

ZORAN D. JELIČIĆ

MIRNA N. KAPETINA

MILAN R. RAPAIĆ

DISKRETNI UPRAVLJAČKI SISTEMI

Recenzenti: dr Branko Kovacević, profesor emeritus Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu
dr Filip Kulić, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu
dr Nikola Jovanović, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu

Izdavač: Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Glavni i odgovorni urednik:

Prof. dr Srdan Kolaković, dekan Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Prepričena i štampa: FTN - Grafički centar GRID, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Štampanje odobrio:

Savet za bibliotičku i izdavačku delatnost Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Predsednik Saveta za bibliotičku i izdavačku delatnost:
Prof. dr Stevan Stankovski, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Autorska prava pripadaju izdavaču

Predgovor

Ovaj udžbenik je pre svega namenjen studentima osnovnih studija, studijskog modula Računarski upravljački sistemi, na studijskom programu Računarstvo i automatika. Svojim sadržajem u potpunosti odgovara predmetu Diskretni upravljački sistemi. Isto tako, prvi jedanaest poglavlja teksta u potnosti pokriva sadržaj kursa Automatsko upravljanje 2 na studijskom programu Mehatronika, a teorijske osnove iz ove knjige imaju punu primenu i na predmetu Digitalni upravljački algoritmi u biomedicini i Osnovi upravljanja u elektroenergetici. Delovi udžbenika koji pokrivaju optimalno upravljanje sistemima diskretne dinamike i teoriju identifikacije upotpunjaju lekcije na predmetu matematička optimizacija. U sklopu ovog predmeta se takođe mogu koristiti materijali o prethodno znanju iz građevinarstva, posebno za studente koji nemaju prethodno znanje iz građevinarstva.

Prilikom pisanja teksta autori su vodili računa o dve ključne stvari, prvo da

gradivo monotono raste po svojoj složenosti, a drugo da se dualizam sa teorijom kontinualnih upravljačkih sistema uvede samo kada je to neophodno, odnosno u delovima za koje autori misle da je vredno ponoviti i/ili naglasiti radi boljeg razumevanja izloženog gradiva. Radi lakšeg prihvatanja novih saznanja, autori su se opredelili da komentare i matematička pojašnjenja pišu na marginama samog teksta, verujući da se time postiže bolja preglednost, a samim tim i razumevanje gradiva.

Prilikom izbora naslova udžbenika, autori su se opredelili za naslov Diskretni upravljački sistemi, mada su ravnopravno mogli da koriste i naziv Računarski upravljački sistemi ili Digitalni upravljački sistemi. Naime, centralni deo ovog udžbenika posvećen je upravljačkim sistemima gde je upravljački uređaj namenski računar, stoga je naziv računarski upravljački sistemi prikladan i sru-

CIP-Katalogizacija u publikaciji
Biblioteka Matice srpske, Novi Sad
007.5(075.8)

ЈЕЛИЧИЋ, Јоран, 1971-

Diskretni upravljački sistemi / Zoran D. Jeličić, Mina N. Kapetina, Milan R. Rapačić. - 1. izd. - Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2022 (Novi Sad : FTN, Grafički centar GRID). - 377 str. ; ilust. ; 24 cm. - (Edicija "Tehničke nauke - udžbenici" ; 1033)

Timž 300. - Bibliografija.

ISBN 978-86-6022-536-0

1. Канчани, Мирна Н., 1988. [аутор] 2. Панчић, Милан, 1982. [аутор]
- а) Управљачки системи б) Аутоматско управљање

COPRISS SRD 110746899

štinski tačan. Sa druge strane, najveći deo matematičkih formalizama u ovom udžbeniku koristi se za opisivanje diskretnih dinamičkih sistema, taćuće im pulsnih dinamičkih sistema, a tek u samoj implementaciji uzima se u obzir i kvantizacija po amplitudi te onda ovo postaju digitalni upravljački sistemi u punom smislu te reči. Dileme koje smo ovde izneli nisu jezičke prirode već surštinske i uvidom u dostupnu literaturu lako je spoznati da su ove nedoumice uticale i na druge autore koji se na sličan način bave ovom oblašću upravljačkih sistema.

Prilikom pisanja ovog udžbenika autori nisu imali konkretnan uzor u dostupnoj literaturi, ali su, svesno ili ne, bili inspirisani nekim od najcitatnijih autora iz ove oblasti. Ipak, važno je naglasiti da je udžbenik namenski pisan za studente Fakulteta tehničkih nauka i da se vodilo računa o njihovim prethodnim znanjima, akreditovanim kursevima, ali i da su uvedene neke oblasti koje se naslanjaju na naučno-istraživačke rezultate autora.

Sam udžbenik podeljen je u triнаest poglavlja. **Prvo poglavlje** je, na neki način, uvodno i predstavlja kratak osvrt na teoriju kontinualnih sistema, koje je po misljenju autora neophodno za daljnje prateće i razumevanje teksta. Tako je, na primer, teorija stabilnosti po Ljapunovu za kontinualne sisteme detaljno razmatrana, jer su autori smatrali da će posle toga prelazak na analizu stabilnosti sistema diskretnе dinamike biti prirodan i umnogome lakši. Posebna pažnja posvećena je PID upravljačkom algoritmu sa pratećim modifikacijama i implementacijom karakterističnom za kontinualne sisteme. Naime, duh svoga jevrsnog konzervativizma koji postoji u projektovanju i implementaciji ovog zakona upravljanja vuče korenе baš iz analognih zakonomernosti i ograničenja pa ih je potrebno razumeti i isprati u digitalnoj izvedbi. Važno je naglasiti da direktno kompariranje kontinualnog zakona upravljanja u digitalne može samo dovesti do istog kvaliteta regulacije, ali ne i bolje. Iz tog razloga je sagledavanje specifičnosti diskretnih upravljačkih sistema od fundamentalnog značaja, a drugo poglavlje ovog udžbenika predstavlja nezaobilazan uvod u razumevanju fenomena od interesa.

U okviru drugog poglavlja ove knjige data je struktura digitalnog upravljačkog sistema, koja prožima sva upravljačka rešenja od druge polovine dvadesetog veka do danas. Detaljno su razmatrani i modelovani postupci analogno-digitalne i digitalno-analogne konverzije i objašnjeni svi fenomeni koji prate novouvedene elemente upravljačkog kola. Čitaci su postupno i intuitivno

uveđeni u izbor periode odabiranja, kao ključnog novog parametra u sistemu automatskog upravljanja, a autori su se potrudili da teorijska saznanja pretvore u praktične preporuke neophodne u svakodnevnoj inženjerskoj praksi.

U okviru trećeg poglavlja date su matematičke osnove analize linearnih diskretnih vremenskih neproneničivih sistema u kompleksnom domenu. Za sisteme ovog tipa Laplasova transformacija nije pogodna pošto se njenom primenom dobijaju neracionalne funkcije prenosa. Zbog toga se Laplasova transformacija na prirodan način prevodi u 3-transformaciju, čijom primenom se dobijaju funkcije prenosa prirodnog racionalnog oblika.

Karakteristike odziva sistema na osnovu raspodela kritičnih učestanosti u kompleksnoj ravni predstavljaju jedan od alata od posebnog značaja za analizu sistema automatskog upravljanja. Ovoj temi, kroz kompleksna preslikavanje iz s u z-ravan, posvećeno je četvrto poglavlje.

U okviru petog poglavlja razmatrana je stabilnost diskretnih sistema, od osnovnih pojmova i definicija, do postupaka i tehniku za analizu stabilnosti sistema diskretne dinamike.

Šesto poglavlje posvećeno je prilagođavanju matematičkog zapisa kontinualnih elemenata upravljačkog kola digitalnom upravljačkom uređaju.

U okviru sedmog poglavlja razmatrano greške u ustaljenom stanju diskretnih upravljačkih sistema.

Transformaciju matematičkog modela u prostoru stanja iz kontinualnog u diskretni oblik detaljno razmatrano u okviru osmog poglavlja. Ovo poglavlje može da bude i prvo posle uvida u diskretne sisteme, jer na prirodan način potiče da budete i povezani s njima. Uz to, u okviru osmog poglavlja se razvije digitalno upravljanje i njegov uticaj na dinamiku kontinualnog objekta upravljanja.

U okviru devetog poglavlja razmatrana je implementacija diskretnih funkcija prenosa, koja je od sušinskog značaja za projektovanje diskretnih filtera.

U okviru desetog poglavlja razmatrani su načini i mogućnosti diskretizacije linearnih filtera i regulatora. Ovo poglavlje je jedno od centralnih. Autori su se potrudili da mnoge nedoumice koje imaju inženjeri u praksi detaljno obrazlože i razjasne.

Prirodu nastavak prethodnog poglavlja je diskretizacija PID regulatora i projektovanje diskretnih regulatora uz prateće referentnog modela koji su opisani u jedanaestom poglavlju. Zbog posebnog značaja ovih upravljačkih algoritmovih učenja.

ritana ovoj celini posvećeno je celo poglavje.

Optimalnom upravljanju sistemima diskretne dinamike nije posvećeno puno pažnje u literaturi, pa su se autori potrudili da predstave teoriju Pontriagina i linearnih regulatora na privratljiv način širem krugu čitalaca u dvanestom poglavju.

U trinaestom poglavju ovog udžbenika date su teorijske osnove i praktične preporuke za parametarsku identifikaciju kontinualnih i diskretnih upravljačkih sistema.

Autori žele da zahvale recenzentima ovog udžbenika. Profesoru emeritusu Univerziteta u Beogradu Branku Kovačeviću na sugestijama, komentarima i korekcijama koji su doprineli kvalitetu samog teksta. Posebno želimo da zahvalimo na nesebičnoj podršci, koju nam profesor Branko Kovačević pruža sve ove godine. Tokom višegodišnje pripreme ovog udžbenika, profesor Filip Kujč davao je korisne savete i sugestije i ponosao da se ove knjige uobliči. Profesor Nikola Jorgovanović učestvovao je u prvom formiraju delu kursa koji se odnosio na praktičnu implementaciju digitalnih upravljačkih algoritama i prvi autor mu za to duguje posebnu zahvalnost. Sugestije profesora Nikole Jorgovanovića postale su sastavni deo ovog teksta. Prvi autor želi posebno da zahvali profesoru Rastku Magliću, svom prvom profesoru iz predmeta Digitalni upravljački sistemi, čije je široko obrazovanje i posvećenost umnogome opredelilo daljnji rad u ovoj oblasti. Zahvalnost dlagujemo Biljani Kanović, magistru lingvističkih nauka koja je uobičila tekst ove knjige, kao i docentu Petru Mirkoviću koji je upotpunio vizuelni identitet udžbenika dizajnom naslovne strane.

Posebnu zahvalnost autori duguju svim kolegama koje su učestvovale u izvođenju nastave na predmetu Digitalni upravljački sistemi i time doprinele kvalitetu samog kursa i ovog udžbenika. Svim članovima Odseka za automatiku, geomatiku i upravljanje sistemima zahvalju smo na podršci koju su nam pružali. Posebnu zahvalnost duguju svojim porodicama na stižnjem, pažnji i razumevanju tokom svih ovih godina. Autori su svesni da u prvom izdanju knjige postoje neštamerni propusti i greske i unapred zahvaljuju svima koji na to ukažu.

Sadržaj

Predgovor	3
I Kontinualni upravljački sistemi: kratak pregled	
15	
1.1 Kontinualni sistemi	
15	
1.1.1 Osobine i klasifikacija kontinualnih sistema	
16	
1.2 Vremenski invarijantni linearni sistemi	
19	
1.2.1 Korrolucija signala	
20	
1.2.2 Laptorska transformacija	
20	
1.2.3 Funkcija prenosa	
21	
1.2.4 Frekvenčna karakteristika sistema	
22	
1.3 Stabilnost dinamičkih sistema	
27	
1.3.1 Definicija stabilnosti	
27	
1.3.2 Ispitivanje stabilnosti radne tacke procesa Ljapunovljevim „držim (direktum)“ metodom	
31	
1.3.3 La Salov princip invarijantnosti	
34	
1.4 Linearizacija	
38	
1.4.1 Grafički metod linearizacije	
39	
1.4.2 Tangentni metod	
39	

1.4.3	Ustrednjeni metod	39	2.5	Osobine idealno odabirovanog signala	91
1.4.4	Analički postupak linearizacije	40	2.6	Frekvenčijska karakteristika kola zadrške multog reda	97
1.4.5	Linearizacija nelinearnog dinamičkog sistema	42	2.7	Izbor perioda odabiranja	98
1.5	Osnove PID upravljanja	48	2.8	Zvezda transformacija	101
1.5.1	Upravljanje u povratnoj sprezi	49			
1.5.2	Duopoložni regulatori	50			
1.5.3	Proporcionalni regulatori	53	3	3-transformacija	103
1.5.4	Proporcionalni integralni regulatori	55	3.1	Pojam 3-transformacije	103
1.5.5	Proporcionalni diferencijalni regulatori	56	3.1.1	3-transformacija elementarnih signala	106
1.5.6	Topologije PID regulatora	57	3.1.2	Osnovne osobine 3-transformacije	107
1.6	Modifikovani PID regulator	60	3.2	Inverzna 3-transformacija	115
1.6.1	Modifikacija D dejstvu	61	3.3	Diskretni sistemi	122
1.6.2	Modifikacija P dejstvu	64	3.4	Problemi	125
1.6.3	Nagomilavanje Integralnog dejstvu	66			
1.6.4	Rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstvu	68			
1.7	Problemi	71	4	Preiskavanje iz s u z-ravni	127
			4.1	Preiskavanje primarnog pojasa	129
2	Struktura digitalnih sistema automatskog upravljanja	73	4.2	Preiskavanje prave vremena smerenja	131
2.1	Principska shema digitalnog upravljačkog sistema	73	4.3	Preiskavanje konture konstantnih učestanosti	132
2.2	Klasifikacija signala	77	4.4	Preiskavanje položaja polova i vremenskog odziva	132
2.3	A/D i D/A konverzija	79	4.5	Problemi	139
2.3.1	Analogno-digitalna konverzija	79			
2.3.2	Digitalno-analogna konverzija	82	5	Stabilnost diskretnih sistema	143
2.4	Matematički model odabiranja i zadrške	85	5.1	Stabilnost linearnih diskretnih procesa	144
2.4.1	Kompleksni lik povorke odbitaka	87	5.2	Jurijev kriterijum stabilnosti	148
2.4.2	Funkcija prenosa kola zadrške	88	5.3	Problemi	152
2.4.3	Matematički model odabiranjia i zadrške – Rezime	91			

6 Digitalni ekvivalent funkcije prenosa i algebra funkcije diskretnog prenosa	155
6.1 Uvodna razmatranja	155
6.2 Digitalni ekvivalent funkcije prenosa	157
6.3 Algebra funkcije diskretnog prenosa	160
6.3.1 Algebra funkcije diskretnog prenosa u otvorenoj povratnoj sprezi	160
6.3.2 Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezi	163
6.4 Modifikovana 3-transformacija	169
6.5 Sistemi sa transportnim kašnjenjem	179
6.6 Problemi	183
7 Greške u ustavljenom stanju	185
7.1 Ocena kvaliteta ponašanja u ustavljenom stanju	185
7.2 Greška u ustavljenom stanju	185
7.2.1 Greške u ustavljenom stanju na step pobudu	187
7.2.2 Greške u ustavljenom stanju na negibnju pobudu	189
7.3 Greška u ustavljenom stanju u prisustvu poremećaja	191
7.4 Problemi	193
8 Diskretizacija matematičkog modela u prostoru stanja	195
8.1 Matematički model u prostoru stanja	195
8.2 Diskretizacija matematičkog modela u prostoru stanja	197
8.2.1 Kretanje kontinualnih procesa u prostoru stanja	197
8.2.2 Digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja	202
8.3 Kretanje diskretnog sistema u prostoru stanja i funkcija diskretnog prenosa	205
8.3.1 Kretanje u prostoru stanja	205
8.3.2 Funkcija diskretnog prenosa	206
8.4 Problemi	207
9 Implementacija diskretnih funkcija prenosa	209
9.1 Uvodna razmatranja	209
9.1.1 Minimalnost realizacije	210
9.1.2 Kauzalnost	211
9.1.3 Osetljivost	213
9.2 Neposredne (direktne) implementacije	214
9.2.1 Neposredna implementacija MA sistema	215
9.2.2 Neposredna implementacija AR sistema	215
9.2.3 Realizacija ARMA sistema: direktna forma jedan	216
9.2.4 Realizacija ARMA sistema: direktna forma dva	219
9.2.5 Transponovane neposredne implementacije	221
9.3 Redna i paralelna realizacija	223
9.3.1 Redna (kaskadna) realizacija	224
9.3.2 Paralelna realizacija	225
9.3.3 Žordanova kanonska forma	226
10 Diskretizacija kontinualnih linearnih regulatora i kontinualnih linearnih filtera	229
10.1 Principi diskretizacije	229
10.2 Vremenski invarijantna diskretizacija	230
10.2.1 Impuls invarijantna diskretizacija	231
10.2.2 Step invarijantna diskretizacija	234

10.3 Diskretizacija po principima numeričke integracije	236	12.3.3 Napomena o graničnim uslovima	298
10.3.1 Numerička integracija leđim pravougaonima - Ojlerovo diferenciranje unapred	237	12.3.4 Optimalni linearni regulatori u zatvorenoj povratnoj sprezi	299
10.3.2 Numeričke integracije desnim pravougaonicima - Ojlerovo diferenciranje unazad	240	12.3.5 Optimalni linearni stacionarni regulatori u zatvorenoj povratnoj sprezi	309
10.3.3 Numerička integracija trapezum pravilom - Tustinova aproksimacija	244	12.3.6 Linearni optimalni servoregulatori za diskrette dinamičke sisteme	316
10.4 Problemi	249	12.3.7 Diskretni linearni optimalni regulatori sa integralnim dejstvom	322
		12.3.8 Struktura diskretnog PI regulatora, prilagođena linearnim optimalnim regulatorima	326
11 Diskretni regulatori	253	13 Parametarska identifikacija sistema	329
11.1 Diskretizacija osnovnog oblika PID regulatora	254	13.1 Osnovni pojmovi	330
11.2 Diskretizacija realnog oblika PID regulatora	258	13.2 Estimacija parametara linearnih sistema	334
11.2.1 Diskretizacija P dejstva	259	13.2.1 Estimaciju parametara sistema sa racionalnom funkcijom prenosa	337
11.2.2 Diskretizacija I dejstva	259	13.3 Metod najmanjih kvadrata	339
11.2.3 Diskretizacija D dejstva	260	13.3.1 Uvođenje težinskog faktora	341
11.3 Projektoranje diskretnih regulatora uz pravljenje referentnog modela	266	13.4 Rekursione metode za estimaciju	345
11.3.1 Deadheat regulator	268	13.4.1 Rekursioni metod najmanjih kvadrata	346
11.3.2 Dalmatov regulator	274	13.4.2 Rekursioni metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja	350
11.4 Problemi	280	13.4.3 Kalmanov filter	353
		13.5 Gradientne metode	360
12 Optimalno upravljanje diskretnim dinamičkim sistemima	283	13.5.1 Analiza konvergencije i stabilnosti postupka	361
12.1 Varijacioni račun za sisteme diskrete dinamike, potrebiti uslovi ekstrema	283	13.6 Gradientni metod sa integralnim kriterijumom	365
12.2 Ojler-Lagranževa jednačina za diskrete dinamičke sisteme	285	13.6.1 Analiza konvergencije i stabilnosti postupka	366
12.2.1 Funkcional zavisi od više promenljivih	287		
12.2.2 Bolćim problem i njegovo rešenje	288		
12.3 Optimalno upravljanje, uvodne napomene	290		
12.3.1 Princip maksimuma primerjen na diskrete dinamičke sisteme	291		
12.3.2 Optimalno upravljanje linearnim, vremenski promenljivim diskretnim dinamičkim sistemima	296		

Kontinualni upravljački sistemi: kratak pregled

Cilj ovog poglavlja je da se ukratko osvrnemo na glavne koncepte kontinualnih upravljačkih sistema. Ovakav pregled osnovne terminologije i principa, izbegavajući detaljnju analizu i izvođenja, u nastavku izlaganja će omogućiti lakši prelazak na digitalne upravljačke sisteme. Teme koje će biti obradane odnose se na opis dinamičkih modela u kontinualnom vremenskom domenu, frekvenčijskom domenu, osobine zatvorenih upravljačkih petlje, kao i osnovna svojstva PID regulatora.

1.1 Kontinualni sistemi

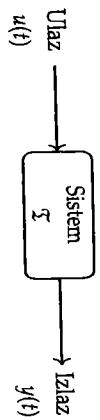
Sistemi sa kojima se susrećemo u svakodnevnom životu predstavljaju skup velikog broja elemenata sa većim brojem mogućih interakcija između njih. To je uređena celina pojedinih delova koja se sa okolinom povezuje preko ulaza i izlaza. Za opis ponašanja takvog jednog sistema u tehničkom pogledu potrebno je razviti matematički model uz primenu fizičkih zakonitosti i principa usvojenih u inženjerskom pristupu rešavanja zahteva i problema. Tako, na primer, za modelovanje električnih kola koriste se Omov i Kirhofovi zakoni. Na sličan način, za modelovanje mehaničkih sistema koriste se Njutnori zakoni, zakoni o održanju energije te drugi fizički zakoni, zavisno od prirode sistema koji posmatramo.

Sistem posmatramo kao proces čija je uloga transformacija signala. Drugim rečima, kontinualni sistem definisemo kao proces koji transformiše vremenski kontinualni ulazni signal u vremenski kontinualni izlazni signal. Simbolički tu-

transformaciju označavamo sa

$$y(t) = \mathcal{T}\{u(t)\}, \quad (1.1)$$

pri čemu je sa $u(t)$ označen ulazni, sa $y(t)$ izlazni signal, a samu transformaciju (sistemu) označavamo sa \mathcal{T} . Blok-dijagram kontinualnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazan je na slici 1.1.



Slika 1.1: Blok-sHEMA kontinualnog sistema \mathcal{T} sa ulazom $u(t)$ i izlazom $y(t)$, gde t označava vreme.

1.1.1 Osobine i klasifikacija kontinualnih sistema

Klasifikacija kontinualnih sistema zasnovana je na njihovim osobinama koje imaju svoje fizičko značenje i omogućavaju nam bolje razumevanje matematičke reprezentacije signala i sistema.

- Sistemi sa i bez memorije: Kažemo da je sistem bez memorije ako njegov izlazni signal u nekom trenutku zavisi samo od vrednosti ulaznog signala u tom trenutku. Kod kontinualnih sistema sa memorijom izlaz u određenom trenutku zavisi ne samo od trenutne, već i od prethodnih vrednosti ulaznog i/ili izlaznog signala.
- Osobina invertibilnosti sistema i pojam inverzognog sistema: Kažemo da je sistem invertibilan ako različiti ulazni signali prouzrokuju različite izlazne signale. Drugim rečima, sistem je invertibilan ako, poznavajući izlazni signal, teorijski gledano, možemo jednoznačno odrediti ulazni signal. Inverzni sistem je sistem koji, ako je kaskadno vezan na originalni sistem, na svom izlazu daje signal koji je jednak ulaznom signalu u originalnom sistemu.
- Kauzalnost: Sistem je kauzalan ako izlaz sistema u bilo kom trenutku зависи samo od vrednosti njegovog ulaza u tekucem i prethodnim trenucima. Dakle, kod kauzalnih sistema odziv ne postoji pre dovođenja pobudnog signala.

- Stabilnost: Stabilnost je veoma važna osobina sistema. Postoje različite definicije stabilnosti. Za linearne sisteme konačne dimenzije većina definicija je manje više ekvivalentna. Tako, na primer, kažemo da je sistem stabilan ako mu prelazni režim nestaje tokom vremena ili ukoliko mu impulsni odziv asimptotski teži nuli, ako mala promena ulaza rezultuje malom promenom izlaza ili ako na konačnu pobudu daje konačan odziv. U suprotnom, sistem je nestabilan.
- Vremenska invarijantnost: Ako ponak ulaznog signala u vremenu uzrokuje samo ponak izlaznog signala za isti vremenski iznos, bez promene oblike sistema, kažemo da je sistem vremenski invarijantan i to formalno zapisujemo kao

$$y(t) = \mathcal{T}\{u(t)\} \Rightarrow y(t-\tau) = \mathcal{T}\{u(t-\tau)\}. \quad (1.2)$$

Pri tome, pod izlaznim signalom podrazumevamo odziv sistema pri nultim početnim uslovima.

- Linearnost: Sistem je linearan ako je odziv na težinsku sumu signala jednak na isti način formiranoj težinskoj sumi pojedinačnih odziva na svaki od tih signala. Princip linearnosti podrazumeva važenje principa superpozicije, koji je zadovoljen ukoliko važe osobine aditivnosti i homogenosti, o čemu će biti više reči u nastavku poglavljia.

Na osnovnu prethodno navedenih osobina, moguće je izvršiti klasifikaciju kontinualnih sistema na:

- Statičke i dinamičke: Statički sistemi su sistemi bez memorije i kod njih izlaz u nekom trenutku zavisi od vrednosti pobude samo u tom trenutku. Statički sistemi opisuju se algebraškim jednačinama. Dinamički sistemi su sistemi sa memorijom, što znači da izlaz sistema u nekom trenutku zavisi ne samo od trenutne, već i od prethodnih vrednosti ulaznog signala. Dinamički sistemi opisuju se diferencijalnim jednačinama.
- Kauzalne i nekauzalne: U zavisnosti od toga da li poseduju osobinu kauzalnosti, dinamički sistemi mogu biti kauzalni i nekauzalni, dok su statički sistemi kauzalni. Svi fizički sistemi su kauzalni jer ne mogu da generišu izlazni signal pre nego što se pobude.
- Stabilne i nestabilne: Postoje različite definicije stabilnosti sistema o čemu će biti više reči u nastavku udžbenika.

- Sisteme sa raspodeljenim i koncentrisanim parametrima: Složeni dinamički prostorno distribuirani sistemi, čije ponašanje se menja i u vremenu i u prostoru, razvijaju se sistemima sa raspodeljenim parametrima. Karakteristični primer sistema sa raspodeljenim parametrima vezani su za prosljatanje elektromagnetskih talasa, prosljatanje topline i prenos električne energije. Budući da su u ovim sistemima nezavisne promjenljive i vreme i prostorne koordinate, oni se opisuju parcijskim diferencijalnim jednačinama. Ako se može smatrati da je ponašanje prostorno distribuiranog sistema u svakoj tački prostora podjednako i da zavisi samo od vremena kao nezavisne promjenljive, kažemo da se radi o sistemu sa koncentrisanim parametrima. Takvi sistemi opisuju se običnim diferencijalnim jednačinama.
- Linearne i nelinearne: Sistem sa koncentrisanim parametrima je linearan ako zadovoljava princip linearnosti i u suprotnom je nelinearan. Linearni sistemi opisuju se linearnim diferencijalnim jednačinama, dok je za opis nelinearnih sistema neophodno koristiti nelinearne diferencijalne jednačine.
- Stacionarne i nestacionarne: Stacionarni sistemi su dinamički sistemi sa koncentrisanim parametrima koji su vremenski invariantni. Diferencijalne jednačine koje opisuju stacionarne sisteme imaju konstantne koeficijente. Ako se ponašanje sistema u toku vremena menjai, onda se radi o vremenski promjenljivom ili nestacionarnom sistemu. Parametri diferencijalne jednačine koja opisuju nestacionarni sistem su vremenski promjenljivi.
- Determinističke i stohastičke sisteme: Deterministički sistemi transformišu determinističke pobudne signale u determinističke signale odziva. Parametri ovih sistema su takođe deterministički. Stohastički sistemi transformišu stohastičke pobudne signale u stohastičke signale odziva. Parametri stohastičkih sistema ne moraju, ali mogu biti slučajne promjenljive.

U nastavku udžbenika uglavnom ćemo se baviti determinističkim modelima sistema koji se najčešće javljaju, kako u tehničkim, tako u ekonomskim i drugim naukama. Uglavnom ćemo se ograničiti na kontinuuirne, linearne sisteme sa koncentrisanim parametrima.

1.2 Vremenski invariantni linearni sistemi

Vremenski invariantni linearni sistemi (engl. *linear time-invariant system, LTI*) čine najvažniju klasu dinamičkih sistema u kontekstu ovog udžbenika. Činjenica je da oni predstavljaju idealizacije realnih procesa koji su u stvarnom životu generalno nelinearni. Aproximacije koje se koriste da bi se sistem opisao linearnim modelom često su opaktivane, a i teorija upravljanja i matematički aparati dobro su razvijeni za linearne modele.

Pod pojmom linearnog sistema podrazumeva se sistem koji zadovoljava princip slaganja dejstava (princip superpozicije, engl. *superposition principle*). Princip superpozicije podrazumeva da se odziv procesa na složenu pobudu može računati slaganjem odziva na pojedinačne komponente pobude. Formalno rečeno, ukoliko je y_1 odziv procesa na pobudu u_1 , a y_2 odziv na pobudu u_2 , tada će odziv na $a_1u_1 + a_2u_2$ biti $a_1y_1 + a_2y_2$, za bilo koja dva skalarna parametra a_1 i a_2 .

Princip superpozicije može se definisati i na uopšteniji način. Označimo sa $\mathfrak{T}[u]$ odziv linearnog procesa \mathfrak{T} na pobudu signal u . Neka su u_1, u_2, \dots ulazni signali, i neka su $y_1 = \mathfrak{T}[u_1], y_2 = \mathfrak{T}[u_2], \dots$ odgovarajući odzivi, a a_1, a_2, \dots skalarni parametri, tada je

$$\mathfrak{T} \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i \right] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathfrak{T}[u_i] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y_i. \quad (1.3)$$

Sledeća bitna osobina linearnih procesa je mogućnost upotrebe transformacionih metoda pri njihovoj analizi koje omogućavaju rešavanje različitih problema algebarskim putem. Celokupna analiza signala zasniva se na jednostavnoj ideji da se signali mogu razložiti na skup jednostavnih, elementarnih činilaca. U spektralnoj analizi signala sve signale razlažemo na elementarne, prostoperiodične oblike. Drugim rečima, osnovnim gradivum činocima smatramo prostoperiodične talase. Na osnovu principa slaganja dejstava neposredno sledi da se i ponašanje linearnih dinamičkih procesa uspešno može proučavati na osnovu poznavanja njihovih odziva na prostoperiodične signale različitih učestanosti. Uz oslonac na ovu jednostavnu ali fundamentalnu činjenicu, razvijen je i niz transformacionih metoda koje značajno pojednostavljaju analizu i sintezu linearnih, stacionarnih procesa. U oblasti upravljanja, posebno značajnu ulogu ima Laplasova transformacija.

1.2.1 Konvolucija signala

Jedna od najznačajnijih operacija nad signalima jeste operacija konvolucije. Neka su f i g dve date funkcije. Njihova konvolucija, u oznaci $f * g$, jeste preslikavanje definisano izrazom

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (1.4)$$

U slučaju kada su funkcije čiji se konvolucija računa kauzalne, tj. kada su identički jednake nuli za negativne vrednosti argumenta, tada je integral izraza (1.4) jednak nuli za $\tau < 0$ i $\tau > t$. Stoga se granice integracije u izrazu (1.4) mogu uzeti od 0 do t , a izraz (1.4) svodi se na

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (1.5)$$

Kauzalnost se odnosi na činjenicu da fizičku veličinu posmatrano počev od nekog polaznog, inicijalnog vremenskog trenutka. Sa stanovništa upravljanja, to je obično trenutak od koga počinjeno da vršimo upravljanje, ali može biti i proizvoljan drugi, pogodno odabran trenutak u vremenu. U tom duhu, pod pojmom linearog dinamičkog sistema podrazumeva se sistem čiji se odziv sistema $y(t)$, gde je t nezavisno promenljiva koja označava vreme, na ulaznu pobudu $u(t)$ može opisati kao

$$y(t) = (g(\cdot) * u(\cdot))(t), \quad (1.6)$$

gde $*$ označava operaciju konvolucije, a $g(t)$ impulsni odziv posmatranog procesa.¹

1.2.2 Laplasova transformacija

Laplasova transformacija može se smatrati osnovnim alatom pri analizi i sintezi vremenski kontinualnih stacionarnih procesa. Da bi se označila Laplasova transformacija po vremenu t , koristiće se oznaka \mathcal{L} . U tom smislu, Laplasova transformacija kauzalnog eksponentijalno ograničenog signala² $f(t)$ definije se kao

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

gde $s \in \mathbb{C}$ označava Laplasovu promenljivu, (videti [1]).

Jedna od najkoristitijih osobina Laplasove transformacije jeste ta da je Laplasova transformacija konvolucije jednaka proizvodu Laplasovih transformacija svakog signala zasebno,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s). \quad (1.7)$$

1.2.3 Funkcija prenosa

Vezu između ulaza i izlaza linearnih, vremenski kontinualnih, stacionarnih procesa moguće je opisati jednom posebnom funkcijom Laplasove promenljive s koju nazivamo funkcija prenosa. Funkcija prenosa definije se kao odnos Laplasovih transformacija ulaza i izlaza kada su svi početni uslovi jednaki nuli. Ako ulazni signal procesa obeležimo sa $u(t)$, a izlazni sa $y(t)$ i njihove Laplasove transformacije sa $U(s)$ i $Y(s)$, tada se funkcija prenosa definije izrazom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (1.8)$$

Kontinualni linearni sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom matematički se opisuje linearom diferencijalnom jednačinom oblike

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y = b_nu^{(n)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \quad (1.9)$$

gde $y^{(i)}$ označava i -ti izvod signala y , kao i za signal u . Funkcija prenosa ovako opisanih sistema je

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (1.10)$$

Vidimo, dakle, da je funkcija prenosa procesa opisanog diferencijalnom jednačinom (1.9) racionalna funkcija, tj. količnik dva polinoma po Laplasovoj promenljivoj s .

Postoje procesi kod kojih funkcija prenosa nije racionalna funkcija Laplasove promenljive s . Tu spadaju procesi sa kašnjenjem, frakcioni procesi (procesi necelog reda) kod kojih se u funkciji prenosa javljaju necelobrojni stepeni Laplasove promenljive. Funkcije prenosa takvih sistema nazivamo iracionalne funkcije prenosa. Iracionalne funkcije prenosa obično se koriste za potrebe opisivanja procesa sa prostorno raspodeljenim (distribuiranim) parametima, odnosno procesa čije se veličine menjaju, kako u vremenu, tako i u prostoru.

¹ Kod linearnih vremenski invariantnih sistema impulsni odziv $g(t)$ definije se kao odziv na početku u obliku jedinicnog impulsa

² Signal je eksponentijalno ograničen (sa eksponentijalnim redom) ukoliko postoji konstante $M > 0$ i $\gamma > 0$ takve da je $|f(t)| < M e^{\gamma t}$.

1.2.4 Frekvenčna karakteristika sistema

Za svaki linearan dinamički sistem opisan funkcijom prenosa $G(s)$, bez obzira na njegovu strukturu i složenost, može se definisati frekvenčna karakteristika.

Ukoliko posmatratamo proizvoljan linearan, stacionaran proces sa jednim ulazom u i jednim izlazom y , frekvenčna karakteristika procesa definise se kao odnos Furijeovih transformacija [2] izlaznog i ulaznog signala. Međutim, s obzirom na to da smo prethodno definisali pojam funkcije prenosa, to nam omogućava da frekvenčnu karakteristiku definisemo na malo drugačiji način, tj. da dobijemo frekvenčnu karakteristiku sistema $G(s)$ zamenom kompleksne promenljive s sa $j\omega$. Time frekvenčna karakteristika procesa postaje

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (1.11)$$

kada su svi početni uslovi jednak nuli. Dobijanjem frekvenčne karakteristike ponasanje sistema je određeno na svakoj, proizvoljno izabranoj učestanosti ω .

Ovako definisana frekvenčna karakteristika predstavlja kompleksnu funkciju kojoj možemo odrediti modulo $A(\omega) = |G(j\omega)|$ i argument $\varphi(\omega) = \angle(G(j\omega))$ u zavisnosti od učestanosti ω . Modulo frekvenčne karakteristike definise pojačanje kojim sistem deluje na ulazni prostoperiodični signal, dok argument karakteristike određuje fazni pomeraj. Vrednost faznog pomeraja podejena sa učestanostu ulaznog signala daje vremenski pomeraj izlaznog signala u odnosu na ulazni.

Da bismo pojasnili prethodno tvrdjenje, navešćemo sledeći primer. Posmatrajmo pobudni prostoperiodični signal kružne učestanosti ω , zapisan u obliku fazno pomerenog kosinusnog talasa

$$u(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.12)$$

Na osnovu prethodnog izlaganja, odziv sistema G u ustajrenom stanju i sam če biti prostoperiodičan signal oblika

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi_0). \quad (1.13)$$

Kako je posmatrani dinamički sistem linearan, vremenski invariantan, važi da je⁴

$$\begin{aligned} Y_0 &= |Y(j\omega)| = |G(j\omega)| |U(j\omega)|, \\ \phi_0 &= \angle(Y(j\omega)) = \angle(G(j\omega)) + \angle(U(j\omega)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

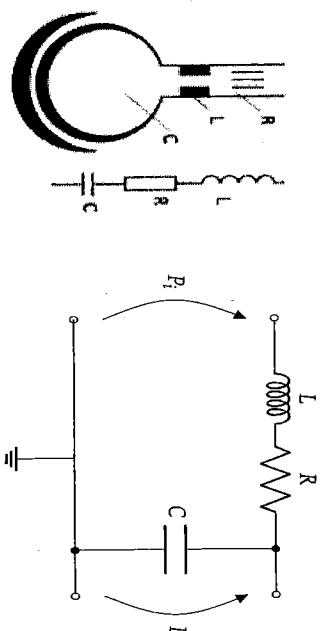
odnosno

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi_0 + \angle(G(j\omega))) \\ &= A_0 A(\omega) \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi(\omega)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

⁴Oznaka $| \cdot |$ koristi se za označavanje modula kompleksnog broja, dok se oznaka $\angle(\cdot)$ koristi za označavanje argumenta kompleksnog broja.

Žan-Baptist Žozef Furje (franc. Jean-Baptiste Joseph Fourier, Osset, 21. mart 1768 — Pariz, 16. maj 1830) bio je francuski matematičar i fizik rođen u Ossetu, a poznat je po istraživanju Furjeovih redova i njihove primene na probleme prenosa toplotne i vibracija. U njegovu čast nazvani su Furjeova transformacija i Furjeov zakon. Furje se pripisuje i otkriće efekta staklene baštice.

Primer 1.1. Primena analogija u biomedicinskom inženjerstvu omogućava modelovanje fizioloških sistema pomoću električnih kola [3]. Jednostavan model dinamike respiratornog procesa može biti modelovan kao RLC električno kolo, gde R , L i C predstavljaju otpor disajnih puteva, inertnost i kapacitet skidištenja vazduha u plućima, slika 1.2. Ovakvi matematički modeli mogu se koristiti za dobijanje informacije o protoku i pritisku u disajnim putevima i mogu biti različite složenosti. Za prikazani model na slici 1.2 $P_i(t)$ predstavlja pritisak na ulazu disajnog puta, a $P_a(t)$ pritisak u plućima.



Slika 1.2: Analogno električno kolo respiratorne mehaničke (leva slika preuzeta iz rada Glüerian P, Jammati H, Huschleman SM. A Review on Human Respiratory Modeling. Tarnafos. 2016;15(2):65-69. PMID: 2904536; PMCID: PMC512616.)

Odrediti odziv sistema (tj. pritisak) $P_i(t)$ kada je ulazni signal $P_i(t)$ sinusoidnog oblika, konstantne jedinične amplitudu i promenljive učestanosti $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 8\pi$ i $\omega_3 = 16\pi$. Prepostaviti da su parametri $R = 0.3$, $L = 0.01$ i $C = 0.1$.

Rešenje:

Primenom Kirhoffovog zakona, dobijamo relaciju koja opisuje dinamičku zavisnost ulaznog pritiska na otvoru disajnih puteva $P_i(t)$ i alveolarnog pritiska koji postoji unutar plućnih alveola $P_L(t)$.

$$LC\ddot{P}_L(t) + RC\dot{P}_L(t) + P_L(t) = P_i(t) \quad (1.16)$$

pri čemu je ambijentalni pritisak postavljen na nulu. Funkcija prenosa može se lako odrediti primenom Laplasove transformacije na izraz (1.16) i grupisanjem promenljivih tako da je

$$G(s) = \frac{P_L(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}. \quad (1.17)$$

Zamenom $s = j\omega$ dobija se odziv u frekvenčijskom domenu,

$$G(j\omega) = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1} \quad (1.18)$$

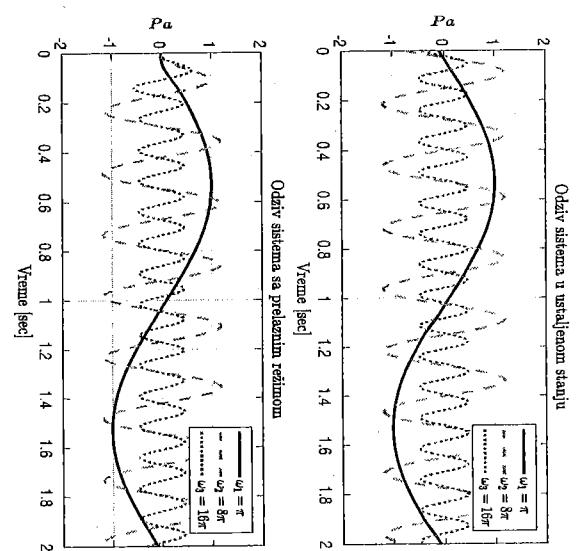
gdje je

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}} \\ \angle G(j\omega) &= -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Odziv sistema prikidan je na slici 1.3, i simuliran je pomoću MATLAB koda prikazanog u sklopu listinga 1.1. Prikazana su dva načina računanja odzira sistema: odziv u ustaljenom stanju primenom frekvenčkih karakteristika sistema (moduo frekvenčke karakteristike kola predstavlja frekvenčki zavist pojačanje, a argument frekvenčki zavistno fazno predlaženje) kao i odziv sistema na ulazni signal primenom lsim funkcije u kompleksnom s-domenu, gde se može uočiti i prisustvo prelaznog režima.

```

R=0.3; L=0.01;C=0.1; %konstante
omega=[pi 8*pi 16*pi];
t=0:0.01:2;
% Racunanje odziva sistema u ustaljenom stanju, primenom frekvenčkih
% karakteristika
y=[ ];
for i=1:3
    angleG=atan(R*C*omega(i)/(1-L*C*omega(i)));
    modG=sqrt((1-L*C*omega(i)^2)^2+R^2*C^2*omega(i)^2);
    y=modG*sin(omega(i).*t+angleG);
    y=[y;y];
end
% Crtanje grafika i podeavanja
figure
subplot(2,1,1)
plot(t,yy(1,:),'b','LineWidth',1.5)
hold on
plot(t,yy(2,:),'r','LineWidth',1.5)
plot(t,yy(3,:),'g','LineWidth',1.5)
title('Odziv sistema u ustaljenom stanju', 'Interpreter', 'Latex')
axis([0 inf -2 2 ])
grid on
xlabel('Vreme [sec]', 'Interpreter', 'Latex')
ylabel('$P_A$ ', 'Interpreter', 'Latex')
legend('$\omega_1=\omega_1\pi$', '$\omega_2=8\omega_1\pi$', '$\omega_3=16\omega_1\pi$', 'Interpreter', 'Latex
', 'Location', 'northeast')
%
% Racunanje kompletног odziva sistema u ustaljenom stanju, primenom
% funkcije lsim
s=tf('s');
G=L/(L*C^2+R*C+1);
u1=sin(omega(1)*t);u2=sin(omega(2)*t);u3=sin(omega(3)*t);
y1=lsim(G,u1,t);y2=lsim(G,u2,t);y3=lsim(G,u3,t);
yy=[y1';y2';y3'];
%
% Crtanje grafika i podeavanja
subplot(2,1,2)
plot(t,yy(1,:),'b','LineWidth',1.5)
hold on
plot(t,yy(2,:),'r','LineWidth',1.5)
plot(t,yy(3,:),'g','LineWidth',1.5)
title('Odziv sistema sa prelaznim reakcijom', 'Interpreter', 'Latex')
axis([0 inf -2 2 ])
grid on
 xlabel('Vreme [sec]', 'Interpreter', 'Latex')
ylabel('$P_A$ ', 'Interpreter', 'Latex')
legend('$\omega_1=\omega_1\pi$', '$\omega_2=8\omega_1\pi$', '$\omega_3=16\omega_1\pi$', 'Interpreter', 'Latex
', 'Location', 'northeast')
```



Slika 1.3: Simulacija izlaza iz modela respiratornog sistema na ulazni signal sinusoidnog oblika različite frekvencije (f , različitog broja udajsa).

1.3 Stabilnost dinamičkih sistema

Jedan od osnovnih zahteva u teoriji sistema je stabilnost dinamičkog sistema. Ukoliko sistem nije stabilan, nema smisla analizirati dodatne karakteristike sistema, kao što su npr. njegovo ponašanje u prelaznom režimu ili gresku u ustavljenom stanju i mnoge druge. Ako sistem ima samo jedno ravnotežno stanje, kao što je slučaj kod linearnih sistema, tada govorimo o stabilnosti sistema, dok neelinearni sistemi mogu imati više ravnotežnih stanja pa tada govorimo o stabilnosti ravnotežnog stanja.⁵ Za neki sistem možemo da kazemo da je stabilan ukoliko su ravnotežna stanja tog sistema stabilna.

Najpoznatiji pristup analize stabilnosti postavio je Ljapunov, koji posmatra

ponašanje sistema u okolini ravnotežnog položaja i to primenom dva pristupa. Prvi pristup analize stabilnosti dinamičkog sistema je preko prve, indirektnе metode, a drugi preko direktnе metode.

Prvi pristup, indirektna metoda, podrazumeva linearizaciju sistema (o čemu će biti više reči u nastavku učebnika) razvojem u Tejlorov red u okolini izabranog ravnotežnog položaja, odnosno radne tačke, na osnovu čega zaključujemo da li je početni sistem u tom stanju stabilan ili nestabilan.

Drugi, direktni metod je opštiji i polazi od koncepta iz klasične mehanike i analizira ukupnu energiju sistema. Upotreba teoreme Ljapunova o stabilnosti daje dovoljne uslove za stabilnost sistema, ali ne i potrebne.

1.3.1 Definicija stabilnosti

U nastavku ćemo navesti osnovne pojmove i definicije vezane za stabilnost sistema. Zbog kompletnosti i sistematičnosti analize, izlaganje započinjeno posmatranjem neelinearnog procesa opisanog matematičkim modelom u prostoru stanja

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.21)$$

gdje je $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor pobude, t vreme, a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektor neelinearnih kontinualnih funkcija.

⁵Stabilnost neelinearnog sistema zavisi i od početnog stanja dok to nije slučaj kod linearnih sistema.

Stabilnost radne tačke procesa

Definicija 1. (*Autonomi sistem.*) Za kontinualni sistem kažemo da je autonoman ako mu je ulaz identički jednak nuli i kretanje sistema je posledica poremećaja ili početnih uslova te ga možemo prikazati sledećim izrazom,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \geq 0, u(t) = 0. \quad (1.22)$$

U cilju definisanja stabilnosti procesa uvešćemo pojam mirne radne tačke.

Pojam *mirne radne tačke procesa*

Neformalno govoreći, mirna radna tačka (tačka ravnoteže ili tačka ekvilibrijuma) dinamičkog procesa predstavlja radno stanje u komе proces može ostati neograničeno dugo, pod pretpostavkom da na njega ne deluju poremećaji [1].

Definicija 2. (*Mirna radna tačka.*) Proces opisan matematičkim modelom

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.23)$$

ima mirnu radnu tačku $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ukoliko je

$$f(x_0) = 0. \quad (1.24)$$

Drugim rečima, ukoliko je početno stanje $x(0) = x_0$, tada se stanje procesa neće menjati, odnosno za svako $t \geq 0$ važiće $x(t) = x_0$ ako na njega ne deluje pobuda $u(t)$. U opštem slučaju, proces može imati veći broj mirovih radnih tačaka.

Nakon što su definisani neki osnovni pojmovi iz teorije stabilnosti, u nastavku će biti dati uslovi stabilnosti mirne radne tačke sistema u smislu Ljapunova, te ponašanje sistema kad njegovo početno stanje nije u mirnoj radnoj tački, već u njenoj okolini.

Stabilnost se može definisati na više načina, a u ovom udžbeniku biće definisana u smislu Ljapunova [1, 4]. Pojam stabilnosti odnosi se na sposobnost procesa da pri proizvoljno malim perturbacijama ravnotežnog stanja, ostane unutar zadate okoline ravnotežnog stanja koja zavisi isključivo od veličine perturbacije.

Definicija 3. (*Stabilnost mirne radne tačke.*) Mirna radna tačka x_0 procesa opisanog matematičkim modelom

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.25)$$

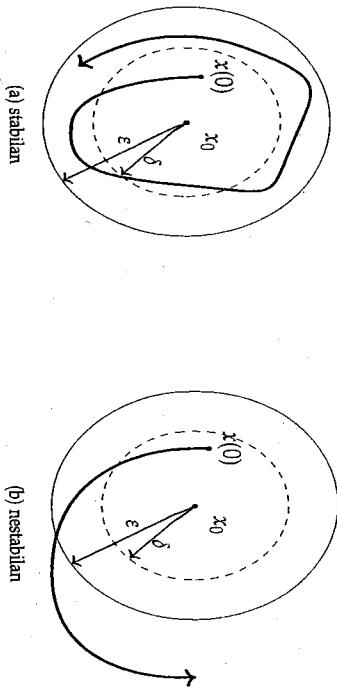
je stabilna ukoliko za svako pozitivno ε , postoji pozitivan broj $\delta(\varepsilon)$ takav da ukoliko je početno stanje procesa udaljeno od ravnotežnog stanja manje od δ , tada će celokupna daljnja trajektorija procesa biti unutar ε -okoline ravnotežnog stanja, tj.

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon \quad (\forall t > 0). \quad (1.26)$$

Pojam stabilnosti po Ljapunovu može se iskazati i na sledeći način. Mirna radna tačka (stacionarno stanje) sistema naziva se stabilnom, ako je pri zadatoj proizvoljno maloj oblasti oko te radne tačke moguće naći oblast δ takvu da pri početnim uslovima unutar oblasti δ , prelaznom režimu odgovara trajektorija koja ne napušta oblast ε u prostoru stanja posle proizvoljno dugog vremena t od trenutka poremećaja početnih uslova. Na slikama 1.4 prikazana je stabilnost i nestabilnost sistema u smislu Ljapunova.

Radne tačke u koje se proces vraća nakon dovoljno malog poremećaja nazivaju se atraktivnim radnim tačkama (attractor, engl. attractors). Ukoliko je atraktivna radna tačka istovremeno i stabilna, tada se naziva asimptotski stabilnom radnom tačkom.

Aleksandar Mihajlović Ljapunov
(rus. Алекса́ндр Миха́йлович
Ляпунов) (Jaroštar, 6. jun 1857.
– Odessa, 3. novembar 1918.)
ruski matematičar i fizičar. U
svom delima obradivao je pro-
bleme diferencijalnih jednačina,
hidrostatike i hidrodinamika
(mehanika fluida) i teoriju
verovatnoće. Razvio je teoriju
stabilnosti stanja ravnoteže i
gibanja mehaničkih sistema, koji
su definisani određenim bro-
jem parametara (Ljapunovljeve
metode).



Slika 1.4: Ilustracija stabilnosti u smislu Ljapunova.

Definicija 5. (Eksponencijalna stabilnost.) Radna tačka vremenski kontinualnog, stacionarnog, autonomnog procesa je eksponencijalno stabilna ukoliko je stabila u smislu Ljapunova, te ukoliko se nakon dovoljno malog poremećaja proces asymptotski vraca u ravnotežno stanje. Drugim rečima, ukoliko postoji pozitivan broj δ_1 takav da važi

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \leq M \|x(0) - x_0\| e^{-\lambda t}. \quad (1.28)$$

Napominjeno da eksponencijalna stabilnost implicira asymptotsku stabilnost, dok obrnuto ne važi. Međutim, kod linearnih sistema konačne dimenzije, međutim, asymptotska i linearna stabilnost su sinonimi.

Definicija 4. (Asymptotska stabilnost.) Radna tačka vremenski kontinualnog, stacionarnog, autonomnog procesa je asymptotski stabilna ukoliko je stabila u smislu Ljapunova, te ukoliko se nakon dovoljno malog poremećaja proces asymptotski vraca u ravnotežno stanje. Drugim rečima, ukoliko postoji pozitivan broj δ_1 takav da važi

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0. \quad (1.27)$$

Slika 1.5: Ilustracija asymptotske stabilnosti u smislu Ljapunova.

Kod linearnih sistema, lokalna i globalna stabilnost su sinonimi. S obzirom na to da neelinearni sistemi, u opštem slučaju, mogu imati veći broj (pa i bezbroj) stanja ravnoteže, potrebo je uver uokzati u odnosu na koje stanje ravnoteže se odnosi stabilnost (nestabilnost).

1.3.2 Ispitivanje stabilnosti radne tačke procesa Ljapunovljevim „drugim (direktnim)“ metodom

Kao što je već navedeno, primenom Ljapunovljevog „drugog (direktnog)“ metoda definisano uslove za analizu stabilnosti, nestabilnosti, asymptotske i eksponencijalne stabilnosti sistema. Objašnjavaće ispitivanja stabilnosti Ljapunovljevim metodom može se započeti kroz primer mehaničkog sistema. Ukoliko na mehanički sistem deluje sila, ona može da ga izvede iz ravnotežnog položaja. Ta sila je sistemu predala određenu energiju koja će dovesti do promene kinetičke i potencijalne energije sistema. Daljnje kretanje sistema se odvija osim navedene definicije asymptotske stabilnosti, u savremenoj teoriji stabilnosti postoje i stroža svojstva po pitanju stabilnosti, kao što je eksponencijalna stabilnost koja podrazumeva stabilnost u smislu Ljapunova i asymptotsku stabilnost, ali i da se proces vraća u ustajljeno stanje eksponencijalno brzo.

pod dejstvom te energije, koja se s vremenom, usled slobodnog kretanja, troši i posle određenog vremena sistem će se naći u stanju nurovanja (ravnoteže), kao posledica pobjrošene energije. Sistem je tada asimptotski stabilan po Liapunovu. Ako se potencijalna energija neprestano konvertuje u kinetičku, odnosno kinetičku u potencijalnu energiju, tada za takav sistem kažemo da je stabilan u smislu definicije stabilnosti po Liapunovu [5, 4]. Ukoliko postoji mehanizam koji može dovesti do povećanja energije u sistemu, kao što je delovanje signala iz zatvorenih povratne sprege, tada dolazi do kretanja sistema kojim se on udaljava od stanja ravnoteže i kažemo da je sistem nestabilan.

Orakva analiza motivisala je Liapunova da predloži kriterijum stabilnosti kojim možemo zaključivati o stabilnosti sistema ne rezavajući njegovu diferencijalnu jednačinu i ne vršeći linearizaciju u okolini stanja ravnoteže [4]. On je analizu uslova stabilnosti uopštilo uvođenjem u razmatranje funkcije koja ima određena svojstva i koja predstavlja upoštenu funkciju energije ravnotežnog stanja, a u literaturi se naziva funkcija Liapunova, na način koji će biti opisan u nastavku.

Posmatrajmo dinamički neelinearni sistem opisan matematičkim modelom

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1.29)$$

čija je jedna radna tačka x_0 ($f(x_0) = 0$). Pretpostavimo da je $V(x)$ skalarna diferencijabilna funkcija, te da je izvod $\dot{V}(x)$ duž trajektorija kretanja sistema oblika

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (1.30)$$

gde je

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]^T. \quad (1.32)$$

Definicija 7. (Liapunovova funkcija.) Sa $V(x)$ označimo skalarnu funkciju koja je pozitivno definitna u ϵ -okolini radne tačke i ima sve parcijalne izvode. Ukoliko je njen izvod $\dot{V}(x)$ duž trajektorija kretanja sistema negativno semidefinitna funkcija

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (1.33)$$

tada je $V(x)$ funkcija Liapunova.

Tvrđenje 1. (Uslov stabilitetu u smislu Liapunova.) Posmatrajmo neelinearni dinamički sistem (1.29) i pretpostavimo da postoji kontinualna diferencijabilna funkcija $V(x)$.

- Ako je njen izvod negativno semidefinitna funkcija

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (1.34)$$

za $\forall x \neq x_0$ i $\dot{V}(x) = 0$ za $x = x_0$ tada je posmatrana radna tačka stabila u smislu Liapunova, a kretanje $x(t)$ će uvek ostati u ϵ -okolini radne tačke. Funkcija $V(x)$ naziva se funkcijom Liapunova.

- Ako je izvod funkcije Liapunova po vremenu $\dot{V}(x)$ strogo negativno definitna funkcija

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (1.35)$$

za $\forall x \neq x_0$ i $\dot{V}(x) = 0$ za $x = x_0$ tada je posmatrana radna tačka asimptotski stabilna u smislu Liapunova u posmatranoj okolini.

Ako su napred definisani uslovi ispunjeni nad celim prostorom stanja i važi da

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ za } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (1.36)$$

tada se za sistem kaže da je globalno stabilan kada je $\dot{V}(x) \leq 0$, odnosno, globalno asimptotski stabilan za $\dot{V}(x) < 0$.

Skalarna funkcija više promenljivih $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je pozitivno definitna u oblasti Ω ako je

u svim tačkama oblasti Ω ima pozitivnu vrednost, a u koordinatnom početku vrednost nulla.

Funkcija $V(x)$ je negativno definitna ako je $-V(x)$ pozitivno definitna.

Skalarna funkcija $V(x)$ je pozitivno semidefinitna u oblasti Ω , ako je

$$V(x) = \begin{cases} \geq 0, & \text{za } x \in \Omega, x \neq 0, \\ = 0, & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Funkcija $V(x)$ je negativno semidefinitna ako je $-V(x)$ pozitivno semidefinitna.

Da bismo na ovaj način ispitivali stabilnost sistema (radne tačke), mora biti ispunjen uslov da je vektor $f(x)$ neprekidna funkcija argumenta i da je funkcija Ljapunova neprekidno diferencijabilna⁶ realna funkcija.

Izbor funkcije Ljapunova nije jednostavan problem. Za jedan te isti sistem možemo imati veliki broj pozitivno definitnih funkcija $V(x)$ i tada možemo govoriti samo o kandidatu funkcije Ljapunova. Ako se uz tako odabranu funkciju može potvrditi važenje neke od Ljapunovijevih teorema o stabilnosti sistema, tada je $V(x)$ funkcija Ljapunova. Ako ne možemo da nademo funkciju Ljapunova, to još uvek ne znači da dati sistem nije stabilan. Ako smo odredili stabilnost sistema u ograničenoj oblasti, u okolini ravnotežnog stanja, to nikako ne znači da sistem nije stabilan i za početna stanja iz druge oblasti. To, pre svega, govori o tome da direktna metoda Ljapunova daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove stabilnosti, a zatim i da izbor funkcije Ljapunova nije uvek jednostavan zadatak. Ipak, za neke klase sistema razvijeni su prilazi koji omogućavaju relativno jednostavan postupak utvrđivanja stabilnosti sistema na osnovu unapred poznatog oblika kandidata funkcije Ljapunova. Jedan od dodatnih kriterijuma je La Salov princip invariantnosti.

⁶Funkcija $V(x)$ je neprekidno diferencijabilna ako su svi parcialni izvodi $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ neprekidne funkcije.

Definicija 8. (Invariantan skup.) Skup G je invariantan skup za dinamički sistem ukoliko svaka trajektorija sistema koja polazi iz okoline skupa G , ostaje u skupu G sve ostalo vreme.

Definicija 9. (Atraktivni (prilažeći) skup.) Skup G je atraktivan skup za dinamički sistem ukoliko svaka trajektorija sistema koja polazi iz okoline tog skupa nakon dovoljno dugo vremena završava u skupu G .

La Salov princip stabilnosti daćemo kroz sledeće teoreme [4].

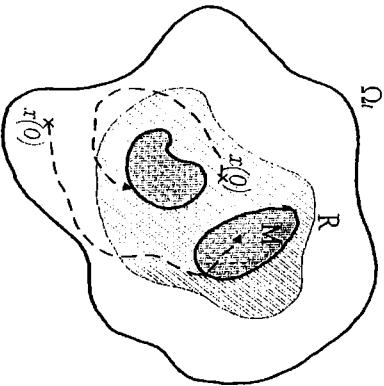
Tvrđenje 2. (Teorema lokalnog invariantnog skupa.) Posmatrano autonomni sistem oblika (1.29), gde je $f(x)$ neprekidna funkcija. Neka je $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna funkcija sa neprekidnim prvim izvodom. Prepostavimo da za neko $\ell > 0$ postoji oblast $x \in \Omega_\ell$ koja je ograničena sa $V(x) < \ell$ i gde važi da je $\dot{V}(x) \leq 0$ za svako $x(t)$ unutar Ω_ℓ .

Neka je R skup svih tačaka unutar oblasti Ω_ℓ gde je $\dot{V}(x) = 0$, i neka je M najveći invariantan skup u R . Tada svako rešenje $x(t)$ iz skupa Ω_ℓ teži u M kako $t \rightarrow \infty$, kao što je prikazano na slici 1.6.

Termin najveći u prethodnom tvrđenju 2 znači da je M unija svih invariantnih skupova u R . Geometrijska interpretacija teoreme prikazana je na slici 1.6. U nastavku možemo definisati važnu teoremu.

Pre definisanja La Salovog principa, uveštamo pojednostavljeni izraz "La Salov princip invariantnog i atraktivnog skupa".

Tvrđenje 3. (La Salov princip za utvrđivanje asimptotske stabilnosti.) Neka je $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takva da postoji $\Omega_\ell = x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l$ i gde je $\dot{V}(x) \leq 0$. Neka je $R = x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 0$. Ako skup R ne sadrži druga rešenja (1.29) osim ravnotežnog stanja $x = x_0$, tada je ravnotežno stanje $x = x_0$ asimptotski stabilno.



Slika 1.6. Geometrijska interpretacija lokalno invariјantne prečice u obliku kruga poluprečnika 2.

Primetimo da je $\dot{V}(x) < 0$ unutar kruga poluprečnika 2. Ukoliko primenimo teoremu stabilnosti Ljapunova, možemo zaključiti da je posmatrana radna tačka lokalno asymptotski stabilna. Za $\ell = 2$ oblast Ω_2 je ograničena sa $V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2$. Skup R sastoji se samo od mntne radne tačke $x = 0$ i ispunjava osobinu invariјantnosti. Stoga, sve uslovi teoreme 3 su zadovoljeni i sledi da će svaka trajektorija koja polazi iz kruga poluprečnika 2 konvergirati mirnoj radnoj tački, a ta oblast zove se domen atrakcije.

Prethodni rezultat možemo proširiti tako da ima globalni karakter. Ako se skup Ω_ℓ iz prethodne teoreme proširi na ceo prostor \mathbb{R}^n , tada sva rešenja globalno asimptotski konvergiraju ka skupu R . La Salov princip je korisno proširenje Ljapunovljeve teoreme, i možemo kratko sažeti na sledeći način:

1. Neka je funkcija $V(x)$ negativno semidefinitna u oblasti Ω_ℓ gde je $V(x) \leq l$, tada će trajektorije svih stanja koja polaze iz oblasti Ω_ℓ ostati u toj oblasti.
2. Dodatno, ako skup R (podskup skupa Ω_ℓ gde važi $V(x) = 0$) ne sadrži druga rešenja osim ravnotežnog stanja $x = x_0$, tada sva rešenja koja polaze iz oblasti Ω_ℓ konvergiraju ka ravnotežnom stanju x_0 .

Primer 1.2. Posmatrajmo dinamički sistem opisan sledećim diferencijalnim jednačinama

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) - 4x_1x_2 \quad (1.37)$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \quad (1.38)$$

i mtnu radnu tačku $x = 0$. Pretpostavimo funkciju Ljapunova oblike

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (1.39)$$

čiji je izvod duž trajektorije sistema

$$\dot{V}(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 4) \quad (1.40)$$

1.4 Linearizacija

Većina realnih sistema koji se javljaju u procesnoj industriji su nelinearni ili je neki element upravljačke poteje nelinearan, što čitav sistem čini nelinearnim. Ovakvi sistemi mogu se analizirati korišćenjem metoda za nelinearne sisteme koji se dosta razvijaju i istražuju u poslednje vreme. Međutim, takva analiza je i dalje složena zato što postojeći matematički alat i metode nisu dovoljno razvijeni kao ni moći da bi omogućili analitičku analizu mnogih problema od interesa. Da bi se takvi problemi pojednostavili i učinili lakšim za analizu i upravljanje, obično se primenjuje postupak linearizacije. To podrazumeva da se ponašanje nekog sistema može opisati dovoljno tačno linearnim modelom sa malim odstupanjem od odabrane tačke. Linearizacijom nelinearnog sistema oko radne tačke, može se primeniti znanje iz teorije linearnih sistema koje podrazumeva brojne metode za analizu i upravljanje, koje imaju dugu istoriju istraživanja i primene.

Korišćenje linearizovanog matematičkog modela realnog sistema je najkonvencionalniji i najzgodniji pristup za analizu dinamike nelinearnih sistema. Time se matematički modeluje ideja da se nelinearani model ponaša približno kao njegova linearna aproksimacija u okolini ravnotežnog stanja. U tim tačkama sistem je stacionaran, odnosno bez promene, pa se takve tačke naziraju i radije tačke⁷. Međutim, takav pristup nije uvek mogući i podrazumeva dodatni oprez. Korišćenje linearne funkcije u svrhu analize nelinearnog procesa, je opravdano ukoliko su lineare karakteristike u sistemu dominantne. U suprotnom, ukoliko su nelinearne karakteristike dominantne, postupak linearizacije može da dovede do pogrešnih zaključaka zbog neadekvatnog modelovanja realnog procesa.

Vetina realnih tehničkih procesa može biti modelovana strukturom koja se sastoji od linearne i nelinearne dela (koji se može opisati statičkom karakteristikom). Konvencionalni postupak linearizacije primenjuje se kada je statička karakteristika sistema ili njegovih elemenata glatka funkcija koja se može predstaviti grafički ili analitički. Pored ovakve procedure postoje i druge kao što su harmonijska ili statistička procedura [7].

Konvencionalne metode za linearizaciju, koje se često koriste u inženjerskoj praksi, bice opisane u nastavku.

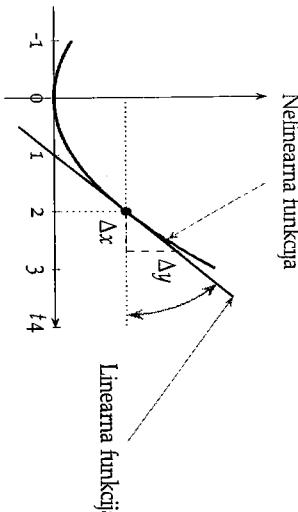
1.4.1 Grafički metod linearizacije

Postupak grafičke linearizacije primenjuje se kada su karakteristike posmatranog sistema opisane grafički kao glatka funkcija. Linearizacija se postiže ili tangentnom ili metodom usrednjavanja. Ovakav postupak je prihvatljiv kada u okolini radne tačke nelinearne karakteristike postoji mala odstupanja, tj. kada je aproksimirajuća prava dovoljno blizu nelinearne karakteristike. Što je veći opseg u kom je podudarnost prave (tangente) aproksimacije i nelinearne statičke karakteristike prihvatljiva, linearizacija je bolja.

1.4.2 Tangentni metod

Metod je ilustrovani na slici 1.7, koja prikazuje metod linearizacije statičke karakteristike nelinearnosti oko radne tačke (x_0, y_0) . Pretpostavimo da su oscilacije sistema unutar predefinisanog opsega. Tada se statička karakteristika može aproksimirati tangentom sa promenljivim Δx i Δy

$$\Delta y = k \Delta x. \quad (1.41)$$

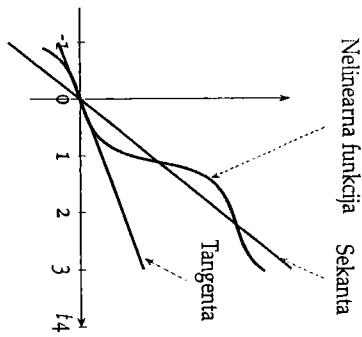


Slika 1.7: Linearizacija nelinearne statičke karakteristike sistema tangentom.

1.4.3 Usrednjeni metod

Metod je prikazan na slici 1.8. Ovakav metod primenjuje se u inženjerskoj praksi kada je nelinearne statičke karakteristike unutar opsega promene pobrde i može se aproksimirati pravom

$$y_N = K_S x \quad (1.42)$$



Slika 1.8: Linearizacija nelinearne statičke karakteristike sistema sekantom.

gde je $K_s = \tan \alpha$.

Na slici 1.8 prikazana je aproksimacija nelinearne krive linearom pravom dobijenom postupkom tangente, označenom sa T, kao i pravom S dobijenom postupkom usrednjavanja. Može se uočiti da u ovom primjeru prava S bolje aproksimira nelinearnu karakteristiku u širem opsegu. Nagib prave sekante k_s moguće je odrediti primenom postupka najmanjih kvadrata za minimizaciju kriterijuma optimalnosti

$$J = \min \left[\sum_i^n (k_s x_i - y_i)^2 \right] \quad (1.43)$$

po nepoznatom parametru k_s .

1.4.4 Analitički postupak linearizacije

Analitički postupak linearizacije započinje odabirom mjerne radne tačke i zasniva se na aproksimaciji nelinearanog ponašanja sistema u okolini posmatrane mjerne radne tačke linearnim. Postupak se sprovodi aproksimacijom nelinearne funkcije (koja opisuje ponašanje sistema) sa razvojem u Tejlorov red u okolini radne tačke.⁸

Razvoj u Tejlorov red je alat koji je široko primenjiv u analizi nelinearnih jednačina. Primena Tejlorove teoreme za razvoj funkcije jedne promenljive $y =$

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x_0} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=x_0} \Delta x_i \Delta x_j + \dots \quad (1.48)$$

gdje se $\Delta x = x - x_0$ naziva odstupanje ili varijacija promenljive oko radne tačke x_0 , dok $f^{(m)}(x_0)$ označava vrednost m -og izvoda funkcije f u radnoj tački x_0 . Ukoliko sa $y_0 = f(x_0)$ označimo vrednost funkcije u radnoj tački, tada Δy predstavlja odstupanje (ili varijaciju) promenljive y oko radne tačke $y = y_0 + \Delta y$. Zanemarivanjem članova višeg reda u izrazu 1.44 dobice se linearna jednačina

$$y = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad (1.45)$$

i uz prethodno definisane oznake sledi

$$y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x, \quad (1.46)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(x_0) \Delta x \\ \Delta y &= K \Delta x \end{aligned} \quad (1.47)$$

Lako se uočava da nagib linearne krive K zavisi od odabrane radne tačke (x_0, y_0) i opisuje ponašanje sistema oko te radne tačke i ima istu interpretaciju kao tangentna prava na nelinearanu krivu u radnoj tački.

Kada funkcija zavisi od više promenljivih, $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tada razvoj funkcije u Tejlorov red oko radne tačke $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ ima oblik

$$y = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta x_i}_{\frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_m} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}} \Delta x_i \Delta x_j \dots \Delta x_m + \dots \quad (1.48)$$

⁸Postupak je moguć uz pretpostavku da je nelinearna funkcija koja opisuje ponašanje sistema glatka, što je uglavnom zadovoljeno, jer se postupak najčešće primjenjuje kod sistema u stabilnom režimu rada.

gdje je Δx_i odstupanje i -te komponente promenljive \mathbf{x} od njene vrednosti u radnoj tački. U literaturi se često nalazi vektorska, odnosno matrična notacija

prethodnog izraza

$$y = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots \quad (1.49)$$

gde je $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ gradijent funkcije⁹, a $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ Heseova matrica¹⁰. Ponavljanjem iste procedure kao kod funkcije jedne promenjive dobija se linearna aproksimacija

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta x_i$$

$$\Delta \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n K_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta x_i \quad (1.50)$$

gde je $K_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.¹¹

1.4.5 Linearizacija neilinearnog dinamičkog sistema

Ponašanje neilinearnog dinamičkog sistema može se opisati matematičkim modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (1.51)$$

gde su \mathbf{x} , \mathbf{u} i \mathbf{y} vektori promenljivih stanja, upravljačkih promenljivih i vektor izlaznih veličina. Pretpostavimo da su funkcije \mathbf{f} i \mathbf{h} neilinearne i da je potrebno aproksimirati model linearnim, u okolini izabrane mjerne radne tačke $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$.¹² Linearizacijom se dobija matematički model koji „dovoljno dobro“ opisuje počinjanje neilinearnog modela samo za „dovoljno male“ promene promenljivih oko ravnotežnog stanja koje se definisu s $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ i $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$.¹³

Jednačina stanja procesa 1.51 može se zapisati kao

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}). \quad (1.53)$$

Kako je \mathbf{x}_0 vrednost promenjive stanja u ravnotežnom položaju i ima konstantnu vrednost, sledi

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}). \quad (1.54)$$

⁹ Pojam gradijenta skalarne funkcije definise se kao kvadratna matrica drugih parcialnih izvoda skalarne funkcije

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

¹⁰ Hesijan ili Heseova matrica je kvadratna matrica drugih parcialnih izvoda skalarne funkcije

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Linearizacija algebarske (izlazne) jednačine sistema 1.51 može se uz iste pretpostavke izvesti na sličan način. Kako je vrednost promenljive stanja i ulazne promenljive u ravnotežnom stanju \mathbf{x}_0 i \mathbf{u}_0 , sledi da je vrednost mjerne radne tačke izlaza procesa

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0).$$

Ako sa $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ označimo promenu izlazne promenljive oko radne tačke, jednačinu izlaza možemo zapisati kao

$$\mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}).$$

Razvojem funkcije \mathbf{h} u Tejlorov red u okolini tačke $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ nalazimo

$$\mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y} \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{u}. \quad (1.59)$$

Uvrštavanjem (1.57) u (1.59) konačno sledi

$$\Delta \mathbf{y} \approx J_h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{x} + J_h(\mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{u}.$$

Uobičajeno je da se koordinatni sistem pomakne u radnu tačku te da se matematički model dinamike LTI sistema zapise u obliku

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u},$$

¹² Grafička interpretacija aproksimacije skalarne funkcije dve promenljive bila bi tangentna ravan u radnoj tački, dok je kod više promenljivih to teže interpretirati.

¹³ Prema definiciji 2 merna radna tačka podrazumeva da se stanje procesa \mathbf{x}_0 neće menjati ukoliko na njeđa deluje upravljački signal intenziteta u_0 , odakle sledi da je promena $\mathbf{x} = 0$.¹⁴

¹⁴ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), nemacki matematičar

¹⁵ Operatori gradijenta ili nabljači operatori ∇_x predstavljaju vektor parcijskih izvoda multivariabilne funkcije po svim promenljivim,

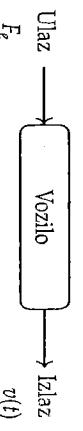
¹⁶ Generalizacija gradijenta za vektorske funkcije je Jakobijan. Jakobijan je matrica ili Jakobijan je matrica parcijskih izvoda prve redne vektorske funkcije f u odnosu na sve komponente zavisne promenljive x i u .

¹⁷ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), nemacki matematičar

¹⁸ Operatori gradijenta ili nabljači operatori ∇_x predstavljaju vektor parcijskih izvoda multivariabilne funkcije po svim promenljivim,

¹⁹ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), nemacki matematičar

²⁰ Operatori gradijenta ili nabljači operatori ∇_x predstavljaju vektor parcijskih izvoda multivariabilne funkcije po svim promenljivim,



2. Nakon identifikovanja upravljačke, izlazne i promenljive stanja, model se može zapisati u formi matematičkog modela u prostoru stanja

$$\dot{v} = f(v, F_e)$$

$$\dot{v} = -0.0001v - 0.0011v^2 + 0.001F_e. \quad (1.66)$$

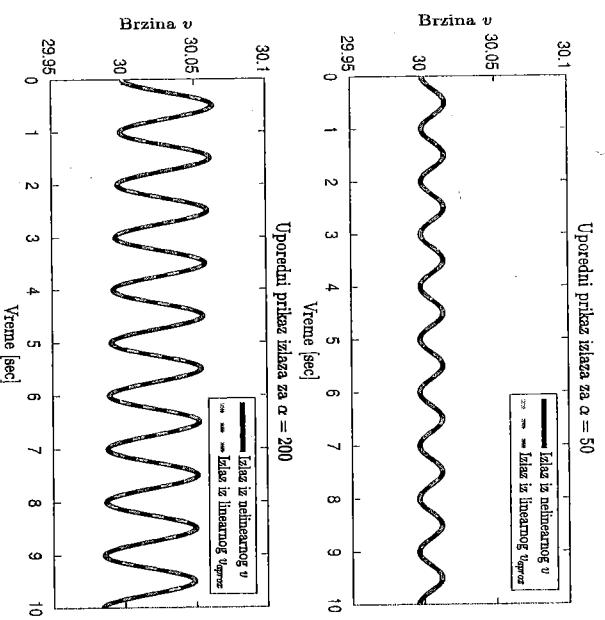
3. Kako je minna radna tačka izlazne promenljive zadata tekstom zadatka, $v_0 = 30 \text{ m/s}$, uz primenu uslova za koji važi u ravnotežnom stanju $\dot{v} = 0$ na izraz (1.66) sledi da je $F_{e0} = 0.1 * 30 + 1.1 * 30^2 = 993 \text{ N}$, a dobijena minna radna tačka može se zapisati kao $(F_{e0}, v_0) = (993, 30)$.

4. Naredni korak podrazumeva definisanje inkrementalnih promenljivih $\Delta\theta$ i Δv i razvojem funkcije (1.66) u Tejlorov red, dobijamo linearni, matematički model u prostoru stanja koji opisuje ponašanje inkrementalnih promenljivih oko radne tačke,

$$\dot{v} = \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=v_0, F_e=F_{e0}} \Delta v + \frac{\partial f}{\partial F_e} \Big|_{v=v_0, F_e=F_{e0}} \Delta F_e \quad (1.67)$$

$$\dot{v} = -\frac{66.1}{1000} \Delta v + \frac{1}{1000} \Delta F_e \quad (1.68)$$

5. Neka se ulazna promenljiva menja po zakonu $F_e = F_{e0} + \alpha \sin(2\pi 0.1t)$. Na dijagramima na slici 1.11 upoređeno je prikazana brzina vozila dobijena simulacijom nelinearne i linearizovanog modela za dve različite vrednosti parametra α .



Slika 1.11: Usporedni prikaz izlaza iz linearnog i neliniarnog modela za $\alpha = 50$ (odstupanje $\approx 5\%$ od amplitudu radne tačke), i $\alpha = 200$ (odstupanje $\approx 20\%$ od amplitudu radne tačke).

1.5 Osnove PID upravljanja

Proporcionalno-integralno-diferencijalni (PID) regulatori najzastupljeniji su regulatori u industrijskoj praksi. Prema iskustvima autora, preko 90% upravljačkih petlj u procesnoj industriji bazirano je na PID zakonu upravljanja ili derivatima njegove osnovne strukture.¹⁸ Naša neposredna saznanja potvrđena su u literaturi i tako uvidom u [9] može se videti da u industriji naftne, papične i hemijskoj industriji učešće PID upravljanja prelazi 98%. Popularnost PID upravljanja leži pre svega u njegovoj jednostavnoj strukturi, solidnom kvalitetu regulacije¹⁹ i podešavanju manjeg broja parametara koje ne traži egzaktan matematički model već opšte.

Počeci PID regulacije vezuju se za početak dvadesetog veka, a buran razvoj tehnike doprineo je evoluciji ovih regulatora od mehaničke, hidropneumatske, električne, elektronske i u poslednjih tridesetak godina do digitalne i/ili softverske izvedbe. Ovi konvencionalni²⁰ regulatori današ su deo sistemskih programskih paketa, u vidu funkcija blokova, pojedinačnih upravljačkih uređaja. Primeri takvih uređaja su programabilni logički kontroleri (PLC), kao i složena rešenja poput distribuiranih upravljačkih sistema (DCS)²¹. Bez obzira na dugo trajanje ovih regulatora i bogato iskustvo u njihovoj primeni, istraživanja, razvoj i implementacija ove klase regulatora još uvek su pričinio burni i krecu se od proširenja osnovnog matematičkog zapisa i njegovih modifikacija [10], [11], preko različitih formi digitalne implementacije [12] do formalizama za podešavanje parametara [13], [14], [15].

Čitocima preporučujemo sledeću literaturu, koja će ih detaljnije uputiti u značaj buran razvoj ove oblasti, a sigurno će im proširiti znanja znatno više od ovog udžbenika [16], [17], [18], [19]²² i [20]. Ova preporučena literatura uticala je na savladavanje i razumevanje ove oblasti automatskog upravljanja na inženjerskoj štoku sveta, što potvrđuje i ogroman broj citata svake knjige ponasob, ali i na autore ovog teksta. Svesno ili ne, način izlaganja gradiva koje sledi pod velikim je uticajem navedenih autora i verovatno će, kao i većina udžbenika iz ove oblasti, podsećati na neke od njih.

U nastavku teksta daćemo i formalni uvod u konvencionalne regulatore, objasnimo svaku strukturu regulatora ponasob, izložimo i modifikacije osnovne verzije ovih algoritama, vodeći računa da je ovo samo uvodno poglavje, koje čitaocu treba da podseti na teoriju linearnih kontinualnih upravljačkih sistema.

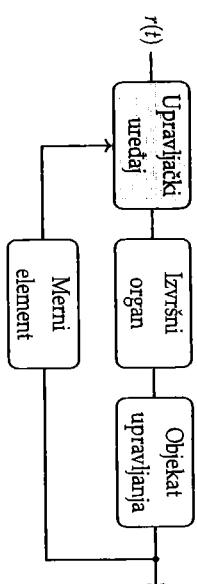
¹⁸ Misli se na P, PD i PI kao najzastupljeniji regulator. Prema našem iskustvu i uvidom u literaturu PI struktura najzastupljenija je u industriji. Tako na primer, zastupljenost PI upravljanja ide i preko 94% [8] u pojedinim granama industrije.

¹⁹ Kvalitet regulacije ogleda se u glatkosti upravljačkog signala, kao i u uticaju regulacije na gresku u ustavljenom stanju.

1.5.1 Upravljanje u povratnoj sprezi
Feedback is a central feature of life. The process of feedback governs how we grow, respond to stress and challenge, and regulate factors such as body temperature, blood pressure, and cholesterol level. The mechanisms operate at every level, from the interaction of proteins in cells to the interaction of organisms in complex ecologies. M. B. Haagland and B. Dodson, The Way Life Works, 1995.

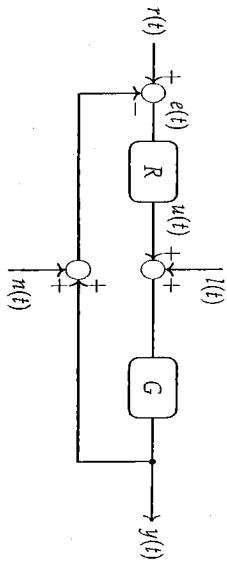
Naveli smo ovaj citat, koji je zahvaljujući profesoru Ostremu, postao nezabilazan u objašnjevanju značaja povratne sprege u sistemima automatskog upravljanja. Naime, čitaoci su već dobro upoznati sa konceptom *otvorene povratne sprege* gde je interakcija između elemenata sistema jednosmerna, što praktično znači da je ostvarivanje željenog cilja regulacije moguće samo ako smo unapred predideli, odnosno matematički opisali sve fenomene od značaja u našem upravljačkom kolu. Sa druge strane, koncept *zatvorene povratne sprege* daje nam mogućnost da se nosimo sa nesavršenstvima matematičkog modela, nepredviđenim poremetnjima i šumovinama, koji se ne mogu javiti. Stoga se može reći da je osnovni cilj u projektovanju sistema automatskog upravljanja da obezbedi upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi, po mogućnosti optimalno ili blisko optimalnom.

Osnovno kolo sistema automatskog upravljanja predstavljeno je na slici 1.12, gde je funkcionisanje svih pojedinačnih elemenata logički jasno, uz napomenu da ćemo u nastavku po pravilu objekat upravljanja i izvršni organ posmatrati jedinstveno, praktično kao jedan blok funkcije prenosa.



Slika 1.12: Osnovno kolo automatskog upravljanja u zatvorenoj sprezi prikazana je na slici 1.13, gde je regulator obeležen sa R, a objekat upravljanja sa G.²³

Slika 1.12: Osnovno kolo SAU, gde su željena vrednost $r(t)$, a izlaz ili odziv $y(t)$.



Slika 1-13: Shema kola automatskog upravljanja, gde je sa $e(t) = r(t) - y(t)$ obeležena greška, $u(t)$ je upravljački signal ili upravljanje, a sa $\{t\}$ obeleženi su neželjeni poremećaji i sum merenja, respektivno

Iz svega što je prethodno nevedeno, jasno je da sistemi u zatvorenoj povratnoj sprezi imaju dosta dobrih osobina, a samim tim prepoznamo taj koncept

ga se koristi u problemima praćenja i regulacije, ali šire posmatrano ona koristi se za regulizaciju ponašanja dinamičkih sistema. Primera radi, uvođenjem povratne sprege može se izvršiti linearizacija neilinearog procesa, stabilizacija nestabilnog, prigušenje oscilatornog. Takođe, složeni sistem upravljanja se nakon zatvaranja povratne sprege često mogu opisati jednostavnijim modelima nizeg reda u odnosu na polazni, te se uvođenjem povratne sprege efektivno postiže i redukcija reda modela procesa. Međutim, kao što smo i pretpostavili, uvođenje povratne sprege može da doneše i neželjeni šum merenja, a u nekim slučajevima i da dovede do oscilatornog ponašanja sistema ili čak potpune nestabilnosti.

U nastavku ćemo se posvetiti najjednostavnijim konvencionalnim regulatorima

1.5.2 Dvojpoložajni regulatori

Dvopolozajni regulatori predstavljaju najjednostavnije konvencionalne reguatorne jedinice, kod kojih se na osnovu znaka signala greske opredeljuje za jedno od dva moguća izlaza stanja U_{min} i U_{max} . Najčešće ova dva izlazna stanja imaju vrednost uključeno (ON) ili isključeno (OFF), pa se veoma često i nazivaju ON-OFF regulatori. Formalni zapis logike rada dvopolozajnog regulatora dat je sledećim izrazom

$$u(t) = \begin{cases} U_{max}, & \text{za } e(t) > 0, \\ U_{min}, & \text{za } e(t) < 0. \end{cases} \quad (1.69)$$

Zapis (1.66) formalno znači da će upravljanje imati maksimalnu vrednost uključeno) dok se ne postigne željena vrednost, odnosno u slučaju kada je rednost izlaza $y(t)$ veća od referentne vrednosti $r(t)$ upravljanje će imati minimalnu vrednost (isključeno).

Ovakva jednostavna upravljačka strategija karakteristična je za elemente kći-
ne automatike, ali i za optimalno upravljanje procesima gde postoji algebarska
ograničenja na komponente vektora upravljanja²⁴ ($U_{min} \leq u(t) \leq U_{max}$).
Iskoristimo naredni primer da ilustrijuemo upravljanje dvopolozajnim re-
gulatorom, ali i da predložimo modifikacije, ove upravljačke strategije.

Primer 14. Kako se upravljanje dtopoložnjim regulatorom načiče vezuje za kućnu automatu, i/ili za upravljanje termičkim procesima (u svojoj optimalnoj izvedbi), u nastavku ćemo izložiti primer koji odgovara ovim kriterijumima.

kao sistem prvog reda sa vremenskim kašnjenjem

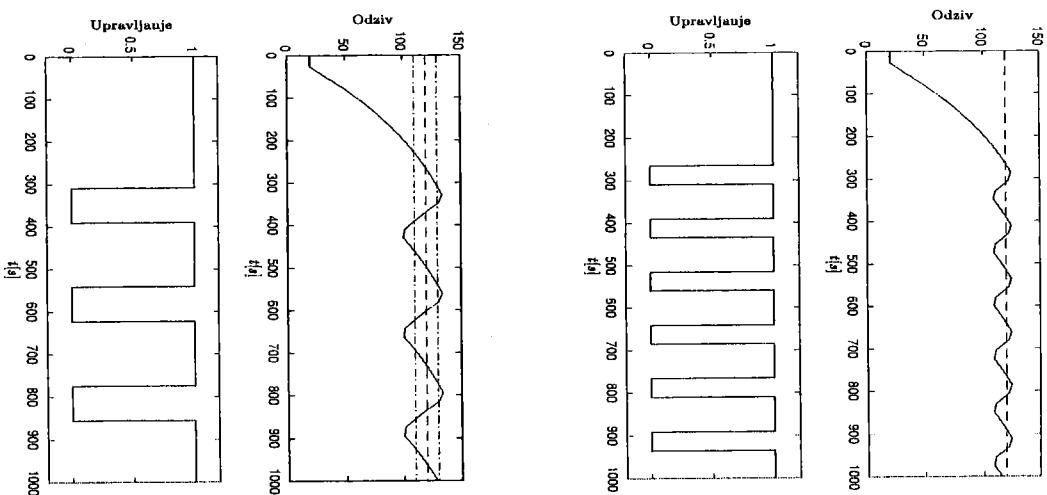
$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ts},$$

gdje se vrednosti parametara mogu odrediti i eksperimentom²⁵ statičko pojavačenje $K = 180$, vremenska konstanta $T = 240$ s, kašnjenje je procenjeno na $\tau = 30$ s. Upravljački signal ima vrednosti uključeno-isključeno i rezultati ove simulacije predstavljeni su na slici 1.14.

Iz prethodne simulacije jasno je da je izvрšni organ ovakvim načinom upravlja-ja prilično opterećen, a kvalitet regulacije nije na visokom nivou. Zato predla-ženo je sledeću modifikaciju, koju ćemo intuitivno objasniti. Ako proširimo zonu upravljanja za $\pm 10^{\circ}\text{C}$, čime se kvalitet regulacije neće narušiti, suštinska izme-đu je da se upravljanje gasi iznad 130°C , a pali kada temperatura padne ispod 110°C . Shenatski to je predstavljeno na slici 1.16 pod (b) i (c), uz napomenu da je realizacija upravljanja sa histerezisom složenija i podrazumeva da zna-mo gradijent našeg delovanja, odnosno prethodno stanje izlaza iz regulatora. Rezultati opisanog upravljanja sa histerezisom predstavljeni su na slici 1.15.

Način funkcionisanja dvopolozajnih regulatora je jednostavan, njihova sof-tverska realizacija nije zahtetna, uz podsećanje da je upravljanje sa histerezisom malo složenije; kvalitet regulacije nije na visokom nivou i prateći je sopstvenim

2. Optimalno upravljanje, gde se zbroj postojanja ograničenja na minimalnu i maksimalnu vrijednost upravljačkog signala rešenje traži na granici, u literaturi naziva se bang-bang upravljanje, a rešenje se, u duhu principa *maksimuma*, dobija direktnom minimizacijom Hamiltonove funkcije.



