uslov:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} 2\dot{y} &= const \\ \frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} &= C \\ \dot{y}^2 = \frac{C}{1-C} &= C_1 \\ \dot{y} = \sqrt{C_1} &= a. \end{aligned}$$

Ovo je specijalni slučaj Ojler-Lagranžove jednačine koja ima sledeći oblik

$$I = \int_a^b F(t, \dot{x}) dt.$$

Pošto je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, iz Ojler-Lagranžove jednačine sledi da mora da važi $\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$. Odavde zaključujemo da $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ mora biti konstanta.

Nakon integraljenja poslednjeg izraza dobijamo

$$y(x) = ax + b.$$

Pronašli smo opšte rešenje, ali nama treba ono koje prolazi kroz unapred definisane tačke.

$$\begin{aligned} y(2) = 10 &\implies 2a + b = 10 \\ y(3) = 15 &\implies 3a + b = 15 \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti: $a = 5$ i $b = 0$, pa kriva minimalne dužine koja spaja tačke $A(2, 10)$ i $B(3, 15)$ je

$$y(x) = 5x.$$

4. Naći funkcije $x_1(t)$ i $x_2(t)$ koje integralu

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + 2x_1x_2]dt$$

saopštavaju ekstremnu vrednost ukoliko je $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2}) = 1$ i $x_2(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Rešenje.

Potrebni uslovi:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_1}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x_2}} = 0$$

Iz prve Ojler-Lagranžove difernecijalne jednačine dobijamo

$$2x_2 - 2\ddot{x_1} = 0,$$

a iz druge dobijamo

$$2x_1 - 2\ddot{x_2} = 0.$$

Kombinacijom ove dve jednačine dobijamo

$$x_1^{IV} - x_1 = 0$$

Diferencijalnu jednačinu rešavamo transformacijom u karakterističnu jednačinu nakon čega dobijamo

$$\begin{aligned} m^4 - 1 &= 0 \\ p &= m^2 \\ p^2 = 1 &\implies p = \pm 1 \\ p = 1 &\implies m_{1/2} = \pm 1 \\ p = -1 &\implies m_{3/4} = \pm i \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\sin(t) + c_4\cos(t) \\ x_2(t) &= \ddot{x_1}(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3\sin(t) - c_4\cos(t) \end{aligned}$$

Pronašli smo opšte rešenje, ali nama treba ono koje prolazi kroz unapred definisane tačke.

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0 &\implies c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ x_2(0) = 0 &\implies c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ x_1(\frac{\pi}{2}) = 1 &\implies c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_3 = 1 \\ x_2(\frac{\pi}{2}) = -1 &\implies c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3 = -1 \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti za konstante $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ i $c_3 = 1$, pa su tražene funkcije

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sin(t) \\ x_2(t) &= -\sin(t). \end{aligned}$$

5. Lanac fiksne dužine l i uniformno raspoređene mase (homogene gustine) je zakačen za dva kraja na koji deluje samo gravitaciona sila. Pronaći krivu lančanice u mehaničkoj ravnoteži ukoliko je $y(x_A) = y_A$ i $y(x_B) = y_B$. *Rešenje.*

Naš cilj je da minimizujemo potencijalnu energiju, koja se računa po sledećem obrascu

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_s d\Pi = \int_s gydm \\ &= \rho g \int_s yds. \end{aligned}$$

Pošto je ρg konstanta, kriterijum optimalnosti možemo svesti na

$$\begin{aligned} I &= \int_s yds \\ &= \int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1+\dot{y}^2}dx. \end{aligned}$$

Ovo je specijalni slučaj Ojler-Lagranžove jednačine koja se rešava na sledeći način:

$$F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y} = const.$$

$$\begin{aligned} y\sqrt{1+\dot{y}^2} - \frac{2y\dot{y}^2}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} &= const \\ \frac{y^2}{1+\dot{y}^2} &= c^2 \\ \dot{y} = \frac{1}{c}\sqrt{y^2 - c^2} &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} &= \frac{dx}{c}. \end{aligned}$$

Nakon integraljenja poslednjeg izraza dobijamo

$$arccosh\Big(\frac{y}{c}\Big) = \frac{x}{c} + A.$$

Nakon množenja izraza sa cosh dobijamo konačan oblik za $y(x)$ koji glasi

$$y(x) = c\cos\Big(\frac{x}{c} + A\Big).$$