Slika 1.14: Rešenje problema upravljanja retrom uz primenu dvopolozajnog regulatora. Kao što se sa slike jasno vidi, ova vrsta upravljanja ne obezbeđuje željenu vrednost, već okolju željene vrednosti, uz obavezne sopstvene oscilacije i veoma aktivan izvrsni organ, koji prati te burne promene oko zadate vrednosti. Karakteristika dvopolozajnog regulatora, koji je korišćen u ovom primeru, a opisan izrazom (1.69), data je na slici 1.16 pod (a).

1.5.3 Proporcionalni regulatori

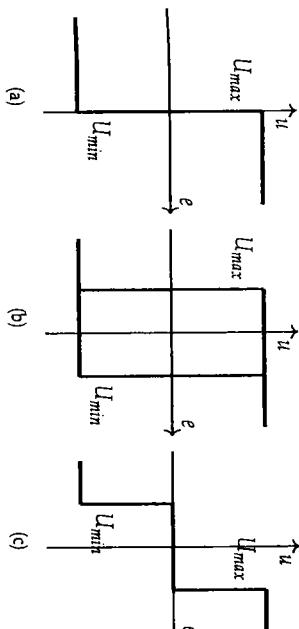
Proporcionalno upravljačko dejstvo obezbeđuje proporcionalnu vezu između upravljačkog signala i signala greske

$$u(t) \equiv u_p(t) \equiv P(t) = K e(t) = K[r(t) - y(t)], \quad (1.70)$$

gde je K proporcionalno pojačanje, $r(t)$ željena ili referentna vrednost, $y(t)$ odziv ili izlaz iz sistema, a $e(t)$ je signal gрешке.²⁶

Sliku 1.15. Rešenje problema upravljanja termom uz primenu dvopoložnjog regulatora sa histerezisom. Kao i u prethodnom primeru, zadržava se oscilatorni odziv u šitem opsegu oko željene vrednosti, ali uz manji broj aktivacija iz-

višnog organa. Venijemo da
ćete u ovom načinu funkcio-
nisanja prepoznati veliki broj
elemenata kucne automatike.



Slika 1.16. Sheme moguće realizacije dvopolozajnog regulatora, u osnovnoj izvedbi (a), sa histerezisom (b) i sa mrtvom zonom (c).

Σ u dajnjem testu upravljački signal karakterističan za pojedine upravljačke akcije obelježavajuće model tako da nedvostrukim uputama o kom dejstvu se radi npr. $P(t)$, $P(t)PD(t)$ ili $PDT(t)$.

7 Bez sopstvenih oscilacija. Inače pojam sopstvenih oscilacija se u ovom smislu vezuje za teoriju ne-linearnih sistema.

$$P(t) = K\epsilon(t) + u_b \quad (1.71)$$

$$P(t) = Ke(t) + u_b, \quad (1.71)$$

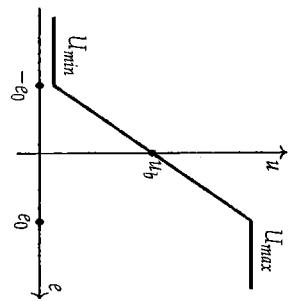
noštu nom stampi. Ovačlan je konstantan i ustaža ulaz u tlocu na ekrana. U komercijalnoj upotrebi često se ovaj član inicijalizuje sledećom vred-

$$u_b = \frac{u_{\min} + u_{\max}}{2}, \quad (1.72)$$

oscilacijama. Prva prirodna modifikacija ovog upravljačkog kola je proporcionalni P regulator i tome je posvećeno naredno poglavje.

da statička karakteristika proporcionalnog upravljačkog dejstva izgleda kao na slici 1.17, odnosno, matematički se zapisuje na sledeći način

$$u(t) = \begin{cases} U_{max}, & \text{za } e(t) > e_0, \\ ke(t) + u_b & \text{za } -e_0 < e(t) < e_0, \\ U_{min}, & \text{za } e(t) < -e_0. \end{cases} \quad (1.73)$$



Slika 1.17: Karakteristika P upravljačkog algoritma sa naglašenim ograničenjima na upravljanje.

Zanimljivo je posmatrati vrednost greške u radnom opsegu ($-e_0 < e(t) < e_0$)

$$e(t) = \frac{u(t) - u_b}{K}, \quad (1.74)$$

gde je jasno da su moguća dva scenarija, kada će greška biti jednaka nuli:

1. Za velike vrednosti pojačanja $K \rightarrow \infty$, što bi, kada bi bilo moguće, postavilo karakteristiku sa slike 1.17 sa slikom 1.16, pod (a), a to bi po pravilu dovelo do pojave sopstvenih oscilacija.
2. Da stalno važi relacija $u(t) = u_b$, što praktično znači da za svaku programu referentne vrednosti možemo izračunati odstupanje u_b . Ali u ovoj izvedbi to ne deluje lako izvodljivo. Automatsko pronaalaženje vrednosti u_b moguće je ako regulator proširimo integrarnim dejstvom, što je i tema poglavlja koje sledi.

Važno je napomenuti da se u industrijskoj praksi, a pogotovo u procesnoj industriji, proporcionalno pojačanje predstavlja kao

$$K = \frac{10}{PB}, \quad (1.75)$$

gdje je PB proporcionalno područje ili proporcionalni opseg³⁰ koje se izražava u procentima i predstavlja potreblju promenu ulaza regulatora (u procentima punog opsega) da bi se dobitila 100% promena izlazne veličine regulatora. Kako je ulaz regulatora greška, to znači da PB ukazuje koliko velik treba biti iznos greške (u odnosu na njenu maksimalnu vrednost) da bi regulator na izlazu obnutio proporcionalno pojačanje i tako podešavaju parametre regulatora.

Interesantno je za kraj napomenuti kada se koristi samo proporcionalna upravljačka strategija. Zbog zahteva za većim vrednostima pojačanja K , koje dovode do manje greške, to bi po pravilu bili objekti upravljanja koji se mogu modelovati kao sistemi prvog reda. Dodatno, ti sistemi ne zahtevaju visoki kvalitet regulacije, odnosno trpe malu grešku u ustaljenom stanju.³¹ Eliminacija greške u ustaljenom stanju ostao je nerешени problem proporcionalnog regulatora, stoga ћemo naredno poglavje posvetiti proširenju strukture regulatora, dodajući integralno dejstvo.

1.5.4 Proporcionalni integralni regulatori

Integralno upravljačko dejstvo je proporcionalno integralu greške odnosno

$$I(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (1.76)$$

gde je K_i integraciona konstanta, a iz razloga koji će nam biti jasno malo kasnije, naziva se i automatski reset član, a integralno upravljanje i reset ujedinjuje. Iz izraza (1.76) jasno je da integralno dejstvo predstavlja akumulirane vrednosti greške i baš ta kumulativna greška ponderisana konstantom K_i obezbeđuje automatisko podsešavanje vrednosti u_b iz izraza (1.71) i eliminaciju³² greške u ustaljenom stanju.

Integralno dejstvo koristi se u kombinaciji sa proporcionalnim i odgovarajućim poglavljima prenosa data je izrazom

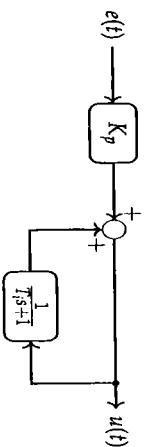
$$PI(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_s} \right), \quad (1.77)$$

³⁰ Primera radi: rezervoari sa fluidima, po pravilu vodeni za hlađenje ili sa protipožarnom namenom.

³¹ Odgovarajuća funkcija prenosa integralnog regulatora je $G(s) = \frac{K_i}{s}$

³² Gde prisustvo ovog pola u nullu obezbeđuje u ustaljenom stanju na pojavu greške u ustaljenom stanju na step pobudu $r(t)$ i na step pomenečaj $i(t)$, sa slike 1.13. Pomoćno upućujemo čitatece na poglavje greške u ustaljenom stanju.

gde je T_i integralna vremenska konstanta, a K očigledno proporcionalno pojačanje. Integraciona konstanta definije se kao $K_i = \frac{K}{T_i}$. Shematski se ova serijska realizacija proporcionalno-integralnog regulatora predstavlja i blok-dijagramom na slici 1.18, a naziva se i automatskom reset strukturu.



Slika 1.18: Shema PI regulatora u takozvanoj automatskoj reset strukturi.

Geometrijska interpretacija diferencijalnog dejstva sa slike 1.19, u analitičkoj formi, predstavlja linearnu aproksimaciju signala greške u trenutku $t + T_d$ razvojem u Tejtorov red, odnosno

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (1.79)$$

što bi značilo da PD upravljačko dejstvo iz izraza (1.78), predstavlja proporcionalnu vezu sa aproksimacijom (1.79).

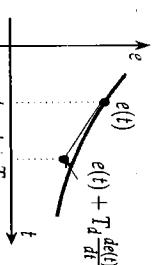
Diferencijalno upravljačko dejstvo koristimo kada predikcijom možemo poboljšati kvalitet upravljanja³⁴, odnosno kada je potrebno stabilizovati sistem³⁵. PD upravljanje se veoma često koristi u upravljačkim kolima koja već u sebi sadrže integralno dejstvo³⁶, ali sigurno se izbegava kod sistema sa puno šuma. Modifikacije diferencijalnog dejstva, koje su obavezne u praktičnoj implementaciji, a umanjuju uticaj šuma razmotrićemo u nastavku ovog poglavljaja.

1.5.5 Proporcionalni diferencijalni regulatori

Kao što smo do sada videli, proporcionalno dejstvo daje vezu između trentne vrednosti greške i upravljačkog signala, a integralno dejstvo oblikuje upravljački signal na osnovu prethodne, istorijske vrednosti signala greške. Konačno, diferencijalno dejstvo daje predikciju buduće vrednosti greške i tako upotpunjuje upravljački napor. Osnovna forma PD regulatora data je izrazom

$$PD(t) = K \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (1.78)$$

gde je T_d vreme differenciranja. Možemo reći da vremenska konstanta T_d ukazuje koliko unapred vršimo predikciju signala greške, što je ilustrovano na slici 1.19.



Slika 1.19: Geometrijska interpretacija diferencijalnog dejstva kao prediktivne upravljačke akcije. Prekidanjem se zastupa na linearnoj eksploratoriji.

³³ Nagla promena ulaznog signala (step) rezultira u postepenoj promeni izlaznog signala (rampa).

³⁴ Predikcija je veoma složena u slučaju da naš linearni sistem pokazuje oscilatorno ponašanje ili na primer kada sistem ima veliko vremensko kašnjenje u poređenju sa vremenskom konstantom sistema. Za ove druge sisteme preporučili smo PI regulator, a često je potrebno i naprednije upravljačko rešenje, kao na primjer prediktivno upravljanje.

³⁵ Doprinos D dejstva je $+90^\circ$ faznoj karakteristici.

³⁶ Ovo je pojednostavljena interpretacija, ali i dovoljno tačna u prvim praktičnim primernama ove klase regulatora.

Objedinjavanjem proporcionalnog, integralnog i diferencijalnog dejstva, u obliku u kom su predstavljeni u prethodnim poglavljima, lako dobijamo

$$PID(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (1.80)$$

ili alternativno

$$PID(t) = Ke(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (1.81)$$

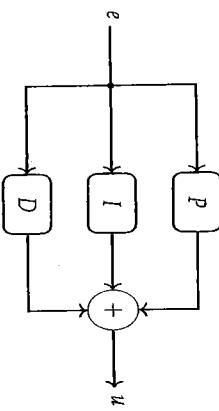
gde su $K_i = K/T_i$ i $K_d = KT_d$ integraciona i diferencijalna konstanta, respektivno. U kompleksnom domenu izraz (1.80) možemo zapisati na sledeći način

$$PID(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s), \quad (1.82)$$

ili u formi funkcije prenosa

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (1.83)$$

Ova četiri zapisa (1.80)-(1.83) čine paralelnu ili **neinteraktivnu strukturu PID regulatora**. Paralelnu strukturu je očigledno jednostavno uošteđenje osnovnih upravljačkih dejstava pa se često naziva **osnovna ili školska struktura**³⁷. Naziva se i **neinteraktivna struktura** jer su proporcionalno, integralno i diferencijalno dejstvo međusobno nezavisni. Paralelnu strukturu, posebno u ovoj formi, nije u ovom obliku zastupljena u industrijskim regulatorima koji se mogu nabaviti na tržistu³⁸. Razlog je, pre svega, istorijskog karaktera. Naine, prvi regulatori bili su pneumatski, a paralelnu strukturu sa pneumatskim komponentama bilo je teško realizovati. Pored toga što je paralelnu strukturu jednostavno izgraditi u električnoj i elektronskoj izvedbi, tradicija i određeni konzervativizam procesne industrije prostiru se i na digitalnu izvedbu [21]. Shematski blok-dijagram paralelne strukture PID regulatora dat je na slici 1.20.



Slika 1.20: Shema PID regulatora u paralelnoj izvedbi.

U engleskoj literaturi često se koristi i termin **idealna struktura**. Kako je iz inženjerske perspektive ova struktura daleko od idealne, izbegavat će ovaj termin. Isto tako, pojam **školska** je grub prevod izraka *textbook*, koji se često prevod i kao **uzbećena struktura**.

³⁷ Izmenjena ili modifikovana struktura paralele forme, koja je data u nastavku teksta, nasha je široj primenu, posebno u digitalnoj izvedbi, što će čitaoci i sami logički ispraviti.

primenom sledećih relacija

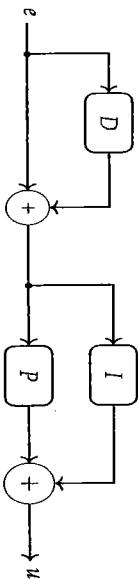
$$T_i' = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right) \quad (1.86)$$

$$T_d' = \frac{T_d}{2},$$

$$K' = \frac{K}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right) \quad (1.87)$$

$$T_d' = \frac{T_d}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right).$$

Blok-dijagram koji opisuje serijsku strukturu PID regulatora dat je na slici 1.21.



Slika 1.21: Shema PID regulatora u serijskoj izvedbi.

transformisati u osnovnu, paralelnu strukturu, na sledeći način

$$\begin{aligned} K &= K' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'} \\ T_i &= T_i' + T_d' \\ T_d &= \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

gde integralno dejstvo ne deluje samo na signal greške, već i na njegov prvi izvod, što uputjuje da novouvedeno vreme diferenciranja T_d' modifikuje integralan akciju regulatora. Važno je napomenuti da se parametri PID regulatora u serijskoj formi mogu

Može se lako uočiti da se serijska i paralelna struktura razlikuju samo u slučaju PID regulatora, odnosno kada se koriste sva tri dejstva. Ako imamo P, PI ili PID regulator, obe strukture su identične. Modifikacije osnovne strukture PID regulatora i projedinačnih upravljačkih akcija, koje ovaj veoma moćan zakon upravljanja dodatno prilagođavaju za inženjerske primene, daćemo u nastavku teksta. Na samom kraju, ne želeći da banalizujemo postupke podešavanja

parametara PID regulatora, za koji smo još u uvodu rekli da je predmet brojnih aktuelnih istraživanja, dačerno pregled uticaja projedinih upravljačkih akcija na kvalitet regulacije, na način koji je karakterističan za empirijsko određivanje parametara u industriji.

Parametar	Brzina	Stabilnost	Tačnost
Povećanje K_p	Povećava	Pogoršava	Poboljšava
Povećanje K_i	Smanjuje	Pogoršava	Poboljšava
Povećanje K_d	Povećava	Poboljšava	Nema uticaja

Tabela 1.1: Pregled uticaja parametara PID regulatora na kvalitet regulacije.

1.6 Modifikovani PID regulator

Osnovna upravljačka dejstva, koja smo razmatrali u prethodnim poglavljima, u praktičnoj eksploataciji ispoljavaju neke nedostatke³⁹. Namera nam je da u ovom poglavljiju uvedemo neke od modifikacija koje će osnovnu formu regulatora (1.88)-(1.90)

$$\begin{aligned} PID(t) &= K_p [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}] \\ &= K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (1.88)$$

odnosno, u kompleksnom domenu

$$PID(s) = K_p [E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + T_d s E(s)], \quad (1.89)$$

gdje je funkcija prenosa PID regulatora

$$G_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad (1.90)$$

konvertovati u oblik koji je posebni za komercijalnu upotrebu. Ovu novouvezenu formu, nazvaćemo realni PID, a u literaturi se ona naziva i standardna ISA⁴⁰ forma. U praksi, najveće izmene pretpelo je diferencijalno dejstvo. Može se čak primeniti da ono u inženjerskim aplikacijama ne postoji u formi koja je data izrazom (1.78) i modifikacije ovog dejstva ćemo prve i razmotriti.

³⁹ Na primer, pojačanje šuma na visokim frekvencijama, nagonjavajuće integracionog dejstva. Ove pojmovećemo detaljnije razmotriti u nastavku teksta.

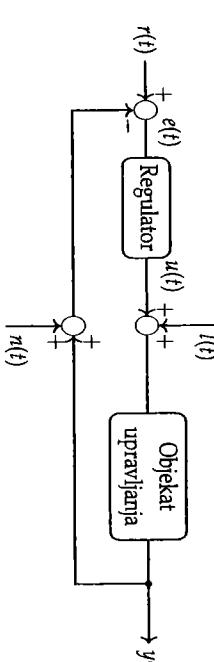
je činjenica da idealno D dejstvo pojačava šum na visokim frekvencijama⁴¹ i da skokovita promena željene vrednosti generiše samo impulsni skok u trenutku promene. Oba ova objektivna razloga, ako se ne rešavaju na pravi način, u prvom koraku dovode do oštećenja izvršnog organa, a zatim i celog upravljačkog kola.

U nastavku teksta, izložimo modifikacije diferencijalnog dejstva, ali i modifikacije upravljačke topologije koja prati ove modifikacije. Podsetimo se ponovo na osnovno kolo sistema automatskog upravljanja (SAU) prikazano na slici 1.1.

1.6.1 Modifikacija D dejstva

Kao što smo više puta napomenuli najveći broj upravljačkih petija u industriji ne sadrži diferencijalno dejstvo. Pored subjektivnih razloga, koji se svode na lakše podešavanje manje broja parametara, postoje i objektivni razlozi, kao što je skrenuti smu pažnju da je kod sistema sa izraženim šumom menjanja po pravilu upotreba PI regulatora očekivana.

⁴¹ Skrenuli smo pažnju da je kod sistema sa izraženim šumom menjanja po pravilu upotreba PI regulatora očekivana.



Slika 1.22: Shema kola automatskog upravljanja. Sa $r(t)$ obeležena je željena (referentna) vrednost, signal greške je $e(t)$, $y(t)$ poremetaj, $u(t)$ upravljanje, $y(t)$ izlaz iz sistema ili odziv i $n(t)$ je šum merenja.

Sa slike 1.1 jasno je da se signal greške računa po sledećoj formuli $e(t) = r(t) - y(t)$, odnosno da se D dejstvo izračunava kao

$$D(t) = K T_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (1.91)$$

Prepostavimo da je željena vrednost u formi step signala (Hevisajdove funkcije), slika 1.23, odnosno da je $r(t)$ konstantna osim u trenutku uspostavljanja. Lako možemo zaključiti da prvi izvod po referentnoj vrednosti ima vrednost nulla, osim u trenutku uspostavljanja $t = 0$, kada je on u vidu impulsa, koji nije od značaja za sve $t > 0$, odnosno da izraz (1.91) postaje

$$D(t) = -K T_d \frac{dy(t)}{dt}, \quad (1.92)$$

što praktično znači da se diferenciranje vrši po sporo promenljivom izlazu, a izbegavaju se nagle promene referentne vrednosti u vidu impulsa.

Slika 1.23: Step (Hevisajd)

Izraz dat jednačinom (1.92) postaje prva modifikacija D dejstva. U slučaju da se željena vrednost $r(t)$ menja tokom vremena, što bi odgovaralo problemu servo regulacije, ova modifikacija imala bi oblik

$$D(t) = KT_d \left[\gamma \frac{dr(t)}{dt} - \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \right], \quad (1.93)$$

gde parametar γ ima vrednost između 0 i 1. Vrednost ovog parametra može biti predmet posebnog podešavanja ili je u slučaju većine komercijalnih proizvoda, u zavisnosti od primene, unapred podešena.

U daljnjem tekstu, prvu modifikaciju (1.92), bez gubitka na opštosti, smatramo centralnom, odnosno smatraćemo da je parametar $\gamma = 0$.

Najznačajnija modifikacija D dejstva usmerena je na potiskivanje šuma merenja, odnosno potiskivanje uticaja šuma merenja na ponašanje sistema i tome je posvećen nastavak ovog poglavlja. Pretpostavimo da je naš koristan signal, odživ $y(t)$, „zagaden“ šumom merenja $n(t)$, koji se javlja na visokim učestanostima. Ovaj signal šuma modelovaćemo prostoperiodičnim signalom:⁴²

$$n(t) = a \sin \omega t, \quad (1.94)$$

gde je a učestanost.⁴³ Doprinos D dejstvu šuma možemo računati na sledeći način (znajući da se radi o linearном sistemu i da se uticaj svakog ulaza $r(t)$, $l(t)$ i $n(t)$ može nezavisno posmatrati):⁴⁴

$$D_n(t) = KT_d \frac{dn(t)}{dt} = KT_d a \omega \cos \omega t. \quad (1.95)$$

Iz izraza (1.95) jasno je da će amplituda ovako izračunatog D dejstva biti srazmerna učestanosti na kojoj se šum javlja, preko člana ω , koji sada figureće u amplitudi diferenciranog signala, odnosno, da će D dejstvo pojačati signal šuma i to srazmerno (visokoj) učestanosti na kojoj se šum nalazi.

Da bismo bolje razumeli ovaj fenomen i način njegove kompenzacije, analiziraćemo Bodeovu karakteristiku PD regulatora.⁴⁵ Za crtanje Bodeovih karakteristika, a radi lakšeg razumevanja i preglednosti, smatramo da se u okviru D dejstva diferencira signal greške, a ne koristi se prva modifikacija D dejstva sa diferenciranjem samo po izlazu (1.92). Smatramo da je objašnjene lakše i komplikacije na ovaj način. U konačnoj formi unećemo sve modifikacije, na način kako smo ih uvodili.

Naime, na osnovu (1.90) jasno je da je funkcija prenosa PD regulatora da je

$$PD(s) = K(1 + T_d s), \quad (1.96)$$

odnosno da se frekventne karakteristike ovog regulatora ($s = j\omega$) izračunavaju na osnovu sledećeg obrazca

$$PD(j\omega) = K(1 + j\omega T_d). \quad (1.97)$$

Amplitudna karakteristika, tačnije njeno asymptotsko ponašanje, lako se može skicirati, slika 1.24.⁴⁶

⁴² Šum je složen stohastički signal. Međutim, za našu potrebe, prikazani prostoperiodični model visokog učestanosti biće više nego dovoljan.

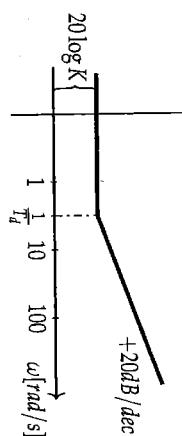
⁴³ Kao što je napomenuto, šum je visokofrekventni signal, što podrazumeva da je ω „veliki broj“.

⁴⁴ Na osnovu slike 1.1, vidimo da signali $y(t)$ i $n(t)$ učestruju u formiranju signala upravljanja na sistem.

⁴⁵ P dejstvo je neizostavni deo svakog regulatora, koji sadrži D dejstvo.

Kao što se i sa slike 1.24 i iz (1.95) jasno vidi, pojačanje raste sa visokim frekvencijama, koje su karakteristične za šum, a time dramatično raste i uticaj ove komponente na ukupno ponašanje sistema. Sa slike 1.24 je takođe očigledno da se na D dejstvo ili D kanal u upravljačkom algoritmu, mora ugraditi niskofrekventni filter sa ciljem da obezbedi D dejstvo na upravljanu veličinu samo u bitnom frekventnom domenu i da smanji, ali ne i ukine, negativan uticaj D dejstva na šum merenja.

Dodavanjem niskopropusnog filtra, naša karakteristika sa slike 1.24 dobila bi sledeći oblik.



Slika 1.24: Amplitudno-frekvenčna karakteristika (Bodeov dijagram) PD regulatora sa filterom. Obratiti pažnju da je pol filtra „obrono“ amplitudsku karakteristiku posle učestanosti N/T_d .

Drugim rečima, funkcija prenosa PD regulatora, sa niskopropusnim filterom bi sada imala oblik

$$PD(s) = K \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_f s}{N}} \right), \quad (1.98)$$

gde je parametar N kod vremenske konstante niskopropusnog filtra kod komercijalnih proizvođača regulatora u opsegu 1 – 33, mada je u većini slučajeva između 8 i 16.⁴⁷

Važno je primetiti da niskopropusni filter ne ukida pojačanje šuma, već ga samo ograničava u željenom opsegu. Takođe je važno napomenuti da često D dejstvo ima nekausalno ponašanje i da se ne može fizički ostvariti, tako da ga dodatni niskopropusni filter čini kausalnim i fizički izvodljivim.⁴⁸

Zanutljivo je posmatrati i interpretaciju niskopropusnog filtra u vremenskom domenu. Ako je D dejstvo u svojoj prvoj modifikaciji, sa diferenciranjem izlaza,

$$D(t) = -KT_d \frac{dy(t)}{dt}, \quad (1.99)$$

onda je jednačina u vremenskom domenu, koja opisuje diferencijalno dejstvo u prisustvu niskopropusnog filtra

$$\frac{T_d}{N} \frac{dD}{dt} + D(t) = -KT_d \frac{dy(t)}{dt}. \quad (1.100)$$

Dругim rečima, u kompleksnom domenu (1.92) postaje

$$D(s) = \frac{-KT_d s Y(s)}{1 + \frac{T_d s}{N}}, \quad (1.101)$$

što predstavlja i konačnu ISA formu modifikovanog D dejstva, odnosno formu koja se koristi u inženjerskoj praksi u problemima regulacije. Kombinovanjem izraza (1.93) i (1.101) dobija se izraz koji opisuje D dejstvo u problemima servo regulacije

$$D(s) = \frac{KT_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} [\gamma R(s) - Y(s)]. \quad (1.102)$$

1.6.2 Modifikacija P dejstva

Analizu P dejstva u sklopu PID regulatora počemo razmatranjem PI regulatora, s obzirom na to da je D dejstvo i njegova modifikacija objašnjena u prethodnom poglaviju

⁴⁷Ovaj način predstavljanja konstante niskopropusnog filtra je uobičajen i često se koristi nego opštiji zapis

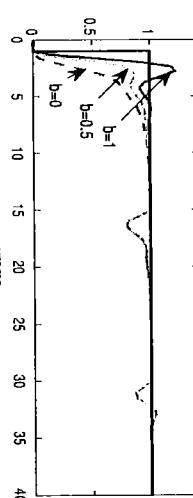
$$PD(s) = K \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right),$$

gde je T_f oznaka za konstantu filtra.

⁴⁸Linearan stacionaran sistem je kausalan ako je stepen polinoma u brojocu njegove funkcije prenosa manji ili u višem u slučaju jednak, stepenu polinoma u imeniku.

gdje su $r(t)$ i $y(t)$ referentna vrednost i odziv sistema respectivno. Ključni novi parametar je težinski faktor b , koji ima vrednost između 0 i 1. Parametar b treba razumeti kao dodatni stepen slobode u podešavanju parametara regulatora, odnosno u projektovanju upravljačkog algoritma. Uticaj ovog težinskog parametra, koji se nalazi uz referentnu vrednost, najbolje možemo sagledati na slici 1.26.

Poređenje referenca $r(t)$ i izlaza iz procesa $z(t)$



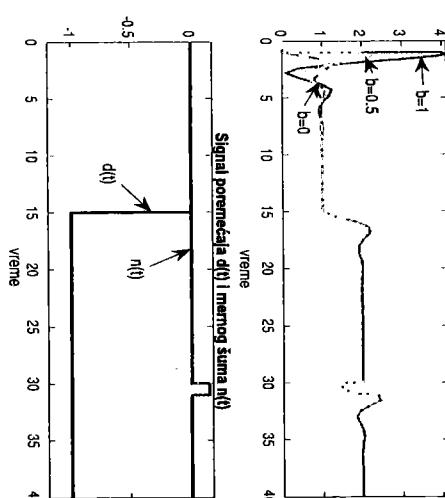
Slika 1.26: Odziv sistema za različite vrednosti parametra b .

⁴⁹Analizu P dejstva u sklopu PID regulatora počemo razmatranjem PI regulatora, s obzirom na to da je D dejstvo i njegova modifikacija objašnjena u prethodnom poglaviju

$$PI(t) = K [e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt], \quad (1.103)$$

gde je $e_p(t)$ greska proporcionalnog dejstva, koja se definisi na sledeći način

$$e_p(t) = br(t) - y(t), \quad (1.104)$$

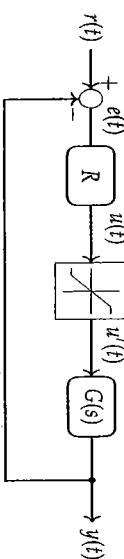


Očigledno je da težinski faktor b najviše utiče na karakteristike prelaznog režima, kao što je preskok, vreme smirenja, stepen uspostavljanja, stepen oscilatornosti i slično, pri čemu je očigledno da npr. $b = 0$ po pravilu obezbeđuje ponasanje blisko aperiodičnom.

Integralno dejstvo i dalje zavisi od greške kao razlike željene i ostvarene vrednosti $e(t) = r(t) - y(t)$. Zbog svoje uloge u eliminaciji greške u ustaljenom stanju, ne trpi modifikacije u samoj formi izračunavanja „greške“, kao P i D dejstvo, ali ima neke osobine koje menjuju očekivano ponasanje odziva. Te osobine razmotrićemo u nastavku teksta.

1.6.3 Nagomilavanje integralnog dejstva

Po pravilu, veliki broj fenomena u teoriji PID regulatora može se objasniti u okviru teorije linearnih sistema. Međutim, postoje pojave koje je jedino moguće objasniti i/ili modelovati neliničarnim efektima. Tako npr. ograničenja na vrednosti koje izvršni organ može da ostvari kao što su konačna brzina motora ili ograničenje na otvaranje ventila od 0% do 100% otvorenosti najčešće se modeluju efektom saturacije⁴⁹, slika 1.27.



Slika 1.27: Shema kola automatskog upravljanja, sa naglašenom saturacijom začaćenjem izvršnog organa.

Ša $u(t)$ predstavljeno je izračunato upravljanje, a sa $u'(t)$ predstavljeno je stvarno upravljanje, koje predstavlja ulaz u objekat upravljanja.

Upravljanje $u'(t)$ zadovoljava nametnutu ograničenja na minimum i maksimum vrednost upravljanja.

Ovaj efekat narotčito dolazi do izražaja kod upravljačkih sistema koji imaju više radnih tačaka i kod kojih su promene režima skokovite. Tada se dešava da upravljačka promenljiva dosegne svoje granične vrednosti⁵⁰. Kao posledica toga faktički se prekida povratna sprega i sistem se ponaša kao sistem u otvorenom povratnoj speciji, jer će izvršni organ biti na svojoj graničnoj vrednosti, bez obzira na izračunatu vrednost upravljanja. Tada postoji nezravnina između izračunatog upravljanja, gde je dominantan član integralno dejstvo, i moguće vrednosti upravljanja usled saturacije. Kada integralno dejstvo (površina ispod krive greške) naraste toliko da prevaziđa mogućnost izvršnog organa, kaže-mo da je došlo do nagomilavanja integralnog dejstva (engl. Integral Windup).

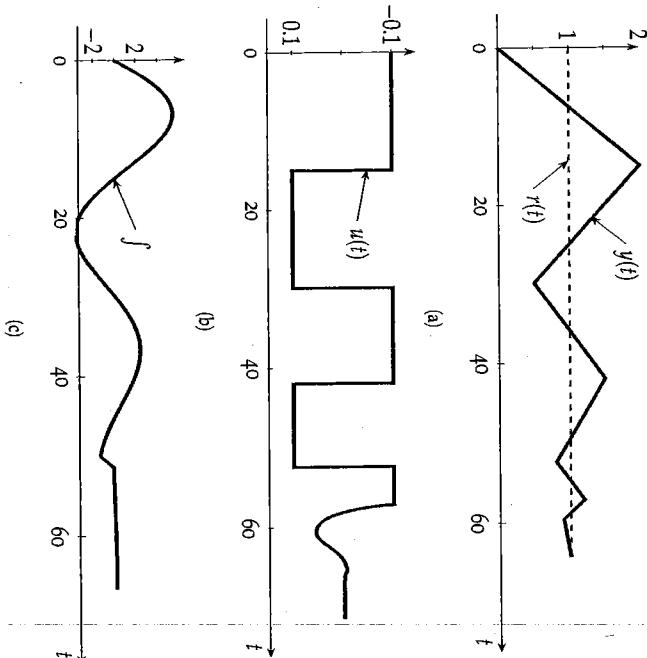
Ovaj efekat najčešće rezultuje velikim preskokom željene vrednosti i daljnjem ponasanjem sistema, kao da se upravlja uz pomoć dvopolozajnog regulatora,

⁴⁹ Uticaj ograničenja na upravljački signal razmatran je u slučaju dvoopolozajnog regulatora i u objašnjenju P dejstva, slika 1.17.

slika 1.28.

Dobro je znati da se nagomilavanje integralnog dejstva najčešće vezuje za procese koji se mogu opisati kao sistemi prvog reda sa vremenskim kašnjenjem. Ova istraživački utvrđena zakonomernost je već dugi niz godina podsetnik i smernika u radu inženjerima u industriji.

Primer nagomilavanja integralnog dejstva dat je na slici 1.28, gde su načinuti odziv sistema $y(t)$, stvarna vrednost upravljanja, kada postoji ograničenje na upravljanja $-0.1 \leq u(t) \leq 0.1$ i izračunata vrednost upravljanja na donjem delu slike, koju zbog fizičkih ograničenja na upravljanje nije moguće ostvariti. Vrednost koju obezbeđuje integralno dejstvo označili smo posebno na donjem delu slike. Jasno se vidi da je integral greške veći od dozvoljene vrednosti upravljanja i dok se ova suma ne smanji ili ne resetuje, upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi nije moguće.⁵¹ Rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstva⁵² veoma je značajan segment projektovanja PID regulatora i tome ćemo posvetiti sledeće poglavije.



Slika 1.28: Problem nagomilavanja integralnog dejstva i saturacija izvršnog organa.

⁵⁰ U skladu sa slikom 1.27, upravljanje $u(t)$ dostigne nametnuta ograničenja na upravljanje i postane $u'(t)$.

⁵¹ Obратiti pažnju na opseg veličina na slici, koji ukazuje da se u relativnim jedinicama željena vrednost naglo promenila, a da je ograničenje $-0.1 \leq u(t) \leq 0.1$ tako lako dostižno.

⁵² Engl. Anti-windup Techniques.

1.6.4 Rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstva

Sustinski postoje dva pristupa rešavanju problema nagomilavanja integralnog dejstva. U prvom pristupu projektovanje upravljanja od samog početka uključuje nelinеarnost, koja je predstavljena saturacionim blokom, a do neophodnih upravljačkih zakonomernosti dolazimo uz oslonac na teoriju nelinijskih upravljačkih sistema. Ovako sveobuhvatan pristup sigurno obezbeđuje željeni kvalitet regulacije, ali već na prvi pogled jasno je da gubimo jednostavnost, koja je karakteristična za konvencionalne regulatore i koja je jedan od razloga za njihovu široku primenu. Sa praktične strane, ovakav pristup dramatično podiže kako troškove projektovanja, tako i puštanja u rad ovih sistema automatiskog upravljanja. U okviru drugog pristupa, PID regulator inicijalno projektujemo zanemarujući uticaj nelinеarnosti, čije uticaje kompenzujemo po potrebi, različitim namenskim tehnikama. Baš ove tehnikе za kompenzaciju nagonilavanja integralnog dejstva predstavljeno u nastavku teksta.

Važno je napomenuti da različite digitalne implementacije PID regulatora na prirodan način daju mogućnost da se ograniči i sistemski reši problem nagonilavanja integralnog dejstva. Čitaoce uputjujemo na poglavje o diskretizaciji PID regulatora, gde će se ove tehnikе posebno razmatrati.

Razmotrićemo tri moguća načina za kompenzaciju uticaja nagonilavanja integralnog dejstva.

- **Izbegavanjem saturacije.** Za ovaj pristup može se reći da je *ad-hoc* i da se popravljaju svedi na intuiciju projektanta i duboko poznavanje procesa od interesa. Sam postupak svedi se na postepeno podizanje referentne vrednosti da bi se izbeglo nagonilavanje integralnog dejstva. Problem je pri strogu namenutim tehnološkim ograničenjima ovo može dovesti do narušavanja kvaliteti regulacije i stoga se retko koristi u projektovanju.

U poslednje vreme primetan je veći broj istraživanja, koja se bave inverznim problemom, koliko možemo da povećamo referentnu vrednost, da bismo izbegli dolazak u zasićenje. Bez obzira na akademski potencijal ove teme, ovakav pristup u praksi je zaista redak.

Kada bi trebalo da sumiramo ovaj pristup, možemo reći da je ovo više inženierski trik, kako neposredno rešiti problem nego sistemski pristup.

- **Uslovnom integracijom.** Ovaj pristup je efektivan i u svojim razinum izvedba-ma našao je široku primenu. Praktično se svedi na isključivanje postupka

integracije,⁵³ ako je izvršni organ u saturaciji. Ovaj postupak često se zove i *clamping*⁵⁴ integralnog dejstva. Tehnike uslovne integracije koje čemo spomenuti vezuju se i za digitalnu implementaciju, pa zasluguju posebnu pažnju, a navešćemo ih nekoliko:

1. Ograničavanjem integralnog dejstva na predefinisanu vrednost.
2. Kada je greška veća od neke unapred zadate vrednosti, zaustavlja se proces integracije. Drugim rečima, u slučaju da je razlika između željene i ostvarene vrednosti upravljane veličine velika, dominantan je uticaj je proporcionalnog dejstva, da bi se izbegla akumulacija greške.
3. Zaustavljanjem integracije u slučaju kada je izvršni organ u saturaciji, odnosno kada $u(t) \neq u'(t)$.
4. Zaustavljanjem integracije u slučaju kada je izvršni organ u saturaciji i kada su upravljački signal i greška istog znaka $u(t)e(t) > 0$.

Prva dva postupka mogu da dovedu do postojanja greške u ustajnjem stanju, što je posledica ograničenja *reset* člana u prvom slučaju ili zbog pogreško određene zone neosetljivosti na integralno dejstvo, u drugom slučaju. Problemi ovog tipa mogu se prevazići primenom trećeg i četvrtog postupka, pri čemu treba voditi računa da poslednji izneti postupak daje više mogućnosti da se upravljačka promenljiva iznesti iz zone saturacije.

- **Ponovnim izmicanjem integralnog dejstva u slučaju zasićenja.** Ako je izvršni organ na gornjoj granici zasićenja, smanji se ulaz integratora za neku konstantu koja je proporcionalna razlici između nezasićenog i zasićenog signala regulatora i obrnuto u slučaju donje granice zasićenja. Blok-dijagram ovog pristupa⁵⁵ predstavljen je na slici 1.29.

Opisani efekat promene greške koja predstavlja ulaz u integralno dejstvo e' , u slučaju da postoji razlika između izračunate i stvarne vrednosti upravljanja matematički se zapisuje na sledeći način

$$e_i = \frac{K}{T_i} e + \frac{1}{T_i} (u' - u), \quad (1.105)$$

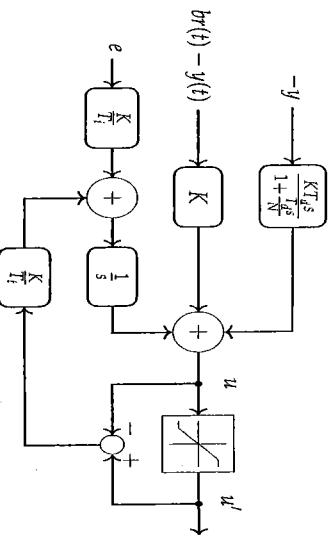
gde je T_i vremenska konstanta, koja ukazuje na brzinu resetovanja integralnog dejstva. Preporuka za izbor vrednosti konstante T_i u slučaju sva tri dejstva (PID) je najčešće

$$T_i = \sqrt{T_r T_d}, \quad (1.106)$$

⁵³ Odnosno da se vrednost greške postavi na nulu i tada integrira.

⁵⁴ Ovaj izraz se retko prevodi na srpski jezik.

⁵⁵ Engleski naziv ovog postupka je *Back-calculation*.



Slika 1.29: Shema PID regulatora sa modifikacijama i strategijom za sprečavanje nagomilavanja integralnog dejstva.

ili u slučaju PI regulatora

$$T_i = T_{i^*}. \quad (1.107)$$

Ova izvedba strategije za sprečavanje nagomilavanje integralnog dejstva, iako je namenski razvijena za analognu implementaciju, veoma često nalazi primenu i u digitalnoj/softverskoj izvedbi, što će se videti i u nastavku teksta.

Konačno, na kraju ovog poglavlja napisaćemo standardnu ISA formu PID regulatora, do koje smo došli kroz modifikacije P i D dejstva, uz napomenu da se prilikom implementacije mora voditi računa i o mogućem nagomilavanju integralnog dejstva. Ova forma često se kolokvijalno naziva i realni PID regulator, koji se možda i najčešće javlja u inženjerskoj praksi

$$PID(s) = K \left[bR(s) - Y(s) \right] + \frac{1}{T_p s} E(s) + \frac{-T_d s Y(s)}{1 + \frac{T_d s}{N}}, \quad (1.108)$$

ili u svojoj servo formi

$$PID(s) = K \left[\left(bR(s) - Y(s) \right) + \frac{1}{T_p s} E(s) + \frac{KT_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \left(\gamma R(s) - Y(s) \right) \right]. \quad (1.109)$$

U serijskoj izvedbi ISA forma zapisuje se na sledeći način

$$PID(s) = \left[\left(b + \frac{1}{sT'_i} \right) \frac{1 + sT'_d}{1 + sT'_d/N} R(s) - \left(1 + \frac{1}{sT'_i} \right) \frac{1 + sT'_d}{1 + sT'_d/N} Y(s) \right]. \quad (1.110)$$

Paralelna forma data je sledećim izrazom

$$PID(s) = K' \left[bR(s) - Y(s) \right] + \frac{K''}{s} E(s) + \frac{K'' s}{1 + sK''/(NK'')} \left[\gamma R(s) - Y(s) \right]. \quad (1.111)$$

Ovaj razi (1.10)-(1.11) imaju centralnu ulogu u našim daljnjim razmatrajućima PID regulatora u njihovoj digitalnoj izvedbi.

1.7 Problemi

Problem 1.1. Funkcija prenosa sistema je $G(s) = \frac{s}{(s+3)^2}$. Odrediti odziv sistema nakon dovoljno dugo vremena ukoliko je ulazni signal $u(t) = 2 \sin(4t)$.

Problem 1.2. Dat je linearni stacionarni sistem opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{s}{s+4}$ koji se pobudjuje sumom prostoperiodičnih signala $u(t) = 3 \sin(t) + \cos(10t - \frac{\pi}{4})$. Proceniti signal na izlazu nakon završetka prelaznog režima.

- Problem 1.3.** Dat je neilinearni sistem opisan matematičkim modelom u prostoru stanja:
- Odrediti sve radne tačke sistema ukoliko je $u_0 = 0$.
 - Linearizovati sistem u okolini radne tačke koja se nalazi na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
 - Komentarisi stabilnost dobijenog linearnog modela.

Problem 1.4. Dat je neilinearni sistem opisan matematičkim modelom:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3x_1(t)x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + \sqrt{x_2^2(t) + 6x_2(t) + 4} \\ y(t) &= 2x_1^2(t) + x_2(t)^2. \end{aligned}$$

- Odrediti sve nelinearne radne tačke sistema ukoliko je $u_0 = 0$.
- Linearizovati sistem u okolini radne tačke $(-2, 0, 0)$.
- Komentarisi stabilnost dobijenog linearnog modela.

Problem 1.5. Sistem je opisan sledećom nelinearnom diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{y}(t) + (y(t) + 1)\dot{y}(t) + y(t)^2 = u$$

- a) Uvođenjem pomoćnih promenljivih $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, zapisati sistem u formi matematičkog modela u prostoru stanja (nelinearnoj formi).

- b) Izračunati stacionarne tačke (mjerne radne tačke) (x_1^*, x_2^*, u^*) .
- c) Linearizovati sistem oko radne tačke $x_1^* = 2$.

Problem 1.6. Dat je proces $G(s) = \frac{1/2}{(s-1)(s+1)}$. Projektorati PD regulator tako da sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi ima statičko pojačanje 2, a da vreme uspona bude 2 sekunde.

Problem 1.7. Dat je objekat upravljanja opisan matematičkim modelom:

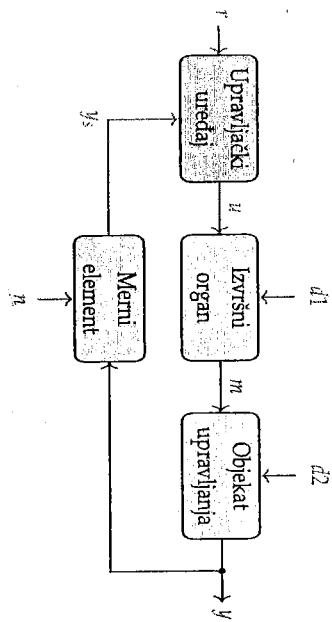
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

- a) Odrediti odziv sistema na step pobudu.

- b) Izabratи strukturu regulatora (P, PI, PD, PID) i podešiti vrednosti parametara regulatora tako da sistem bude stabilan u negativnoj zatvorenoj sprezi, da ima nulu gрешку u ustajrenom stanju na konstantan signal reference i da vremenska dominantna konstanta sistema bude 0.25 sekundi.

2.1 Principska shema digitalnog upravljačkog sistema

Dobro poznata osnovna shema sistema upravljanja (tzv. osnovno kolo SAIJ) prikazana je dijagramom na slici 2.1. Cij prikazane upravljačke petje jeste da se obezbedi da upravljana veličina y što vjeruje prati zadatu (referentnu) vrednost r , uprkos dejstvu spoljnjih poremećaja. S tim ciljem, upravljački uređaj na osnovu poznavanja željene i mernе vrednosti y_s (koju obezbeđuje merni element), generiše upravljački signal u . U savremenim implementacijama, upravljački uređaj je računarski sistem, tako da je upravljački signal najčešće električni signal male snage. Izvišu organ (aktuator) dati signal pojačava, a najčešće mu menja i fizičku prirodu, te manipulativnum signalom m utiče na objekat upravljanja, a samim tim i na upravljanu veličinu.

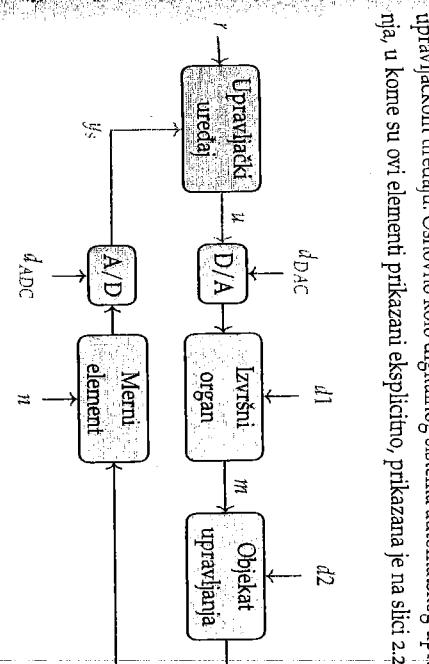


Forenećaj različite prirode mogu delovati u gotovo svim elementima upravljačke petlje. Forenećaji se najčešće mogu opisati kao dodatne ulazne veličine izvršnog organa, objekta upravljanja i mernog uređaja. Signali forenećaja na slici 2.1 označeni su sa d_1 , d_2 i n . Forenećaji koji deluju u direktnoj grani (na izvršni organ i objekat upravljanja) najčešće neposredno utiču na ostvarenu vrednost upravljane veličine, pa se stoga često nazivaju ulaznim forenećajima (engl. *load disturbances*). Nasuprot njima, forenećaji koji deluju u povratnoj grani (na merni uređaj ili tokom prenosa signala od mernog ka upravljačkom uređaju) ne utiču neposredno na vrednost upravljane veličine, ali uzrokuju gresku merenja, te stoga i nazivaju mernim nesigurnostima (a ponekad i „šumom“ merenja). Drugim rečima, njihova je posledica da regulator upravlja na osnovu pogrešne informacije o vrednosti upravljane veličine, te je i njihov uticaj na upravljanu veličinu posredan (kroz neadekvatno dejstvo regulatora).

Većinu dinamičkih sistema možemo podeliti na analogne i digitalne. Analogni sistemi su oni koji na osnovu analognih ulaznih signala generišu analogne izlaze, dok su ulazi i izlazi digitalnih sistema digitalni signali.¹ Digitalni upravljački sistemi su po pravilu hibridni – predstavljaju kombinaciju analognih elemenata (objekat upravljanja, izvršni organ, merni uređaj) i digitalnih elemenata (upravljački uređaj). To znači da se upravljački algoritmi obično implementiraju digitalno (najčešće softverski, u vidu programske rutne koja se izvršava periodično na odgovarajućem digitalnom upravljačkom uređaju).

Sa slike 2.1 jasno je da je neophodno uvesti elemente koji pretvaraju (konvertuju) digitalne upravljačke signale u analogne, a takođe i elemente koji analognе mernе signale konvertuju u digitalne radi daljnje obrade na digitalnom

Slika 2.1: Osnovno kolo sistema automatskog upravljanja. U savremenim implementacijama, upravljački uređaj je najčešće digitalni, dok su ostali elementi obično analogni. Iako postoje mnogočini izuzeci, prikazana struktura odgovara velikoj većini slučajeva sa kojima se streljeno u praksi.



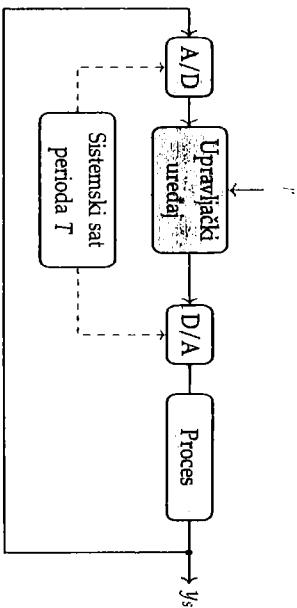
Slika 2.2: Osnovno kolo digitalnog sistema automatskog upravljanja, sa eksplicitnim prikazom elemenata koji vrše analogno-digitalnu i digitalno-analognu konverziju. Dodatno su označeni forenećaji koji nastaju kao posledica nezavisnosti konverzora, d DAC i d ADC.

¹ Preciznu definiciju pojma „analogni“ i „digitalni“ signal daćemo u narednom poglavljiju.

Pri projektovanju upravljačkog algoritma neophodno je odrediti matematički model procesa „sa stanovišta digitalnog regulatora“, odnosno odrediti vezu između digitalnog upravljačkog i digitalnog (ili digitalizovanog) mernog signala. U tom smislu, interesantno je primetiti da se sa stanovišta upravljačkog uređaja svi analogni elementi mogu posmatrati zajedno, odnosno da se redina veza ovih elemenata može posmatrati kao jedinstveni analogni sistem, kojim upravljački uređaj upravlja. Ovaj zdrženi sistem prof. Stojić naziva „objektom upravljanja u širem smislu“, a u savremenoj literaturi obično se naziva postrojenjem ili procesom (engl. *process, plant*) čime se neglazara njegov analogni karakter. S tim u vezi, osnovno kolo digitalnog SAU može se konceptualno projednostaviti, kao što je to učinjeno na slici 2.3. Ovom slikom posebno naglašavamo da su operacije digitalno-analogne i analogno-digitalne konverzije najčešće sinhronizovane, odnosno da se i jedna i druga dešavaju periodično, u intervalu koji nazivamo periodom odabiranja (engl. *sample interval, sample period, sample time*) određenom od strane „sistemske sata“ (engl. *clock*).

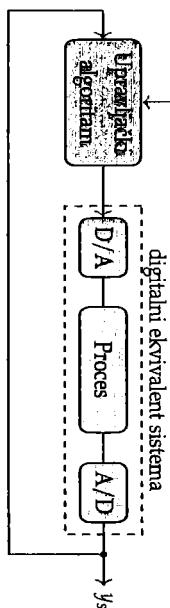
Valja naglasiti da „sistemska sat“ u ovom kontekstu nije isto što i „clock“ digitalnog uređaja.² Sistemski sat je za nas uvek sinhronizacioni element koji obezbeđuje da se procesi A/D i D/A konverzije vrše periodično. S obzirom na to da se mi u daljnjim izlaganjima nećemo baviti elementima implementacije upravljačkih algoritama na najnižem nivou, uvek kada govorimo o sistemskom satu mislimo na sinhronizaciju operacija na nivou jednog perioda odabiranja,

² U toku jednog perioda odabiranja moraju se preuzeti ulazne vrednosti (izvršiti AD konverziju), izvršiti obrata, te računati upravljačke veličine, koje se izdaju na izlazima u postupku DA konverzije. Za izvršenje ovog složenog niza operacija potreban je veliki broj ciklusa „clock“.



te to u nastavku nećemo posebno naglašavati.

Sa stanovišta algoritma upravljanja (naјčešće softverske rutine koja se periodično izvršava na digitalnom procesoru upravljačkog uređaja) ne postoji nijedan razlog zbog koga bi prethodni postupak združivanja elemenata osnovnog kola digitalnog SAU ne bismo nastavili, te „procesu“ pridružili i oba konvertora. Na kraju krajeva, upravljački algoritam jeste diskretni dinamički sistem koji na svom ulazu očekuje jedan niz brojeva, a na svom izlazu generiše drugi takav niz. Sve drugo u sistemu je za njega objekat o čijoj strukturi ne može da sudi na osnovu ulaznih i izlaznih signala. Onda je uobičajeno prethodno razmatrano sliku 2.3 prikazati na sledeći način:



Slika 2.4: Osnovno kolo digitalnog sistema automatskog upravljanja u kome su izvršni organ, objekat upravljanja i merni uređaj prikazani zadržano, kao jedinstveni analogni element: proces.

U dobijenom dijagramu, jasno se uočava algoritam upravljanja kao jedna komponenta sistema i ostatak sistema, kao objekat upravljanja (u „naјširem“ smislu te reči). Ovaj ostatak se često naziva **digitalnim ekivalentom procesa**. Postupak formiranja vremenski diskretnog modela „ekvivalentnog“ vremenski kontinualnom modelu procesa naziva se *diskretizacijom* (ili ponekad: *digitalizacijom*) vremenski kontinualnih (analognih) modela. Ovoj tematici posvećena su poglavljia koja sledi.

Možemo primetiti da je upravljanja veličina, kao stvarni analogni izlaz objek-

Slika 2.3: Osnovno kolo digitalnog SAU u kome su izvršni organ, objekat upravljanja i merni uređaj prikazani zadržano, kao jedinstveni analogni element - proces. Posevno je istaknuta čijenica da su operacije A/D i D/A konverzije međusobno sinhronizovane. Jednostavnosti radi, signali poremećajni nisu prikazani.

radi, signali poremećajni nisu prikazani.

2.2 Klasifikacija signala

Signale možemo definisati kao formalne reprezentacije procesnih i drugih vremenski promenljivih veličina.³ U zavisnosti od načina na koji formalno opisujemo protok vremena, sve signale možemo podeliti u dve osnovne grupe: *vremenski kontinualne i vremenski diskretne*. U slučaju vremenski kontinualnih signala, vreme se posmatra kao neprekidan tok, kontinuum u kome se između nastavku, kao što je to naјčešće i slučaj u literaturi, upravo merenu vrednost izlaza obeležavati sa y .

V. Ponekad se treba ograniciti i posmatrati samo funkcije koje poseduju neku naročitu korisnu zbrojnu neprekidnost, diferenциjalnu neprekidnost, integrabilnost it sl. U drugim slučajevima, prikladno je signale opisivati rešto opšijim matematičkim objektima, kao što su distribucije. U velikoj većini razmatraju u ovoj knjizi, ovakva formalna razmatranja neće biti od interesa, te je za naše potrebe naјčešće savsim dovoljno signale opisati funkcijama.

Podela signala na vremenski diskretnih signala vreme je definisano nizom diskretnih trenutaka. Za svaki od tih trenutaka može se definisati trenutak koji mu neposredno prethodi i trenutak koji mu neposredno sledi.

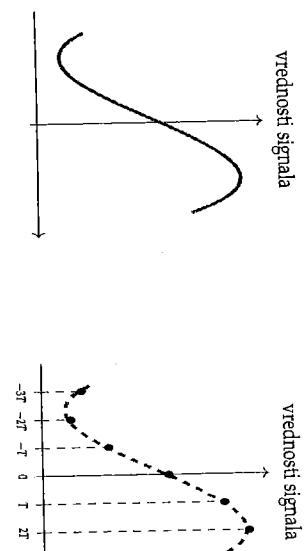
Podela signala na vremenski kontinualne i vremenski odnosno se na pitanje *vremenskih trenutaka u kojima je vrednost signala definisana*, odnosno *trenutaka u kojima može doći do promene vrednosti*. U slučaju vremenski kontinualnih signala vrednost je dobro definisana u svakom trenutku iz intervala od interesa, dok je vrednost vremenski diskretnih signala dobro definisana samo u datumu diskretnog skupa trenutaka odabranja. Može se, međutim, postaviti i pitanje *vrednosti koje signal može poprimiti u proizvoljnom trenutku*. I ovde odgovor može biti dvojak. Signale čije moguće vrednosti pripadaju nekom intervalu nazivamo kontinualnim po nivou (amplitudu), dok signale koji mogu uzimati vrednosti iz nekog unapred datog diskretnog skupa nazivamo diskretnim po nivou (amplitudi).⁴

Signali se naјčešće klasificuju tako što se prethodne dve podele ukrije. Tako analognum signalima nazivamo one koji su kontinualni i po nivou i po amplitudi, relačijum signalima nazivamo one koji su kontinualni u vremenu, ali su diskretni po nivou, impulsnum signalima nazivamo one koji su vremenski diskretni a prostorno kontinualni, te konačno digitalnum signalima nazivamo one koji su diskretni i po vremenu i po nivou.

³ Signal koji su diskretni po nivou često nazivamo i „nivoški kvantovani“ (takođe „amplitudni kvantovani“) signal. Slično, vremenski diskretni signale često nazivamo i vremenski kvantovani.

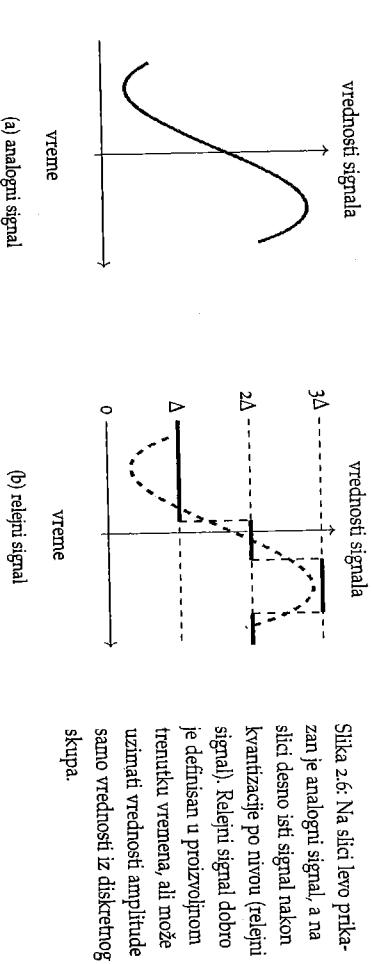
⁴ Signal koji su diskretni po nivou (amplitudu) i diskretizacijom koriste se kao sинонимi.

Na slikama koje slijede ilustrovane su razlike između različitih tipova signala. Prikazani primjeri ilustruju za nas najinteresantniji slučaj kada se, polazeći od analognog signala, različitim kvantizacijama dobivaju impulsni, relejni, te konacno digitalni signal.

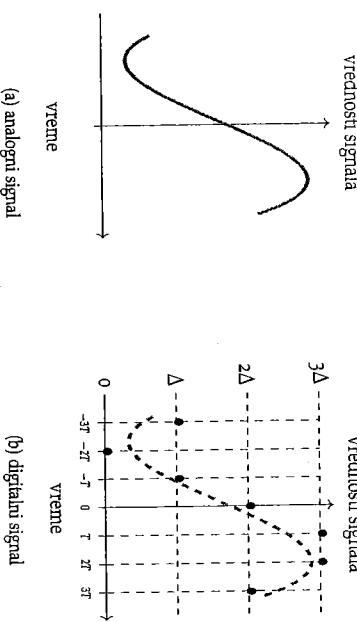


Slika 2.5: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon vremenске kvantizacije (impulsni signal). Vrednosti impulsnog signala mogu biti proizvoljne, ali su dobro definisane samo na diskretnom skupu trenutaka.

Slika 2.6: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon kvantizacije po nivou (relejni signal). Relejni signal dobro je definisan u proizvodnjom trenutku vremena, ali može uzimati vrednosti amplitude samo vrednosti iz diskretnog skupa.



Slika 2.6: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon kvantizacije po nivou (relejni signal). Relejni signal dobro je definisan u proizvodnjom trenutku vremena, ali može uzimati vrednosti amplitude samo vrednosti iz diskretnog skupa.



Slika 2.7: Na slici levo prikazan je analogni signal, a na slici desno isti signal nakon vremenске i kvantizacije po nivou (digitalni signal). Digitalni signal u diskretnim trenutcima vremena uzima vrednosti amplitude iz datog diskretnog skupa.

Tipičan primer analognih signala su fizičke veličine sa kojima se srećemo u svakodnevnom životu: temperatura prostorije u kojoj se nalazimo, vazdušni pritisak, položaj tela u našoj okolini (nas samih, vozila u saobraćaju), njihove brzine itd. Nasuprot tome, tipični primjeri digitalnih signala su veličine koje obradujemo na računaru. Relejni signali su oni koji se dobijaju na izlazu relaja i drugih sličnih diskretnih izvrsnih organa. Impulsni signali koriste se za jednostavljenje teorijskih razmatranja koja se u praksi primenjuju na digitalne signale. Razlog za to je taj što je danas efekat kvantizacije po nivou, usled porasta preciznosti A/D i D/A konvertora, najčešće sekundaran, što se ne može reći za postupak kvantizacije po vremenu. Sa druge strane uvrštanje efekata amplitudske kvantizacije u značajnoj meri usložjava teorijska razmatranja. Imajući to u vidu, teorija digitalnih sistema se najčešće izlaze uz oslonac na formalizam impulsnih signala, pri čemu se efekti kvantizacije po nivou razmatraju naknadno, onda kada za tim ima potrebe. Ove tvrdnje čemo bliže pojasniti u poglavljima koja slijede.

2.3 A/D i D/A konverzija

2.3.1 Analogno-digitalna konverzija

U procesu diskretizacije, vrednosti analognih signala beležene samo u određenim, jasno definisanim vremenskim trenutcima koje nazivamo trenutima odbicanja, tj. trenucima odbikanja. Vrednosti signala između trenutaka oda-

U toku procesa A/D konverzije analogni signal se zamjenjuje digitalnim kroz postupke vremenske i amplitudske kvantizacije.

Tabela 2.1: Podela signala u odnosu na diskretizaciju (kvantizaciju) po vremenu i nivou

	vremenski	
kontinualni	diskretni	
AMALITUDSKI	ANALOGNI	IMPUISNI
DISKRETNI	RELEJNI	DIGITALNI

biranja se odbacuju, tj. ne uzimaju se u obzir. U većoj većini praktično interesantnih slučajeva interval između dva trenutka odabranja je konstantne dužine, te je samo odabiranje periodičan proces. U tim slučajevima, interval između dva trenutka odabiranja naziva se periodom odabiranja, a za samu odabiranje se kaže da je jednoliko ili uniformno. Period odabiranja se obično obeležava sa T_s .

Operaciju vremenskog odbirkovanja obeležavaćemo zvezdicom u gornjem desnom ugлу (odnosno gornjim desnim indeksom). Drugim rečima, ukoliko je f^* analogni signal, onda ćemo sa f^* obeležavati isti taj signal kvantovan (diskretizovan) po vremenu. Pretpostavljeno, bez gubitka opštosti, da je proces odbirkovanja sinhronizovan sa profetnum (nultum) vremenskim trenutkom. Drugim rečima, pretpostavljeno da se odbirkovanje vrši u trenucima $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $t_2 = 2T$, itd. Upošte, k-ti odbirak užima se u trenutku $t_k = kT$, gde je T period odbirkovanja. Signal f^* možemo zapisati u sledećem obliku

$$f^*(t) = \begin{cases} f(kT), & t = kT \\ ? , & t \neq kT \end{cases} \quad (2.1)$$

U intervalu između dva trenutka odabiranja vrednost vremenski odbirkovanog signala nije definisana, što je i jasno naglašeno u prethodnom izrazu (2.1).

Podsećamo da signal f^* koji je vremenski diskretni a amplitudski kontinualan nazivamo impulsnim signalom. Uvedeni naziv biće opravdan izlaganjima koja slijede. Vremenska kvantizacija ilustrovana je na slici 2-5.

Osim vremenskog, u procesu diskretizacije dolazi i do amplitudske odbirkovanja (kvantizacije) signala. Naime, vrednosti signala pohranjuju se u digitalne registre (memorijske lokacije) konačne širine. Širina registra definisuje se brojem bita i određuje rezoluciju A/D konvertora. U praksi se najčešće streći konvertori širine 8, 12 i 16 bita. U register širine n bita može biti pohranjeno 2^n različitih vrednosti. Otuđa je razlika između dve uzastopne vrednosti koje se mogu prikazati u digitalnom registru širine n bita izražena u procentima punog opsega

$$\Delta = \text{LSB} = \frac{100\%}{2^n - 1}$$

Jasno, što je Δ manje, odnosno što je n veće, to je veća preciznost A/D konvertora i manja je greška koju konverzija unosi. Skraćenica LSB potiče od engleskog termina „Least Significant Bit“, u značenju „bit najmanje značajnosti“.

³ U okviru ovog teksta u najvećem broju slučajeva posmatrateno je klijentivo stanje jednolikog odbirkovanja, te to dalje nećemo posebno naglašavati.

Pri promeni digitalnog zapisa vrednosti signala za jedan na najmanje značajnom mestu, odgovarajuća promena reprezentovane analogue veličine je Δ . Nije teško zaključiti da je greška koja se unosi u procesu amplitudske kvantizacije manja ili jednak $\frac{\Delta}{2}$. Ukoliko je merni uređaj podešen tako da meri vrednosti signala u opsegu $[f_{\min}, f_{\max}]$, tada možemo pisati

$$|\bar{f}(t) - (f_{\min} + \ell\Delta)| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (2.2)$$

Pretходni izraz ukazuje na to da će nakon amplitudske kvantizacije signali uzeći najblizu raspoloživu diskretnu vrednost. Kao što znamo, signal \bar{f} koji je odbirkovan samo po nivou, ali ne i vremenski, nazivamo **relejnim signalom**. Relejni signal je dobro definisan u svakom trenutku vremena, vrednosti može menjati u bloku trenutku, ali može uzimati samo vrednosti iz diskretnog skupa $f_{\min} + \ell\Delta$, $\ell \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Proces amplitudske kvantizacije ilustrovani je slikom 2-6.

Da rezimiramo, postupkom A/D konverzije obuhvaćena su oba procesa, i proces vremenske i proces amplitudske kvantizacije, te se kao rezultat dobija digitalni signal za koji bi se mogla koristiti oznaka

$$\tilde{f}^*(t) = \begin{cases} f_{\min} + \ell\Delta, & t = kT, f(kT) \in f_{\min} + [(\ell - \frac{1}{2})\Delta, (\ell + \frac{1}{2})\Delta) \\ ? , & t \neq kT \end{cases} \quad (2.4)$$

Dijagrami na slici 2-7 ilustruju efekte vremenske i amplitudske kvantizacije signala, odnosno promene koje u analogni signal unosi postupak analogno-digitalne konverzije. Međutim, sa praktičnog stanovišta u postupcima analize, projektovanja i implementacije digitalnih sistema upravljanja i obrade signala najčešće je efekat amplitudske kvantizacije sekundaran, te se može zanemariti u svim teorijskim razmatranjima. Zato ćemo u nastavku A/D konvertora posmatrati kao elemente koji unose isključivo vremensku kvantizaciju a sve posmatrane digitalne signale zamerujemo impulsnim, što nećemo posebno naglašavati. Signal f^* često ćemo nazirati površkom odbiraka signala f .

⁴ Realni A/D konvertor nisu podjednako precizni čitavom širokom radnog opsega. Međutim, posmatrati neizmeni efekat je sekundaran i nije od većeg značaja za daljnja razmatranja u okviru ovog teksta, te ga od sada zanemarujemo. Po pravilu, broj bita, koji se koristi prilikom konverzije, mora biti veći od vrednosti značajne, što praktički znači da je vremenska diskretnizacija dominanta i da ćemo samo nju matematički opisivati u nastavku.

Čitacu skećemo pažnju da se u registrima digitalnog uređaja zapisuju samo ceći brojevi $0, 1, 2, \dots, n - 1$, a da se ovi brojevi tek na osnovu poznavanja klasifikacije memorijskog uređaja i svojstava A/D konvertora interpretiraju kao brojne vrednosti $f_{\min}, f_{\max}, \dots, f_{\min} + 2\Delta, \dots, f_{\max} + (n - 1)\Delta$. Kvantizacija, kako vremenska tako i amplitudska, izobiljeva signale. Medutim, postoji bina razlika između prirode izoblićenja koje unose vremensko i amplitudske kvantizacije u memoriju. Za sko odbirkovanje. Postupak **memorijske kvantizacije je linearn**. Za bilo koja dva signala (f_1 i f_2) izabilo je da skalarne veličine a_1 i a_2 važi

$$\overline{(af(t) + bg(t))}^* = af^*(t) + bg^*(t).$$

Nasuprot tome, proces kvantizacije po nivou je neizmenan. Onuđa je formalna analiza strukture vremenske kvantizacije daleko jednostavnija od formalne analize efekata amplitudske. U formalnom sistemu automatskog upravljanja odbirkovanje po nivou, i.e. dominantni efekat. Kvantizacija po nivou se najčešće može nemam. To je upravo pristup koji često privlači u okviru ovog teksta.

2.3.2 Digitalno-analogna konverzija

U procesu digitalno-analogne konverzije vrši se aproksimacija analognog signala na osnovu njegovih odabiraka. Postupak rekonstrukcije vrednosti funkcije između trenutaka odabiranja naziva se i interpolacija. U najvećem broju slučajeva vrednosti signala se jednostavno zadržavaju (ostaju nepromenjene) između dva uzastopna trenutka odabiranja. U tom slučaju, digitalno-analogni konverzator se uspešno opisuje kao kolo zadrške nultog reda (engl. Zero Order Hold, ZOH), čiji je princip rada ilustrovan slikom 2.8. U literaturi se spominju i sljednji postupci D/A konverzije, ali su oni od manje praktičnog značaja, te se njima nećemo baviti na ovom mestu.⁷



⁷Kompletnosti radi, nešto detaljnija razmatranja na temu složenijih mehanizama zadrške signala prikazaćemo kasnije, kada budeмо govorili o funkcijama prenosa kola zadrške.

Matematički model kola zadrške nultog reda, izvršeno u poglavljima, koja sledi. Zasada je bitno samo uočiti da, ukoliko je f_k povorka odabiraka na ulazu kola zadrške (multog reda), tada je signal na njegovom izlazu

$$f_h(t) = f_k \text{ za svako } t \text{ iz intervala } [kT, kT + T]$$

gde je T period odabiranja.

Poput A/D konvertora, i D/A konvertori imaju svoju preciznost, iskazanu brojem bita izlaznog registra (gde su najčešće stetane vrednosti 8, 12, a veoma retko 16 bita). Širina izlaznog registra D/A konvertora određuje broj različitih vrednosti koje izlazi „analogni“ upravljački signal može uzeti. Kada se ovakav D/A konvertor veže sa analognim izvršnim organom (kao što su recimo motori kontinualno podesive brzine, servo-ventilii i sl.), i manipulativna promenljiva

(veličina kojom zaista utičemo na objekat upravljanja) može se smatrati analognom.

Treba primetiti da je, iz tehnoloških razloga, veliki broj izvršnih organa rečenog tipa (sa malim brojem različitih vrednosti izlaznog signala koje mogu prizvesti). Takvi su svi izvršni organi koji su konstruisani pomocu prekidačkih elemenata, kao što su energetski prevarači, brizgaljke za gorivo u mnogim motorima sa unutrašnjim sagorevanjem, ventilii „on-off“ tipa, itd. Sva naša razmatranja primenjuju se na ovom slučaju, pod uslovom da je stanje ovih prekidačkih elemenata moguće menjati veoma brzo (kao što je slučaj kod svih tranzistorских prekidačа). U tom slučaju, primenjuje se tehniku **impulsno-širinske modulacije** (engl. Pulse Width Modulation – PWM).

Bez želje da užazimo u detalje, bliže ćemo objasniti ovaj postupak na primjeru relejnog izvršnog organa, koji može biti ili potpuno „otvoren“ ili potpuno „zatvoren“. Ilustracija je prikazana dijagramu na slikama koje slede. Slika

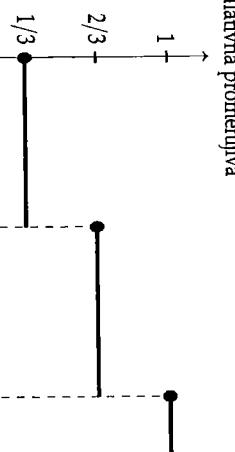
2.9 (gore) prikazuje slučaj u kom je izvršni organ sposoban da „u srednjem“ generiše manipulativnu promenljivu prizovojne međuvrednosti.⁸ Povorka odabiraka na osnovu koje treba generisati analogni upravljački signal prikazana je punim kružićima, dok su odgovarajuće vrednosti manipulativne promenljive prikazane putem linijom. Jednostavnosti radi pretpostavljeno je da izvršni organ ne pojačava signal, te da su vrednosti manipulativne i upravljačke promenljive brojno jednakе. Situacija u kojoj je izvršni organ relejnog tipa, a kontinualna vrednost manipulativne promenljive se postiže „u srednjem“ primenom impulsno-širinske modulacije na osnovu identične povorkе impulsa kao u prethodnom slučaju, prikazan je narednom slikom 2.9 (dole).

Ključna stvar koju treba uočiti na dijagramu prikazanom na slici 2.9 (dole)

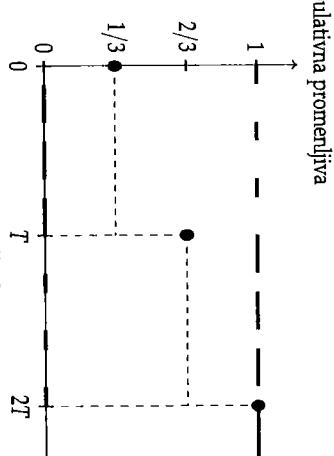
jest da je srednja vrednost manipulativne promenljive tokom jednog perioda odabiranja jednak vrednosti koju bi generisalo kolo zadrške nultog reda. Umesto da u prvom periodu podesi vrednost manipulativne na izlazu na 1/3, impulsno-širinski modulator održava vrednost jednaku jedinici tokom jedne trećine perioda, dok je u ostalim periodama vrednost manipulativne promenljive jednaka nuli. Dakle, posmatrano usrednjeno, impulsno-širinska modulacija može se posmatrati kao jedna specifična implementacija kola zadrške nultog reda. S obzirom na to da je velika većina objekata upravljanja niskopropusnog tipa, u najvećem broju slučajeva visokofrekventne komponente manipulativne promenljive se filtriraju, tako da se ove brze oscilacije ulaza ni ne vide na vremenskom profilu izlazne (upravljanje) veličine. Ovo svojstvo još više će doći do

⁸Promenom faktora ispunje (odnosno promenom udelu vremena u kojim su aktivne „donja“ i „gornja“ vrednost relejnog signala) srednja vrednost modulisanih signala unutar jedne periode impulsno-širinske modulacije može se postaviti na prizovojnu međuvrednost,

izražaja ukoliko je učestanost prekidanja veća. U praksi je stoga uobičajeno da se unutar jedne periode odabiranja izvrši veći broj perioda impulsno-širinske modulacije, kao što je prikazano na slici 2.10, gde se unutar jedne periode odbiranja izvrše tri perioda PWM-a.



Slika 2.9: Illustracija postupka D/A konverzije u slučaju kada je izvršni organ sposoban da generiše manipulativnu promenljivu kontinualno (gornja slika). Na donjoj slici prikazan je slučaj kada je izvršni organ sposoban da generiše manipulativnu promenljivu relejno, u dva nivoa, a period impulsno-širinske modulacije poklapa se sa periodom odabiranja.

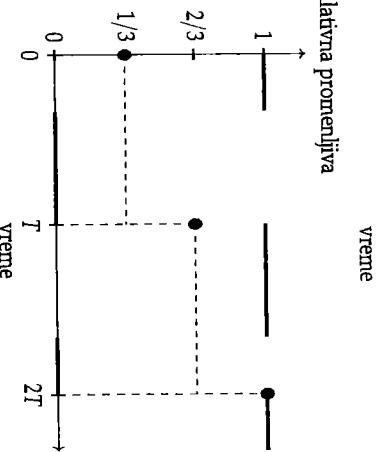


Slika 2.10: Illustracija postupka D/A konverzije u slučaju kada je izvršni organ sposoban da generiše manipulativnu promenljivu kontinualno.

Imajući u vidu to da se impulsno-širinska modulacija može smatrati (u ovom kontekstu) tek specifičnom implementacijom postupka zadrške nultog reda, u daljem tekstu se njome nećemo posebno baviti. Bitno je napomenuti da se ovakav pristup generisanju kontinualnog signala na osnovu povorke odbiraka može primeniti i kada je izvršni organ sposoban da generiše veći broj relejnih nivoa. Važan praktičan primer jeste takozvana „modulacija prostornih vektora“ (engl. space vector modulator) koja ima široku primenu u energetici.

2.4 Matematički model odabiranja i zadrške

U okviru ovog poglavlja razmorićemo matematičke modele procesa analogo-digitalne i digitalno-analogne konverzije⁹, te izmene u matematičkim formalizmima koje nastaju usled prisustva ovih elemenata u sistemima automatskog upravljanja. Konkretno, u ovom poglavlju posmatratćemo deformacije signala, odnosno gubitak informacija koji nastaje usled postupaka A/D i D/A konverzije. Pretpostavćemo, pri tome, da sam upravljački uređaj ne vrši nikakvu dodatnu obradu, već vrednosti odbiraka dobijene u procesu analogno-digitalne konverzije neizmenjene prosledjuje digitalno-analognom konvertoru, kao što je shematski prikazano na slici 2.11.

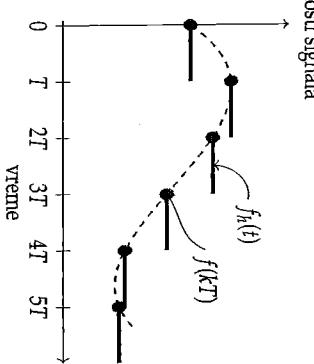


⁹Kao što je poznato matematički modeli su svojevrsna karikatura realnog sistema. Niuma nragašavamo dominantne osobine sistema, a neke manje važne svestro zanemarujemo. Tako čemo se i da koncentrisati na efekte kvantizacije po vremenu, dok čemo efekte kvantizacije po nivou potpuno zanemariti. Iz prethodnog izlaganja je da je ova odluka sasvim opravdana.



Slika 2.11: A/D i D/A konverzija u postupku izvođenja matematičkog modela odabiranja i zadrške.

Prateći tok signala na ovoj slici, vidimo da analogni signal $f(t)$, koji prolaskom kroz A/D konvertor postaje niz odabiraka $f(kT)$, da bi se potom D/A konverzijom pretvorio u novi analogni signal koji smo obeležili sa $f_h(t)$. Važno je primećiti da signal sa izlaza $f_h(t)$ nije jednak signalu sa ulazom $f(t)$, bez obzira na to što nije izvršena nikakva suštinska obrada signala, već „samo“ transformacija u diskretan oblik i odmah zatim vraćanje u kontinualnu formu. Ora izmjenjenost ulaznog signala je logična posledica gubitka dela informacije prilikom diskretizacije i načina interpolacije karakteristične za D/A konverziju (kao što je detaljno objašnjeno u prethodnim poglavljima). Analogni signali f i f_h kao i povorka odabiraka $f(kT)$, upoređuju se prikazani na slici 2.12.



Slika 2.12: Analogni signal f (prikazan isprekidanim linijama), povorka odabiraka $f(kT)$ dobijena odabiranjem sa periodom T (prikazana kružićima), te signal f_h na izlazu digitalno-analognog konvertora (prikazan purom linijom).

Određićemo sada vezu između signala f_h i f . Pošto su oba ova signala analogna (a samim tim i vremenski kontinualna), prirodno je njihovu vezu tražiti pomoću Laplasove transformacije. Zato prvo treba odrediti Laplasovu transformaciju $F_h(s) = \mathcal{L}\{f_h(t)\}$. Nije teško zaključiti da je

$$\begin{aligned} f_h(t) &= f(0)[h(t) - h(t-T)] + \\ &+ f(T)[h(t-T) - h(t-2T)] + \\ &+ f(2T)[h(t-2T) - h(t-3T)] + \\ &+ f(3T)[h(t-3T) - h(t-4T)] + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

odnosno, u kompaktnoj formi

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [h(t - kT) - h(t - kT - T)], \quad (2.6)$$

gde $h(t)$ označava Heavisajdov jedinični odskočni signal (videti i komentar na margini). Pošto je $\mathcal{L}\{h(t - \tau)\} = \frac{1}{s}e^{-s\tau}$, bez većih problema nalazimo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_h(t)\} &= F_h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \frac{1}{s} (e^{-skT} - e^{-s(kT+T)}) \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Izraz (2.7) ima centralnu ulogu u našim budućim razmatranjima. Veliki broj osobića diskretnih sistema upravo sledi iz ovog izraza i bice predmet naših razmatranja u poglavljima koja slede. Ovi izraz (2.7) objedinjuje matematički model odabiranja i zadrške, odnosno A/D i D/A konverzije. Vrđimo, a to će biti i pokazano u nastavku, da prvi činilac ovog izraza $\frac{1 - e^{-sT}}{s}$ opisuje proces digitalno-analogne konverzije, dok drugi činilac sustinski predstavlja Laplasovu transformaciju odabirkovanog signala. Taj drugi činilac obično se obeležava sa $F^*(s)$, te možemo pisati

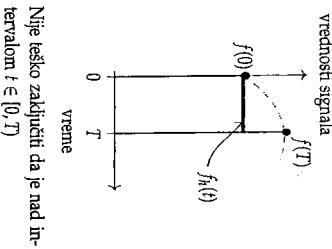
$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT}. \quad (2.8)$$

2.4.1 Kompleksni lik povorce odabiraka

Da bismo pokazali da se izrazom (2.8) zaista opisuje efekat odabirkovanja signala, odredićemo njegovu inverznu Laplasovu transformaciju. Pošto je $\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \text{niz bojeva}$, dok je f^* analogni $\delta(t)$, odnosno $\mathcal{L}^{-1}[e^{-skT}] = \delta(t - kT)$, gde je δ Dirakov delta impuls, sledi da je

$$f^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F^*(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT).$$

Vidimo da f^* nije formalno identična povorce odabiraka $f(kT)$, ali se može složiti da nosi istu informaciju (iste vrednosti odabiraka u istom redosledu). Dobijeni signal f^* , odnosno povorku Dirakovih impulsa modulisana vrednostima signala u trenucima odabiranja, nazivamo idealno diskretizovanim signalom. Kada govorimo o kompleksnom liku povorce odabiraka, uvek mislimo na Laplasovu transformaciju idealno diskretizovanog signala.



Nije teško zaključiti da je nad intervalom $t \in [0, T]$

$$f_h(t) = f(0)[h(t) - h(t - T)],$$

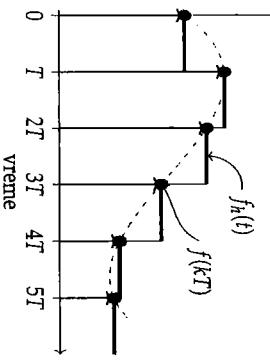
gdje je $h(t)$ Heavisajdov jedinični odskočni signal. Uopšte, za projektovanje celobrojnog neregativnog k , nad intervalom $t \in [kT, kT + T]$ važi da je

$$f_h(t) = f(kT) \times [h(t - kT) - h(t - kT - T)].$$

Superpozicijom odgovarajućih izraza nad intervalima $t \in [T, 2T], t \in [2T, 3T], \dots$ dolazimo do opšeg izraza (2.6).

Mozemo da primetimo da je $f(kT)$ povorka odabiraka (niz realnih brojeva), dok je f^* analogni signal. Sa jedne strane, očekivano je da nam Laplasova transformacija koja je definisana za vremenski kontinualne signale neće, kao svoju inverziju, dati vremenski diskretan signal. Ipak razlika između povorce odabiraka i idealno diskretizovanog signala je formalna, ali je suštinska, s obzirom na to da je informacija koju oni nose identična, te da se bilo koji postupak obrade koji se može definisati nad jednim može definisati i nad drugim signalom.

vrednosti signala



Slika 2.13: Signalni pre i posle idealnog odabirачa i kola zadrške nultog reda. Vrednosti odabiraka signala prikazane su kružićima, dok je idealno odbirkovan signal prikazan u vidi povorke Dirakovih impulsa.

2.4.2 Funkcija prenosa kola zadrške

Imajući u vidu to da smo pokazali da drugi činičar u izrazu (2.7) opisuje efekte diskretizacije po vremenu, prvi činičar mora opisivati uticaj D/A konverzije, odnosno preciznije uticaj kola zadrške. Videli smo da se taj činičar opisuje izrazom:

$$G_{\text{M0}}(s) = \frac{F_h(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (2.9)$$

U svim dosadašnjim izlaganjima pretpostavili smo da D/A konvertor deluje kao „produžavač“ signala, odnosno da na svom izlazu daje deo po deo konstantan signal¹⁰ čija je vrednost jednaka vrednosti poslednjeg „videnog“ odabiraka. Sklop koji deluje na ovakav način naziva se kolom zadrške nultog reda, a izraz (6.1) predstavlja njegovu funkciju prenosa.

Potpunoši radi, sada ćemo se podrobnoje osmrnuti na problem rekonstrukcije vrednosti signala između dva trenutka odabiranja, odnosno na postupak D/A konverzije. Najčešći način rekonstrukcije signala ovog tipa je polinomijska interpolacija. Tako npr. ako želimo da utvrdimo vrednost signala $f_h(t)$ između dva trenutka odabiranja $kT \leq t < (k+1)T$, možemo iskoristiti Tejlorovu formu razvoja u red, koristeći poznate vrednosti signala f i njegovih izroda) u tački kT

$$f_h(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t - kT)^2 + \dots \quad (2.10)$$

Ako se prilikom rekonstrukcije signala (2.10) uzme u obzir samo prvi član izraza sa desne strane znaka jednakosti, dobijamo

$$f_h(t) \approx f(kT), \quad t \in [kT, kT + T]. \quad (2.11)$$

Takav D/A konvertor predstavlja kolo zadrške nultog reda.¹¹ Ova aproksimacija je svakako najmanje tačna, ali svakako najefektivnija sa stanovišta implementacije, što je čini i praktično najinteresantijom.

Na druge strane, ako se u rekonstrukciji signala (2.10) koriste prva dva člana izraza sa desne strane znaka jednakosti, nalazimo

$$f_h(t) \approx f(kT) + f'(kT)(t - kT), \quad t \in [kT, kT + T], \quad (2.12)$$

S obzirom na to da u diskretnoj implementaciji izvodi signala nisu neposredno raspoloživi, izraz $f'(kT)$ moramo da aproksimiramo. Pošto je cilj nepraviti ostvariv (dakle kauzalan) uređaj, pri toj aproksimaciji primuđeni smo da koristimo samo tekući i prethodne odabire, nikako buduće. Otuda umesto izraza (2.12) koristimo izraz

$$f_h(t) \approx f(kT) + \frac{f(kT) - f(kT - T)}{T}(t - kT), \quad t \in [kT, kT + T], \quad (2.13)$$

Kolo zadrške nultog reda. Funkciju prenosa kola zadrške ćemo sada izvesti ne-posebno. To je kolo koje za datu jedinicu Dirakov impuls na ulazu odgovara konacnium impulsom visine 1 i širine T (trajanje izlaznog impulsa jednako je periodu odabiranja). To je, dakle, element čiji je impulsni odziv

$$\mathcal{L}^{-1}\{G_{\text{M0}}(s)\} = h(t) - h(t - T).$$

Neposredno se proverava da je Laplasova transformacija izraza sa desne strane upravo jednaka izrazu (6.1).

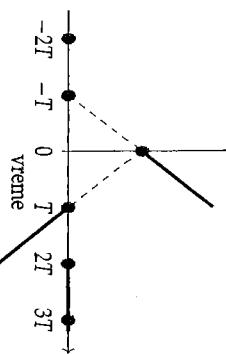
Kolo zadrške prug reda. Za dati jedinični impuls na ulazu, kolo zadrške prug reda odgovara signalom prikazanim na slici 2.14.

Impulsni odziv ovakvog kola zadrške može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} f_h(t) &= \frac{t+T}{T} [h(t) - h(t - T)] + \frac{T-t}{T} [h(t - T) - h(t - 2T)] \\ &= h(t) + \frac{t}{T} h(t) - 2 \frac{t-T}{T} h(t - T) - 2h(t - T) + \frac{t-2T}{T} h(t - 2T) + h(t - 2T) \end{aligned}$$

¹¹ Sada je jasno da se atribut „nultog reda“ odnosi na red polinoma, koji se koristi u interpolaciji sigrala između dva trenutka odbiranja.

Slika 2.14: Impulsni odziv kola zadrške prvog reda



Slika 2.14: Impulsni odziv kola zadrške prvog reda, zato što je polazna polinomska aproksimacija prvog reda.

$$\begin{aligned} G_{H1}(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{T^2} - 2 \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{T^2} \right] e^{-sT} + \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{T^2} \right] e^{-2sT} \\ &= \frac{sT+1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})^2. \end{aligned}$$

Bez obzira na to što je ova aproksimacija po pravilu tačnja nego kod kola zadrške nultog reda, praktična implementacija je značajno složenija. Naime, za numeričku interpretaciju diferencijala prvog reda, potrebno nam je poznavanje vrednosti signala u bar dve tačke odabiranja (konkretno, potrebno je da znamo vrednosti odabiraka $f(kT)$ i $f(kT - T)$) što dodatno usložnjava konstrukciju D/A konvertora, koji sad zahteva memoriski element te dodatne sklopove sposobne da generišu linearno promenljivi signal na izlazu.

Opisano kolo zadrške prvog reda ponekad se naziva i prediktivnim kolom zadrške prvog reda. Jedna od mera ovog kola, koja jasno dolazi do izražaja u slučajevima kada je perioda odabiranja relativno velika, jeste prisustvo „skokova“ u rekonstruisanom signalu uzrokovanih naglon promenom vrednosti odabiraka na ulazu. Alternativno, može se konstruisati i tzv. kolo prvog reda sa kašnjenjem, koje signal umutar date periode odabiranja rekonstruiše na osnovu linearne interpolacije signala u prethodnoj periodi. Kod ovakve implementacije do naglih skokova ne dolazi, ali tu dolazi do neslaganja vrednosti odabiraka i rekonstruisanog signala čak i u trenutku odabiranja.

2.4.3 Matematički model odabiranja i zadrške – Rezime

Kada se proces odabiranja opisuje formalno, efekte kvantizacije po nivou zanemarujuemo, a povorke odabiraka zamenjujemo odgovarajućim idealno diskretovanim signalima (povorkama impulsata). Analogno-digitalni konvertor se u takvom formalizmu opisuje idealnim odabiracem, a digitalno-analogni konvertor kolumn zadrške (po pravilu nultog reda), odnosno funkcijom prenosa $G_{H1}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$. Odgovarajući blok-dijagram, ekivalentan onome prethodno poslednjeg i preposednjeg odbirka.

Slika 2.15: Postupak A/D i D/A konverzije, prikazan u formi pogodnoj za izvođenje matematičkog modela. Numerička interpretacija diferencijala je od posebnog značaja u digitalnim upravljačkim sistemima i njome ćemo se detaljnije baviti u poglavljima, koji slijede.

2.5 Osobine idealno odabirkovanog signala

Sada ćemo ispitati vezu između frekvencijskog sadržaja (spektralnih svojstava) polaznog analognog signala i njemu odgovarajućeg idealno odabirkovanog signala. Konkretno, bavimo se pitanjem pod kojim se usloviša i na koji način originalan, analogni signal može rekonstruisati iz svojih odbiraka.

U tom cilju, posmatraćemo postupak odabirkovanja kao postupak amplitudne modulacije povorce jediničnih Dirakovih impulsata. Neka je $s(t)$ odgovarajuća povorka impulsa

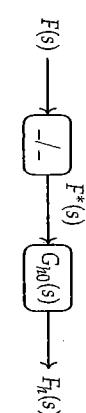
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Idealan odbirkovani signal možemo prikazati u vidu proizvoda $f^*(t) = f(t)s(t)$, kao što je prikazano dijogramom na slici 2.16.

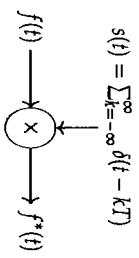
Interesantno je primetiti da je povorka jediničnih Dirakovih impulsata periodičan signal sa periodom jednakim periodu odabiranja. Poznato je da se svaki periodičan signal može razviti u red kompleksnih eksponentijalnih funkcija

čijom se Laplasovom transformacijom dolazi do funkcije prenosa kola zadrške prvog reda z .

¹²Prvog reda, zato što je polazna polinomska aproksimacija prvog reda.



Slika 2.15: Postupak A/D i D/A konverzije, prikazan u formi pogodnoj za izvođenje matematičkog modela. Numerička interpretacija diferencijala je od posebnog značaja u digitalnim upravljačkim sistemima i njome ćemo se detaljnije baviti u poglavljima, koji slijede.



- Furijev red. Konkretno, svaki periodičan signal s sa periodom T može se zapisati u obliku

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

gde se koeficijenti razvoja računaju na osnovu izraza

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt.$$

Pri izračunavanju koeficijenata Furijevog razvoja integracija se vrši u intervalu $(-T/2, T/2)$. Pošto impulsi deluju u trenucima odabiranja, dakle u trenucima $0, \pm T, \pm 2T, \dots$, jedini impuls aktivан u intervalu integracije jeste centralni impuls, $\delta(t)$. Odатле sledi da je

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T},$$

te je posledično

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}. \quad (2.14)$$

Razvojem povorki Dirakovih impulsa u Furijev red, data je povorka prikazana u vidu superpozicije kompleksnih eksponencijalnih signala. Koristeći se dobro poznatom teoremom o pomeranju kompleksnog lika Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a),$$

koga važi za svako realno ili kompleksno a , neposredno nalazimo vezu između Laplasove transformacije analognog signala i Laplasove transformacije njemu odgovarajućeg idealno odbirkovanog signala. Konkretno, idealno odbirkovani signal možemo zapisati u obliku

$$f^*(t) = f(t)s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)e^{jn\frac{2\pi}{T}t}.$$

Slika 2.16: Postupak idealnog odbirkovanja kao amplitudska modulacija povorce jediničnih Dirakovih impulsa.

Stoga je

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\},$$

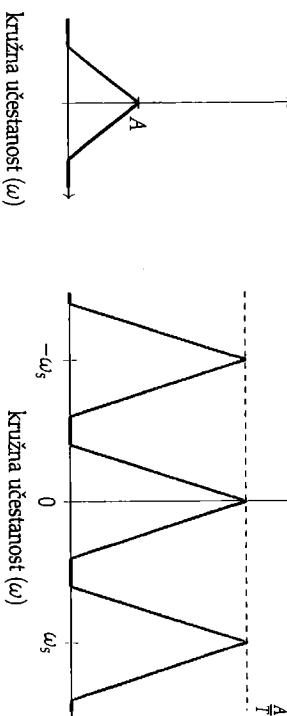
odnosno

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\frac{2\pi}{T}). \quad (2.15)$$

Prethodno dobijeni izraz jasno iskazuje vezu između kompleksnih likova idealno odbirkovanog i polaznog, analognog signala. Primarni efekat odbirkovanja jeste da se spektar analognog signala beskonačno multiplicira, preslikava simetrično oko snakog celobrojnog umnoška kružne učestanosti odabiranja. Ova pojava, shematski je ilustrovana dijagramom na slici 2.18. Nakon odbirkovanja polazni spektar preslikava se oko učestanosti $\pm \frac{2\pi}{T}, \pm 2\frac{2\pi}{T}, \dots$. Ukupni spektar nakon odbirkovanja dobija se zbrajanjem svih slika originalnog spektra.

amplitudski spektar $|F(j\omega)|$

amplitudski spektar $|F^*(j\omega)|$

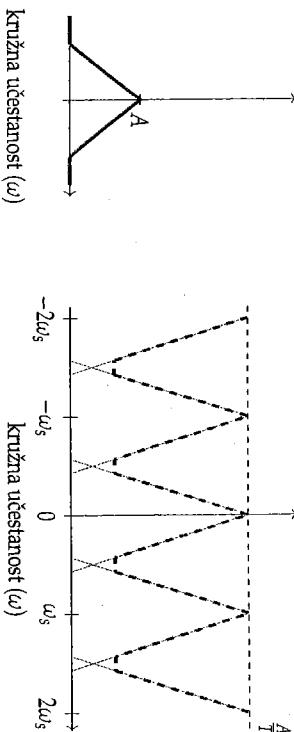


Slika 2.17 ilustruje transformacije spektra koje unosi operacija odbirkovanja. Naine, odbirkovanjem se spektar menja na dva načina: 1) množi se sa $1/T$ i 2) dolazi do periodičnog ponavljanja osnovnog spektra. Slika 2.17 ilustruje slučaj odbirkovanja u kome se ponovljeni spektri međusobno ne poklapaju, odnosno slutje u kome odbirkovani analogni signal ne poseduje spektralne komponente i odgovarajućeg idealno odbirkovanog signala u sličaju pravilno izabrane periode odabiranja.

– jednaka jednoj polovini učestanosti odbirkovanja – naziva se Nikistovom učestanostu. Nasuprot tome, dijagrami prikazani na slici 2.18 prikazuju slučaj u kome je učestanost odabiranja premašila, tako da odbirkovani signal poseduje i spektralne komponente iznad Nikistove učestanosti.

amplitudski spektar $|F(j\omega)|$

amplitudski spektar $|F^*(j\omega)|$



Na dijagramu prikazanom na slici 2.18 (desno) tankom punom linijom prikazane su pojedinačne komponente dobijene preslikavanjem spektra analognog signala, dok je isprekidanim linijom prikazan spektar idealno odbirkovanog signala dobijen sabiranjem svih ponovljenih komponenta.

Međutim, ukoliko se pojedine slike ne preklapaju, tada je moguće potpuno rekonstruisati spektar analognog iz spektra idealno odbirkovanog signala. Drugim rečima, moguće je potpuno rekonstruisati signal iz odbiraka. Očigledno je na osnovu dijagrama sa slike 2.18 da do preklapanja slika neće doći ukoliko je analogni signal ograničenog spektra, tj. ukoliko je $|F(j\omega)| = 0$ za svaku $|\omega| > \omega_{\max}$ te ukoliko je najveća frekvencija u signalu ω_{\max} barem dvostruko manja od frekvencije odbirkovanja. Ukoliko sa $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ označimo kružnu učestanost odbiranja, tada je signal moguće idealno rekonstruisati iz njegovih odbiraka jedino ukoliko je¹³

$$\omega_{\max} < \frac{1}{2}\omega_s. \quad (2.16)$$

Ukoliko ne dolazi do preklapanja preslikanih spektrara, tada se spektar polaznog analognog signala (odnosno i sam analogni signal) može rekonstruisati prostim filtriranjem idealan odbirkovanog signala pomoću odgovarajućeg niskopropusnog filtra. U tom slučaju, kompleksni lik analognog signala $F(s)$ zapravo je jedna perioda kompleksnog lika povorke odbiraka $F^*(s)$. Ovo zapažanje čini sruđivo poznate Teoreme odbiranja.

Tvrđenje 4 (Teorema odbiranja). Nikvist-Šenonova teorema). Ukoliko je spektar signala f identički jednak nuli za sve učestanosti veće ili jednake ω_{\max} , tj.

ukoliko je $F(j\omega) = 0$ za svako $\omega \geq \omega_{\max}$ i ukoliko je frekvencija odbirkovanja $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ veća od $2\omega_{\max}$, tada se signal f može idealno rekonstruisati iz svojih odbiraka.

Za datu frekvenciju odbiranja ω_s učestanost najprije dopustive spektralne komponente je $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$. Ova učestanost naziva se Nikvistovom učestanostou. Lik se signal menja dovoljno sporo. Zapravo, svaka povorka odbiraka odgovara neograničenom broju međusobno različitih kontinualnih signala. Rekonstrukciju je moguće ostvariti ukoliko je traženi signal ujedno i „najsporiji“ mogući. Idealan rekonstrukcija postiže se propuštanjem idealno odbirkovanog signala kroz idealni niskopropusni filter koji odseca sve spektralne komponente na učestanostima iznad Nikvistove učestanosti. Nazalost, idealni niskopropusni filter nije moguće realizovati. U praksi se rekonstrukcija vrši pomocu različitih sklopova, najčešće pomoći kola zadrušne mrežnog reda o komе je više reći bilo u prethodnim izlagajima. U nastavku ćemo pokazati da se ovakav sklop zaista ponaša kao neidealan filter propusnik niskih učestanosti.

Primer 2.1. Posmatrajmo prostoperiodične signale

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \cos(2\pi t), \\ f_2(t) &= \cos(2\pi t + \frac{2\pi}{T}t), \\ f_3(t) &= \cos(2\pi t + 2\frac{2\pi}{T}t), \end{aligned}$$

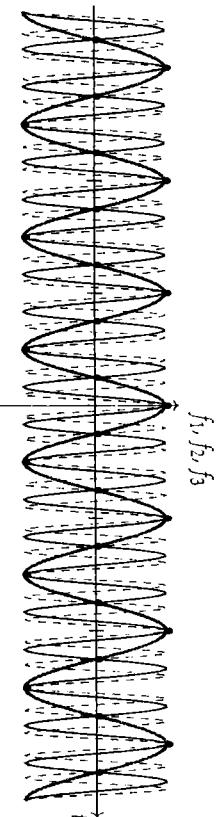
koji se odbirkuju periodom $T = 0.5$. Jasno je da će vrednosti sru tri signala u trenucima odbiranja biti identične. Naime, za svako celobrojno n i svako realno ω , važi

$$\cos(\omega kT + n\frac{2\pi}{T}kT) = \cos(\omega kT + nk2\pi) = \cos(\omega kT).$$

Drugim rečima, nemoguće je razlikovati prostoperiodične signale samo na osnovu njihovih odbiraka ukoliko im se učestanost razlikuje za celobrojan umnožak frekvencije odbiranja. Ova pojava ilustrvana je dijagramom na slici 2.19.

Prethodno razmatrani primer jasno ilustruje još jednu neobično važnu pojavu. Naime, ukoliko pretpostavimo da je mereni analogni signal u prethodnom primjeru 2.1 zapravo f_2 , nakon odbirkovanja činice se da je zapravo odbirkovani signal bio f_1 . Kažemo da je signal f_1 alias signala f_2 (engl. alias). U opštem

¹³Ekvivalentno, možemo reći da je analogni signal moguće rekonstruisati iz odbiraka ukoliko je ω_{\max} manja od Nikvistove učestanosti.



Napomena 1. Spektralni sadržaj praktično interesantnih signala gotovo nikada nije ograničen, u smislu da se gotovo nikada ne može odrediti granica učestanost ω_{\max} , takva da je $|F(j\omega)| = 0$ uvek kada je $\omega > \omega_{\max}$. Uprkos tome, signali koje posmatramo su najčešće približno lokalizovani u frekvenčijском domenu, odnosno spektralna komponenta merenog signala nalaze iznad Nikvistove. Ovakav filter naziva se antialiasing filterom (engl. antialiasing filter).

Napomena 2. Ova napomena je od suštinske važnosti za razumevanje uticaja procesa odabiranja, odnosno multipliciranja spektra, na sisteme automatskog upravljanja. Ako $F(s)$ ima pol u s_1 , tada $F^*(s)$ ima polove u $F(s_1 + jn\omega_s)$, gde n pripada skupu celih brojeva ($n \in \mathbb{Z}$). Dokaz ove činjenice, direktno sledi iz (2.15) i nije je potrebno posebno potvrđivati. Mnogo

su interesantnije posledice ovog tvrdjenja. To znači da će se polovi iz osnovnog spektra, preslikavati i van tog opsega. Kolo zadrške nultog reda, kao niskopropusni filter, će obezbediti postojanje samo polova iz osnovnog dela spektra. Međutim, veći su problem neželjeni polovi, koji postoje u višem delu spektra, a koji se posle odabiranja javljaju i u okviru primarnog pojasa i menjaju dinamiku sistema. Ovaj alijsing efekat rešava se antialiasing filterom koji deluje pre A/D konvertora, slično kao što smo već objašnjavali u prethodnom poglavljiju.

2.6 Frekvenčijska karakteristika kola zadrške nultog reda

Kolo zadrške vrši interpolaciju vrednosti analognog signala na osnovu odbiraka. U razmatrajućima vezanim za Nikvist-Šenonovu teoremu zaključili smo da se idealna rekonstrukcija postiže propuštanjem idealno odbirkovanog signala kroz niskopropusni filter koji odseca spektralne komponente na učestanostima iznad Nikvistove. Stoga treba razmotriti i spektralne karakteristike kola zadrške nultog reda. Frekvenčijska karakteristika kola zadrške nultog reda je

$$G_{H0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}. \quad (2.17)$$

S obzirom na to da je

$$1 - e^{-j\omega T} = e^{-\frac{j\omega T}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}} \right) = e^{-\frac{j\omega T}{2}} 2j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right),$$

možemo pisati

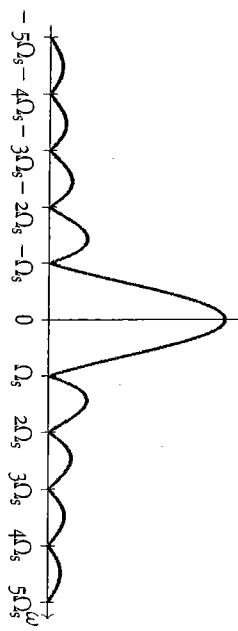
$$G_{H0}(j\omega) = \frac{2 \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} e^{-\frac{j\omega T}{2}} = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-\frac{j\omega T}{2}}. \quad (2.18)$$

Konačno zaključujemo da je

$$|G_{H0}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right|. \quad (2.19)$$

Amplitudska karakteristika kola zadriške nultog reda prikazana je na slići 2.20. Uvijek da se kolo zadriške ni u kom slučaju ne može smatrati „idealnim“ niskopropusnim filterom. Naime, kolo zadriške unosi izvesno slabljenje u osnovnom opsegu, a što je daleko značajnije, propušta i komponente signala u bočnim opsezinama. Ove visokofrekventne komponente idealno odbirkovanog signala koje se ne prigušu u dovoljnoj mjeri u procesu D/A konverzije odgovorne su za skokovitu promenu vrednosti signala na izlazu kola zadriške.

$$|G_{H0}(j\omega)|$$



Slika 2.20: Amplitudska karakteristika kola zadriške nultog reda.

2.7 Izbor perioda odabiranja

Nikvist-Šenonova teorema daje uslove pod kojima se vremenski kontinualan signal *ognjanjene spektralne* može idealno rekonstruisati na osnovu vrednosti svojih odabiraka.¹⁴ U slučaju određivanja digitalnog ekvivalenta kontinualnog procesa, pitanje izbora perioda odabiranja se daje usložnjava, s obzirom na to da svojstva odziva zavise ne samo od karakteristika samog procesa, već i od

svojstava pobude (koja nije poznata u trenutku kada se vrši diskretizacija).

Većina objekata upravljanja ima niskopropusnu frekvenčnu karakteristiku: propušta ili pojačava spore komponente pobudnog signala, a prigušuje brze. Osim toga, u okviru digitalne upravljačke petlje ispred upravljanog procesa uvek se nalazi kolo zadriške (nultog reda) koje je i samo niskopropusnog karaktera. Iza procesa, na ulazu regulacionog uređaja, uvek se nalazi antialijasing

filter koji dodatno prigušuje brze komponente merene procesne veličine. Uzimajući sve navedeno u obzir, jasno je da su frekvenčne karakteristike iznog signala ograničene frekvenčnim karakteristikama upravljanog procesa. Pri tome, treba voditi računa o tome da upravljački algoritam menjaju dinamiku propusni opseg procesa nakon zatvaranja povratne sprege, a ne pre.

Osim o količini informacija koja se zadržava nakon odbirkovanja, pri izboru perioda odabiranja treba voditi računa i o vremenu neophodnom da se implementira upravljački algoritam. Digitalni upravljački uređaji periodično osvezavaju vrednosti ulaznih i izlaznih veličina, a u međuvremenu izvršavaju sam upravljački algoritam i vrše druge operacije neophodne za pravilno funkcioni- sanje uređaja. Ukoliko je period odabiranja isuviše kratak digitalni uređaj neće biti u mogućnosti da izvrši sve operacije neophodne za sračunavanje upravljačkih signala. *Zbog toga je frekvenčna odabiranja sa dorje strane ograničena teoremom odabiranja, a sa gornje složenošću upravljačkog algoritma i brzinom digitalnog upravljačkog uređaja.*

Pri izboru perioda odabiranja takođe treba voditi računa o tačnosti raspoloživog vremenski kontinualnog (analognog) modela procesa čiji se digitalni ekvivalent traži. Konkretno, većina matematičkih modela dobro opisuje ponašanje procesa na niskim učestanostima, ali postaje sve nепreciznija kako učestanost uključenih signala raste. Izborom visoke učestanosti odbirkovanja širi se Nikvistov pojas, odnosno raste maksimalna učestanost pobudnog signala koju generiše upravljački signal. Brze komponente upravljačkog signala mogu pobuditi nemodelovane komponente dinamike procesa, te se posledično projektovano ponaranje upravljačke petlje može umnogome razlikovati od ostvarenog. Slijedom, merne nesigurnosti (šumovi) su tipično lokalizovane na visokim frekvenčijama. Izborom dovoljno niske učestanosti odbirkovanja znatan deo mernih nesigurnosti može biti „odsečen“ usled prisustva antialijasing filtra. Zbog toga se izborom relativno velikog perioda odabiranja može poboljšati utpristup upravljačke petlje na šum merenja.

U većini upravljačkih petlji očekuje se dejstvo spoljnijsih poremećaja. Izbor perioda odabiranja treba uskladiti i sa dejstvom ovih neželjenih spoljnijsih uticaja. Odbirkovanje mora biti dovoljno brzo kako bi upravljački uređaj stigao da dovoljno brzo reaguje na poljavu poremećaja, te ga odgovarajućom upravljačkom akcijom poništiti (kompenzirati). U slučajevima kada upravljački uređaj nije u stanju da kompenzuje poremećaj odgovarajućom korektivnom akcijom, neop-

¹⁴ U praksi se ova teorema koristi aproksimativno, s obzirom na to da svi merni signali po pravilu imaju neograničen spektar.

hodno je izdati odgovarajući alarm (signalizaciju kvara). Isuviše velika perioda odabiranja onemogućava pravovremenu reakciju na poremećaj.

Ukoliko je perioda odabiranja isuviše mala, može doći do problema pri implementaciji digitalnih algoritama. Sa jedne strane, s obzirom da je vrednosti upravljačkih veličina neophodno računati unutar jedne periode odabiranja,

mala perioda ograničava složenost algoritama upravljanja i obrade signala koje primenjujemo. Sa druge strane, mala perioda odabiranja veoma često podrazumeva se sra izračunavanja moraju vršiti sa velikim brojem značajnih cifara.

Posledično, u određenim slučajevima, veoma brze upravljačke algoritme nije moguće implementirati na digitalnom uređaju sa malom širinom memorije reci.

Iskustvena je preporuka da učestanost odbirkovana treba birati tako da bude 3 do 4 puta veća od granične učestanosti propusnog opsega procesa. Granična učestanost može se definisati kao učestanost nakon koje pojačanje procesa pada ispod -3 decibela. Ukoliko označimo kružnu učestanost odbirkovana sa Ω_s , a granicnu učestanost sa ω_{gr} , možemo pisati

$$\Omega_s \approx (3, 4) \cdot \omega_{gr}. \quad (2.20)$$

U slučaju aperiodičnih procesa, alternativna iskustvena preporuka je da se perioda odabiranja bira tako da bude od 4 do 10 puta kraća od vremena uspona (T_r). Ova preporuka ima kvalitativno isti smisao kao prethodna

$$T \approx \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right) T_r. \quad (2.21)$$

U slučaju osculatornih procesa, pri izboru periode odabiranja naročitu pažnju treba posvetiti frekvenciji sopstvenih oscilacija. Konkretno, položaj polova procesa drugog reda može se opisati pomoću neprigušene prirodne učestanosti ω_0 i koeficijenta relativnog prigušenja ζ . Nakon zatravaranja povratne sprege koeficijent relativnog prigušenja procesa ζ je najčešće približno 0,7. U tom slučaju, iskustvena preporuka za izbor periode odabiranja je

$$T \approx \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{\omega_0}. \quad (2.22)$$

U slučaju slabije prigušenih sistema, sopstvene oscilacije su izraženije, te je i periodu odabiranja neophodno izabrati tako da bude bešto kraća.

Konačno, napomijenimo da su svi prethodno navedeni kriterijumi za izbor perioda odabiranja samo preporuke. Izbor periode odabiranja jedno je od osnovnih pitanja pri projektovanju digitalnih upravljačkih sistema. Pravilan izbor

perioda odabiranja umnogome zavisi od fizičke prirode upravljanog sistema, njegove namene, tipa izvišnog organa, kvalitetu merenja, karakteristika rasploživog upravljačkog hardvera, tačnosti rasploživog matematičkog modela procesa, tipova očekivanih poremećaja i zahtevnosti upravljačkog algoritma. Sve ove kriterijume treba uzeti u obzir pri konačnom izboru učestanosti odbirkovana.

2.8 Zvezda transformacija

Videli smo da je veza između Laplasove transformacije analognog signala $F(s)$ i kompleksnog lika povorke odbiaka $F^*(s)$ data izrazom (2.15). Po ugledu na ovu vezu, bilo kojem izrazu u Laplasovom domenu $G(s)$ možemo pridružiti izraz $G^*(s)$ na sledeći način

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s - jn \frac{2\pi}{T}), \quad (2.23)$$

pri čemu se dešto preslikavanje naziva **zvezda transformacijom**¹⁵. Zvezda transformacija nekog kompleksnog lika dobija se skaliranjem i periodičnim ponavljanjem tog lika. Skaliranje se vrši recipročnom vrednošću perioda odabiranja. Periodično ponavljanje se vrši oko celobrojnih umnožaka učestanosti odabiranja. Ova transformacija ima značajnu primenu u analizi hibridnih sistema koji se sastoje iz analognih i digitalnih komponenta. Iako je osnovno kolo digitalnog SAU jedan veoma značajan primer, treba naglasiti da se u praksi sreću i znatno složenije strukture. Ovakvi sistemi mogu imati veći broj odabiraca i veći broj kola zadiske. Pri tome, sledeće osobine ove transformacije su od primarnog interesa:¹⁶

Linearnost. Zvezda transformacija je linearna, odnosno homogena i aditivna. Za svaki par realnih ili kompleksnih brojeva a i b , i svaki par kompleksnih likova $G(s)$ i $H(s)$ važi da je

$$(aG(s) + bH(s))^* = aG^*(s) + bH^*(s).$$

Periodičnost. Zvezda transformacija proizvoljnog kompleksnog lika je periodična sa periodom jednakim $j\frac{2\pi}{T}$.

¹⁵ engl Star Transform

¹⁶ Sve ove osobine se neposredno dokazuju na osnovu definicije.

Idempotentnost Višestrukom primenom zvezda transformacija dobijeni kompleksi lik se ne menjaju. Drugim rečima, za proizvođeno $G(s)$, $(G^*(s))^* = G^*(s)$. Opštije, ukoliko su $G(s)$ i $H(s)$ proizvoljni kompleksi likovi, tada je

$$(G^*(s)H(s))^* = G^*(s)H^*(s).$$

Konačno, treba imati u vidu da zvezda transformacija nije distributivna u odnosu na množenje¹⁷. Konkretno, $(G(s)H(s))$ nije jednako $G^*(s)H^*(s)$.

¹⁷ Prema iskustvu autora, ovo je vremena česta greška u analizi složenih sistema u kojima figuraju analoge i digitalne komponente.

3 3-transformacija

Za analizu signala i linearnih dinamičkih sistema (LTI) koriste se transformacione tehničke. Kada govorimo o kontinualnim signalima i kontinualnim sistemima koji predstavljaju procese koji na ulazu imaju kontinualne signale, moćan alat koji značajno pojačava određivanje odziva LTI sistema na proizvođen oblik bila je Laplasova transformacija¹.

Međutim, u inženjerstvu se vrlo često susrećemo sa diskretnim signalima, u oznaci $f(kT)$, gde je T period odabiranja. To su signali čiji su vrednosti poznate samo u diskretnim vremenskim trenucima kT , $k \in \mathbb{Z}$. Ovakvi signali mogu biti originalno diskretnog tipa (dobijeni kao rezultat merenja) ili mogu biti rezultat procesa odabiranja neprekidnog, kontinualnog signala $f(t)$ u vremenskom do времену, što je detaljno objašnjeno u poglavljiju 2. Sistem koji vrši transformaciju ulaznog diskretnog signala u izlazni diskretni signal naziva se diskretni sistem. Transformacija koja se primjenjuje za analizu diskretnih signala i diskretnih sistema je 3-transformacija, odnosno 3-transformacija je diskretni ekvivalent Laplasove transformacije.

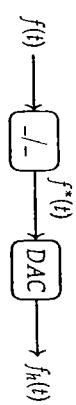
3-transformacija omogućava analitičko određivanje odziva diskretnog sistema na ulaznu diskretnu pobudu, kao i rešavanje diferencnih jednačina kojim se diskretni sistemi opisuju, o čemu će više biti reči u nastavku.

3.1 Pojam 3-transformacije

3-transformacija se može uvesti polazeci od matematičkog modela odabiranja i zadrške prikazanog na slici 3.1 gde je sa f^* označen idealno odbirkovan

¹ Paralelno sa razvojom tehnikе koja se koristi u digitalnim sistemima upravljanja, razvijala se i tehnika. Prvi koraci tog razvoja naravnili su se tokom Drugog svetskog rata, kao potreba u razvoju radarske tehnike. Do tada je teorija bila razvijena za transformaciju kontinualnih signala, pa se razvila potreba za razvoj sličnih alata za obradu diskretnih signala. Prvi korak veže se za Witolda Hurewicza koji uvedi transformaciju nad sekvencama 1947. godine, koja je potom nazvana 3-transformacija 1952. od strane John Ralph Ragazzini i Lofti Alascera Zadeha. Transformacija je nezavisno razvijana u Sjedinjenim Američkim Državama, Sovjetskom Saveznu i Velikoj Britaniji. Godine 1950. ovu transformaciju Yakov Tsjipkin je nazvao diskretnu Laplasovu transformaciju i uveo je kao alat za analizu tzv. impulsnih sistema, a slični rezultati dobijeni su i u Engleskoj 1952. godine. Dalji razvoj transformacije i njenih osobina pokazao je Eliotne jury u svojoj doktorskoj disertaciji na Univerzitetu Kolumbijan.

signal.



Primenom Laplasove transformacije na idealno odbirkovan signal, dobijamo izraz koji nazivamo kompleksni lik povorke odbraka,

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}. \quad (3.1)$$

Dobijenu izraz (3.1) nam omogućava da analizirimo odbirkovane signale u kompleksnom (frekvencijskom) domenu. Lako se može uočiti da se u izrazu (3.1) pojavljuje član e^{sT} , koji je neracionalan, odnosno da kompleksni likovi odbirkovanog signala nisu racionalne funkcije od kompleksne promenljive s već iracionalne što usložnjava primenu Laplasove transformacije, kao i nalaženje inverzne Laplasove transformacije koje bi zahtevalo razvoj ovog člana u red. To je ujedno jedan od motiva za uvođenje \mathfrak{Z} -transformacije. Osnovna ideja je da se član e^{sT} zameni novom kompleksnom promenljivom z ,

$$z := e^{sT}. \quad (3.2)$$

Daljom zamenom definicije (3.2) u izraz (3.1),

$$F^*(s)|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}|_{z=e^{sT}} \quad (3.3)$$

možemo definisati \mathfrak{Z} -transformaciju za kauzalne diskrete signale².

Definicija 10. (\mathfrak{Z} -transformacija.) Za vremenski diskretan, kauzalan signal $f(k)$, \mathfrak{Z} -transformacija, u oznaci $\mathfrak{Z}\{f(k)\}$, se definisce izrazom

$$\mathfrak{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}. \quad (3.4)$$

za sve one vrednosti kompleksne promenljive z za koje data suma konvergira.

Slika 3.1: Ilustracija matematičkog modela postupka odabiranja i zadške DAC je digitalno-analogni konvertor.

Najvažnija primena unilateralne \mathfrak{Z} -transformacije je određivanje odziva LTI sistema sa nemultim početnim uslovima. Za rešavanje tih problema nije moguće koristiti bilateralnu \mathfrak{Z} -transformaciju jer ne pozajmimo niti pobudu niti stanje sistema (nazvez početnih uslova) za $k < 0$.

Napomena 3. Izraz (3.4) predstavlja beskonacan red, odnosno Lorenov red, pa bilaterala i unilaterala \mathfrak{Z} -transformacija nekog signala $f(k)$ postoji samo za one vrednosti kompleksne promenljive z za koje odgovarajući red konvergira. Za one signale f i one vrednosti promenljive z za koje vrednost sume nije definisana kažemo da \mathfrak{Z} -transformacija ne postoji (ili divergira).

Skup vrednosti promenljive z za koje beskonacni red konvergija predstavlja oblast konvergencije (engl. *Region of Convergence, ROC*) posmatranog reda, odnosno oblast konvergencije \mathfrak{Z} -transformacije.

Složenim pitanjem konvergencije \mathfrak{Z} -transformacije nećemo se baviti detaljno u sklopu ovog udžbenika. Široku klasu praktično interesantnih signala za koje se može odrediti \mathfrak{Z} -transformacija čine eksponencijalno ograničeni signali. Kazemo da je kauzalan signal f eksponencijalno ograničen ako se mogu naći pozitivne konstante M i ρ takve da je

$$|f(k)| < M\rho^k.$$

Pri tome, transformacija postoji za svako z takvo da je $|z| > \rho$. Stoga je oblast konvergencije kauzalnog signala spoljašnjost kruga poluprečnika ρ , prikazana na slici 3.2. Parametar ρ se naziva *radijusom (poluprečnikom) konvergencije*. Unutar svoje oblasti konvergencije \mathfrak{Z} -transformacija eksponencijalno ograničenog diskretnog signala konvergira *apsolutno i uniformno*, a dobijeni kompleksni lik je *analitička funkcija kompleksne promenljive z* .

Napomena 4. U nastavku će se signali obeležavati malim slovom, pri tome kontinualni vremenski signali kao $f(t)$, a diskretni vremenski signali kao $f(kT)$ ili samo kratce $f(k)$ kada nam vrednost periode odabiranja T nije od interesa već samo redni broj trenutka k . Transformacije signala će se obeležavati velikim slovom, tako je Laplasova transformacija kontinualnog signala $F(s)$, a \mathfrak{Z} -transformacija vremenski diskretnog signala $F(z)$.

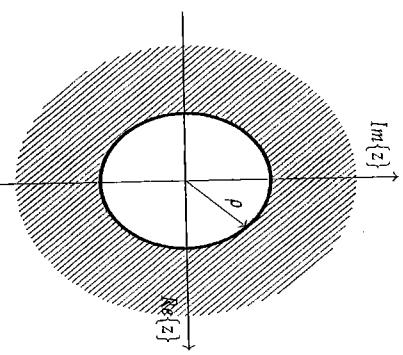
¹ Kako što se definise i dvostrana (bilateralna) Laplasova transformacija (sa integralom od $-\infty$ do $+\infty$) za funkcije koje nisu kauzalne, tako možemo definisati i dvostranu ili bilateralnu \mathfrak{Z} -transformaciju (sa integralom od 0 do $+\infty$) po indeksu niza brojeva koji prolazi skupom \mathbb{Z} .

² $\mathfrak{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$.

Ovakao definisana transformacija naziva se unilaterala ili jednostrana \mathfrak{Z} -transformacija.³

Najvažnija primena unilaterne \mathfrak{Z} -transformacije je određivanje odziva LTI sistema sa nemultim početnim uslovima. Za rešavanje tih problema nije moguće koristiti bilateralnu \mathfrak{Z} -transformaciju jer ne pozajmimo niti pobudu niti stanje sistema (nazvez početnih uslova) za $k < 0$.

³ Kako što se definise i dvostrana (bilateralna) Laplasova transformacija (sa integralom od $-\infty$ do $+\infty$) za funkcije koje nisu kauzalne, tako možemo definisati i dvostranu ili bilateralnu \mathfrak{Z} -transformaciju (sa integralom od 0 do $+\infty$) po indeksu niza brojeva koji prolazi skupom \mathbb{Z} .

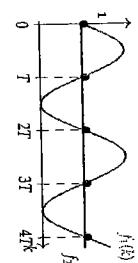


Slika 3.2: Oblast konvergencije 3-transformacije kauzalnog signalata.

Napomenjeno da se suma geomatrijskog reda, za $|q| < 1$, računa po izrazu

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a}{1-q}.$$

Upravo ovaj izraz je moguće primeniti za određivanje 3-transformacije elementarnog signala, pri čemu mora biti ispunjen uslov $|q| < 1$ što će odrediti i oblast konvergencije 3-transformacije signala.



Slika 3.3: Vremenska diskretna transformacija dva različita signala f_1 i f_2 u vremenskom domenu, koji daju isti diskretni signal, isti diskretni ekvivalent f^* , a samim tim i iste 3-transformacije.

Budući da se radi o signalu konačnog trajanja, tj. o jednom elementu reda za $k = 0$, 3-transformacija jediničnog impulsa konvergira u celoj z -ravnji.

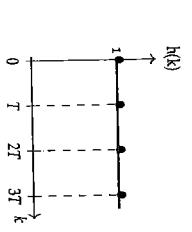
Primer 3.1. Impulsni signal. Impulsni jedinični signal je $\delta(k) = 0$, za $k \neq 0$, zbog čega je važi da je

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = z^0 = 1 \quad (3.5)$$

3-transformacija možemo računati po definiciji,

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}. \quad (3.9)$$

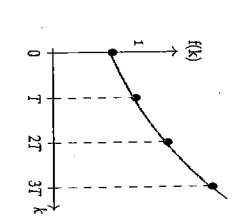
Oblast konvergencije ovog kauzalnog signala određena je sa $|z| > |a|$ i predstavlja spoljašnjost kruga poluprečnika $|a|$.



Slika 3.4: Diskretni Hevisajev signal.

Primer 3.3. Eksponencijalni signal. Kauzalni diskretni eksponencijalni signal prikazan na slici 3.5 se opisuje diskretnom funkcijom

$$f(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$



Slika 3.5: Diskretni eksponentijalni signal

3.1.1 3-transformacija elementarnih signala

U nastavku će biti prikazana 3-transformacija elementarnih signala, kao što su jedinični impulsni signal, step (Hevisaj) signal i eksponencijalna funkcija.

Primer 3.1. Impulsni signal. Impulsni jedinični signal je $\delta(k) = 0$, za $k \neq 0$, zbog čega je važi da je

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = z^0 = 1 \quad (3.5)$$

3-transformacija možemo računati po definiciji,

$$h(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Primer 3.2. Step (Hevisajidov) signal. Kauzalan jedinični signal prikazan na slici 3.4 se opisuje diskretnom funkcijom

$$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \quad (3.7)$$

3-transformaciju možemo računati po definiciji,

$$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \quad (3.7)$$

Geometrijski red (3.7) konvergira za $|z^{-1}| < 1$, odnosno za $|z| > 1$, odakle sledi da je oblast konvergencije 3-transformacije step signala spojilošnost kruga jediničnog poluprečnika.

Osobina 1. Linearnost. 3-transformacija je linearna operacija, koja podrazumeva osobinu aditivnosti i homogenosti. 3-transformacija linearne kombinacije signala jednaka je odgovarajućoj linearnej kombinaciji 3-transformacija.

Primer 3.2. Step (Hevisajidov) signal. Studija sistema sa više ulaza je odlikan primer za primenu ove osobine. Podsećamo, tada se odziv na svaki ulaz računa ponosno, a ukupni odziv dobija kao zbir pojedinačnih odziva.

$$\mathcal{Z}\{a_1f_1(k) + \dots + a_nf_n(k)\} = a_1F_1(z) + \dots + a_nF_n(z) \quad (3.10)$$

gde je $f_i(k)$ bilo koji diskretni signal, a a_i proizvoljan realni ili kompleksni broj.

Dokaz. Linearnost \mathcal{Z} -transformacije sledi neposredno na osnovu definicije, kao posledica linearnosti operatora sune,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{a_1 f_1(k) + \dots + a_n f_n(k)\} &\stackrel{\text{(po definiciji)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \{a_1 f_1(k) + \dots + a_n f_n(k)\} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{a_1 f_1(k) z^{-k} + \dots + a_n f_n(k) z^{-k}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_1 f_1(k) z^{-k} + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} a_n f_n(k) z^{-k} \\ &= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k} + \dots + a_n \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) z^{-k} \\ &= a_1 F_1(z) + \dots + a_n F_n(z) \end{aligned}$$

Osobina 2. Pomeranje u vremenskom domenu.

Osobina 2a. *Kašnjenje signala.* \mathcal{Z} -transformacija može se primeniti na signal koji kasni, tj. promenjuja z^{-n} može se interpretirati kao operator kašnjenja za n -perioda,

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z). \quad (3.11)$$

Osobina 2b. *Prednjačenje signala.* \mathcal{Z} -transformacija može se primeniti na signal koji prednjači za n perioda, tj. promenjuva z^n može se interpretirati kao operator prednjačenja za n -perioda pod uslovom da su svih početnih uslovi jednaki nuli,

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k}. \quad (3.12)$$

Član $z^n \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} f(k)$ u izrazu (3.12) predstavlja početne uslove. Početni uslovi se definisu kao vrednost signala u prvih n vremenskih trenutaka.

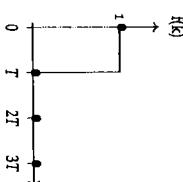
Dokaz. Date osobine se pokazuju na osnovu definicije \mathcal{Z} -transformacije. Tvrdeње o \mathcal{Z} -transformaciji signala koji kasnu (3.11) sledi iz

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(k-n)\} &\stackrel{\text{(po definiciji)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) z^{-k} \\ &\stackrel{\text{(smena } m=k-n\text{)}}{=} \sum_{m=-n}^{\infty} f(m) z^{-(m+n)} \\ &\stackrel{\text{(zlog kauzalnosti)}}{=} (f(-n) = \dots = f(-1) = 0) \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} z^{-n} \\ &= z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} = z^{-n} F(z). \end{aligned}$$

Izraz (3.12) kojim se opisuje osobina prednjačenja sledi iz

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(k+n)\} &\stackrel{\text{(po definiciji)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n) z^{-k} \\ &\stackrel{\text{(smena } m=k+n\text{)}}{=} \sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-(m-n)} \\ &\stackrel{\text{(preširimo brojčič)}}{=} z^n \left[\sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-m} + \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right] \\ &= z^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \right] \\ &= z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k}. \end{aligned}$$

Primer 34. Nađi \mathcal{Z} -transformaciju diskretnog signala sa slike 3.6.



Slika 3.6: Signal iz primera
34.

Rješenje:

Signal koji je prikazan na slici je razlika dve Hevisajdove funkcije: $f(k) = h(k) - h(k-1)$. Ukoliko primenimo osobinu \mathcal{Z} -transformacije za signal koji ka-snji osobinu linearnosti dobijamo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{h(k) - h(k-1)\} &= \frac{z}{z-1} - z^{-1} \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1} = 1..\end{aligned}$$

Može se primeniti da je \mathcal{Z} -transformacija signala sa slikom jednaka \mathcal{Z} -transformaciji Dirakove impulsne funkcije iz primera 3.1. To je posledica definicije primenjene \mathcal{Z} -transformacije, bitno poznavanje vrednosti signala samo u trenucima odabiranja, a vrednosti između nas ne zanimaju. Tako da ova dva signala imaju istu \mathcal{Z} -transformaciju.

Primer 3.5. Naći \mathcal{Z} -transformaciju diskretnog signala sa slike 3.7.



Slika 3.7: Signal iz primera
3.5

Osobina 3b. Druga ili krajnja granična teorema. Ukoliko je $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$, i ukoliko postoji $f(0)$ tada je

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z). \quad (3.13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1 - z^{-1}) F(z). \quad (3.14)$$

Rješenje:

Signal koji je prikazan na slici je Hevisajdova funkcija koja predstavlja za tri perioda, pa ga možemo zapisati kao $f(k) = h(k+3)$. Ukoliko primenimo osobinu \mathcal{Z} -transformacije za signale koji predstavljaju dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{h(k+3)\} &= z^3 \mathcal{Z}\{h(k)\} - z^3 [z^0 + z^{-1} + z^{-2}] \\ &= z^3 \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 + z + 1}{z^2} \right] \\ &= z^3 \frac{z^3 - z^2 - z^2 - z + z^2 + z + 1}{z^2(z-1)} \\ &= \frac{z}{z-1}.\end{aligned}$$

Lako se može primetiti da je \mathcal{Z} -transformacija signala sa slikom jednak \mathcal{Z} -transformaciji Hevisajdove funkcije iz primera 3.2. To je posledica definicije primenjene \mathcal{Z} -transformacije koja je definisana samo za kauzalne signale.

Osobina 3c. Granične teoreme. Nekada je potrebno odrediti početnu ili krajnju (asimptotsku) vrednost signala, odnosno vrednost signala $f(k)$ za $k = 0$ i $k \rightarrow \infty$ pri čemu je poznata njegova \mathcal{Z} -transformacija $F(z)$. Te vrednosti se mogu izračunati primenom graničnih teorema koje ne zahteva određivanje inverzne \mathcal{Z} -transformacije.

Osobina 3a. Prva ili početna granična teorema Ukoliko je $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$, i ukoliko postoji $f(0)$ tada je

Primer 3.5. Naći \mathcal{Z} -transformaciju diskretnog signala sa slike 3.7.

odakle se vidi da \mathcal{Z} -transformacija signala teži nuli za velike vrednosti kompleksne promenljive z , i sledi da je $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$.

Dokaz. Da bi dokazali drugu grančnu teoremu i tvrdjenje izraza (3.14) zapisaćemo sledeće dve sume

$$\sum_{k=0}^m f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + \cdots + f(m)z^{-m} \quad (3.15)$$

i drugu u kojoj imamo signal koji kasni $f(k-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m f(k-1)z^{-k} &= 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \cdots + f(m-1)z^{-(m-1)} \\ &\quad - [f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \cdots + f(m-1)z^{-m}] \\ &= f(0)(1-z^{-1}) + f(1)z^{-1}(1-z^{-1}) + \cdots + f(m-1)z^{-(m-1)}(1-z^{-1}) + f(m)z^{-m} \\ &= (1-z^{-1})(f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(m-1)z^{-(m-1)}) + f(m)z^{-m} \end{aligned}$$

odnosno

$$\sum_{k=0}^m f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^m f(k-1)z^{-k} = (1-z^{-1})(f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots) + f(m)z^{-m}$$

ukoliko $z \rightarrow 1$, sledi

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^m f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^m f(k-1)z^{-k} \right] = f(m), \quad (3.17)$$

jer članovi $(1-z^{-1})^0$, a član z^{-m+1} . U grančnom slučaju kada m teži ∞ izraz (3.17) postaje,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} f(m). \quad (3.18)$$

Sume na levoj strani izraz (3.1.2) predstavljaju definicije 3-transformacije,

$$\lim_{z \rightarrow 1} [F(z) - F(z)z^{-1}] = \lim_{m \rightarrow \infty} f(m).$$

odnosno

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z).$$

Definicija 11. (Konvolucija diskretnih signala.) Konvolucija diskretnih signala f i g definjuje se

$$(f * g)(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)g(k-i). \quad (3.19)$$

Kada su signali koji koristimo kauzalni signali, tad se konvolucija kauzalnih signala f i g definise

$$(f * g)(k) = \sum_{i=0}^k f(i)g(k-i). \quad (3.20)$$

Kao i u slučaju konvolucije vremenski kontinualnih signala, može se pokazati da je konvolucija komutativna operacija

$$f * g = g * f \quad (3.21)$$

kao i asocijativna i distributivna u odnosu na sabiranje

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= (f * g) * h \\ f * (g + h) &= (f * g) + (f * h) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Napominjeno, da grančnu teoremu možemo upotrebiti samo kada grančna vrednost signala postoji, odnosno kada se polovi kompleksnog lika nalaze unutar ili na jedinčinom krugu, u suprotnom može se dobiti rezultat, koji nema smisla.

Primer 3.6. Dat je signal $f(k) = e^{jk}h(k)$. Kada $k \rightarrow \infty$ jasno je da signal nema konacnu vrednost, već je njegova vrednost ∞ . Ukoliko primenimo grančnu teoremu u kompleksnom 3-domenu, to bi znacilo $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{f(z)}{z-1} = 0$ što je obigledno pogrešan rezultat. Pol kompleksnog lika signala je $p = 3$, koji je van jedinčine krutnice.

Osobina 4. 3-transformacija konvolucije signala. Ukoliko su f i g kauzalni diskretni signali, tada je

$$\Im\{(f * g)(k)\} = \Im\{f(k)\}\Im\{g(k)\} = F(z)G(z) \quad (3.23)$$

Dokaz. Primenom definicije 3-transformacije nad definicijom konvolucije dva

diskretna signala sledi

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{(f * g)(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k f(i)g(k-i)z^{-k} \\ &\stackrel{\text{zbroj kauzalnosti}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)z^{-k} \\ &\stackrel{\text{množenje zameniti}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(m)z^{-m}z^{-i} \\ &\stackrel{\text{smjena } m=k-i}{=} \sum_{m=-i}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(m)z^{-m}z^{-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{zbroj kauzalnosti}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} g(m)z^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i} \\ &= G(z)F(z) = F(z)G(z) \end{aligned}$$

Tvrđenje 5. (Inverzna \mathcal{Z} -transformacija) Za signal čija je \mathcal{Z} -transformacija $F(z)$, postoji jedinstven vremenski signal $f(k)$ koji se računa primenom inverzne \mathcal{Z} -transformacije, u oznaci $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$,

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz, \quad (3.26)$$

gdje se kontura Γ nalazi u oblasti konvergencije \mathcal{Z} -transformacije.

Osobina 5. Kompleksno pomeranje. Ukoliko je $F(z)$, \mathcal{Z} -transformacija od $f(k)$, tada je

$$\mathcal{Z}\{f(k)e^{-akT}\} = F(ze^{aT}) \quad (3.24)$$

Dokaz. Primenom definicije \mathcal{Z} -transformacije dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(k)e^{-akT}\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-akT}z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(e^{aT}z)^{-k} = F(ze^{aT}). \end{aligned}$$

Analičko računanje konturnih integrala nije jednostavno, te se u praksi koriste druge metode određivanja inverzne \mathcal{Z} -transformacije.

Napominjemo, inverznom \mathcal{Z} -transformacijom dobija se vremenski diskretni signal $f(k)$.

Postoje četiri metode za određivanje inverzne \mathcal{Z} transformacije:

1. Metoda direktnog deljenja
2. Metoda odziva (računska)

3. Metoda inverzne integracije (računanje izraza (3.26))
4. Metoda rastavljanja na parcijalne razlomke

Primer 3.7. Dat je vremenski kauzalan signal $f(t) = e^{-at}h(t)$. Naći njegovu \mathcal{Z} -transformaciju posle diskretizacije sa periodom T .

Rešenje:

Posle diskretizacije ovaj signal postaje diskretan oblika $f(k) = e^{-akT}h(kT)$.

Na ovakav signal može se primeniti osobina kompleksnog pomeranja, ukoliko se podsetimo da je $\mathcal{Z}\{h(kT)\} = \frac{z}{z-1}$, tada je

$$\mathcal{Z}\{e^{-akT}h(kT)\} = \frac{ze^{aT}}{ze^{aT}-1} = \frac{z}{z-e^{aT}}$$

Primer 3.8.

Dat je izraz $F(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$. Izračunati vrednosti $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$ i $f(3T)$ primenom:

1. metode direktnog deljenja

2. metode odziva (računska)

3. metode inverzne integracije

4. metode rastavljanja na parcijalne razlomke.

Rešenje.

1. Metoda direktnog deljenja.

Pre nego se pristupi deljenju polinoma neophodno je pomoziti brojilac i imenilac sa z^{-3} , a potom srediti imenilac kako bi se dobili polinomi po promenljivoj z^{-3} sa elementima koji su poredani u opadajućem redosledu stepena, čime se dobija

$$F(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{10z+5}{z^2 - 1.2z + 0.2} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}}.$$

Kao što i time same metode kaže, sledeći korak je deljenje brojoca i imenika funkcije $F(z)$

$$(10z^{-1} + 5z^{-2}) : (1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3}$$

$$10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3}$$



a izlaznog signala $Y(z) = \frac{10z+5}{z^2 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}}$, dobija se funkcija prenosa sistema $F(z)$ koju možemo zapisati kao

$$F(z) = \frac{10z+5}{z^2 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

Primenom osobine kašnjenja signala dobijamo diferenciju jednačinu obliku

Nakon ove iteracije možemo prekinuti deljenje u skladu sa definicionim izrazom

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + \dots,$$

odakle daje sledi

$$f(0) = 0$$

$$f(T) = 10$$

$$f(2T) = 17$$

$$f(3T) = 18.4.$$

Ova metoda, za razliku od sledeće dve, nije praktična odnosno pogodna za određivanje vrednosti signala u vremenskom domenu na osnovu poznate 3 transformacija jer je za određivanje n -tog člana neophodno odrediti svih $n-1$ prethodnih a svi se dobijaju deljenjem dva polinoma.

2. Metoda odziva (računska).

Ova metoda se zasniva na ideju modelovanju sistema čiji je impulsni odziv signal čija je 3 transformacija data u tekstu zadatka, a kao zadatak postavlja se dobijanje diferencne jednačine modelovanog sistema. Stoga, posmatrajmo sistem opisan funkcijom prenosa $F(z)$ čiji je impulsni odziv 3 transformaciji signala koga posmatramo, kao što je prikazno na slici. Kako je 3 transformacija impulsnog ulaznog signala je $3\{\delta(kT)\} = 1$,

primenom jednačine (3.13) dobijamo da je $Y(z) = 1$.



Uz činjenicu da se radi o kauzalnim signallima pri čemu je $u(k) = 0, \forall k <$

0, sledi da su tražene vrednosti signala

$$\begin{aligned} y(0) &= 1.2y(-1) + 10u(-1) - 0.2y(-2) + 5u(-2) = 0 \\ y(1) &= 1.2y(0) + 10u(0) - 0.2y(-1) + 5u(-1) = 10 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$(3.29)$$

$$\begin{aligned} y(2) &= 1.2y(1) + 10u(1) - 0.2y(0) + 5u(0) = 17 \\ y(3) &= 1.2y(2) + 10u(2) - 0.2y(1) + 5u(1) = 184. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

3. Metoda inverzne integracije.

Koristi se definicioni konturni integral oblika

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz, \quad (3.32)$$

gde je Γ predstavlja zatvorenu konturu u z ravnini koja obuhvata sve polove podintegralne funkcije $F(z)$. Koristenjem Košjeve teoreme o ostacima izračunavanje integrala se svedi na sumiranje ostataka u polovima podintegralne funkcije, tj.

$$f(kT) = \sum_{p_j} \text{Res}_{z=p_j} [F(z) z^{k-1}], \quad (3.33)$$

gde su p_j polovi funkcije $F(z)$, a Res označava ostatak funkcije $F(z) z^{k-1}$ u polu $p = p_j$. Ostatak se računa kao

$$\text{Res}_{z=p} [F(z)] = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{d}{dz} \right)^{q-1} (z-p)^q F(z), \quad (3.34)$$

gdje je q višestrukošć pola.

Primenom (3.34) početni izraz $F(z)$ možemo zapisati kao

$$f(k) = \sum_{p_j} \text{Res}_{z=p_j} \left[\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} z^{k-1} \right]. \quad (3.35)$$

Zanima nas da odredimo vrednosti svih odbiraka signala $f(k)$, tj. vrednosti $f(0), f(1), f(2), \dots$ odnosno vrednosti za $k = 0, 1, 2, \dots$.

Za $k = 0$ izraz (3.35) postaje

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_{p_j} \text{Res} \left[\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} \right] = \\ &= \text{Res}_{p=1} \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} + \text{Res}_{p=0.2} \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} + \text{Res}_{p=0} \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} + \lim_{z \rightarrow 0.2} (z-1) \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} + \lim_{z \rightarrow 0} (z-1) \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)z} = \\ &= \frac{15}{0.8} - \frac{7}{0.16} + \frac{5}{0.2} = 0 \end{aligned}$$

Za $k \geq 1$ podintegralna funkcija ne poseduje pol u $z = 0$ tako da preostaju samo polovi $z = 1$ i $z = 0.2$, a odbirci signala $f(k)$ se računaju na osnovu izraza

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{p_j} \text{Res} \left[\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} z^{k-1} \right] = \\ &= \text{Res}_{p=1} \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} z^{k-1} + \text{Res}_{p=0.2} \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} z^{k-1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} z^{k-1} + \lim_{z \rightarrow 0.2} (z-1) \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} z^{k-1} = \\ &= \frac{15}{0.8} - \frac{7}{0.8} (0.2)^{k-1} \end{aligned}$$

Na ovaj način određeni su svi elementi signala $f(k)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 18.75 - 8.75 = 10 \\ f(2) &= 18.75 - 1.75 = 17 \\ f(3) &= 18.75 - 0.35 = 18.4. \end{aligned}$$

4. Metoda rastavljanja na parcijalne razlomke.

Ova metoda je veoma slična metodi rastavljanja na parcijalne razlomke koja se koristi pri određivanju inverzne Laplasove transformacije, tako što funkciju $F(z)$ predstavljamo kao sumu članova čije su inverzne transformacije poznate. Ti članovi su oblika

$$k, \frac{r_1 z}{z - p_1}, \frac{r_2 z}{(z - p_1)^2}, \dots \quad (3.36)$$

^jZbog jednostavnijeg zapisa možemo uvesti notaciju $kT \equiv k$.

gde je k konstanta, r_i i p_i predstavljaju rezidijume i polove respektivno koji mogu biti realni ili kompleksni.

(a) *Funkcija ima realne i proste polove.*

Ukoliko funkcija $F(z)$ ima realne i proste polove funkcija se može razviti na parcijalne razlomke. U uopštenom slučaju izraz $F(z)$ ima oblik

$$F(z) = \frac{B_m(z)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)},$$

i može se razviti na parcijalne razlomke

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{k_1}{(z - p_1)} + \frac{k_2}{(z - p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(z - p_1)}. \quad (3.37)$$

Koeficijente k_i moguće je izračunati na više načina, izjednačavanjem leve i desne strane izraza (3.37) ili pomoću formule

$$k_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (3.38)$$

(b) *Funkcija ima višestruke realne polove.*

Ukoliko funkcija $F(z)$ ima višestruke realne polove, njen oblik u uopštrenom slučaju je

$$F(z) = \frac{B_m(z)}{(z - a)^k D'(z)}.$$

Razvoj na parcijalne razlomke ovakve racionalne funkcije bi bio

$$F(z) = \frac{B_m(z)}{(z - a)^k D'(z)} = \frac{A_1}{z - a} + \frac{A_2}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(z - a)^k},$$

gde su A_i koeficijenti razvoja koji se mogu neposredno računati po moći formule

$$A_i = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-i} (z - a)^k F(z), \quad (3.39)$$

gde je i stepen u imenuoču člana čiji koeficijent se računa.

Na osnovu navedenog, kako funkcije $F(z)$ ima realne i proste polove sledi

gdje je

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0.2)} = \frac{15}{0.8} = 18.75$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow 0.2} (z - 1) \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0.2)} = \frac{7}{-0.8} = -8.75.$$

Uvrštanjanjem dobijenih vrednosti u početni izraz dobija se

$$F(z) = \frac{18.75}{z - 1} - \frac{8.75}{z - 0.2}.$$

Da bi se dobijeni izrazi sveli na tabične izraze

$$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \frac{z}{z - 1}$$

$$\mathcal{Z}\{\sigma^k h(k)\} = \frac{z}{z - a},$$

neophodno je izraz $F(z)$ transformisati na sledeći način

$$F(z) = \frac{18.75z}{z - 1} z^{-1} - \frac{8.75z}{z - 0.2} z^{-1}.$$

Direktnom primenom inverzna \mathcal{Z} transformacije i korišćenjem osobine kašnjenja

$$\mathcal{Z}\{f(kT - nT)\} = z^{-n} F(z),$$

sledi

$$f(k) = 18.75h(k-1) - 8.75(0.2)^{k-1}h(k-1).$$

Tražene vrednosti su

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 18.75 - 8.75 = 10$$

$$f(2) = 18.75 - 8.75 \cdot 0.2 = 17$$

$$f(3) = 18.75 - 8.75 \cdot (0.2)^2 = 18.4.$$

3.3 Diskretni sistemi

Sistem opisujemo kao proces kojim se vrši transformacija ulaznog signala ili pobude u izlazni signal ili odziv sistema. Diskretni sistem definisemo kao proces koji transformiše diskretni ulazni signal u diskretni izlazni signal,

$$y(k) = \mathfrak{T}\{u(k)\} \quad (3.40)$$

gdje je sa $u(k)$ označen ulazni, sa $y(k)$ izlazni signa, a sa \mathfrak{T} označen operator kojim LTI sistem transformise pobudni signal u signal odziva.

Linearni, vremenski invarijantni (LTI) diskretni sistemi se opisuju *diferencijalnim* jednačinama,

$$\sum_{i=0}^N a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^M b_j u(k-j), \quad a_0 = 1 \quad (3.41)$$

gde su a_i i b_j realne konstante. Određivanje odziva diskretnog sistema na pogodnu proizvođnjeg oblika direktnim rešavanjem u domenu diskretnog vremena u opštem slučaju nije jednostavan problem. LTI sistem se u potpunosti mogu karakterisati i preko njegovog odziva na jedinični impuls, koji nazivamo impulsnim odzivom. Ukoliko je poznat impulski odziv, odziv na Pobudu proizvoljnog oblika se može dobiti pomoću operacije konvolucije.

Impulski odziv $g(k)$ vremenski invarijantnog sistema se definiše kao odziv na jedinični impulsnii signal,

$$g(k) = \mathfrak{T}\{\delta(k)\}. \quad (3.42)$$

Poznavajući impulski odziv sistema, matematičkom operacijom koja je označena kao konvolucija, moguće je odrediti odziv LTI sistema na pobudni signal proizvođnjeg oblika.

Na osnovu definicije idealno odbirkovanog signala, zapisaćemo signal po bude na sledeći način.

$$u(k) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)\delta(k-i) \quad (3.43)$$

Zamenom izraza (3.43) u izraz diskretenog sistema (3.40) i na osnovu osobine

linearnosti sistema dobijamo

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathfrak{T}\left\{\sum_{i=0}^k u(i)\delta(k-i)\right\} \\ &= \sum_{i=0}^k u(i)\mathfrak{T}\{\delta(k-i)\} \\ &= \sum_{i=0}^k u(i)g(k-i) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Poredeći dobijeni izraz (3.44) sa definicijom konvolucije dva diskretna signala (3.20), vidimo da je odziv diskretnog vremenskog sistema jednak konvoluciji impulsnog odziva sistema i pobudnog signala,

$$y(k) = g(k) * u(k). \quad (3.45)$$

Na osnovu osobine \mathfrak{Z} -transformacije nad konvolucijom dva signala

$$Y(z) = G(z)U(z), \quad (3.46)$$

gdje je $U(z)$ \mathfrak{Z} -transformacija pobudnog signala $u(k)$, a $G(z)$ je \mathfrak{Z} -transformacija impulsnog odziva $g(k)$, odnosno *funkcija prenosa sistema*. Primenom inverzne \mathfrak{Z} -transformacije, odziv linearnog diskretenog sistema možemo da odredimo kao

$$y(k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathfrak{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\}. \quad (3.47)$$

Funkcija prenosa diskretnog sistema. Poznavajući kako se računa odziv sistema u kompleksnom z domenu primenom \mathfrak{Z} -transformacije nad konvolucijom (3.46), zaključujemo da je funkcija prenosa diskretnog sistema količnik \mathfrak{Z} -transformacije odziva i \mathfrak{Z} -transformacije signala pobude,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (3.48)$$

Kako se diskretni sistemi opisuju rekursivnim (diferencijalnim) jednačinama koja opisuje zavisnost ulaznog i izlaznog signala, direktnom primenom \mathfrak{Z} -transformacije uz nulte potete ne uslove dobijamo

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{j=0}^M b_j u(k-j) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i) / z \\ Y(z) &= \sum_{j=0}^M b_j U(z)z^{-j} - \sum_{i=1}^N a_i Y(z)z^{-i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Količnik 3-transformacija ulaznog signala i izlaznog signala, odnosno $Y(z)$ i $U(z)$ opisuju funkciju prenosa koja je sada racionalna funkcija, odnosno količnik dva polinoma

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Primer 3.9. Naći zatvorenu analitičku formu za Fibonačijev niz brojeva. Rešenje:

Fibonačijev niz brojeva karakteriše da je vrednost svakog elementa niza jednaka sumi prethodna dva elementa, s tim što su prva dva elemata niza 0 i 1. Stoga, ovaj problem možemo da opišemo kao differencnu jednačinu drugog reda,

$$f(k+2) = f(k+1) + f(k), \quad f(0) = 0, f(1) = 1 \quad (3.51)$$

Primenom 3-transformacije na izraz (3.51) dobijamo

$$z^2 F(z) - z^2(f(0) + f(1)z^{-1}) = zF(z) - zf(0) + F(z), \quad (3.52)$$

i ukoliko uvrstimo početne uslove $f(0) = 0, f(1) = 1$

$$F(z)(z^2 - z + 1) = z \rightarrow F(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}. \quad (3.53)$$

Faktorisanjem dobijenog izraza na partijalne razlomke

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{z}{z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right]. \quad (3.54)$$

I primenom tabičnog izraza za inverznu 3-transformaciju⁶ dobijamo analitički zapis u vremenkom domenu

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right). \quad (3.55)$$

3.4. Problemni

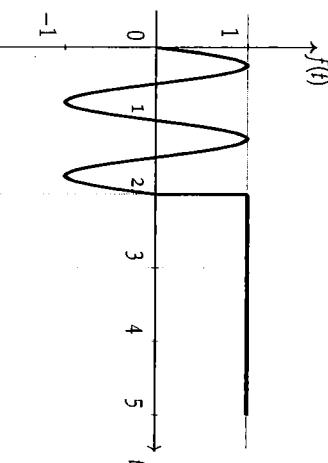
Problem 3.1. Pokazati da je $\mathcal{Z}\{\cos(\omega kT)\} = \frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$.

Problem 3.2. Naći 3-transformaciju signala $f(t) = e^{-t} \sin(t) + 1$ ukoliko je period odabiranja $T = \pi$.

Problem 3.3. Odrediti 3-transformaciju signala $f(k)$ čije su vrednosti jednake signalu $f(t)$ u trenucima odabiranja ukoliko je perioda odabiranja $T = 1$ sekund. Signal $f(t)$ prikazan je na slici 3.8 i opisan je sledećim izrazom,

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t), & 0 \leq t < 2, \\ 1, & t \geq 2. \end{cases}$$

Slika 3.8. Signal $f(t)$ iz problema 3.3.



Slika 3.8. Signal $f(t)$ iz problema 3.3.

Problem 3.4. Odrediti vezu kompleksnog lika izlaza i ulaza ako je differencna jednačina sistema

Dobijena vrednosti u eksponentnoj funkciji $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ poznata je u literaturi kao konstanta zlatnog preseka.

gde je sa u označen ulazni signal, a sa y izlazni signal.

Problem 3.5. Izračunati početnu i krajnju vrednost diskretnog signala $x(k)$, ako je njegov kompleksni ekvivalent $X(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}$.

- Problem 3.6.** Dat je izraz $F(z) = \frac{5z^2+z}{(z^2+2z+1)(z-3)}$. Odrediti $f(kT)$:
- metodom direktnog dejeljenja
 - metodom rastavljanja na parcijalne razlomke.

Problem 3.7. Odrediti inverznu \mathcal{Z} -transformaciju izraza $F(z) = \frac{z}{z^2+2z+3}$.

Problem 3.8. Diskretni sistem opisan je diferencnom jednačinom

$$y(k) - 1.3y(k-1) + 0.4y(k-2) = 0.9u(k-1) - 0.8u(k-2)$$

gde su $u(k)$ i $y(k)$ ulaz i izlaz sistema, respectivno. Pod pretpostavkom da se radi o kauzalnim signalima i da je $u(k) = 1(k)$ za $k \geq 0$, izračunati odziv sistema primenom \mathcal{Z} -transformacije i \mathcal{Z} -inverzne transformacije.

Ponašanje kontinualnih sistema automatskog upravljanja, koji se mogu opisati funkcijom prenosa, potpuno je određeno položajem kritičnih učestanosti u s-ravni¹. Karakteristične osobine, kao što su stabilnost, aperiodičnost, oscilatornost, vreme smreća i druge osobine koje karakterišu vremenski odziv sistema mogu se proceniti na osnovu polova sistema u zatvorenoj spregi, tj. nula karakterističnog polinoma sistema.

Na sličan način mogu se proceniti i osobine diskretnih sistema (signala) na osnovu položaja polova u z-ravni. Da bismo objasnili vezu između položaja polova u z-ravni i karakteristika odziva diskretnog sistema, potrebno je ustanoviti preslikavanje tipičnih oblasti² iz s-ravni u z-ravan.

4 Preslikavanje iz s u z-ravan

Preslikavanje iz s u z-ravan

Prema definiciji \mathcal{Z} -transformacije, preslikavanje iz s-ravni u z-ravan određeno je sa

$$z = e^{sT}$$

i ono je jednoznačno.

¹Ove oblasti čemo u daljem tekstu, zbog uskladitvivanja sa terminima komplikovane analize, zvati konture.

Preslikavanje iz z u s-ravni

Preslikavanje iz z-ravni u s-ravan određeno je sa

$$s = \frac{1}{T} \ln z + jk\omega_s \quad (4.2)$$

gde je $k \in \mathbb{Z}$, a ω_s kružna učestanost odabiranja. Ovo preslikavanje je višečnacno.

Napomena 5. Smenom $s = \sigma + j\omega$, izraz (4.2) sledi iz

$$e^{sT} = z \rightarrow e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\arg z}$$

zbog periodičnosti funkcije $e^{j\arg z}$

$$e^{j\arg z} = e^{j(\arg z + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j(\arg z + 2k\pi)}$$

$$e^{\sigma T} = |z| \Rightarrow \sigma T = \ln |z| \Rightarrow \sigma = \frac{\ln |z|}{T}$$

$$\omega T = j \arg z + j2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ako znamo da je učestanost odabiranja $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, odnosno $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$, sledi

$$s = \sigma + j\omega = \frac{\ln |z|}{T} + j \frac{\arg z}{T} + j\omega_s k$$

$$= \frac{1}{T} \ln z + j\omega_s k.$$

Napomena
 $\ln |z| e^{j\arg z} = \ln |z| + j \arg z$.

Da bismo ustavili povezanost ponašanja sistema (signala) opisanih u s-ravni i z-ravni, posmatrajmo \mathcal{L} transformaciju signala $Y(s)$, koja posle odabiranja postaje kompleksni lik povorke odabiraka $Y^*(s)$. U trenutku odabiranja, odabirkovani signal ima iste vrednosti kao i kontinualni signal. Tako, na primer, ukoliko je $y(t)$ eksponencijalna funkcija, tada i odabirkovani signal ima eksponentijalno ponašanje u trenutku odabiranja, sa istom amplitudom i vremenom konstantom kao i kontinualna funkcija. Ukoliko je $y(t) = e^{at} h(t)$, tada je

$$Y(s) = \frac{1}{s+a}, \quad Y^*(s) = \frac{e^{aT}}{e^{aT} - e^{-aT}} \quad i \quad Y(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (4.3)$$

Preslikavanje dela imaginare ose iz primarnog pojasa s-ravni, koji je označen

Stoga pol iz s-ravni $s = -a$, uzrokuje pojavu pola $z = e^{-aT}$ u z-ravni i taj pol $z = z_1$ oslikava iste karakteristike vremenskog odziva u trenutku odabiranja kao i ekvivalentni pol iz s-ravni s_1 . Njihova vezu definisana je izrazom $z_1 = e^{s_1 T}$.

Preslikavanje kontura od interesa biće započeto preslikavanjem konture stabilnosti, odnosno oblasti stabilnosti, koja je pre diskretizacije bila celu levu poluravan³.

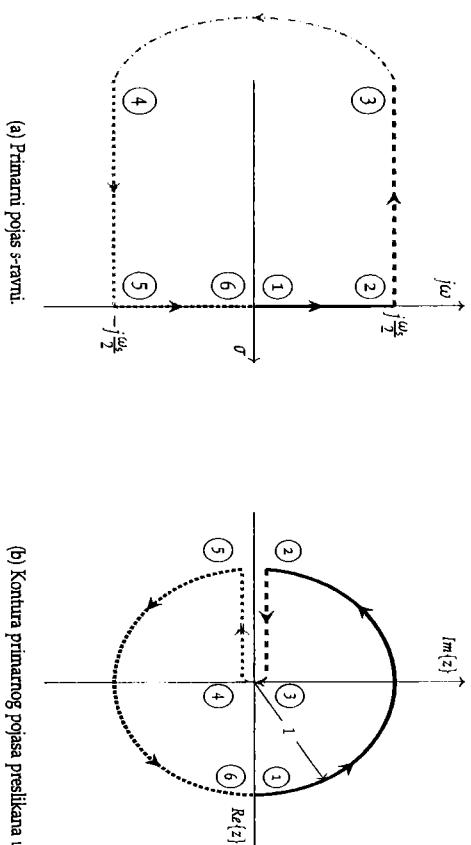
4.1 Preslikavanje primarnog pojasa

Postupak započinje preslikavanjem samo onog dela leve poluravni s, koja je ograničena primarnim pojasom⁴ s-ravni prikazanim na slici 10.2a. Ona predstavlja tzv. stabilan deo ravni u kom se, po teoremi o odabiranju nalaze sve kritične učestanosti.

Za preslikavanje kompleksne promenljive $s = \sigma + j\omega$ koristimo izraz (4.1),

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T + j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}. \quad (4.4)$$

$$\angle z = \omega T.$$



Slika 4.1: Preslikavanje primarnog pojasa s-ravni u z-ravni.

³Podsećamo da je teoremom odabiranja, leva poluravan sredina na tzv. primarni ili Nikston pojas.

⁴Podsećamo da je primarni pojas određen Nikstonom učestanotu $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ i posledica je umnožak spektra (karakterističnih učestanosti) oko učestanosti odabiranja ω_s .

Izraza (4.4) predstavlja zapis kompleksne promenljive z u eksponentijalnoj formi, pri čemu je modulu $|z| = e^{\sigma T}$, dok je argument $\angle z = \omega T$.

na slici 10.2a kao segment od (1) do (2) i segmenta simetričnog u odnosu na realnu osu od (6) do (5), započetemo uz privatanje očigledne činjenice da sve tačke na imaginarnoj osi imaju realan deo jednak nuli, $\sigma = 0$, dok se vrednost imaginarnog dela ω menja. Vrednost imaginarnog dela u koordinatnom početku (1) je $\omega = 0$ i ta se vrednost povećava do vrednosti Nikvištovе učestanosti (2) $\omega = \omega_N = \frac{\alpha_2}{T}$, odnosno simetrično (segment (6) do (5)) vrednost imaginarnog dela menja se od $\omega = 0$ do $\omega = -\frac{\alpha_2}{T}$. Ukoliko iskoristimo izraz (4.4), a s obzirom na to da je realni deo $\sigma = 0$, sledi da će se sve tačke tog segmenta preslikati u tačke u z-ravni čiji je modulu $|z| = e^{\sigma T} = 1$, a argument se menja od vrednosti $\angle z = 0$, (1), do vrednosti

$$\angle z = \omega_N T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} T = \pi,$$

, odnosno tačke segmenta od (6) do (5), preslikate se u tačke gde se argument menja od 0 do $-\pi$. Kao što je prikazano na slici 10.2, imaginarna osa primarnog pojasa s-ravni preslikala se u kružnicu poluprečnika 1 u z-ravni.

Segment od (2) do (3) koji predstavlja gornju granicu primarnog pojasa čine tačke na Nikvištovoj učestanosti $s = \sigma + j\omega_N$, pri čemu je $\sigma \in (0, -\infty)$. Primenom (4.4) te tačke će se preslikati u z-ravan u kompleksne promenljive sa argumentom $\angle z = \omega_N T = \pi$ i modulom $|z| \in (1, 0)$. Isto tako i simetrični segment (4) do (5) preslikće se u tačke z-ravni sa argumentom $\angle z = -\omega_N T = -\pi$ i modulom $|z| \in (1, 0)$. Na slici 10.2b vidi se da je to negativni deo realne ose unutar jediničnog kruga. Međutim, podsećamo da prisustvo polova (karakterističnih učestanosti) na samoj granici primarnog pojasa nije poželjno, jer se oni nalaze na granici teoreme odabranja.

Segment (3) do (4) čine polovi čija vrednost realnog dela $\sigma \rightarrow -\infty$, što će dovesti do preslikavanja u tačke čiji modul $|z| \rightarrow 0$, odnosno, u koordinatni početak.

Na osnovu prethodne analize, može se zaključiti da će se leva poluravan s-ravni preslikati u jediničnog krug z-ravni. Lako se može pokazati da će se desna poluravan preslikati u prostor van jediničnog kruga u z-ravni.

4.2 Preslikivanje prave vremena smirenja

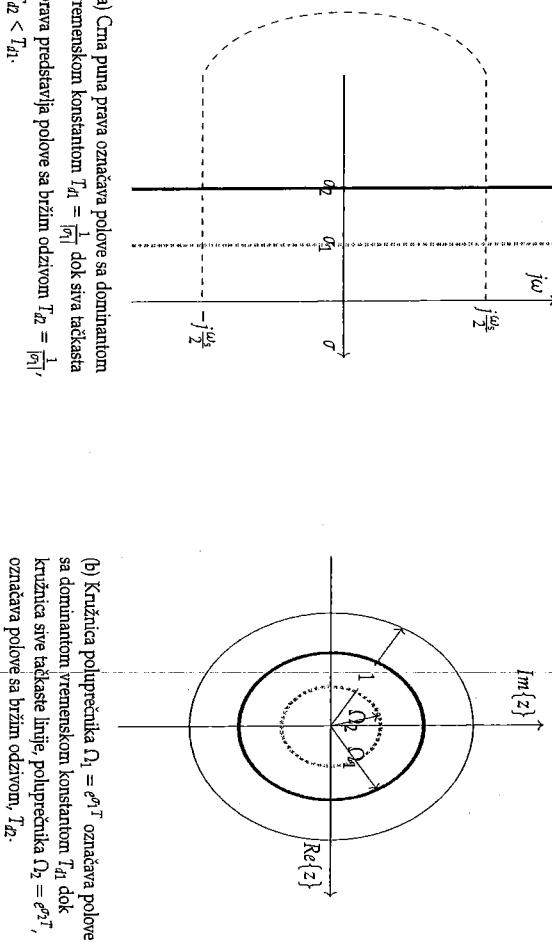
Prava u s-ravni koja ima konstantan realni deo predstavlja mesto tačaka sa jednakim vremenom smirenja⁵

$$s = \sigma + j\omega, \quad \sigma = \text{const}, \quad \omega \in (-\omega_N, \omega_N) \quad (4.5)$$

Ovo preslikavanje ostvaruje se na osnovu definicije kompleksnog broja

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \Rightarrow |z| = \Omega = e^{\sigma T} = \text{const}. \quad (4.6)$$

Lako se zaključuje da se prava preslikava u kružnicu poluprečnika $\Omega = e^{\sigma T}$ kao što je prikazano na slici 4.2.



(a) Cma puna prava označava polove sa dominantom vremenskom konstantom $T_d = \frac{1}{|\beta_1|}$ dok siva tačka prava predstavlja polove sa bržim odzivom $T_{d2} = \frac{1}{|\beta_2|}$, $T_{d2} < T_{d1}$.

(b) Kružnica poluprečnika $\Omega_1 = e^{\sigma_1 T}$ označava polove sa dominantom vremenskom konstantom T_d dok kružnica sive tačkaste linije, poluprečnika $\Omega_2 = e^{\sigma_2 T}$, označava polove sa bržim odzivom, T_{d2} .

Zaključujemo da u kontinuacionom domenu realni deo pola σ predstavlja faktor prigušenja, određuje vreme smirenja signala i u vremenskoj funkciji signala se javlja kao član $e^{-\sigma t}$. Što je pol bliže imaginarnoj osi, odnosno što je $|\sigma|$ manje to je odziv sporiji. U diskretnom domenu, modulu pola $|z|$ u z-ravni, Slika 4.2: Preslikavanje prave vremena smirenja iz s-ravni u z-ravni

⁵ Vreme smirenja zavisi od dominantne vremenske konstante T_d , koja se racuna kao $T_d = \frac{1}{|Re s_d|}$, gde je sa s_d ozначен dominantan pol, odnosno stabilan pol najblizi imaginarnoj osi.

određuje iste karakteristike odziva sistema. Polovi sa većim modulom, koji se nalaze na kružnici bližoj jedinčnoj kružnici imaju sporiji odziv nego polovi na kružnici sa manjim poluprečnikom.

4.3 Preslikavanje konture konstantnih učestanosti

Polovi koji čine liniju sa konstantnim imaginarnim delom, $\omega = \text{const}$, možemo opisati kao

$$s = \sigma + j\omega, \quad \omega = \text{const}, \quad \sigma \in (-\infty, 0). \quad (4.7)$$

Primenom definicije kompleksne promenljive z važi

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \implies |z| = e^{\sigma T} \in (0, 1) \wedge \angle z = \omega T = \text{const} \quad (4.8)$$

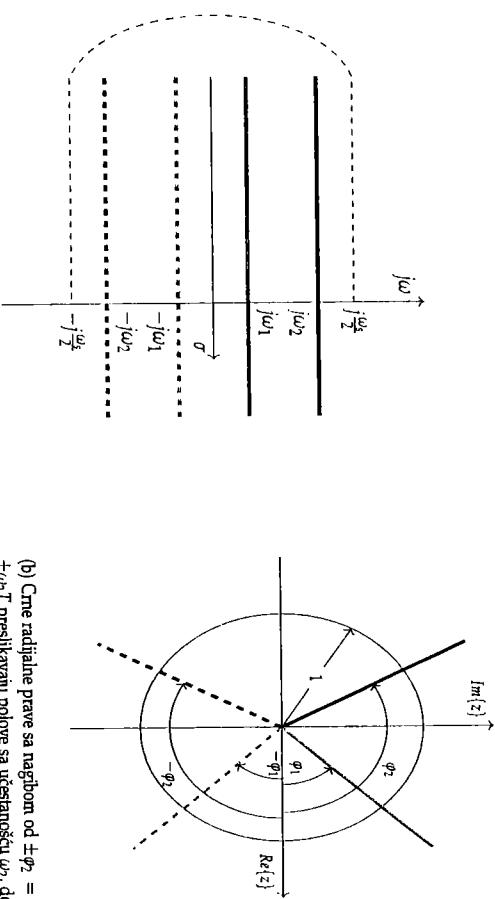
što se može videti i na slici 4.3. Prave iz s -ravnini sa konstantnim imaginarnim delom preslikavaju se u z -ravnini u radijalne linije sa početkom u koordinatnom početku i ugлом $\angle z = \omega T$ koji zavisi od učestanosti ω . Polovi koji se nalaze na radikalnum linijama sa većim uglom karakteriše veća učestanost oscilovanja.

Deo prave koji se nalazi u nestabilnoj polutavni s -ravnini preslikao se u deo radikalne linije van jedinčnog kruga, dok se stabilni deo preslikao na deo linije između 0 i 1. Polovi na pravoj $\pm j\omega_N = \frac{\omega}{2}$ preslikaju se na negativan deo realne ose z -ravnini kao što je opisano u poglaviju 4.1, dok će se aperiodični polovi koji su na realnoj osi preslikati na pozitivan deo realne ose. Sa slike 4.3 vidi se da će polovi koji u z -ravnini imaju veći argument imati i veću učestanost oscilovanja.

4.4 Preslikavanje položaja polova i vremenskog odziva

Na slici 4.4 dat je položaj polova u s -ravnini. Polovi su raspoređeni tako da se nalaze i u stabilnom i u nestabilnom delu s -ravnini, sa različitim vrednostima realnog i imaginarnog dela pola. Ako se podsetimo da je opšti oblik sistema drugog reda

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4.9)$$



(a) Čine prave $\pm j\omega_1$ označavaju polove sa učestanostju ω_1 , dok sive prave $\pm j\omega_2$ označavaju polove koji osciluju sa manjom učestanostju ω_2 .

(b) Čine radikalne prave sa negativom $\pm \phi_1 = \pm \omega_1 T$ preslikavaju polove sa učestanostju ω_1 , dok sive radikalne prave sa nagibom $\pm \phi_2 = \pm \omega_2 T$ preslikavaju polove koji uzrokuju manju učestanost oscilovanja.

Znano da su polovi ovakvog sistema par kompleksno-konjugovanih brojeva konstantne učestanosti oscilovanja iz s -ravnini u z -ravni.

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ &= \sigma \pm j\omega, \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdje je ω_n prirodna neprigušena učestanost, a ξ faktor prigušenja, odnosno σ je realni deo pola, ω imaginarni deo. Impulsni odziv ovakvog sistema drugog reda je

$$y = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) h(t), \quad (4.11)$$

odakle se lako zaključuje ono što smo ranije uveli, da realni deo utiče na prigušenje i brzinu odziva, dok imaginarni deo utiče na učestanost oscilovanja. Na slici 4.4 označeni su konjugovani kompleksni parovi polova sa različitim imaginarnim i realnim delovima (odgovarajući konjugovani par označen je kao

(y'), kao i realni polovi koji su rezultat sistema prvog reda

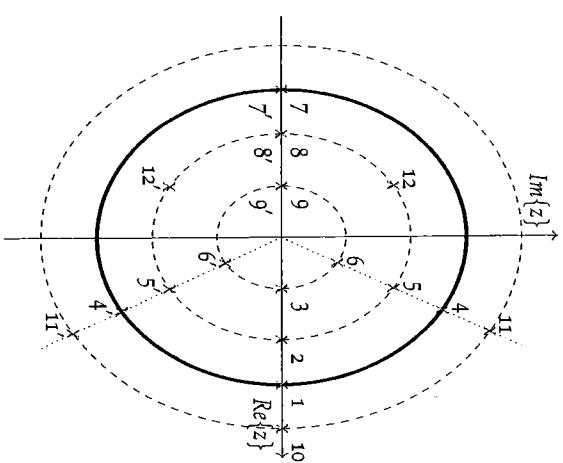
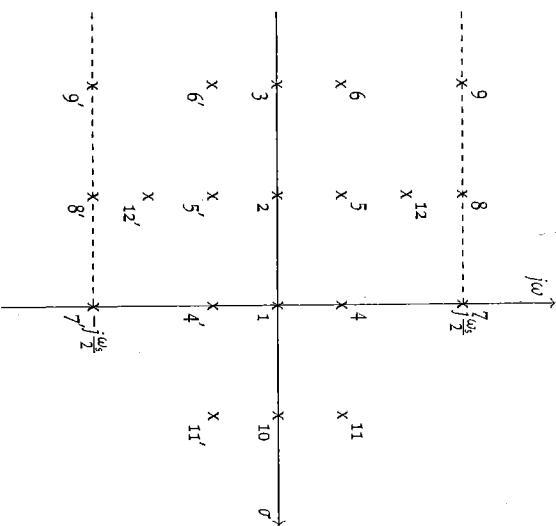
$$G(s) = \frac{k}{s+a}, \quad (4.12)$$

a impulsni odziv ovakvog sistema je

$$y(t) = ke^{-at}h(t). \quad (4.13)$$

Ukoliko se izvrši diskretizacija ovih sistema sa učestanostu ω_s , dobijamo diskretnе sisteme čije polove možemo predstaviti u z-ravni kao na slici 4.5.

Na slici 4.6 prikazani su karakteristični impulsni odzivi na označene polove, tj. parove konjugovano kompleksnih polova. Prikazani odzvi su diskretni i prikazani kao povorka impulsa. Imajući u umu da argument pola određuje učestanost oscilovanja, jasno je da će polovi 6, 5, 4, 11 (i odgovarajući konjugovani kompleksni parovi 6', 5', 4', 11') oscilovati istom učestanostu. Kod nestabilnih polova 11, 11' odziv nije prigušen zbog čega se amplituda oscilacija povećava tokom vremena. Diskretni sistem sa parom polova 12, 12' koji imaju veći argument od npr. polova 5, 5' oscilovare većom učestanostu, ali kako im je modulo isti, njihovo vreme ulaska u ustajeno stanje, tj. dominantna vremenska konstanta će biti ista, kao i kod sistema sa polom 2, koji će rezultovati aperiodičnim odzivom, ali istim vremenom ulaska u ustajeno stanje. Pored pola 2, aperiodičan odziv će dati i polovi 3, 1 i sa različitim prigušenjem. Sistemi sa polom 3, parom 6, 6', i 9, 9' koje karakteriše isti modul, takođe će imati isto vreme ulaska u ustajeno stanje. Treba obratiti pažnju na izgled odziva na polove 7, 7', 8, 8', 9, 9', gde se vide impulsi na velikom rastojanju iz kojih teško da može da se rekonstruiše oblik signala koji bi trebalo da prezentuje. Razlog za to jeste što su ovi polovi nalazili u s-ravnini na Nikvistovoj učestanosti, odnosno na granici teoreme odabiranja, zbog čega odbirkovanje, kao što se može primetiti, nije ni dobro.



Slika 4.4: Položaj polova kontinuitahtog sistema.

Vidimo da su se realni polovi (1, 2, 3, 10) preslikali na pozitivan dio realne ose kako je u prethodnum poglavljima diskutovano. Pol to koji je nestabilan preslikao se u deo pozitivnog dela realne ose izvan jediničnog kruga, dok se pol

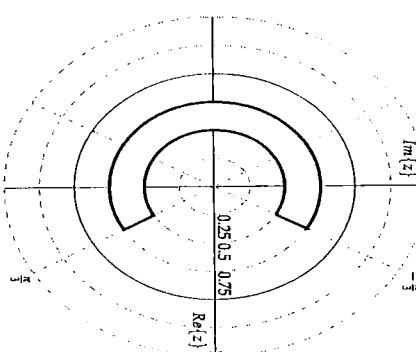
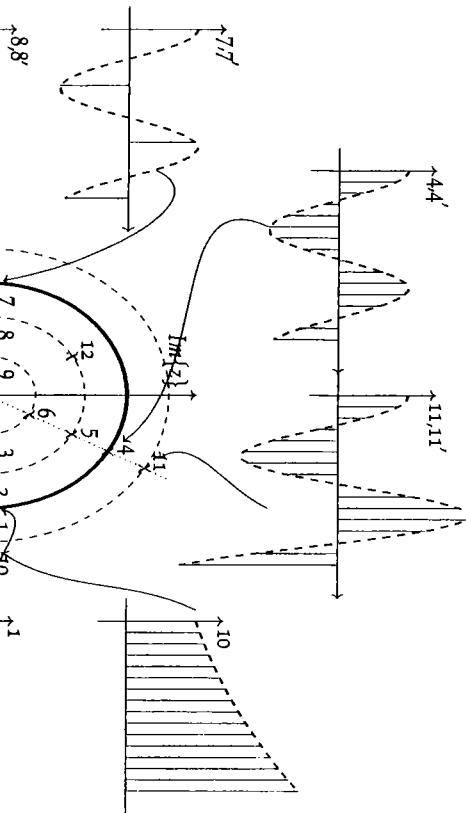
1 koji je na granci stabilnosti prema realne ose, takođe na kruznicu. Polovi 2 i 3 su realni, ali pol 3 ima manju došto pozitivnog dela realne ose u odnosu veći koeficijent prigušenja (realni deo pola), zbog čega se on preslikao bliže koordinatom početku u odnosu na pol 2.

Konjugovano kompleksni polovi 11, 4, 5, 6 imaju jednak imaginarni deo, što će u procesu preslikavanja rezultovati polovima sa jednakim uglovim i nači će se na istoj radijalnoj polupravoj (istemtrčno 11, 4, 5, 6). Posto je pol 11 nestabilan, on će se preslikati u pol van jedinične kružnice. Polovi 4, 4' su na granci stabilnosti, što odgovara jediničnoj kružnici u z-ravni, dok polovi 5, 5' imaju isti argument, dok polovi 6, 6' imaju isti argument, dok polovi 9, 9' imaju isti argument, dok polovi 12, 12' koji će zbog veće vrednosti imaginarnog dela imati veći argument u z-ravni. Isto je i sa polovima 6, 6' u odnosu na pol 3. Polovi 7, 7', 8, 8', 9, 9' nalaze se na Nikvistovoj učestanosti, pa će se preslikati sa argumentom od π , odnosno na negativan deo realne ose u rasporedu koji je određen njihovim reallnim delom.

Slika 4.5: Odgovarajući položaj polova diskretizovanog sistema.

Primer 4.1. Na slici 4.7 prikazana je oblast u kojoj se nalaze polovi diskretnog sistema. Skicirati oblast u kojoj se nalaze polovi kontinualnog sistema čiji je digitalni ekvivalent dat na slici 3 ukoliko je utičanost odabiranja $\omega_s = 6 \frac{\pi}{s}$.

Slika 4.7: Oblast položaja polova diskretnog sistema.



Raščenje.

Kao i u prethodnom zadatku, krenućemo od smere koja povezuje kompleksne promenljive s z

$$z = e^{\sigma T} = e^{(-\sigma + j\omega)T} = e^{-\sigma T} e^{j\omega T},$$

odakle sledi

$$|z| = e^{-\sigma T}, \quad \text{Arg}[z] = \omega T,$$

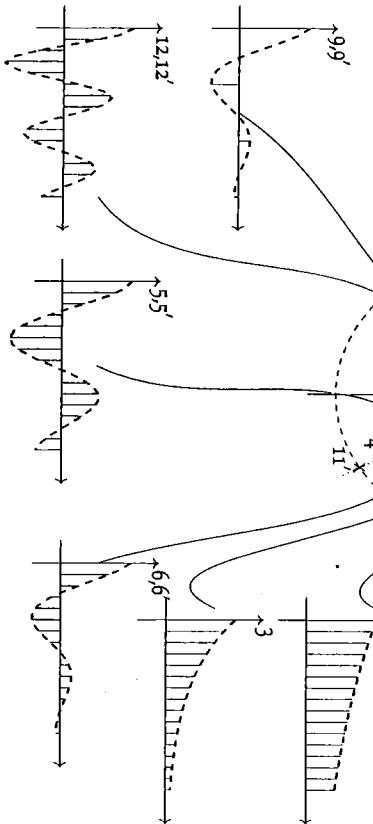
gdje je T perioda odabiranja i može se odrediti iz relacije

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ s}.$$

Koristeći dobijene izraze, možemo odrediti realni i imaginarni deo polova na sledeći način

$$\sigma = -\frac{1}{T} \ln(|z|), \quad \omega = \frac{1}{T} \text{Arg}\{z\}.$$

Slika 4.6: Karakteristični impuljni odzivi diskretnog sistema zavisno od položaja polova.



Dobijene izraze koristićemo u nastavku za određivanje realnog i imaginarnog dela polova koji obrazuju konturu u gornjoj polovini kompleksne s-ravni. Nai-me, označena kontura simetričnije je u odnosu na realnu osu pa za preslikavanje možemo posmatrati samo gornju polovinu koju obrazuju polovi

$$\begin{aligned} z_1 &= 0.5e^{j\frac{\pi}{3}} \Rightarrow |z_1| = 0.5, \quad \text{Arg}\{z_1\} = \frac{\pi}{3} \\ z_2 &= 0.75e^{j\frac{\pi}{3}} \Rightarrow |z_2| = 0.75, \quad \text{Arg}\{z_2\} = \frac{\pi}{3} \\ z_3 &= 0.75e^{j\pi} \Rightarrow |z_3| = 0.75, \quad \text{Arg}\{z_3\} = \pi \\ z_4 &= 0.5e^{j\pi} \Rightarrow |z_4| = 0.5, \quad \text{Arg}\{z_4\} = \pi. \end{aligned}$$

Primenom prethodno dobijenih izraza sledi

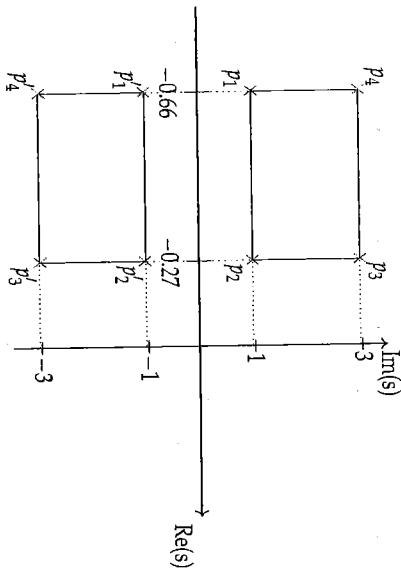
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{T} \ln(|z_1|) = -\frac{3}{\pi} \ln(0.5) = 0.66, \quad \omega_1 = \frac{1}{T} \text{Arg}\{z_1\} = \frac{3}{\pi} \frac{\pi}{3} = 1 \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{T} \ln(|z_2|) = -\frac{3}{\pi} \ln(0.75) = 0.27, \quad \text{Arg}\{z_2\} = \text{Arg}\{z_1\} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 = 1 \\ |z_3| &= |z_2| \Rightarrow \sigma_3 = \sigma_2 = 0.27, \quad \omega_3 = \frac{1}{T} \text{Arg}\{z_3\} = \frac{3}{\pi} \pi = 3 \\ |z_4| &= |z_1| \Rightarrow \sigma_4 = \sigma_1 = 0.66, \quad \text{Arg}\{z_4\} = \text{Arg}\{z_1\} \Rightarrow \omega_4 = \omega_3 = 3. \end{aligned}$$

Kako smo na početku pretpostavili da je upšteni oblik konjugovano kompleksnih polova $-\sigma \pm j\omega$, uvršavanjem dobijenih vrednosti za σ i ω dobijamo polove u s-ravni

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.66 + j \\ p_2 &= -0.27 + j \\ p_3 &= -0.27 + 3j \\ p_4 &= -0.66 + 3j. \end{aligned}$$

Dobijene vrednosti možemo predstaviti u kompleksnoj s-ravni, slika 4.

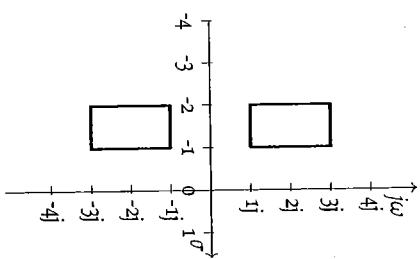
Kao i u prethodnom zadatku, polovi p_i' su preslikani simetrično u odnosu na realnu osu.



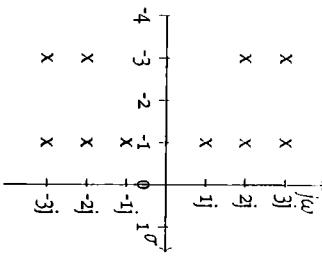
Slika 4.8: Položaj polova u kompleksnoj s-ravni.

4.5 Problemi

Problem 4.1. Na slici 4.9 je prikazana oblast gde se nalaze polovi u s-ravni. Skicirati oblast u koju će se preslikati označena oblast u s-ravni ako je učestanost odabiranja $\omega_s = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

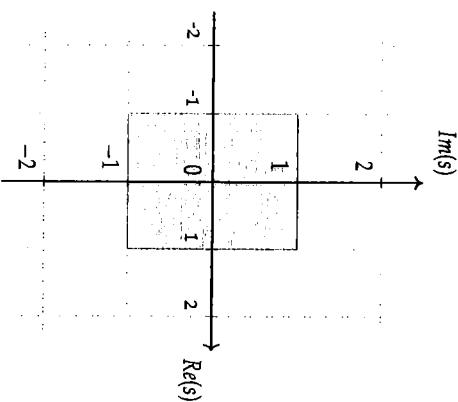


Slika 4.9: Položaj polova u kontinualnom sistemu.



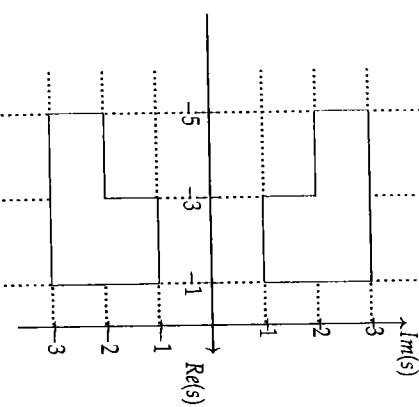
Slika 4.10: Položaj polova kontinualnog sistema.

Problem 4.3: Na slici 4.11 prikazana je oblast u s-ravni u kojoj se nalaze polovi kontinualnog sistema. Nacrtati oblast u z-ravni u kojoj se nalaze polovi diskretnog sistema koji je digitalni ekvivalent datog kontinualnog, ukoliko je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{2}$ s.



Slika 4.11: Slika za zadatok 4.3

Problem 4.5: Skicirati oblast u s-ravni u kojoj se nalaze polovi sa dominantnom vremenskom konstantom T_d većom od $\frac{1}{3}$ i manjom od 3, a potom preslikati deo te oblasti iz primarnog pojasa u z-ravan ukoliko je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{3}$ sekundi.



Slika 4.12: Položaj polova u kompleksnoj s-ravni iz zadatka 4.4.

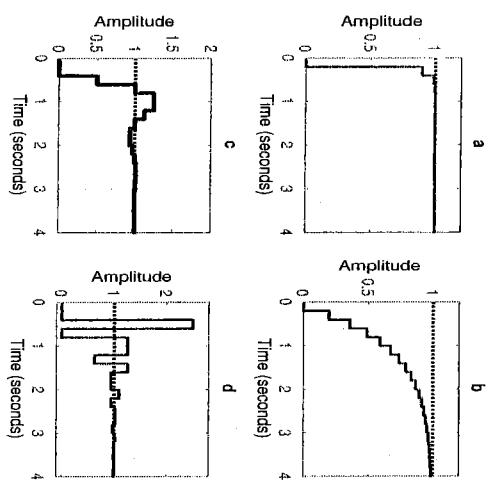
Problem 4.6: Skicirati oblast u s-ravni u kojoj se nalaze polovi sa dominantnom vremenskom konstantom T_d većom od $\frac{1}{4}$ i prirodnom neprigušenom učestanom štu manjom od $2\pi rad/s$, a potom preslikati deo te oblasti iz primarnog pojasa u z-ravan ukoliko je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{3}$ sekundi.

Problem 4.7: Skicirati oblast u s-ravni u kojoj se nalaze polovi sa prirodnom neprigušenom učestanostu ω_n većom od $1 rad/s$ i manjom od $3\pi rad/s$, a potom preslikati deo te oblasti iz primarnog pojasa u z-ravan ukoliko je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{4}$ sekundi.

Problem 4.8: Na slici 4.13 prikazani su odzvi sistema na step pobudu. Poveži ponuđene funkcije prenosa sa odgovarajućim step odzivima.

- (i) $G(z) = \frac{2.5}{z^2 + 2z + 0.5}$
- (ii) $G(z) = \frac{0.2}{z^2 - 0.8}$
- (iii) $G(z) = \frac{1.3}{z^2 + 1.3}$
- (iv) $G(z) = \frac{0.5}{z^2 - z + 0.5}$
- (v) $G(z) = \frac{0.9}{z - 0.1}$

Problem 4.4: Na slici 4.12 prikazana je oblast polova u kompleksnoj s-ravni (oblast osećena svom bojom). Preslikati datu oblast u odgovarajuću oblast u z-ravni ukoliko je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{3}$ sekundi.



Slika 4.13: Odzivi na sisteme
iz zadatka 4.8.

5 Stabilnost diskretnih sistema

Stabilnost predstavlja jedno od osnovnih svojstava svakog dinamičkog sistema. Postoji veći broj formalnih definicija pojma stabilnosti. Kada su procesi nelinearni, uobičajeno je pojam stabilnosti vezati ne za proces u celini, već za svaku njegovu mirtnu radnu tačku ponosob, kao što je objašnjeno i u poglavljiju 1.3¹. Tada se pojam stabilnosti odnosi na sposobnost procesa da ostane u okolini tekuce mirtne radne tačke nakon delovanja dovoljno malog poremetaja. Pod pojmom „poremetaja“ podrazumeva se spoljašnje dejstvo koje izvodi proces iz ravnotežnog stanja. Proces može posedovati više radnih tačaka od kojih su neke stabilne, a neke ne.

Formalno stabilnost diskretnih procesa može se definisati na više načina, kao što su stabilnost u smislu Ljapunova, asimptotska i eksponentijalna stabilnost, BIBO stabilnost, kao i druge.²

Definicija 12. (*Stabilnost radne tačke diskretnog sistema u smislu Ljapunova.*) Stanje (radna tačka) diskretnog sistema x_0 je *stabilno* ukoliko za proizvoljno malo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ postoji $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$, takvo da važi

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(k) - x_0\| < \epsilon \quad (\forall k > 0). \quad (5.1)$$

Drugim rečima, ma kako malo dozvoljeno odstupanje ϵ od ravnotežnog položaja izabrali, može se naći dovoljno mala okolina δ početnog stanja takva da će odstupanje dajanje trajektorije od ravnotežnog položaja biti manje od dozvo-

¹ Stabilnost BIBO (engl. bounded-input, bounded-output (BIBO) stability) može se definisati i za nelinearne procese i odnos se na proces u celini.)

² Neke od pomenutih definicija samo često formalno navestiti, bez detaljnog objašnjavanja, a posebno će biti nagnute one od interesa za nastavak izlaganja. Više detalja o terminima i pojima koji se koriste dato je u poglavljiju 1.3.

jenog ε .

Definicija 13. (Asimptotska stabilnost u smislu Ljapunova.) Stanje (radna tačka) diskretnog sistema x_0 je asimptotski stabilna ukoliko postoji pozitivan broj δ_1 takav da važi

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_0. \quad (5.2)$$

Dругим rečima, ukoliko je stanje sistema stabilno u smislu Ljapunova, i ukoliko se nakon delovanja dovoljno malog poremećaja proces vraća u ravnotežno stanje, tada je to stanje asimptotski stabilno. Ako se proces asimptotski vraća u ravnotežno stanje bez obzira na intenzitet poremećaja, tada kažemo da je radna tačka globalno asimptotski stabilna.

Definicija 14. (Eksponentijalna stabilnost u smislu Ljapunova.) Stanje (radna tačka) diskretnog sistema x_0 je eksponentijalno stabilno ukoliko postoji pozitivan broj δ_2 i pozitivni brojevi M i $\lambda \in (0, 1)$, takvi da je

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|x(k) - x_0\| < M\|x(0) - x_0\|^{\lambda^k} \quad (\forall k > 0). \quad (5.3)$$

Kao i u prethodnoj definiciji, ukoliko (5.3) važi bez obzira na intenzitet poremećaja, tada kažemo da je radna tačka globalno eksponentijalno stabilna.

U sklopu ovog kursa, akcenat je na diskretum *linearnim* dinamičkim sistemima, a konačne dimenzije. Za takve sisteme stabilnost može se definisati za sistem u celini. Stabilnost u smislu Ljapunova i BBO stabilnost su gotovo ekvivalentne, a asymptotska stabilnost implicira eksponentijalnu stabilnost.

5.1 Stabilnost linearnih diskretnih procesa

U slučaju linearnih procesa, stabilnost nije svojstvo određene radne tačke, već svojstvo samog procesa. Onda možemo govoriti o asimptotski stabilnosti,

granično stabilnum i nestabilnum linearnim procesima, bez specifikiranja na koju se mjeru radnju tačku procesa pojam stabilnosti odnosi.

Bez obzira na vrednost spoljašnjeg ulaza, svaki asimptotski stabilan linearan proces je ujedno globalno stabilan. Podsećamo da je vremenski kontinualan sistem stabilan ako i samo ako sve njegove svojstvene vrednosti koje su ujedno i korenii karakterističnog polinoma, imaju negativan realni deo. U tom slučaju sopstveni odziv sistema, koji je određen svojstvima fundamentalne matrice sistema, iščezava tokom vremena.

Diskretni linearni procesi, kao i kontinualni, u potpunosti su određeni svojstvima karakteristične matrice³, odnosno polovima sistema. Pod stabilnum sistem podrazumeva se onaj čiji sopstveni odziv teži nuli, odnosno prelazni režim odziva iščezava tokom vremena.

Ukoliko posmatramo sistem sa funkcijom prenosa

$$G(z) = \frac{Z}{z - p} \quad (5.4)$$

njegov sopstveni odziv (impulsni odziv ili kernel sistema) je $g(k) = p^k h(k)$ koji će iščeznuti tokom vremena ukoliko je $|p| < 1$. Taj uslov proizilazi i kao rezultat preslikavanja stabilnih polova iz s -ravnini u z -ravnini, koji su se preslikali u jedinični krug, odnosno u oblast gde polovi imaju $|z| < 1$. Ukoliko posmatramo sistem opisan funkcijom prenosa sa realnim i različitim polovima

$$G(z) = \frac{B(z)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}, \quad (5.5)$$

njegov svojstveni odziv je

$$g(k) = (A_1 p_1^k + A_2 p_2^k + \cdots + A_n p_n^k) h(k), \quad (5.6)$$

gde su A_1, A_2, \dots, A_n odgovarajući koeficijenti Herisajdovog razvoja. Da bi ovaj odziv išezao, neophodno je da svaki sabirak ovog izraza iščezava, odnosno modulo svih polova mora biti manji od jedan, $|z_i| = |p_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. Slično se može pokazati i ukoliko funkcija prenosa sistema ima par konjugovano-kompleksnih polova p_i i p_i^*

$$G(z) = \frac{B_i(z)}{(z^2 + a_i z + b_i)} = \frac{A_i z}{(z - p_i)} + \frac{A_i^* z}{(z - p_i^*)}. \quad (5.7)$$

Pojam karakteristične ili svojstvene matrice sistema sada samo uvidimo, a u daljem tekstu će biti detaljnije razmatran.

Ako A_i i p_i zapisemo u eksponencijalnom obliku

$$\begin{aligned} A_i &= |A_i| e^{j\alpha_i} \\ p_i &= r_i e^{j\beta_i} \end{aligned}$$

gde su α_i i β_i fazne komponente kompleksnih brojeva A_i i p_i i uvrstimo u (5.6) dobijamo sopstveni odziv

$$g(k) = |A_i|r_i^k [e^{j(\beta_i k + \alpha_i)} + e^{-j(\beta_i k + \alpha_i)}] h(k). \quad (5.8)$$

Ekvivalentan oblik dobijenog odziva je

$$g(k) = 2|A_i|r_i^k \cos(\beta_i k + \alpha_i) h(k). \quad (5.9)$$

iješčava ukoliko je $r_i < 1$, odnosno ako je moduo konjugovano-kompleksnih polova manji od jedan, $|p_i| < 1$.

U slučaju da funkcija prenosa ima višestruke polove, bilo realne ili kompleksne

$$G(z) = \frac{B_i(z)}{(z - p_i)^m} = \frac{A_{i1}}{(z - p_i)} + \frac{A_{i2}}{(z - p_i)^2} + \dots + \frac{A_{im}}{(z - p_i)^m}, \quad (5.10)$$

sopstveni odziv je oblika

$$g(k) = [A_{1i}r_i^k + A_{1i}kp_i^{k-1} + \dots + A_{mi} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-2))}{(m-1)!} p_i^{k-(m-1)}] h(k).$$

koji, kao i u prethodnim slučajevima, išežava kada je $|p_i| < 1$.

Definicija 15. (Stabilnost linearnih, stacionarnih, vremenski diskretnih procesa)
Ukoliko sve svojstvene vrednosti procesa (korenji karakterističnog polinoma, polovi) imaju moduo manji od jedan, tada je proces strogo stabilan. Ukoliko neima svojstvenih vrednosti van jedinične kružnice, a sve svojstve vrednosti na jediničnoj kružnici su jednostrukе, tada je proces granično stabilan. Ukoliko proces poseduje bar jednu svojstvenu vrednost van jedinične kružnice ili višestruke svojstvene vrednosti na kružnici, proces je nestabilan.

Primer 5.1. Komentarisi stabilnost sledećih sistema:

a) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.3)^2(z-1)}$

Rešenje:

Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$, dvostruki pol $z_{2,3} = -0.3$ i $z_4 = 1$, moduo prva tri pola manji je od 1, ali se pol z_4 nalazi na jediničnoj kružnici pa je sistem granično stabilan.

b) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.3)^2(z-1)}$

Rešenje:

Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$, $z_{2,3} = -0.3$, ali i trostruki pol $z_{4,5,6} = 1$ koji je na granici stabilnosti. Pojava višestrukih polova na granici stabilnosti, iako su ostali polovi stabilni, prouzrokuje nestabilnost sistema.

c) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.3)^2(z-1)}$

Rešenje:

Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$, $z_{2,3} = -0.3$, ali i trostruki pol $z_{4,5,6} = 1$ koji je na granici stabilnosti. Pojava višestrukih polova na granici stabilnosti, iako su ostali polovi stabilni, prouzrokuje nestabilnost sistema.

d) $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+1.3)}$

Rešenje:

Polovi ovog sistema su $z_1 = 0.5$ i $z_2 = -1.3$. Pol z_2 nalazi se van jedinične kružnice pa je sistem nestabilan.

Međutim, nije uvek jednostavno i očigledno odrediti polove sistema bez upotrebe softverskih alata namenjenih za rešavanje numeričkih problema. To se uvek dešava kada je red karakterističnog polinoma $n > 2$,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0. \quad (5.11)$$

Tada se koriste različiti alati za analizu stabilnosti, odnosno postupci koji će nam pokazati kada su korenji ovog karakterističnog polinoma u jediničnom krugu, kao što su algebarski kriterijum (Jurićev, Rautov) ili grafo-analitički (Nikistov kriterijum).

5.2 Jurijev kriterijum stabilnosti

Jurijev kriterijun stabilnosti polazi od opšteg oblika karakterističnog polinoma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0 \quad (5.12)$$

na osnovu kog se formira Jurijeva tabela na sledeći način

	z^0	z^1	z^2	z^3	\dots	\dots	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	\dots	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	\dots	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	\dots	b_{n-1}
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	\dots	\dots	b_0
5	c_0	c_1	c_2	\dots	\dots	\dots	c_{n-2}
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	\dots	\dots	c_0
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$2n-3$	m_0	m_1	m_2				

Tabela 5.1: Jurijeva tabela

$$\begin{array}{c|ccc} & z^0 & z^1 & z^2 \\ \hline 1 & b & a & 1 \end{array}$$

Rješenje:

Sistem je drugog reda, $n = 2$, i formiratemo Jurijevu tabelu,

$$\begin{array}{c|ccc} & z^0 & z^1 & z^2 \\ \hline 1 & b & a & 1 \end{array}$$

Pošto već u prvoj vrsti tabele imamo 3 elementa, dalje se tabela ne popunjava. Uslovi stabilnosti:

- 1) $f(1) > 0 \Rightarrow 1 + a + b > 0 \Rightarrow b > -a - 1$
- 2) $(-1)^2 f(-1) > 0 \Rightarrow 1 - a + b > 0 \Rightarrow b > a - 1$
- 3) $|b| < 1 \Rightarrow -1 < b < 1$.

$k = 0, \dots, n-1$ $k = 0, \dots, n-2$ $k = 0, \dots, n-3$.

Prema Jurijevom kriterijumu stabilnosti, sistem će biti stabilan ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $f(1) > 0$
2. $(-1)^n f(-1) > 0$
3. $|a_0| < |a_1|$
4. $|b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, \dots, |m_0| > |m_2|$

Jurijev test omogućava nam ispitivanje stabilnosti u zavisnosti i od nepoznatih parametara. Ukoliko jedan od uslova 1.-4. nije zadovolen, za sistem ne možemo tvrditi da li je stabilan, ali ne znamo ni da li je grančno stabilan ili nestabilan.

Formira se Jurijeva shema:

$$\begin{array}{c|cccc} & z^0 & z^1 & z^2 & z^3 \\ \hline 1 & b & a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a & b \\ 3 & M_0 & M_1 & M_2 \end{array}$$

Primer 5.2. Dat je sistem čiji je karakteristični polinom

$$f(z) = z^2 + az + b$$

U ravnim parametara $a \times b$ odrediti oblast stabilnosti sistema.



Slika 5.1: Oblast stabilnosti iz primera 5.2.

$$2. b^2 - 1 > 0 \wedge -a < 0$$

Podslučaj se odbacuje jer je u kontradiktornosti sa trećim uslovom ($b^2 > 1$).

$$3. b^2 - 1 < 0 \wedge -a > 0$$

Nakon oslobođanja od apsolutne vrednosti dobija se nejednakost $-b^2 + 1 > -a$.

$$4. b^2 - 1 < 0 \wedge -a < 0$$

Nakon oslobođanja od apsolutne vrednosti dobija se nejednakost

$$-b^2 + 1 > a. \quad (5.13)$$

Članovi M_k računaju se na sledeći način:

$$M_0 = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b^2 - 1$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = ab$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a.$$

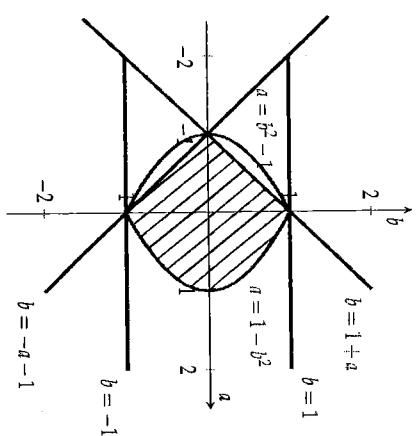
Nakon formiranja Jurijeve sheme, ispituju se uslovi:

- $f(1) = 1 + a + b > 0 \Rightarrow b > -a - 1$
- $(-1)^3 f(-1) = 1 + a - b > 0 \Rightarrow b < a - 1$
- $|b| < 1 \Rightarrow -1 < b < 1$
- $|b^2 - 1| > |-a|$

Poslednji uslov može se razložiti na četiri podslučaja:

$$1. b^2 - 1 > 0 \wedge -a > 0$$

Podslučaj se odbacuje jer je u kontradiktornosti sa trećim uslovom ($b^2 > 1$).



Slika 5.2: Oblast stabilnosti iz primera 5.3.

5.3 Problemi

Problem 5.1. Komentarisati stabilnost sledećih vremenski kontinualnih/diskretnih sistema u negativnoj zatvorenoj sprezi (eksplicitno naglasiti da li je sistem stabilan/granično stabilan/nestabilan):

a) $f(z) = (z + 0.1)(z + 1)$

b) $f(s) = s^2(z^2 + 7s + 10)$

c) $f(z) = (z + 0.5)^2(z - 0.3)(z + 0.2)$

d) $f(s) = (s + 0.2)(s - 0.3)$

e) $W(s) = \frac{3s+13}{(s-1)(s+4)}$

f) $G(z) = \frac{z+1,1}{(z-0,2)(z+0,9)^3}$

g) $f(z) = (z + 1,1)(0,6z^2 + 0,12z + 0,008)$

f je karakteristični polinom funkcije spregnutog prenosa, G je funkcija spregnutog prenosa i W je funkcija povratnog prenosa sistema. Odgovor obrazložiti.

Problem 5.2. Dat je algoritam opisan diferencijalnom jednačinom:

$$y[k] = -\frac{a}{2}y[k-1] - \frac{b}{2}y[k-2] - \frac{1}{2}y[k-3] + \frac{1}{2}u[k-1] + u[k-3].$$

Ukoliko je ulazni signal $u[k] = h[k]$, odrediti za koje vrednosti parametara a i b će izlazne vrednosti algoritma konvergirati. Rešenje predstaviti kao oblast u ravni parametara (a, b) .

Problem 5.3. Dat je algoritam opisan diferencijalnom jednačinom

$$y[k] = -(q+1)y[k-1] + (p+1)y[k-2] + (p+1)u[k-2].$$

Ukoliko je ulazni signal $u(k)$, a izlazni signal $y(k)$, odrediti za koje vrednosti parametara p i q će izlazne vrednosti algoritma konvergirati.

Problem 5.4. Linerani, vremenski nepromenljiv diskretni sistem opisan je funkcijom prenosa

$$G(z) = \frac{10 - 2z^{-1}}{a^2 + 2az^{-1} + z^{-2}}.$$

Za koje vrednosti parametra a je sistem stabilan?

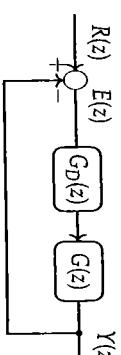
Problem 5.5. Funkcija povratnog prenosa sistema je $W(z) = \frac{z^{b+1}}{z^c+a+b}$. U ravni parametara (a, b) odrediti oblast stabilnosti sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi.

Problem 5.6. Diskretni sistem opisan je sledećom diferencijalnom jednačinom

$$y(k) - ay(k-1) = bu(k).$$

Odrediti opseg parametara a i b za koji je sistem stabilan.

Problem 5.7. Za sistem sa slikama 5.3, gde je $G_D(z) = K_p$, a $G(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$, odrediti opseg vrednosti pojačanja proporcionalnog dejstva K_p , koji sistemu u povratnoj sprezi garantuje asimptotsku stabilnost.



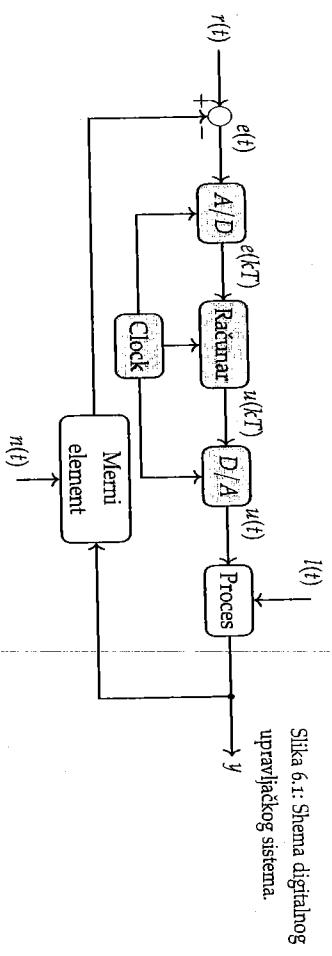
Slika 5.3: Slika za zadatak 5.7.

6

Digitalni ekvivalent funkcije prenosa i algebra funkcije diskretnog prenosa

6.1 Uvodna razmatranja

U okviru ovog poglavља, cilj nam je da zaokružimo postupak matematičkog modelovanja elemenata i fenomena u kolu digitalnog upravljačkog sistema. Referentna shema takvog kola prikazana je dijagramom na slici 6.1.



Slika 6.1: Shema digitalnog upravljačkog sistema.

Da podsetimo, prvo smo matematički opisali postupak A/D i D/A konverzije. Digitalno-analogni konvertor modelovan je kao kolo

a zadrške nultog reda sa funkcijom prenosa

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \quad (6.1)$$

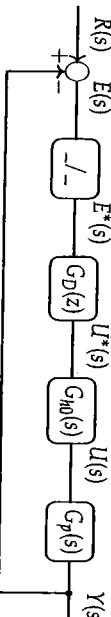
a analogno-digitalni konvertor modelovan je kao idealni odabirac koji na izlazu daje povorku odbitaka.¹

Isto tako, u prethodnim poglavljima analizirali smo i načine diskretizacije kontinualnih algoritama upravljanja i kao konačan rezultat svih postupaka diskretizacije dobijali smo funkciju diskretnog prenosa regulatora² kao odnos kompleksnog izlaza iz računara $U(z)$ i kompleksnog ulaza u računar $E(z)$, odnosno

$$G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)}, \quad (6.2)$$

gde smo sa $G_D(z)$ obeležili funkciju diskretnog prenosa regulatora, odnosno zakona upravljanja. U daljem tekstu držaćemo se ove notacije, ali napominjemo da ćemo u nekim slučajevima radi lakšeg objašnjavanja ili jednostavnijeg prikaza koristiti i $G_R(z)$ i $D(z)$ za opis rada regulatora u diskretnom domenu.

Pretpostavimo da je funkcija prenosa procesa³ sa slike 6.1 $G_p(s)$. Takođe za sada, bez gubitka na opštosti, zanemarićemo šum merenja $n(t)$ i poremećaj $l(t)$. Uz usvojene matematičke modele A/D i D/A konverzije⁴ i diskretnu funkciju prenosa regulatora, principska shema sa slike 6.1 može se transformisati na sledeći način



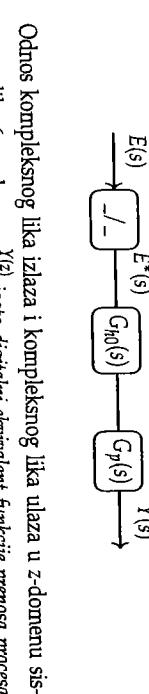
Slika 6.2: Blok-diјаграм digitalnog upravljačkog sistema modelovan funkcijama prenosa.

Lako je primetiti da smo na slici 6.2 pretpostavili jediničnu dinamiku merenog elementa u povratnoj sprezi, odnosno pretpostavili smo da je dinamika mernog elementa pridružena procesu (sadržana u $G_p(s)$), pri čemu je tada y merena, a ne ostvarena vrednost izlaza. Složeniju dinamiku ovog dela upravljačkog sistema razmatraćemo u drugom delu ovog poglavљa.

Važno je primetiti da prisustvo idealnog odabiraca i kola zadrške nultog reda ograničavaju dinamiku odziva $Y(s)$ tj. $y(t)$, jer promene na ulazu procesa $G_p(s)$

¹Podsećamo da smo $F'(s)$ nazvali kompleksni lik povorki odbitaka ili zvezdu transformacije i da je ona definisana na sledeći način: $F'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$. Isto tako podsećamo da smo uveli Z -transformaciju na sledeći način: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$.

Slijest između ova dva izraza je više nego odjedna i lako se ustanovljava veza između dve kompleksne promenljive s i z u sledećoj formi $z = e^{sT}$. U prehodnom prelavljuju je detaljnije objašnjena veza između ove dve kompleksne promenljive. Sa stvarnosti ovog poglavlja važno je primetiti da je veza između zvezde i Z -transformacije pristupa i da se iz domena zvezda transformacije, opisanog po kompleksnoj promenljivoj s u Z -domen prelazi jednostavnom smenom $F(z) = F(s)|_{s=e^T}$. Ova veza između $F'(s)$ i $F(z)$ klijucna je u okviru ovog Poglavlja.



Slika 6.3: Direktna grana digitalnog upravljačkog sistema.

Obratimo pažnju na sliku 6.3. U direktnoj grani posle odabiraca logično dolazi kolo zadrške, jer jedino kontinualni signal možemo da dovedemo na ulaz funkcije prenosa $G_p(s)$.

6.2 Digitalni ekvivalent funkcije prenosa

Obratimo pažnju na sliku 6.3. U direktnoj grani posle odabiraca logično dolazi kolo zadrške, jer jedino kontinualni signal možemo da dovedemo na ulaz funkcije prenosa $G_p(s)$.

Pogodno bi bilo grupisati dve funkcije prenosa u njihov ekvivalent, odnosno zapisati ih kao

$$G(s) = G_{h0}(s)G_p(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}G_p(s). \quad (6.3)$$

Koristeći izraz (6.3), slika 6.3 sada dobija sledeću formu⁶



⁶ Ova forma prikaza je veoma vanžna i često se sreće u literaturi. Naime, ako posle odabiraca nije eksplicitno uveden blok kola zadrške nultog reda, tada se podrazumeva da kolo zadrške postoji: da se inkrementalno nalazi u okviru prve kontinualne funkcije prenosa posle odabiraca. U suprotnom, takav blok-diјагram ne bi imao smisla.

Daље је јасно да се одзив система $Y(s)$ израчунава као

$$Y(s) = G(s)E^*(s). \quad (6.4)$$

Под претпоставком да се $y(t)$ може израчунати у свим trenucima odabiranja i na osnovu osobine kompleksnog lika povorce odabiraka dobijamo sledeći izraz

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s) = (G(s)E^*(s))^*, \quad (6.5)$$

где је ω_s učestanost odabiranja. Ovaj prelaz iz izraza (6.4) u izraz (6.5) може се opisati na sledeći način: *primeniti smo zvezdu transformaciju na levu i desnu stranu izraza (6.4).* Daljnjom transformacijom jednačine (6.4) dobijamo

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s) E^*(s + jk\omega_s). \quad (6.6)$$

Poštujući osobine periodičnosti kompleksnog lika povorce odabiraka, односно ranije dokazanu činjenicu да је

$$E^*(s + jk\omega_s) = E^*(s), \quad (6.7)$$

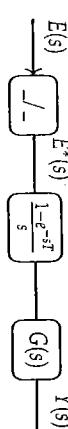
izraz (6.6) postaje

$$Y^*(s) = E^*(s) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s) = E^*(s)G^*(s). \quad (6.8)$$

Koristeći dobro poznatu vezu između izraza $E^*(s)$ i $E(z)$, логично sledi да је

$$Y(z) = E(z)G(z), \quad (6.9)$$

где је $G(z)$ funkcija diskretnog prenosa, која представља digitalni ekvivalent funkcije prenosa $G(s)$. Кao što se vidi iz izraza (6.9), $G(z)$ описује понашање система у diskretnim vremenskim trenucima, као однос комплексног lika povorce odabiraka sa izlaza i ulaza sistema⁷. Да бисмо илустровали теориjska razmatranja izнета у okviru ovog pogлавља, изнечено један primer izračunavanja digitalnog ekvivalenta funkcije prenosa. Напомињемо даје primer od velike važnosti за daljnje razumevanje gradiva i од суštinskog značaja у stu- diji praktičnih problema. Математички апарат за решавање ovih problema већ је ranije razmatран у студији diskretizације филтера под другим именом, па неće biti većih проблема у решавању ovih zadataka.



Slika 6.4: Део direktnе grane digitalnog upravljačkog sistema.

Пример 6.1 (Digitalni ekvivalent funkcije prenosa процеса). Циљ нам је да користијујемо израчунавање функције diskretnog prenosa, за систем са слике 6.4. Пратећи formalizme date izrazima (6.4) до (6.9), можемо лако извести следеće

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s)E^*(s).$$

Применом \mathcal{J}^* transformacije на леву и десну страну izraza dobija се

$$Y^*(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right)^* E^*(s).$$

Koristeći direktnu vezu izмеђу \mathcal{J}^* и \mathcal{Z} -transformacije⁸, добија се

$$Y(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} E(z).$$

Уводењем smene $z = e^{sT}$ можемо pojednostавити претходни izraz

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} E(z).$$

Ako uvedemo ozнаку $G_s(s) = \frac{G(s)}{s}$, логičки sledi

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left\{ G_s(s) \right\}.$$

Konačno, digitalni ekvivalent funkcije prenosa процеса израчунава се на sledeći način

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left\{ G_s(s) \right\} = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (6.10)$$

Слеđeći korak može се у општем slučaju opisati на sledeći način. Prepostavimo да су veze između funkcija kompleksnih promenljivih $A(s) = \tilde{B}(s)F^*(s)$ где је $F^*(s) = f(0) + f(T)e^{-sT} + f(2T)e^{-2sT} + f(3T)e^{-3sT} \dots$. Тада, ако применimo zvezdu transformacije на леву и десну страну prethodnog izraza, добijamo $A^*(s) = \tilde{B}'(s)F^*(s)$, односно, корisteći dobro poznatu vezu $f^*(0) = \mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}[f^*(s)]$ и \mathcal{Z}^{-1} -transformacije, direktno dobijamo $A(z) = \tilde{B}(z)F(z)$, где је $B(z) = \mathcal{Z}(\tilde{B}(s))$, а $F(z) = F^*(s)|_{s=zT}$.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Prepostavimo даје да је funkcija prenosa $G(s)$

⁸Подсећамо да је \mathcal{Z} -transformacija дефинисана над временским доменом, а да је директна \mathcal{Z} -transformacija на комплексне променљиве само краћа форма записивања.

⁹Ова ekvivalentacija izraza за izračunavanje digitalnih ekvivalenta postupka понекад у литератури не наздавају и називају једноствено step invarijantna diskretizacija. Меđutim, без обзира на исти крајни rezultat, потпуно prepostavke i postupak izvođenja ipak се су- шински разликују.

Tada se u skladu sa izrazom (6.10) dobija

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}.$$

Detaljno izvođenje prethodnog izraza, kao i u MATLAB implementaciju možete naći u drugom primjeru poglavlja o diskretizaciji digitalnih regulatora.

U nastavku teksta, pažljivo ćemo posvetiti algebra funkcije diskretnog prenosa, odnosno rešavanju sistema složene strukture, koja uključuje povratnu spregu i višestruku A/D i D/A konverziju.

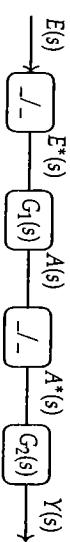
6.3 Algebra funkcije diskretnog prenosa

Pripremajući da su čitaoци upoznati sa osnovnim principima i pravilima izračunavanja ekvivalenta funkcije prenosa, funkcije povratnog prenosa i funkcije spregnutog prenosa u kontinualnom domenu. Međutim, pored osnovnih pravila o rednoj, paralelnoj ili povratnoj vezi između blokova funkcija prenosa, u diskretnom domenu od izuzetne je važnosti analizirati i položaj A/D i D/A konvertora u kolu. Pokazat će se da je izračunavanje ekvivalenta funkcije prenosa znatno složenije nego kod kontinualnih sistema, a da veoma često i pred jednostavne strukture blok-dijagrama nije uvek moguće naći funkciju diskretnog prenosa.

6.3.1 Algebra funkcije diskretnog prenosa u otvorenoj povratnoj sprezici

U okviru ovog poglavlja razmotrićemo tri tipska primera za izračunavanje funkcije diskretnog prenosa u otvorenoj povratnoj sprezici. Ova tri primera su reprezentativna i pokrivaju najčešće sretane scenarije u analizi diskretnih sistema u otvorenoj sprezici ili direktnoj grani.

Posmatrajmo diskretni sistem strukture kao na slici 6.5,



Slika 6.5: Algebra funkcije prenosa diskretnog sistema u otvorenoj sprezici, prvi slučaj.

gde su $G_1(s)$ i $G_2(s)$ kontinualne funkcije prenosa, ali prateci logiku iz prethodnog poglavlju, samo funkcija prenosa $G_1(s)$ sadrži kolo zadrške nultog reda. Sa slike 6.6 lako se izračunava

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)E^*(s). \quad (6.17)$$

Primenom *zvezda* transformacije na levu i desnu stranu izraza (6.17) dobijamo nultog reda, kao što je detaljno objašnjeno u prethodnom poglavlju. Sa slike 6.5 lako je uspostaviti sledeću relaciju

$$Y^*(s) = (G_1(s)G_2(s))^* E^*(s). \quad (6.18)$$

$$A(s) = G_1(s)E^*(s), \quad (6.11)$$

iz koje se na osnovu izraza (6.4) do (6.9) dobija

$$A(z) = G_1(z)E(z). \quad (6.12)$$

Na identičan način izračunavamo

$$Y(z) = G_2(z)A^*(z), \quad (6.13)$$

odnosno

$$Y(z) = G_2(z)A(z). \quad (6.14)$$

Konačno, vezu između diskretnog izlaza $Y(z)$ i diskretnog ulaza $E(z)$ dobijamo kao

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)E(z), \quad (6.15)$$

odnosno, ekvivalent funkcije prenosa $G(z)$, kao odnos kompleksnog izlaza i ulaza $\frac{Y(z)}{E(z)}$ izračunava se po sledećem obrazcu

$$G(z) = G_1(z)G_2(z). \quad (6.16)$$

Drugi tipski primer koji ćemo razmatrati, pripremava strukturu sistema kao na slici 6.6



Slika 6.6: Algebra funkcije prenosa diskretnog sistema u otvorenoj sprezici, drugi slučaj.

Za izračunavanje izraza (6.18) korišćena je osobina *zvezda* transformacije objekta u prethodnom poglavju u izrazima (6.6) do (6.8). Primenom ekvivalentne *zvezde* transformacije dobijamo

$$Y(z) = \mathfrak{Z} \left\{ G_1(s)G_2(s) \right\} E(z). \quad (6.19)$$

Izraz (6.19) može se zapisati i u kompaktnoj formi

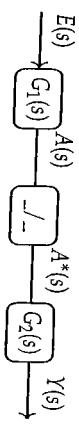
$$Y(z) = \underline{G}_1 \underline{G}_2(z) E(z). \quad (6.20)$$

Podvučeni izraz $\underline{G}_1 \underline{G}_2(z)$ označava da se prvo pomnoži $G_1(s)G_2(s)$ pa se traži \mathfrak{Z} -transformacija proizvoda. Drugim rečima, ekvivalentna funkcija prenosa $G(z)$, koja daje odnos kompleksnog izlaza i ulaza $\frac{Y(z)}{E(z)}$ sada je

$$G(z) = \underline{G}_1 \underline{G}_2(z). \quad (6.21)$$

Poređenjem izraza (6.16) i (6.21) jasno je da se ne radi o istim izrazima, $G_1(z)G_2(z) \neq \underline{G}_1 \underline{G}_2(z)$, odnosno da od broja i položaja odabirača i kola zadiske zavisi izgled funkcije diskretnog prenosa. Ovakva nejednoznačnost nije postojala kod kontinualnih sistema, što analizu diskretnih sistema čini značajno složenijom.

U trećem tipskom slučaju diskretnog sistema u otvorenoj sprezici, struktura sistema prikazana je na slici 6.7.



Slika 6.7: Algebra funkcije prenosa diskretnog sistema u otvorenoj sprezici, treći slučaj.

Sa slike je jasno da važe sledeće relacije

$$Y(s) = G_2(s)A^*(s), \quad (6.22)$$

$$A(s) = G_1(s)E(s). \quad (6.23)$$

Primenom *zvezda* transformacije na izraz (6.23) dobijamo

$$A^*(s) = (G_1(s)E(s))^*, \quad (6.24)$$

a daljnjom zamjenom izraza (6.24) u (6.22) sledi

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s)E^*(s), \\ Y^*(s) &= (G_1(s)E(s))^* G_2^*(s), \end{aligned} \quad (6.25)$$

Konačno, dobro poznatom vezom između *zvezda* i \mathfrak{Z} -transformacije izraz (6.25) postaje

$$Y(s) = \mathfrak{Z}((G_1(s)E(s))^*) G_2(z) = \underline{G}_1 E(z) G_2(z). \quad (6.26)$$

Iz izraza (6.26) nedvosmisleno sledi da eksplicitna veza između kompleksnog ulaza $E(z)$ i kompleksnog izlaza $Y(z)$ u formi funkcije diskretnog prenosa ne postoji. Drugim rečima, $E(s)$ nije moguće samostalno „diskretizovati”, već samo kao deo proizvoda sa $G_1(s)$, što je očigledno posledica položaja idealnog odabirača u kolu. Oval zaključak, da funkcija diskretnog prenosa ne mora da postoji, jako je važan u našoj dajnjoj analizi digitalnih upravljačkih sistema.¹⁰

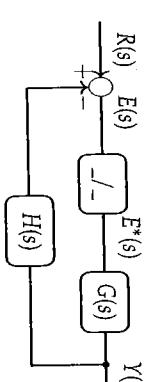
Napominjemo, ovo praktično znači da je moguće izračunati odziv sistema $Y(z)$, ali ne i na primer analizirati karakteristike sistema na osnovu položaja polova funkcije diskretnog prenosa.

U nastanku teksta razmatraćemo algebru funkcije prenosa sistema koji se opisuju u formi povratne sprege.

6.3.2 Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezici

U okviru ovog poglavљa razmotritćemo tri tipska primera za izračunavanje funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezici. Ova tri primera su reprezentativna i pokrivaju najverovatnije scenarije u studiji diskretnih sistema u zatvorenoj povratnoj sprezici.

Počećemo našu analizu od sistema koji je prikazan na slici 6.8.



Slika 6.8: Algebra funkcije prenosa u zatvorenoj povratnoj sprezici, prvi slučaj.

gdje je naravno $G(s)$ proširena kolom zadiske multog reda. Sa slike 6.8 lako se mogu postaviti sledeće relacije

$$Y(s) = G(s)E^*(s), \quad (6.27)$$

i veza koja opisuje povratnu spregu

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s). \quad (6.28)$$

Zamenom izraza (6.27) u (6.28), lako se dobija

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s), \quad (6.29)$$

a primenom zvezda transformacije na izraze (6.27) i (6.29) sledi

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s), \quad (6.30)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - (G(s)H(s))^* E^*(s). \quad (6.31)$$

Koristeći vezu između zvezda i \mathcal{Z} -transformacije, izraz za grešku (6.31) postaje

$$E(z) = R(z) - GH(z)E(z), \quad (6.32)$$

odnosno dobijamo važan izraz za grešku sistema kao

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}. \quad (6.33)$$

Konačno, veza kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ dobija se kombinovanjem izraza (6.33) i (6.30) kao

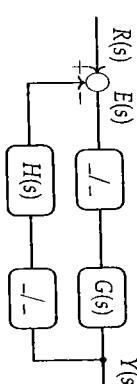
$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z). \quad (6.34)$$

Ekvivalentna funkcija spregnutog prenosa $W_s(z)$ kao odnos kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ dobija se u sledećoj formi

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}. \quad (6.35)$$

Druga dva tipa slučaja za izračunavanje funkcije diskretnog prenosa sistema sa zatvorenom povratnom spregom nećemo detaljno izvoditi. Mislimo da su dosadašnja izvođenja dovoljna da ih čitalac sam savlada, a mi ćemo ih dati u njihovom konačnom obliku.

Drugi tipski primer dat je na slici 6.9. Napominjeno da obe funkcije prenosa $G(s)$ i $H(s)$ moraju da sadrže u sebi kola zadrške nultog reda.



Slika 6.9: Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj spregi, drugi slučaj.

Ekvivalentna funkcija spregnutog prenosa $W_s(z)$ kao odnos kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ ne postoji, ali se može izračunati zavisnost izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ u sledećoj formi

$$\begin{array}{c} R(s) \\ \text{---} \\ \text{+} \end{array} \xrightarrow{\quad E(s) \quad} \boxed{G(s)} \xrightarrow{\quad Y(s) \quad} \begin{array}{c} H(s) \\ \text{---} \\ \text{-} \end{array}$$

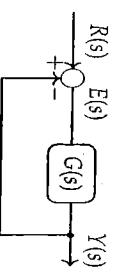
Slika 6.10: Algebra funkcije diskretnog prenosa u zatvorenoj povratnoj spregi, treći slučaj.

Ekvivalentna funkcija spregnutog prenosa $W_s(z)$ kao odnos kompleksnog izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ ne postoji, ali se može izračunati zavisnost izlaza $Y(z)$ i ulaza $R(z)$ u sledećoj formi

$$Y(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}. \quad (6.37)$$

Na kraju, pažnju čitalaca usmeravamo na jedan veoma važan primer. Kroz ovaj primer jasno će se uočiti razlika između kontinualnih i diskretnih sistema, te ograničenja koja se nameću posle postupka diskretizacije. Prema iskustvu autora, razumevanje principa i načina raznišljivanja, koji se uvode u okviru ovog primera, od velike je pomoći u inženjerskoj praksi.

Primer 6.2 (Analiza stabilnosti digitalnog ekvivalenta). Počevši našu studiju od kontinualnog sistema u zatvorenoj povratnoj spregi, prikazanog na slici 6.11

Funkcija prenosa sistema $G(s)$ je poznata i zadata kao

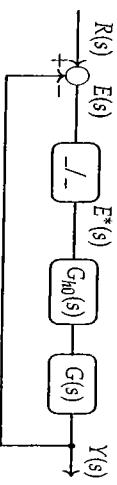
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Za analizu stabilnosti kontinualnog sistema sa slike potrebna nam je karakteristična jednačina sistema, koja se za ovaj sistem sa jediničnom povratnom spregom izračunava kao

$$1 + G(s) = s^2 + s + K = 0.$$

Analizom stabilnosti, na osnovu karakteristične jednačine, lako dobijamo da je kontinualni sistem stabilan za svako $K > 0$.

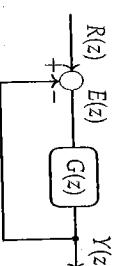
Sada ćemo diskretizovati signal greške idealnim odabirajući i odmah zatim čemo ga preko kola zadružne nultog reda vratiti u kontinualni domen. Kao što je objasnjeno ranije, diskretizacija podrazumeva gubitak dela informacija i prelazak u diskretan domen analize. Matematički, to bi značilo izračunavanje digitalnog ekvivalenta funkcije prenosa $G(s)$, zatim odgovarajuće funkcije spregnutog prenosa i karakterističnog polinoma diskretnog sistema. Analiza stabilnosti bi bila poslednji korak u našoj studiji. Diskretni sistem, na način kako smo ga opisali uz A/D i D/A konverziju, izgleda kao na slici 6.12.



Slika 6.12: Blok-dijagram digitalnog sistema.

Slika 6.11: Blok-dijagram kontinualnog sistema

Uvođenjem digitalnog ekvivalenta $G(z)$, sistem sa slike 6.12 može se predstaviti na sledeći način, slika 6.13.



Digitalni sistem predstavljen slikom 6.13 je sada osnova daljnje analize diskretnog sistema. Prvi korak u analizi je dašnje izračunavanje funkcije diskretnog prenosa $G(z)$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{K}{s^2(s+1)} \right\} = K \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right\} \\ &= K \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{T_z}{(z-1)^2} - \frac{z-1}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right\} \\ &= K \frac{(T-1-e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da je vreme odabiranja $T = 1s$, tada $G(z)$ postaje

$$G(z) = K \frac{0.3679z + 0.2642}{(z - 0.3679)(z - 1)}$$

Karakteristični polinom¹¹ je imenulač funkcije spregnutog prenosa, odnosno

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = K \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K}$$

Karakteristična jednačina potrebna za analizu stabilnosti sistema je

$$f(z) = z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K = 0.$$

Upućujemo čitaoca na prethodni primer ili na poglavje *Digitalni ekvivalent funkcije prenosa*, odakle se jasno vidi da se digitalni ekvivalent funkcije prenosa $G(s)$ izračunava na sledeći način

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{K}{s^2(s+1)} \right\}.$$

Pošto se radi o polinomu drugog reda, analiza stabilnosti primenom Junijevog kriterijuma zmatno je olakšana i svodi se na sledeće

- $f(1) > 0$ ili $1 + (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K > 0$, što se svodi na uslov $K > 0$

Slika 6.13: Blok-dijagram diskretnog sistema.

¹¹ Analogno izračunavajuju karakteristični polinom kontinualnog sistema, karakteristični polinom diskretnog sistema je imenulač izraz $1 + G(z)$.

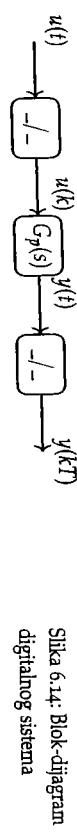
2. $(-1)^2 f(-1) > 0$ ili $1 - (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K > 0$, što se svodi na $K < 26.382$

$$3. |0.3679 + 0.2642K| < 1, \text{ što se svodi na } -5.1755 < K < 2.3925$$

Ojedinijući ova tri uslova lurijevog kriterijuma, dobijamo da pojačanje mora da bude u opsegu $0 < K < 2.3925$, da bi diskretni sistem bio stabilan. Podsećamo da je odgovarajući kontinualan sistem bio stabilan za svako $K > 0$.

Rezimirajući ovaj primer, primenećemo da smo od početnog apsolutno stabilnog kontinualnog sistema $K > 0$, uvođenjem A/D i D/A konverzije, bez ikakve dodatne obrade signala, dobili uslovno stabilan sistem, sa veoma uskom dozvoljenim opsegom za pojačanje $0 < K < 2.3925$. Osim u nekim specijalnim slučajevima¹², ovo je markantna osobina diskretnih sistema, da imaju suženi opseg parametara koji opredeljuju stabilnost sistema. Primera radi, zamislite da smo za kontinualni slučaj dobili željeno ponašanje sistema za parametar $K = 3$. Ako bismo zadržali istu vrednost parametra i posle diskretizacije¹³ dobili bitno nestabilan sistem. U inženjerskoj praksi, posebno ako vreme odabiranja nije dovoljno malo, ovo može da predstavlja veliki problem. Drugim rečima, analogija ponašanja kontinualnih i diskretnih sistema je narušena i mora se zaista voditi računa o dozvoljenom opsegu parametara.

Kako smo više puta spomenuli pojam „dovoljno malo vreme odabiranja“, čitocu ostavljamo da ponovi analizu stabilnosti iz ovog primera za $T = 0.1$ sekund i izvede zaključke samostalno.



Slika 6.14: Blok-dijagram
digitalnog sistema

Posmatrajmo digitalni upravljački sistem predstavljen blok-dijagramom na slici 6.14 čiji je izlaz iz kontinualnog procesa $G_p(s)$ prikazan na slici 6.15 crmom punom linijom. Usled prisustva digitalnih komponenta u celom sistemu, nije moguće analizu u celosti se vršiti u diskretnom domenu, a zbog analogno-digitalnog konvertora¹⁴ na izlazu, vrednost signala $y(t)$ poznata je samo u trenucima odabiranja $t = kT$ koji su označeni na slici 6.15 crnim kružnim markerima. Međutim, nerekao postoji zahtev da se zna vrednost ovog signala i u trenucima između $t \neq kT$, čije su vrednosti na slici 6.15 označene markerima različitog oblika na

Podsetimo se da je 3-transformacija važan alat za analizu ponašanja linearnih sistema automatskog upravljanja u trenucima odabiranja, kao i da primenom inverzne 3-transformacije možemo da dobijemo informaciju o vrednosti signala na izlazu iz sistema samo u trenucima odabiranja $t = kT$. Stoga, zaključujemo da je jedan od nedostataka 3-transformacije gubitak informacije o vrednosti signala između trenutaka odabiranja.

Nedostaci primene 3-transformacije primetni su i pri analizi sistema kod kojih postoji transportno kašnjenje. Pojava kašnjenja oslikava se tako što se trenutna promena ulaznog signala, na izlazu signal odražava posle određenog vremena. Funkcija prenosa takvih sistema u s domenu sadrži član $e^{-\sigma T}$ koji modeluje kašnjenje u trajanju od vremena τ . Ukoliko je kašnjenje jednako celobrojnom umnošku perioda odabiranja kT , odgovarajući digitalni ekvivalent lako se nalazi direktnom smenom i primenom definicije kompleksne promenljive $z, z := e^{\sigma T}$. Opisani postupak rezultovaće pojavom kompleksnog člana z^{-k} , što je na osnovu ranije izlaganja poznato i kao operator kašnjenja za k perioda. Međutim, ukoliko kašnjenje τ nije jednak celobrojnom umnošku perioda odabiranja, postupak određivanja digitalnog ekvivalenta člana $e^{-\sigma T}$ se usložnjava.

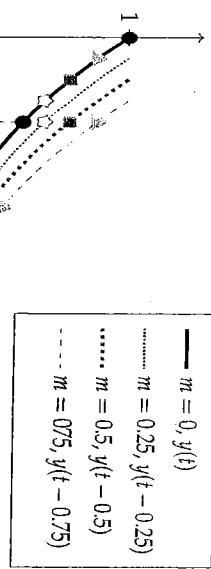
U cijlu prevazilaženja pomenuvih problema, predložen je postupak koji se naziva *modifikovana 3-transformacija*. Takva transformacija može se koristiti za analizu sistema sa čestim vremenskim kašnjenjem, kao i za određivanje vrednosti signala mimo trenutaka odabiranja.

¹²U daljem tekstu za analogno-digitalni konvertor konsticice se kratica oznaka A/D konvertor.

6.4 Modifikovana 3-transformacija

¹³Na primer, uveli smo digitalni regulator, koji ima samo proporcionalno dejstvo.

¹⁴Ovi specijalni slučajevi, nisu od posebnog značaja i više predstavljaju matematički trk, nego praktično.



Slika 6.15: Izlaz iz sistema $y(t)$ zakasne za različite vrednosti t .

Na slici 6.15 prikazana je funkcija $y(t) = 2.5e^{-0.25t}y(t)$ (puna crta na liniji), gde je vrednosti funkcije u trenutima odabiranja, $T = 1$, naznačena crtim kružnim znakima. To su jedine vrednosti koje znamo posle 3- ζ -transformacije, $y(kT)$. Ukoliko želimo da znamo vrednost u trenutku

$y(0.25)$ (markir oblik trouga), to nije moguće jer odabirat „ne okida“ u tom trenutku. Da bismo dobili tu vrednost u trenutku „okidanja“ odabirat, signal je zakasnjen sa 0.25 sekundi. Na slici 6.15 prikazan je sivom isprekidanim linijom i vidi se da je vrednost zakaselog signala u trenutku odabiranja $t = T$ jednaka vrednosti $y(0.25)$, odnosno oba trougla imaju istu vrednost. Stično je i ukoliko želimo npr. da znamo vrednost $y(0.5)$. Postupak je naznačen kvadratidma, odnosno zakasnenim signalom $y(t - 0.5)$, i $y(0.75)$ je označeno zvezda belim markonom, a odgovarajući zakasni signal $y(t - 0.25)$ kojim se dobija ta vrednost sivom tankastom linijom.



Slika 6.16: Blok-dijagram digitalnog sistema sa kašnjevanjem

Ukoliko pretpostavimo da vrednost čistog transportnog kašnjenja τ nije veća od perioda odabiranja T , tada se ona može zapisati i kao $\tau = \alpha T$, pri čemu je jasno da važi $0 < \alpha \leq 1$. U skladu sa ovom notacijom, izlaz iz sistema sa slike 6.16 posle prolaska kroz blok transportnog kašnjenja postaje

$$y_d(t) = y(t - \tau) = y(t - \alpha T).$$

(6.38)

Dajnjom diskretizacijom, odnosno prolaskom signala $y_d(t)$ kroz A/D konvertor, dobijamo vrednost signala $y(t)$ u trenutku $t - \alpha T$ koji je između dve periode odabiranja. Ukoliko variramo vrednost parametra α u intervalu $(0, 1]$, dobijamo i ostale vrednosti varijable t , odnosno signala $y(t)$ na izlazu odabiranja i ostale vrednosti funkcije $y(t)$ u trenutima odabiranja, $T = 1$, naznačena crtim kružnim znakima. To su jedine vrednosti koje znamo posle 3- ζ -transformacije, $y(kT)$. Ukoliko želimo da znamo vrednost u trenutku

$y(0.25)$ (markir oblik trouga), to nije moguće jer odabirat „ne okida“, u tom trenutku. Da bismo dobili tu vrednost u trenutku „okidanja“ odabirat, signal je zakasnjen sa 0.25 sekundi. Na slici 6.15 prikazan je sivom isprekidanim linijom i vidi se da je vrednost zakaselog signala u trenutku odabiranja $t = T$ jednaka vrednosti $y(0.25)$, odnosno oba trougla imaju istu vrednost. Stično je i ukoliko želimo npr. da znamo vrednost $y(0.5)$. Postupak je naznačen kvadratidma, odnosno zakasnenim signalom $y(t - 0.5)$, i $y(0.75)$ je označeno zvezda belim markonom, a odgovarajući zakasni signal $y(t - 0.25)$ kojim se dobija ta vrednost sivom tankastom linijom.

Definicija 16. (Modifikovana 3-transformacija) Modifikovana 3-transformacija vremenski kontinualnog signala f , u oznakama $\mathcal{Z}_m\{f(t)\}$ ili $F(z, m)$, definije se kao 3-transformacija vremenski zakasnelog signala $f_d = f(t - \tau)$, gde je $\tau \in [0, T]$,

$$F(z, m) = \mathcal{Z}\{f(t - \tau)\} = \mathcal{Z}_m\{f(t)\} \Big|_{\alpha=\frac{\tau}{T}, m=1-\alpha}.$$

Po definiciji, modifikovana 3-transformacija podrazumeva da je kašnjenje signala kratce ili jednako trajaju jedne periodi odabiranja. Obično se kašnjenje izražava u obliku $\tau = \alpha T = (1 - m)T$, gde je $\alpha \in (0, 1]$, odnosno $m \in [0, 1]$.

Inverzna modifikovana 3-transformacija omogućava nam da odredimo vrednost signala $f(t)$ između trenutaka odabiranja, odnosno u trenucima $t = (k + m - 1)T$,

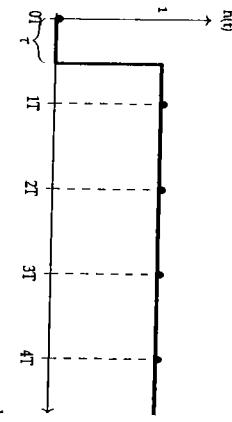
$$f((k + m - 1)T) = \mathcal{Z}^{-1}\{F_d(z)\} = \mathcal{Z}_m^{-1}\{F(z, m)\} \quad (6.39)$$

Redosled operacija pri primeni modifikovane 3-transformacije ne mora biti zamenjen. Prvo je potrebno zakasiti signal, a potom odobirkovati.

Primer 6.3. Pokazati da je modifikovana \mathfrak{Z} -transformacija Hevisajdovog signala $\mathfrak{Z}_m\{h(t)\} = \frac{1}{z-1}$

Rешење:

Посматрајмо сигнал на слици 6.17, који представља закасну Hevisajdovu funkciju za vreme τ , односно $h(t-\tau)$.



Slika 6.17: Zakasnela diskretna Hevisajdova funkcija

Применом дефиниције \mathfrak{Z}_m -трансформације добјамо

$$\begin{aligned} F(z, m) &= \mathfrak{Z}_m\{h(t)\} = \mathfrak{Z}\{h(t-\tau)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = 0z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots \\ &= z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = z^{-1} \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1}. \end{aligned}$$

Добијен израз за \mathfrak{Z}_m сматра се табличним и може се наћи у прилогу А.¹⁵

Модификована \mathfrak{Z} -трансформација осталих елементарних сигнала изводи се по дефиницији \mathfrak{Z} -трансформације и може се наћи у табличама заједно са \mathfrak{Z} -трансформацијом истих, (види четврту колону табеле у прилогу А).

Уколико је позната Laplasova трансформација сигнала $f(t)$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, могуће је директно применити модификовану \mathfrak{Z} -трансформацију, без претходног добијања сигнала $f(t)$ применом инверзне \mathcal{L} трансформације.¹⁶

$$F(z, m) = \mathfrak{Z}\{F(s)e^{-(1-m)Ts}\}. \quad (6.40)$$

To nam је omogућено коришћењем таблица за \mathfrak{Z} -трансформацију, где на остварујућим позиције Laplasovog облика сигнала можemo у истој врсти наћи одговарајући

таблични израз за \mathfrak{Z}_m -трансформацију извornog signala.

Primer 6.4. Процес је описан функцијом преноса $G(s) = \frac{1}{s+2}e^{-0.03s}$. Одредiti digitalni ekvivalent процеса ukoliko је периода одабiranja $T = 0.1$.

Решење:

Digitalni ekvivalent подразумева \mathfrak{Z} -трансформацију zajedno са колом задише,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathfrak{Z}\{G_{ho}(s)G(s)\} = \mathfrak{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{1}{s+2}e^{-0.03s}\right\} \\ &= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{(s+2)s}\right\}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Јасно је да се у изразу (6.41) јавља \mathfrak{Z} -трансформација процеса са каšnjenjem $\tau = 0.03$, при чему је $\tau < T$, што захтева примену модификоване \mathfrak{Z} -трансформације, где је $\alpha = \frac{0.03}{0.1} = 0.3$, а параметар \mathfrak{Z}_m -трансформације је $m = 1 - \alpha = 0.7$,

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{(s+2)s}e^{-0.03s}\right\} \\ &= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{(s+2)s}\right\}|_{m=0.7} \\ &= (1-z^{-1})\frac{1}{2}\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\}|_{m=0.7} \\ &= (1-z^{-1})\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\right\}|_{m=0.7} \\ &= \frac{1}{2}\frac{z(1-e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z-e^{-2T})}|_{m=0.7} \\ &= \frac{0.0532z + 0.02531}{z(z-0.8187)}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Уколико је каšnjenje сигнала веће од једне периоде одабiranja, $\tau > T$, не можemo применити дефиницију модификоване \mathfrak{Z} -трансформације, jer prema дефиницији каšnjenje мора бити мање од једне периоде. Тада је неопходно изразити каšnjenje преко целих периода i „остатка“

Pri računanju израза (6.45) користена је таблица \mathfrak{Z} -трансформације, где треба уочити следеће $\frac{1}{s} \Rightarrow h(t) \Rightarrow \frac{1}{z-1}$ $\Rightarrow e^{\theta t} \Rightarrow \frac{z^{-\theta mT}}{z-e^{-\theta T}}$.

$$\text{где је } r \text{ ceo broj, а } \theta \in (0, 1]. \text{ Тада је}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\{(f(t-\tau))^*\} &= \mathfrak{Z}\{(f(t-rT-\theta T))^*\} \\ &= z^{-r}\mathfrak{Z}\{(f(t-\theta T))^*\} = z^{-r}F(z, 1-\theta). \end{aligned}$$

Primer 6.5. Proces je opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{s+2}e^{-0.2s}$. Odrediti digitalni ekvivalent procesa ukoliko je perioda odabiranja $T = 0.1$.

Rešenje:

Postupak rešavanja započinjemo kao u prethodnom primeru

$$\begin{aligned} G(z) &= 3\{G_{ho}(s)G(s)\} = 3\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+2}e^{-0.2s}\right\} \\ &= (1-z^{-1})3\left\{\frac{1}{(s+2)s}e^{-0.2s}\right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

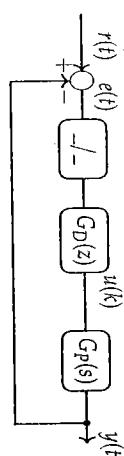
Međutim, u izrazu (6.43) pojavljuje se kašnjenje $\tau = 0.23$, pri čemu je $\tau > T$, pa ne možemo primeniti modifikovanu \mathcal{Z} -transformaciju. Ukoliko kašnjenje izrazimo preko celih perioda T , $\tau = 0.2 + 0.03 = 2T + 0.3T$ izraz (6.43) postaje

$$G(z) = (1-z^{-1})3\left\{\frac{1}{(s+2)s}e^{-2Ts}e^{-0.3Ts}\right\}. \quad (6.44)$$

Direktnom primenom definicije kompleksne promenljive z , $z := e^{sT}$, član e^{-2Ts} postaje z^{-2} , dok član $e^{-0.3T}$ modeluje ostatak kašnjenja, koji sada iznosi $0.3T$ i manji je od perioda T , što omogućava primenu \mathcal{Z}_m -transformacije za $\alpha = 0.3$, odnosno $m = 0.7$,

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1})z^{-2}\frac{1}{2}\mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}\right\} \Big|_{m=0.7} \\ &= (1-z^{-1})z^{-2}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\right\} \Big|_{m=0.7} \\ &= \frac{1}{2}\frac{z(1-e^{-2mT})-e^{-2T}+e^{-2mT}}{z^3(z-e^{-2T})} \Big|_{m=0.7} \\ &= \frac{0.06532z+0.02531}{z^3(z-0.8187)} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Primer 6.6. Primer sistema automatskog upravljanja prikazan je na slici 6.18. Jednosmerni motor modelovan je funkcijom prenosa $G(s) = \frac{2}{s+2}$. Brzinom motora upravlja se pomoću diskretnog P regulatora sa konstantom pojačanja $k_p = 1$. Proces je pobudjen odskočnom pobudom $r(t) = 4h(t)$. Kolika je brzina na izlazu motora u trenutku $t = 0.7$, ukoliko je takt rada digitalnog uređaja na kome je implementiran diskretni P regulator $T = 0.5s$?



Slika 6.18: Blok-dijagram digitalnog sistema.

Rešenje:

Analizirano kolo sistema automatskog upravljanja je hibridna kombinacija komponenta koje rade u vremenski kontinualnom domenu (proces) i vremenski diskretnom domenu (regulator). Da bismo analizirali ovakav proces u celosti i odredili njegov odziv, neophodno je formirati jedinstvenu funkciju spregnutog prenosa sistema u diskretnom domenu. Drugim rečima, potrebno je formirati digitalni ekvivalent kontinualnog sistema $G_P(s)$ kao prvi korak pri analizi. Pošto je izlaz iz digitalnog regulatora, odnosno upravljački signal, diskretni, $u(k)$, podrazumeva se da je neophodno postojanje D/A konvertora (u našem slučaju kola zadruške nultog reda $G_{ho}(s)$) na ulazu u sam proces koji će omogućiti konverziju u kontinualni upravljački signal (npr. strujni signal). Stoga se digitalni ekvivalent dobija na sledeći način

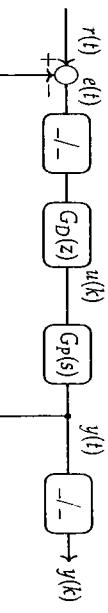
$$\begin{aligned} G_P(z) &= 3\{G_{ho}(s)G_P(s)\} = 3\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{2}{s+2}\right\} \\ &= (1-z^{-1})3\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\} = (1-z^{-1})3\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-2T}}\right\} = \frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Sada je moguće blok-dijagram kola sa slike 6.18 predstaviti kao na slici 6.19. Pošto je $G_D(z) = 1$, sledi da je

$$\begin{aligned} W_{sp}(z) &= \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G_P(z)} \\ &= \frac{1-e^{-2T}}{z-2e^{-2T}+1'} \end{aligned} \quad (6.47)$$

a odziv sistema na ulaznu pobudu $r = 4h(k) \Rightarrow R(z) = 4\frac{z}{z-1}$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= W_{sp}(z)R(z) = 4\frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-2e^{-2T}+1)} \\ &= \frac{2}{z-1} + \frac{2(1-2e^{-2T})}{z-2e^{-2T}+1}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

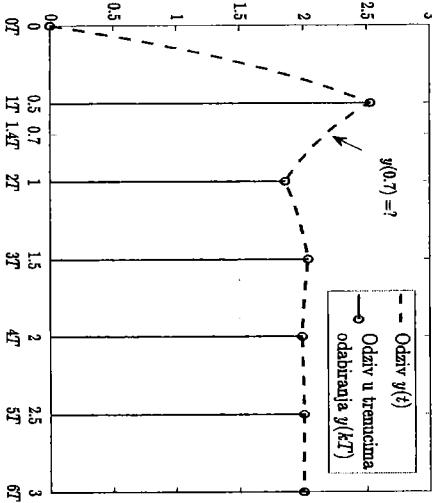


Slika 6.19: Blok-dijagram digitalnog sistema.

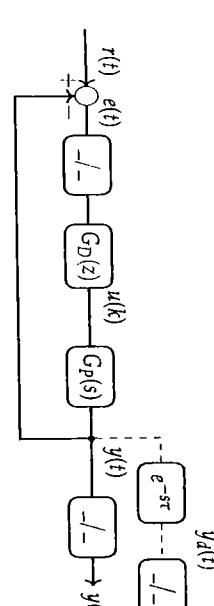
Primenom inverzne \mathcal{Z} -transformacije izraza (6.48) dobijamo

$$y(k) = 2h(k-1) + 2(1 - 2e^{-2T})(2e^{-2T} - 1)^{k-1}h(k-1).$$

Ukoliko prikažemo signal $y(t)$, kao na slici 6.20, jasno je da ne možemo odrediti traženu vrednost izlaznog signala u trenutku $t = 0.7$ s, jer su poznate samo vrednosti u trenucima odabiranja, dok se tražena vrednost nalazi između dva trenutka odabiranja $t = T$ i $t = 2T$. Iz navedenih razloga potrebno je translatirati



Slika 6.20: Odziv sistema iz primera 6.6.



Slika 6.21: Blok-dijagram digitalnog sistema.

primerom pravila algebre funkcije prenosa

$$Y_d(s) = Y(s)e^{-sT} \quad (6.49)$$

$$Y(s) = G_{ho}(s)G_P(s)U^*(s) \quad (6.50)$$

$$U^*(s) = G_D(z)E^*(s) \quad (6.51)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s). \quad (6.52)$$

Zamenom (6.50) u (6.52), i dalje u (6.51) i primenom zvezdu transformacije dobijamo

$$U^*(s) = \frac{G_D(z)R^*(s)}{1 + G_{ho}G_P(s)}, \quad (6.53)$$

a potom uvršavanjem (6.53) u (6.50) i (6.49) konačno sledi

$$Y_d^*(s) = \frac{G_D(z)G_{ho}G_P e^{-sT} R^*(s)}{1 + \frac{G_{ho}G_P(s)}{1 + G_{ho}G_P(s)}}, \quad (6.54)$$

zapisano u z domenu

$$W_{sp}(z) = \frac{Y_d(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G_P(z, m)}{1 + G_P(z)}. \quad (6.55)$$

Član $G_P(z, m)$ predstavlja modifikovanu \mathcal{Z} -transformaciju digitalnog ekvivalenta procesa $G_P(s)$, pri čemu je $m = 1 - \alpha = 1 - \frac{T}{\tau}$. Primenom tabličnih izraza za modifikovanu \mathcal{Z} -transformaciju sledi

$$\begin{aligned} G_P(z, m) &= \sum_m \{ G_{ho}(s)G_P(s)e^{-sT} \} \\ &= \sum_m \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{2}{s+2} \right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \sum_m \left\{ \frac{2}{s(s+2)} \right\} = (1 - z^{-1}) \sum_m \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\} \Big|_{s=\frac{T}{\tau}; m=1-\alpha} \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}} \right\} = \frac{z(1-e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

(zakasniti) izlazni signal za vreme $\tau = 0.3$ (vreme koje je potrebno da vrednost iz trenutka $t = 0.7$ bude „pomerena” u trenutak $t = 1$), što bi omogućilo očitavanje vrednosti signala iz trenutka $t = 0.7$ s, jer bi ta vrednost „prošla“ kroz odabirač. Kasnjenje izlaznog signala modelovano prolaskom signala kroz blok e^{-sT} kao što je prikazano na slici 6.21.

Međutim, uvođenjem novog bloka koji modeluje kasnjenje u direktnu granu, dolazi do promene izgleda funkcije spregnutog prenosa sistema koju dobijamo

Funkcija spregnutog prenosa (6.55) sada dobija oblik

$$W_{sp}(z) = \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z - 2e^{-2T} + 1)}, \quad (6.56)$$

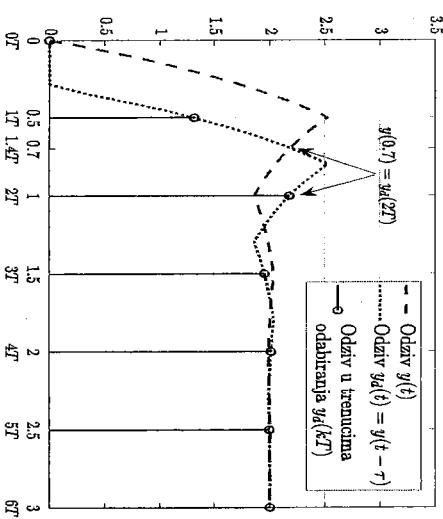
a odziv na ulaznu pobudu

$$\begin{aligned} Y_d(z) &= \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT} - 4z}{z(z - 2e^{-2T} + 1)} \cdot \frac{z - 1}{z - 1} = \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{(z - 2e^{-2T} + 1)(z - 1)} \\ &= \frac{A}{z - (2e^{-2T} - 1)} + \frac{B}{z - 1}, \end{aligned}$$

gde je $A = \frac{2e^{-2mT} - 2e^{-2T} + e^{-2T} - 1}{2e^{-2T} - 2}$. Primenom inverzne \mathcal{Z} -transformacije, $\mathcal{Z}^{-1}\{Y_d(z)\}$, vrednost izlazne promenljive $y(t)$ u trenucima $t = (k + m - 1)T$ je

$$y_d(kT) = y((k + m - 1)T) = A(e^{-2T} - 1)^{k-1}h(k-1) + Bh(k-1).$$

Na osnovu prethodnog, možemo izračunati vrednost funkcije izlaza u trenutku $t = 0.7$ s kao rezultat kašnjenja signala za $\tau = 0.3$ s, pri čemu vrednost signala $y(0.7)$ odgovara odabiru $k = 2$. Kako je za $T = 0.5$ i $\alpha = \frac{0.3}{0.5} \Rightarrow m = 1 - \frac{3}{5} = 0.4$, možemo proveriti da je $t = (k + m - 1)T = 0.7$. Dobijena vrednost iznosi $y(0.7) = 2.18$ kao što je prikazano na slici 6.22.



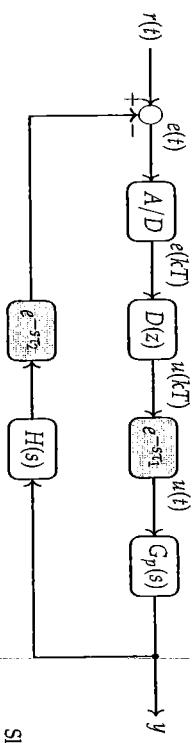
Slika 6.22: Odziv sistema iz primera 6.6.

6.5 Sistemi sa transportnim kašnjenjem

Većina sistema automatskog upravljanja, pa tako i digitalni sistemi, u praksi poseduju čisto vremensko kašnjenje. Pojava kašnjenja može da bude posledica raznih aspekata, kao deo dinamike samog procesa kojim se upravlja, kao rezultat procesa A/D i D/A konverzije u sklopu digitalnih računara, koja je u savremenim uređajima skoro zanemariva zbog napretka tehnologije u bazi protoka i rada računara. Ona može biti posledica reakcije različitih elemenata koji čine sam sistem, često i samog čovaka, kao i prenosa podataka na daljinu.

Kao što smo već napomenuli, kašnjenje τ modeluje se u kompleksnom domenu, kao $e^{-s\tau}$, koji kao neracionalan član otežava studiju vremenski kontinualnih sistema. Iz teorije kontinualnih poznatih sistema, poznato je da ovaj član, kao deo funkcije povratnog prenosa, utiče na faznu karakteristiku sistema tako što smanjuje pretek faze i time smanjuje stabilnost celokupnog sistema. Za razliku od kontinualnih sistema, primenom modifikovane \mathcal{Z} -transformacije analiza digitalnih sistema upravljanja sa transportnim kašnjenjem je pojednostavljena.

Posmatrajmo sliku 6.23, na kojoj je prikazan primer digitalnog sistema upravljanja, gde možemo uočiti dva bloka koji modeluju transportno kašnjenje. Ka-



Slika 6.23: Digitalni sistem upravljanja sa kašnjenjem.

šnjenje τ_1 objedinjuje kašnjenje u direktnoj grani procesa, koje je posledica dinamike procesa kojim se upravlja i postupaka A/D i D/A konverzije. Kašnjenje τ_2 iz povratne grane rezultat je kašnjenja pri prenosu podataka od senzora do digitalne računarske jedinice. U cilju analize stabilnosti, računanja odziva sistema, i drugih performansi sistema, potrebno je formirati funkciju prenosa sistema. Neka je $\tau_1 < T$ i $\tau_2 < T$, i pretpostavimo da je $(\tau_1 + \tau_2) < T$, tada

dobijamo da je direktna grana funkcije prenosa

$$W_d(z) = D(z) \mathcal{Z}\{G(s)H(s)e^{-s\tau_1}\}$$

$$\begin{aligned} &= D(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s} e^{-s\tau_1}\right\} \\ &= D(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}_{m=1-\frac{\tau_1}{T}}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

dok je povratna grana

$$\begin{aligned} W_p(z) &= D(z) \mathcal{Z}\{G(s)H(s)e^{-s\tau_1} H(s)e^{-s\tau_2}\} \\ &= D(z) \mathcal{Z}\{G(s)H(s)e^{-s(\tau_1+\tau_2)}\} \\ &= D(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s} e^{-s(\tau_1+\tau_2)}\right\} \\ &= D(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}_{m=1-\frac{(\tau_1+\tau_2)}{T}}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Ukoliko je $G(z, m_1) = \mathcal{Z}_m\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}_{m_1=1-\frac{(\tau_1+\tau_2)}{T}}$ i $H(z, m_2) = \mathcal{Z}_m\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}_{m=1-\frac{(\tau_1+\tau_2)}{T}}$ funkcija spregnutog prenosa je

$$\begin{aligned} W_{sp}(z) &= \frac{W_d(z)}{1 + W_p(z)} \\ &= \frac{D(z)(1 - z^{-1})G(z, m_1)}{1 + D(z)(1 - z^{-1})H(z, m_2)}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Dobjena funkcija spregnutog prenosa, uz primenu modifikovane \mathcal{Z} -transformacije

jest će racionalna funkcija uprkos prisustvu kašnjenja, što umnogome olakšava primenu svih mehanizama za analizu sistema koji podržavaju racionalan oblik funkcije prenosa sistema, odnosno linearnu funkciju karakterističnog polinoma, što, napominjemo, nije slučaj kada efekat kašnjenja analiziramo u kontinuacionom domenu koji se pojavljuje u neilinearnom maniru.

Primer 6.7. Naći funkciju spregnutog prenosa sistema sa slike 6.23 ukoliko je funkcija prenosa procesa $G(s) = \frac{1}{s+2}$ a on u svojoj dinamici poseduje i kašnjenje od $\tau_1 = 0.04$ sekundi. Procesom upravlja digitalni uređaj koji radi sa procesnim taktom od $T = 0.1$ sekund na kome je implementiran algoritam diskretnog PI regulatora dobijen primenom transformacije diferenciranjem unazad, $D(z)$.

Senzor koji se nalazi u povratnoj sprezi je idealan, $H(s) = 1$, međutim, usled udaljenog prenosa podataka javlja se kašnjenje od $\tau_2 = 0.03$ sekunde.

Rешење:

Postupak određivanja funkcije spregnutog prenosa (6.59) započeo je od modelovanja regulatora $D(z)$. Poznato je da je PI regulator u kontinualnom vremenskom domenu opisan kao odnos kompleksnog lika upravljačkog signala i signala greške $PI(s) = K_p(1 + \frac{1}{s})$. Primenom diskretizacije „diferenciranjem unapred“, $s = \frac{z-1}{T}$, dobijamo diskretni regulator

$$\begin{aligned} D(z) &= K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{1}{z-1}\right) \\ &= K_p \frac{T_i(z-1) + T}{T_i(z-1)}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Postupak nastavljamo nalaženjem neophodnih digitalnih ekvivalenta i modifikovanih transformacija

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{G(s)H(s)e^{-s\tau_1}\} &= (1 - z^{-1})G(z, m_1) \Big|_{m_1=(1-\tau_1/T)=0.6} \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}_{m=0.6} \\ &= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\}_{m=0.6} \\ &= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\right\}_{m=0.6} \\ &= \frac{0.05652z + 0.03409}{z(z - 0.8187)}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{G(s)H(s)e^{-s(\tau_1+\tau_2)}\} &= (1 - z^{-1})G(z, m_2) \Big|_{m_2=(1-(\tau_1+\tau_2)/T)=0.3} \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}_{m=0.3} \\ &= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\}_{m=0.3} \\ &= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\right\}_{m=0.3} \\ &= \frac{0.02912 + 0.06152}{z(z - 0.8187)}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Uvrščavanjem izraza (6.60), (6.61), (6.62) u (6.59) sledi

$$W_{sp}(z) = \frac{5654K_pT_iz^2 + (0.5654K_p - 2.2445K_pT_i)z + 0.34095K_p - 3.4095K_pT_i}{(10^2T_i + 2.9118K_pT_i)z^2 + (0.29118K_p - 1.818710^2T_i + 3.2399K_pT_i)z + 0.61517K_p + 81.873T_i - 6.1517K_pT_i}, \quad (6.63)$$

Izračunata funkcija (6.63) potvrđuje prethodno navedeno tvrdjenje da se usled prisustva kašnjenja, zahvaljujući modifikovanoj z -transformaciji, dobija izraz koji je racionalna funkcija, a njen imenilac, odnosno karakteristični polinom, linearna funkcija po kompleksnoj promenljivoj z . Čitajući ostavljamo za dodatni rad da analizira u kom opsegu vrednosti parametara regulatora K_p i T_i je analizirani sistem stabilan.

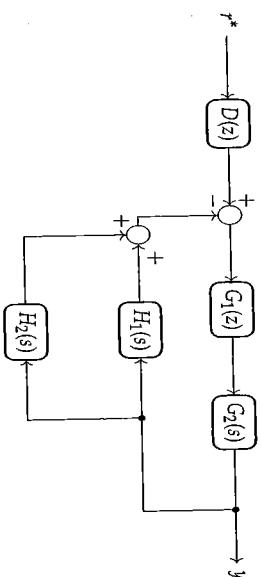
6.6 Problemi

Problem 6.1. Dat je sistem $G(s) = \frac{1}{s+4}$ ispred kog se nalazi kolo zadriške.

- a) Naći digitalni ekvivalent sistema ukoliko je $T = \ln(4)$ sekunde.

- b) Naći odziv digitalnog ekvivalenta sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi u ustajenom stanju na jediničnu step pobudu.

Problem 6.2. Dat je sistem automatskog upravljanja prikazan na slici 6.24.



Slika 6.24: Blok-dijagram sistema iz problema 6.2.

- a) U opštinim brojevinama odrediti funkciju prenosa datog sistema od ulaznog do izlaznog signala. Na svim potrebnim mestima uvrstiti odabirač i kolo zadrške multog reda.

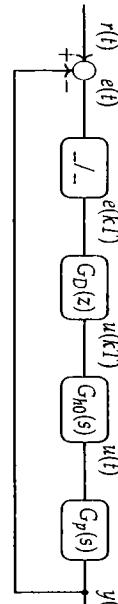
- b) Izvršiti sve potrebne diskretizacije ukoliko je $G_2(s) = \frac{2}{s+3}$, $H_1(s) = H_2(s) = e^{-0.13s}$, a perioda odabiranja je $T = 0.1$ sekund.

- c) Odrediti funkciju prenosa $G_1(z)$ ukoliko je

$$\begin{aligned} u[k] &= e[k] + 2I[k] \\ I[k] &= I[k-1] + e[k]. \end{aligned}$$

- d) Odrediti diferenčnu jednačinu koja opisuje sistem $D(z) = \frac{0.1z+0.9}{z^2+0.5}$.

Problem 6.3. Struktura digitalnog upravljačkog sistema data je na slici 6.25, pri čemu je frekvencija odabiranja u sistemu $f = 10$ Hz.

Slika 6.25: Slika iz problema
6.3.

Pod pretpostavkom da je algoritam upravljanja dat diferencijalnim jednačinama

$$l(k) = 2e(k) + l(k-1)$$

$$u(k) = e(k) + l(k)$$

a objekat upravljanja opisan diferencijalnom jednačinom

$$y(t) = -5y(t) + 4u(t - 0.1)$$

, izračunati:

- Funkciju prenosa objekta upravljanja i funkciju diskretnog prenosa regulatora.
- Komentarirati tip diskretnog regulatora (P, PI, PD ili PID).
- Digitalni ekvivalent objekta upravljanja, vodeći računa da funkciju D/A konvertora ima kolo zadružne nultog reda.

- Formulariti funkciju spregnutog prenosa sistema.

Problem 6.4. Dat je kontinualni sistem opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{s+0.5}$ kojim upravlja digitalni uređaj i šalje upravljački signal $u(k) = 2h(k)$. Odrediti izlaz iz sistema $G(s)$ u trenutku $t = 0.8$ (tj. nači $y(0.8)$) ukoliko je takt rada digitalnog uređaja $T = 0.5$. (Napomena: Na svim potrebnim mestima staviti kolo zadružne nultog reda koje modeluje D/A konvertor.)

7 Greške u ustaljenom stanju

7.1 Ocena kvaliteta ponašanja u ustaljenom stanju

Jedna od najvažnijih osobina upravljačkih sistema je sposobnost izlazne vrednosti ili odziva sistema da prati i/ili dosegne željenu vrednost. I intuitivno je jasno, da je greška razlika između željene i ostvarene vrednosti, a da je minimizacija greške¹ logičan zadatak, koji se postavlja pred upravljački algoritam. U okviru ovog poglavља namera nam je da se usredstvimo na minimizaciju greške u ustaljenom (stacionarnom) stanju ili, kolokvijalno rečeno, da analiziramo sposobnost sistema da posle određenog vremena² dosegne željenu vrednost. Ako se setimo da smo u prethodnim poglavljima uveli jednu od definicija stabilnosti kao sposobnost sistema da dosegne ustaljeno stanje, jasno je da se pojavi greška u ustaljenom stanju u našim razmatranjima odnosi samo na stabilne sisteme.

7.2 Greška u ustaljenom stanju

Da bismo čitoca lakše uveli u postavku, terminologiju i način rešavanja problema minimizacije greške u ustaljenom stanju, počećemo našu analizu prateći sistem sa slike 7.1.

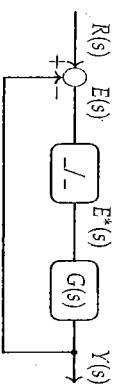
U nastavku teksta strogo ćemo voditi računa da termini koji su opšti uvedeni tako što ćemo naznačiti po definiciji ili koristiti oznaku $\hat{=}$. Svi ostali pojmovi karakteristični su za sistem sa slike 7.1 i ne mogu se posmatrati uopšteno. Takođe podsećamo da je sistem $G(s)$ „obogaćen“ kolom zadružne nultog reda, jer u

¹ Jasno je da je termin „određeno vreme“ uveden neformalno, sa ciljem da upozna čitaoča sa problemom i načinom razmišljanja pre formalne definicije koja sledi.

² $ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$

$ITSE = \int_0^{\infty} t^2 e^2(t) dt$

$IPE = \int_0^{\infty} e(t) dt$



Slika 7.1: Blok-dijagram digitalnog sistema automatskog upravljanja.

suprotnom naša analiza ne bi imala smisla.

Za sistem sa slike u prethodnom poglaviju izračunali smo signal gрешке $E^*(s)$ kao

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}, \quad (7.1)$$

odnosno u z -domenu

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)}, \quad (7.2)$$

gde je $G(z)$ digitalni ekvivalent funkcije prenosa $G(s)$, a $R(z)$ diskretizovani ulaz $R(s)$. Važno je primetiti da gрешка sistema $E(z)$ zavisi od dva faktora⁴: samog sistema, odnosno njegove funkcije diskretnog prenosa $G(z)$ i жељene vrednosti $R(z)$. Samim tim, jasno je da će analiza veličine gрешke, odnosno gрешke u ustavljenom stanju, biti usmerena na analizu uticaja svakog od ta dva faktora posob.

Podsećamo da se svaka funkcija diskretnog prenosa može posmatrati kroz nule i polove sistema, odnosno može se predstaviti u sledećoj formi

$$G(z) = \frac{K \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{(z - 1)^N \prod_{i=1}^n (z - p_i)}, \quad \text{gdje važi } p_i \neq 1, z_j \neq 1, N \geq 0. \quad (7.3)$$

⁴ U poglaviju o diskretizaciji regulatora, pokazali smo da postupak prevodenja kontinualnog integratora \int u diskretnu formu nije jednozoran, ali da se u brojocu funkcije diskretnog prenosa uvek sadrži pol u $(z - 1)$, odnosno

$$K_d \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \right|_{z=1}. \quad (7.4)$$

Lako je zaključiti da K_d predstavlja statičko pojačanje direktnе grane, za sistem bez astatizama.

Gрешка u ustavljenom stanju definise se kao vrednost signala gрешке kada $k \rightarrow \infty$, odnosno

$$e_{ss} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k), \quad (7.5)$$

gde je $e(k)$ povorka odbraka u vremenskom domenu. Koristeći teoremu o graničnim vrednostima iz osobina \mathcal{Z} -transformacije, izraz možemo napisati i u sledećem obliku

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z), \quad (7.6)$$

gde je $E(z) = \mathcal{Z}\{e(kT)\}$. Za naš sistem sa slike 7.1, kod koga je gрешка $E(z)$ data obrascem (7.2), izraz (7.6) postaje

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{R(z)}{1 + G(z)}. \quad (7.7)$$

U našoj daljnjoj studiji sistema sa slike 7.1, izraz (7.7) zauzima centralno mesto. Daljnju analizu podeljemo u dva koraka. Prvo ćemo razmatrati različite klase ulaza u sistem, konkretno Heavisajdovu ili step funkciju i nagnetu ili rampu funkciju. Uticaj strukture sistema na vrednost gрешке u ustavljenom stanju posebno će se razmatrati za svaki od ovih slučajeva.

7.2.1 Gрешке u ustavljenom stanju na step pobudu

Potpostavili smo da se na ulazu sistema sa slike 7.1 nalazi jedinicna step funkcija (Heavisajdova funkcija). Za ovu klasu ulaza, definisacemo novu veličinu K_p , koju nazivamo pozitivnu konstantu ili konstantu položaja. U odnosu na gрешku u ustavljenom stanju, K_p se definisce na sledeći način

$$e_{ss} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + K_p}. \quad (7.8)$$

U daljnjoj studiji, polazimo od dobro poznate činjenice da je \mathcal{Z} -transformacija našeg ulaznog Hevisajdovog signala

$$R(z) = \frac{z}{z - 1}. \quad (7.9)$$

Tada izraz za grešku u ustaljenom stanju (7.7) postaje

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{\frac{z}{z-1}}{1 + G(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Iz izraza (7.8) i (7.10) jasno je da se vrednost pozicione konstante utvrđuje kao

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z). \quad (7.11)$$

Daljnja analiza vrednosti greške u ustaljenom stanju iz izraza (7.10) i (7.11) zavisi od strukture sistema, odnosno reda astatizma sistema N iz izraza (7.3).

U skladu sa tim čemo usmeriti i našu diskusiju:

1. U slučaju da sistem nema astatizama $N = 0$, odnosno da je tada je očigledno da je $K_p = K_{dc}$, odnosno da postoji konačna greška u ustaljenom stanju, koja iznosi

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_{dc}}. \quad (7.12)$$

Jasno je da će greška biti manja ukoliko je pojačanje direktnе grane veće.

Naravno, dobro je poznato da postoji jasno ograničenje pojačanja koje sistem može da trpi bez gubitka na performansama, prvo oscilatornosti, a zatim i stabilnosti. Ovaj rezultat može i drugaćije da se iskaže: sistem bez astatizma (integralnog dejstva), ne može da eliminiše grešku u ustaljenom stanju na step pobudu.

2. Ako sistem ima bar jedan astatizam tj. ako je $N \geq 1$, tada se lako izračuna da $K_p \rightarrow \infty$, što znači da će $e_{ss} \rightarrow 0$, odnosno potreban je bar jedan astatizam (integralno dejstvo) da bi sistem na step pobudu imao grešku u ustaljenom stanju jednaku nuli. Podsećamo da je ovo osnovni razlog uvođenja integralnog dejstva u upravljačku strukturu P/D regulatora.

7.2.2 Greške u ustaljenom stanju na nagnjenu pobudu

Slično kao ranije, pretpostavili smo da se na ulazu sistema sa slike 7.1 nalazi rampa funkcija (nagibna funkcija) I za ovu klasu ulaza, definisatićemo novu veličinu K_v koju nazivamo brzinska konstanta digitalnog sistema. U odnosu na grešku u ustaljenom stanju K_p se definisće na sledeći način

$$e_{ss} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K_v}. \quad (7.13)$$

Vrednost $R(z)$ za ulaznu rampu funkciju iznosi

$$R(z) = \frac{Tz}{(z - 1)^2}, \quad (7.14)$$

a greška u ustaljenom stanju (7.7) sada se izračunava kao

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{\frac{Tz}{(z-1)^2}}{1 + G(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz}{(z - 1) + (z - 1)G(z)} \\ &= \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z)}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Vrednost pozicione konstante lako se utvrđuje iz izraza (7.13) i (7.15) kao

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z - 1)G(z). \quad (7.16)$$

Analiza vrednosti greške u ustaljenom stanju iz izraza (7.15) i (7.16) zavisi od reda astatizma sistema N iz izraza (7.3). Diskusija moguće vrednosti greške u ustaljenom stanju sada se svodi na tri moguća slučaja:

1. U slučaju da sistem nema astatizama tj. ako je $N = 0$, tada je očigledno da $K_v \rightarrow 0$, odnosno tada greška u ustaljenom stanju $e_{ss} \rightarrow \infty$. Naime,

sistem bez astatizama nije u stanju da prati željenu vrednost u formi rampa funkcije. Podsećamo da se radi o stabilnom sistemu, koji doseže ustajeno stanje, ali bez mogućnosti da prati promene na ulazu.

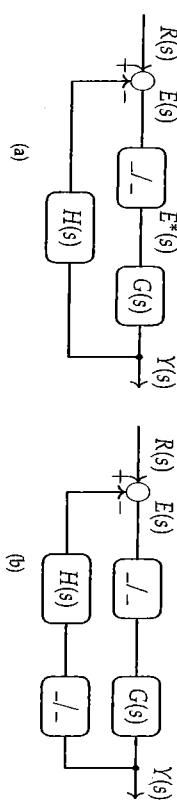
2. Ako sistem ima jedan astatizam tj. ako je $N = 1$, tada je očigledno

$$e_{ss} = \frac{1}{k_0} = \frac{T}{K_{dc}} \quad (7.17)$$

Jedan astatizam daje mogućnost sistemu da prati promene ulaza uz ko- načnu grešku u ustajenom stanju. Greška će biti manja ukoliko je poja- čanje direktnе grane veće. Slično kao u prethodnom primjeru, porečanje pojačanja direktnе grane smanjuje grešku u ustajenom stanju, a preko- merno pojačanje narušiće performanse sistema. Međutim, ovde prvi put primetljeno da greška u ustajenom stanju eksplicitno zavisi od vremena odabiranja T .

3. Ako sistem ima bar dva astatizma tj. ako je $N \geq 2$, tada se lako izračuna da $K_0 \rightarrow \infty$, što znači da će $e_{ss} \rightarrow 0$. Drugim rečima, potrebna su bar dva astatizma (integralna dejstva) da bi sistem na rampa pobudu imao grešku u ustajenom stanju jednaku nuli⁵.

Čitaocu ostavljamo za vežbu da analizu, koju smo sprovedeli za sistem sa slike 7.1, sproveđe za sisteme sa slike 7.2, odnosno da izračuna izraze za e_{ss} , K_p i K_v .



Slika 7.2: Blok-dijagrami digitalnog upravljačkog sistema sa nejediničnom povratnom spregom.

gde je prvi član $1/(1 + G_D(z)G(z))$ faktički funkcija prenosa koja povezuje $E(z)$ i $R(z)$, a drugi član $-G(z)/(1 + G_D(z)G(z))$ funkcija prenosa koja povezuje $E(z)$ i pomenetaj $L(z)$.

U skladu sa teoremom o graničnim vrednostima, opisanu izrazom (7.6), grešku u ustajenom stanju na osnovu jednačine (7.19) izračunavamo u sledećem obliku

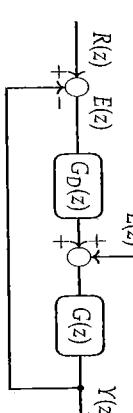
Odziv sistema $Y(z)$ u prisustvu dva ulaza, dobija se u sledećoj formi

$$Y(z) = G_D(z)G(z)E(z) + G(z)L(z). \quad (7.18)$$

Ako znamo da je $Y(z) = R(z) - E(z)$, tada se iz izraza (7.18) izračunava vrednost greške $E(z)$ kao

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_D(z)G(z)} R(z) - \frac{G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} L(z), \quad (7.19)$$

⁵ Analizirajući prethodne prime- re, čitalac može zaključiti da ve- cí broj astatizama garantuje nullu grešku u ustajenom stanju za ši- roku klasu ulaznih signala. Pod- sećamo da svaki astatizam dopri- nosi faznom delu frekvencije ka- rakteristike -90° ili $-\pi/2$ rad, što bi sa samo dva astatizma dovelo sistemu na granicu stabilnosti.



Slika 7.3: Blok-dijagram digitalnog upravljačkog sistema sa prisustvom poremećaja.

⁶ Podećemo čitace na osobinu superpozicije.

Upravljački sistemi sa povratnom spregom projektuju se tako da mogu da eliminiraju ili smanje uticaj neželjenih poremećaja na dovoljno malu meru. Na- mera nam je da u okviru ovog poglavљa analiziramo uticaj poremećaja na gre- šku u ustajenom stanju. Zbog prisustva poremećaja, sada prvi put razdvajamo elemente direktnе grane u kolu sa povratnom spregom i to na funkciju digital- nog prenosa regulatora $G_D(z)$ i digitalni ekivalent funkcije prenosa $G(z)$, slika 7.3. Kao što će se videti za minimizaciju uticaja poremećaja $L(z)$ moramo vodi- ti računa o strukturi svakog od elemenata direktnе grane ponaosob ili tačnije, ako smo u ranjoj analizi zaključili da se greška u ustajenom stanju smanjuje uz prisustvo integralnog dejstva, sada ćemo pokazati da nije svejedno u okviru kog funkcijiskog bloka u direktnоj grani se nalazi ovo dejstvo.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1+G_D(z)G(z)} R(z) - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} L(z) \\ &= e_{Rss} + e_{Lss}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

Page 8

$$e_{\text{RSS}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1 + G_D(z)G(z)} R(z), \quad (7.21)$$

Q15010

$$e_{\text{LSS}} = - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} L(z). \quad (7.22)$$

Ocigledno je prvi izraz (7.21) greska u ustaljenom stanju, koja nastaje kao posledica ulaza $R(z)$, a izraz (7.22) je greska u ustaljenom stanju koja je posledica poremećaja $L(z)$. Vrednost greske u ustaljenom stanju, koja je posledica ulaza $R(z)$, načelno smo analizirali u prethodnom poglaviju. Namera nam je da u nastavku testa analiziramo mogućnost smanjenja greske $\varepsilon_{Ls}(kT)$, koja je posledica neželjnjog ulaza, odnosno poremećaja $L(z)$.

bez gubitka na opštost, možemo prepostaviti da je poremećaj $L(z)$ konstantan, odnosno bolje je reći da odgovara Hevisajdovoj funkciji i njegova 3-transformacija je u obliku $L(z) = z/(z - 1)$. Za ovu vrednost $L(z)$ izraz (7.22) postaje

$$e_{LSS} = -\frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{G(z)} + \lim_{z \rightarrow 1} G_D(z)}. \quad (7.23)$$

Iz izraza je jasno da se greška u ustavljenom stanju, koja je nastala kao posledica step poremećaja $L(z)$, može smanjiti na jedan od dva načina: povećanjem statičkog pojačanja funkcije prenosa $G_D(z)$ ili smanjenjem statičkog pojačanja funkcije prenosa $G(z)^7$.

Da bismo bolje ilustrovali postupak smanjenja greške u ustaljenom stanju, koja je posledica neželjenog poremećaja $L(z)$, možemo pretpostaviti da je željeni ulaz $R(z) = 0$ i tada se slika 7.3 transformiše u blok-dijagram funkcije prenosa kao na slici 7.4.

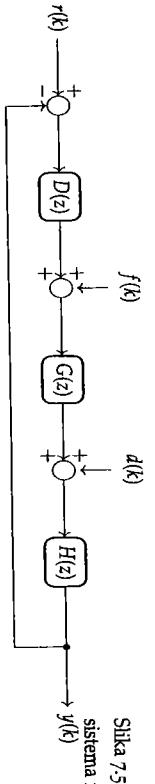
'Statističko pojačanje funkcije dispeksije kretnog prenosa $A(z)$ definisati kao $A(z^{-1})$. Očigledno je da će u slučaju da $A(z)$ ima astatizamnu vrednost statističkog pojačanja težiti beskonacnosti.

Ovo bi praktično značilo da je za smanjivanje greške u usmjerilejnom stanju potrebno da regulator sistema $G(z)$ sadrži astatizamnu odnosno da nije svegde moguće da se integralno dejstvo nalazi, u okviru regulatora ili procesa $G(z)$.

Simulacije uticaja poremetaja u Sunulinku veoma su jednostavne i ostavljaju ih čitaocima za samostalni rad i vežbu.

7.4 Problemi

Problem 7.1. Na slici 7.5 prikazan je strukturalni blok-dijagram sistema pri čemu je $D(z) = \frac{5}{z-1}$, $G(z) = \frac{z-0.2}{z-0.5}$ i $H(z) = \frac{2}{z-0.3}$. Odrediti grešku u ustajnjem stanju ukoliko je $r(k) = h(k)$, $f(k) = 2kh(k)$ i $d(k) = kh(k)$. Sistem je stabilan nakon zavrsavanja povratne sprege.

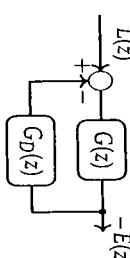


Slika 7.5: Blok-dijagram sistema iz zadatka 7.1

Problem 7.2. Izračunati vrednost gрешке u ustaljenom stanju za sistem sa slike 7.6 ako je:

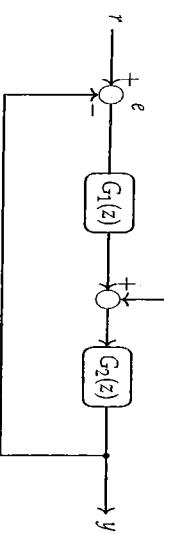
- a) $r(k) = h(k), d(k) = h(k), G_1(z) = 1, G_2(z) = \frac{1}{z-0.5}$
 b) $r(k) = h(k), d(k) = h(k), G_1(z) = 1, G_2(z) = \frac{1}{z-1}$
 c) $r(k) = h(k), d(k) = h(k), G_1(z) = \frac{1}{z-1}, G_2(z) = 1$

Sa slike 7.4 je jasnije da, ako želimo da minimizujemo vrednost izlaznog pojačanja $E(z)$, moramo ili da povećamo vrednost statičkog pojačanja funkcije prenosnog u povratnoj sprezi $G_p(z)$ sa či-



Slika 7.4: Ekvivalent funkcije prenosa u slučaju da je ulaz samo poremećaj $L(z)$

ljem da manje vrednosti $\varepsilon(z)$ dosegnu u vrednost ulaza $L(z)$ ili da smanjuju statičko pojačanje $G(z)$, što direk-



Slika 7.6: Blok-diagram sistema.

d) $r(t) = k \cdot h(t)$, $d(t) = k \cdot h(t)$, $G_1(z) = 1$, $G_2(z) = \frac{1}{z-1}$

Problem 7.3: Projekovati diskretni PI kompenzator (odrediti parametre K_p i K_i) koji je zadat u opštem obliku

$$D(z) = \frac{K_i z}{z-1} + K_p,$$

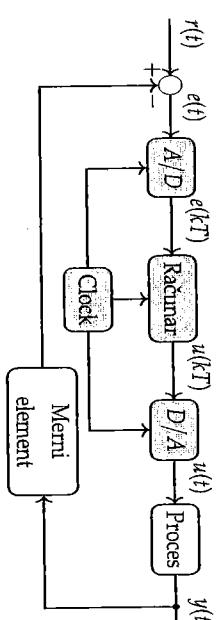
tako da se garantuje da je greška u ustaljenom stanju manja od 0.01 ukoliko je ulazna pobuda rampa signal. Parametre odrediti u funkciji vremena odabiranja T . Proces ima funkciju prenosa $G(s) = \frac{1}{s+1}$, odabirač je idealan, A/D konvertor je modelovan kolom zadiske nultog reda, a pojačanje u povratnoj sprezi je jedinično.

8

Diskretizacija matematičkog modela u prostoru stanja

8.1 Matematički model u prostoru stanja

Početno ovo poglavje podsećanjem na strukturu digitalnog upravljačkog sistema, koja je prikazana na slici 8.1. Do sada smo uspešno matematički opisali sve elemente ovog sistema, uz ograničenje da smo razmatrali samo procese koji se modeluju funkcijom prenosa. Čitacima je dobro poznato da je primena funkcije prenosa ograničena na sisteme sa malim brojem ulaza i izlaza i nultim početnim uslovima.¹



Slika 8.1: Shema digitalnog upravljačkog sistema

¹ Funkcija prenosa koristi se da matematički opise linearne, vremenski nepromjenjive sisteme, poslužujući sa jednim ulazom i jednim izlazom.

U slučaju sistema sa većim brojem ulaza i izlaza koriste se matrice funkcija prenosa, ali se ovakvi sistemi mnogo češće opisuju *matematičkim modelima u prostoru stanja*. Linearni vremenski nepromjenjivi kontinualni sistem u prostoru stanja možemo opisati sledećim sistemom jednačina²:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

² Sa druge strane linearni vremenski promjenjivi sistemi navode se u sledećoj formi:

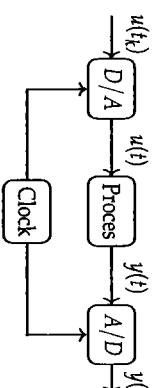
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t),$$

Naučnu studiju ograničeno na na-vedene linearne, vremenski ne-promjenjive sisteme, uz neka uopštenja koja se mogu primeniti i na neelinearne, odnosno vremen-ski promjenjive sisteme.

gde je \mathbf{x} vektor stanja dimenzije n , \mathbf{u} je vektor ulaza (upravljanja) dimenzije r , a \mathbf{y} je vektor izlaza dimenzije m . Matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} nazivali smo matrice stanja, ulaza, izlaza i direktnog prelaza³ respectivno, sve pod pretpostavkom da su dimenzije matrica usaglašene sa dimenzijama vektora.⁴

Kao što je poznato, digitalni upravljački uređaj šalje vrednost upravljačkog signala u taktu frekvencije odabiranja, a mi to kolokvijalno kažemo „upravljački uređaj vidi“ proces u trenucima odabiranja. Shematski, kako proces izgleda iz perspektive upravljačkog uređaja predstavili smo na slici 8.2. U ovom slučaju nismo se ograničili na vreme odabiranja u ekvidistančnim vremenskim trenucima kT , već smo diskrette vremenske trenutke posmatrali nešto opštije i predstavili ih kao t_k .



Slika 8.2: Shema kontinualnog procesa u prisustvu A/D i D/A konvertora.

Zakonitost na koju želimo da ukazemo predstavljena je na slici 8.2. Veza ulaza i izlaza kontinualnog procesa data je jednačinama (8.1) i (8.2). Dinamiku izlaza upravljački uređaj vidi samo u diskretnim vremenskim trenucima $y(t_k)$, a u istom taktu menja se vrednost ulazne promenljive $u(t_k)$. Drugim rečima, sa stanovišta digitalnog regulatora treba nam funkcionalna veza između diskretnog ulaza $u(t_k)$ i diskretnog izlaza $y(t_k)$, koja respektuje dinamiku procesa datu jednačinama (8.1) i (8.2). Ova veza diskretnih ulaza i izlaza, uz poštovanje dinamike kontinualnog sistema, predstavlja matematički model u prostoru stanja diskretnog sistema, koja se zapisuje na sledeći način

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi \mathbf{x}(t_k) + \Gamma \mathbf{u}(t_k) \quad (8.3)$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t_k). \quad (8.4)$$

Digitalni ekvivalent dat jednačinama (8.3) i (8.4) razvira se i stroboskopski model (engl. *stroboscopic*), jer daje vezu između sistemskih promenljivih samo u trenucima odabiranja. Primetite da je jednačina (8.4) u istoj formi kao odgovarajući kontinualni izraz (8.2), što je i očekivano, jer bez prisustva operatora diferenciranja/integracije, diskretizacija se svodi na „smenu“ $t = t_k$. Iz ranijih postupaka pronaalaženja digitalnih ekvivalenta, jasno je da se zaista menja

³ Matrica \mathbf{D} postoji, ako postoji direktni uticaj ulaza na izlaz, što je ipak retko. U literaturi ora matrica se zove eng. *direct feedthrough matrix*, a koriste se razni prevođaci izlazno-ulazna matrica, matrične i ili vektorske veličine obeležene masivom ili **bold** fontom, npr. \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{x} i \mathbf{y} .

⁴ Obraćite pažnju da su sve matrice i ili vektorske veličine obeležene masivom ili **bold** fontom,

izraz koji ukazuje na promenu vektora stanja dat diferencijalnim jednačinama (8.1), koje se transformišu u oblik (8.3). Uspostavljanje veze između izraza (8.1) i (8.3) jeste naš osnovni zadat u poglaviju koje sledi.

8.2 Diskretizacija matematičkog modela u prostoru stanja

U okviru ovog poglavljia namera nam je da izvedemo digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja, odnosno, da nađemo funkcionalnu vezu između diskretnog izlaza $y(t_k)$ i diskretnog ulaza $u(t_k)$, sa slike 8.2, ako je proces opisan matematičkim modelom u prostoru stanja, tačnije jednačinama (8.1) i (8.4). Očekujemo da digitalni ekvivalent očee u formi diferencnih jednačina (8.3) i (8.4). Kao u svakom matematičkom modelovanju i/ili izvođenju digitalnog ekvivalenta, usvojili smo određene pretpostavke. Pretpostavili smo da se A/D konvertor modeluje kao idealni odabirac, a da se D/A konvertor može opisati kao kolo zadiške nultog reda. Izvođenje digitalnog ekvivalenta matematičkog modela u prostoru stanja podržavane poznavanje teorije kontinualnih sistema automatskog upravljanja. Pretpostavljamo da je čitalac upoznat sa opštim principima i matematičkim alatima koji prate analizu kontinualnih sistema. Međutim, radi potpunosti i lakšeg praćenja teksta, u poglaviju koje sledi opisacemo osnovne formalizme kontinualnih matematičkih modela u prostoru stanja uz izvinjenje čitatocima, ako smo ih opteretili gradivom i izneli za njih već dobro poznate činjenice.

8.2.1 Kretanje kontinualnih procesa u prostoru stanja

Pod pojmom kretanja procesa u prostoru stanja podrazumevamo određavanje svih vrednosti vektora stanja $\mathbf{x}(t)$ u svakom vremenskom trenutku, a na osnovu poznavanja vrednosti početnih uslova i svih vrednosti vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$. Jasno je da poznavanjem promenljivih stanja, koje podrazumeva i poznavanje upravljačkih promenljivih, u potpunosti karakteriše ponašanje procesa.

Za pretpostavljeni matematički model u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (8.5)$$

gde su početni uslovi poznati i zadati $\mathbf{x}(0)$, uz poznati vektor upravljanja u svim trenucima vremena $\mathbf{u}(t)$, izračunavanje kretanja u prostoru stanja svodi

se na integraciju sistema diferencijalnih jednačina (8.5). Do kretanja u prostoru stanja doći ćemo postupno. Prvo ćemo razmatrati kretanje u prostoru stanja koje je posledica početnih uslova, T_0 tv odziv nazivano sopstveni odziv. Zatim ćemo uvesti i pobudni signal (vektor upravljanja), T_1 , ta konstanta odziva naziva se primredni odziv. Ukupni odziv ili kretanje u prostoru stanja dobija se superpozicijom ove dve komponente, što je naravno mogće zbog pretpostavke o linearnosti razmatranog sistema. Našu analizu studiju zemimo razmatranjem jednodimenzionih sistema, koje ćemo zatim upotpuniti na višedimenzione sisteme.

Sopstveni odziv sistema Dobijanje odziva sistema (8.5), bez primedbe komponente $u(t) \equiv 0$ i sa proizvoljnim vektorom početnih uslova $x(0)$ se praktično svodi na integraciju sistema od n homogenih diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (8.6)$$

U slučaju da se radi o jednodimenzionom sistemu

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad (8.7)$$

uz početni uslov $x(0)$. Sopstveni ili homogeni odziv $x_h(t)$ lako se dobija u eksponencijalnoj formi, gde je vremenska konstanta sistema $T_s = -1/a$

$$x_h(t) = e^{at}x(0) \quad (8.8)$$

Eksponencijalni član e^{at} u jednačini (8.8) može se razviti u stepeni red, čime ovazaz (8.8) postaje

$$x_h(t) = \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{a^k t^k}{k!} + \cdots \right) x(0). \quad (8.9)$$

Pritom ovaj red konvergira za sve konične vrednosti $t > 0$. Prepostavimo sada da se sopstveni (homogeni) odziv višedimenzionog sistema (8.6) može dobiti u sličnoj formi stepenovanog reda, pri čemu se skalar a iz jednačine „menja“ kvadratnom maticom A . Drugim rečima, prepostavili smo rešenje u sledećem obliku

$$x_h(t) = \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots \right) x(0), \quad (8.10)$$

gde je $x(0)$ vektor početnih uslova, a I jedinična matica odgovarajućih dimenzija. Pošto je matica A kvadratna, dimenzije $n \times n$, svaki element reda je takođe istih dimenzija, što naravno čini i da je izraz u zagradi dimenzije $n \times n$. Da bismo potvrdili da pretpostavljeno rešenje dato izrazom (8.10) zadovoljava i na diferencijalnu jednačinu (8.6), diferencirajemo po vremenu jednačinu (8.10), odnosno

$$\begin{aligned} \dot{x}_h(t) &= \left(0 + A + \frac{A^2 t}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots \right) x(0) \\ &= A \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots \right) x(0) \\ &= Ax_h(t). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Izraz (8.11) pokazao je da pretpostavljeni profil rešenja u formi stepenog reda (8.10) jeste rešenje homogene matične diferencijalne jednačine (8.6). Drugim rečima, sopstveni odziv sistema (8.6), na početne uslove $x(0)$ izračunava se kao beskonačna matrična suma, koja zavisi samo od matrice stanja A i uvedena je jednačinom (8.10). Na osnovu sličnosti skalarnog (8.9) i matričnog izraza (8.10) možemo uvesti matričnu eksponencijalnu funkciju na sledeći način

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots, \quad (8.12)$$

pri čemu je dimenzija izraza ista kao i matrice A , koja ga u osnovi definisuje. Napominjemo, da matica u eksponentu, naglašava da se radi o matričnoj funkciji. Konačno, u skladu sa izrazima (8.12) i (8.10) možemo napisati da se sopstveni (homogeni) odziv višedimenzionog sistema izračunava po sledećem obrazcu

$$x_h(t) = e^{At}x(0). \quad (8.13)$$

Primredni odziv sistema U okviru ovog paragrafa razmatraćemo potpuni odziv linearnog sistema, odnosno odziv koji pored početnih uslova uključuje i ulazni signal $u(t)$. Kao i u prethodnom slučaju, započaćemo analizu razmatranjem jednodimenzionog sistema, a kasnije ćemo obrasce i pravila koja ustavljamo uopštiti i na sisteme veće dimenzionalnosti.

Posmatrajmo sistem prvog reda, kod koga je jednačina stanja data sledećim izrazom

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t). \quad (8.14)$$

Jednačina (8.14), može se zapisati i u drugoj formi, koja će se pokazati kao pogodniji za dalju transformaciju

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t). \quad (8.15)$$

Množenjem obe strane jednačine (8.15) sa e^{-at} , izraz sa leve strane znaka jednakosti, može se zapisati u obliku totalnog diferencijala po vremenu, odnosno kao

$$\dot{x}(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) = e^{-at}bu(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-at}x(t) \right) = e^{-at}bu(t). \quad (8.16)$$

Iraz (8.16) je direktno integrabilan, a integracijom se lako dobija sledeći identitet

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-a\tau}x(\tau) \right) d\tau &= \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \\ e^{-at}x(t) - x(0) &= \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Iraz (8.17) može se zapisati i u kompaktnoj formi

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau. \quad (8.18)$$

Jednačina (8.18) predstavlja obrazac za izračunavanje kretanja u prostoru stanja sistema prvog reda, pri čemu je očigledno da izraz pod znakom integrala opisuje primredni odziv sistema, a sopstveni odziv sistema je naravno vezan za početne uslove $x(0)$, već počinju u nekom „zakasnelom“ trenutku vremena t_k . Tada izraz (8.22) postaje

$$x(t) = e^{a(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{a(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (8.23)$$

Izračuna (8.18) predstavlja obrazac za izračunavanje kretanja u prostoru stanja sistema prvog reda, pri čemu je očigledno da izraz pod znakom integrala opisuje primredni odziv sistema, a sopstveni odziv sistema je naravno vezan za početne uslove.

Nameru nam je da u nastavku teksta uopštimo izneti formalizam za izvođenje kretanja u prostoru stanja i primenimo ga na sisteme višeg reda

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (8.19)$$

Množenjem leve i desne strane jednačine (8.19) sa kvadratnom matricom e^{-At} dobijamo

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{-At}x(t) \right) = e^{-At}Bu(t). \quad (8.20)$$

Integracijom izraza (8.20) dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-A\tau}x(\tau) \right) d\tau &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ e^{-At}x(t) - e^{-A0}x(0) &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Ako znamo da je $e^{-A0} = I$ i da važi $(e^{-At})^{-1} = e^{At}$, prethodni identitet (8.21) postaje

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Kretanje u prostoru stanja određeno je jednačinama (8.22). Prvi član uz vektor početnih uslova predstavlja sopstveni odziv sistema, dok konvolucioni integral opisuje primredni komponentu odziva.

U postupku diskretizacije matematičkog modela u prostoru stanja od interesa nam je da razmatramo sisteme koji u opštem slučaju nisu vezani za nulte početne uslove $x(0)$, već počinju u nekom „zakasnelom“ trenutku vremena t_k . Tada izraz (8.22) postaje

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (8.23)$$

za $t > t_k$. Važno je napomenuti još jednu činjenicu. U izračunavanju kretanja u prostoru stanja, koristili smo pojmove kao što su sopstveni i primredni odzovi.

Čitacu je jasno da smo izrazima (8.22) i (8.23) izračunali koordinate vektora stanja $x(t)$, a da se *izlaz* sistema izračunava uz ponos jednačine (8.2), odnosno kao

$$y(t) = C e^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad (8.24)$$

¹Pojam *odziv* po pravilu se veži za izlaz sistema, međutim u analizi matematičkog modela u prostoru stanja pojmom *odziv* se svi signali od interesa ne obeležuju sa npr. $f(t)$, već $f(t - t_k)$, nego sa $f(t)$.

²Pojam *odziv* po pravilu se veži za izlaz sistema, međutim u analizi matematičkog modela u prostoru stanja pojmom *odziv* se svi signali od interesa ne obeležuju sa npr. $f(t)$, već $f(t - t_k)$, nego sa $f(t)$.

³Uputuјемо čitaocu na slike na koje su prikazani konvolucioni integrali u oblasti teorije linearnih sistema automatskog upravljanja.

⁴Pojam *zakasni* vremenski interval, strogo gledano, ne opisuje fizičko vremensko kašnjenje, već nego da razmatranu vremensku interval ne počinje u nultom trenutku već u trenutku t_k . Stoga se svi signali od interesa ne obeležuju sa npr. $f(t)$, već $f(t - t_k)$, nego sa $f(t)$.

8.2.2 Digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja

U cilju određivanja digitalnog ekvivalenta u prostoru stanja, podsećamo na pretpostavke koje smo usvojili. Prepostavili smo da se A/D konvertor ponaša kao idealni odabirac i da D/A konvertor funkcioniše kao kolo zadruške nultog reda, odnosno da se upravljanje menja u trenucima odabiranja t_k i da je neprekidno sa desne strane. U određivanju funkcionalne veze između promenljivih stanja, počemo od izračunavanja kretanja u prostoru stanja između trenutaka odabiranja $t_k < t < t_{k+1}$, tačnije započnijemo od relacije (8.23)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi')} \mathbf{B} \mathbf{u}(\xi') d\xi', \quad (8.26)$$

gdje smo uveli novu privremenu promenljivu ξ' koja fizički predstavlja vreme.⁸

Dobro je znato da je kod kola zadruške nultog reda upravljanje neepromenljivo između dva trenutka odabiranja, slika 8.2, odnosno za posmatrani vremenski interval $t_k < t < t_{k+1}$ upravljanje je konstantno i iznosi $u(t_k)$. Stoga, u jednačini (8.26), upravljanje je neepromenljivo i može se izvesti izvan znaka integrala pa dobijamo

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi')} \mathbf{B} d\xi' \mathbf{u}(t_k). \quad (8.27)$$

Da bismo pojednostavili identitet (8.27), uvodimo smenu $t - \xi' = \xi$, odnosno $-d\xi' = d\xi$, pa uz promenu granica određenog integrala lako izračunavamo

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_0^{t-t_k} e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{B} d\xi \mathbf{u}(t_k). \quad (8.28)$$

Izraz (8.28) zapisuje se u kompaktnoj formi kao

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_k) \mathbf{x}(t_k) + \Gamma(t-t_k) \mathbf{u}(t_k), \quad (8.29)$$

gdje je očigledno da su novouvedene matrice definisane na sledeći način

$$\Phi(t-t_k) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}$$

$$\Gamma(t-t_k) = \int_0^{t-t_k} e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{B} d\xi. \quad (8.30)$$

Ako su A/D i D/A konvertori sa slike 8.2 dobro sinhronizovani satom (engl. clock) i ako konverzije ne uvrde dodatno kašnjenje u sistem, tada se promene vektora stanja i izlaza u trenucima odabiranja ($\dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots$) mogu izračunati u skladu sa jednačinama (8.1), (8.2), (8.29) i (8.30) kao

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}-t_k) \mathbf{x}(t_k) + \Gamma(t_{k+1}-t_k) \mathbf{u}(t_k) \quad (8.31)$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t_k), \quad (8.32)$$

gdje su sada matrice stanja i ulaza

$$\begin{aligned} \Phi(t_{k+1}-t_k) &= e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)} \\ \Gamma(t_{k+1}-t_k) &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{B} d\xi. \end{aligned} \quad (8.33)$$

⁸ Kao što je čitacima dobro poznato, grčkim slovom τ se po pravilu običajno vremensko kasiće. Da bi se izbegle nedoumice, u daljem tumačenju teksta uveli smo ξ kao novu označku (promenljivu).

Jednačine (8.31) - (8.33) predstavljaju digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja, koji je u svom kontinualnom obliku dat jednačinama (8.1) i (8.2). U najvećem broju slučajeva matrica $\mathbf{D} = 0$ jer kod digitalnih upravljačkih sistema izlaz \mathbf{y} se prvo izmeri pa se na osnovu vrednosti $\mathbf{y}(t_k)$ generiše upravljački signal $\mathbf{u}(t_k)$. Dobro je primetiti da se vrednost vektora stanja sistema, između trenutaka odabiranja, može izračunati u skladu sa jednačinama (8.29) i (8.30). Takođe, važno je istaći da se ponašanje sistema tada faktički računa kao step odziv sistema uz respektovanje početnih uslova, odnosno da je između trenutaka odabiranja prekinuta povratna sprega, tj. može se reći da tada sistem radi u otvorenoj povratnoj sprezi.

U slučaju da je vreme odabiranja ekvidistantno raspoređeno duž vremenske osi $t_k = kT$, jednačine diskretnog matematičkog modela u prostoru stanja (8.31) - (8.33) dobijaju sledeći oblik

$$\mathbf{x}(kT+T) = \Phi \mathbf{x}(kT) + \Gamma \mathbf{u}(kT) \quad (8.34)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT), \quad (8.35)$$

gdje su matrice stanja i ulaza

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{B} d\xi. \quad (8.36)$$

Ova forma, data jednačinama (8.34) - (8.36) u našoj studiji diskretnih sistema imaju centralnu ulogu.⁹

Primer 8.1 (Diskretizacija sistema prvog reda). U ilustraciji diskretizacije u prostoru stanja, krenutemo od najdroštavnijeg slučaja, sistema prvog reda. Prepostavimo da je sistem opisan sledećom diferencijalnom jednačinom

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta u(t).$$

U skladu sa jednačinama (8.36) izračunavamo matrice stanja i ulaza digitalnog ekvivalenta kao

$$\Phi = e^{\alpha T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\alpha \tilde{t}} \tilde{p} d\tilde{t} = \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1).$$

odnosno diferencija jednačina, koja opisuje promenu stanja diskretnog sistema je

$$x(k+1) = e^{\alpha T} x(k) + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) u(k).$$

Primer 8.2 (Inverzna diskretizacija). Cilj nam je da na osnovu diferencije jednačine, koja predstavlja diskretni model u prostoru stanja, rekonstrušemo kontinualni ekvivalent. Dinamika diskretnog sistema je opisana sledećom diferencijalnom jednačinom

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k).$$

Na osnovu prethodnog primera možemo napisati sledeće identitete

$$\begin{aligned} e^{\alpha T} &= a \\ \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) &= b. \end{aligned}$$

gdje su očigledno α i β vrednosti matrica stanja i ulaza kontinualnog sistema respectivno. Dalje lako izračunavamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{T} \ln a \\ \beta &= \frac{1}{T} \ln a \frac{b}{a-1}. \end{aligned}$$

⁹ Matematički model u prostoru stanja diskretnog sistema se često piše i u svojoj skraćenoj formi

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k), \end{aligned}$$

Bez gubitka na opštosti u daljem tekstu ćemo ravnopravno konstituti obne predstavljene forme matematičkog modela u prostoru stanja.

8.3 Kretanje diskretnog sistema u prostoru stanja i funkcija diskretnog prenosa

Nameru nam je da u ovom kratkom poglavju rešimo diferencne jednačine koje opisuju dinamiku diskretnog sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k), \end{aligned} \quad (8.37)$$

odnosno da u zatvorenoj, analitičkoj formi dobijeno izraz koji opisuje kretanje u prostoru stanja i odgovarajući izlaz sistema. U nastavku ćemo zanemariti početne uslove i izračunati odgovarajuću funkciju diskretnog prenosa.

8.3.1 Kretanje u prostoru stanja

Slično kao kod kontinualnih sistema, da bi izračunali kretanje u prostoru stanja, pretpostavili smo da su vrednosti vektora stanja u početnom trenutku k_0 poznate i zadate $x(k_0)$. Takođe su poznate vrednosti vektora upravljanja u svim diskretnim trenucima vremena $u(k_0), u(k_0+1), \dots$. Kroz iterativnu proceduru lako uočavamo zakonomernost promene vektora stanja

$$\begin{aligned} x(k_0+1) &= \Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0) \\ x(k_0+2) &= \Phi x(k_0+1) + \Gamma u(k_0+1) \\ &= \Phi^2 x(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0) + \Gamma u(k_0+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \Phi^{k-k_0-1} \Gamma u(k_0) + \Phi^{k-k_0-2} \Gamma u(k_0+1) + \dots + \Gamma u(k-1) \\ &= \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \Gamma u(i). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Iz izraza (8.39) jasno je da je kretanje u prostoru stanja, kao i kod kontinualnih sistema, određeno početnim uslovima (sopstveni odziv) i ulaznom pobudom (primarni odziv). Isto tako, iz izraza (8.39) jasno je da će sopstvene vrednosti matrice stanja Φ u potpunosti odrediti karakter odziva. Podsećamo da se sopstvene vrednosti dobijaju iz karakteristične jednačine $\det(\lambda I - \Phi) = 0$.

Na osnovu izraza za kretanje u prostoru stanja (8.39) i jednačine izlaza (8.38) lako dobijamo analitičku formu za izračunavanje izlaza diskretnog sistema

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\Phi^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{C} \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \mathbf{T}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (8.40)$$

Interesantno bi bilo ponovo navesti kontinualne izraze za izračunavanje kretanja u prostoru stanja i izlaza kontinualnih sistema. Izraze postavljamo da bismo čitocima ukazali na jasnu analogiju između odgovarajućih kontinualnih i diskretnih jednačina. Procenjivimo da, uz poznavanje postupaka diskretrizacije kontinualnih regulatora, čitaci mogu sami da uspostave logiku i povežu ove identitete

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \mathbf{T}\mathbf{u}(i),$$

odnosno

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{U}(z), \quad (8.44)$$

Naravno, za izračunavanje diskretnе funkcije prenosa početni uslovi se ne uzimaju u obzir $\mathbf{x}(0) = 0$, pa respektujući tu činjenicu, zamenom izraza (8.45) u (8.43) dobijamo

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z).$$

Konačno, funkcija diskretnog prenosa, kao odnos kompleksnog izlaza i ulaza dobija se u sledećoj formi

$$G(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{D}. \quad (8.47)$$

8.4 Problemi

Problem 8.1. Kontinualni sistem opisan je matematičkim modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\Phi^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{C} \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \mathbf{T}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k). \end{aligned}$$

U nastavku, na osnovu uspostavljene funkcionalne veze ulaza i izlaza diskretnog sistema (8.40) odredimo funkciju diskretnog prenosa.

8.3.2 Funkcija diskretnog prenosa

Početemo od matematičkog modela diskretnog sistema u prostoru stanja

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) \quad (8.41)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k). \quad (8.42)$$

Primenom \mathfrak{Z} -transformacije na izraz (8.42) dobijamo

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z). \quad (8.43)$$

Na sličan način možemo naći \mathfrak{Z} -transformaciju izraza (8.41)

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \Phi\mathbf{X}(z) + \Gamma\mathbf{U}(z), \quad (8.44)$$

odnosno

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma\mathbf{U}(z). \quad (8.45)$$

Naravno, za izračunavanje diskretnе funkcije prenosa početni uslovi se ne uzimaju u obzir $\mathbf{x}(0) = 0$, pa respektujući tu činjenicu, zamenom izraza (8.45) u

$$(8.43) \text{ dobijamo} \quad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z).$$

Konačno, funkcija diskretnog prenosa, kao odnos kompleksnog izlaza i ulaza dobija se u sledećoj formi

$$G(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{D}. \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Diskretrizovati dobijeni matematički model ukoliko je perioda odabiranja $T = \ln(2)$ sekundi.

Problem 8.2. Dat je kontinualni sistem opisan sledećim jednačinama:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 3u$$

$$\dot{x}_2 = 3x_2 - u$$

$$y = x_1 + x_2.$$

- a) Diskretizovati dobijeni matematički model ukoliko je perioda odabiranja $T = \ln(2)$ sekundi.
- b) Komentarisi stabilnost kontinualnog i dobijenog diskretnog sistema.

Problem 8.3. Dat je sistem opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}.$$

Formirati diskretni matematički model u prostoru stanja ukoliko je perioda odabiranja $T = \ln(2)$ sekundi. Komentarisi stabilnost dobijenog diskretnog sistema.

Problem 8.4. Dat je diskretni sistem opisan matematičkim modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 4 & -12.5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1.8 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

a) Izračunati funkciju diskretnog prenosa sistema.

b) Odrediti nule i polove dobijene funkcije diskretnog sistema.

c) Odrediti koliko je statičko pojačanje.

d) Diskutovati o stabilnosti diskretnog sistema.

Uvek kada se diskretnе funkcije prenosa koriste za opis digitalnih upravljačkih algoritama ili algoritama za digitalnu obradu signala, važno je razmotriti na koji način se takvi algoritmi mogu implementirati (realizovati) na odgovarajućim digitalnim uređajima. Pri tome, treba imati u vidu način na koji digitalni uređaji primaju informacije iz spoljašnje sredine (na svojim ulazima), obradjuju ih i konačno prosledjuju na izlaze. U ovom poglavljiju bavimo se postupcima pomoću kojih se proizvoljna diskretna funkcija prenosa može realizovati na digitalnom računaru.

S obzirom na način na koji digitalni računari obradjuju ulazne veličine, često je veoma pogodno razmatrane algoritme (funkcije prenosa) prikazati u formi matematičkih modela u prostoru stanja. U ovom odjeljku prikazaćemo nekoliko specifičnih, lako prepoznatljivih oblika ovih modela.

9.1 Uvodna razmatranja

Pre nego što se pozabavimo složenijim diskretnim sistemima, razmotrićemo problem implementacije sistema prvega reda. Konkretno, razmotrićemo sistem opisan funkcijom diskretnog prenosa

$$G(z) = \frac{b}{z-a},$$

gde su a i b proizvodnjni realni parametri. U vremenskom domenu, data funkcija prenosa odgovara diferencijalnoj jednačini (videti napomenu sa strane)

$$y[k] = ay[k-1] + bu[k-1].$$

9 Implementacija diskretnih funkcija prenosa

U zavisnosti od primene, treba voditi računa o efikasnosti reakcije i njenoj osjetljivosti na nepreciznost koeficijenata i greške računarskih operacija. Efikasnost se može meriti metano brojem nemanjih elemenata (elemenata za kasnije) neophodnih za implementaciju, kao i zahtevnim brojem računarskih operacija (sabiranja i množenja). Njepreciznost koeficijenata i nesavršenošći aritmetike su posledica konacnog broja bita sa kojima se brojevne vrednosti beleže na digitalnom računaru.

Ovu jednačinu treba razumeti na sledeći način: k interpretiramo kao tekuci vremenski trenutak. Prethodni trenutak je $k - 1$, onaj pre njega $k - 2$, itd. Stoža se data diferencija jednačina može pročitati i ovako: Tekuci vrednost izlaza dobijamo tako što prethodnu vrednost izlaza, pomnoženu sa a , sabremo sa prethodnom vrednošću ulaza, pomnoženom sa b .

Već na ovom jednostavnom primeru možemo pročiti osnovne "zamke" sa kojima se pri implementaciji srećemo. Razmotrićemo ih redom.

9.1.1 Minimalnost realizacije

Ustanovili smo da posmatrana jednostavna funkcija prenosa opisuje algoritam po kome se tekuća vrednost izlaza računa kao linearna kombinacija prethodnih vrednosti izlaza i ulaza. Kako znamo koja je bila prethodna vrednost ulaza i prethodna vrednost izlaza? Jedini način jeste da se te vrednosti pohrane u memoriju računara, te da se redovno ažuriraju. Naivna implementacija zahteva bi utrošak dve memorijske lokacije: jedna u kojoj bismo čuvali prethodnu vrednost ulaza i drugu u kojoj bismo čuvali prethodnu vrednost izlaza.

Algoritam 1: Naivna implementacija funkcije prenosa prvog reda.

ulazni podaci: u (tekuća vrednost ulaza)

$1: y \leftarrow a * y + b * u$

$2: u \leftarrow u$

$3: y \leftarrow y$

izlazni podaci: y (novosračunata vrednost izlaza)

Označimo li sa y izlaz, a sa u ulaz

datog sistema, možemo pisati

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z-a}$$

s obzirom da je poznato da se funkcija prenosa u odsustvu posetnih uslova, koji nas trenutno ne zaniraju, definše kao odnos kompleksnih likova izlaza i ulaza.

Sada je jasno da je

$$(z-a)Y(z) = bU(z) \Rightarrow$$

$$zY(z) = aY(z) + bU(z).$$

Prisjetimo li se da se kompleksna promjenjiva z u ovom slučaju mora interpretirati kao operator posmeranja za jedan period održavanja "unapred", lako naizuzimajući da je u vremenskom domenu

odnosno a pošto data relacija važi u svakom vremenskom trenutku

$$y[k+1] = ay[k] + bu[k],$$

odnosno (pošto data relacija važi u svakom vremenskom trenutku)

$$y[k] = ay[k-1] + bu[k-1].$$

9.1.2 Kauzalnost

Posmatrajmo dve naizgled veoma slične funkcije prenosa

$$G_1(z) = \frac{b}{z-a} \quad \text{i} \quad G_2(z) = \frac{bz}{z-a}$$

Ponovimo li postupak detaljno opisan u prethodnom poglaviju, naizuzimo da su odgovarajuće rekurentne veze ulaza i izlaza

$$y_1[k] = ay_1[k-1] + bu[k-1],$$

odnosno

$$y_2[k] = ay_2[k-1] + bu[k].$$

gde smo sa y_1 i y_2 označili izlaze posmatranih sistema, dok je sa u označen ulaz.

Kazemo da je vremenski diskretan sistem kauzalan ukoliko vrednosti izlaza (ciklusi odabranja), one će imati vrednosti iz tekćeg ciklusa (koje će tada biti vrednosti iz prethodnog diskretnog trenutka vremena).

Jasno je da se u prikazanom slučaju broj instrukcija i broj memorijskih loka-

cija može smanjiti ukoliko se vrednost izlaza ažurira "u mestu", odnosno ako se prikazani algoritam zameni sledećim:

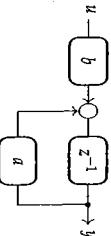
Algoritam 2: Minimalna implementacija funkcije prenosa prvog reda.

ulazni podaci: u (tekuća vrednost ulaza)

$1: y \leftarrow a * y + b * u$

$2: u \leftarrow u$

izlazni podaci: y (novosračunata vrednost izlaza)



Slika 9.1: Blok-dijagram kojim se realizuje funkcija prenosa $G(z) = \frac{b}{z-a}$.

¹ Teorijski posmatrano (pod pretpostavkom da su koeficijenti pojavljeni idatno, te da se aritmetičke operacije izvode savršeno) prenosa se može implementirati na niz različitih načina. Međutim, sve ove реализациje (ukoliko su minimalne) zahtevaju podjednak broj memorijskih lokacija, jednako redu funkcije prenosa (odnosno broju stanja odgovarajućeg matematičkog modela u prostoru stanja).¹

Vremenski diskretan sistem je nekauzalan ukoliko na njegov izlaz u tekućem vremenskom trenutku utiču budute vrednosti ulaza. Jasno je da sistemi ovog tipa nisu fizikalni ostvarivi. Primera tadi, nekauzalan sistem bio bi opisan rekurentnom relacijom

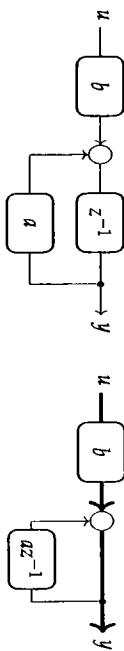
$y_3[k] = ay_3[k-1] + bu[k+1]$,

koji bi odgovarala funkcija prenosa

$G_3(z) = \frac{bz^2}{z-a}$.

kauzalne sisteme, pri čemu je samo sistem G_2 strogo kauzalan. U opštem slučaju, svaki vremenски diskretni sistem koји razmatramo u okviru ove knjige mogu se opisati funkcijama prenosa koje su racionalne po kompleksnoj promenljivoj z , dakle funkcijama prenosa koje su date u vidu kočionika dva polinoma po z . Racionalne funkcije prenosa kod kojih je polinom u brojocu većeg stepena u odnosu na polinom u imenocu opisuju nekauzalne sisteme, te nam na ovom mestu nisu od interesa.² Dakle, kauzalni sistemi opisani su isključivo funkcijama prenosa kod kojih je stepen polinoma u imenocu veći ili jednak stepenu polinoma u brojocu. Kod strogo kauzalnih sistema, štaviše, ovaj stepen mora biti strogo veći.

Razlika između strogo i slabog kauzalnih sistema lako se može uočiti na osnovu odgovarajućih blok-dijagrama, kao što je prikazano dijagramima na slici 9.2. Karakteristika strogo kauzalnih sistema jeste da ni jedan ulazni signal ne sme direktno uticati na ulaz, već isključivo indirektno, kroz jedan ili više elemenata za kašnjenje, odnosno kroz druge stroge kauzalne sisteme. Otuda čemo slabo kauzalan sistem lako prepoznati po tome što se u blok-dijagramima pojavljuju direktnе veze ulaznog i izlaznog signala. Takvaj jedna vezu je prikazana punom linijom na slici 9.2.



Slika 9.2: Dijagram sa leve strane opisuje strogo kauzalan, a dijagram sa desne strane slabo kauzalan sistem.

Važno je naglasiti da je implementacija slabog kauzalnog sistema povezana sa raznim praktičnim potreškoća. Uopšte, prilikom implementacije diskretnih algoritama za upravljanje i obradu signala uvek treba nastojati da kompletan algoritam bude strogo kauzalan. Projedine komponente algoritma mogu biti slabog kauzalnog, ali treba obratiti pažnju na to da se ni na jednom mestu ne nađe nijedna putanja kojom neki ulazni signal neposredno, bez kašnjenja, utiče na izlazni signal.

Ponovo ćemo ilustrovati ovo započevši jednostavnim primerom. Posmatrajmo ponovo diskretni sistem opisan funkcijom prenosa G_2 , kojoj odgovara diferencija jednačina

$$y_2[k] = ay_2[k - 1] + bu[k].$$

Ovu jednačinu čitamo na sledeći način: Tekuća vrednost izlaza jednaka je zbiru

Racionalne funkcije prenosa kod kojih je stepen polinoma u imeniku veći ili jednak stepenu polinoma u brojocu nazivaju se ispravnom ili ostvarivom funkcijom prenosa (engl. *proper*). Ukoliko je ovaj stepen strogo veći, onda kašnimo da je data funkcija prenosa stroga ispravna ili strogo ostvariva (engl. *strictly proper*).

²Sistemi koji su kauzalni, ali ne strogo kauzalni, nazivaćemo slabog kauzalnim.

prethodne vrednosti izlaza, pomnožene sa a , i tekuće (1) vrednosti ulaza, pomnožene sa b . Ovakva interpretacija je sustinski nemoguća. Naime, u trenutku kada nam vrednost ulaza postane raspoloživa, najbolje što možemo uraditi jeste da izvršimo proračun (koji zahteva neko, ma koliko malo, vreme), potom izvršimo proces digitalno-analogne konverzije (koji takođe zahteva neko vreme) i tek je tada izlazna vrednost dostupna okolini, odnosno drugim sistemima koji se njome koriste. Označimo li ukupno vreme procesiranja sa ξ , data rekurentna relacija preciznije se može zapisati u kontinualnom vremenskom domenu kao

$$y_2(kT + \xi) = ay_2(kT - T) + bu(kT),$$

gde je T period odabiranja. Štaviše, veoma često je u postupku realizacije nepraktično aktivirati procese digitalno-analogne konverzije neposredno nakon dobijanja vrednosti ulaza. Mnogo se češće ovi postupci aktiviraju automatski, periodično, nezavisno od korisničkog programa. U tom slučaju, nije ni moguće implementirati slabog kauzalnog sistema, s obzirom na to da vrednosti tekuci u ulazu nisu ni raspoložive u trenutku kada izdajemo tekucu vrednost upravljanja.

9.1.3 Osetljivost

Osetljivost realizacije diskretnih funkcija prenosa (algoritma uopšte) na nesavršenosti računarske aritmetike je složena tema kojom se ovde nećemo detaljno baviti. Važno je naglasiti samo da ponekad čak i veoma male, naizgled beznačajne razlike u vrednosti koeficijenata mogu rezultovati u kvalitativno različitim ponašanjima implementiranih sistema.

Tvrđajući čemo ponovo ilustrovati jednostavnim primerom funkcije prenosa $G(z) = \frac{1}{z-a}$, gde a uzima vrednost 0,999999 11.000001. Obe ove vrednosti su takođe u prostoru stana kod koga je matrica direktnog uticaja ulaza na izlaz (matrica D) jedaka nuli uvek je strogo kauzalan. Kada je ova matica različita od nule, sistem je slabog kauzalan. Kada je načro, ukoliko zaokružimo $a = 1$, sistem je grančno stabilan sa impulsnim odzivom $h[k - 1]$.

9.2 Neposredne (direktnе) implementacije

Neposrednim ili direktnim metodama implementacije funkcija prenosa smatraju se one u kojima se neposredno koriste vrednosti koeficijenata funkcije prenosa. Postoje četiri uobičajena neposredna načina realizacije diskretnih funkcija prenosa: prva i druga direktna forma, te prva i druga transponovana direktna forma.³ Pre nego što detaljnije obrazložimo način formiranja svakog od pomenutih oblika, razmotrićem bilo opštu strukturu funkcije diskretnog prenosa.

Proizvodnja diskretna funkcija prenosa sa m polova i $n > m$ nula se može prikazati u obliku

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad (9.1)$$

gde su $Y(y)$ i $U(z)$, tim redom, transformacije izlaza i ulaza sistema. Modeli ovog tipa se često, pogotovo u oblasti obrade signala, nazivaju ARMA modelima (engl. *Autoregressive Moving Average*).

Ako podelimo imenilac i brojilac funkcije prenosa sa z^n , nalazimo ekvivalentni model

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{-n+m} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}, \quad (9.2)$$

odnosno, nakon unakrsnog množenja leve i desne strane druge jednakosti, prethodnog izraza

$$\begin{aligned} Y(z)(1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}) \\ = U(z)(b_m z^{-n+m} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}). \end{aligned}$$

Pri setimo li se konačno da se z^{-1} može interpretirati kao operator kašnjenja za jedan period odabiranja, odgovarajuća diferencija jednačina glasi

$$\begin{aligned} y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_1y(k-n+1) + a_0y(k-n) \\ = b_m u(k-n+m) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n), \end{aligned}$$

gde smo indeksom k označili tekui vremenski trenutak. Prenda se opisana diferencija jednačina može neposredno implementirati, koristeći nam da napravimo implementaciju MA, a potom AR dela, da bismo konačno prikazali različite mogućnosti implementacije kompletne funkcije prenosa.

9.2.1 Neposredna implementacija MA sistema

Funkcije prenosa MA tipa (engl. *moving average*) imaju oblik

$$B(z^{-1}) = b_m z^{-n+m} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}. \quad (9.3)$$

Slika 9.3: Neposredna implementacija modela MA tipa n -og reda bez kašnjenja.

Odgovarajuća diferencija jednačina dobija se neposredno, u obliku

$$y(k) = b_m u(k-n+m) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n), \quad (9.4)$$

dok se implementacija može vršiti na osnovu blok-diagrama prikazanog na slici 9.3.

Prilikom realizacije ovakvog sistema na digitalnom računaru, kao promedljive stanja možemo birati signale na izlazu elemenata kašnjenja. Ove promenljive su na slici 9.3 obeležene sa x_1, x_2 do x_n . Sa tako izabranim promenljivama, ekvivalentni matematički model u prostoru stanja može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= u(k) \end{aligned}$$

Vidimo da se vrednost izlaza u datom trenutku računa na osnovu prethodnih vrednosti izlaza i neke spoljašnje pobudne vrednosti.

$y(k) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n + b_n u(k).$

Treba primetiti da je za realizaciju ovakvog modela potrebno utrošiti m elemenata za kašnjenje. Takođe, ukoliko nema ukupnog kašnjenja ($m = n$), trenutne vrednosti ulaznih promenljivih neposredno se preslikavaju na izlaz.

9.2.2 Neposredna implementacija AR sistema

Funkcije prenosa AR tipa (engl. *autoregressive*) imaju oblik

$$\frac{1}{A(z^{-1})} = \frac{1}{z^{-n} + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}. \quad (9.5)$$

Na sliki 9.3 je prikazan oblik n -og reda bez kašnjenjem. Ovakvi modeli su engleskom terminologijom nazivani modelima sa "pozadnjim usredjivanjem" (engl. *Moving Average*), odnosno MA modelima.

a implementacija se vrši na osnovu blok-diagrama prikazanog slikom 9.4

Algoritam 3: Algoritam implementacije diskretnе funkcije prenosa razmatrane u tekućem primeru potroči direktnе forme jedan.

ulazni podaci: u (tekutā vrednost ulaza)

- 1: $y \leftarrow -0.3 * y_1 - 0.02 * y_2 + 2 * u_1 + 0.6 * u_2$
- 2: $u_2 \leftarrow u_1$
- 3: $u_1 \leftarrow u$
- 4: $y_2 \leftarrow y_1$
- 5: $y_1 \leftarrow y$

izlazni podaci: y (novosračunata vrednost izlaza)

u_2 (vrednost koju je ulazna promenljiva imala pre dve periode odabiranja). Slijedno, vrednost izlaza u tekutem trenutku (veličinu koju u datom trenutku treba izračunati) treba zapisati u promenljivu u_1 , pri čemu se prethodno izračunate vrednosti izlaza čuvaju u promenljivama u_1 i u_2 . Inajici ovo u vidu, vidimo da se tekuta vrednost izlaza računa u prvoj liniji prikazanog koda. Sve preostale linije (linije 2 do 5) sadrže instrukcije kojima se ažuriraju prethodne vrednosti ulaza i izlaza, čime se program priprema za izvršavanje sledećeg ciklusa.

Ukoliko bismo opisano implementaciju želi da prikažemo formalizmom prostora stanja, upravo bismo prethodne dve vrednosti ulaza i izlaza morali proglašiti "promenljivama stanja".⁴ Drugim rečima, "vektor stanja" je

$$\mathbf{x}(k) = [y(k-1) \ y(k-2) \ u(k-1) \ u(k-2)]^T$$

i podleže rekurentnoj relaciji

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.02 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k). \quad (9.12)$$

S obzirom na to da je broj promenljivih stanja u ovakvoj realizaciji veći od minimalnog, kažemo da je ovakav model u prostoru stanja neminimalan ili redundantan.

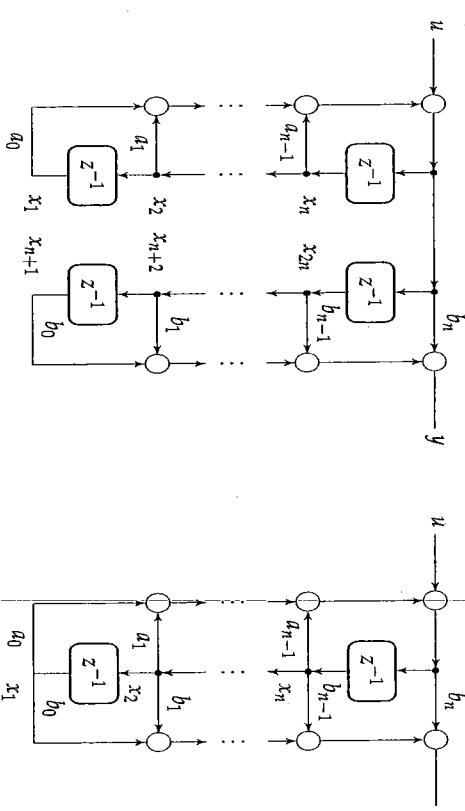
9.2.4 Realacija ARMA sistema: direktna forma dva

Takozvana Direktna forma dva dobija se ukoliko implementiramo najpre AR, pa tek potom MA, deo funkcije prenosa, kao što je prikazano dijagramom na slici 9.6 (levo). Pažljivom analizom dijagrama sa ove slike, nije teško zaključiti da su promenljive stanja x_1 i x_{n+1} , zatim x_2 i x_{n+2} , itd. uvek identične. Drugim rečima, umesto $2n$, kompletan sistem je moguće realizovati primenom samo n promenljivih stanja (odnosno elemenata za kašnjenje). Nezadno transformisani dijagram u kome su prikazani samo neophodni elementi za kašnjenje dat je na slici 9.6 (desno). Odgovarajući matematički model sa minimalnim brojem stanja je

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \dots - a_{n-1} x_n(k) + u(k)$$

$$y(k) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n.$$



⁴Ovde termin "promenljiva stanja" stavljamo pod navodnicu zato što smatramo da smanjuju samo minimalan skup promenljivih koje je potrebno pohraniti u memoriju sa ciljem realizacije neke funkcije prenosova, što orde nije slučaj. Ovaj broj promenljivih jednak je broju elemenata za kašnjenje koje figureisu u implementacionom blok-dijagramu. Kao što ćemo videti u nastavku, ova funkcija prenosa može se implementirati sa dve strukture manje ovih elemenata.

5 Ovaj oblik realizacije diskretnih funkcija prenosa poznat je pod različitim nazivima. U literaturi koja se pre svega bavi upravljanjem, data se forma obično naziva drugom ili upravljačkom kanonskom formom, a ponekad i drugom kompanjon formom.

Do razmatrane forme možemo doći i na sledeći način. Neka je proces opisan

Slika 9.6: Komparativni prikaz polaznog (levo) i redukovanih (desno) blok-dijagrama direktnih forma dva.

funkcijom diskretnog prenosa

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}. \quad (9.14)$$

Ukoliko je kašnjenje sistema (razlika broja polova i broja nula) veće od jedan, proizvođen broj vodećih koeficijenata u brojocu funkcije prenosa može biti jednak nuli. Uvedimo pomoćni signal $w(k)$ (čija je Z -transformacija $W(z)$) tako da važi

$$Y(z) = (b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0)W(z), \quad (9.15)$$

$$U(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)W(z). \quad (9.16)$$

Signale $w(k), w(k+1), \dots, w(k+n-1)$ biramo za promenljive stanja:

$$x_1(k) = w(k), x_2(k) = w(k+1), \dots, x_n(k) = w(k+n-1). \quad (9.17)$$

U kompleksnom domenu (uz pretpostavku da su svi početni uslovi jednakim nulji) imamo

$$X_1(z) = W(z), X_2(z) = zW(z), \dots, X_n(z) = z^{n-1}W(z). \quad (9.18)$$

Koristeći se relacijama (9.16), (9.15) i (9.18), nalazimo

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= X_2(z), \\ &\dots \\ zX_{n-1}(z) &= X_n(z), \\ zX_n(z) &= -a_0X_1(z) - \dots - a_{n-1}X_n(z) + U(z), \\ Y(z) &= b_0X_1(z) + \dots + b_nX_n(z). \end{aligned}$$

Vraćajući se u vremenski domen, model u prostoru stanja lako se formira

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.02 \\ -0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0.06 \ 2] x(k). \quad (9.19)$$

U literaturi se sreće i alternativni

upravljački komponon oblik modela u prostoru stanja (videti recimo [30]). Ovakav oblik je u svemu potpuno ekvivalentan obliku koji koristimo u okviru ove knjige jedino su promenjivana stanja zamene mesta: promenjiva koju mi nazivamo x_1 u takvom je obliku x_n, x_2 postaje x_{n-1} , itd. Rezultat toga je da su u matrici dinamike stanja i u matrici vrste i kolone prenesedeljene sadala je prva vrsta matrice stanja jednaka ne-gativnim koeficijentima karakterističnog polinoma, pri čemu im je redosled obrnut. Slično, obrnut je redosled elemenata u matricama ulaza i izlaza. Sustinske praktičke razlike između dve upravljačke forme ne postoje.

$$y(k) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-2} \ b_{n-1}] x(k). \quad (9.20)$$

Odmah vidimo da je dobijeni matematički model identičan modelu iskazanom jednačinama (9.13). Treba primetiti da su elementi matrice izlaza koeficijenti polinoma u brojocu funkcije prenosa. Poslednja vrsta matrice stanja jednaka je koeficijentima karakterističnog polinoma sistema (sa obrnutim znakom). Na naddiagonali matrice stanja nalaze se jedinice, dok su ostali elementi jednaki nulama. Matrica ulaza ima samo jedan nenulti element, i to poslednji, koji je jednak jedinici.

Primer 9.2. Primer realizacije funkcije prenosa drugog reda direktnom formom dva. Posmatrajmo ponovo diskretni sistem iz primera 9.1, opisan diskretnom funkcijom prenosa (9.8). Realizovaćemo ovaj sistem služeći se direktnom formom dva.

S obzirom na to da je posmatrani sistem drugog reda, neophodne su nam dve promenljive stanja: x_1 i x_2 . Odgovarajući matematički model u prostoru stanja dat je sledećim formulama

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & -0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0.06 \ 2] x(k).$$

9.2.5 Transponovane neposredne implementacije

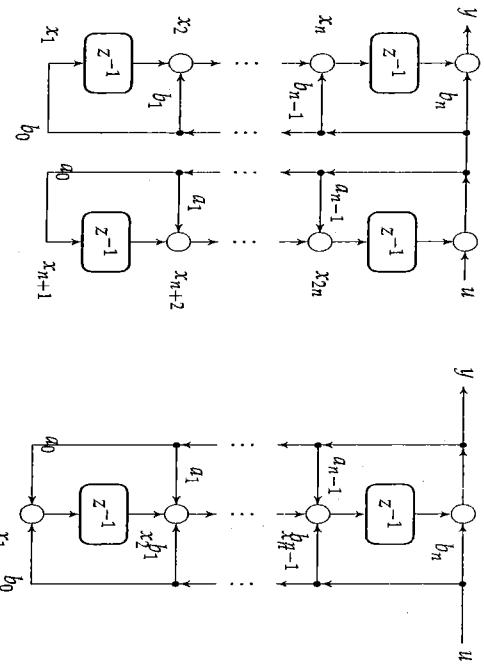
Alternativni oblici realizacije diskretnih funkcija prenosa se mogu dobiti postupkom transponovanja odgovarajućih blok-dijagrama.⁶ Transpozicijom direktne forme jedan i direktnе forme dva dobijaju se tzv. transponovana direktna forma jedan i transponovana direktna forma dva, tim redom. Implementaciju blok dijagrami ovih formi prikazani su na slici 9.7.

Transponovana direktna forma dva u literaturi se često naziva i prvom kanonskom, estimatorskom kanonskom, a ponekad i prvom komponon formom. Polazeći od funkcije diskretnog prenosa, do ove forme može se doći i na sledeći način: neka je data funkcija diskretnog prenosa

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}. \quad (9.21)$$

Pri formiranju estimatorske komponon forme, neophodno je unakrsno izmno-

⁶Transpozicija dijagrama je postupak pri kome se smjer svake usmerene veze obrće, čvorovi postaju satnici, žarići postaju čvorovi, izlazi postaju ulazi, a ulazi izlazi. Pod prepoznavanju da polazni blok dijagram opisuje sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom, ekvivalentna funkcija prenosa ostaje identična nakon transpozicije.



Slika 9-7: Implementacioni blok-diagrami transponovane direktnе forme jedan (лево) i transponovane direktnе forme dva (десно).

Izlaz sistema jedнак је последњој променљивој stanji jednu periodu odabiranja, tada se jednačine stanja mogu zapisati u obliku

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -a_0 x_n(k) + b_0 u(k), \\ x_2(k+1) &= -a_1 x_n(k) + b_1 u(k) + x_1(k), \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= -a_{n-1} x_n(k) + b_{n-1} u(k) + x_{n-1}(k), \end{aligned}$$

a jednačina izlaza kao

$$y(k) = u(k).$$

Ukoliko tako dobijeni model u prostoru stanja zapišemo u matritnom obliku, vidimo da se koeficijenti funkcije prenosa čitaju direktno iz koeficijenata parametarskih matrica. Konkretnije, poslednja kolona matrice stanja (matrice A) jednaka je koeficijentima imenica funkcije prenosa (sa obrnutim znakom). Osim toga, elementi preve poddiagonale jednaki su jedinicama, dok su svi ostali elementi jednaki nuli. Elementi matrice ulaza (matrice B) jednaki su koeficijentima brojčaca funkcije prenosa. Poslednji element matrice izlaza (matrice C) jednak je jedinici, dok su svi ostali elementi jednaki nuli.

$$Y(z) = z^{-1} \underbrace{\left(-a_{n-1} Y(z) + b_{n-1} U(z) + z^{-1} \underbrace{\left(\dots + z^{-1} (b_1 z + b_0) \right)}_{X_1(z)} \right)}_{X_{n-1}(z)},$$

gdje je način izbora promenljivih stanja (odnosno njihovih kompleksnih likova) jasno naznačen. Drugačije zapisno, vidimo da važe sledeće veze između kompleksnih likova promenljivih stanja i koeficijenata funkcije prenosa

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k). \quad (9-23)$$

9.3 Redna i paralelna realizacija

Osnovni problem prilikom realizacije funkcija diskretnog prenosa je u tome što se njihovi koeficijenti čuvaju u memorijskim lokacijama konacne širine, te samim tim odstupaju od svojih idealnih vrednosti. Takođe, računske operacije

se na računaru vrše neprecizno, te su i rezultati pojedinih sabiranja i množenja samo približno tačni. Kao rezultat akumulacije ovih gresaka, različite forme implementacije digitalnih funkcija prenosa ponašaju se na različit način, iako se mogu dobiti jedna od druge ekvivalentne transformacijama blok-dijagrama.

Sa druge strane, položaj nula polinoma je veoma osetljiv na promene vrednosti koeficijenata. Drugim rečima, male promene u vrednostima koeficijenata realizacije, kao i male nepreciznosti u vršenju operacija sabiranja i množenja, mogu učiniti da se strarno ponašanje implementiranog digitalnog sistema u mnogome razlikuje od željenog.

Poštedično, sa stanovišta problema realizacije diskretnih funkcija prenosa, važno je izbegavati neposredne realizacije funkcija prenosa visokog reda. Postoji dva očigledna načina na koji se funkcije prenosa visokog reda mogu sveštiti na kombinacije "manjih" funkcija prenosa: kaskadno (redno) i paralelno. Kasadne realizacije formiraju se tako što se celokupna funkcija prenosa podeli na faktore prvog ili drugog reda, a potom se kompletan diskretni sistem realizuje kao redna (serijska) veza, odnosno kaskada ovakvih jednostavnih filtera. Paralelna realizacija je slična, s tim što se polazna funkcija prenosa razlaže na zbir umesto na proizvod elementarnih filtera.

9.3.1 Redna (kaskadna) realizacija

Prilikom kaskadne realizacije funkcija diskretnog prenosa neophodno je odgovoriti na dva pitanja: kako formirati projedinačne bikvadratne članove (kako upariti polove i nule), te kako poredati tako formirane bikrade. Kada odgovaramo na ova pitanja treba imati na umu da se numeričke greske ponašaju tako što deluju u onoj tački blok-dijagrama u kojoj se odgovaraajuća neprecizna operacija vrši, odnosno u kojoj se neprecizni koeficijent koristi. Taj šum se dalje filtrira kroz ostatak implementacije, te tako filtriran utiče na krajnji rezultat. Otuda, glavni cilj je smanjiti pojačanja rezonantnih vrhova pojedinih bikvadratnih elemenata. Uopšte, visina rezonantnog vrha može se smatrati dobrom merom intenziteta šuma koji bikrad generiše, pa bikrade sa izrazitim rezonantnim vrhovima treba postavljati kao poslednje u lancu. Može se pokazati da će veći rezonantni vrh imati bikvradi sa polovicima koji su blizi granici stabilnosti (odnosno sa modulom blžim jedinici), a da će se vrednost rezonantnog vrha smanjiti uparivanjem bliskih polova i nula. Postupak ćemo ilustrovati primerom.

Čuveni primer osetljivosti polinoma od vrednosti njegovih koeficijenata je tzv. Vilkinsonov polinom (engl. Wilkinson's polynomial)

$$f(x) = \prod_{n=1}^{20} (x - n).$$

Kada se faktori razmnože, koeficijenti ovog polinoma su (počev od najstarijeg): 1, -210, 20615, ... Dojavljeno je prominenti vrednost drugog koeficijenta i za delić jednog procenta, pa da se polozaj polova dramatično promeni. Komentarišući ovaj primer, sam Wilkinson je 1983 izjavio: "Speaking for myself I regard it as the most traumatic experience in my career as a numerical analyst."

Primer 9.3. Primer kaskadne realizacije funkcije prenosa visokog reda.
Postomatrajmo funkciju prenosa diskretnog Buttervortovog filtra 6. reda sa prelomnom učestanostu od 10 Hz i učestanostu odabiranja od 100 Hz

$$G(s) = \frac{z^6 + 6z^5 + 15z^4 + 20z^3 + 15z^2 + 6z + 1}{z^6 + a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}$$

Koeficijenti filtra su pobrojani u tabeli koja sledi.

K	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
3.410 ⁻⁴	-3.5794	5.65887	-4.9055	2.5295	-0.7053	0.0838

Imajući u vidu da je brojilac funkcije prenosa zapravo $(z + 1)^6$, očigledan način da se izvrši diskretizacija jeste sledeći način (filter ima 3 para konjugovano-kompleksnih polova, svaki par iskorišten je za formiranje jednog bikrada)

$$G(z) = K \times \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + a_{21}z + a_{20}} \times \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + a_{11}z + a_{10}} \times \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + a_{01}z + a_{00}},$$

pri čemu su vrednosti koeficijenata prikazane u tabeli koja sledi

$a_{21} = -1.0321$	$a_{11} = -1.1430$	$a_{01} = -1.4044$
$a_{20} = 0.2575$	$a_{10} = 0.4128$	$a_{00} = 0.7359$

U prikazanom primjeru bikvadi su poređani tako da se konjugovani-kompleksni parovi sa najmanjim modulom (jednakim 0,5251) nađu prvi, dok se konjugovano-kompleksni par najbliži jediničnom krugu (sa modulom 0,8578) nalazi poslednji.

9.3.2 Paralelna realizacija

Kao i u slučaju redne realizacije, paralelna realizacija može se izvršiti na veliki broj načina. U slučaju Paralelne realizacije, elementarne funkcije prenosa naijavaju se odsečima ili sekocijama. U suštini, sam postupak razdvajanja funkcije prenosa na odsečke sličan je razlaganju na partične razlonike.

Ukoliko se odlučimo da razlaganje vršimo tako da se dobiju elementarne funkcije prenosa (sabirec, sekocije) drugog reda, onda u slučaju funkcije prenosa

$$G(z) = \sum_{k=1}^m \frac{b_{k1}z + b_{k0}}{z^2 + a_{k1}z + a_{k0}},$$

Števen Batterott (engl. Steven Batterott, 1885–1958) bio je britanski inženjer fizičar. Tokom 1930. godine objavio je rad kojim predlaže analogni filter koji danas nosi njegovo ime.

Tabela 9.2: Koeficijenti bikvadratnih faktora dobijenih faktorizacijom posmatrane funkcije prenosa.

gde su $a_{k,i}$ i $b_{k,i}$ ($k \in 1, 2, \dots, m$, $i \in 1, 2$) realni koeficijenit. U slučaju funkcija prenosa neparnog reda, imamo jedan dodatni faktor novog stanena

卷之三

Primer 94. Pomećna realizacija Bačevovog filtra razmatranog u prethodnom primjeru

merit

Funkcija prenosa Battertvortovog filtra razmatranog u prethodnom primeru ima tri para konjugovano-kompleksnih polova, te se njenim formalnim razlaganjem na parcijalne razlike dobija ekspanzija sa konjugovano-kompleksnim koeficijentima⁷

$$G(z) = \frac{-24.52 + 611j}{z - (0.7 + 0.49j)} + \frac{-24.52 - 611j}{z - (0.7 - 0.49j)}$$

$$= \frac{-1731 - 670j}{z - (0.57 + 0.29j)} + \frac{-1731 + 670j}{z - (0.57 - 0.29j)}$$

$$= \frac{1761 - 2313j}{z - (0.52 + 0.1j)} + \frac{1761 + 2313j}{z - (0.52 - 0.1j)}.$$

U cilju dobijanja realizacije u kojoj slijedi isključivo realni koeficijenti, sa-

$$G(z) = \frac{49z + 636}{z^2 - 1.4z + 0.86} + \frac{-3463z + 1585}{z^2 - 1.14z + 0.64} + \frac{3521z - 2265}{z^2 - 1.03z + 0.53}$$

Konačno, kompletan filter realizujemo tako što implementiramo svaki od dobitnih sabiraka drugog reda nekom od prethodno razmatranih direktnih formuša. Što čitaocu ostavljamo kao zadatak za vežbu.

Rosebno interesantna vrsta paralelne realizacije dobija se ukoliko se polazila na funkciju prenosa razloži na sabirke prvog stepena. Tako realizacija naziva se Žordanov ili trećom kanonskom formom. Velika prednost ovakvog pristupa realizaciji funkcija prenosa leži u tome što se polovi sistema neposredno javljaju kao konfijanti realizatori. Međutim, u tom slučaju željeno je da se

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{z - p_k}.$$

9.3.3 Źordanowa kanonska forma

Kao konačnjem rezultatu, matrica \mathbf{W}_0 je u tomu što su koeficijenti Zoroanove forme realni samo u slučaju da su svi polovi sistema realni. Ukoliko su polovi funkcije prenosa p_1 do p_n , a koeficijent Hevisajdovog razvoja K_j do K_n , tada se ova forma može formirati u obliku

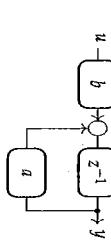
12 petadagskini razloga u način izlaganja koristimo veoma malo broj značajnih cifara. Na taj način su formule preglednije, a samo izlaganje postaje jasnije. U realnosti uvek treba koristiti veći broj značajnih cifara, jer se u

Data funkcija prenosa ima tri pola, locirana u tačkama razlaganja na parcijalne razlomke, nalazimo da je

$$G(z) = \frac{9z^2 - 11.05z + 3.3}{z^3 - 1.85z^2 + 1.125z - 0.225}$$

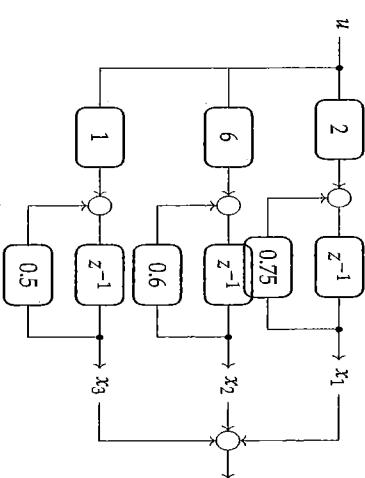
$$G(z) = \frac{z}{z-0.75} + \frac{v}{z-0.6} + \frac{1}{z-0.5},$$

ustrojava kompleksna promenljiva može interpretirati kao operatator jediničnog predstavljanja u vremenu), dobijamo



Slika 9.8: Blok-dijagram kojim se realizuje $\frac{b}{z-a}$.

Slika 9.9: Primer paralelne realizacije sistema trećeg reda sa prostim, realnim polovima.



gde smo, sasvim protivnjivo, promenjuje stanja numerisani tako da prva promenjiva stanja odgovara sabirku sa polom maksimalnog modula. Na osnovu prikazanoz dijagrama, očigledno je da se paralelnom realizacijom sistem dekomponuje na nezavisne podsisteme prvog reda. Svaki od takvih sistema deli isti ulaz, a izlazi im se sabiraju, tako da je ukupni izlaz jednak zbiru izlaza pojedinačnih podsistema. Ilustracija je prikazana dijogramom na slici 9-9.

ustrojava kompleksna promenljiva može interpretirati kao operatot jediničnog predstavljanja u vremenu), dobijamo

Primer 95. Primer paralele realizacije sistema sa prostim, realnim polovomama

$$\frac{z}{q} = \frac{(z)H}{(z)X} = (z)H$$

Prilikom formiranja Zordanove kanonske forme, osnovni element je funkcija prenosa prvog reda opšteg oblika

Diskretizacija kontinualnih linearnih regulatora i kontinualnih linearnih filtera

1.0.1 Principi diskretizacije

Započimo ovo poglavlje primerom. Od ranije su nam poznate diferencijalna jednačina i/ili funkcija prenosa, koji opisuju osnovni oblik PID regulatora

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

odnosno funkcija prenosa PID regulatora

$$PID(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (1.0.1)$$

Pitanje, koje se postavlja, je kako se sistem opisan izrazom (1.0.1) konverte u formu pogodnu za implementaciju na digitalnom upravljačkom uređaju, odnosno računaru? Odgovor na ovo pitanje nije jednoznačan i zavisi od onoga što želimo da postignemo. Tako npr. možemo da očuvamo karakteristike regulatora u vremenskom domenu ili možda u frekventnom domenu, što će se pokazati da po pravilu nije isto. Nije nemoguće, da apsolutno stabilan regulator¹ posle diskretizacija postane nestabilan. Postupak pronađenja digitalnog ekvivalenta² kontinualnog sistema, raziva se emulacija i podsećamo ruje jednoznačan postupak. Rezultat emulacije su diferencne jednačine ili funkcija diskretnog prenosa, dok je softverska implementacija posebna oblast tehnike i načelo nije tema ovog kursa. Radi potpunosti teksta, navodimo po jedno moguće rešenje diskretizacije jednačina (??),

¹Pod pojmom „apsolutno stabilan regulator”, podrazumevamo regulator, koji za proizvoljno pojačanje $K > 0$ ima sve polove u levoj poljarnosti.

²Termen „digitalni ekvivalent“ na ovom meseću uvodimo logički, a u poglavljima koja slede ovaj pojam temo jednoznačno definisati i objasniti.

odnosno jedan mogući izgled funkcije diskretnog prenosa (funkcije prenosa u z domenu)

$$u(k) = K \left(e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right),$$

gde su

$$\begin{aligned} PID(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}, \\ q_0 &= K(1 + \frac{T_d}{T}), \\ q_1 &= -K(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i}), \\ q_2 &= K\frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Rezimirajući ovaj primer, možemo reći da nam je cilj da u okviru ovog poglavlja uvedemo metode i postupke za prevođenje kontinualnih regulatora³ u njihove digitalne ekvivalente. Regulatori, filtri ili kompenzatori koje želimo da diskretnujemo imaju dve markantne osobine: prva, spadaju u kategoriju linijskih vremenskih nepromjenjivih sistema (LTI)⁴ i druga, dobro su projektovani tehnička karakteristična za kontinualne sisteme i baš te „dobro projektovane“ osobine želimo da očuvamo u diskretnoj izvedbi. Konačno, prevođenje iz kontinualnog u diskretni oblik nije jednoznačno, već zavisi od osobina koje želimo da očuvamo, pogresan izbor metoda, može da dovede do nepremostivih problema u eksploataciji digitalnih upravljačkih sistema.

³Zbog prethodnog primera pojam regulator je sinonima za sistem, koji je razmatrano.

⁴Kao što je poznato LTI sistem se opisuje običnim diferencijalnim jednačinama sa koncentrisanim parametrima u vremenskom domenu, odnosno funkcijom prenosa u kompleksnom domenu.

pobudi u vremenski kontinualan proces daže odziv u tada će njegov digitalni ekvivalent pobuditi odgovarajućim signalom u dnu na svom izlazu odnike signala y . U zavisnosti od tipa pobude u , razlikujemo: *impuls invariantnu i step invariantnu diskretizaciju*.

10.2.1 Impuls invariantna diskretizacija

Kao što samo ime kaže, impuls invariantna diskretizacija (engl. *Impulse Invariant*) čuva karakteristike vremenskog odziva, ako je pobuda Dirakov impuls.

U matematičkoj formulaciji, pod timo od pretpostavke da smo sa $G(s)$ obeležili funkciju prenosa, koju želimo da diskretnujemo, a sa $G(z)$ odgovarajuću diskretnu funkciju prenosa. Znajući da su Laplasova i \mathcal{Z} -transformacija Dirakove pobude $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, $\mathcal{Z}\{\delta(t)\} = 1$ respektivno, odgovarajući odzivi kontinualnog i diskretnog sistema se lako izračunavaju $Y_c(s) = G(s)1$, $Y_d(z) = G(z)1$, gde je očigledno da indeksi c i d označavaju odziv kontinualnog i diskretnog sistema. Konačno, odgovarajućim inverznum transformacijama dobijamo željene odzive, koji moraju da se poklapaju u trenucima odabirana, odnosno

$$\mathcal{Z}^{-1}\{G(z)1\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)1\} \quad \text{za } t = KT. \quad (10.3)$$

Dalje, primenom \mathcal{Z} -transformacije na levu i desnu stranu izraza dobijamo, kojačan način izračunavanja $G(z)$, koji garantuje isto ponašanje na impulsni odziv u trenucima odabiranja

$$G(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)1\}\}. \quad (10.4)$$

Iraz (10.4) se česte zapisuje u kompaktnoj formi

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}, \quad (10.5)$$

vremenske karakteristike sistema, zatim frekventne (ili frekvenčiske) karakteristike i konačno uvešćeno metode numeričke integracije u svom osnovnom obliku. Preslikavanje nula i polova sistema, je inherentno sadžano u prethodnim poglavljima i nećemo ih posebno razmatrati.

10.2 Vremenski invariantna diskretizacija

U okviru ovog poglavlja razmatraćemo postupke diskretizacije, kod kojih se čuvaju karakteristike odziva u vremenskom domenu. Drugim rečima, ukoliko na

³Impulsno invariantna transformacija se obično sprovodi, tako što se kontinualna funkcija prenosa $G(s)$ razstavi na parcijalne razlomke, odnosno u formu

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (10.6)$$

uz pretpostavku da polovi nisu višetsruki i da je red sistema n . Impulsni odziv ovog sistema (10.6) je onda

$$y_c(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} h(t), \quad (10.7)$$

gde je $h(t)$ Heavisaidova funkcija, a indeks c označava da se radi o kontinualnom odzivu. Odgovarajući invariantni impulsni odziv bi onda bio

$$y(kT) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k T} h(kT). \quad (10.8)$$

Tako da je željena funkcija diskretnog prenosa, koja daje nepromjenjen impulsni odziv u stvari

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}. \quad (10.9)$$

Ovaj diskretizacijski postupak je jednostavan za implementaciju, ali treba napomenuti da dobijeni digitalni ekvivalent, nemaju neku posebnu upotrebnu vrednost, kada nam je cilj očuvanje frekventnih karakteristika.

Jako je važno podsetiti da proces odabiranja kontinualnog impulsnog odziva (10.7), rezultuje frekvenčijskim odzivom ekvivalentnog diskretnog signala koji se skalira faktorom $1/T$. Odnosno, ako je $T < < 1$ pojačanje na niskim učestanostima može biti značajno. Mnogi projektanti smatraju da je uputno kompenzovati ovaj efekat i time izbegti, pre svega, promene pojačanja na niskim učestanostima. Matematički to praktično znači da $G(z)$ sada postaje

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k T}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, \quad (10.10)$$

što znači da jednačenje kontinualnog (10.7) i odgovarajućeg diskretnog odziva (10.8) sadrži izgleda

$$y(kT) = T y(t)|_{t=kT}. \quad (10.11)$$

U našem daljem radu, po pravilu čemo koristiti izraz (10.10), mada u većim broju slučajeva bez gubitka na opštosti možemo koristiti i emulacionu formulu datu izrazom (10.5).

Primer 10.1 (Impuls invariantni odziv). Primeri koji slede, služe da ilustriju postupke diskretizacije i nisu sami po sebi složeni, već reprezentativni. Neke od primera prati odgovarajući MATLAB⁷ kod, uopštenje ovih simulacionih rešenja je trivijalno.

Za kontinualne sisteme, nači odgovarajuće funkcije diskretnog prenosa, koje obezbeđuju *impuls invariantni odziv*.

(a) Kontinualni sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Direktno primenom (10.10) lako dobijamo sledeći tabični izraz za integrator

$$G(z) = T \frac{z}{z - 1}.$$

(b) Kontinualni sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Isto kao i u prethodnom primeru, radi se o tabičnom izrazu, pa primenom (10.5) izračunavamo

$$G(z) = T \frac{z}{z - e^{-T}}.$$

Diskretizaciju funkcije prenosa pod B) ilustrovali smo i u MATLAB okruženju, za vreme odabranja $T = 0.15$

⁷ U novijim verzijama MATLAB koristi transformacionu formulu (10.10), koja uključuje sklanjanje amplitude vremenom odabiranjem T . Još je važno reći i da je iz istih razloga vrednost Dirakovog delata impulsa, pri simulacijama diskretnih sistema sklara na faktor $1/T$.

brojilac=[1];

imenilac=[1,1];

Ge=tff(brojilac, imenilac);

T=0.1;

Ga=c2d(Ge, T, 'impulse')

% metoda diskretizacije 'impulse'

Čitatocu ostavljamo za vežbu, da uz različita vremena odabiranja, simulira impulsne odzive kontinualnog i diskretnog sistema, opisanih funkcijama prenosa iz ovog primera.

10.2.2 Step invarijantna diskretizacija

Ovo poglavlje je sa jedne strane pridonastavak prethodnog, a sa druge strane daje suštinsku vezu između funkcija prenosa u kontinualnom i diskretnom domenu, koju ćemo eksplorovati do kraja ovog kursa. U izvođenju step invarijantnog ekvivalenta, pratimo formalizam iz prethodnog paragrafa, odnosno jednačino odzive, u trenucima odabiranja, ako je pobuda Heavisajdov step ulaz. Odnosno, izraz (10.3) uz modifikaciju pobude postaje

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{G(z)\frac{z}{z-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\} \quad \text{za } t = KT, \quad (10.12)$$

dakle, primenom \mathcal{Z} -transformacije na levu i desnu stranu izraza, lako dobijamo

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \quad (10.13)$$

Izraz (10.13) se koristi za izračunavanje step invarijantnog diskretnog ekvivalenta funkcije prenosa. Odnosno, dobijamo funkciju diskretnog prenosa, koja u trenucima odabiranja ima isti odziv na Heavisajdovu step funkciju, kao i kontinualni original. Važno je reći, da je ovo jednovremeno i *diskretni ekvivalent* kontinualnog procesa, u kolu sa idealnim odabiracem i kolom zadnje nultog reda. Odnosno, to je način kako digitalni upravljački uređaji u trenucima odabiranja „vidi“ proces, uz idealni odabirac i kolo zadnje nultog reda. Ovu činjenicu, ove prvi put napominjemo, detaljno ćemo je razmatrati u poglavljima, koja slede.

Primer 10.2 (Step invarijantni odziv). Primeri koji slede, služe da ilustriju postupke diskretizacije i nisu sami po sebi složeni, već reprezentativni. Neke od primera prati odgovarajući MATLAB kod, uopštenje ovih simulacionih rešenja je trivijalno.

Za sledeće kontinualne sisteme, naći odgovarajuće funkcije diskretnog prenosa, koje obezbeđuju step invarijanti odziv:

(a)

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

gde direktnom primenom (10.13) dobijamo sledeći izraz

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \frac{T}{z-1}. \end{aligned}$$

(b)

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

gde slično kao i u prethodnom primeru, primenom (10.5) izračunavamo

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right) \\ &= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \end{aligned}$$

Poređenjem rešenja iz primera 10.1 i ovog primera, lako uočavamo nekoliko očiglednih činjenica. Prvo, postupak diskretizacije nije jednoznačan, već zavisi od izabrano metoda. Ako pažljivo pogledamo dobijene rezultate, uočimo da transformacije zadizavaju polove sistema⁸, odnosno polovi sistema u oba primera su isti, a ono što se razlikuje su nule i pojačanje funkcije prenosa. Konatno, u ovom primeru se još lakše vidi da funkcija diskretnog prenosa eksplicitno zavisi od vremena odabiranja T , što dodatno uvodi višeznačiošu u ove postupke diskretizacije.

Diskretizaciju funkcije prenosa pod b) ilustrovali smo i u MATLAB okruženju, za vreme odabiranja $T = 0.15$

```
brojilac=[1];
imenilac=[1];
Gc=tf(brojilac, imenilac);
T=0.1;
Gd=zdf(Gc, T, 'zoh') %metod diskretizacije 'zoh' ili step invarijantna
```

⁸Ovo praktično znači da funkcija diskretnog prenosa, koja ima pol $u Z = 1$ predstavlja integrator u diskretnom obliku.

Kao i u prethodnom primjeru čitacu ostavljamo za vežbu, da uz različita vremena odabiranja, simulira step odzive kontinualnog i diskretnog sistema, opisanih funkcijama prenosa iz ovog primera.

10.3 Diskretizacija po principima numeričke integracije

Pretpostavljamo da je čitac upoznat sa metodama numeričke integracije, koje se koriste za iznalaženje rešenja diferencijalnih jednačina⁹. Slijan pristup,ako ne i isti imamo prilikom diskretizacije kontinualnih funkcija prenosa, odnosno diferencijalnih jednačina, koje funkcije prenosa predstavljaju. Međutim, u digitalnim upravljačkim sistemima nameće se jedan važan kriterijum, koji smo inherentno ustvojili i ranije, a to je da se sve transformacije, algoritmi i svi ostali matematički formalizmu moraju „brzo“ izvršavati, pa čak i na račun tačnosti same aproksimacije. Odnosno, izvršavanje diferencijalnih jednačina, koje su krajnji rezultat diskretizacije, ne bi smelo da uvodi dodatno kašnjenje, tačnije u realnom slučaju mora da uvede minimalno dodatno kašnjenje u sistemima autonomskog upravljanja.

Postupak diskretizacije po principima numeričke integracije odvija se po pravilu na sledeći način: *Kontinualnu funkciju prenosa zapisujemo u formi diferencijske jednačine, zatim sledi krajnji korak numeričke integracije, a to je prenodenje diferencijalne jednačine u kontinualnu diferenciju jednačinu zapisujemo u formu pogodnu za dalju analizu, odnosno kao funkciju diskretnog prenosa.*

Počemo našu studiju od primera, mišljena smo da je ovaj pristup, od partikularnog, kao opštem, uputan u ovom slučaju i da olakšava prćenje i razumevanja teksta.

Počećemo našu studiju s sistemom, koji se uspešno opisuje funkcijom prenosa prvog reda

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}, \quad (10.14)$$

gde su $U(s)$ i $E(s)$ izlaz i ulaz funkcije prenosa respektivno, parametar a je nenegativan realan broj. Dalje tako sledi

$$sU(s) + aU(s) = aE(s) \text{ odnosno } u(t) + au(t) = ae(t), \quad (10.15)$$

ili

$$\dot{u}(t) = -au(t) + ae(t).$$

⁹Tako npr. metode numeričke integracije po metodologiji Runge-Kutta, poznate su okviru programskog paketa MATLAB, kao odes3 i odes5

$$\begin{aligned} u(kT) &= \int_0^{kT} (-au(\tau) + ae(\tau)) d\tau + \int_{kT-T}^{kT} (-au(\tau) + ae(\tau)) d\tau \\ &= u(kT-T) + [\text{površina} - au(\tau) + ae(\tau)] \text{ u intervalu } kT-T \leq \tau \leq T]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Metode numeričke integracije, koje ćemo uvesti, razlikuju se u izračunavanju površine¹⁰ između trenutaka odabiranja $kT-T$ i kT . Različiti postupci izračunavanja ove površine su predmet poglavljaja koja slede. Videćemo da je studija diskretnih sistema, jako ostvara na izbor postupka numeričke integracije i da čak logički veoma slična rešenja, mogu dati susutinski različite rezultate.

10.3.1 Numerička integracija levim pravougaonim - Ojerovo, diferencirajući unapred

Numerička integracija metodom levih pravougaonika se odvija u skladu sa postupkom predstavljenim na slici 10.1 gde se površina ispod krive aproksimira pravougaonikom, čija je površina proizvod $f(kT-T)$ i dužine intervala T . Odnosno, kvara vrednost $f(kT-T)$ se produžava unapred, odatle i naziv postupka. Pod pretpostavkom da je $f(t)$ sa slike 10.1 u stvari podintegralna funkcija izraza (10.18) dobijamo

$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT-T) + [-au(kT-T) + ae(kT-T)]T \\ &= (1-a)u(kT-T) + aTe(kT-T). \end{aligned} \quad (10.19)$$

Prevođenjem izraza (10.19) u kompleksni z domen dobijamo

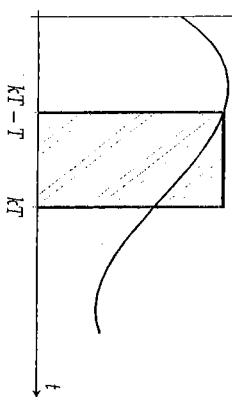
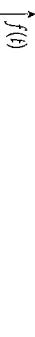
$$u(t) = \int_0^t (-au(\tau) + ae(\tau)) d\tau, \quad (10.17)$$

gde je τ pomocna promenljiva, koju uvodimo da bismo izbegli zabunu sa vremenom t , koja je u postupku integracije gornja granica integrala.

U diskretnom slučaju, koji je od našeg interesa, integral iz izraza (10.17) možemo podeliti u dva intervala: prvi od $t=0$ do $t=T$ prethodnog trenutka $t=kT-T$ i drugi od $t=kT-T$ do sadašnjeg trenutka $t=kT$, odnosno

¹⁰Podsećamo na dobro poznatu činjenicu, da je geometrijska interpretacija određenog integrala, površina ispod funkcije pod znakom integrala

Leonhard Euler, 1707 – 1783, Švajcarski univerzitetski, između ostalog poznat po rečenici: "Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum.", što opisuje sadržaj jednog drugog kursa



$$U(z) = (1 - aT)z^{-1}U(z) + aTz^{-1}E(z),$$

gde su očigledno $U(z)$ i $E(z)$ kompleksni likovi signala $u(kT)$ i $e(kT)$, a u skladu sa teoremom o vremenskom pomeranju z^{-1} predstavlja čisto vremensko kašjenje. Ovaj izraz se lako dalje transformiše u

$$zU(z) = (1 - aT)U(z) + aTE(z),$$

odnosno, u funkciju diskretnog prenosa

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{aT}{z - 1 + aT} = \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a}. \quad (10.20)$$

Važno je primetiti, da ako uporedimo ogovaraajuću polaznu kontinualnu funkciju prenosa (10.14), sa novodobijenom funkcijom diskretnog prenosa (10.20), postupak diskretizacije numeričkom integracijom unapred praktično se svodi na smenu kompleksne promenjive s izrazom $(z - 1)/T$. Konkretno, ako sprovedemo ovu smenu, funkcija diskretnog prenosa će biti u formi, koja odgovara postupku diskretizacije numeričkom integracijom unapred.

U naslovu ovog poglavlja stoji i *Ojlerovo diferenciranje unapred*, namera nam je da u nastavku teksta objasnimo i taj pristup, koji će se u nekim primenama učiniti i logički ispravnijim, npr. kada moramo da direktno diskretizujemo diferencijalni član PID regulatora iz vremenskog domena. Ne treba napomenuti, da će se dobiti potpuno ista smena za promenjivu s , ali kao što smo rekli, ovaj pristup direktnе diskretizacije diferencijalnih operatora, ima svoju punu svrishodnost.

Ojlerovo diferenciranje unapred

Osnovna zamisao je da se diferencijal zameni konačnom razlikom unapred, odnosno:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}.$$

Slika 10.1: Numerička integracija levim pravougaonima

Ako sada primenimo Laplasovu transformaciju, uz pretpostavku o nultim početnim uslovima i primenjujući teoremu o vremenskom pomeranju dobijamo

$$sY(s) \approx \frac{1}{T}(e^{sT} - 1)Y(s).$$

Odnosno, ako je vremensko pomeranje $z = e^{sT}$, iz prethodnog izraza lako se dobija

$$s \approx \frac{1}{T}(z - 1),$$

što je potpuno identično kao transformacija u izrazu (10.20). Rezimujajući ovaj postupak, možemo reći, da postupak numeričkog diferenciranja u skladu sa Ojlerovim diferenciranjem unapred, u kompleksnom domenu znači smenu kompleksnih promenjivih po formuli $s = (z - 1)/T$

U poglavljiju, koje je obrađivalo preslikavanje iz s u z -ravan, ustanovali smo konturu stabilnosti i objasnili uticaj položaja polova na ponašanje sistema. Numeričkom integracijom, mi smo takođe uveli kompleksno preslikavanje iz s u z -ravan i neophodno je analizirati uticaj ove transformacije na ponašanje sistema posle diskretizacije. Prvi korak bio bi naći inverznu transformaciju smene uvedene izrazom (10.20), odnosno

$$z = 1 + sT. \quad (10.21)$$

¹¹ U pravu se očigledno preslikava segment $s = jw$

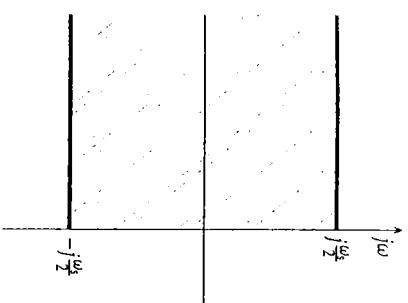
Prateći formalizme iz poglavlja o preslikavanju iz s u z -ravan, lako ustanovaljavamo da se primarna ili Nikvistova oblast preslikava u poluravan, levo od prave $\text{Re}\{z\} = 1^{11}$, kao i što je prikazano na slici 10.2.

Ovakvo preslikavanje van jediničnog kruga, očigledno može da dovede do nanušavanja stabilnosti i harmonijskog odziva, pa se ova transformacija u inženjerskoj praksi ne preporučuje.

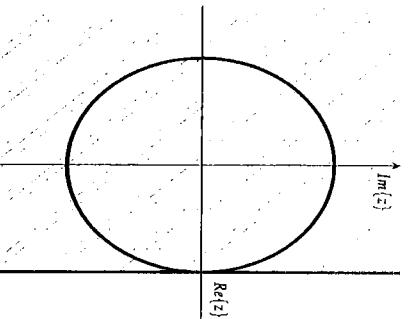
Čitaocu ostavljamo za vežbu da na primere iz prethodnih poglavlja primeni

11 U pravu se očigledno preslikava segment $s = jw$

Ovo praktično znači da kontinualni regulator, koji ima sve polove u levoj poluravni u diskretnoj izvedbi, može da ima polove van jediničnog kruga. Odmotno, da ako unesemo diferencijalni sistem u izvedbi uvedemo konačno diferenciranje unapred, ovako diskretizovan regulator može da uvede ceo sistem u nestabilnost.



(a) Primarni pojas s-ravni.



(b) Kontura primarnog pojsa preslikana u z-ravan.

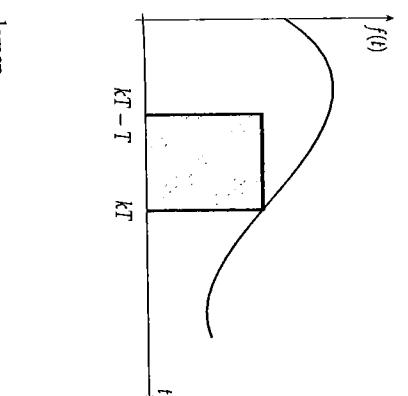
Ovaj način diskretizacije.

10.3.2 Numeričke integracije desnim pravougaonimima - Ojlerovo diferenciranje unazad

Ovaj postupak numeričke integracije je veoma sličan prethodnom, može se pomisliti i da nema značajnih razlika, međutim kao što će se videti, njihova upotreba vrednost je suštinski različita. Numerička integracija metodom desnih pravougaonika se odvija u skladu sa postupkom predstavljenim na slici 10.3, gde se površina ispod krive aproksimira pravougonikom, čije je površina proizvod $f(kT)$ i dužine intervala T . Odnosno, desna vrednost $f(kT)$ se prostire unazad, odatle i naziv postupka. Pod pretpostavkom da je $f(t)$ sa slike 10.3 u stvari podintegralna funkcija izraza (10.18) dobijamo

$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT - T) + [-au(kT) + ae(kT)]T \\ u(kT)(1+aT) &= u(kT - T) + aTe(kT). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Pratimo postupak iz prethodnog poglavlja i prevodimo (10.22) u kompleksni



Slika 10.3: Numerička integracija desnim pravougonicima

donen

$$U(z)(1 + aT) = z^{-1}U(z) + aTE(z)$$

$$U(z)(z + zaT) = U(z) + aTzE(z)$$

$$U(z)(z + zaT - 1) = aTzE(z).$$

i dalje u funkciju diskretnog prenosa

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{aTz}{z - 1 + aTz} = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}. \quad (10.23)$$

Slično kao ranije, ako uporedimo ogovarajuću polaznu kontinualnu funkciju

prenosa (10.14), sa novodobijenom funkcijom diskretnog prenosa (10.23), postupak diskretizacije numeričkom integracijom unazad se svodi na smenu kompleksne promenljive s izrazom $(z - 1)/Tz$. Odnosno, ako sprovedemo ovu smenu, funkcija diskretnog prenosa će biti u formi, koja odgovara postupku diskretizacije numeričkom integracijom unazad.

Kao i u prethodnom paragrafu, namera nam je da uvedemo Ojlerovo diferenciranje unazad, kao direkstan način diskretizacije diferencijalnih operatora.

Ojekovo diferenciranje unazad

Osnovna zamisao je da se diferencijal zameni konačnom razlikom unazad, odnosno

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T}.$$

Ako primenimo Laplasovu transformaciju, uz pretpostavku o nultim početnim uslovima i primenjujući teoremu o vremenskom pomeranju dobijamo

$$sY(s) \approx \frac{1}{T}(1 - e^{-sT})Y(s).$$

Odnosno, ako je vremensko pomeranje $z^{-1} = e^{-sT}$, iz prethodnog izraza lako se dobija

$$s \approx \frac{z-1}{Tz}.$$

Što je potpuno identično kao transformacija u izrazu (10.23).

Rezimajući ovaj postupak, možemo reći, da postupak numeričkog diferenciranja u skladu sa Ojekovim diferenciranjem unazad, u kompleksnom domenu znači smenu kompleksnih promenljivih po formuli

$$s = (z - 1)/zT$$

I ova aproksimacija može da se posmatra iz perspektive preslikavanja s u z-ravan. Podsećamo, da rezultat preslikavanja između dve kompleksne ravni, opredeljuje kvalitet postupka diferenciranja.

Kao i ranije počeočeno od veze između kompleksnih promenljivih, ali inverzno od uvedene aproksimacije (10.23) odnosno

$$z = \frac{1}{1 - sT}. \quad (10.24)$$

Preslikavanje po formuli (10.24) je znatno složenije nego prethodno i detaljnije, što ga objasni u nastavku teksta. Podsećamo, da rezultat preslikavanja dominantno opredeljuje transformacija imaginarnе ose u s-ravni odnosno kada je $s = iy$, koristeći tu vezu izraz (10.23) postaje

$$z = \frac{1}{1 - sT} \Big|_{s=iy} = \frac{1}{1 - iyT} = \frac{1 + j\omega T}{1 + (\omega T)^2} = x + jy. \quad (10.25)$$

gde smo sa x i y obeležili realni i imaginarni deo kompleksnog broja. Ovu smenu smo uveli da bismo projednostavili dalju studiju problema.

Iz izraza (10.25) dalje sledi

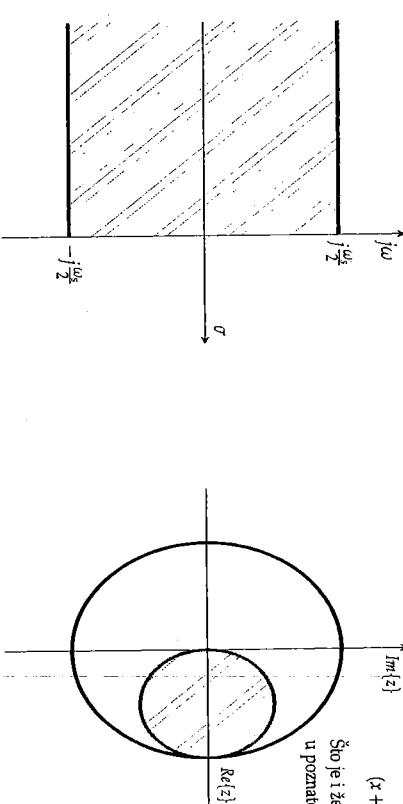
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{1}{1 + (\omega T)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2} \right)^2 = \frac{1 + (\omega T)^2}{(1 + (\omega T)^2)^2} \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Poslednji član u izrazu (10.26) očigledno predstavlja jednačinu kružnice sa centrom u $(0.5, 0)$ i prečnikom 0.5, prikazane na slici 10.4. Sve ostale tačke primarnog pojasa preslikajuće se unutar ove kružnice.

kompleksnog broja

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Što je i željena jednačina kružnice u pozatoj formi.



(b) Kružnica primarnog pojasa preslikana u z-ravan.

(a) Primarni pojas s-ravni.

Važno je naglasiti da ova emulacija sa *diferenciranjem unazad*, očigledno padražava stabilnost, jer se svršti polovi kontinuiteta sistema preslikavaju u diskretne polove unutra jedinčine kružnice. Međutim, kako se kritične tlocesta, nosi ne preslikavaju unutar cele jedinčine kružnice, već u jedan manji rjen deo, jasno je da će doći do degradacije harmonijskog oziva (odnosno frekventnih

Kroz primer želimo da podsećimo čitaoce na elementarnu pravila kompleksne analize. Neka je C kružnica u kompleksnoj poluprečniku 4 sa centrom u $(-2, 1)$. Tada se kružnica C može opisati sledećom jednačinom:

$$|z + 2 - j| = 4,$$

gde je sa $| \cdot |$ obeležen modulo kompleksnog broja. Odnosno ako, razvijajući realni i imaginarni deo kompleksnog broja $z = x + jy$, dobijamo

$$|(x+2)^2 + (y-1)| = 4$$

ili konacno izračunavamo moduo

$$|(x+2)^2 + (y-1)^2| = 16$$

Slika 10.4: Preslikavanje primarnog pojasa iz s-ravni u z-ravan primenom diferenci-

racija unazad.

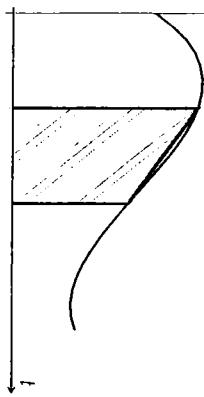
Slika 10.4: Preslikavanje primarnog pojasa iz s-ravni u z-ravan primenom diferenci-

karakteristika), a da će se najmanje degradirati one učestanosti, koje se u kontinualnom domenu nalaze najbliže imaginarnoj osi ($s = j\omega$). Isto tako, jasno se vidi da će se za manje vreme odabiranja T ove karakteristike bolje očuvati. Na kraju, treba reći da ova transformacija omogućava da se i neki nestabilni polovi kontinualnog sistema, preslikaju u stabilne, ali na našu sreću zahtev za očuvanje nestabilnosti, nije karakterističan za sisteme automatskog upravljanja.

Dovoljicemo sebi jedan neformalniji zaključak. U okviru poglavljia *Diskretnizacija po principima numeričke integracije*, obradili smo dva naizgled veoma slična postupka *Levi pravougaonici - diferenciranje unapred* i *Desni pravougaonici - diferenciranje unazad*. Slobodni smo čak da kažemo, da su do sada ovo dva postupka posmatrano ravnopravno i da je teško bila uočljiva suštinska razlika između njih. Međutim sa stanovišta praktične implementacije u digitalnim algoritmu ma automatskog upravljanja, očigledno je da jedan postupak može da uvede sistem u nestabilnost i bespovratno degradira sve performanse sistema.

10.3.3 Numerička integracija trapeznim pravilom - Tustinova aproksimacija

Postupak numeričke integracije trapeznum, Tustinvim¹², pravilom, na neki način predstavlja prirodan nastavak prethodnog dva postupka. Naime, vrednost podintegralne funkcije se aproksimira linjskim segmentom slike 10.5, koji povezuje vrednosti $f(kT - T)$ i $f(kT)$. Konkretno mićemo vrednost funkcije aproksimirati srednjom vrednošću ova dva vremenska odvinka, a površnu funkciju pod znakom integrala dobijemo kao proizvod ove usredjene vrednosti i vremena odabiranja T tj. kao $T[f(kT - T) + f(kT)]/2$. Za naš konkretni slučaj integracije podintegralnog izraza (10.18) dobijamo



Slika 10.5: Numerička integracija trapeznum pravilom

¹² Arnold Tustin, 1899 - 9 January. Professor na Imperial College London, poznat po svom doprinisu teoriji automatskog upravljanja

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}[-az^{-1}U(z) + az^{-1}E(z) - aU(z) + aE(z)]. \quad (10.28)$$

Uz malo elementarne matematike, dobijamo odgovarajuću funkciju diskretnog prenos

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{a\frac{T}{2}(z+1)}{z-1+a\frac{T}{2}(z+1)} = \frac{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}{1-\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+a}. \quad (10.29)$$

Kao i ranije, ako uporedimo ogovaraajuću polaznu kontinualnu funkciju prenosa (10.14), sa novodobijenom funkcijom diskretnog prenosa (10.29), postupak diskretizacije numerička integracija trapeznum pravilom se svodi na smenu kompleksne promenljive s izrazom $\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$. Odnosno, ako sprovedemo ovu smenu, funkcija diskretnog prenosa će biti u formi, koja odgovara postupaku diskretnice numeričke integracije trapeznum pravilom. Ova konkretna smena u literaturi se naziva *Tustinova aproksimacija* i u nastavku teksta i mićemo koristiti taj termin.

Od izuzetnog je značaja analizirati preslikavanje iz s u z -ravan primenom *Tustinove aproksimacije*. Počemo od inverzne forme, odnosno veze između promenljivih z i s , koji se dobija „inverzum“ trapeznum pravilom

$$s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}. \quad (10.30)$$

Preslikavanje ćemo započeti smenom $s = j\omega$, odnosno preslikaćemo imaginarnu osu s-ravni

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1+j\frac{\omega T}{2}}{1-j\frac{\omega T}{2}} = \frac{1-(\frac{\omega T}{2})^2 + j\omega T}{1+(\frac{\omega T}{2})^2}, \quad (10.31)$$

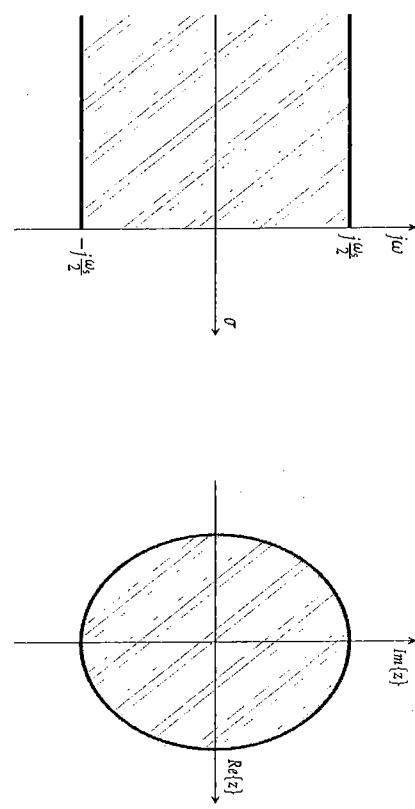
ovako dobijeni kompleksni broj ćemo razvijiti na realni i imaginarni deo

$$z = x + jy = \frac{1 - (\frac{\omega T}{2})^2}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} + \frac{j\omega T}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2}. \quad (10.32)$$

Daljom transformacija kompleksnog broja iz izraza (10.32) dobijamo

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - (\frac{\omega T}{2})^2}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega T}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} \right)^2 = \frac{1 + (\frac{\omega T}{2})^2}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} = 1; \quad (10.33)$$

Kao što se vidi izraz (10.33) $x^2 + y^2 = 1$ opisuje jediničnu kružnicu, tj. kružnicu poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku, kao na slici 10.6. Iz perspektive preslikavanja iz s u z-ravan primenom (inverzne) *Tustiinove aproksimacije* to znači da će diskretni sistem dobijen na ovaj način uvek biti stabilan. Međutim, bilo bi dobro proučiti preslikavanje frekvenčkih karakteristika primenom *Tustiinove transformacije*. Napomena, želimo da pokazemo da postoje izvesna izoblićenja u frekvenčkim karakteristikama, ali da se u opsegu nizkih frekvenacija ili na tačno određenoj frekvenciji, karakteristika kontinualnog i diskretnog sistema mogu izjednačiti. Ovo svojevrsno ugađanje frekvenčnih karakteristika, neki smatraju novim postupkom diskretizacije kontinualnih filtera.



(a) Primarni pojaz s ravnim

(b) Kontura primarnog pojasa preslikana u z-ravan.

$$\begin{aligned} j\omega_c &= A \frac{1 - e^{-j\omega_d T}}{1 + e^{-j\omega_d T}} = A \frac{e^{j\omega_d T} - 1}{e^{j\omega_d T} + 1} \\ &= A \frac{e^{j\omega_d T/2} e^{j\omega_d T/2} - e^{-j\omega_d T/2}}{e^{j\omega_d T/2} e^{j\omega_d T/2} + e^{-j\omega_d T/2}} \\ &= jA \frac{\sin \frac{\omega_d T}{2}}{\cos \frac{\omega_d T}{2}} = jA \tan \frac{\omega_d T}{2} \end{aligned} \quad (10.35)$$

gdje konačnu vezu posebno naglašavamo

$$j\omega_c = jA \tan \frac{\omega_d T}{2}. \quad (10.36)$$

Cilj nam je da odredimo koeficijent A , koji će nam usaglasiti učestanost u kontinualnom domenu i nakon diskretizacije. Počemo od vrednosti parametra, koji odgovara *Tustiinovoj aproksimaciji*, odnosno

$$j\omega_c = jA \tan \frac{\omega_d T}{2}. \quad (10.37)$$

Ako pretpostavimo da je vreme odabiranja „malo“, odnosno ako se odabiranje vrši dovoljno brzo, matematički se lako pokazuje da važi sledeća relacija

$$\tan \frac{\omega_d T}{2} \approx \sin \frac{\omega_d T}{2} \approx \frac{\omega_d T}{2},$$

odnosno u našem slučaju

$$\omega_c \approx \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_d T}{2} \approx \frac{\omega_d T}{2}. \quad (10.38)$$

Slika 10.6: Preslikavanje pri-

maognog pojasa iz s-ravni u z-ravan primenom *Tustiinove aproksimacije*.

Da bi lakše objasnili ovo slaganje frekvenčkih karakteristika, privremeno ćemo uvesti dve nove označke ω_c i ω_d , koje predstavljaju učestanost u kontinualnoj i diskretnoj ravnini.

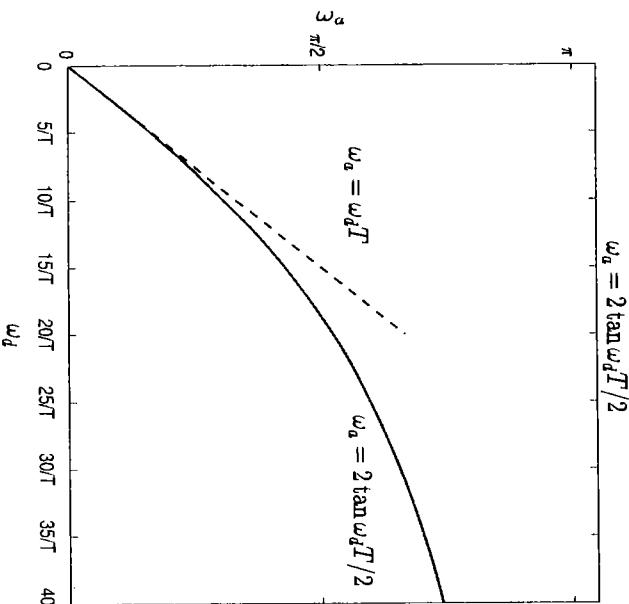
alog odnosno diskretnog sistema respektivno. Analiza frekvenčnih karakteristika se praktično svodi na preslikavanje imaginarnog dela primarnog pojasa s-ravni odnosno $s = j\omega_d T$ u granicama od 0 do $\omega_s/2$. Počemo od izraza (10.30), koji smo malo modifikovali, odnosno uopštili

$$s = A \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (10.34)$$

gde smo uveli opštiji parametar A umesto $2/T$ sa ciljem da novouvedeni parametar A adaptivno biramo u skladu sa projektantskim zahtevima za usaglašavanje frekvenčnog rasporeda. Ferkventnu analizu nastavljamo uobičajenom smenom $s = j\omega_c$ i $z = e^{j\omega_d T}$

$$\begin{aligned} j\omega_c &= A \frac{1 - e^{-j\omega_d T}}{1 + e^{-j\omega_d T}} = A \frac{e^{j\omega_d T} - 1}{e^{j\omega_d T} + 1} \\ &= A \frac{e^{j\omega_d T/2} e^{j\omega_d T/2} - e^{-j\omega_d T/2}}{e^{j\omega_d T/2} e^{j\omega_d T/2} + e^{-j\omega_d T/2}} \\ &= jA \frac{\sin \frac{\omega_d T}{2}}{\cos \frac{\omega_d T}{2}} = jA \tan \frac{\omega_d T}{2} \end{aligned}$$

Ovo praktično znači da za male vrednosti vremena odabiranja T kontinualni sistem i njegov odgovarajući digitalni ekvivalent, dobijen *Tustinovom aproksimacijom*, imaju dobro poklapanje frekvenčnog spektra, kao što je prikazano na slici 10.7, u delu krive gde arctan ima skoro pa linearno ponašanje. Međutim kako se $(\omega_d T)/2$ približava vrednosti $\omega_s/2$ odnosno π/T dolazi do distorzije frekvenca, odnosno frekventne krive se razmunoilaze. Pitanje koje se postavlja je, kako odrediti koeficijent A iz izraza (10.34), tako da se slazu frekvenca na učestanosti ω_0 , izvan dela u kome *Tustinova aproksimacija* obezbeđuje prekapanje. Najlakši način je da se parametar A izabere na sledeći način:



Slika 10.7: Uklapanje frekvenčne krive sa Tustinovom aproksimacijom

Čitacu ostavljamo za vežbu da direktno primeni MATLAB funkcije za diskretizaciju primenom *Tustinove i/ili bilinearne transformacije*. Same funkcije dajemo u nastavku.

```

1 [Brojilac Imenilac] = bilinear(Brojilac,Imenilac,Fs);
2 % direktna primena Tustinove aproksimacije, gde je Fs frekvenca uzorkovanja
3
4 [Brojilac Imenilac] = bilinear(Brojilac,Imenilac,Fs,Fp)
5 % Primena formule sa ugadanjem frekvenca, gde je Fp zadana frekvenca.
6
7 %ili
8 G=2d(Gc,T,'tustin') %metod diskretizacije 'tustin'
```

10.4 Problemi

Problem 10.1. Nači digitalni ekvivalent analognog filtra drugog reda primenom metode levih pravougaonika (diferenciranje unapred). Filtar je modelovan sledećom funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- a) Diskutovati stabilnost u međusobnom odnosu $\omega_n T$ i ξ gde je T vreme odabiranja.

$$s = \frac{\omega_0}{\tan \frac{\omega_0 T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (10.39)$$

Jasno je i bez posebnog dokazivanja, da će se ovom transformacijom obezbediti prekapanje na učestanost od interesa ω_0 . Oranj pristup, dat izrazom (10.39)

naziva se *uglađenje ili slaganje frekvenčnih karakteristika* i predstavlja posebni poступak diskretizacije kontinualnih sistema.

Važno je reći da se sve transformacije tipa

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (10.40)$$

gde je w kompleksna promenljiva nazivaju, zbog svoje matematičke forme *bilinearne transformacije*. Očigledno je da sve transformacije iz ovog poglavlia spadaju u tu klasu, odnosno termin *bilinearna* se ravnopravno koristi u njihovom opisivanju.

Citacu ostavljamo za vežbu da direktno primeni MATLAB funkcije za diskretizaciju primenom *Tustinove i/ili bilinearne transformacije*. Same funkcije dajemo u nastavku.

```

1 [Brojilac Imenilac] = bilinear(Brojilac,Imenilac,Fs);
2 % direktna primena Tustinove aproksimacije, gde je Fs frekvenca uzorkovanja
3
4 [Brojilac Imenilac] = bilinear(Brojilac,Imenilac,Fs,Fp)
5 % Primena formule sa ugadanjem frekvenca, gde je Fp zadana frekvenca.
6
7 %ili
8 G=2d(Gc,T,'tustin') %metod diskretizacije 'tustin'
```

```

10.4 Problemi
Problem 10.1. Nači digitalni ekvivalent analognog filtra drugog reda primenom metode levih pravougaonika (diferenciranje unapred). Filtar je modelovan sledećom funkcijom prenosa
```

Problem 10.1. Nači digitalni ekvivalent analognog filtra drugog reda primenom metode levih pravougaonika (diferenciranje unapred). Filtar je modelovan sledećom funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- a) Diskutovati stabilnost u međusobnom odnosu $\omega_n T$ i ξ gde je T vreme odabiranja.

b) Da li je sistem stabilan za $\omega_n = 10\frac{\pi}{\xi}$ i $T = 0.2s$? (Napomena: ξ je koeficijent prigrešnja, i zbog svog fizickog smisla može imati vrednost iz intervala $\xi \in (0,1)$.)

Novouvedena kompleksna promenjiva w i sam izraz (10.40) često se konstiše kao svojevrsne potencije prenositive u analizi stabilnosti diskretnih sistema. Nai-menom kompleksne promenjive z , uz pomoć izraza (10.40), u karakterističnom polinomu, dobijamo novi karakteristični polinom, sada u funkciji w , kod kojega stabilitet možemo analizirati uz pomoć dobro poznatih algoritama za kontinualne sisteme. Ovo je moguće, jer se promenjiva w jedinični krug stabilitet diskretnog sistema preslikava u lenu poljura, čime faktički daje mogućnost za primenu analitičkih kriterijuma za analizu stabilnosti kontinualnih sistema. Dokaz ove činjenice, čitalac može i intuitivno naći u ovom poglavljiju i ostavljamo ga namerno nedorečenim. Sa druge strane u nema karakter učestanosti, već je nazivamo pseudoučestanost zbog svog bezdimenzionalnog karaktera i ova činjenica je inherentno sadžana u ovom poglavljiju i nećemo je posebno razmatrati.

Problem 10.2. Kontinualni filter je opisan funkcijom prenosa prvog reda

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}.$$

- a) Ako je vreme odabiranja T , primenom Tustinove aproksimacije diskretnizovati kontinualni filter. Rešenje zapisati u sledećoj formi

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}}$$

- b) Ako se na ulaz diskretnog filtra doveđe impulsna pobuda, prva komponenta odziva ima vrednost $y(0) = \frac{1}{4}$. Ukoliko je vreme odabiranja $T = 0.01\text{s}$, izračunati vremensku konstantu T_f .

Problem 10.3. Dat je kontinualni niskopropusni filter $G(s) = \frac{1}{s+a}$. Diskretnizovati dati filter primenom

- a) impuls invarijantne diskretizacije,
- b) step invarijantne diskretizacije.
- c) Izvesti izraz za rampu invarijantnu diskretizaciju.

Problem 10.4. Dat je filter opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}.$$

- a) Izvršiti diskretizaciju filtra primenom numeričke integracije levim pravougaonim (Ojlerovim) diferenciranjem unapred).

- b) Komentarisati stabilnost diskretizovanog filtra u zavisnosti od parametara.
- c) Odrediti diferenčnu jednačinu datog filtra.
- d) Napisati pseudokod za implementaciju diskretizovanog filtra na računar.

Problem 10.5. Dat je niskopropusni filter opisan diferencijalnom jednačinom

$$y(t) = T_f y_f(t) + y_f(t),$$

gde je T_f vremenska konstanta filtra, y je ulazni signal, a y_f je filtrirani signal.

- a) Odrediti funkciju prenosa filtra.
- b) Izvršiti diskretizaciju filtra primenom numeričke integracije, desni pravougaonici.
- c) Odrediti diferenčnu jednačinu datog filtra.
- d) Izračunati vrednost step odziva u ustajrenom stanju za dobijenu diskretnu funkciju prenosa filtra.

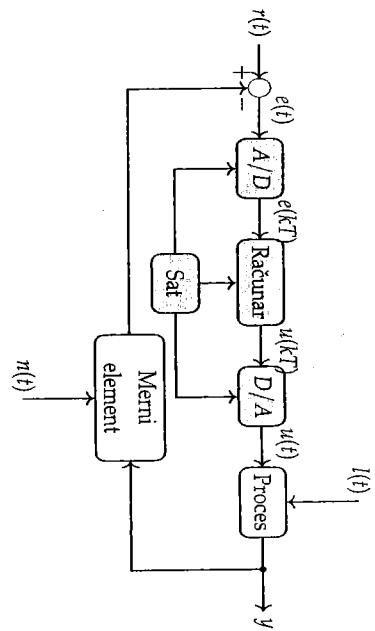
Diskretni regulatori

Ovo poglavlje predstavlja prirođan nastavak prethodnog poglavlja o diskretizaciji digitalnih regulatora i filtera. Naime, dobro je poznato da je PID zakon upravljanja na rasprostranjeniji upravljački algoritam u inženjerskoj praksi, što ga je i njegova diskretizacija odnosno implementacija na digitalnom računaru od posebnog značaja u studiji računarskih upravljačkih sistema.

Podsetimo na tipičnu šemu digitalnog upravljačkog sistema, slika 11.1 i naglasiti da nam je cilj u okviru ovog poglavlja dvojak. Prvi, da kontinualnu formu upravljačkog algoritma diskretizujemo i prilagodimo izvršavanju na računaru, drugi, da ovaj upravljački algoritam „obogatimo“, odnosno da u njega ugradimo formalizme, koji su karakteristični za implementaciju na računaru, a mogu da unaprede performanse upravljačkog kola. Odnosno, cilj nam nije samo direktna diskretizacija PID regulatora, već i izmene algoritma, koji će na prirođan način omogućiti rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstva, prelaska sa ručnog na automatski režim rada i sl. Napomena, praktična implementacija, podrazumeva i dobro razumevanje principa A/D i D/A konverzije, odnosno dobro poznавanje principa digitalnog upravljanja.

Podelimo ovo poglavlje u dve celine. U okviru prve celine, razmatraćemo diskretizaciju osnovnog oblika PID regulatora¹, a u okviru druge celine, analiziratemo diskretni oblik realnog PID regulatora sa svim svojim modifikacijama. Diskretizacija osnovnog oblika regulatora, naravno nema preveliku upotrebu u praksi, ali je jako značajno da kroz ovu jednostavniju formu sagledamo osnovne specifičnosti vezane za sam postupak diskretizacije, a kasnije da ta znanja uopštimo i primeniemo na realni upravljački algoritam.

¹Podsećamo čitaocu da smo u uvodnim poglavljima ovog udžbenika, u objašnjujući funkcionalnosti i strukture PID regulatora, kreнуli od njegovog osnovnog ili školskog oblika, da bi uz setju modifikacija došli do njegovog realnog oblika.



11.1 Diskretizacija osnovnog oblika PID regulatora

Podsećamo na osnovni oblik PID regulatora, koji je dat izrazom (11.1)

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (11.1)$$

gdje je K pojačanje, koje odgovara proporcionalnom pojačanju, T_i je integralna vremenska konstanta i T_d je diferencijalna vremenska konstanta. Prateći pravila diskretizacije numeričkom integracijom, za dovoljno malo T lako dobijamo sledeću diferencenciju jednačinu

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + T_d \left(e(k) - e(k-1) \right) \right], \quad (11.2)$$

nije teško primetiti da smo u ovaj diskretizaciju, koju smo predstavili izrazom (11.2), koristili dva postupka numeričke integracije. Konkretno, integral smo zamenili sumom i to korišćenjem pravila lenti pravougaonika, a diferencijal smo zamenili Ojlerovim diferenciranjem unazad². Ova forma data izrazom (11.2) naziva se pozicionom formom diskretnog PID regulatora. U okviru pozicione forme se stanovništa digitalne reprezentacije brojeva u kompjutru preciznosti moguće je disproportcija između sume koja predstavlja integralno dejstvo i potencijalno male razlike, koja je definisana diferencijalnim dejstvom, što može uticati na numeričku vrednost upravljačke promenljive. Isto tako, treba voditi računa da

Slika 1.1.: Shema digitalnog upravljačkog sistema. Podsećamo da je ovo principska shema, koja ima za cilj da naglaši sve signale od interesa i njihov karakter. Relaciona shema je predstavljena u poglaviju, koje je posvećeno strukturi digitalnih upravljačkih sistema. Tako na primer, više puta do sada je neglašeno da se referentna vrednost zadaje u računaru i da se u okviru istog bloka računa i signal greške.

²Ovakav pristup se može utuniti kao nedoslednost u odnosu na teorijska razmatranja iz prethodnog poglavija. Međutim treba znati da će bez obzira na način diskretnizacije, digitalni ekivalent uvek imati pol na jedinčinom krugu ($z = 1$). Jedina je razlika kako će izgledat nula integratora. Ovaj pristup smo usvojili prateći preporuke za praktičnu implementaciju, koje će biti predmet daleće stranice.

Isto tako, vredno je istaći da, neki projektanti u analizi izraza (11.2) polaze od činjenice da upravljanje u trenutku k , odnosno $u(k)$ zavisi kod P i kod D dejstva od vrednosti greške u trenutku k ili $e(k)$, a samo I dejstvo zavisi od greške u prethodnom trenutku $e(k-1)$ i predlažu sledeću modifikaciju,

$$u(k) = K \left[\bar{T}_i \sum_{i=0}^k e(i) \right]. \quad (11.3)$$

Da bi konkretizovali izračunavanja u inkrementalnoj formi (11.3), moramo da izračunamo i vrednost upravljanja u trenutku $k-1$, što je na osnovu (11.2)

$$u(k-1) = K \left[e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_d}{T} (e(k-1) - e(k-2)) \right], \quad (11.4)$$

i tada izraz za prirašataj upravljanju $\Delta u(k)$ postaje

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \quad (11.5)$$

gdje se koeficijenti q_0 , q_1 i q_2 lako izračunavaju kao razlika izraza (11.2) i (11.4) odnosno

$$q_0 = K(1 + \frac{T_d}{T})$$

$$q_1 = -K(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i})$$

$$q_2 = K\frac{T_d}{T}. \quad (11.6)$$

Diskretna brzinska forma je očigledno numerički uravnoteženja i lakša za računarsku implementaciju, a inkrementalna forma I dejstva daje mogućnost za lakšu implementaciju algoritma protiv nagomilavanja integralnog dejstva i daje mogućnost za prirodan prelaz sa ručnog na automatski radni režim.³

Brzinska forma je suštinski bila namenjena procesima koji inherentno sadrže integralno dejstvo, a upravljanje se računa kroz inkrementalne promene. Detalji će biti jasniji u nastavku teksta, za sada ovu činjenicu samo napominjemo. Kao što će se videti u brzinskoj formi, implementacija proporcionalnog i diferencijalnog dejstva samostalno bez integralnog dejstva nije priroda, može se

²Ergl. bumpless transfer.

reći da je skopčana sa poteškoćama, koje takvu implementaciju nekada potpuno isključuju. Da bi bolje razumeli sve fenomene, vezane za brzinsku formu, treba da predemo u kompleksni domen, odnosno primenimo Jtransformaciju na izraze (11.3), (11.5) i (11.6) dobijamo

$$\Delta U(z) = U(z) - z^{-1}U(z) = (q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2})E(z), \quad (11.7)$$

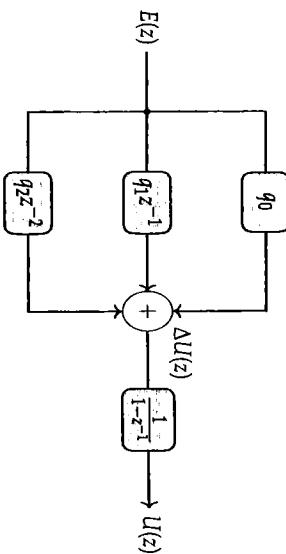
odnosno funkcije prenosa priraštaja upravljanja, koja suštinski predstavlja brzinsku formu regulatora

$$\frac{\Delta U(z)}{E(z)} = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}, \quad (11.8)$$

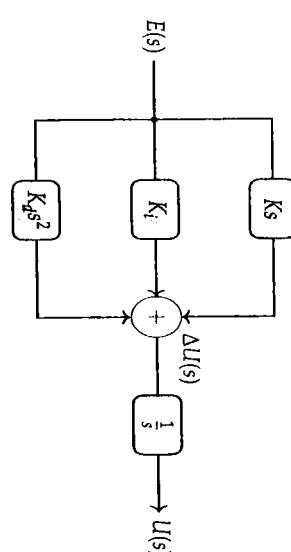
i konačno upravljanje, kao integral priraštaja

$$\frac{U(z)}{\Delta U(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (11.9)$$

Šematski, funkcije prenosa možemo predstaviti na sledeći način, kao na slici 11.2.

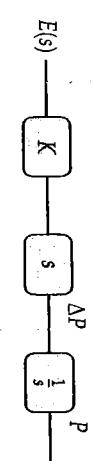


Slika 11.2: Funkcija diskretnog prenosa PID regulatora u inkrementalnoj formi



Slika 11.3: Funkcija prenosa kontinualnog PID regulatora u brzinskoj formi

Napomenju smo ranije, da je implementacija P i D dejstva bez integralnog elemonta u inkrementalnom obliku složenija, odnosno da u ovom obliku ne može da generiše upravljanje, koje može da obezbedi dostizanje ustaljenog stanja. Da bi to ilustrovali, izdvojimo granu sa slike 11.3 u koji se nalazi samo P dejstvo, slika 11.4, pretpostavimo da je greška na ulazu konstantna, prolaskom kroz diferencijalno dejstvo ona će se anulirati i efekat pojačanja, karakterističan za P dejstvo će izostati.⁴ Slična paralela se lako može napraviti i za D član u brzinskoj formi.



Slika 11.4: Funkcija prenosa brzinske forme P regulatora

Međutim, brzinski algoritam, posebno u svojoj diskretnoj izvedbi, na prinos dan način rešava dva značajna problema u eksploataciji PID regulatora, a to su prelaz sa ručnog na automatski radni režim i nagomilavanje integralnog dejstva. Prilikom prelaska sa ručnog na automatski režim rada, cilj nam je da ne dođe do nagle promene upravljačke veličine, što bi naravno rezultovalo i značajnom promenom odziva procesa. U trenutku prelaska sa ručnog na automatski režim rada, osnovano je prepostaviti da je greška, kao razlika između željene i ostvarene vrednosti, velika. Kao što smo naučili, velika greška može da dovede do nagle porasti integralnog dejstva kada je u formi integrala, odnosno sume u pozicionoj formi. Ova će kao rezultat naravno imati i veliku promenu u upravljačkom signalu, pa samim tim i u odzivu. Međutim, u inkre-

štaj upravljanja, implementira kod procesa, koji u sebi inhrenetno sadrže integralno dejstvo, odnosno integralno dejstvo je praktično iznešeno iz upravljačke petlje. Da bi se bolje razumeli principi brzinskog algoritma predstavili smotrovaj formalizam i u kontinualnoj formi, slika 11.3, prepostavljajući da je kroz dualizam kontinualno/diskretno lakše ispratiti sve fenomene od interesa.

⁴Proporcionalno dejstvo, koje u sebi sadrži tzv. bias član

$P(t) = K\epsilon(t) + u_b$,

moguće je projektovati u brzinskoj formi. Odgovarajuća diskretna brzinska izvedba bi u tom slučaju bila data na sledeći način

$\Delta P(k) = P(k) - P(k-1)$

$= K\epsilon(k) + u_b - P(k-1)$.

mentalnoj formi mi računamo samo priraštaj upravljanja $u(k) - u(k-1)$ čime se

ovaj problem na prirodn način rešava i izbegava nagla promena upravljačke veličine. Isto tako nagomilavanje integralnog dejstva je očigledno vezano za forme integrala, odnosno sume u diskretnoj izvedbi. Podsećamo, da je problem

bio u neosetljivosti ove sume (integrala) na promenu znaka greške. U slučaju integrirane izvedbe, integralni član figurise u izrazima (11.5) i (11.6) samo kao $K \frac{T}{T_i} e(k-1)$ i u slučaju promene znaka, pa čak i kod saturacije izvršnog organa, uči će u normalno ostvajiv. Linearan režim, u vremenu jednog taka, odnosno jedne periode odabiranja. Mi smo ovde izneli pristup i logiku, karakterističnu za digitalne sisteme u studiji nagomilavanja integralnog dejstva i prelaska sa

nučnog na automatski rad, međutim aktivno se koriste u inženjerskoj praktici pravila i postupci za rešavanje ova dva problema, koja su karakteristična za kontinualne sisteme, samo je njihova implementacija u diskretnom obliku ili bolje reći softverska implementacija značajno jednostavnija. Deo toga ćemo pri-

rođno uvesti u nastavku poglavija.

11.2.1 Diskretizacija P dejstva

Realno P dejstvo smo uveli u sledećoj formi

$$P(t) = K [br(t) - y(t)], \quad (11.11)$$

direktnom diskretizacijom po vremenu $t = kT$ dobijamo⁷

$$P(kT) = K [br(kT) - y(kT)], \quad (11.12)$$

⁷Diskretizacija se može vršiti i u trenutim odabiranjima, koji nisu ekvidistantri t_k . Pa diskretizacija može biti i formi $P(t_k) = K(br(t_k) - y(t_k))$.

11.2.2 Diskretizacija I dejstva

Integralno dejstvo je u vremenskom domenu definisano na sledeći način

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (11.13)$$

Ovaj izraz (11.13) možemo zapisati i u drugoj formi, koja je pogodnija za dalju transformaciju, odnosno

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K}{T_i} e(t). \quad (11.14)$$

Izraz (11.14) u diferencijalnoj formi, može se diskretizovati na nekoliko načina, mi ćemo početi od *diferenciranja unapred*,⁸ koja se pokazala kao veoma često korisćena u praksi

$$\frac{I(kT + T) - I(kT)}{T} = \frac{K}{T_i} e(kT), \quad (11.15)$$

da je se lako dobija rekurzivna forma, koja opisuje integralno dejstvo u diskretnom obliku

$$I(kT + T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} e(kT). \quad (11.16)$$

Na sličan način izraz (11.14) se može diskretizovati *diferenciranjem unazad*

$$\frac{I(kT) - I(kT - T)}{T} = \frac{K}{T_i} e(kT), \quad (11.17)$$

Kao što smo ranije napomenuli, u postupku diskretizacije koristićemo pravila i pozicione i inkrementalne forme, na način koji nam najviše odgovara. U studiji postupaka diskretizacije, koristićemo vremenski zapis jednačine (11.10) i to za svako dejstvo ponasob.

$$I(kT + T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} e(kT + T). \quad (11.18)$$

Tuštinovu formu ostavljamo da čitaoci sami izvedu, mi ćemo dati samo ko-načan oblik u rekurzivnoj formi

$$I(kT + T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} \frac{e(kT) + e(kT + T)}{2}. \quad (11.19)$$

Treba primetiti da se rekurzivni obrasci⁹ (11.16), (11.18) i (11.19) imaju istu formu

$$I(kT + T) = I(kT) + b_1 e(kT) + b_2 e(kT + T), \quad (11.20)$$

gde je očigledno da koefficijenti b_1 i b_2 zavise od metoda diskretizacije.

11.2.3 Diskretizacija D dejstva

Diferencijalno dejstvo, za potrebe regulacije, uveli smo na sledeći način

$$\frac{T_d}{N} \frac{tD}{dt} + D(t) = -KT_d \frac{dy(t)}{dt}. \quad (11.21)$$

Diskretizacija D dejstva je naisloženja i ovim postupcima ćemo posvetiti i najviše pažnje. Diferencijalno dejstvo, dato izrazom (11.21) je osjetljivo na izbor postupka numeričke integracije i pogrešnom primenom može da uvede regulator u nestabilnost ili da izmeni ponašanje sistema u vremenskom i/ili frekventnom domenu.

Kao i ranije diskretizaciju D dejstva ćemo započeti *diferenciranjem unapred*

$$\frac{T_d}{N} \frac{D(kT) - D(kT - T)}{T} + D(kT) = -KT_d \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T}. \quad (11.22)$$

Izraz (11.22) može se lako prevesti i u sledeću formu

$$D(kT + T) = \left(1 - \frac{NT}{T_d}\right) D(kT) - KN [y(kT + T) - y(kT)]. \quad (11.23)$$

Kao što je poznato, ovaj postupak numeričke integracije ne garantuje stabilnost digitalnog ekvivalenta, pa je važno analizirati da li izraz (11.23) obezbeđuje

željeno stabilno ponašanje regulatora. Da bi ovaj rezultat emulacije očuvao stabilitet potrebno je da

$$\left|1 - \frac{NT}{T_d}\right| < 1, \quad (11.24)$$

odnosno da je

$$T_d > \frac{NT}{2}. \quad (11.25)$$

⁹Može se primetiti da ovi obrasci suštinski odgovaraju integralnoj formi, koja je, kao što smo videli, bila od najvećeg značaja baš za integrалno dejstvo

"Do uslova stabilitet laže možemo doći primenom transformacije na izraz (11.23), gde se dobije sledeća funkcija diskretnog prenosa

$$\frac{D(z)}{Y(z)} = \frac{-KN(z+1)}{z - \left(1 - \frac{NT}{T_d}\right)}.$$

Pokazalo se da *diferenciranje unapred* ne garantuje stabilnost digitalnog ekvivalenta, odnosno moraju da budu zadovoljeni uslovi (11.24) i (11.25), što ovu transformaciju čini nepodesnom u praktičnoj upotrebi.

U cilju iznalaženja adekvatnog postupka diskretizacije diferencijalnog dejstva, nastavljamo sa postupkom *diferenciranja unazad*. Izraz (11.21) tada postaje

$$\frac{T_d}{N} \frac{D(kT) - D(kT - T)}{T} + D(kT) = -KT_d \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T}. \quad (11.26)$$

odnosno

$$D(kT) = \frac{T_d}{T_d + NT} D(kT - T) - \frac{KT_d N}{T_d + NT} [y(kT) - y(kT - T)]. \quad (11.27)$$

Očigledno je, da je član ispred $D(kT - T)$, tj. $\frac{T_d}{T_d + NT}$ uvek manji od jedan, što čini ovaj digitalni ekvivalent uvek stabilnim.

Konačno primenjeno i Tuštinovu aproksimaciju u cijlu diskretizacije diferencijalnog dejstva (11.21), bez većih problema dobijamo konačni izraz, koji opisuje ovaj digitalni ekvivalent

$$D(kT) = \frac{2T_d - NT}{2T_d + NT} D(kT - T) - \frac{2KT_d N}{2T_d + NT} [y(kT) - y(kT - T)]. \quad (11.28)$$

I u slučaju diskretizacije Tuštinovim pravilom, dobijamo stabilni digitalni ekvivalent, što se jasno vidi iz člana ispred $D(kT - T)$ u izrazu (11.28). Međutim,

za male vrednosti T_d može se desiti da brojilac u članu $\frac{2T_d-NT}{2T_d+NT}$ ima negativnu vrednost, što ima za posledicu oscilacije diferencijalnog dejstva u PID regulatora (engl. *ringing effect*). Kada je $T_d > > \frac{NT}{T_i}$ upotreba Tustinovog metoda aproksimacije je potpuno opravданa, jer daje bolju aproksimaciju kontinualnog diferencijalnog dejstva (pa i integralnog), na način koji smo već analizirali u prethodnom poglaviju.

Posmatrajući izraze za diskretno diferencijalno dejstvo (11.23), (11.27) i (11.28) možemo videti da se oni mogu uopštiti sledećom formom

$$D(kT) = a_d D(kT - T) - b_d [y(kT) - y(kT - T)]. \quad (11.29)$$

gde koeficijenti a_d i b_d zavise od izbora postupka diskretizacije. Kao što smo već zaključili, ove aproksimacije diferencijalnog dejstva su stabilne samo ako je $|a_d| < 1$. Tabellarni pregled koeficijenata u razmatranim postupcima diskretnizacije diferencijalnog (11.29) i integralnog dejstva (11.20) dat je u tabeli 11.1. Važno je primetiti da u diskretizaciji realnog PID regulatora nećeemo posebno razmatrati inkrementalnu formu. Kao što smo zaključili P i D dejstvo nisu pogodni za brzinsku formu, bez I dejstva: Diskretizovano integralno dejstvo dato izrazom (11.20) je već u rekurzivnom obliku, gde se računa samo priraštaj vrednosti integralne komponente.

Koeficijenti	Postupak diferenciranja		
	Diferenciranje unapred	Diferenciranje unazad	Tustin
b_1	$\frac{KT}{T_i}$	0	$\frac{KT}{2T_i}$
b_2	0	$\frac{KT}{T_i}$	$\frac{KT}{2T_i}$
a_d	$1 - \frac{NT}{T_d}$	$\frac{T_d}{T_d+NT}$	$\frac{2T_d-NT}{2T_d+NT}$
b_d	KN	$\frac{KT_d}{T_d+NT}$	$\frac{2TKN}{2T_d+NT}$

U nastavku dajemo jedan primer implementacije realnog PID regulatora, sa ugrađenim mehanizmom za rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstva.

Primer 11.1 (Implementacija realnog PID regulatora). U okviru primera, namena nam je da prikažemo postupak implementiranja realnog PID regulatora

¹¹ Jasno je da promena znaka ispred člana $D(kT - T)$, menjajući gradient diferencijalnog dejstva, odnosno menjajući predviđane buduće ponašanje sistema, što je podsećamo i njegova osnovna uloga.

u svom digitalnom obliku. Algoritam, koji ćemo predložiti, ima ugrađen postupak protiv nagomilavanja integralnog dejstva i njega temu posebno obradžuti. Upravljanje se sastoji iz tri osnovne komponente i izračuva se kao njihov zbir odnosno

$$v(t) = P(t) + I(t) + D(t)$$

gde je sa $v(t)$ obeleženo izračunato upravljanje, koje može da se razlikuje od mogućeg ili stvarnog upravljanja, koje ćemo obeležiti sa $u(t)$. Kao što je pokazano u prethodnim poglavljima, najčešće razlika između izračunatog i stvarnog upravljanja posledica je ograničenja u maksimalnoj/minimalnoj vrednosti koja može da se ostvari na izlazu izvršnog organa. Ova *saturacija* izvršnog organa je jedan od razloga zašto dolazi do nagomilavanja integralnog dejstva. Podsećamo, ako je razlog za nagomilavanje integralnog dejstva, razlika između stvarnog i izračunatog upravljanja, onda tako nastali *offset*, najlakše eliminisemo tako što dobijenu razliku integralimo i dovedemo na nulu. Ovaj integral za eliminisanje *offseta*, ima konstantnu integraciju T_i slično kao i integralno dejstvo.

Proporcionalno dejstvo ćemo izračunavati po formuli (11.12)

$$P(kT) = K [br(kT) - y(kT)].$$

Za izračunavanje integralnog dejstva, koristićemo modifikovan izraz (11.16).

Naiđe, kao što smo rekli, da bi eliminisali nagomilavanje integralnog dejstva, moramo da integralimo razliku stvarnog i izračunatog upravljanja. Sama postavka, koja nameće integraciju još jedne vrednosti, upućuje na prirodno proširenje osnovnog I dejstva kao

$$I(kT + T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} e(kT) + \frac{T}{T_i} [u(kT) - v(kT)],$$

gde je T_i integralna vremenska konstanta u postupku rešavanja problema nagomilavanja integralnog dejstva, a vredno je spomenuti da se $u(kT)$ izračunava kao saturacija $v(kT)$ ¹², tj.

$$u(kT) = sat(v(kT), U_{min}, U_{max}),$$

gde su naravno, U_{min} i U_{max} minimalna i maksimalna dozvoljena vrednost upravljanja.

¹² U teoriji PID regulatora, koji stilistički označe u i u' za realnu i izračunatu vrednost upravljačkog signala, samo radi pregleđivanja koda, uveli smo označku v .

Diferencijalno dejstvo ćemo izračunavati u skladu sa postupkom diferenciiranja unazad (11.27), kao sigurnom izboru sa stanovišta stabilnosti digitalnog ekvivalenta

$$D(kT) = \frac{T_d}{T_d + NT} D(kT - T) - \frac{KT_d N}{T_d + NT} [y(kT) - y(kT - T)].$$

Odgovarajući pseudokod, koji bi pratio implementaciju diferencijalnih jednačina, dat je u nastavku

```

1   % Izračunavanje koeficijenata
2   bi=(K*T)/T1
3   ad=Td/(Td+NT)
4   bd=K*Td/(Td+NT)
5   br=T/Tt
6
7   % Upravljački algoritam - glavna petlja
8   while (running) {
9     r=adin(ch1) % ocitati željenu vrednost sa ch1
10    y=adin(ch2) % ocitati odziv sa ch2
11    P=k*(br*y) % P dejstvo
12    D=ad*D-bd*(y-yold) % update D dejstva
13    v=P+D # izarcunata (pripremena) vrednost upravljanja
14    usat(v,Umin,Umax) % simulacija saturacije izvrsnog organa
15    daout(ch1) % prostledi izarcunatu vrednost na izlaz ch1
16    I=I+bi*(r-y)+br*(u-v) % update I dejstvo
17    yold=y % azuriranje izlaza Y(k) i Y(k-1)
18    sleep(T) % sacekati sledeći takt
19
20 }
```

Izračunavanje koeficijenata, koji su po pravilu neepromenjivi, izvan glavne petlige, štedi računarsko vreme. Ovde smo implementirali algoritam za sprečavanje nagnuljavanja integralnog dejstva, koji je nasleden iz logike kontinualnih sistema.

Međutim, u softverskoj realizaciji je negugeće još lakše rešenje, koje proverava da li su dostignute vrednosti U_{min} i U_{max} , ako je to slučaj upravljanje će imati minimalnu, odnosno maksimalnu vrednost respektivno. Čitaocima ostavljamo, ovu verziju da implementiraju za vežbu.

Skrećemo pažnju na još jednu moguću situaciju u praktičnoj upotrebi PID regulatora. Naime, upravljačka struktura, kao svaki dinamički sistem je osjetljiv na promenu parametara regulatora i ova promena može da dovede do nagje promene upravljačke veličine i naravno adekvatne promene upravljanje veličine. U inkrementalnoj izvedbi i u slučaju da do promene parametara dolazi kada

je greška jednaka nuli, ova promena parametara nije dramatičana, međutim u slučaju kada koristimo modifikovanu verziju P dejstva, koji u sebi uključuje i težinski parametar b uputno je integrално dejstvo izračunavati na sledeći način

$I_novo=I_staro-K_staro(b_staro\ r\cdot y)-K_novo(b_novo\ r\cdot y)$

Odnosno, pseudo kod PID upravljanja sada bi izgledao

```

1   % Izračunavanje koeficijenata
2   bi=(K*T)/T1
3   ad=Td/(Td+NT)
4   br=T/Tt
5
6   % Ako se desi promena parametara
7
8   L_novo=L_staro-K_staro(b_staro\ r\cdot y)-K_novo(b_novo\ r\cdot y)
9
10
11   % Upravljački algoritam - glavna petlja
12   while (running) {
13     r=adin(ch1) % ocitati željenu vrednost sa ch1
14     y=adin(ch2) % ocitati odziv sa ch2
15     P=k*(br*y) % P dejstvo
16     D=ad*D-bd*(y-yold) % update D dejstva
17     v=P+D # izarcunata (pripremena) vrednost upravljanja
18     usat(v,Umin,Umax) % simulacija saturacije izvrsnog organa
19     daout(ch1) % prostledi izarcunatu vrednost na izlaz ch1
20     I=I+bi*(r-y)+br*(u-v) % update I dejstvo
21     I=I+bi*(r-y)+br*(u-v) % update I dejstvo
22     yold=y % azuriranje izlaza Y(k) i Y(k-1)
23     sleep(T) % sacekati sledeći takt
24 }
```

11.3 Projektoranje diskretnih regulatora uz praćenje referentnog monotonog procesa

U nastavku ćemo razmotriti uticaj novoprojektovanih upravljačkih strategija na odziv sistema.

Do sada smo u okviru ovog udžbenika razmatrali algoritme upravljanja, koji su po pravilu razvijani za kontinualne sisteme, a mi smo ih primenjivali u njihovoј diskretnoj, odnosno softverskoј izvedbi. U nastavku nam je namenjeno predstavimo dva originalna diskretna upravljačka algoritma. Osnovna karakteristika algoritama koje ćemo uvesti jeste to da da se oni primenjuju kod monotonih procesa, odnosno u našem slučaju sistema prvog reda sa vremenim kašnjenjem.

U literaturi se može naći veliki broj algoritama digitalnog upravljanja za sisteme koji se mogu opisati funkcijom prenosa prvog reda s kašnjenjem, odnosno cije ponašanje se može modelovati takvima funkcijama prenosa. Postoje različiti načini i kriterijumi koji treba da budu zadovoljeni pri projektovanju regulatora i često su formulisani tako da zadovolje posebne zahteve određenog procesa.

Sintetsa različitih regulatora prilično je komplikovan proces, međutim, zajedničko svojstvo većine algoritama koji će biti tema ovog poglavlja jeste da nisu računski zahtevni. Dobro je poznato da je projektoranje algoritama upravljanja netrivijalni postupak, koji treba da pomuti razlike kriterijume, koji se u teoriji sistema spominju. Tako se može izdvojiti nekoliko osnovnih pokazateљa ponašanja upravljačkih sistema, koje moramo da uzmemo u obzir prilikom projektovanja:

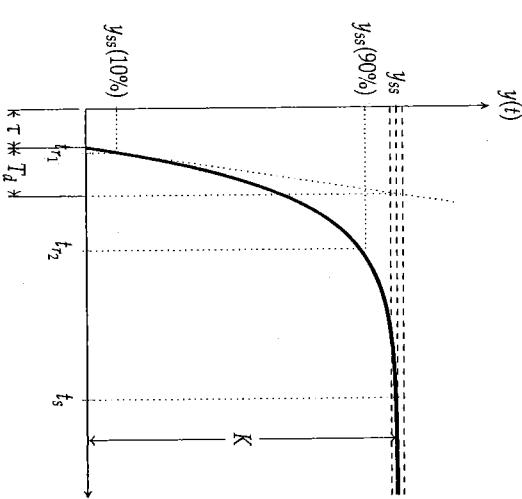
- Kriterijum optimalnosti, koji opisuje kvalitet odziva sistema (npr. minimizacija zbraja kvadrata grešaka).
- Prelazni režim, vreme ulaska u ustajeno stanje (npr. zahtev da se dostigne zadata tačka u konačnom broju vremenskih koraka).
- Prelazni režim, vreme ulaska u ustajeno stanje (npr. zahtev da se dostigne zadata tačka u konačnom broju vremenskih koraka).
- Prelazni režim sa ograničenjem preskoka (npr. da ne postoji preskok izlaznog signala u odnosu na referentnu vrednost ili da je on minimalan).
- Ogranicenja amplitudе upravljačkog signala (npr. velike vrednosti moraju se izbegavati jer se obično ne mogu implementirati zbog zasićenja aktuatora i izvršnog organa).

Upravljanje FOPDT procesima

Mnogi industrijski (realni) sistemi su stabilni i karakteriše ih monotona prelazna karakteristika. Takve procese moguće je modelovati funkcijom prenosa oblika¹³

$$G(s) = \frac{K}{T_d s + 1} e^{-\tau s}, \quad (11.30)$$

koju karakterišu tri parametra, K statičko pojačanje procesa, T_d dominantna vremenska konstanta procesa¹⁴ i τ kašnjene procesa. Odziv ovakvih sistema na jediničnu odskočnu pobudu prikazan je na slici 11.5.



Slika 11.5: Aperiodičan odziv (monotona prelazna karakteristika) sistema prvog reda na jediničnu odskočnu pobudu.

* y_{ss} - vrednost odziva u ustajrenom stanju

- $T_d = t_2 - t_1$ - vreme uspona sistema
- τ - kašnjene procesa
- T_d - dominantna vremenska konstanta

- K - pojačanje sistema.

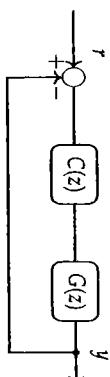
¹³ Eng. First Order Process with Dead Time (FOPDT) ili eng. First Order Process with Time Delay je rednički model prvog reda sa transportnim kašnjenjem.

Iz perspektive digitalnog upravljačkog uređaja, on vidi ponašanje sistema samo u diskretnim vremenskim trenucima, odnosno promene su vidljive, a upravljačke akcije moguće su u trenucima odabiranja. Stoga, funkcija prenosa sistema opisanog kao sistem prvog reda sa vremenskim kašnjenjem (11.30) nam je od interesa samo u trenucima odabiranja, odnosno potreban nam je njen digitalni ekvivalent, koji se lako dobija kao¹⁵

¹⁵ Zbog jednostavnosti objašnjenja postupka, a ne naučavajući opštost, pretpostavimo da je kašnjenje jednako celobrojnom umnošku perioda odabiranja, $\tau = NT$. U primernim gde to nije slučaj, može se primeniti modifikovana transformacija pri formušu digitalnog ekvivalenta procesa.

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{K}{T_0+1} e^{-rs}\right\} \\ &= K \frac{1-e^{-T/T_0}}{z-e^{-T/T_0}} z^{-N}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

S ciljem formiranja diskretnе upravljačke petlje neophodno је dodati povratnu spregu u ceo sistem, као што је приказано на слици 11.6, а једnostavna веза између улаза и излаза из система data је функцијом спрегнутог преноса облика



Sлика 11.6: Blok-sхема система diskretnog upravljanja sa jedinичном povratnom spregom.

где је $G(z)$ функција преноса процеса, а $C(z)$ regulator који је потребно пројектовати, одакле се може изразити једначина дискретног регулатора

$$C(z) = \frac{1 - W(z)}{G(z) 1 - W(z)}. \quad (11.33)$$

Овако израzen дискретни регулатор наиме примењу општепознатог приступа у теорији управљања [31, 32] који полази од дизайна функције спрегнутог преноса $W(z)$, а потом се уз помоћ израза (11.33) добија одговарајући облик регулатора $C(z)$. Такав начин размишљања биće применjen у наставку јер омогућава представљање резултата на transparentan начин.

11.3.1 Deadbeat regulator

Један од осnovних проблема система sa diskretnim vremenom je *deadbeat* контрола, tj. kako dovesti неки сигнал до нуле (или до жељene вредности) u koначном времену i zadržati га na тој вредности u свим diskretnim trenucima nakon тога. Problem *deadbeat* управљања почиње да се izučava 1950-ih, a опсевно је pronaćavan 1980-ih (Kimura i Tanaka, 1981; Emami-Naeini i Franklin, 1982; Siegel, 1982).

Deadbeat Ponašanje је управо оно понаšање које се u теорији управљања пријеđe. Idealno bi bilo kad bi izlazna величина pratila улазну на начин да do željkuje. Idealno bi bilo kad bi izlazna величина pratila улазну на начин да do

konačne вредности доде u истом trenutku kada se promeni улазна величина. Као што је то nemoguće zbog процеса uzorkovanja, zadovoljavamo сe i time da izlaz kastri само један diskretni trenutak vremena. Važno је i to da odziv система не на preskok, već da se odmah smuti na konačnu vrednost (bar u diskretnim trenutcima uzorkovanja). Diskretnо управљање i *deadbeat* dizajn to teorijski i dozvoljavajuју, ali da sve nije толико idealno koliko се na prvi pogled čini pokazano na kraju ovог pogлавља. Zadržimo se zasada само na dobrim svojstvima *deadbeat* regulatora.

Projektovanje ovakvog regulatora zasniva сe на идеји да u minimalnom броју корака систем бude doveden u ravnotežno stanje, u kom сe zadržati uz pristikivanje greške u ustaljenom stanju. To bi значило да u idealnom slučaju funkcija спрегнутог преноса система (11.32) treba da има јединично статичко појачање i да буде облика

$$W(z) = z^{-k}, \quad (11.34)$$

где $k \geq N + 1$, ukoliko је процес којим управљано $G(z)$ задат једначном (11.31)¹⁶. Применом израза (11.33), a uz то poznavajući $G(z)$ i prepostavljajući $W(z)$, добија сe regulator облика

$$C(z) = \frac{1 - z^{-k}}{G(z) 1 - z^{-k}}, \quad (11.35)$$

a daljnjom заменом digitalnog ekvivalenta процеса (11.31) u (11.35) sledi regulator obлика

$$C(z) = \frac{z - e^{-T/T_0}}{K(1 - e^{-T/T_0}) z^k - 1}. \quad (11.36)$$

Уколико је устаљено stanje i жељenu вредност ostvarimo u minimalnom броју корака, $k = N + 1$, тада је ¹⁷

$$C(z) = \frac{1}{K(1 - e^{-T/T_0})} \frac{z^N(z - e^{-T/T_0})}{z^{N+1} - 1}. \quad (11.37)$$

¹⁶ Treba primetiti да u procesu (11.31) имамо kašnjenje τ , односно kašnjenje od N perioda i da smo dođemo digitalno-analogu konvertoru, који u ovom slučaju mora delovati kao kolo zadržke nultog reda, унос kašnjenje od jedne periode, te je ukupno kašnjenje od $N + 1$ periode. Такво kašnjenje ne možeмо kompenzovati оно је prisutno u celokupnoј управљајукој petlji, te zbog тога kašnjenje i funkciji спрегнутог преноса мора бити najmanje $N + 1$.

¹⁷ Iz (11.37) lako сe може uočiti da su stepeni polinoma u brojcu i imeniku dobijenog reguliatora једнаки, i takav regulator је moguće realizovati. Međutim, da је funkcija спрегнутог преноса sistema modelovana sa kašnjenjem које је manje od $N + 1$ periodi, dobijeni regulator bi bio stepena većeg u brojcu u odnosu na stepen polinoma u imeniku, što ћи u implementaciji podrazumevao da upravljanje u текуćem trenutku zavisи od mecenja iz budućih trenutaka, односно не bi bilo moguće realizovati такав regulator.

algoritma na greške i nepreciznosti u modelovanju, što dovodi do oscilacija u upravljačkoj veličini, a dalje se propagira na neželjeno ponašanje izlaza procesa.

Zbog toga je *deadbeat* regulator zanimljiv više s teorijske tačke gledanja nego s praktične. Široku praktičnu primenu ovog regulatora sprečila je zapravo nemogućnost da se utiče na oblik i veličinu upravljačkog signala, odnosno isti oni nedostaci koji ograničavaju primenu svih regulatora kod kojih se pri projektovanju ne vodi računa o upravljačkom signatu. Na vrednost upravljačkog signala može se jedino uticati kroz izbor broja diskretnih trenutaka vremena u kojima želimo da izlaz sistema dode do konacne vrednosti i izbor perioda odabiranja. Međutim, kako je po definiciji pravi *deadbeat* regulator onaj koji u minutarnom broju diskretnih trenutaka vremena dode do konacne vrednosti, što je povezano isključivo s razlikom u broju polova i nula i kašnjenjem u sistemu kojim se upravlja, jedini nezavisni parametar u projektovanju je perioda odabirkovanja, pa ga treba pažljivo odabirati (ne zaboravite da od perioda odabirkovanja, preko digitalnog ekvivalenta sistema $G(z)$, zavisi funkcija prenosa regulatora).

Napomena 6. Interesantno je analizirati i zašto *deadbeat* regulator nema svoj kontinualni ekvivalent. Naime, budući da je karakteristični polinom sistema sa zatvorenom povratnom spregom $f(z) = z^k$ vidi se da su svi polovi sistema u zatvorenoj povratnoj spregi smešteni u koordinatni početak. Pandan ovom rasporedu polova bio bi kontinualni sistem kod koga se svih polovi nalaze na negativnom delu reale ose u beskonacnosti. Ako se ostvari po strani činjenica da se takav regulator ni teorijski ne može napraviti, izvesno je da bi mogao da se napravi regulator koji bi imao veoma velike negativne polove. Njegov odziv bi bio veoma brz, što znači da bi imao performansu koja odgovara *deadbeat* kontroloru. Međutim, takav kontinualni sistem bi imao i beskonačno, ili skoro beskonačno veliki propusni opseg, pa bi zbog nemogućnosti da otkloni poremećaje bio neprimerljiv.

Prema zakonitosti preslikavanja između s i z domena i *deadbeat* regulator ima maksimalni mogući propusni opseg u klasičnoj realizaciji, međutim, pri realizaciji diskretnih sistema, teorema odabiranja zahteva da se signal povratne spregе filtrira (anti-aliasing filter) pre nego što se dovede na odbirač. To zapravo znači da je do regulatora dolazio samo koristan signal.

ociješen od šuma merenja, pa širok propusni opseg ne narušava mogućnost praktične primene ovakvog regulatora.

Primer 11.2. Funkcija prenosa procesa u otvorenoj spregi je

$$G(s) = \frac{1}{1+10s} e^{-2s}. \quad (11.38)$$

Projektovati digitalni *deadbeat* regulator za upravljanje sistemom, ukoliko je $T = 1$ sekund.

Rešenje:

Digitalni ekvivalent koji podrazumeva digitalno-analogni konvertor u obliku kola zadiske nultog reda (ZOH) za posmatrani sistem je

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{e^{-2s}}{10s + 1}\right\} \\ &= \frac{1 - e^{-0.1}}{z - e^{-0.1}} z^{-2} \\ &= \frac{0.095z^{-3}}{1 - 0.904z^{-1}}. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Kako sistem u svojoj dinamici ima modelovano kašnjenje od 2 sekunde, odnosno 2 perioda odabiranja, i dodatnu periodu kašnjenja koja je posledica ZOH konvertora, predložena funkcija spregnutog prenosa sistema mora biti izabrana sa kašnjenjem $k \geq 3$ da bi regulator bilo moguće realizovati. Da bi se do željene vrednosti došlo u minutarnom broju koraka, odabранo je $k = 3$, odnosno $W(z) = z^{-3}$, pa dobijamo regulator oblike

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1 - 0.904z^{-1}}{0.095z^{-3}} \frac{z^{-3}}{1 - z^{-3}} \\ &= \frac{z^3 - 0.904z^2}{0.095(z^3 - 1)}. \end{aligned} \quad (11.40)$$

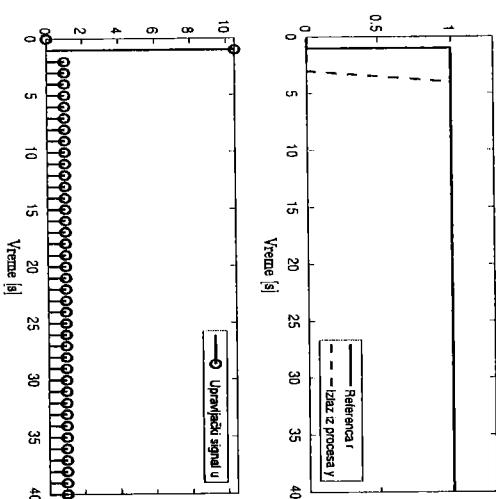
Rezultati numeričke simulacije prikazani su na slici 11.7, a programski kod za implementaciju digitalnog regulatora dat je u sklopu listinga 11.1.

```

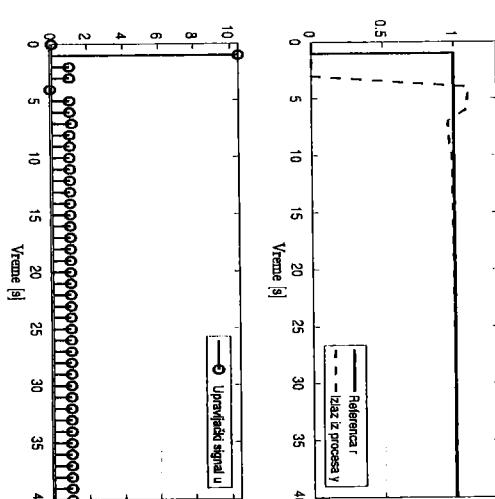
1 function u = deadbeat_fcn(r, y)
2
3 persistent up % u(k-1)
4 persistent up0 % u(k-2)
5 persistent uppp % u(k-3)
6 persistent ep % e(k-1)
7 % Inicijalizacija promenljivih
8
9 if isempty(up)
10    up=0
11 end
12 if isempty(upp)
13    uppp=0
14 end
15 if isempty(uppp)
16    uppp=0
17 end
18 if isempty(ep)
19    ep=0
20 end
21
22 e=r-y;
%Implementacija difference jednačine kojom se realizuje upravljanje
23 ue=((1-exp(-1/T0))*uppp+e-exp(-1/T0))*ep/(1-exp(-1/T0));
24
25 up=ue;
26 uppp=up;
27 up=u;
28 ep=ue;
29
30 end

```

Listing 11.1: MATLAB kod



Slika 11.7: Na gornjem dijagramu upoređeno je prikazano ponašanje izlaza iz sistema i željene vrednosti. Izlazi signal ulazi u ustrojstvo stanje bez preskoka, tj. njeno stanje bez preskoka, u trajanju broju koraka. Dnji dijagram prikazuje vrednost upravljačkog signala, odnosno izlaza iz regulatora, gde se može uočiti veliki skok amplitude signala (do vrednosti ≈ 10), a potom se vrednost skokovito smanjuje i ustabilila (iznosila je ≈ 1). Prikazani fenomeni tipični su za deadbeat regulator, u smislu idealnog ponašanja izlaza, ali i teško ostvarljivo upravljačkog signala velike amplitude u realnim uslovima.



Slika 11.8: Na slici su prikazani rezultati simulacije u slučaju kada postoji greška u modelu sistema, konkretno, stvarna vrednost vremenske konstante je 9, a pri projektovanju regulatora koristi se model sa procenjenom vrednošću 10. Može se uočiti preskok u izlaznom signalu i oscilatorno ponašanje. Za malo veće nesigurnosti i greške sistem bi postao nestabilan.

Da bi se analizirala robustnost predloženog algoritma, odnosno njegovo pojašnjanje kada su prisutne greške u modelovanju, regulator projektovan za go-re opisani sistem primjenjen je da reguliše proces opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-2s}$. Na taj način je pri modelovanju napravljena greška u estimaciji vrednosti vremenske konstante. Dobijeni rezultati prikazani su na slici 11.8.

U cilju delimičnog prevazilaženja nedostataka predloženog algoritma, a uz štovovanje nekih od njegovih prednosti, u nastavku će biti predložena modifikacija opisanog postupka, poznatija u literaturi kao Dalinov regulator.

11.3.2 Dalinov regulator

Dalinov regulator¹⁸ je dobro poznat postupak koji je prvi put predložen 1968. godine u [3], a temelji se na pretpostavljenu modelu dinamike funkcije spregnutog prenosa $W(z)$. U izvesnom smislu on sledi osnovnu ideju *deadbeat* regulatora. Pri tome, budući da *deadbeat* regulator može da ima izuzetno velike upravljačke signale, ovde se postavljaju blaži zahtevi, sa idejom da bi to moglo da doveđe i do smanjenja upravljanja. Pretpostavlja se da se željena dinamika može opisati modelom prvog reda sa vremenskim kašnjenjem i jediničnim statičkim pojačanjem, i da odziv sistema na jediničnu odskočnu funkciju bude aperiодичан, odnosno da važi

$$W(s) = \frac{1}{T_d s + 1} e^{-s\tau}. \quad (11.41)$$

Uz pretpostavku da je kašnjenje celobrojni umnožak perioda odabiranja, $\tau = NT$, digitalni ekvivalent pretpostavljene funkcije prenosa (11.41) je

$$W(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_d}} z^{-N}}{z - e^{-\frac{T}{T_d}}}, \quad (11.42)$$

gde je $a = e^{-\frac{T}{T_d}}$, a T_d vremenska konstanta odziva sistema u zatvorenoj sprezi. Uvrštavanjem izraza za funkciju prenosa procesa $G(z)$, kao i referentnog modela $W(z)$, dobijamo funkciju prenosa diskretnog regulatora

$$C(z) = \frac{1}{G(z) 1 - W(z)} = \frac{1 - e^{-T/T_d}}{\frac{1}{K} 1 - e^{-T/T_d} z - e^{-T/T_d} - (1 - e^{-T/T_d}) z^{-N}}. \quad (11.43)$$

Vremenska konstanta T_d je podesiv parametar kojim se reguliše brzina odziva sistema u zatvorenoj sprezi, a u literaturi se može naći preporuka

$$T_d l = (1.5 \div 2.5)\tau. \quad (11.44)$$

Primer 11.3. Funkcija prenosa procesa u otvorenoj sprezi je

$$G(s) = \frac{1}{1 + 10s} e^{-2s}. \quad (11.45)$$

Projektorati digitalni Dalinov regulator za upravljanje sistemom, ukoliko je $T = 1$ sekund.

¹⁸ Originalni naziv je *Dalitn's controller*, a u literaturi se pojavljuje i pod nazivom λ -tuning algoritam.

Rešenje:

Digitalni ekvivalent koji podrazumeva digitalno-analogni konvertor u obliku kola zadrške nultog reda za posmatrani proces je

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{e^{-2s}}{10s + 1} \right\} \\ &= \frac{1 - e^{-0.1}}{z - e^{-0.1}} z^{-2} \\ &= \frac{0.095z^{-3}}{1 - 0.904z^{-1}}. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Dinamiku sistema u zatvorenoj sprezi modelovaćemo sa vremenskom konstantom $T_d = 5$, $W(s) = \frac{1}{5s+1} e^{-2s}$, iz čega se dobija odgovarajuća diskretna funkcija prenosa

$$W(z) = \frac{(1 - e^{-1/5})}{z - e^{-1/5}} z^{-2}, \quad (11.47)$$

odakle sledi diskretni regulator oblika

$$C(z) = \frac{0.181z^3 - 0.164z^2}{0.095z^3 - 0.078z^2 - 0.017}. \quad (11.48)$$

Rezultati numeričke simulacije prikazani su na slici 11.9, a programski kod za implementaciju digitalnog regulatora u programskom paketu Matlab nalazi se u sklopu listinga 11.2.

```

1 function u = dahlin-fcn(r,y)
2
3 persistent up % u(k-1)
4 persistent upp % u(k-2)
5 persistent uppp % u(k-3)
6 persistent ep % e(k-1)
7
8 % Inicijalizacija promenljivih
9 if isempty(ep)
10    ep=0
11 end
12 if isempty(up)
13    up=0
14 end
15 if isempty(upp)
16    uppp=0
17 end
18 if isempty(ep)
19    ep=0

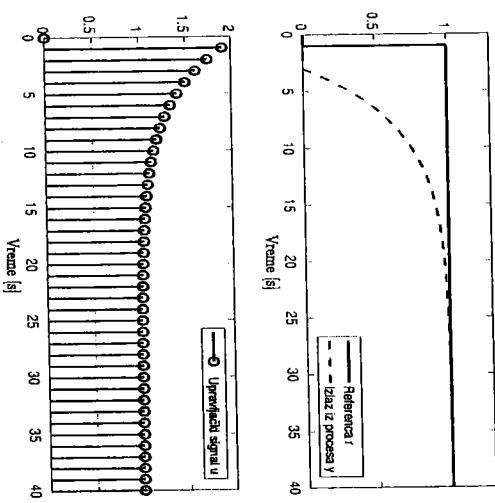
```

```

20 end
21
22 e=r-y;
23 % Implementacija diferencne jednačine zakona upravljanja
24 u=(exp(-1/5)*1-exp(-1/10)*upp+1-exp(-1/5))*(1-exp(-1/10));
25 -exp(-1/10)*(1-exp(-1/5))*epp)/(1-exp(-1/10));
26 upp=upp;
27 upp=upp;
28 upp=upp;
29 upp=upp;
30 upp=upp;
31 end

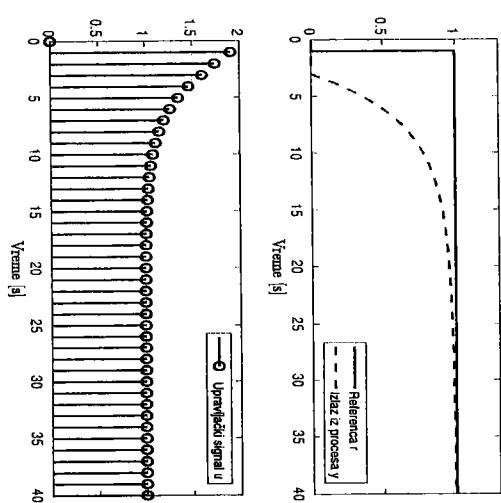
```

Listing 11.2: MATLAB kod



Slika 11.9: Na gornjem dijagramu upoređeno je prikazan izlaz iz sistema i reference, odnosno željena vrednost izlaza. Učestava se apertidno ponašanje izlaznog signala po dinamici koja je specificirana pri projektovanju regulatora. Vrednost upravljačkog signala koja je prikazana na donjem dijagramu znatno je manje

dijametra (trajevca vrednosti) od vrednosti izlaza iz procesa.

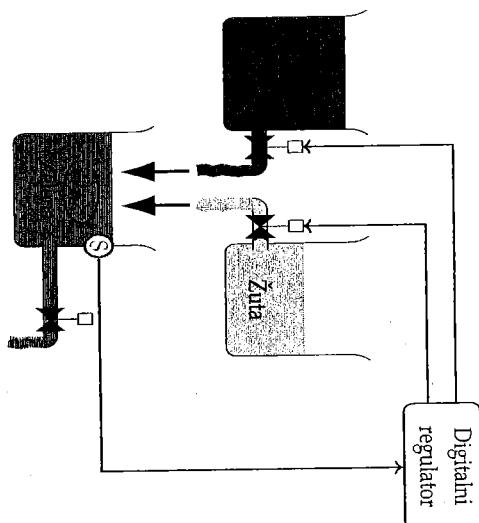


Slika 11.10: Na slici su prikazani rezultati simulacije u slučaju kada postoji greška u modelu sistema, a upravljanje je realizovano primenom Diskretnog regulatora. Može se uočiti da je ponasanje procesa mnogo privratljivije u smislu specifikiranih zahteva u odnosu na primenu *deadbeat* regulacije pri istom scenariju.

Napomena 7. Ovakva vrsta regulatora ima posebnu primenu u papirnoj, prehrambenoj i farmaceutskoj industriji, odnosno u onim pogonima hemijske industrije koji koriste smese s tačnim procenama sastojaka. U cilju pojašnjenja ove tvrdnje, upućujemo vas na primer 11.4 koji sledi.

Kao i u primjeru 11.6, regulator je projektovan na osnovu modela kod kog postoje nesigurnosti u viđu greske estimirane vrednosti vremenske konstante. Dobijeni rezultati numeričke simulacije pri takvom scenariju prikazani su na slici 11.10.

Primer 11.4. U proizvodnji boja postoje skladištene boje u rezervoarima iz palete osnovnih boja, dok se sve ostale nijanse boja koje su potrebne kupcima, prave kombinovanjem osnovnih boja. Svaka nijansa iz palete definisana je tačnim odnosom osnovne boje neophodnum za njeno nastajanje. Prepostavimo da je potrebno da napravimo nijansu zelene boje, koja nastaje kombinovanjem plave boje u procentu od 70% i žute boje u procentu 30%. Na raspolaganju su rezervoari sa plavom i žutom bojom čiji je izlazu protok moguće kontrolisati pomocić ventila, kao što je prikazano na slici 11.11. Boje se potom mešaju u rezervoatu, na čijem izlazu treba da se nađe boja željene nijanse, a uz to je potrebno voditi računa da imamo što manje otpada.



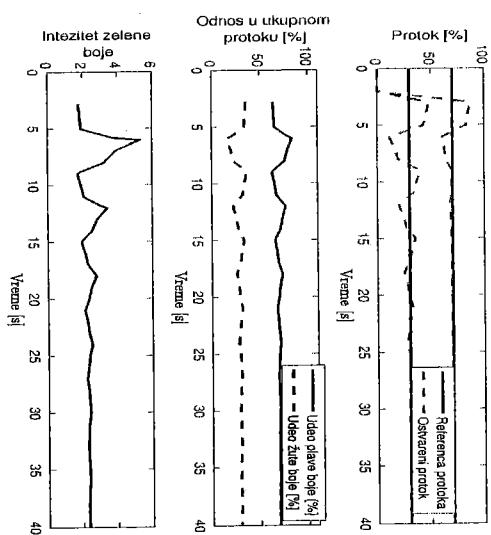
Slika 11.11: Mešanje osnovnih boja u cilju pravljenja boje željene nijanse.

Rješenje:

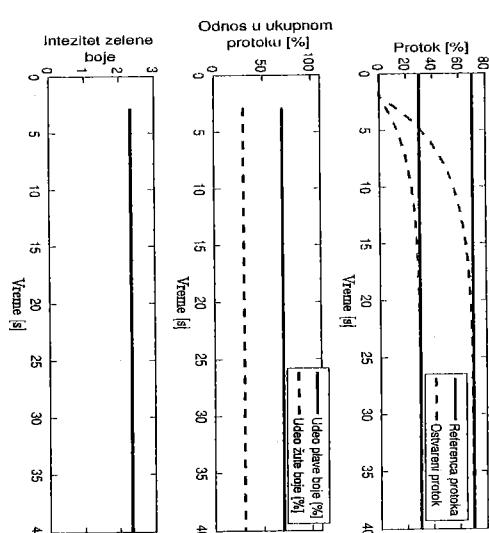
Ovakav problem moguće je rešiti formiranjem digitalne upravljačke petlje, koja će se sastojati iz digitalnog regulatora koji reguliše otvorenost ventila na izlazu rezervoara plave i žute boje, a poseđuje i informaciju o intenzitetu boje preko senzora S, kao što je naznačeno na slici 11.11.

Ukoliko bismo digitalni regulator realizovali uz pomoć PID upravljačkog algoritma, koji je projektovan da bude stabilan i ostvari željenu vrednost protoka bez greške u ustaljenom stanju, posle iščezavanja prelaznog režima ideo boja bio bi konstantan i na željenom nivou, ali za vreme prelaznog režima odnos boja bio bi promenljiv a dobijena mešavina neadekvatne nijanse. To se može uočiti na osnovu dobijenih rezultata numeričke simulacije koji su prikazani na slici 11.12. Vidi se da izlazni prototok željene boje u toku prelaznog režima, on nije konstantan. Isti zaključak možemo stecći i posmatranjem trećeg grafika, gde je odnos žute i plave boje promenljiv u vremenu i ustali se posle određenog vremena. To bi značilo da bi, do dostizanja ustaljenog stanja, prvih 35 sekundi, smesu trebalo odbaciti, i tek posle tog vremenskog trenutka smesa dobija željenu nijansu. Uz ovakav način regulacije prisutni su veliki gubici i on nije isplativ.

Nasuprot predloženom PID regulatoru, ukoliko se realizuje Dalinov upravljajući algoritam, dobijeni rezultati numeričke simulacije dobijeni uz primenu PID regulatora u procesu proizvodnje boje željene nijane.



Slika 11.12: Dobijeni rezultati numeričke simulacije dobijeni uz primenu PID regulatora u procesu proizvodnje boje željene nijane.



Slika 11.13: Dobijeni rezultati numeričke simulacije dobijeni uz primenu Dalinovog regulatora u procesu proizvodnje boje željene nijane.

vijački algoritam, tada se ponašanje sistema može videti na numeričkim simulacijama prikazanim na slici 11.13. Ovde se uočava monotono, aperiodično ponašanje izlaznog protoka rezervoara. Udeo obe boje u ukupnoj masi, kao i rujana dobijene zelene boje su konstantni tokom vremena što se jasno vidi na drugom i trećem grafiku.

11.4 Problemi

Problem 11.1. Sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{3}{s+5} e^{-0.2s}.$$

Projektovati Dalinov regulator za dati sistem ukoliko je perioda odabiranja $T = 0.1$ sekunda.

Problem 11.2. Sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s+3} e^{-0.4s}.$$

Projektovati deadbeat regulator za dati sistem ukoliko je perioda odabiranja $T = 0.1$ sekunda.

Problem 11.3. Sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{10}{2s+1} e^{-0.4s}.$$

1. Projektovati deadbeat regulator za dati sistem ukoliko je perioda odabirajuća $T = 0.2$ sekunde.
2. Formirati diferenciju jednačinu za implementaciju regulatora.

Problem 11.4. Farmakokinetički model je matematički model koji daje zavisnost između „ulaznih“ podataka o leku (primjerena doza leka ili režim doziranja) i „izlaznih“ podataka (koncentracija ili efekat leka) u funkciji vremena. Modeluje proces koncentracije bilo kojeg leka u plazmi i drugim tkivima ljudskog tijela tokom vremena. Farmakokinetički model za većinu lekova se može

opisati kao sistem sa opadajućim eksponentijalnim ponašanjem i aproksimirati funkcijom prenosa prvog reda, koja za određen, partikularan slučaj ima oblik

$$G(s) = \frac{2}{s+2}.$$

Postoji kašnjenje između primanja doze leka i njegove interakcije sa krvnom plazmom, koje se može modelovati kao vremensko kašnjenje i za posmatrani proces iznosi 0.1 sekundu.

Projektovati regulator koji će omogućiti konstantnu željenu koncentraciju leka u krvi (ne smije se dozvoliti preskok i ili oscilacije u doziranju i koncentraciji leka). Regulator se implementira na digitalnom uređaju koji radi sa taktom od $T = 0.05$ sekundi.

Optimalno upravljanje diskretnim dinamičkim sistemima

Nameru nam je da u okviru ovog poglavlja izložimo osnove dinamičke optimizacije i optimalnog upravljanja **diskretnim** dinamičkim sistemima, kojima je i posvećen ovaj udžbenik. Važno je istaći da ćemo se u nastavku baviti projektovanjem upravljačkih algoritama za sisteme diskrete dinamike, a ne praktičnom realizacijom kontinualnih optimalnih upravljačkih algoritama na digitalnum upravljačkim uređajima.¹ Inspiracija za koncipiranje ovog poglavlja pronađena je u [34, 35]², a teorija diskretnih optimalnih sistema detaljno je obrađena u [36, 37, 38, 39] što nam je poslužilo kao referenca u ovom poglavlju.

Prepostavljajući da su čitaoци barem informativno upoznati sa teorijom varijacionog računa, dinamičke optimizacije i optimalnog upravljanja za sisteme kontinualne dinamike, tím redom ćemo izložiti i ekvivalentnu teoriju sistema sa diskretnom dinamikom.

U nastavku teksta pokušaćemo, ako je to formalno moguće, da prvo razmotrimo jednodimenzione probleme pa da ih uopšimo na slučaj kada kriterijum optimalnosti zavisi od više promenljivih, verujući da će na taj način tekst biti jednostavniji za praćenje.

1.2.1 Varijacioni račun za sisteme diskrete dinamike, potrebni uslovi ekstrema

Osnovni zadatak varijacionog računa kod diskretnih sistema jeste određivanje vrednosti funkcije (odnosno sekvence brojeva) u diskretnim vremenskim tre-

¹ Ova zanimljiva oblast diskretnih zaciјe kontinualnih upravljačkih algoritama je predstavljena je u okviru posebnog poglavlja ovog udžbenika.

² Akademik Božidar D. Vujanović 1930-2014, bio je redovni profesor Univerziteta u Novom Sadu, prvi profesor je inženjerskih kurseva optimizacije na Univerzitetu u Novom Sadu i nautički pokretna grupacija za automatiku na Fakultetu tehničkih nauka.

vremenskim trenucima $x^*(k)$, koja kriterijumu optimalnosti I saopštava ekstremnu vrednost³

$$I(x(k)) = I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} F(x(k), x(k+1), k) \quad (12.1)$$

gdje vrednosti izraza pod znakom sume očigledno pozajmimo samo u diskretnim vremenskim trenucima $k = k_0, k_1, k_2, \dots, k_f-1$ i k_f , a sa k_f je obeležen finalni vremenski trenutak.

Bez gubitka na opštosti smatraćemo da je ponašanje sistema u početnom vremenskom trenutku pozнато i zadato $x(k_0) = x_0$, a ponašanje sistema u finalnom vremenskom trenutku $x(k_f)$ može biti predmet naše optimizacije, što ćemo i ilustrovati u nastavku poglavlja.

U teoriji kontinualnih sistema, varijacija funkcije uvodi se kao infinitezimalna promena funkcije i njenu izvoda, bez promene nezavisne promenljive t . Slično tome, uvodimo i pojam varijacije funkcije u diskretnom slučaju, koja se matematički opisuje na sledeći način

$$\delta x(k) = x(k) - x^*(k) = \epsilon \Phi(k) \quad (12.2)$$

$$\delta x(k+1) = x(k+1) - x^*(k+1) = \epsilon \Phi(k+1), \quad (12.3)$$

gde je sa δx obeležena varijacija funkcije, ekstremala je obeležena sa zvezdicom x^* , a promenjena, neoptimalna, varirana funkcija samo sa x . Φ je proizvoljna funkcija, a infinitezimalnost razlike naglašava se sa ϵ , kom čemo dopustiti da teži nulli.

Iz poređenja optimalnog i variranog funkcionala (12.1)

$$\begin{aligned} I(x) - I(x^*) &= I - I^* \\ &= \sum_{k=k_0}^{k_f-1} F(x^*(k) + \delta x(k), x^*(k+1) + \delta x(k+1), k) \\ &\quad - \sum_{k=k_0}^{k_f-1} F(x^*(k), x^*(k+1), k) \end{aligned} \quad (12.4)$$

³ Funkcija $x^*(k)$ naziva se i ekstremala.

⁴ U pronaalaženju potrebnih uslova ekstrema, organizili smo se na slučaj kada je vremenski interval u kojem se odvija proces $k \in [k_0, k_f]$ poznat i zadat. Problemi kod kojih vremenski interval nije poznat spadaju u takvom kategoriju. Više o takvom pristupu za kontinualne sisteme zainteresovani čitalac može naći u [35].

⁵ Radi popunosti, u komentaru ovog teksta, izvršeno potrebne uslove ekstrema. Razvojem u red neoptimalne vrednosti funkcionala u okolini njene optimalne vrednosti dobijamo:

$$\begin{aligned} F(x(k), x(k+1), k) &\approx F(x^*(k), x^*(k+1), k) + \\ &+ \frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} (x(k) - x^*(k)) + \\ &+ \frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k+1)} (x(k+1) - x^*(k+1)) \end{aligned}$$

+ članovi višeg reda.

Sa ovom aproksimacijom izraz (12.4) postaje

$$\begin{aligned} I - I^* &= \epsilon \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} \Phi(k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k+1)} \Phi(k+1) \right]. \end{aligned}$$

kriterijuma optimalnosti (12.1) i glasi

$$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} \delta x(k) + \frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k+1)} \delta x(k+1) \right]. \quad (12.5)$$

Iraz (12.5) predstavlja potreban uslov ekstrema, ali da bi imao upotrebu vrednost u inženjerskim aplikacijama, moramo ga transformisati u jedinstven izraz gde su oba člana sume vezana varijacijom u trenutku k , odnosno $\delta x(k)$. Tako sređeni izraz pod sumom naziva se diskretna Ojler-Lagranževa⁶ jednačina i u studiji optimizacije sistema sa diskretnom dinamikom ima centralnu ulogu.

⁶ Engl. Euler-Lagrange, jednačina sa primenom u mehanici postavili su zajedno Ojler i Lagranž, 1750. godine. Primena u variacionom računu vezuje se za Ojlera i 1766.

12.2 Ojler-Lagranževa jednačina za diskrete dinamičke sisteme

U okviru ovog poglavlja, cilj nam je dođemo do konačnog izraza za diskretnu Ojler-Lagranževu jednačinu, a posebnu pažnju posvetitićemo granučnim uslovima, koji prate rešavanje jednačina ovog tipa. Izvođenje koje sledi je možda suriše detaljno, ali prema našem mišljenju neophodno u ovom delu teksta. Počećemo ponovo od potrebnog uslova ekstrema (12.5)

$$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} \delta x(k) + \frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k+1)} \delta x(k+1) \right] = 0. \quad (12.6)$$

Da bismo izraz (12.6) svežili na zajedničku varijaciju $\delta x(k)$, uvešćemo privremenu smenu $k+1 = m$, tako da drugi član izraza pod sumom postaje

$$\sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} \delta x(k+1) \xrightarrow[m=k+1]{m=k_0+1} \sum_{m=k_0+1}^{k_f} \frac{\partial F(x^*(m-1), x^*(m), m-1)}{\partial x^*(m)} \delta x(m). \quad (12.7)$$

Očigledno je, da bismo ovu smenu (12.7) iskoristili i vratili pod znak sume u zvazu u red, kod kojeg je ϵ neparogen stepen, mora biti izjednačen

može se pokazati da prvi član razvoja u Tejlorov red desne strane jednačine (12.4) predstavlja potreban uslov ekstrema⁵. Ovaj uslov naziva se prva varijacija

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_f} \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \delta x(k) = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \delta x(k) -$$

$$-\left. \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right|_{k=k_0} + \left. \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right|_{k=k_f}$$

$$\left. \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right|_{k=k_f} = 0. \quad (12.12)$$

Konačno, korишćenjem transformacije (12.8), izraz (12.6) postaje

$$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} + \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right] \delta x(k) +$$

$$+ \left. \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right|_{k=k_0} = 0. \quad (12.9)$$

Očigledno je da će za proizvoljnu vrednost varijacije $\delta x(k)$, izraz pod znakom sume biti jednak nuli samo ako je

$$\frac{\partial F(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} + \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} = 0. \quad (12.10)$$

Jednačina (12.10) zove se Ojler-Lagranževa diferencija jednačina, koju ekstremala $x^*(k)$ treba da zadovolji. Kao i uvek u dinamičkoj optimizaciji, kritično je izračunavanje graničnih uslova, koji određuju početnu i krajnju vrednost ekstremale. Za izračunavanje graničnih uslova oslončimo se na izraz koji se nalazi izvan sume, a koji takođe mora da bude jednak nuli. U pretpostavkama, koje smo usvojili na početku ovog pogлављa smatrali smo da je vrednost funkcije u početnom trenutku poznata i zadata $x(k_0) = x_0$ što znači da je varijacija u početnom trenutku jednaka nuli, odnosno $\delta x(k_0) = 0$, pa je preostalo da se ispiša vrednost izraza

$$\left. \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right|_{k=k_f} = 0. \quad (12.11)$$

Dalje su moguća dva slučaja: prvi ako je vrednost u finalnom vremenskom trenutku poznata i zadata $x(k_f) = x_f$, tada je i varijacija u tom trenutku jednak nuli $\delta x(k_f) = 0$, pa se ovi, unapred zadati početni i krajnji uslovi, koriste

za rešavanje Ojler-Lagranževe diferencne jednačine. Drugi slučaj je mnogo ranije, kada vrednost u finalnom vremenskom trenutku $x(k_f)$ nije poznata i zadata, pa se nedostajući granični uslov dobija iz same optimizacione procedure kao

$$\left. \frac{\partial F(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right|_{k=k_f} = 0. \quad (12.12)$$

Uslov (12.12) naziva se i *prirodni granični uslov ili uslov transverzalnosti*.

Uopštenje optimizacionog problema na slučaj više promenljivih je prirodno i neće ćemo izložiti u paragrafu koji sledi.

12.2.1 Funkcional zavisi od više promenljivih

Pretpostavimo uopštenje kriterijuma optimalnosti (12.1) na slučaj više promenljivih

$$I(\mathbf{x}(k)) = I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} F(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), k) \quad (12.13)$$

gde je sa $\mathbf{x}(k)$ obeležen vektor stanja dimenzije n .

Iz potrebnog uslova ekstrema, da je prva varijacija jednak nuli, dobijamo

$$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\left(\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{x}^*(k+1), k)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \right)^T \delta \mathbf{x}(k) + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{x}^*(k+1), k)}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} \right)^T \delta \mathbf{x}(k+1) \right] = 0. \quad (12.14)$$

Pretpostavili smo da je vrednost vektora stanja u početnom trenutku zadata i poznata $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$. Napominjemo da smo u prethodnom izrazu, kao i u izrazu koji sledi, gradijent funkcije po vektoru stanja \mathbf{x} obeležavali sa $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$. Iako se ova notacija razlikuje od dosadašnje, smatramo da će njenom upotrebom izlaganja koja slede biti kompaktnej i lakša za praćenje.

Svođenje na zajedničko $\delta \mathbf{x}(k)$ sprovodi se na identičan način kao u prethodnom paragrafu i lako dobijamo

$$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{x}^*(k+1), k)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} + \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \right]^T \delta \mathbf{x}(k) + \\ + \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)}^T \delta \mathbf{x}(k) \Big|_{k=k_0}^{k=k_f} = 0. \quad (12.15)$$

Pošto je vrednost vektora stanja u početnom trenutku specificirana, sledi da je $\delta \mathbf{x}(k_0) = 0$, pa se potrebbni uslovi dobijaju kao sistem Ojler-Lagranževih diferencnih jednačina

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{x}^*(k+1), k)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} + \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} = 0. \quad (12.16)$$

Ovaj sistem diferencnih jednačina rešava se uz zadate početne uslove i prirodne granične uslove

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \Big|_{k=k_f} = 0. \quad (12.17)$$

U inženjerskoj praksi interesantan je slučaj kada se kriterijun optiminalnosti proširi dodatnim članom, koji nas bolje usmerava ka željenoj vrednosti u finalnom vremenskom trenutku. Ovaj problem naziva se Bolčin⁷ problem i razmatraćemo ga u nastavku teksta.

12.2.2 Boltin problem i njegovo rešenje

Proširito kriterijum optimalnosti članom ispred sume, koji zavisi od nepozнате vrednosti u finalnom vremenskom trenutku

$$I(\mathbf{x}(k)) = I = \Psi\left(\mathbf{x}(k_f), k_f\right) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} F(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), k). \quad (12.18)$$

U ovom slučaju pretpostavili smo da je specificirana vrednost vektora stanja u početnom trenutku $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$.

Potrebbni uslovi ekstrema naravno se dobijaju iz uslova da je prva varijacija kriterijuma optiminalnosti (12.18) jednaka nuli. Treba primetiti da je uobičajena varijacija izraza pod znakom sume⁸, proširena i varijacijom Bolčinog člana zbog nespecificirane vrednosti vektora stanja $\mathbf{x}(k_f)$ u finalnom vremenskom trenutku.

$$\delta I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{x}^*(k+1), k)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} + \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \right]^T \delta \mathbf{x}(k) + \\ + \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)}^T \delta \mathbf{x}(k) \Big|_{k=k_0}^{k=k_f} + \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}^*(k_f), k_f)}{\partial \mathbf{x}^*(k_f)}^T \delta \mathbf{x}(k_f) = 0. \quad (12.19)$$

Prateći način razmišljanja iz prethodnih poglavija, potrebne uslove ekstrema dobijamo kao sistem Ojler-Lagranževih jednačina, istovetan sa (12.16), koji ponavljamo zbog kompletnosti poglavija

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{x}^*(k+1), k)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} + \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} = 0. \quad (12.20)$$

Prirodne granične uslove očekivano dobijamo u složenijoj formi

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^*(k-1), \mathbf{x}^*(k), k-1)}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \Big|_{k=k_f} + \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}^*(k_f), k_f)}{\partial \mathbf{x}^*(k_f)} = 0. \quad (12.21)$$

Ponovo podsećamo da je zbog zadatih početnih uslova varijacija funkcije u početnom trenutku nula, $\delta \mathbf{x}(k_0) = 0$.

Da bismo ilustrovali teoriju izmetu u okviru ovog poglavija, poslužićeemo se jednostavnim primerom, koji se često sreće u literaturi [37, 38, 39]

Primer 12.1.

Diskretni kriterijum optimalnosti dat je u sledećem obliku

$$I(\mathbf{x}(k)) = I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} [x(k)x(k+1) + x^2(k)], \quad (12.22)$$

⁸Ovo izvođenje identično je kao i prethodnom paragatu i nećemo ga ponavljati.

Za izvođenje Ojler-Lagranževe jednačine neophodno je jasno identifikovati sledeće vrednosti izraza pod znakom sume

$$\begin{aligned} \bar{F}(x(k), x(k+1), k) &= x(k)x(k+1) + x^2(k) \\ F(x(k-1), x(k), k-1) &= x(k-1)x(k) + x^2(k-1) \end{aligned}$$

Iz (12.16) zaista lako se dobija Ojler-Lagranževa jednačina u sledećoj formi

$$x(k+1) + 2x(k) + x(k-1) = 0$$

ili u preglednijoj formi

$$x(k+2) + 2x(k+1) + x(k) = 0.$$

Rešavanje poslednje diferencijalne jednačine drugog reda, uz granicne uslove $x(0) = 2$ i $x(10) = 5$, ne mora biti jednostavno i ostavljamo ga čitaocima za vežbu

$$x(k) = 2(-1)^k + 0.3k(-1)^k.$$

U nastavku teksta usredotočimo se na probleme optimalnog upravljanja za diskretne dinamičke sisteme. U prvom delu razmatraćemo teoriju optimalnog upravljanja baziranu na Pontriaginovom principu maksimuma u opštem, nelinearnom, slučaju. Potom ćemo se fokusirati na teoriju linearnih sistema, koji mogu da obezbede optimalno upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi.

12.3 Optimalno upravljanje, uvodne napomene

U teoriji optimalnog upravljanja, jasto su se izdvojile dve najznačajnije teorije: princip maksimuma Lava Semjonovića Pontriaginja i teorija dinamičkog programiranja Ricardada Belmana.¹⁰ Obe teorije javno su publikovane gotovo istovremeno pedesetih godina prošlog veka, a sa stanovišta teorije upravljanja imaju jednu sastinsku razliku. Naime, teorija Pontriaginja obezbeđuje optimalno upravljanje u otvorenoj povratnoj sprezi $u_{opt} = u_{opt}(t)$, a Belmanova teorija

daje optimalno upravljanje, kao funkciju koordinata vektora stanja, odnosno u zatvorenoj povratnoj sprezi $u_{opt} = u_{opt}(t, x)$.

Izračunavanje strategije optimalnog upravljanja može biti skopčano sa ne-preostavivim teškoćama. U primeni Pontriaginove teorije potrebno je rešiti sistem jednačina, koji se opisuje kao dvotakasti grančni problem,¹² što u slučaju nelinearnih problema, a posebno visoke dimenzionalnosti nije uvek moguće. Međutim, iznalaženje rešenja u formi povratne sprege, a u dušu Belmanove teorije značajno je teže, jer je u opštem slučaju potrebljivo rešiti Hamilton-Jakobi-Belmanovu¹³ parcijsku diferencijalnu jednačinu (odносно u diskretnom slučaju parcijsku diferenciju jednačinu), kod koje su problemi nelinearnosti i dimenzionalnosti¹⁴ posebno naglašeni. Ukoliko možemo da primetimo, ključni doprinos teorije Pontriaginja je u studiji problema gde su komponente vektora upravljanja pritisnute algebarskim ograničenjima, dok je rešavanje tih problema teorijom dinamičkog programiranja, koja bi dovela do izvezasih singularita, tetra veoma složeno i često nije moguće. U nastavku teksta, usredotočimo se na modifikaciju teorije Pontriagina za primenu kod sistema, koji se opisuju diferenčnim jednačinama, a posebnu pažnju posvetićemo linearnim diskretnim sistemima¹⁵, sa kvadratnim kriterijumom optimalnosti¹⁶, kod kojih se i primenom Pontriaginove teorije može obezbediti upravljanje u željenoj zatvorenoj sprezi.

12.3.1 Princip maksimuma primenjen na diskrete dinamičke sisteme

Za proces, koji je opisan sistemom diferencijalnih jednačina

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad (12.23)$$

gde su $x(k)$ i $u(k)$ vektori stanja i upravljanja u trenutku k . Možemo pretpostaviti da su ovi vektori dimenzija n i m , respektivno, bez ograničenja na međusobnu dimenzionalnost. Pretpostavljamo da je ponašanje sistema u početnom trenutku specifitirano $x(k_0) = x_0$.

Cilj nam je da odredimo optimalnu strategiju upravljanja u diskretnim vremenskim trenucima $u_{opt} = u_{opt}(k)$, koja kriterijumu optimalnosti

¹⁰ U kontinuelanom slučaju kaže se, integraliti sistem diferencijalnih jednačina.

¹² Engl. Two Point Boundary Value Problem – TPBP.

¹³ Engl. Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

¹⁴ prokletstvo dimenzionalnosti ili engl. curse of dimensionality.

¹⁵ Лев Семёнович Понtryагин (1908-1988), ruski matematičar, tvorac teorije principa maksimuma, jedne od dve najznačajnije teorije optimalnog upravljanja. Čitanica preporučljeno rad [42], koji će ih uvesti u buran razvoj teorije optimalnog upravljanja u vreme hladnotatarske krize. Pontriagin je posle nestrengog dogadaja ja ostao slep u svojoj četrnaestoj godini. Građavo je udo tako što mu je mafija bez formalnog matematičkog znanja, čitala, dok mu je matematičke simbole opisalo prenosila.

¹⁶ Engl. LQR Linear-quadratic Regulator.

¹⁷ Sustinski posmatrato, ovim sistemima posvećena je i celo ova knjiga

¹⁸ Engl. LQR Linear-quadratic Regulator.

¹⁰ Engl. Richard Ernest Bellman, (1920-1984), američki primenjeni matematičar, sa ogromnim doprinosom teoriji optimizacije i upravljanja. Najprestižnija nagrada iz oblasti automatske nosi njegovo ime. Lepo je primetiti da su dobitnici ove nagrade i Elihu Lury Rudolf E. Kalman naučnici koji se često spominju u ovom tekstu, ali profesi Petar V. Kokotović, Dragoslav D. Šljukić, Miroslav Krstić sa velikim značajem, kako u Americi tako i u Srbiji.

$$I = \Psi(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} F(x(k), u(k), k), \quad (12.24)$$

sapštava minimalnu vrednost.¹⁷

Prateći formalizam karakterističan za teoriju optimalnog upravljanja kontinualnim sistemima, uz pomoć Lagranževih množitelja uvešemo ograničenja (12.23) u kriterijum optimalnosti (12.24) i dobiti prošireni kriterijum optimalnosti u sledećem obliku

$$\tilde{I} = \Psi(\mathbf{x}(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[F(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) - \lambda^T(k+1)[\mathbf{x}(k+1) - f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)] \right], \quad (12.25)$$

gde je sa λ obeležen vektor Lagranževih množitelja, a trenutak $(k+1)$ izabran je radi lakše matematičke manipulacije u nastavku tečsta.

U duhu teorije Pontrjagina definišemo Hamiltonovu¹⁸ funkciju ili Hamiltonian kao

$$H(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k) = F(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) + \lambda^T(k+1)f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k), \quad (12.26)$$

te sada prošireni kriterijum optimalnosti (12.25) možemo zapisati na sledeći način¹⁹

$$\tilde{I} = \Psi(\mathbf{x}(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[H(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k) - \lambda^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) \right]. \quad (12.27)$$

Iz prethodnog poglavља, jasno je da se potrebeni uslov ekstrema sada dobija iz uslova da je prva varijacija kriterijuma (12.27) jednaka nuli, odnosno,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{I} &= \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}(k_f), k_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)}^T \delta \mathbf{x}(k_f) + \lambda^T(k_0) \delta \mathbf{x}(k_0) + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}(k)} - \lambda(k) \right]^T \delta \mathbf{x}(k) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)}^T \delta \mathbf{u}(k) + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} - \mathbf{x}(k+1) \right]^T \delta \lambda(k+1) = 0. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Uzimajući u obzir proizvoljnu vrednost varijacija, potrebni uslovi ekstrema dobijaju se kada se izrazi u srednjim zagradama izjednače sa nulom, kao

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)}, \quad (12.31)$$

što opisuje promenu vektora stanja sistema,²⁰ odnosno sa,

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}(k)}, \quad (12.32)$$

što opisuje promenu vrednosti Lagranževog množitelja. Ovaj upareni sistem jednačina (12.31) i (12.32) nadopunjuje i uslov minimizacije Hamiltonove funkcije, da je prvi izvod po upravljanju jednako nuli²¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)} &= 0, \\ &+ \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)}^T \delta \mathbf{u}(k) + \left(\frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} - \mathbf{x}(k+1) \right)^T \delta \lambda(k+1) = 0, \end{aligned} \quad (12.33)$$

glede zbog pregleđnosti vrednost Hamiltonove funkcije u trenutku k , odnosno, $H(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k)$ obeležena skraćeno sa $H(k)$.

Iz izraza pod znakom sume (12.28) lako je primetiti da je za izračunavanje potrebnih uslova ekstrema, neophodno izjednačiti varijacije po promenljivima stanja²², odnosno

¹⁷ Odnosno ekstremnu vrednost, minimalnu ili maksimalnu. Formalizaciju „minimalnu vrednost u daljem tekstu koristimo kao sinonim za ekstremnu vrednost.“

$$\begin{aligned} - \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \lambda^T(k+1) \delta \mathbf{x}(k+1) &= -\lambda^T(k_f) \delta \mathbf{x}(k_f) + \lambda^T(k_0) \delta \mathbf{x}(k_0) - \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \lambda^T(k) \delta \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (12.29)$$

Uvrštavanjem smene (12.29) izraz (12.28) postaje

$$\begin{aligned} \delta \tilde{I} &= \left[\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}(k_f), k_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)} - \lambda(k_f) \right]^T \delta \mathbf{x}(k_f) + \lambda^T(k_0) \delta \mathbf{x}(k_0) + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}(k)} - \lambda(k) \right]^T \delta \mathbf{x}(k) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)}^T \delta \mathbf{u}(k) + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} - \mathbf{x}(k+1) \right]^T \delta \lambda(k+1) = 0. \end{aligned} \quad (12.30)$$

¹⁸ Struktura izraza za proširenju kriterijuma optimalnosti namenjena je definisanju Hamiltonijanom i njegovom frakčkom interpretacijom u analitičkoj mehanici i razlikuju se od slobodne forme kojom se ograničenja tipa jednakosti uvedu u kriterijum optimalnosti u teoriji neelinearnog programiranja.

¹⁹ Činjenica da se optimalna strategija upravljanja dobija direktnom minimizacijom Hamiltonove funkcije predstavlja ključnu deo Pontrjaginove teorije. U razmatranju slučaju, kada upravljanje ne može biti rastavljeno na neograničenja tipa nejednakosti, rešenje očigledno tražimo na mestu, gde je prvi izvod jednak nuli. Međutim, ako upravljanje trepi dodatna ograničenja, rešenje, kao što je uobičajeno u teoriji optimizacije, tražimo iz Hamiltonijana za granične vrednosti upravljanja. Kolokvijalno se može reći da je rešenje ili na mestu nule prve izvoda ili na granici.

²⁰ Postupak je identičan, kao i kod izvođenja Euler-Lagranževe diferencije jednacine, čak i malo jednostavniji.

²¹ Ako bi bila poznata, tada bi odgovarajuća varijacija u finalnom trenutku vremena bila jednaka nuli.

²² Ako je rešenje ili na mestu nule prve izvoda ili na granici.

na granične uslove uz koje se rešava sistem jednačina (12.31)-(12.33). Naime, uslove ispred znaka sume možemo posmatrati na sledeći način, varijacija u početnom trenutku je jednaka nuli, $\delta(k_0) = 0$, jer smo u samoj postavci problema pretpostavili da je vrednost u početnom trenutku specifikirana $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$. Međutim, u finalnom vremenskom trenutku vrednost funkcije nije poznata²³, što

znači da je vrednost $\delta(k_f)$ proizvoljna, odnosno da bi se ispunili potrebni uslovi ekstrema, izraz u zagradi uz $\delta(k_f)$ mora biti jednak nuli

$$\frac{\partial \Psi(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)} - \lambda(k_f) = 0 \quad (12.34)$$

Ovaj uslov, koji je dobio sam optimizacionom studijom, a nije nametnut u postavci problema, nazivamo i prirodnim graničnim uslov.

Konačno, sistem jednačina (12.31)-(12.33) rešavamo uz sledeće granične uslove

$$x(k_0) = x_0, \quad (12.35)$$

$$\lambda(k_f) = \frac{\partial \Psi(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)}. \quad (12.36)$$

Implicitna forma sistema jednačina (12.31)-(12.33), na prvi pogled ne ukazuje na mogući način rešavanja i sigurno se ne povezuje u logičku celinu sa graničnim uslovima (12.35), (12.36), koji upućuju na dvostrukosti graničnih problema. Da bismo ovo pojasnili, iskoristimo definiciju Hamiltonijana (12.26), da jednačine (12.31)-(12.33) prikazemo u njihovom razvijenom obliku

$$x(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} = f(x(k), u(k), k), \quad (12.37)$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = \frac{\partial F(k)}{\partial x(k)} + \left(\frac{\partial f(k)}{\partial x(k)} \right)^T \lambda(k+1), \quad (12.38)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = \frac{\partial F(k)}{\partial u(k)} + \left(\frac{\partial f(k)}{\partial u(k)} \right)^T \lambda(k+1) = 0. \quad (12.39)$$

Logičan način da se započne rešavanje sistema jednačina (12.37)-(12.39) jeste

da se poslednja jednačina (12.39) uvrsti u prvu (12.37), a zatim da jednovremeno rešavamo diferencne jednačine po promjenljivima stanja i Lagranževim množiteljima. Vажно je primetiti da rešavanje jednačine stanja počinje iz poznog početnog trenutka (12.35), dok rešavanje²⁴ jednačina koje opisuju promenu Lagranževih množitelja ide retrogradno, na šta nedvosmisleno ukazuje i prorodni granični uslov (12.36).

Jednačine (12.37)-(12.39) uz granične uslove (12.35) i (12.36) imaju centralnu ulogu u rešavanju problema optimalnog upravljanja. Ovaj sistem jednačina se zbog analogije sa analitičkom mehanikom naziva i kanonski sistem jednačina, a promenljive se po istoj analogiji nazivaju promenljive stanja, dok se za Lagranževe množitelje često kaže i generalisani impuls²⁵.

Primer 12.2.

Dinamika procesa opisana je diferencnom jednačinom

$$x(k+1) = x(k) + \alpha u(k) \quad (12.40)$$

gde je α konstanta, a poznate su vrednosti i u početnom $x(0) = 1$ i u krajnjem trenutku $x(10) = 0$.

Cilj nam je da odredimo optimalnu strategiju upravljanja i optimalno kreće u prostoru stanja, tako da je kriterijum optimalnosti

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 u^2(k) \quad (12.41)$$

u minimumu.

Prateći formalizam iz prethodnog poglavlja, prvi korak je da formiramo Hamiltonovu funkciju (12.26)

$$H = \frac{1}{2} u^2(k) + \lambda(k+1)(x(k) + \alpha u(k)), \quad (12.42)$$

a zatim i kanonski sistem jednačina (12.37)-(12.39)

$$x(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} = x(k) + \alpha u(k), \quad (12.43)$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = \lambda(k+1), \quad (12.44)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = u(k) + \alpha \lambda(k+1). \quad (12.45)$$

Rešavanjem poslednja dva sistema jednačina (12.44) i (12.45), lako dobijamo $\lambda(k) = \text{const} = c$, odnosno $u(k) = -\alpha c$. Sada kretanje u prostoru stanja (12.43) postaje $x(k+1) = x(k) - \alpha^2 c$.

²⁴ U slučaju kontinualne dinamike sistema upravljanja, uobičajeno je reči integracija sistema jednačina, a u slučaju sistema diskretnog, namike opredelili smo se za legičan termin rešavanje sistema jednačina.

²⁵ Termen generalisani impuls u više vreme vezan je za još optične Lagranževe množitelje [43], ali većeno da čitaci neće biti u zabuni.

Kretanje u prostoru stanja može se zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned}x(1) &= x(0) - \alpha^2 c \\x(2) &= x(1) - \alpha^2 c = x(0) - 2\alpha^2 c \\x(3) &= x(2) - \alpha^2 c = x(0) - 3 - \alpha^2 c \\&\vdots \\x(k) &= x(0) - k\alpha^2 c.\end{aligned}$$

Iz uslova datis tekstom zadatka $x(0) = 1$ i $x(10) = 0$, dobijamo da je optimalna strategija upravljanja $u^*(k) = -1/10\alpha$, a optimalno kretanje u prostoru stanja $x^*(k) = 1 - k/10$.²⁶

Citacima za vežbu ostavljano da diferencne jednačine reše primenom 3 transformacije.

U nastavku uopšćeno razmatrani primer na višedimenzionalni, linearni, vremenski promjenjivi diskretni sistem, sa nešto opštijim kriterijunom optimalnosti, ali insistirajući na njegovoj kvadratnoj formi. Problem ćemo prvo rešavati u duhu teorije Pontryagina, a zatim ćemo implicitno izvesti uslove za realizaciju optimalne strategije upravljanja u zatvorenoj povratnoj sprezi. Kao što smo u uводу ovog poglavlja napomenuli, ova klasa problema naziva se *linearni regulatori sa kvadratnim kriterijumom optimalnosti ili LQR problemi* i od izuzetnog su značaja u inženjerskoj praksi.

12.3.2 Optimalno upravljanje linearnim, vremenski promjenjivim diskretnim dinamičkim sistemima

Pretpostavimo da se proces može uspešno opisati kao linearni, vremenski promjenjivi diskretni sistem, odnosno, da se modeluje sledećim sistemom diferencnih jednačina

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k), \quad (12.46)$$

²⁶ Bez sušinskih izmena, razmatrajući da je $\alpha > 0$, a $c > 0$, tada je $x^*(k)$ monotonno rastuće, a $x^*(0) = 1$, tada je $x^*(10) = 0$.

gde su $\mathbf{x}(k)$ i $\mathbf{u}(k)$ vektori stanja i upravljanja u trenutku k . Matrice stanja i

upravljanja obeležene su sa Φ i Γ respectivno, dimezija $n \times n$ i $n \times m$, kao što je uobičajeno za diskretnе sisteme. Vremenski interval u kojem se proces odvija je poznat $k = k_0, k_1, k_2, \dots, k_{f-1}, k_f$.²⁷

Prepostavili smo da je specificiran vektor stanja u početnom vremenskom trenutku

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0. \quad (12.47)$$

Kao i u svim prethodnim slučajevima, pretpostavili smo da komponente vektora upravljanja ne type dodatna ograničenja tipa nejednakosti²⁸

$$\begin{aligned}x(2) &- x^2 c = x(0) - 2x^2 c \\x(3) &- x^2 c = x(0) - 3 - x^2 c \\&\vdots \\x(k) &- x^2 c.\end{aligned}$$

Prepostavili smo najprije slučaj da je kriterijum u Boltinjoj formi

$$I = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(k_f)\mathbf{\Psi}(k_f)\mathbf{x}(k_f) + \frac{1}{2} \sum_{k_0}^{k_f-1} \left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k) \right], \quad (12.48)$$

gdje su matrice $\mathbf{\Psi}(k_f)$ i $\mathbf{Q}(k)$ simetrične pozitivno semidefinitne matrice, a matrica $\mathbf{R}(k)$ simetrična pozitivno definljiva matrica.²⁹

Određivanje optimalne strategije upravljanja započemo formušanjem Hamiltonove funkcije (12.26), na način kako smo je i uveli u prethodnom poglavljiju

$$\begin{aligned}H(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k) &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k) + \\&+ \lambda^T(k+1) \left[\Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) \right].\end{aligned} \quad (12.49)$$

Nastavljeno izvođenje potrebnih uslova ekstrema uz oslonac na sistem kanonskih jednačina (12.37)-(12.39)

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k), \quad (12.50)$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \Phi^T(k)\lambda(k+1), \quad (12.51)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)} = \mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k) + \Gamma^T(k)\lambda(k+1) = 0. \quad (12.52)$$

²⁷ Bez sušinskih izmena, razmatrajući da je $\alpha > 0$, a $c > 0$, tada je $\mathbf{x}^*(k)$ monotonno rastuće, a $\mathbf{x}^*(0) = 1$, tada je $\mathbf{x}^*(10) = 0$.

Iz poslednjeg izraza (12.52) lako izračunavamo strategiju optimalnog upravljanja kao

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}(k)\Gamma^T(k)\lambda(k+1). \quad (12.53)$$

²⁸ Bez sušinskih izmena, razmatrajući da je $\alpha > 0$, a $c > 0$, tada je $\mathbf{x}^*(k)$ monotonno rastuće, a $\mathbf{x}^*(0) = 1$, tada je $\mathbf{x}^*(10) = 0$.

²⁹ Ograničenje upravljanja sa minimalnom i maksimalnom vrednošću po pravilu rezultuje čvirovom upravljanjem ili kako se to u teoriji optimalnog upravljanja kaže *bang-bang* upravljanjem.

Uslov da je matrična povezuje se sa uslovom njene invertibilnosti, koja je nametnuta izrazom (12.53).

Zamenom dobijene strategije optimalnog upravljanja (12.53) u jednačinu procesa (12.50) dobijamo

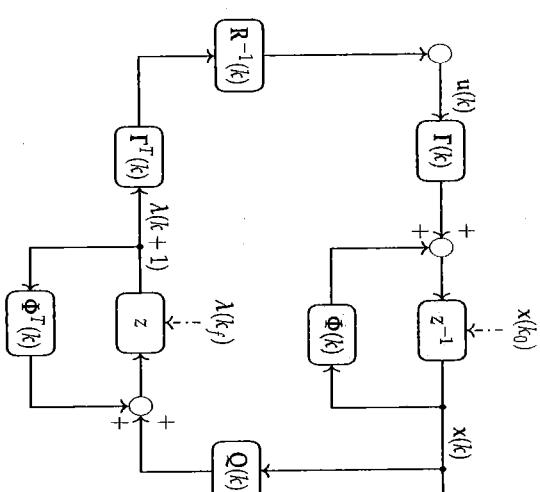
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi(k)\mathbf{x}(k) - \Gamma(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\Gamma^T(k)\lambda(k+1) \\ &= \Phi(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}(k)\lambda(k+1), \end{aligned} \quad (12.54)$$

gde je radi lakšeg praćenja uvedena smena $\mathbf{E}(k) = \Gamma(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\Gamma^T(k)$.

Konačno, kanonski sistem jednačina, odnosno upareni sistem promenljivih stanja i generalisanih impulsata³⁰ može se predstaviti i u matričnom zapisu na sledeći način

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(k) & -\mathbf{E}(k) \\ \mathbf{Q}(k) & \Phi^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix}. \quad (12.55)$$

Iz ovog uparenog sistema (12.55) jasno se vidi da rešavanje po promenljivima stanja kreće od početne tačke, a rešavanje po generalisanim impulsima ide od finalnog vremenskog trenutka ili retrogradno. Shematski prikaz rešavanja ovog kanonskog sistema dat je na slici 12.1



Slika 12.1: Principska shema optimalnog upravljanja diskretnog sistema u skladu sa teorijom Pontriagina. Na slici se jasno vidi dve celine: kretanje u prostoru stanja, koje počinje od $\mathbf{x}(k_0)$ i kretanje vektora generalisanih impulsata, koje se računa retrogradno od $\lambda(k_f)$.

12.3.3 Napomena o graničnim uslovima

Pod pretpostavkom da je vrednost vektora stanja u finalnom vremenskom trenutku poznata i zadata

$$\mathbf{x}(k_f) = \mathbf{x}_f, \quad (12.56)$$

Biločlan član ispred sume u kriterijumu optimalnosti ne utiče na studiju našeg problema, pa se sistem jednačna (12.55) rešava uz specificirane početne (12.47) i granične uslove (12.56).

Mnogo je interesantniji drugi slučaj, kada vrednost vektora stanja u finalnom vremenskom trenutku nije poznata, odnosno kada je vrednost $\mathbf{x}(k_f)$ slobodna

³⁰ Podsećamo da je vremenski interval $k = k_0, \dots, k_f$ poznat.

kao što smo izveli u (12.30) i pokazali u (12.36), prirodni granični uslovi za kriterijum optimalnosti (12.48) sada postaju

$$\lambda(k_f) = \Psi(k_f)\mathbf{x}(k_f). \quad (12.57)$$

Rešavanje (12.55) odvija se uz specificirane početne (12.47) i prirodne granične uslove (12.57). Rešenje koje se dobije kao i uvek kod direktnе primene Pontriaginove teorije, garantuje optimalno upravljanje u otvorenoj povratnoj sprezi. Međutim, baš veza koja je dobijena između uparenih promenljivih stanja i generalisanih impulsata u finalnom vremenskom trenutku (12.57) otvorila je pitanje da li je takva linearna povezanost moguća na celom vremenskom intervalu, što bi garantovalo optimalno upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi. Tom slučaju posvećeno je sledeće poglavje ovog udžbenika.

12.3.4 Optimalni linearni regulatori u zatvorenoj povratnoj sprezi

U prethodnom poglavju skrenuli smo pažnju na linearnu vezu između vektora stanja i generalisanog impulsa u finalnom vremenskom trenutku

$$\lambda(k_f) = \Psi(k_f)\mathbf{x}(k_f).$$

(12.58)

Ukoliko se može pretpostaviti linearna veza između ove dve uparene promenljive na celom vremenskom intervalu, to bi doveo do toga da je vektor optimalnog upravljanja (12.53) u funkciji promenljivih stanja, odnosno obezbeđilo bi upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprez. Naime, pretpostavitevno vezu³²

$$\lambda(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k),$$

(12.59)

gde je $\mathbf{P}(k)$ simetrična, definitna matrica³³ čiju je vrednost neophodno izračunati, da bismo odredili željeno upravljanje u povratnoj sprez. Koristeći novopretpostavljenu vezu (12.59) između kanonskih promenljivih, sistem jednačina (12.55) sada možemo zapisati kao

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1), \quad (12.60)$$

odnosno

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \Phi^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1). \quad (12.61)$$

Rešavanjem jednačine (12.60) po $\mathbf{x}(k+1)$ dobijamo

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{E}(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\Phi(k)\mathbf{x}(k), \quad (12.62)$$

gde je \mathbf{I} jedinična matrica. Zamjenom izraza (12.62) u (12.61) dobijamo

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \Phi^T(k)\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{E}(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\Phi(k) + \mathbf{Q}(k). \quad (12.63)$$

Pošto jednačina (12.63) mora da bude zadovoljena za proizvoljne vrednosti vektora stanja $\mathbf{x}(k)$, dobijamo sledeću jednačinu po nepoznatoj matrici $\mathbf{P}(k)$

$$\mathbf{P}(k) = \Phi^T(k)\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{E}(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\Phi(k) + \mathbf{Q}(k). \quad (12.64)$$

Ova jednačina naziva se *Rikatijeva diferencija jednačina*.³⁴ Ako možemo da rešimo ovu diferenciju ili bolje rečeno sistem diferencijalnih jednačina, uspostavljemo vezu između vektora stanja i Lagranževih množišta (12.59), odnosno obezbeđeno optimalno upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprez.

³² Ova veza naziva se i Kalmanova pretpostavka ili Rikatijeva transformacija.

³³ Simetričnost i definitnost nećemo posebno dokazivati, ali će se ti uslovi jasno prepoznati iz strukture jednačine iz koje se izračunava nepoznata matica $\mathbf{P}(k)$.

Konačno, ako je moguće rešiti Rikatijevu jednačinu (12.64) ili (12.66), poštujuci uslov (12.65) iz jednačina za (12.55) i (12.53) dobijamo željeno upravljanje u povratnoj sprez:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}(k)\Gamma^T(k)\Phi^{-T}(k)[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}(k)]\mathbf{x}(k). \quad (12.67)$$

Oznaka Φ^{-T} predstavlja inverznu maticu transporovane matrice stanja Φ , ukoliko ona postoji. Složena matrična relacija (12.67) može se jednostavnije zapisati kao

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{S}(k)\mathbf{x}(k), \quad (12.68)$$

gdje je

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{R}^{-1}(k)\Gamma^T(k)\Phi^{-T}(k)[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}(k)]. \quad (12.69)$$

Pojačanje $\mathbf{S}(k)$ naziva se Kalmanovo pojačanje. O načinu njegovog izračunavanja diskutovat ćemo kroz primere koji slede.

Po zatvaranju povratne sprege na način koji smo upravo prikazali, naš poslednji sistem u prostoru stanja (12.46) postaje

$$\mathbf{x}(k+1) = (\Phi(k) - \mathbf{I}(k)\mathbf{S}(k))\mathbf{x}(k). \quad (12.70)$$

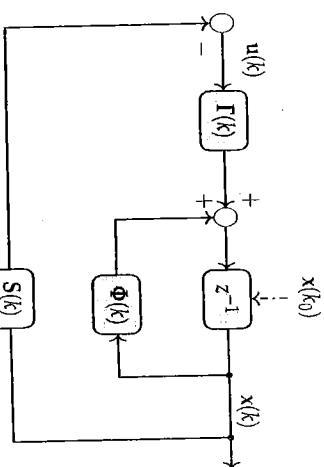
Schematicki prikaz ove klase linearnih regulatora sa vremenski promenljivim pojačanjem u povratnoj sprezu prikidan je na slici 12.2.

Nacin na koji ovako projektovan sistem u zatvorenoj povratnoj sprezu među maticu stanja predstavlja suština projektovanja linearnih optimalnih regulatora sa kvadratnim kriterijumom optimalnosti (LQR). Međutim, vremenski promenljivo pojačanje u povratnoj sprezu predstavlja poseban inženjerski izazov, zato ćemo kroz primere koji slede, pokusati da uvedemo čitaoce u jedan poseban slučaj linearnih optimalnih regulatora sa konstantnim pojačanjem u povratnoj sprezu.

³⁴ Italijanski Il conte Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), italijanski matematik.

Tabela 12.1: Parametri za numeričku studiju problema.

	α	Q	R
Slučaj 1	2	20	2
Slučaj 2	2	2	20
Slučaj 3	0.5	20	2
Slučaj 4	0.5	2	20



Slika 12.2: Principska shema optimalnog upravljanja diskretnim sistemima u povratnoj sprezi sa vremenski promenljivim pojačanjem. Izračunavanje vremenski promenljivog pojačanja obavljaju se off-line u dva koraka. Prvo rešavanjem Rikatijeve diferencne jednačine $P(k)$, a zatim izračunavanjem pojačanja $S(k)$.

Off-line izračunavanje parametara $P(k)$ i $S(k)$

Primer 12.3.

Posmatraćemo proces, modelovan kao diskretni sistem prvog reda

$$x(k+1) = \alpha x(k) + u(k).$$

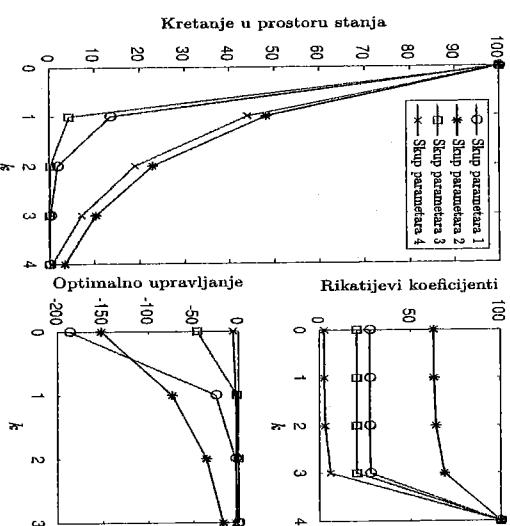
U početnom trenutku proces ima vrednost $x(0) = 100$, a vremenski interval poznat je i zadat $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Vrednosti parametra α navešćemo nešto kasnije u tekstu, ali biraćemo vrednosti tako da garantuju ili stabilno ili nestabilno ponašanje u otvorenoj povratnoj sprezi.³⁵ Kriterijum optimalnosti dat je u kvadratnoj formi, kao što problem linearnih regulatora i zahteva

$$I = \frac{1}{2} 100x^2(4) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 [Qx^2(k) + Ru^2(k)].$$

Cilj nam je da u dну teorije linearnih optimalnih regulatora izračunamo optimalnu strategiju u povratnoj sprezi i da posledično odredimo optimalno kretanje u prostoru stanja. Međutim, namera nam je da pored studije stabilnosti nestabilnih sistema³⁶, diskutujemo o uticaju parametara Q i R na performanse regulisanog sistema. Stoga smo osmisili četiri slučaja u numeričkoj studiji problema tabela 12.1

Iz tabele 12.1 jasno je da prva dva slučaja predstavljaju nestabilne diskrete

³⁵ U konkretnom slučaju, da li je vrednost parametra α manja ili veća od jedan.



Nekoliko stvari lako se može uočiti sa slike 12.3: Prvo, da su vrednosti Rikatijeve numeričke simulacije bez posebnog izvođenja. Drugo, da se izračunavaju, a da uticaj težinskih parametara Q i R posmatrano ravноправno u studiji stabilnih i nestabilnih sistema u otvorenoj povratnoj sprezi.

Rezultate numeričke simulacije predstavljamo u prirodnom redosledu kako se izračunavaju,³⁷ bez posebnog izvođenja. Prvi korak je da rešimo Rikatijevu jednačinu (12.64) uz uslov (12.65), koji u našem slučaju glasi

$$P(4) = 100.$$

³⁷ U ovom primjeru izostavljeno su simulacione kodove, ali temo ih priložiti u složenjem primercu koji sledi, a koji se tako mogu primeniti za svaki od ovde razmatranih slučajeva.

Slika 12.3: Rešenje Rikatijeve jednačine, optimalno upravljanje i kretanje u prostoru stanja za kombinaciju parametara iz Tabele 12.1.

jevih koeficijenata, značajno veće kod nestabilnih sistema,³⁸ što konsekventno dovodi do većeg upravljačkog napača, koji mora da obvezredi regulator. Isto tako, veće vrednosti parametra Q u odnosu na R obezbeđuju ustajaju vrednost koeficijenata već posle jedne iteracije, odnosno posle prve takti odabiranja.

Pre nego što predstavimo rezultate kretanja u prostoru stanja, обратите pažnju na napomenu sa margeine ovog teksta.³⁹ Rezultate u prostoru stanja posmatraćemo kroz odnos stabilnih i nestabilnih sistema i u relativnom odnosu težinskih matrica Q i R . Čitocima prepustamo da analizu uticaja Bolting članu, sprovedu sami.

Sa slike 12.3 jasno je da veće vrednosti parametra Q uz promenljivu stanju x , nameću i manju vrednost promenljive stanja i njen strogi završetak u ravnotežnom položaju. Treba primetiti da se naša simulacija završava kada promenljiva stanja dode u finalni vremenski trenutak $x(4)$, što znači da je u skladu sa formulama (12.67)-(12.70) potrebljno izračunati optimalno upravljanje samo do $k = 3$.

Sa slike 12.3 jasno se vidi da je kod nestabilnih sistema u otvorenoj povratnoj sprezi, potreban mnogo veći upravljački napor za vraćanje u ravnotežni položaj, jer očigledno sistem sam ruje u stanju da potiskuje poremećaj. Sa druge strane veće vrednosti parametra R nameću i manje vrednosti upravljanja, što je posebno vidljivo kod stabilnih sistema.

Konačno, jasno je da linearni optimalni regulatori u povratnoj sprezi obezbeđuju stabilizaciju i nestabilnih sistema, odnosno popravljuju performanse stabilnih sistema. Da bismo ocenili uticaj ovako projektovane povratne sprege u nastavku ćemo dati sopstvene vrednosti matrice stanja u ustajenom stanju (12.70). Naravno, problem izračunavanja sopstvenih vrednosti za vremenski promenljivu matricu ponalto je sporan, pa smo se zato ograničili na ustajene vrednosti matrice stanja u zatvorenoj povratnoj sprezi, Tabela 12.2.

Slučaj	1	2	3	4
λ_0	0.1358	0.4823	0.04452	0.4408

Slučajevi 1 i 2.

³⁸ Kada bismo krenuli da formiramo kriterijum optimalnosti, možemo da u njega ugradimo prvi kvantitativni pokazatelj ponašanja sistema, a to je greška regulacije, koja predstavlja razliku između željenih i ostvarenih vrednosti. Vodeći računa da komponente greške mogu da menjaju znak i da je diferencijabilnost u našim aplikacijama važna, možemo predložiti sledeći kriterijum optimalnosti

$$l_1 = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} e^T e(k).$$

Ovaj kriterijum optimalnosti ne sumnjuju dovodi do brze minimizacije greške, a cena toga je veoma često potreba za velikim upravljačkim naporom, koji može biti fizički mogući ili je jednostavno jako skup. Zato predlažemo novi kriterijum optimalnosti, koji treba da predstavlja kompromis između minimizacije greške i ograničavanja vrednosti upravljanja

$$l_2 = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} [e(k)Qe(k) + u^T(k)R(u(k))],$$

pri čemu su početni uslovi poznati i zadati $x_1(k_0 = 0) = 5$, $x_2(k_0 = 0) = 3$. Poznat je i finalni vremenski trenutak $k_f = 10$, a vrednost u finalnom vremenskom trenutku $x(k_f)$ nije zadata. Kriterijum optimalnosti dat je u Bločinoj formi

$$I = \left[x_1^2(10) + 2x_2^2(10) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 \left[x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k) \right].$$

Odgоварајуће matrice opisanog sistema u skladu sa (12.46) i (12.48) su

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \Gamma(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \Psi(10) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, Q(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R(k) = 1.$$

Kao i u prethodnom primjeru, prvi korak je rešiti Rikitijevu matricu diferenčnu jednačinu, koja u skladu sa (12.64) glasi

$$\begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{21}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} 1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{21}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Orakto dobijene sopstvene vrednosti očigledno garantuju stabilno ponašanje sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi.

U nastavku teksta razmotritemo primer projektovanja linearog optimalnog regulatora u povratnoj sprezi, ako je proces modelovan kao diskretni sistem drugog reda. Ovaj primer prate i simulacioni kodovi. Iako su kodovi namenski pisanici za ovaj primer, lako se mogu proširiti i uopštiti.

Primer 12.4.

Proces je modelovan kao diskretni sistem drugog reda

$$b_3 = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k) \right].$$

Ovaj problem se onda naziva problem stabilizacije odnosno regulacije. Konačno, ako želimo još jedan stepen slobobe u projektovanju, kojim ćemo ponderisati našu želju da u finalnom vremenskom trenutku završimo (ili ne) u $x(k_f) = 0$, uvešćemo Bolčin u $x(k_f)$ ispred sume i dobiti kriterijum optimalnosti u formi jednačine (12.48).

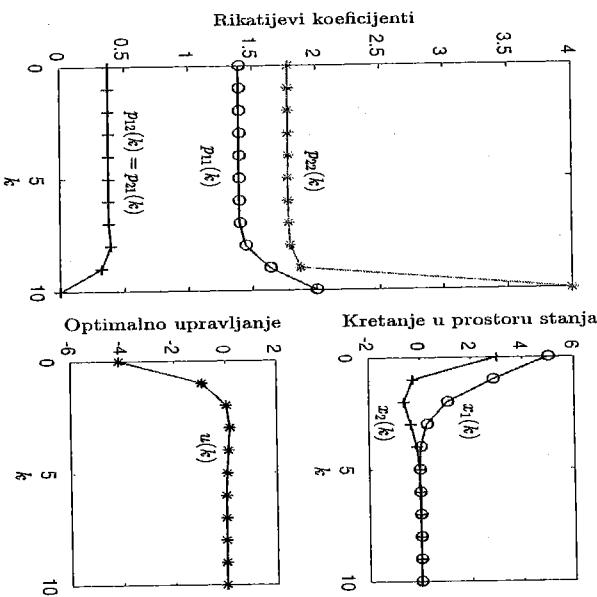
U posebnom slučaju, kada je željena vrednost jednaka nuli, odnosno kada sistem želimo da vrati u ravnotežno ili neporemećeno stanje, kada se prethodni kriterijum svodi na

Simulacioni kod za rešavanje problema iz ovog primera dat je u nastavku teksta

```

1 % Simulacioni kod za primer sistema drugog reda MATLAB
2 %Parametri sistema
3 Phi=[0.8 1;0 0.6]; % Matrica stanja Phi
4 Gamma=[1;0.5]; % Matrica ulaza Gamma
5 Q=[1 0;0 1]; % Tezinska matrica Q
6 R=1; % Tezinska matrica R
7 Psi=[2,0;0,4]; % Biločlan član Psi
8 %
9 x1(1)=5; % početni uslovi x1
10 x2(1)=3; % početni uslovi x2
11 x=x1(1);x2(1);
12 % Napomena, u MATLAB-u ne postoji indeks 0, npr x(0),
13 % zato inicijalizujemo početno stanje sa x(1), a broj iteracija
14 % će ići onda do N = kf+1, u našem slučaju do 11.
15 kf=0; % početni vremenski trenutak k_0
16 kf=10; % finalni vremenski trenutak k_f
17 kf=kf+1;
18 [n,n]=size(Phi);
19 I=eye(n); % jedinica matrica I
20 E=Gamma*inv(R)*Gamma'; % matrica E = BR^{-1}I^{-1}B'
21 %
22 % Retrogradno rešavanje Rikatijeve jednacine od kf do k0 forma koju
23 % koristimo P(k) = A'P(k+1)(I + EP(k+1))^{-1}A + Q
24 % Vrednost u finalnom vremenskom trenutku P(k,f) = Psi, početna za
25 % retrogradno rešavanje P, Q, R su simetrične matrice i j = ji
26 Pplus1=Psi;
27 P11(N)=Psi(1);
28 P12(N)=Psi(2);
29 P21(N)=Psi(3);
30 P22(N)=Psi(4);
31 %
32 for k=N-1:-1:1
33 PK = Phi'*Pplus1*inv(I+E*Pplus1)*Phi+Q;
34 P11(k) = PK(1,1);
35 P12(k) = PK(1,2);
36 P21(k) = PK(2,1);
37 P22(k) = PK(2,2);
38 Pplus1 = PK; % izv P(k+1)
39 end
40 %
41 % Izračunavanje povratne sprege S = R - {-1}B'A{-T}{P(k)} - Q]
42 for k = N:-1:1
43 P=[p11(k),p12(k);p21(k),p22(k)];
44 Sk = inv(R)*gamma*inv(Phi')*(PK-Q);
45 S1(k) = Sk(1,1);
46 S2(k) = Sk(2,2);

```



Slika 12.4: Rešenje Rikatijeve jednacine, optimalnog upravljanja i kretanja u prostoru stanja, za dvodimenzionalni primer sa vremenski promenljivim pojačanjem u povratnoj sprezi. Zbog lakšeg predstavljanja, prikazali smo vrednosti upravljanja u svim trenucima odabirajući ih, mada je, kao što smo već objasnili, za izračunavanje $x(f_j)$, potrebno izračunati do upravljanja u trenutku k_{f-1} , odnosno $u(k_{f-1})$.

Optimalno upravljanje u povratnoj sprezi generiše se u skladu sa (12.68)

$$u(k) = -[s_1(k) \quad s_2(k)] \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix},$$

gde je vektor $S(k)$ definisan izrazom (12.69). Izračunate vrednosti optimalnog upravljanja prikazane su na slici 12.4.

Konačno, uporedno sa upravljanjem, računa se i kretanje u prostoru stanja sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi (12.70), rezultati ove simulacije predstavljeni su takođe na slici 12.4.

koji sledi.

```

47 end
48 % optimalno kretanje u prostoru stanja
49 %  $x(k+1) = [A - B * L]x(k) + \text{given } x(0)$ 
50 for k=1:N-1
51 Sk = [s1(k) s2(k)];
52 xk = [x1(k) x2(k)];
53 xplus1 = (Phi.Gama*Sk)*xk;
54 x1(k+1)=xplus1(1);
55 x2(k+1)=xplus1(2);
56 end
57 % optimalno upravljanje  $u(k) = -S(k)x(k)$ 
58 for k=1:N
59 Sk = [s1(k) s2(k)];
60 xk = [x1(k); x2(k)];
61 u(k) = -Sk*xk;
62 end
63
64 % crtanje:  $P(k)$ ,  $x(k)$ ,  $u(k)$ 
65 % prvo postavljanje broja i iteracija od  $k = 0$  do 10
66 k=10;
67 figure (1)
68 plot(k,p1,'k:.',k,p12,'k:.',k,p22,'k:.')
69 xlabel (' $k$ ')
70 ylabel('Rikatijevi koeficijenti')
71
72 figure (2)
73 plot(k,x1,'k:.',k,x2,'k:.')
74 xlabel (' $k$ ')
75 ylabel('Kretanje u prostoru stanja')
76
77 figure (3)
78 plot (k, u, 'k: *')
79 xlabel (' $k$ ')
80 ylabel('Optimalno upravljanje')
```

Listing 12.1: MATLAB kod

U okviru ovog poglavlja razmatrali smo teoriju linearnih optimalnih regulatora, koji obezbeđuju vremenski promenljivo pojačanje u zatvorenoj povratnoj sprezi. U praktičnim inženjerskim aplikacijama, vremenski promenljivo pojačanje značajno ograničava upotrebnu vrednost ove klase regulatora. Međutim, ako bi se vremenski promenljivo pojačanje aproksimiralo ili zamenilo odgovarajućim konstantnim pojačanjem, uz zadržavanje nesporognosti kvaliteta regulacije, ovakva upravljačka struktura bi u problemima regulacije imala ogroman značaj. Mogućnostima i načinima projektovanja linearnih vremenski ne-promenljivih⁴⁰ optimalnih regulatora u povratnoj sprezi posvećeno je poglavje

Prateći način razmišljanja iz kontinualnih sistema, ali i primere iz prethodnog poglavlja gde se bar intuitivno vidi da je rešenje Rikatijeve jednačine većim delom nepromenljivo i da u tom vremenskom intervalu gde postoji nepromenljivost, koordinate vektora stanja mogu da dosegnu neporemećeno stanje. Logično je pretpostaviti, da se regulator u povratnoj sprezi može smatrati i ili aproksimirati konstantnim pojačanjem.⁴¹

Počemo našu studiju od linearog, vremenski nepromenljivog sistema

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k). \quad (12.71)$$

Kao i u prethodnom primeru, pretpostavili smo da je početno stanje poznato i unapred zadato $x(k_0) = x_0$. Prepostavimo da matrica Φ nije singularna⁴². Kriterijum optimalnosti sada je dat u Lagranževoj formi sa vremenski ne-promenljivim parametrima i sa gornjom granicom koja teži ustaljenom stanju

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right]. \quad (12.72)$$

⁴⁰Vremenski nepromenljivi ili stacionarni.

Slično kao kod kontinualnih sistema, ako je optimizacioni problem definisan izrazima (12.71) i (12.72) tada uz pretpostavke o dohvatljivosti⁴³ sistema (Φ, Γ), možemo trditi sledeće za rešenje Rikatijeve jednačine (12.64) u ustaljenom stanju, kada $k \rightarrow \infty$,

$$P(k) = P(k+1) = P, \quad (12.73)$$

U studiji kontinualnih optimalnih linearnih regulatora, da bi se integracija matričneelinearne Rikatijeve jednačine prevela na rešavanje sistema algebarskih nelinearnih jednačina, potrebno je ispuniti sledeća tri Kalmanova uslova:

da je linearan sistem vremenski nepromenljiv, da je kriterijum optimalnosti bez Bolčinog članak⁴⁴ i konačno da je sistem upravljiv.⁴⁵ Konstantno rešenje Rikati jeve jednačine obezbeđuje konstantno pojačanje u povratnoj sprezi, za stacionarni sistem.

⁴¹Ova činjenica će se pokazati veoma značajnom u primerima koji slede, posebno u studiji asymptotske stabilnosti sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi.

⁴²Odnosno da se optimizacioni problem može zapisati na sledeći način

$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$

⁴³Ne u smislu služevina, ali naši primeni se zadržavaju u Kalmanove pretpostavke.

12.3.5 Optimalni linearni stacionarni regulatori u zatvorenoj povratnoj sprezi

Prateći način razmišljanja iz kontinualnih sistema, ali i primere iz prethodnog poglavlja gde se bar intuitivno vidi da je rešenje Rikatijeve jednačine većim delom nepromenljivo i da u tom vremenskom intervalu gde postoji nepromenljivost, koordinate vektora stanja mogu da dosegnu neporemećeno stanje. Logično je pretpostaviti, da se regulator u povratnoj sprezi može smatrati i ili aproksimirati konstantnim pojačanjem.⁴¹

⁴⁴Lagranžev problem

⁴⁵Savetujemo čitaocima da ponovo pogledaju poglavje o matematičkom modelu u prostoru stanja.

odnosno da je rešenje Rikatiijeve jednačine vremenski nepromenljivo. Ovo praktično znači da se u izrazu (12.64) vrednosti $P(k+1)$ i $P(k)$ zamjenjuju konstantom $P_0^{\frac{1}{2}}$, a sistem diferencijalni jednačina (12.64) postaje sistem algebarskih jednačina, čije je rešenje čak moguće naći i u analitičkoj formi. Odnosno, algebarska Rikatiijeva jednačina dobija se kao

$$P = \Phi^T P [I + EP]^{-1} \Phi + Q, \quad (12.74)$$

ili kao

$$P = \Phi^T [P^{-1} + E]^{-1} \Phi + Q, \quad (12.75)$$

gde je $E = \Gamma R^{-1} \Gamma^T$. Sada optimalno upravljanje u povratnoj sprezi zavisi od konstantnog pojačanja

$$\mathbf{u}(k) = -R^{-1} \Gamma^T \Phi^{-T} [P - Q] \mathbf{x}(k) = -S \mathbf{x}(k). \quad (12.76)$$

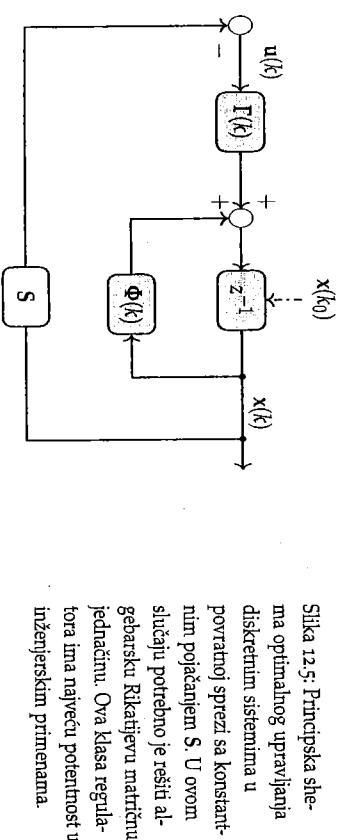
gdje je očigledno

$$S = R^{-1} \Gamma^T \Phi^{-T} [P - Q]. \quad (12.77)$$

Konačno, optimalno kretanje u prostoru stanja u ovom sistemu sa zatvorenom povratnom spregom dobija se kao

$$\mathbf{x}(k+1) = (\Phi - IS) \mathbf{x}(k). \quad (12.78)$$

Linearni optimalni regulatori sa kvadratnim kriterijumom optimalnosti i konstantnim pojačanjem u povratnoj sprezi predstavljeni su shematski na slici 12.5.



Slika 12.5: Principska shema optimalnog upravljanja diskretnim sistemima u povratnoj sprezi sa konstantnim pojačanjem S .

U ovom slučaju potrebno je rešiti algebarsku Rikatiijevu matričnu jednačinu. Ova klasa regulatora ima najveću potenciju u inženjerskim primenama.

* Verujemo da čitaocu neće zbuniti oznaka P da je neće pomešati sa vremenski promenljivim slučajem.

Interesantno je razmatrati, pod kojim uslovima i kako izraz $(\Phi - IS)$ garantuje asimptotsku stabilitet, bilo kod sistema koji su stabilni ili nestabilni u otvorenoj povratnoj sprezi. Čitaocu koje to više zanima upućujemo na dodatnu literaturu [44] i [45].

Sledeći primer ostavljamо čitaocima za vežbu. On je skoro identičan prethodnom, samo je kriterijum optimalnosti prilagođen slučaju koji garantuje da se povratna sprega može generisati kao vremenski nepromenljiva. Neke od ugrađenih MATLAB funkcija za rešavanje ove klase problema prikazamo u primeru.

Primer 12.5. Proces je modelovan kao diskretni sistem drugog reda

$$x_1(k+1) = 0.8x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = 0.6x_2(k) + 0.5u(k),$$

pri čemu su početni uslovi poznati i zadati $x_1(k_0 = 0) = 5$, $x_2(k_0 = 0) = 3$. Vrednost u finalnom vremenskom trenutku $\mathbf{x}(k_f)$ nije zadata.

Kriterijum optimalnosti dat je u Lagranževoj formi

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k)].$$

Odrediti optimalnu strategiju upravljanja u zatvorenoj povratnoj sprezi, sa konstantnim pojačanjima.

Primer 12.6. Proces je opisan sledećom matričnom jednačinom

$$\begin{aligned} & \text{Sparametri sistema} \\ 1 & \Phi = [0.8 \ 1.0 \ 0.6]; \% \text{ Matrica stanja } \Phi \\ 2 & \Gamma = [1.0 \ 0.5]; \% \text{ Matrica ulaza } \Gamma \\ 3 & \text{Gama} = [1.0 \ 0.5]; \% \text{ Težinska matrica } Q \\ 4 & (\mu=1 \ 0 \ 0 \ 1); \% \text{ Težinska matrica } R \\ 5 & R = [1]; \% \text{ Težinska matrica } R \\ 6 & Psi = [2, 0, 0, 4]; \% \text{ Boltčin clan } \Psi_i \\ 7 & \% \\ 8 & x1(1)=5; \% \text{ početni uslovi } x1 \\ 9 & x2(1)=3; \% \text{ početni uslovi } x2 \\ 10 & x1=x1(1); x2=x2(1); \\ 11 & \% \\ 12 & k0=0; \% \text{ početni vremenski trenutak } k_0 \\ 13 & kf=10; \% \text{ finalni vremenski trenutak } k_f \\ 14 & Nkf=1; \% \\ 15 & \% \\ 16 & \% \text{ Resavanje Rikatiijeve jednačine} \\ 17 & [P EIGVAL, S, RR] = dare(Phi, Gama, Q, R) \\ 18 & \% \\ 19 & \% \text{ Kretanje u prostoru stanja} \\ 20 & for k=1:Nf-1 \\ 21 & xk = [x1(k); x2(k)]; \\ 22 & xkplus1 = (Phi*Gama*S)*xk; \\ 23 & x1(k+1) = xkplus1(1); \\ 24 & x2(k+1) = xkplus1(2); \\ 25 & end \\ 26 & \% \\ 27 & \% \text{ Optimalno upravljanje} \\ 28 & for k=1:N-1 \\ 29 & xk = [x1(k); x2(k)]; \\ 30 & u(k) = -S*xk; \\ 31 & end \\ 32 & \% \text{ Citanje grafika ostavljamo citocima} \\ 33 & \% Molimo Vas da provjerite alternativni način resavanje upotrebom \\ 34 & \% MATLAB funkcije dltqr \\ 35 & \% Linear-quadratic regulator design for discrete-time systems \\ 36 & \% kraj \\ 37 & \end{array}$$

Listing 12.2: MATLAB kod

Za proces su propisani sledeći početni uslovi

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kriterijum optimalnosti dat je u Lagranževoj formi

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right],$$

gdje su

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Cilj je da odredimo optimalnu strategiju upravljanja u formi linearnog regulatora sa konstantnim pojačanjem u povratnoj sprezi i optimalno kretanje u prostoru stanja.

Iz jednačina koje opisuju proces možemo eksplicitno napisati matrice stanja i upravljanja

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prateći proceduru iz prethodnog poglavlja, prvi korak nam je da rešimo algebarsku Rikatiijevu jednačinu (12.74)

$$P = \Phi^T P[I + EP]^{-1} \Phi + Q,$$

koja u našem slučaju⁴⁷ glasi

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Već smo napomenuli da je rešavanje algebarske Rikatiijevе jednačine jednostavnije, a u nastavku ćemo dati jedan takav primer. Isto tako, ukazaćemo na to što se dešava, ako nisu ispunjeni svi uslovi za iznalaženje optimalnog upravljanja u zatvorenoj povratnoj sprezi.

⁴⁷ Matrice Φ , Γ su realne matrice, matrice Q i R su takođe realne i zadovoljavaju uslove semi-finitnosti i definitnosti, respectivno. Stoga je rešenje Rikatiijevе jednačine simetrična realna matrična P .

Sređivanjem poslednjeg izraza uz malo napora možemo dobiti

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+p_{11}} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_{12} & -p_{12} \\ 1+p_{11} & 1+p_{11} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} p_{11}(1+p_{11}) & p_{12}(1+p_{11}) \\ p_{12}(1+p_{11}) & p_{22}(1+p_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+p_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) & -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) \\ -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) & -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) \end{bmatrix}.$$

Poslednja matrična jednačina u razvijenom obliku glasi

$$p_{11}(1+p_{11}) = 1 + p_{11} - p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11})$$

$$p_{12}(1+p_{11}) = -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11})$$

$$p_{22}(1+p_{11}) = -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}).$$

Pod uslovom da je $p_{11} > 0$, dolazimo do rešenja

$$p_{11} = 1, p_{12} = 0, p_{22} = 0,$$

odnosno

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što je i rešenje algebarske Rikatijeve jednačine.

Optimalno upravljanje izračunavamo u skladu sa (12.76)

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}\Phi^{-1}[\mathbf{P} - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) = -\mathbf{S}\mathbf{x}(k),$$

ili u našem slučaju u pogodnijoj formi⁴⁸

$$\mathbf{u}(k) = [\mathbf{T}^T\Phi\mathbf{T} + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{P}\Phi\mathbf{x}(k) = -\mathbf{S}\mathbf{x}(k).$$

Konačno dobijamo da je vrednost optimalnog pojačanja u povratnoj sprezi jednaka nuli, odnosno $\mathbf{S} = [0 \ 0]$, pa samim tim naš sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi postaje

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k),$$

gde, sopstvene vrednosti $\mu_1 = 1$ i $\mu_2 = 0$ ne mogu da garantuju asimptotsku stabilnost sistema. Međutim, interesantno je primetiti da je optimalna, minimalna vrednost kriterijuma optimalnosti konacna i iznosi $I = 0.5$. Optimalno kretanje u prostoru stanja lako se izračunava kao

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 0 \\ x_2(k) &= x_1(k) + x_2(k) \end{aligned}$$

ili za naše početne uslove

$$x_1(0) = 1 \quad x_1(k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$x_2(0) = 1 \quad x_2(k) = 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Na kraju ovog primera treba istaći nekoliko stvari. Prvo, vrednost kriterijuma optimalnosti je konacna jer on ne zavisi od $x_2(k)$, što prikriva činjenicu da sistem nije asimptotski stabilan. Drugo, ukazujemo na činjenicu da sistem poslednje regulatora ne mora biti asimptotski stabilan, mada opet čitaoci upucujueno na literaturu [44] i [45] i naravno uslove, koje smo propisali za naš diskretni sistem.

Konačno, sugeriršemo čitaocima da primer pokušaju da reše uz oslonac na dostupne simulacione alate i ugrađene funkcije. Verujemo da će ih rezultati simulacije malo izmenaditi.

⁴⁸ Čitocima ostavljamo da pokusaju da iskoriste obe forme prirodnih rešenja i da sami uvide razliku. Druga predložena forma dobija se iz alternativnog oblika Rikatijeve jednačine (12.66), koja u vremenski nepromenljivom slučaju glasi

$$\mathbf{P} = \Phi^T\mathbf{P}\Phi + \mathbf{E}^{-1}\Phi + \mathbf{Q}.$$

Dajmo izvođenje, uz relativno složene matrične manipulacije, čime mogu naći u [38] ili [39].

Kao što je više puta napomenuto, u prethodnim poglavljima ograničili smo se na studiju problema linearnih optimalnih regulatora, odnosno, potiskivanju poremećaja početnih uslova i vraćanju sistema u ravnotežno stanje. Značajno složeniji klasu problema, *linearni optimalni servoregulatori*, odnosno problema kod kojih se željena vrednost menja tokom vremena, razmatraćemo u nastavku. Već sada treba istaći da je struktura linearnih optimalnih servoregulatora složnija i da se pored pojačanja u povratnoj sprezi u strukturi ovih regulatora nalazi i jedan element otvorene povratne sprege⁴⁹ i da samo ta složena struktura garantuje optimalno upravljačko dejstvo.

⁴⁹ Eng. *feedback*.

12.3.6 Linearni optimalni servoregulatori za diskrete dinamičke sisteme

Pretpostavimo da je sistem linearan, vremenski nepromjenljiv i opisan diferencijalnim jednačinama

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k), \quad (12.79)$$

gdje su $\mathbf{x}(k)$ i $\mathbf{u}(k)$ vektori stanja i upravljanja u trenutku k . Matrice stanja i upravljanja obeležene su sa Φ i Γ respektivno, dimesija $n \times n$ i $n \times m$.

U problemima servoregulacije, bitna nam je veza između vektora izlaza \mathbf{y} i stanja sistema

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \quad (12.80)$$

gdje je \mathbf{C} matrica izlaza dimenzije $r \times n$.

Pretpostavili smo da je specificiran vektor stanja u početnom vremenskom trenutku

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \quad (12.81)$$

i da komponente vektora upravljanja ne trpe dodatna algebarska ograničenja.

Kriterijum optimalnosti je u Bolzmannovoj formi sa vremenski nepromjenljivim parametrima, ali uzima u obzir kvadrat greške, koji se eksplicitno zapisuje kao razlika željene i ostvarene vrednosti. Željenu trajektoriju obeležili smo sa $\eta(k)$

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} [\mathbf{C}\mathbf{x}(k_f) - \eta(k_f)]^T \mathbf{\Psi}(k_f) [\mathbf{C}\mathbf{x}(k_f) - \eta(k_f)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f} \left[[\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \eta(k)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \eta(k)] + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right], \end{aligned} \quad (12.82)$$

gdje su matrice $\mathbf{\Psi}$ i \mathbf{Q} simetrične, pozitivno semidefinitne, a težinska matrica \mathbf{R} je simetrična, pozitivno definuitna. Cilj nam je da projektujemo optimalni linearni servoregulator minimizujući gresku $e(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \eta(k)$ i upravljanje u odnosu koji nameće težinski parametri \mathbf{Q} i \mathbf{R} .

U rešavanju našeg problema, a u duhu teorije Pontriagina, uvećemo Hamiltonovu funkciju (12.26), koja objedinjuje kriterijum optimalnosti (12.82) i ograničenja, data jednačinama stanja (12.82)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k) = & \frac{1}{2} [\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \eta(k)]^T(k) \mathbf{Q} [\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \eta(k)](k) + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) + \lambda^T(k+1) \left[\Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) \right]. \end{aligned} \quad (12.83)$$

Potrebitne uslove ekstrema dobijamo iz sistema kanonskih jednačina (12.37)-(12.39)

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k), \quad (12.84)$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \Phi^T(k) \lambda(k+1) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \eta(k), \quad (12.85)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)} = \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) + \Gamma^T(k) \lambda(k+1) = 0. \quad (12.86)$$

U nastavku, radi lakšeg praćenja teksta, uvećemo sledeće smene $\mathbf{V} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ i $\mathbf{W} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q}$.

Iz iznaza (12.86) izračunavamo optimalno upravljanje

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1} \Gamma^T \lambda(k+1), \quad (12.87)$$

a zatim zamenom dobijenog upravljanja u jednačine stanja (12.84), dobijamo sledeći upareni sistem jednačina (gdje je $\mathbf{E} = \Gamma \mathbf{R}^{-1} \Gamma^T$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & -\mathbf{E}(k) \\ \mathbf{V} & \Phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{W} \end{bmatrix} \eta(k). \quad (12.88)$$

Sistem uparenih jednačina (12.88) rešava se uz predefinisani početni uslov (12.81) i prirodnii granični uslov

$$\lambda(k_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{C}(k_f) - \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi} \eta(k_f). \quad (12.89)$$

Sljčno kao i u slučaju linearnih regulatora, iskoristićemo prirodni granični uslov (12.89) da pretpostavimo vezu između promjenljivih stanja i generalisanih impulsa. Drugim rečima, pretpostavili smo da je njihova veza u sledećem obliku

$$\lambda(k) = P(k)x(k) - g(k). \quad (12.90)$$

Ako možemo da izračunamo nepoznati matricu $P(k)$ i vektor $g(k)$ tada možemo garantovati optimalno upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi uz već spomenuti element u otvorenoj povratnoj sprezi, koji je očigledno vezan za postojanje vektora $g(k)$.

Zamenom izraza (12.90) u (12.88), za jednačinu stanja dobijamo

$$x(k+1) = \Phi x(k) - E(k)P(k+1)x(k+1) + Eg(k+1). \quad (12.91)$$

Rešavanjem jednačine (12.91) po $x(k+1)$ dobijamo

$$x(k+1) = [I + E(k)P(k+1)]^{-1}[\Phi(k)x(k) + Eg(k+1)]. \quad (12.92)$$

Zamenom izraza (12.92) u (12.85) izračunavamo

$$\begin{aligned} P(k)x(k) &= Vx(k) + \Phi^T P(k+1)[I + EP(k+1)]^{-1}\Phi x(k) + \\ &+ [g(k) + \Phi^T P(k+1)[I + EP(k+1)]^{-1}Eg(k+1) - \Phi^T g(k+1) - W\eta(k)], \end{aligned} \quad (12.93)$$

Pregrupisavanjem izraza (12.93) lako dobijamo

$$\begin{aligned} &[-P(k) + V + \Phi^T P(k+1)[I + EP(k+1)]^{-1}\Phi]x(k) + \\ &+ [g(k) + \Phi^T P(k+1)[I + EP(k+1)]^{-1}Eg(k+1) - \Phi^T g(k+1) - W\eta(k)] = 0. \end{aligned} \quad (12.94)$$

Jasno je da izraz (12.94) mora da važi za proizvoljne vrednosti vektora stanja $x(k)$, pa taj deo izraza grupisan uz vektor stanja, daje očekivano Rikatihevu jednačinu

$$P(k) = V + \Phi^T P(k+1)[I + EP(k+1)]^{-1}\Phi \quad (12.95)$$

ili u drugoj formi

$$P(k) = V + \Phi^T [P^{-1}(k+1) + E]^{-1}\Phi. \quad (12.96)$$

Rikatihevе jednačine (12.95) ili (12.96), rešavaju se retrogradno uz prvi član gra-

$$\text{ničnog uslova (12.89)} \quad (12.97)$$

$P(k_f) = C^T \Psi C.$
Novina kod optimalnih, linearnih servoregulatora je drugi član izraza (12.94), odnosno uslov

$$g(k) = [\Phi^T - \Phi^T P(k+1)[I + EP(k+1)]^{-1}E]g(k+1) + W\eta(k) \quad (12.98)$$

ili drugačije zapisano

$$g(k) = \Phi^T [I - [P^{-1}(k+1) + E]^{-1}E]g(k+1) + W\eta(k). \quad (12.99)$$

Jednačine (12.98) ili (12.99) rešavaju se retrogradno uz drugi član graničnog uslova (12.89)

$$g(k_f) = C^T \Psi \eta(k_f). \quad (12.100)$$

Ako smo u stanju u da rešimo Rikatijevu jednačinu (12.95) ili (12.96), poštujući uslov (12.97) i jednačine (12.98) ili (12.99) uz uslov (12.100), iz jednačina za (12.88) i (12.87) dobijamo željeno upravljanje u povratnoj sprezi

$$u(k) = -R^{-1}\Gamma^T [P(k+1)x(k+1) - g(k+1)]. \quad (12.101)$$

Matrična relacija (12.101) može se zapisati i kao

$$u(k) = -R^{-1}\Gamma^T P(k+1)[\Phi x(k+1) + \Gamma u(k)] + R^{-1}\Gamma^T g(k+1). \quad (12.102)$$

Jasno je da se optimalno upravljanje sastoji iz dve komponente

$$u(k) = -S(k)x(k) + S_g(k)g(k+1), \quad (12.103)$$

gde su

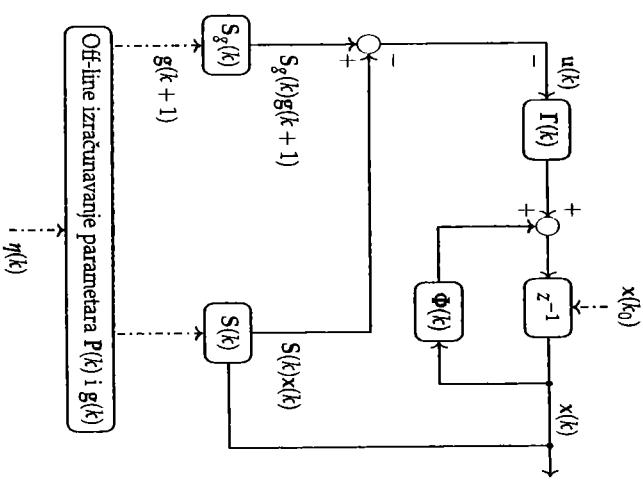
$$S(k) = [R + \Gamma^T P(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T P(k+1)\Phi \quad (12.104)$$

$$S_g(k) = [R + \Gamma^T P(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T. \quad (12.105)$$

Konačno, optimalno kretanje u prostoru stanja izračunavamo kao

$$\mathbf{x}(k+1) = [\Phi - \Gamma \mathbf{S}(k)]\mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{S}_g(k)\mathbf{g}(k+1), \quad (12.106)$$

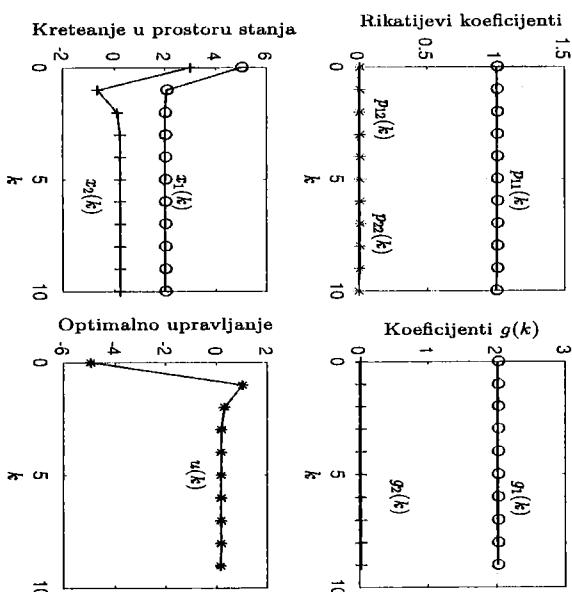
Složena struktura diskretnih linearnih optimalnih servoregulatora prikazana je na slici 12.6.



Slika 12.6: Principska shema optimalnog diskretnog servoregulatora sa vremenski promenljivim pojačanjima.
Izračunavanje vremenski promenljivih pojačanja obavlja se off-line. Pored povratne sprege $\mathbf{S}(k)$ prisutan je i forward edfoward član $\mathbf{S}_g(k)\mathbf{g}(k+1)$. Prikazana struktura se može primeniti kada upravljanje nad konacnjum, unapred poznatim intervalom vremena. To praktično najčešće nije slučaj. Međutim, data struktura ima izuzetnu praktičnu primenu kod prediktivnih upravljačkih algoritama koji buduće upravljanje računaju unutar unapred datog "dizecašeg horizonta".

Cilj nam je da promeniči vrednost $x_1(k) = 2$. Zahteva za drugu komponentu vektora stanja nemamo. Početni uslovi su poznati i zadati $x_1(k_0 = 0) = 5$, $x_2(k_0 = 0) = 3$. Vrednost u finalnom vremenskom trenutku $\mathbf{x}(k_f = 10)$ nije zadata.

Rešenje problema predstavljeno je na slici 12.7



Slika 12.7: Rešenje problema servoregulacije. Obratite pažnju na vremena simulacije, a simulacioni kod prepustimo čitaocima.

U nastavku ćemo kroz primer predstaviti rezultate projektovanja linearnog optimalnog servoregulatora. Čitacima prepoštušmo da sami pokusaju da izvrše simulaciju.

Primer 12.7.

Uopštimo prethodni primer, na problem servoregulacije. Parametri sistema su nepromjenjeni

Iz prethodnog primera jasno se vidi da linearni optimalni servoregulatori obezbeđuju kvalitetno ponašanje sistema u skladu sa izabranim parametrima kriterijuma optimnosti, ali i očekivano dobre performanse u finalnom vremenskom trenutku, gde je greška jednaka nuli. Iz teorije konvencionalnih

regulatora dobro je poznato da je za eliminaciju i/ili smanjenje greške u ustavljenom stanju zaduženo integralno dejstvo. Dva pitanja se logički nameću. Prvo, koji regulatori imaju prednost u inženjerskoj praksi, linearni optimalni servoregulatori ili PID regulatori. Drugo pitanje je u stvari nastavak ili uopštenje prvog, da li postoji dualizam između ove dve vrste regulatora. Ovim pitanjima bavimo se u poglavljiju koje sledi.

12.3.7 Diskretni linearni optimalni regulatori sa integralnim dejstvom

Linearni optimalni servoregulatori obezbeđuju upravljanje u povratnoj sprezi sa najboljim performansama usklađenim sa kriterijumom optimalnosti. Međutim, u inženjerskoj primeni postoje neka ograničenja, zbog kojih se većina projektanata opredeljuje za konvencionalne regulatore, koji sadrže integralno dejstvo. Prvo, struktura kriterijuma optimalnosti je rigidna i ne može da obuhvati sve zahteve koji se mogu postaviti u savremenoj praksi [46], [10] i [47].

Sa druge strane, projektovanje linearnih optimalnih servoregulatora i obezbeđivanje multe greške u ustavljenom stanju podrazumeva postojanje egzaktnog matematičkog modela. Postojanje egzaktnog matematičkog modela je na neki način u kontradikciji sa konceptom povratne sprege, koja treba da obezbedi dobro ponašanje sistema i u slučaju nemodelovanih poremetaja i nedostataka. Stoga je česta alternativa da se koriste regulatori sa integralnim dejstvom i povratnom spregom, koji mogu da obezbede željeno ponašanje u ustavljenom stanju. Naravno, dobro je poznato da je projektovanje konvencionalnih regulatora suštinski postupak parametarske optimizacije, gde broj parametara ili broj stepeni slobode nedvoismileno određuje broj konstrukcijskih ograničenja, koja možemo da uvedemo. Strogo gledano, ovaj metod projektovanja konvencionalnih regulatora spada u direktnе metode optimalnog upravljanja, gde se na optimalan način određuju parametri unapred prepostavljenog profila upravljanja.

Bez obzira na rezultate upravljanja, koji kod direktnih metoda mogu biti samo manje ili više bliski optimalnoj upravljačkoj strategiji, jednostavnija struktura i integralnim dejstvom najširi inženjersku primenu.

Veza između regulatora sa integralnim dejstvom i linearnih optimalnih regulatora u teoriji kontinualnih sistema dobro je poznata; često korišćena [48], [49]. Sa druge strane, orakva veza u teoriji diskretnih sistema je složenija i nije često obrađivana u literaturi [50]. Namera nam je da ukažemo na dualizam

između diskretnih linearnih optimalnih regulatora i konvencionalnih regulatora sa integralnim dejstvom, kao mogući pristup u projektovanju optimalnih diskretnih sistema u povratnoj sprezi.

U ovom slučaju, pretpostavljeno da je sistem linearan, vremenski nepromerljiv i opisan diferencijalnim jednačinama⁵⁹

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) + \sigma, \quad (12.107)$$

gde su $\mathbf{x}(k)$ i $\mathbf{u}(k)$ vektori stanja i upravljanja u trenutku k . Matrice stanja i upravljanja obeležene su sa Φ i Γ , respektivno, dimenzija $n \times n$ i $n \times m$. Sa σ je obeležen nepoznati poremetaj, za koji smo, bez gubitka na opštosti, pretpostavili da je konstantan ili sporopromenljiv.

Veza između vektora izlaza \mathbf{y} i stanja sistema data je sledećom relacijom

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + w, \quad (12.108)$$

gde je \mathbf{C} matrica izlaza dimenzije $n \times r$, a w je nepoznati šum merenja, tako da uz pretpostavku da je konstantan ili sporopromenljiv. Pretpostavili smo da komponente vektora upravljanja ne type dodatna algebarska ograničenja.

Kriterijum optimalnosti možemo zapisati u Lagranđevoj formi sa vremenjski nepromenljivim parametrima i po pravilu projektovanja za servoregulatore uzima se u obzir vrednost kvadrata greške, koja se eksplicitno zapisuje kao razlika željene i ostvarene vrednosti. Željenu trajektoriju obeležili smo sa $\eta(k)$

$$I = \frac{1}{2} [\mathbf{y}(k_f) - \eta(k_f)]^T \mathbf{\Psi}(k_f) [\mathbf{y}(k_f) - \eta(k_f)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f} [\mathbf{y}(k) - \eta(k)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k) - \eta(k)] + \Delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k), \quad (12.109)$$

gde su matrice $\mathbf{\Psi}$ i \mathbf{Q} simetrične, pozitivno semidefinitne, a težinska matrica \mathbf{R} je simetrična pozitivno definitna, pri čemu $\Delta \mathbf{u}(k)$ definisemo na sledeći način

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1). \quad (12.110)$$

Na ovaj način smo inherentno uveli integralno dejstvo u strukturu našeg budućeg regulatora.⁵¹

Kao što smo do sada utvrdili, za praktičnu implementaciju, uputno je da kriterijum optimalnosti bude u Lagranđevoj formi, odnosno bez Bolonjog člana. me upućujemo na [51].

⁵⁹ Čitaocima kojima ova činjenica nije na prvi pogled jasna, preporučujemo da ponovo pogledaju poglavje o diskretizaciji regulatora. Imaće, ova forma kriterijuma optimalnosti, koja sadrži priručnik upravljanja karakteristična je za *integralno upravljanje*. Čitaocu, koji zele više da sazna o tome, upućujemo na [51].

Prethodni kriterijum uveli smo zbog toga što se po našim najboljim saznanjima iz dostupne literaturi, Bolčin član se često zapisuje na neudobnem način, pa ovim putem želimo da ukazemo na nedvosmisleno tačan pristup ovom problemu.

$$y(k) - \eta = y(k-1) - \eta + C\Delta x(k). \quad (12.116)$$

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} [y(k) - \eta(k)]^T Q [y(k) - \eta(k)] + \Delta u^T(k) R \Delta u(k). \quad (12.111)$$

U studiji problema linearnih optimalnih regulatora i servoregulatora, nismo uzimali u razmatranje moguće poremetajte u tu šumove merenja w . Da bismo izraze (12.107) i (12.108) uklonili u formalizam optimalnih regulatora i nadnili ih rezavistvum od poremećaja i šuma, uvodimo sledeće jednačine modifikovaneog stanja (12.107)

$$\Delta x(k+1) = \Phi \Delta x(k) + \Gamma \Delta u(k), \quad (12.112)$$

gde su očigledno iskorisćene smene $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$ i $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$.

Na sličan način transformišemo i jednačinu izlaza (12.108)

$$y(k) = y(k-1) + C \Delta x(k). \quad (12.113)$$

Jednačine (12.112) i (12.113) čine novi matematički model u prostoru stanja, koji ćemo koristiti u daljinim izvođenjima, a u kompaktnom obliku može se zapisati na sledeći način

$$\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{n \times r} \\ C & I_{n \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k-1) - \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_{n \times m} \end{bmatrix} \Delta u(k), \quad (12.114)$$

gde su 0 i I , nula i jedinična matrica respectivno, odgovarajućih dimenzija.

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & I_{n \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix}. \quad (12.115)$$

Ova novouvedena forma matematičkog modela u prostoru stanja (12.114) u kombinaciji sa kriterijumom optimalnosti (12.111) i željenim ravnotežnim položajem $\eta = 0$, predstavlja osnovu za projektovanje linearog optimalnog regulatora. Međutim, u okviru ovog paragrafa od interesa su nam problemi servoregulacije pri konstantnoj željenoj vrednosti η , pa ćemo dodatno izmeniti

³³ Pretpostavka o konstantnom i -tlu sporopromenljivim veličinama v i w daje smisao ovakvim transformacijama.

Prethodna dva izraza (12.117) i (12.118) možemo zapisati kao jednostavniji diskretni model \mathfrak{S} u prostoru stanja

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{\Phi} \tilde{x}(k) + \tilde{\Gamma} \Delta u(k), \quad (12.117)$$

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C} \tilde{x}(k), \quad (12.118)$$

³⁴ Uveđi smo sledeće smene
 $\tilde{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k)-\eta \end{bmatrix},$
 $\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k)-\eta \end{bmatrix},$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{n \times r} \\ 0_{n \times m} & I_{n \times r} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_{n \times m} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [C \quad I_{n \times r}],$$

$$\tilde{y}(k) = y(k) - \eta,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} [\tilde{y}(k) Q \tilde{y}(k) + \Delta u^T(k) R \Delta u(k)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} [\tilde{x}^T(k) \tilde{Q} \tilde{x}(k) + \Delta u^T(k) R \Delta u(k)], \end{aligned} \quad (12.121)$$

gde je $\tilde{Q} = \tilde{C}^T Q \tilde{C}$.

Konačno smo naš problem sveli na problem projektovanja linearnih optimalnih regulatora, gde je sistem opisan matematičkim modelom u prostoru stanja (12.119) i kriterijumom optimalnosti³⁴ (12.121).

Iz teorije linearnih optimalnih stacionarnih regulatora, jasno je da se za sistem (12.119)-(12.121), može naći optimalno upravljanje sa konstantnom povratnom spregom u formi (12.76), koje bi u našem konkretnom slučaju imalo sledeći oblik

³⁴ Naravno, matice $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Gamma}$, \tilde{Q} i R moraju da zadovolje sve uslove, koje propisuje problem projektovanja linearnih optimalnih regulatora, a koje su detaljnije objašnjene u okviru ovog poglavija.

$$\Delta \mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{P}}^{-T}[\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{Q}}]\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (12.122)$$

gde je očigledno

$$\mathbf{S} = -\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{P}}^{-T}[\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{Q}}], \quad (12.123)$$

a \mathbf{P} je rešenje odgovarajuće Rikatiijeve (12.74) algebarske jednačine, koja sada glasi

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{P} [\mathbf{I} + \mathbf{E} \mathbf{P}]^{-1} \tilde{\mathbf{\Phi}} + \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (12.124)$$

gde je $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T$.

Jasno se vidi da je optimalno upravljanje u povratnoj sprezi za naš problem sada

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) - \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}. \quad (12.125)$$

Poslednji izraz možemo zapisati i u svojoj konačnoj, razvijenoj formi, kao

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{S}_1 \Delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{S}_2(\mathbf{y}(k-1) - \boldsymbol{\eta}), \quad (12.126)$$

ili čak u punoj formi servoregulatora, sa vremenski promenljivom željenom vrednosću $\boldsymbol{\eta}(k)$, kao

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{S}_1 \Delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{S}_2(\mathbf{y}(k-1) - \boldsymbol{\eta}(k)), \quad (12.127)$$

koji će biti razumljiviji u nastavku teksta.

Struktura izraza (12.126) i (12.127) nedvosmisleno upućuju na PI regulator sa brzinskom formom integralnog dejstva. Sa stanovišta optimalnih linearnih regulatora, koji bi imali ograničenja na upravljanje²⁵ ova brzinska forma (12.127) bi u implementaciji omogućila da se na prirodan način rešava problem optimalnog upravljanja sa diskontinuitetima, što nedvosmisleno olakšava projektovanje ove klase regulatora.

12.3.8 Struktura diskretnog PI regulatora, prilagođena linearnim optimalnim regulatorima

Pretpostavljamo da su čitaci do sada upoznati sa opštom teorijom konvenionalnih regulatora sa integralnim dejstvom, odnosno PI regulatorom u svom

osnovnom obliku i mogućim načinima diskretizacije. Bez gubitka na opštosti, opredelili smo se za strukturu regulatora u osnovnom obliku²⁶ i diskretizaciju, koja je korišćena za tu vrstu regulatora.

Prepostavljeno strukturu kontinualnog PI regulatora u svom osnovnom obliku

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right], \quad (12.128)$$

gde je greška na konstantan ulaz data kao $e(t) = \boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}(t)$, a K i T_i su uobičajeni parametri PI regulatora.

Prvi korak bio bi da izraz (12.128) diskretizujemo u pozicionu formu, što bi bilo

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) \right], \quad (12.129)$$

gde je T naravno vreme odabiranja. Da bismo izračunali izraz u brzinskoj formi, sličan (12.127), neophodno je izračunati i upravljanje u trenutku $k-1$, odnosno

$$u(k-1) = K \left[e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-2} e(i) \right]. \quad (12.130)$$

Razlikom izraza (12.129) i (12.130), zaista lako dobijamo upravljanje u brzinskoj formi

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) - K[y(k) - y(k-1)] + \frac{KT}{T_i} e(k-1) \\ &= u(k-1) - K[y(k) - y(k-1)] + \frac{KT}{T_i} [\boldsymbol{\eta} - y(k-1)]. \end{aligned} \quad (12.131)$$

Uvođenjem smene $S_1 = -K$ i $S_2 = -\frac{KT}{T_i}$, dobijamo upravljanje u očekivanoj formi

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + S_1[y(k) - y(k-1)] + S_2[y(k-1) - \boldsymbol{\eta}(k)], \quad (12.132)$$

²⁵ Mislimo na ograničenja tipa nejednakosti u formi $U_{min} \leq u(k) \leq U_{max}$. Ne bi bilo nikakve razlike da smo se opredelili za regulator u njegovoj modifikovanoj formi, samo u ovom primeru, mislimo da je ovaj pristup prikladniji.

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + S_1 \Delta x(k) + S_2 [y(k-1) - \eta(k)], \quad (12.133)$$

gdje je $S_1 = S_{11}C$, odnosno $\Delta y(k) = Cx(k)$.

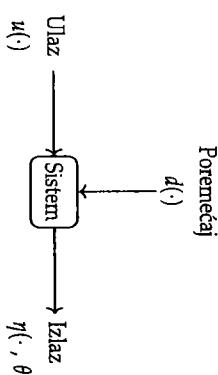
Nema nujakve dileme da se strukture izraza (12.126) i (12.133) potpuno podudaraju, što nam daje mogućnost za optimalno podešavanje diskretnog PI regulatora ili prak za projektovanje linearanog optimalnog servoregulatora bez neugodnog *feedforward* člana.

Čitaočima ostavljamo da servoregulator iz prethodnog primera projektuju na ovaj novi način, uz prisustvo sporopromenljivog poremećaja i/ili šuma merenja.

I3

Parametarska identifikacija sistema

Identifikacija je oblast teorije sistema posvećena određivanju matematičkih modela, po pravilu objekata upravljanja, i određivanju njihovih parametara na osnovu eksperimentalnih podataka i analize tih podataka. Promenljive koje opisuju sistem najpre se podjele na ulazne i izlazne promenljive, a potom se mjerjem vrednosti tih ulaznih i izlaznih promenljivih dobijaju podaci na osnovu kojih treba identifikovati sistem, tj. razviti odgovarajući matematički model koji opisuje dinamiku sistema, te odrediti njegove parametre. Koncept dinamičkog sistema prikazan je na slici I3-1. Sistemom se upravlja pomoću ulaznog signala $u(\cdot)$, a najčešće nepoznat uticaj okoline je prikazan u vidu poremećaja $d(\cdot)$ ¹. Izlazni signal, koji možemo da merimo, je promenljiva $\eta(\cdot)$ koja zajedno sa ulazom nosi informacije o ponašanju sistema².



Slika I3-1: Blok-sHEMA dinamičkog sistema sa ulazom $u(\cdot)$, izlazom $\eta(\cdot, \theta)$ i poremećajem $d(\cdot)$.

¹Ponašanje sistema predstavlja dinamičku vezu ulaza i izlaza.

²Oznaka (\cdot) je uvedena da bi se naglasila opšiost postupka, čime se ne specificira vremenski do-

men, koji može da bude i kontinualni i diskretni (npr. $u_i(t)$ za kontinualne sisteme, $u_i(k)$ za diskretni ili čak $u_i(t_k)$ kada vreme odabiranja nije ekvidistanntno).

Kratno ili čak $u_i(t_k)$ kada vreme odabiranja nije ekvidistanntno).

13.1 Osnovni pojmovi

Na ishod procesa identifikacije utiče niz faktora, koji su navedeni i pojašnjeni u nastavku teksta. Neki od pojnova su i ranije (manje ili više intuitivno) uvedeni, ali sada se razmatraju na nivou koji je potreban za puno razumevanje teorijskih i praktičnih postavki teksta koji sledi. U tekstu smo se oslonili na opsteprivačenu terminologiju iz [52].

Sistem 8. Realna pojava (fizička realnost) iz koje se ekstrahuju eksperimentalni podaci nazira se proces. Da bi se izvršila teorijska analiza i identifikacija procesa, neophodno je uvesti dodatne pretpostavke o podacima, kao što su ograničenja na karakteristike procesa, npr. opseg razmatranih fizičkih veličina koje su od značaja za daljnju analizu. U tu svrhu uvodimo pojam sistema koji podrazumeva skup funkcionalnih zavisnosti između promenljivih i signala, odnosno predstavlja matematički opis procesa. Sistem se mora smatrati fiksnim. On je „dat“ takav kakav jeste u smislu da njegove osobine ne možemo menjati.³

Struktura modela M. Matematički modeli dinamičkih sistema mogu se klasificovati na različite načine, zavisno od toga kako ulazni signal ili više njih utiče na ponašanje sistema tokom vremena. Moguća klasifikacija (tipovi) matematičkih modela data je u nastavku.

- **Monovarijabilni - multivarijabilni modeli.** Monovarijabilni modeli odnose se na procese koji se opisuju sa jednim ulaznim i jednim izlaznim signalom (engl. *Single Input – Single Output, SISO*). Kada se opisuje proces sa više ulaznih i/ili izlaznih signala, tada se koriste multivarijabilni sistemi (engl. *Multi Input - Multi Output, MIMO*).
- **Linearni i ne-linearni modeli.** Za model možemo da kažemo da je linearan (ili ne-linearan) u odnosu na parametre ili u odnosu na međusobnu zavisnost ulaza i izlaza i drugih promenljivih u sistemu. Kod linearnih modela pomenuju se veze između promenljivih ili parametara opisane su linearnim funkcijama, a u suprotnom model je ne-linearan.⁴
- **Parametarski i neparametarski modeli.** U opštem slučaju reprezentacija modela sistema može biti parametarska (sa konacnjim brojem parametara) ili neparametarska (sa beskonačnim brojem parametara). Neparametarski modeli

opisuju se funkcijama, tabelama ili krivama, kao što je na primer odskočni odziv sistema koji sadži informaciju o karakterističnim osobinama sistema.

Impulsni odziv ili frekvenčni dijagrami (Bodeovi ili Nikvistovi dijagrami [52]) predstavljaju druge primere neparametarskih modela. Naravno, u mnogim slučajevima bolje je koristiti parametrizovane modele. Takve modele oslikava vektor parametara, koji označavamo sa θ , a odgovarajući model bi bio označen sa $M(\theta)$. Kada je θ promenljivo unutar nekog skupa, tada dobijamo skup ili klasu modela M . U okviru ovog udžbenika bit će razmatrani parametarski modeli.

Modeli u vremenskom, frekvenčnom i operatorском domenu. Dinamički sistemi najčešće se opisuju diferencijalnim ili diferencijalnim jednačinama, parcijalnim ili običnim. Za takve modele kažemo da su dati u vremenskom domenu. Linearni vremenski invariantni modeli u potpunosti su određeni odzivima na prostoperiodične signale pa njih često modelujemo i u frekvenčnom domenu, npr. Bodeovim ili Nikvistovim dijagramima. Za linearne sisteme takođe je pogodno koristiti operatorske modele, kao što je funkcija prenosa, koje ponekad nazivamo modelima u kompleksnom domenu.

- **Vremenski diskretni i kontinualni modeli.** Diskretni modeli opisuju vezu između ulaza i izlaza u diskretnim vremenskim trenucima, dok se kod kontinualnih modela vrednosti menjaju vremenski kontinualno.
- **Deterministički i stohastički modeli.** Deterministički modeli su modeli čije se stanje može predviđeti, tj. novo stanje potpuno je određeno prethodnim. Stohastički modeli su oni čije se ponašanje ne može predviđeti, ali se može predviđeti verovatnoća promene stanja. U nastavku ćemo razmatrati determinističke modele.

Metod za identifikaciju J. U literaturi se može naći veliki broj različitih metoda za identifikaciju. Može se reći da ne postoji opšti metod za identifikaciju, već je izbor metoda identifikacije prilagođen strukturi samog modela i svim atributima datim u ovom paragrafu. Izbor metoda zavisi od samog sistema koji se identificuje, od veličina u sistemu čija su merenja dostupna, od forme modela koja se zahteva i dr. Neke najvažnije metode koje se odnose na estimaciju parametara bit će razmatrane u nastavku⁵.

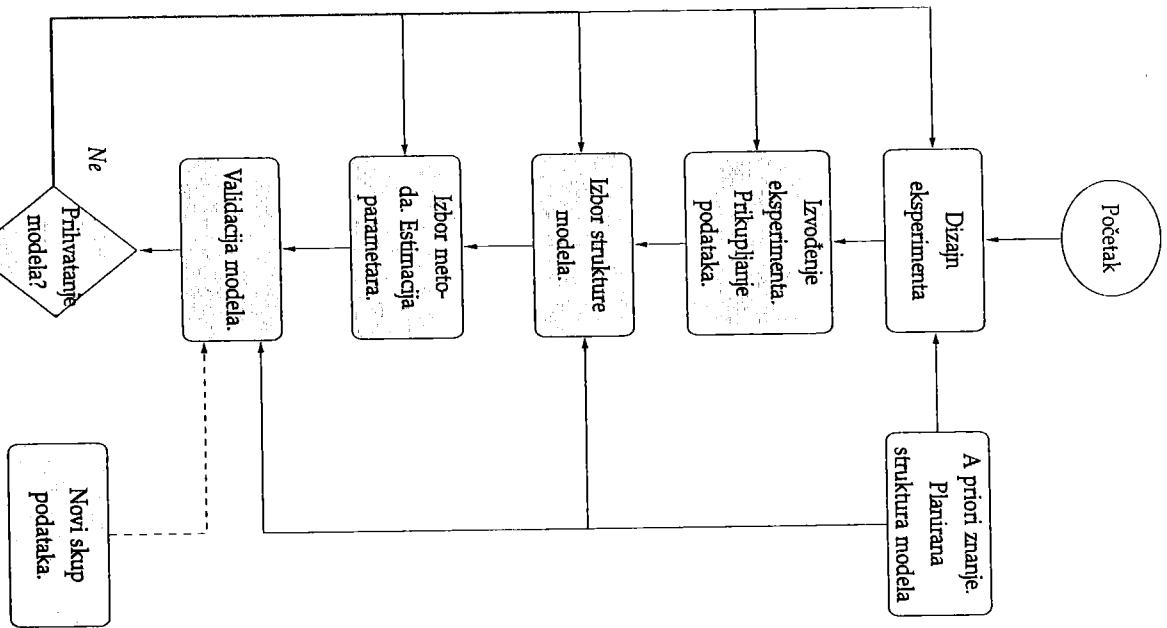
³Osim sistema ne možemo menjati, ali on može da se menjao „sam od sebe“ ili usled delovanje okoline.

⁴U sklopu ovog pogлавља, kao i u većem delu materijala ovog udžbenika, bit će razmatrani linearni vremenski invarijanti modeli.

⁵Pojam *estimacija* prvi put intituirano uvodimo. Radi se o procenjanju vrednosti nepoznatih parametara modela. Po misljenju autora, tavanja estimacija nije lako direktno prevesti kao procena, već je to bar diskonkratna procedura, koja uključuje procenu i ocenu kvadratne procene. Može se reći da je najčešći deo teksta ovog poglavљa posvećen estimaciji (proceni i oceni) nepoznatih parametara dinamičkih modela.

Eksperimentalni uslovi \mathcal{H} . U opštem slučaju, eksperimentalni uslovi definišu kako će se vršiti proces identifikacije. Taj proces uključuje izbor ulaznih podataka, mogućnost vršenja identifikacije u zatvorenoj petljii, izbor vremena odbiranja podataka, predfiltriranje podataka i druge operacije. Eksperimentalni uslovi često određuju kako se podaci prikupljaju iz procesa. Korisnik može uticati na to u velikoj mjeri, međutim, mogu postojati ograničenja kao što su bezbednosni uslovi ili ograničenja radnog režima koja ogranicavaju slobodan izbor eksperimentalnih uslova. Jednom kada su podaci prikupljeni, korisnik može izabrati metod kojim će se identifikovati struktura modela i parametri. Može biti primijenjeno nekoliko različitih izbora metoda i modela dok se ne dobiti prihvatljivi rezultati.

Uopšteno govoreći, proces identifikacije započinje određivanjem koje će se osobine realnog procesa uzeti u obzir prilikom definisanja modela⁶, a potom se sistem pobudiće koristeći određeni tip ulaznog signala, kao što je odskočni, prostoperiodični ili slučajno generisani signal. Merene vrednosti izlaznih i ulaznih podataka prikupljaju se i koriste u procesu identifikacije, odnosno procesu estimacije nepoznatih parametara usvojene strukture modela M . Poslednji korak je validacija dobijenog modela. U praksi, odabir strukture modela M i metoda za estimaciju parametara J je iterativni postupak koji se može ponavljati dok se ne dobiti zadovoljavajući rezultati. Opisani postupak prikazan je na slici 13.2. Oraklo opisan postupak od suštinskog je značaja za razumevanje procedura identifikacije i estimacije, [53].



⁶Treba poći od dobro poznate činjenice da je model procesa u stvari karikatura procesa, odnosno da zaštićeno naglašava dominantne osobine procesa, koje čine proces prepoznatljivim.

Slika 13.2. Diagram tok-a procesa identifikacije sistema.

13.2 Estimacija parametara linearnih sistema

U okviru ovog odjeljka daćemo pregled osnovnih metoda za parametarsku identifikaciju, da budemo precizniji, estimaciju parametara sistema. Biće prikazan osvr na sisteme od interesa za problem estimacije parametra, njihovu strukturu kao i pregled algoritama koji se koriste pri estimaciji parametara linearnih vremenski invariantnih sistema različite strukture⁷. Kao što će biti prikazano, problemi su brojni, i tako su za neke od njih ponudena referenja, može se reći da ne postoji algoritam koji bi bio opšti po karakteru i primerljiv na široku klasu problema.

U literaturi se pojam estimacije definše kao proces procene i ocene konačnog broja nepoznatih parametara u unapred ustrojenoj strukturi modela sistema na osnovu dostupnih realnih mjeranja. Ovakav pristup popularan je u tehničkim naukama, s obzirom na to da linearni kontinualni i diskretni modeli vrlo dobro aproksimiraju ponašanje velikog broja tehnoloških procesa. Metode estimacije parametara modela sistema različite fizike primede, koji su dati u obliku linearnih vremenski invariantnih sistema konačnog ili beskonačnog reda, predstavljaju izuzetno važan alat u nauci i tehnologiji. Ovako dobijeni modeli naši su široku primenu u različitim zadacima analize tehnoloških procesa, njihove simulacije, u upravljanju tehnološkim i industrijskim procesima, kao i u oblastima ekonomije, računarskih telekomunikacija, finansijske matematike, i drugim [54-55].

Kao generalni pristup za sintezu algoritama za estimaciju parametara obj-

čio se koristi metod greške predikcije (engl. *Prediction Error Methods*, PEM), koja predstavlja razliku između stvarne, izmerene vrednosti izlaza realnog sistema i estimirane vrednosti na osnovu samog modela. Ukoliko su greške između izmerenih izlaza i njihovih estimiranih vrednosti dovoljno male, takav model može se smatrati adekvatnim. Stoga se zadatak estimacije postavlja kao problem optimizacije kriterijuma optimalnosti, koji predstavlja funkciju greške estimacije, odnosno pronalaska „najbolje“ vrednosti vektora $\hat{\theta}$ koji minimizuje

greske

$$\|\eta(\cdot) - \hat{\eta}(\cdot)\| + P(\theta), \quad (13.1)$$

gde je $\eta(\cdot)$ mereni izlaz iz sistema, $\hat{\eta}(\cdot) \equiv \eta(\cdot, \hat{\theta})$ estimirani izlaz iz modela kada se na ulaz modela doveđe isti signal kao na ulaz sistema, a $\|\cdot\|$ odgovarajuća norma⁸. Posledice odabira različitih tipova normi u (13.1) razmatrane

⁷ Kao što se sa djjagrama 13.2 vidi, postupak identifikacije započinje izborom strukture modela (broj polova, sa 1 bez vremenskog kašnjenja i sl.), sem u nekun slučaju, kada se u nastavku testa utvrdi red na određivanju parimetara sistema, ne samo u prv korak, izbor strukture modela.

su u [56]. Član $P(\theta)$ je regulizacioni izraz kojim se modifikuje problem minimizacije greške, pa možemo reći da se kriterijum optimalnosti (13.1) sastoji od prvega sabinka koji zahteva prilagođavanje modela podacima i drugog sabinka (regularizacioni član) koji to otežava. Dodavanjem ovog člana omogućava se izbor modela koji dobro generalizuje iz bogatog skupa funkcija. Drugim rečima, ukoliko se u skupu funkcija iz kojeg biramo model ne nalazi nijedan model sa relativno malom srednjom greškom, kazemo da model ne identifikuje (ne generalizuje) dovoljno dobro proces. S druge strane ukoliko postoji bogat skup funkcija može se očekivati da se nalazi model koji će imati malu srednju kvarijansu grešku, i u toj meri prilagoditi podacima da izgubi moć generalizacije, a taj problem naziva se preprilagođavanjem. Stoga regulizacioni izraz otežava prilagođavanje modela podacima i predstavlja kontratežu preprilagođavanju. U literaturi se sreću regulacione funkcije različitih oblika.

Treba imati u vidu da regulizaciona nije nužno uvek od koristiti. Posobno je značajna u slučaju kada je količina podataka za obučavanje mala u odnosu na prilagodljivost modela (što nije lako kvantitativno izraziti). Kada je količina podataka velika, regulizacija nije neophodna. Često se kaže da je povećanje količine podataka najbolja regularizacija, ali velika količina podataka nije uvek dostupna.

Postavljeni optimizacioni problem, u opštem slučaju, ne može se rešiti analitički, u zatvorenoj formi, te je neophodno da se koriste alati numeričke matematike. Poželjno je da algoritam za rešavanje postavljenog problema i procene parametara bude *online*, tj. da se izvršava u „realnom vremenu“, i da bude adaptivan. Ove osobine objasnimo u nastavku izlaganja.

Postupak identifikacije može da se izvršava uporedno sa radom procesa, odnosno da se estimacija parametara modela vrši u svakom trenutku kada su novi podaci dostupni u toku rada procesa. Po ugledu na terminologiju iz literaturе, algoritme sa ovakvom osobinom nazivaju se *online*. Drugi način estimacije parametara podrazumeva da se prvo izvrši skupljanje neophodnih podataka, načinjeće ulaznih i izlaznih, a potom se vrši obrada svih skupljenih podataka i procena parametara modela, pod pretpostavkom da se model nije menjao, što čemo u nastavku označavati kao *offline* postupak. Ukoliko se vrednost parametara menjaju tokom vremena, tada oni jedino mogu da se estimuju uz primenu *online* algoritma, dok se *offline* algoritmi ne mogu primeniti u takvim situacijama.⁹

⁸ Norma sa ozнакom $\|\cdot\|$ je funkcija koja vektor iz realnog ili kompleksnog prostora preslikava u nenegativan realan broj. Postoje različite norme, a najpoznatija je p -norma koja je definisana za svaki realan broj $p \geq 1$ te za $p = \infty$, a najčešće koristi oblici su

$\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$, p -norma
 $\|x\|_1 = \sqrt{(\sum |x_i|^2)}$, 2-norma,
 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, ∞ -norma.

⁹ Primer prednosti *offline* algoritma u odnosu na *online* može biti rješenje i kao distanca između dve tačke u prostoru.

⁹ Primer prednosti *offline* algoritma u odnosu na *online* može biti rješenje i kao distanca između dve tačke u prostoru.

Algoritmi koji su *online* imaju mogućnost resetovanja procenjenih vrednosti u određenom trenutku tokom izvršavanja algoritma. Potreba za resetovanjem javlja se kada sistem mjeri režim rada ili ako nismo zadovoljni procenom. Resetovanje postavlja model i parametre algoritma u početno stanje, dok ova opcija kod *offline* algoritama nije moguća.

Omogućavanje ili onemogućavanje estimacije je još jedna od osobina po kojoj su *online* algoritmi superiorni. Kod *offline* algoritma ne može se selektivno vršiti procena vrednosti parametara, a kompromisno rešenje nalazi se u preprečivanju podataka, odnosno filtriranju ili uklanjanju delova iz skupa podataka pre procene. Kod *online* algoritama moguće je odabrati vremenske intervale u kojima će se onogućiti / onemogućiti procena.

Linearni dinamički sistemi predstavljaju osnovnu strukturu koja se koristi u teoriji estimacije parametara. Ovakvi modeli su najčešće poznati sa tačnošću do reprozatnih parametara¹⁰, pa je zbog toga važan korak pri identifikaciji ovakvih sistema estimacija parametara.

Funkcija prenosa dinamičkih sistema može da bude racionalna ili iracionalna. Ukoliko je posmatrani sistem končne dimenzije, on se opisuje racionalnom funkcijom prenosa i uvek može biti napisan u obliku u kojem izlaz predstavlja linearnu funkciju vektora nepoznatih parametara. U slučaju kada je sistem linearan po parametrima, njihove vrednosti uvek mogu se proceniti uz uslov da je pobudni signal tako izabran da je dovoljno sadržajan ili bogat¹¹. Za jednovernatni, *online* estimaciju takvih parametara koriste se različiti rekurzivni algoritmi i drugi široko rasprostranjenu i lako primenjivi algoritmi adaptivnog upravljanja.

Za razliku od sistema koji se opisuju racionalnim funkcijama prenosa, sistemni beskončanog reda opisuju se iracionalnom funkcijom prenosa, i kod takvih sistema izlaz je neelinearna funkcija nepoznatih parametara. Algoritmi za estimaciju parametara sistema koji se opisuju iracionalnim funkcijama prenosa mnogo su manje izučavani, što se posebno odnosi na adaptivnu, jednovremenu estimaciju parametara, [57, 53].

Postupak estimacije parametara sistema koji se opisuju racionalnim funkcijama prenosa opisan je u nastavku, sa naglaskom na metod najmanjih kvadrata koji je opisan u odeljku 13.3. U okviru odeljka 13.2.1 definisano je osnovni problem estimacije parametara linearnih sistema kojim ćemo se baviti u okviru ovoga rada.

13.2.1 Estimaciju parametara sistema sa racionalnim funkcijom prenosa

Dinamički sistemi konačne dimenzije ukoliko su kontinualni, opisuju se linearnom diferencijalnom jednačinom oblike

$$\frac{d^q y}{dt^q} + a_{q-1} \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} + \dots + a_0 y = b_r \frac{d^r u}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} u}{dt^{r-1}} + \dots + b_0 u, \quad (13.2)$$

odnosno linearnom diferencijalnom jednačinom ukoliko se radi o diskretnom dinamičkom sistemu

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_q y(k-q) + b_0 u(k) + \dots + b_r u(k-r), \quad (13.3)$$

i imaju racionalnu funkciju prenosa

$$G(s) = \frac{b_r s^r + \dots + b_0}{s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0}, \quad (13.4)$$

odnosno

$$G(z) = \frac{b_r z^r + \dots + b_0}{z^q + a_{q-1} z^{q-1} + \dots + a_0}. \quad (13.5)$$

U opštem slučaju, izlaz sistema (13.2) i (13.3) uvek se može zapisati u obliku linearne relacije [58]

$$\eta^k = (\varphi^k)^T \theta, \quad (13.6)$$

gde je η^k merena izlazna vrednost, φ^k je vektor poznatih vrednosti, θ je vektor od n -nepoznatih parametara, a $n = r + q + 1$.¹² Elementi vektora φ^k obično se nazivaju regressori, dok se η^k naziva regresand, a θ vektor parametara.

Da bi se estimirale vrednosti vektora parametara θ , potrebno je minimizirati funkciju koja je pokazatelj odstupanja estimiranog modela od merenja. Postoje različiti načini za formiranje funkcije kriterijuma optimalnosti, koja služi kao mera ocene kvaliteta ponasanja ili validnosti modela,

$$J = \|\eta - \varphi^T \hat{\theta}\|, \quad (13.7)$$

gdje je $\hat{\theta}$ procenjena vrednost parametara, a η merena vrednost izlaza. Pošto je struktura modela sistema unapred poznata i definisana funkcijom prenosa, u kriterijumu optimalnosti (13.7) izostavljen je član koji predstavlja kaznenu funkciju (regularizacioni član) na složenost modela, a prisutan je u (13.1).

Vrednosti parametara θ se u ovom slučaju uvek mogu proceniti kada je pobudni signal tako izabran da pobudi sve relevantne režime sistema, kako bi

¹⁰Na primer, linearni sistemi pobudu prostoperiodičnim ulaznim signalom, na izlazu daju signal iste učestanosti, a različite fazе i amplitude. Skup ulaza različitih učestanosti čini bogat signal za prenos većeg broja parametara na osnovu promena fazne i amplitudske. Prepona je da broj različitih učestanosti u ulaznom signalu bude veći ili jednak broju nepoznatih parametara sistema, ali stakalo to nije jedino uslov. Propusni opseg sistema utiče na to u kom frekvenčnom opsegu treba da se nalaze učestanosti ulaznog signala.

¹¹Promenljiva k uzima "vrednost" iz skupa celih brojeva i načelno označava vreme, ali to nije nužno u svim slučajevima. Ova kva oznaka (k) ima isto značenje kao i oznake (t) ili (τ) u vremenskom domenu, međutim zbog preglednosti izraza i razlikovane komponente vektora i vremenskog odbirka, u sklopu ove sekcijske bice koristen ovakav zapis.

se svi parametri odslikavali u odzivu sistema, odnosno da signal zadovoljava uslove da je dovoljno sadžajan ili bogat u uslov da je neprestano pobudjujući (engl. Persistence of Excitation, PE), [58]. Ukoliko se za normu $\|\cdot\|$ u (13.7) odbere Euklidika 2 - norma, odnosno suma kvadrata gresaka estimacije tada je problem optimizacije poznat kao problem najmanjih kvadrata (engl. Least Squares, LS). Rešenje se može dobiti rešavanjem sistema jednačina, a može se naći i u zatvorenom obliku izračunavanjem Penruouz-Mutrove pseudoinverzije, [59].

Za jednovremenu estimaciju parametara u realnom vremenu koriste se rekurzivni algoritmi. Rešavanje postavljene optimizacione problema zahteva primenu određenih numeričkih algoritama i matematičkih alata, a jedan od uobičajenih postupaka je rekurzivni metod najmanjih kvadrata (engl. Recursive Least Squares Method, RLS) i njegove varijante, a najpoznatija među njima je Kalmanov filter (engl. Kalman filtering, KF) [60], koji je u novijoj istoriji sigurno najčešće primenjuvan algoritam za adaptivnu estimaciju i bice opisan u nastavku.

13.3 Metod najmanjih kvadrata

Linearni regresor je najjednostavniji oblik parametarskog modela. Odgovarajuća struktura modela ima oblik

$$\eta^k = \varphi^k \theta_1 + \varphi_2^k \theta_2 + \dots + \varphi_n^k \theta_n, \quad (13.8)$$

koji se može zapisati i kao linearna relacija

$$\eta^k = (\varphi^k)^T \theta, \quad (13.9)$$

gde je η^k merena izlazna vrednost, φ^k je vektor poznatih vrednosti u trenutku k i θ je vektor od n -nepoznatih parametara.

Kao osnovni problem postavlja se određivanje vektora nepoznatih parametara θ na osnovu izmerenih vrednosti $\eta^1, \dots, \eta^N, \varphi^1, \dots, \varphi^N$. Korištenjem ovih merenja može se formirati sistem linearnih jednačina,

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \dots & \varphi_n^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \dots & \varphi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^N & \varphi_2^N & \dots & \varphi_n^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad (13.10)$$

matično zapisano

$$\eta = \Phi \theta. \quad (13.11)$$

Jedan način da se pronađe vrednost parametara θ iz (13.11) jeste da je broj merenja N jednak n . Tada Φ postaje kvadratna matrica, dimenzije $n \times n$, i ukoliko je Φ matrica nesingularna, sistem linearnih jednačina (13.11) može biti lako rešiv po θ jer je matrica Φ invertibilna,

$$\theta = \Phi^{-1} \eta. \quad (13.12)$$

U praksi, međutim, usled prisustva poremećaja, šuma ili greške u merenju koji mogu prouzrokovati da se estimiraju pogrešne vrednosti parametara, primenjuje se da broj merenja буде veći od n , a dobijena rešenja su opornija na pomenu te nesavremenost u merenom signalu. Kada je $N > n$ sistem linearnih jednačina (13.10) postaje preodređen i tačno rešenje, u opštem slučaju, ne postoji.

Postavljeni problem estimacije vrednosti vektora parametara θ može se rešiti kao problem najmanjih kvadrata, odnosno minimizacijom kriterijuna optimalnosti (13.7) primjenjujući 2 - Euklidsku normu, a kriterijum optimalnosti u tom slučaju dobija oblik

$$J = \sum_{k=1}^N (\hat{\eta}^k)^2 = \sum_{k=1}^N (\eta^k - \hat{\eta}^k)^2 = \sum_{k=1}^N \left(\eta^k - \sum_{i=1}^n \phi_i^k \hat{\theta}_i \right)^2. \quad (13.13)$$

Primenom elementarnih principa optimizacije nalazimo da se kriterijum (13.13) može minimizovati postavljajućem priraštajom funkcije, odnosno gradijenta na nulu

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}_i} = 0 \quad (\forall i \in 1 \dots n), \quad (13.14)$$

odakle lako nalazimo

$$\sum_{k=1}^N \left(\eta^k - \sum_{i=1}^n \phi_i^k \hat{\theta}_i \right) \phi_j^k = 0 \quad (\forall j \in 1 \dots n). \quad (13.15)$$

U tom slučaju slede potrebiti i dovoljni uslovi optimalnosti

$$\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i \sum_{k=1}^N \phi_i^k \phi_j^k = \sum_{k=1}^N \eta^k \phi_j^k \quad (\forall j \in 1 \dots n). \quad (13.16)$$

Jasno je da se rešenje može dobiti rešavanjem sistema jednačina (13.16), a može se naći i u zatvorenom obliku izračunavanjem Penrose-Munove pseudoinverzije [59], što će biti definisano u nastavku.

Uvođenjem matrične notacije kriterijum (13.13) dobija oblik

$$J = (\eta - \Phi \hat{\theta})^T (\eta - \Phi \hat{\theta}), \quad (13.17)$$

dok je gradijent oblika

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -\eta^T \Phi + \theta^T (\Phi^T \Phi). \quad (13.18)$$

Ljednačavanjem gradijenta (13.18) sa nulom dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T \eta. \quad (13.19)$$

Jednačina (13.19) poznata je u literaturi kao „normalna jednačina“¹³.

Algoritam najmanjih kvadrata karakteriše uvođenje pseudoinvverzije što je neophodno kada matrica Φ nije kvadratna, odnosno $n \neq N$, a rešenje problema

na najmanjih kvadrata u zatvorenoj analitičkoj formi ima oblik¹⁴

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \eta = \Phi^+ \eta, \quad (13.21)$$

gde je matrica $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ pseudoinvverzija od Φ što se u literaturi obeležava sa Φ^+ , i postoji ako inverzija $(\Phi^T \Phi)^{-1}$ postoji, tj. ako je matrica Φ punog ranga.

13.3.1 Uvođenje težinskog faktora

Greške u merenjima su neizbežna situacija u realnim procesima, i u nekim tačkama merenja ta greška je manja ili veća, zbog čega nekim podacima može moći više ili manje da „verujemo“. Iz tog razloga se u praksi svakom izmerenom podatku dodeljuje težinski faktor w_k . Povezanost težinskog faktora sa uzorkovanim merenjem zastupa se na relativnum gрешкама koje svaki od podataka iman, pa se tako veća vrednost težinskog faktora dodeljuje podacima kojima više „verujemo“, odnosno unose manju grešku.

Ako se unestoto kriterijuna najmanjih kvadrata kao optimizacioni kriterijum za ocenu valjanosti modela usvoji sledeća njegova modifikacija, koja se naziva otežani metod najmanjih kvadrata

$$J = \sum_{k=1}^N w_k (\eta^k - (\phi^k)^T \hat{\theta})^2, \quad (13.22)$$

gde su w_k unapred zadate relativne težine pojedinih merenja, tada je matrični zapis kriterijuma

$$J = (\eta - \Phi \hat{\theta})^T W (\eta - \Phi \hat{\theta}) \\ = \eta^T W \eta - \hat{\theta}^T \Phi^T W \eta - \eta^T W \Phi \hat{\theta} + \hat{\theta}^T \Phi^T W \Phi \hat{\theta}, \quad (13.23)$$

gdje je

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N \end{bmatrix}. \quad (13.24)$$

¹³ Zove se „normalna jednačina“ posto kažu da je greška $\eta - \Phi \hat{\theta}$ normalna na merenje Φ .

¹⁴ Izraz (13.21) za rešavanje problema najmanjih kvadrata može biti zapisan i u ekivalentnom obliku

Iz uslova za minimizaciju kriterijuma (13.14) sledi rešenje otežanog metoda najmanjih kvadrata u zatvornom obliku

$$\hat{\theta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W \eta. \quad (13.25)$$

Ukoliko je matica težinskih faktora W jedinčina matica I , tada sva merenja imaju podjednak uticaj u izračunavanju nepoznatih parametara do čega dolazi ukoliko greške svih merenja jednake ili ako je unesena greška nepoznata.

Primer 13.1. Posmatrajmo kontinualni proces opisan funkcijom prenosa pravog reda $G(s) = \frac{3}{s+4}$. Prepostavimo da su parametri $a = 3$ i $b = 4$ nepoznati. Napraviti algoritam za njihovu procenu.

Rešenje:

Zadati proces, koji ima formu funkcije prenosa $G(s) = \frac{a}{s+b}$, zapisan u formi diferencijalne jednačine ima oblik

$$\dot{y} = -by + au, \quad (13.26)$$

što predstavlja linearanu relaciju po nepoznatim parametrima opisano u (13.9), gde je $\eta = [y \ \dot{y}]^T$ a vektor nepoznatih parametara $\theta = [b \ a]^T$.

Da bi se mogla izvršiti procena parametara potrebno je da budu merljive vrednosti izlaznog signala y kao i vrednost pravog izvoda \dot{y} , što moguće je ukoliko postoji senzor za obe vrednosti ili ukoliko se diferencira izmereni izlazni signal. Diferenciranje signala je moguće primenom filtra koji ima osobine diferencijatora. Da bismo dobili vrednost diferenciranih signala, primenjeno filter pravog reda na svim signallima koji ima osobinu diferencijatora. Predložena shema eksperimenta prikazana je na slici 13.3. Ulazni signal izabran je u obliku $u(t) = \sin(0.5t) + \sin(t)$ tako da je dovoljno bogat i adekvatan propusnom opsegu procesa čiji se parametri estimiraju. Kod u programskom paketu Matlab za implementaciju postupka dat je u listingu 13.1.

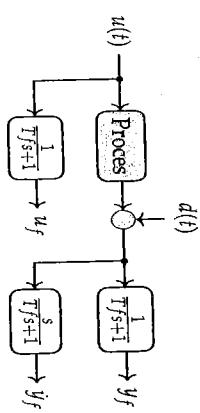
```

1 PHIF=[-1.7f.signals.values uf.signals.values];
2 ETAYf=uf.y;
3 THETA=PHIF\ETA

```

Listing 13.1: MATLAB kod

Podaci su uzorkovani sa periodom $T = 0.01$, a simulacija je trajala 30 sekundi. U prvom eksperimentu prepostavljeno je da je $d(t) = 0$, pri čemu su



Slika 13.3: Blok-sHEMA za estimaciju parametara.

procenjene vrednosti parametara $\hat{\theta} = [4 \ 3]^T$. U drugom eksperimentu, za $d(t)$ postavljen je generator slučajnih brojeva iz intervala $[-0.05, 0.05]$, a za procenjene vrednosti vektora nepoznatih parametara dobije se $\hat{\theta} = [4.0870 \ 3.0774]^T$.

Primer 13.2. Posmatrajmo kontinualni proces iz primera 13.1, gde je potrebno estimirati vrednosti nepoznatih parametara, pri čemu je neophodno implementirati na digitalnom uređaju filtriranje signala kao i kompletni proces estimacije parametara implementirati na digitalnom uređaju, sa taktom rada $T = 0.01$ sekundi.

Rešenje:

Proces od interesa zapisan je u formi funkcije prenosa $G(s) = \frac{a}{s+b}$ međutim, za daljnju analizu neophodno je posmatrati njegov digitalni ekvivalent na način kako je opisano u poglaviju 6 i ima oblik

$$G(z) = \frac{a(1 - e^{-bT})}{b z - e^{-bT}}. \quad (13.27)$$

Zbog kompaktnosti i preglednosti daljnjega postupka, izraz (13.27)ćemo zapisati

$$G(z) = \frac{\theta_2}{z - \theta_1}, \quad (13.28)$$

¹⁵Izraz koji sledi dobija se primenom inverzne Z-transformacije

gde su $\theta_1 = e^{-bT}$ i $\theta_2 = \frac{a}{b}(1 - e^{-bT})$. U cilju dobijanja linearne relacije po nepoznatim parametrima, diskretna funkcija prenosa može se zapisati u formi diferencne jednačine¹⁵

$$y(k) = \theta_1 y(k-1) + \theta_2 u(k-1). \quad (13.30)$$

(13.29)

gdje je vektor nepoznatih parametara $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$, regresor $\varphi = [y(k-1) \ u(k-1)]^T$, a regresand ili izlaz $\eta = y(k)$. Sistem je pobuđen istim uaznim signalom kao u primeru 13.1, dok je filtriranje realizovano filterom pravog reda do-

bijenim primenom numeričke integracije levim pravougaonim, čiji je postupak opisan u poglaviju 10. Implementacija u programskom jeziku Matlab daje u sklopu listinga 13.2, a dobijene vrednosti za vektor parametara $\theta = [0.9595 \ 0.0300]^T$, odnosno $\hat{a} = 3.0615$ i $\hat{b} = 4.1336$.

```
%Algoritam za estimaciju parametara sistema
1 Ts=0.1; % Perioda odabiranja
2 Tf=0.95; % Konstanta NF filtra
3
4 yf=0;
5 uff=0;
6 yf.signal=[];
7 uff.signal=[];
8 for k=1:length(y.signals.values)
9     %diferencija jednačina za realizaciju diskretnog filtra primenom
10    %numeričke integracije
11    yf=(1-Ts/Tf)*yf+Ts/Tf*y.signals.values(k); %filtriranje merenog izlaza
12    yf=yf;
13    yf.signal=[yf.signal yf];
14
15    uff=(1-Ts/Tf)*uff+Ts/Tf*u.signals.values(k); %filtriranje merenog ulaza
16    uf=uff;
17    uff.signal=[uff.signal uf];
18
19    PHI=yf.signal(1:end-1); uff.signal(1:end-1)'; % regressor
20    ETA=yf.signal(2:end)'; % ravninska promenljiva
21
22    THETA=PHI\ETA; %računanje vrednosti vektora nepoznatih parametara
23
24    b=1/Ts*log(THETA(1));
25
26    a=b*THETA(2)/(1-THETA(1));
```

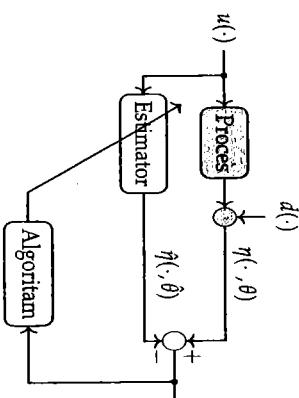
Listing 13.2: MATLAB kod

$$a = -\frac{1}{T} \ln \theta_1, \quad b = \frac{\theta_2}{1-\theta_1}$$

13.4 Rekurne metode za estimaciju

Za jednovremenu estimaciju parametara u realnom vremenu (*engl. online*) koriste se rekursivni algoritmi. Njihova osnovna osobina adaptivnosti podrazumeva da se donošenje odluke, tj. estimacija parametara, prilagođava trenutnom stanju u sistemu, odnosno dostupnim informacijama. Na osnovu tih informacija i njihovog ispitivanja osvježava se zakon po kom se vrši estimacija i time se modificuju procene u realnom vremenu. Adaptivnost kod algoritama za estimaciju tako je bitna s obzirom na to da se osobine sistema često menjaju, a te promene ostikavaju se u promenama vrednosti parametara sistema. Zbog toga, zadatok algoritma za estimaciju jeste da se priladi, odnosno adaptivno menjaju tako da može na odgovarajući način da prati promene u dinamici sistema, odnosno promene vrednosti parametara. Opisani pristup grafički je prikazan na slici 13.4.

Rešavanje postavljenog optimizacionog problema zahteva primenu numeričkih algoritama i matematičkih alata. Jedan od uobičajenih postupaka je rekursivni metod najmanjih kvadrata i njegove različite modifikacije, a najpoznatiji među njima je Kalman filter [60] koji je u novijoj istoriji sigurno najšire primenjivan algoritam za adaptivnu estimaciju. Drugu grupu široko primenjivanih algoritama čine gradientni algoritmi kao i njihove mnogoobrađene modifikacije. Detaljna studija adaptivnih algoritama za estimaciju s podacima o njihovim svojstvima, implementacijom i modifikacijama može se naći u [58, 61], a neka osnovna svojstva pomenutih algoritama biće data u nastavku.



Slika 13.4: Blok-sхема рекурзивног алгоритма за оцјену параметара заснованог на методу грешке предикције

13.4.1 Rekurzivni metod najmanjih kvadrata

Diskusiju o rekurzivnom metodu najmanjih kvadrata započemo analizom problema estimacije u N -tom trenutku. Nepoznati parametar ovako postavljenog problema može se estimirati primenom metoda najmanjih kvadrata, opisanog u prethodnim poglavljima (13.20), koji je nerekurzivan, primenom sledećeg izraza

$$\hat{\theta}^N = \left[\sum_{k=1}^N \varphi^k (\varphi^k)^T \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \varphi^k \eta^k \right], \quad (13.31)$$

gde je sa N označen текуći trenutak za estimaciju parametara, односно, estimacija parametra u prethodnom trenutku računa se po sledećoj formuli

$$\hat{\theta}^{N-1} = \left[\sum_{k=1}^{N-1} \varphi^k (\varphi^k)^T \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \varphi^k \eta^k \right]. \quad (13.32)$$

Ovako postavljeni izrazi podrazumevaju pamćenje vrednosti svih merenja od početka procesa estimacije, što bi bilo zahtevno i sa stanovišta memorije i računarske moći. U cilju prevaziđanja tih nedostataka, uvedena je smena

$$\mathbf{P}^N = \left[\sum_{k=1}^N \varphi^k (\varphi^k)^T \right]^{-1}, \quad (13.33)$$

gde je \mathbf{P} matica kovarijanse, iz čega se trivijalno dobija

$$[\mathbf{P}^N]^{-1} = [\mathbf{P}^{N-1}]^{-1} + \varphi^N (\varphi^N)^T. \quad (13.34)$$

Zamenom (13.33) u (13.31) i razlaganjem sume $\sum_{k=1}^N \varphi^k \eta^k$ na sumu do odbirka $N - 1$ i vrednosti u odbirku N sledi

$$\hat{\theta}^N = \mathbf{P}^N \left[\sum_{k=1}^{N-1} \varphi^k \eta^k + \varphi^N \eta^N \right], \quad (13.35)$$

a daljnjim uvrštanjem (13.32) i (13.34), izraz (13.35) postaje

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^N &= \mathbf{P}^N \left[[\mathbf{P}^{N-1}]^{-1} \hat{\theta}^{N-1} + \varphi^N \eta^N \right], \\ &= \mathbf{P}^N \left[[\mathbf{P}^N]^{-1} - \varphi^N (\varphi^N)^T \right] \hat{\theta}^{N-1} + \varphi^N \eta^N, \\ &= \hat{\theta}^{N-1} + \mathbf{P}^N \varphi^N [\eta^N - (\varphi^N)^T \hat{\theta}^{N-1}], \end{aligned} \quad (13.36)$$

Lako se može uočiti da ovakav izraz za estimaciju vrednosti parametara u tkućem trenutku N zahteva čuvanje prethodno estimirane vrednosti, prethodne vrednosti matrice kovarijanse i tekutih merenja, čime su nedostaci inicijalno definisanih postupka otklonjeni. Na taj način, dobijen je rekurzivni oblik metoda najmanjih kvadrata, skraćeno označen kao RLS (engl. *Recursive Least Squares Method, RLS*), i zapisan na sledeći način

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^N &= \hat{\theta}^{N-1} + \mathbf{K}^N \varepsilon^N, \\ \mathbf{K}^N &= \mathbf{P}^N \varphi^N, \\ \varepsilon^N &= \eta^N - (\varphi^N)^T \hat{\theta}^{N-1}. \end{aligned} \quad (13.37)$$

Član ε^N može se interpretirati kao greška predikcije, odnosno greška između izmerenog tekucog izlaznog signala η^N i estimirane vrednosti tog signala jedan korak unapred. Ovakav algoritam zahteva računanje inverzne matrice prilikom određivanja matrice kovarijanse \mathbf{P}^N u svakom koraku. Da bi se to izbeglo, posle stupak za adaptaciju \mathbf{P}^N može se pojestovativiti primenom lente o inverziji matrice¹⁷ koja je opisana u [52], pa se dobija alternativan izraz

$$\mathbf{P}^N = \mathbf{P}^{N-1} - \frac{\mathbf{P}^{N-1} \varphi^N (\varphi^N)^T \mathbf{P}^{N-1}}{1 + (\varphi^N)^T \mathbf{P}^{N-1} \varphi^N}. \quad (13.38)$$

¹⁷ Lema o inverziji matrice

U nastavku biće predstavljene neke modifikacije opisanog rekurzivnog algoritma koje su nastale u cilju boljeg praćenja vremenski promenljivih parametara.

Primer 13.3. Posmatrajmo kontinualni proces iz primera 13.1 opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{a}{s+b}$. Pretpostavimo da su parametri procesa u početnom trenutku $a = 3$ i $b = 4$, a njihova vrednost menja se na vrednost $a = 5$ i $b = 6$, posle 5 i 10 sekundi, redom. Implementirati algoritam za estimaciju parametara sistema i pratiti njihove promene.

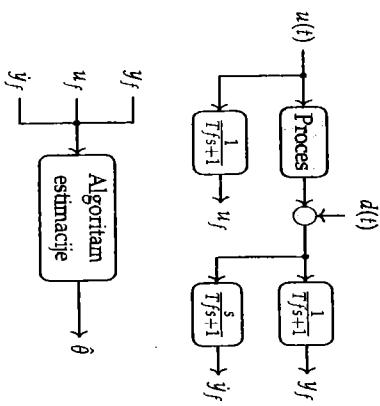
Rešenje:

Kao što je opisano u primeru ??, proces se može zapisati u obliku

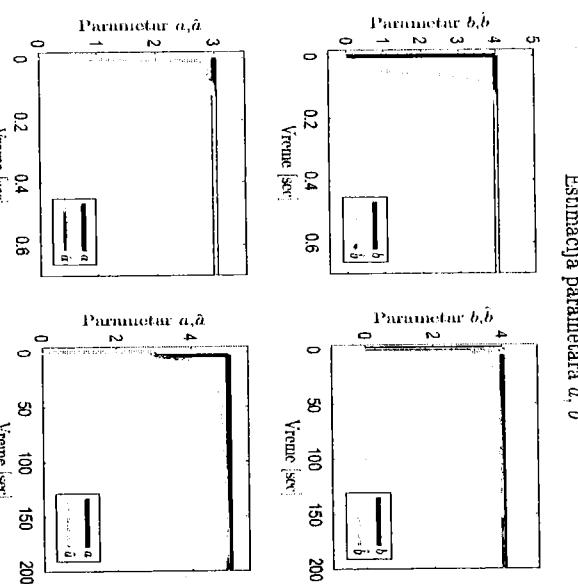
$$\dot{y}(t) = -by(t) + au(t) \quad (13.39)$$

koji predstavlja linearanu relaciju po nepoznatim parametrima opisanu u (13.9), gde je $\eta = y(t)$, $\varphi = [-y(t) \ u(t)]^T$ a vektor nepoznatih parametara $\theta = [b \ a]$.

Uzlazni signal je izabran u obliku $u(t) = \sin(0.5t) + \sin(t)$ a signali su prošli kroz filter prvog reda opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{Tfs+1}$ gde je konstanta filtra $T_f = 0.1$.



Slika 13.5: Blok-sHEMA eksperimenta za estimaciju parametara.



Shematski prikaz postavke eksperimenta prikazan je na slici 13.5, a kod za implementaciju postupka dat je u prikazu koda 13.3.

```

1 function theta = algoritam_estimacije(ulaz)
2 : phi=[-ulaz(1) ulaz(2) 1];
3 eta=ulaz(3);
4
5 persistent P_p
6 persistent theta_p
7 alpha=99999;
8 if isempty(P_p)
9 P_p=alpha * eye(length(phi), length(phi));
10 end
11 if isempty(theta_p)
12 theta_p=zeros(length(phi),1);
13 end
14 P=P-(P*phi*phi'*P_p)/(1+phi'*P_p*phi);
15 theta=theta_p+phi*(eta-phi.*theta_p);
16 theta_p=theta;
17 P=P';
18 end

```

Rezultati numeričke simulacije procesa estimacije parametara dobijeni na osnovu opisane postavke eksperimenta i primene RLS algoritma implementiranog u programskom jeziku Matlab prikazani su na slici 13.6.

Listing 13.3: MATLAB kod

Slika 13.6: Prikaz procesa estimacije parametara tokom vremena. U prvoj koloni (a) laze se slike koje prikazuju prve 3 sekunde procesa estimacije za obe parametra dok je u slike u drugoj koloni prikazano prvih 200 sekundi. Lako se može uočiti da u prvih fazama rada algoritma estimacije, nepoznati parametri se brzo estin- raju, međutim, kada dolje do promene parametara u drugoj sekundi, algoritmu je potrebno mnogo više vremena da uđe u ustajeno stanje i proceni tačnu vrednost parametara.

13.4.2 Rekurzivni metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja

Ukoliko pogledamo prethodno izvedene postupke za proces estimacije parametara, vidimo da merenja iz različitih vremenskih trenutaka na jednak način utiku pri određivanju vrednosti parametara u nekom, tekucem, trenutku. Takođe do njihove promene tokom vremena, jer je njihova izračunata vrednost je posledica ne samo trenutnih merenja nego i informacija i merenja koje je sistem generisao dok je imao drugačije vrednosti parametara. Kao posledica javlja se inercija u procesu estimacije, koji zahteva mnogo više vremena da bi odredio nove, promenjene vrednosti parametara. U cilju prevazilažanja opisanog problema uvodi se parametar faktora zaboravljanja.

Faktor zaboravljanja je parametar koji se uvodi s ciljem ograničavanja „memorije“ algoritma. Uvođenjem faktora zaboravljanja estimacija se efektivno vrši samo na osnovu bliske prethodne istorije ponašanja procesa, a ne od trenutka u kome je započet proces estimacije. Ovakav pristup podrazumeva promenu kriterijuma optimalnosti koj je mera valjanosti modela,

$$J = \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} (\eta^k - (\varphi^k)^T \hat{\theta})^2. \quad (13.40)$$

Parametar $\lambda \in [0, 1]$ koji označava faktor zaboravljanja definisce vremenski promenljivi faktor kojim se favorizuju „skorij“ merenja.

Na taj način, izborom vrednosti parametra λ , koja je bliska jediničnoj vrednosti, mogu se pratiti vremenski promenljivi parametri modela, čijaje dinamika promene relativno spora. Međutim, praćenje naglih promena parametara, kao i vremenski brzo promenljivih parametara, zahteva da se faktor λ menjaj adaptivno u svakom vremenskom koraku. Nainje, u opštem slučaju, što je vrednost λ više udaljena od 1, informacije iz prethodnih koraka biće brže zaboravljene, imaće manji uticaj na estimaciju tekutih vrednosti i algoritam će bolje pratiti brze promene parametara, ali će lošije pratiti konstantne i sporo promenljive parametre, dok će vrednost λ bliska jediničnoj vrednosti omogućiti dobro pranje konstantnih i sporo promenljivih parametara, uz lošije praćenje relativno brzo promenljivih parametara modela. Na taj način, izbor vrednosti faktora λ zavisi od dinamike promene parametara.

Ponavljanjem procedure opisane za rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata, modifikovani algoritam opisuju sledeći koraci

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^N &= \hat{\theta}^{N-1} + K^N \varepsilon^N, \\ K^N &= P^N \varphi^N, \\ \varepsilon^N &= \eta^N - (\varphi^N)^T \hat{\theta}^{N-1}, \\ P^N &= \frac{1}{\lambda} \left(P^{N-1} - \frac{P^{N-1} \varphi^N (\varphi^N)^T P^{N-1}}{\lambda + (\varphi^N)^T P^{N-1} \varphi^N} \right). \end{aligned} \quad (13.41)$$

Primer 13.4. Posmatrajmo kontinualni proces iz primera 13.1 i 13.3 opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{4}{s+4}$. Implementirati rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja za estimaciju parametara sistema i praćenje njihove promene.

Rešenje:

Kao što je opisano u primerima 13.1 i 13.3, proces se može zapisati u obliku

$$\dot{y} = -by(t) + au(t) \quad (13.42)$$

koji predstavlja linearanu relaciju po nepoznatim parametrima opisanu u (13.9), gde je $\eta = y(t)$, $\varphi = [-y(t) \ u(t)]^T$ a vektor nepoznatih parametara $\theta = [b \ a]$. Uzeti signal izabran je u obliku

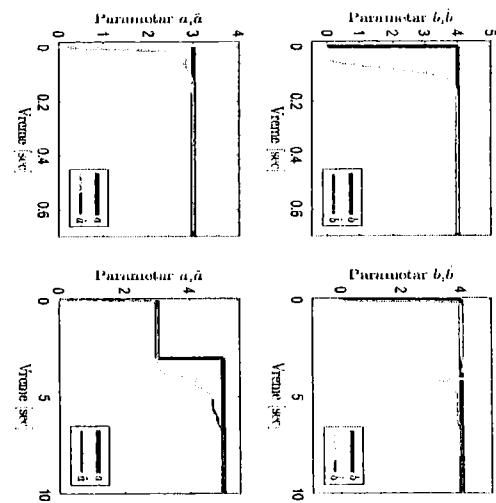
$$u(t) = \sin(0.5t) + \sin(t) \quad (13.43)$$

a signali su prošli kroz filter prvog reda opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad (13.44)$$

gde je konstanta filtra $T_1 = 0.1$. Kod u programskom paketu Matlab za implementaciju postupka prikazan je u listingu 13.4, a dobijeni rezultati numeričke simulacije na slici 13.7.

13.4.2 Estimacija parametara a, b



Slika 13-7. Prikaz procesa
estimacije parametara tokom
vremena. U prvoj koloni na-
laze se slike koje prikazuju

prve 3 sekunde procesa esti-
macije za oba parametra dok
je na sličama u drugoj koloni
pričekano prvih 10 sekundi.
Uočiti razliku u ponašanju
procesa estimacije u odnosu
na ponašanje prikazano na
slici 13-6. Primenom faktora
zaboravljanja promjenjena
vrednost parametara procesa
procenjena je već u šestoj
sekundi, dok je bez faktora
zaboravljanja ta vrednost
postigнутa u stotoj sekundi.

Pretpostavimo da su parametri konstantni i da je osnovni model procesa opisan jednačinama u prostoru stanja¹⁸,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k, \\ \eta_k &= \varphi_k^T \mathbf{x}_k + e_k, \end{aligned} \quad (13-45)$$

gde je vektor stanja \mathbf{x}_k ekvivalentan vektoru nepoznatih parametara θ . Esti-
macija optimalnih stanja $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ može se izračunati u funkciji izlaznih merenja
 η_1, \dots, η_k . Estimacija se vrši primenom Kalmanovog filtra, videti [60, 52, 58], i
može se pokazati da Kalmanov filter obezbeđuje optimalanu estimaciju vektora
stanja sistema u smislu minimiziranja kovarijanse greške estimacije. Primena
Kalmanovog filtra na model (13-45) daje osnovni rekurzivni algoritam najma-
nijih kvadrata, jedan od načina za modifikaciju algoritma, tako da se vremenski
promenljivi parametri mogu pratiti, jeste promena jednačina stanja (13-45) u

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \omega_k, \quad (13-46)$$

gde Φ_k predstavlja matricu prelaza sistema iz stanja \mathbf{x}_k u stanje \mathbf{x}_{k+1} , i pret-
postavimo da je ona stacionarna u vremenu, dok je ω_k beli šum sa poznatom
kovarijanom¹⁹. Izlaz iz sistema, odnosno jednačine merenja mogu se modelo-
vati kao

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k + \nu_k, \quad (13-47)$$

```

function theta = algoritam_adaptacije(ulaz)
    phi=[-ulaz(1) ulaz(2) ]';
    eta=ulaz(3);
    persistent P_p
    persistent theta_p
    alpha=9999;
    if isempty(P_p))
        P_p=alpha.*eye(length(phi),length(phi));
    end
    if isempty(theta_p))
        theta_p=zeros(length(phi),1);
    end
    lambda=9; %parametar faktora zaboravljanja
    P=(P_p-(P_p*phi'*phi)*P_p)/lambda;
    theta=theta_p+P*phi*(eta-phi'*theta_p);
    theta_p=theta;
    P_p=P;
end

```

Listing 13-4: MATLAB kod

13.4.3 Kalmanov filter

Problem estimacije parametara modela linearne regresije može se interpre-
tirati i kao formiranje Kalmanovog filtra. To je rekurzivni algoritam koji na
optimalan način rešava problem nalazeњa nepoznatih vrednosti tako da odstu-
panje od stvarnih vrednosti bude što manje na osnovu izmerenih zašutujenih
vrednosti nekog slučajnog procesa opisanog u prostoru stanja. Kalmanov fil-
ter pretpostavlja da se linnerani dinamički sistem napiše u formi jednačina koje

opisuju prostor stanja i da se na tim jednačinama izvede rekurzivna estimacija.
Opisan jednačinama u prostoru stanja¹⁸,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k, \\ \eta_k &= \varphi_k^T \mathbf{x}_k + e_k, \end{aligned} \quad (13-45)$$

gde je vektor stanja \mathbf{x}_k ekvivalentan vektoru nepoznatih parametara θ . Esti-
macija optimalnih stanja $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ može se izračunati u funkciji izlaznih merenja
 η_1, \dots, η_k . Estimacija se vrši primenom Kalmanovog filtra, videti [60, 52, 58], i
može se pokazati da Kalmanov filter obezbeđuje optimalanu estimaciju vektora
stanja sistema u smislu minimiziranja kovarijanse greške estimacije. Primena
Kalmanovog filtra na model (13-45) daje osnovni rekurzivni algoritam najma-
nijih kvadrata, jedan od načina za modifikaciju algoritma, tako da se vremenski
promenljivi parametri mogu pratiti, jeste promena jednačina stanja (13-45) u

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \omega_k, \quad (13-46)$$

gde Φ_k predstavlja matricu prelaza sistema iz stanja \mathbf{x}_k u stanje \mathbf{x}_{k+1} , i pret-
postavimo da je ona stacionarna u vremenu, dok je ω_k beli šum sa poznatom
kovarijanom¹⁹. Izlaz iz sistema, odnosno jednačine merenja mogu se modelo-
vati kao

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k + \nu_k, \quad (13-47)$$

gde je \mathbf{z}_k trenutna merena vrednost izlaza u trenutku k , matrica \mathbf{H}_k je matrica iz-
laza sistema, dok je ν_k šum (greška) merenja. Šum ω_k i šum merenja ν_k spadaju
u kategoriju Gausovog belega šuma sa nultom srednjom vrednošću i matricom
kovarijanse,

$$E[\omega_n \omega_m^T] = \begin{cases} Q_k, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (13-48)$$

¹⁸ U sklopu ovog udžbenika nismo se bavili temom sto statističkih
sistema i signala, kao ni terminologijum i alatima namenjenim
za analizu takvih sistema odno-
sno signala. Neophodni termini
biće uvedeni intuitivno, bez de-
tajnog objašnjenja, a čitacu upri-
ćujemo na sledeću udžbeniku [62,
63, 64, 65] gde je ta tematika de-
tajnije analizirana.

Ovakva, formalnija alternativa za posmatranje promenljivih parametara uvedena je sa ciljem modelovanja reâne situacije gde vektor parametara u (13.45) nije konstantan, nego varira u vremenu. Matrica kovarijansi R_k može se koristiti da opšte koliko brzo se očekuje da će različite komponente vektora θ variirati. Nakon uvoda u kom je definisana suština problema i gde su uvedene osnovne pretpostavke sledi izvođenje Kalmanovog filtra²⁰. Prepostavimo da se procenjeno stanje sistema \hat{x}_k u trenutku k može predstaviti kao linearna kombinacija estimiranog stanja na osnovu informacija iz prethodnog koraka \hat{x}_{k-1} i novih informacija o stanju sistema,

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k-1}). \quad (13.49)$$

Matrica K_k naziva se Kalmanovo pojačanje (engl. *Kalman Gain*) i „fizički“ predstavlja naš stepen poverenja u poslednje merenje koje je izvršeno, odnosno koliko „ozbiljno“ prihvatanje merenje u odnosu na predviđenu vrednost merenja $H\hat{x}_{k-1}$. Što elementi matrica Kalmanovog pojačanja imaju višu vrednost, to i informacija koja je sadržana u izrazu $(z_k - H\hat{x}_{k-1})$ ima veću važnost. Član $(z_k - H\hat{x}_{k-1})$ poznat je u literaturi kao inovacija merenja ili ostatak,

$$i_k = z_k - H\hat{x}_{k-1} \quad (13.50)$$

U cilju formiranja algoritma koji će estimirati nepoznata stanja (parametre), potrebno je formulariti kriterijum optiminalnosti koji će biti u funkciji greške ocene i čjom minimizacijom će se identifikovati optimalne vrednosti Kalmanovog pojačanja K_k . Greška estimacije u trenutku k je

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_{k-1} \quad (13.52)$$

a kriterijum optimalnosti u formi metoda najmanjih kvadrata sudi se na

$$P_k = E[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T] = E[(x_k - \hat{x}_{k-1})(x_k - \hat{x}_{k-1})^T]. \quad (13.53)$$

Dajnjim uvršavanjem (13.47) u (13.53) sledi

$$\tilde{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(H(x_k - \hat{x}_{k-1}) + v_k). \quad (13.54)$$

Zamenom (13.54) u (13.53) dobijamo²¹

$$E[v_n v_k^T] = \begin{cases} R_k, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \quad (13.49)$$

Lako se može uočiti da greška estimacije stanja sistema $x_k - \hat{x}_{k-1}$ nije u korelaciji sa vektorom mernog šuma pa se kriterijum optimalnosti može zapisati na sledeći način

²⁰ Rudolf Emil Kalman (mađ. Kálmán Rudolf Emőd; Budimpešta, 19. travnja 1930. – Češništvo, 2. jul 2016) bio je američki inženjer elektrotehnike, matematičar i pronašao mađarskog porekla. Rudolf Kalman rođen je u Budimpešti 1930. a u SAD je emigrirao 1943. Diplomirao je 1953. i magistrirao godinu dana kasnije na MIT-u, a doktorirao 1957. na Univerzitetu Kolumbijskog. Bio je profesor na Univerzitetu Stanford od 1964. do 1971., a potom profesor i direktor Centra za matematičku teoriju sistema na Univerzitetu Florida od 1971. do 1992. Najpoznatiji je po razvoju Kalmanovog filtra, matematičkih algoritma koji imaju široku primenu u obradi signala, upravljanju sistemima i mnogim drugim oblastima. Za ovo delo, američki predsednik Barack Obama dodelio mu je Nacionalnu nagradu za nauku 2009. godine.

²¹ $P_k = E[(I - K_k H)(x_k - \hat{x}_{k-1}) - K_k v_k]^T]$ $+ K_k E[v_k v_k^T] K_k^T$ $+ K_k E[(v_k - K_k v_k)^T] K_k^T$

Zamenom (13.49) i (13.53) u (13.56) dobijamo

$$P_k = (I - K_k H)P_{k-1}(I - K_k H) + K_k R_k K_k^T$$
 $= P_{k-1} - K_k H P_{k-1} - P_{k-1} H^T K_k^T + K_k (H P_{k-1} H^T + R_k) K_k^T \quad (13.57)$

gde je P_{k-1} prethodno estimirana vrednost. Trag matrice jedнак je tragu transponovane matrice pa se trag matrice P_k sa ozнакom $T[P_k]$ može zapisati kao

$$T[P_k] = T[P_{k-1}] - 2T[K_k H P_{k-1}^T] - T[K_k (H P_{k-1}^T H^T + R_k) K_k^T]. \quad (13.58)$$

Minimalne vrednosti kriterijuma P_k i optimalne vrednosti parametra Kalmanovog pojačanja K_k dobije se izjednačavanjem izvoda (13.58) po K_k sa nulom,

$$\frac{dT[P_k]}{dK_k} = -2(H P_{k-1}^T)^T + 2K_k(H P_{k-1}^T H^T + R_k)^{-1}. \quad (13.59)$$

a rešavanjem $\frac{dT[P_k]}{dK_k} = 0$ po K_k dobijamo

$$K_k = P_k^{-1} H^T (H P_{k-1}^T H^T + R_k)^{-1}. \quad (13.60)$$

Dobijeni izraz je jednačina Kalmanovog pojačanja, pri čemu se kovarijansom greške ili kovarijansom inovacije S_k naziva član

$$S_k = H P_k^{-1} H^T + R_k. \quad (13.61)$$

Konačno, uvršavanjem (13.60) u (13.57) sledi

$$P_k = P_{k-1} - P_k^{-1} H^T (H P_{k-1}^T H^T + R_k)^{-1} H P_k^{-1}$$
 $= P_k^{-1} - K_k H P_k^{-1}$
 $= (I - K_k H)P_k^{-1}. \quad (13.62)$

Prethodna jednačina pokazuje zavisnost *a posteriori* (posle merenja) matrice kovarijanse od *a priori* (pre merenja) matrice kovarijanse. Preostalo je samo da se pokaže kako prethodno stanje sistema utiče na sadašnje. Ako napišemo

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi \hat{x}_k^-, \quad (13.63)$$

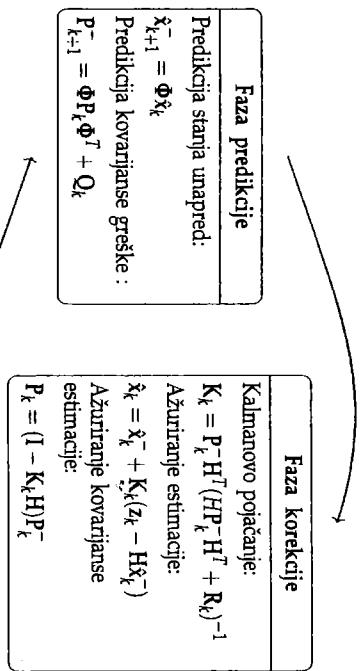
tada je greška estimacije pre nego što stigne novo merenje

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1}^- &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \\ &= (\Phi x_k + \omega_k) - \Phi \hat{x}_k^- \\ &= \Phi \hat{x}_k^- + \omega_k.\end{aligned}$$

Kada prošrimo (13.53) na trenutak $k+1$, sledi²²

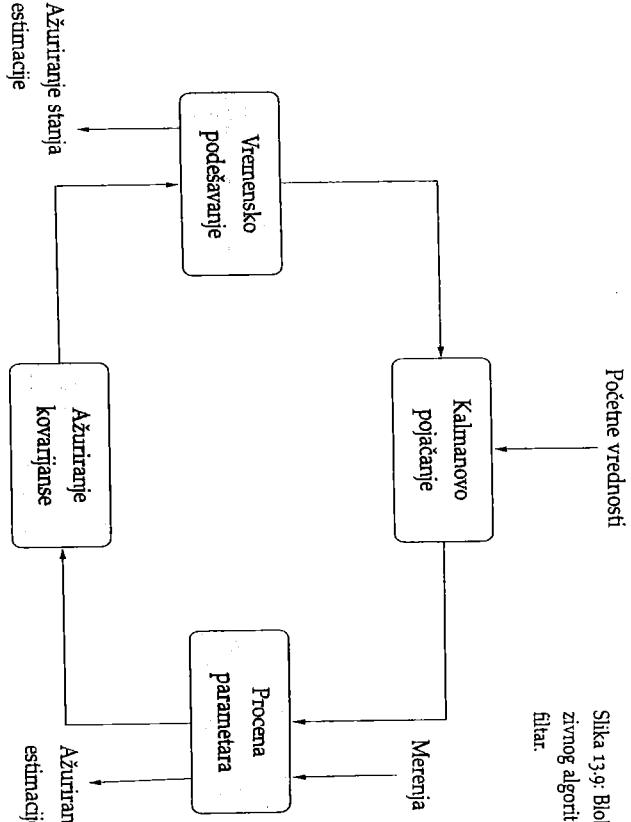
$$\begin{aligned}P_{k+1}^- &= E[\hat{x}_{k+1}^-(\hat{x}_{k+1}^-)^T] \\ &= E[(\Phi \hat{x}_k^- + \omega_k)(\Phi \hat{x}_k^- + \omega_k)^T] \\ &= E[(\Phi \hat{x}_k^-)(\Phi \hat{x}_k^-)^T] + E[\omega_k \omega_k^T] \\ &= \Phi P_k^- \Phi^T + Q_k \quad (13.65)\end{aligned}$$

Na ovaj način, primenom Kalmanovog filtra na model (13.46) formira se rekurentni algoritam čije dobijene korake možemo da objedinimo na jednom mestu i prikazati su na blok-schemama 13.8 i 13.9.



Slika 13.8: Blok-schema rekurentnog algoritma, Kalmanov filter.

²² Napominjeno da greška \hat{x}_k i ω_k imaju nulti korelaciju jer se šum ω_k akumulira u periodu između trenutaka k i $k+1$, dok je \hat{x}_k greška do trenutka k .



Slika 13.9: Blok-schema rekurentnog algoritma, Kalmanov filter.

Primer 13.5. Posmatrajmo isti problem kao u primerima 13.1 i 13.3 opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{a}{s+b}$. Implementirati Kalmanov filter za estimaciju parametara u vremenu.

Rešenje:

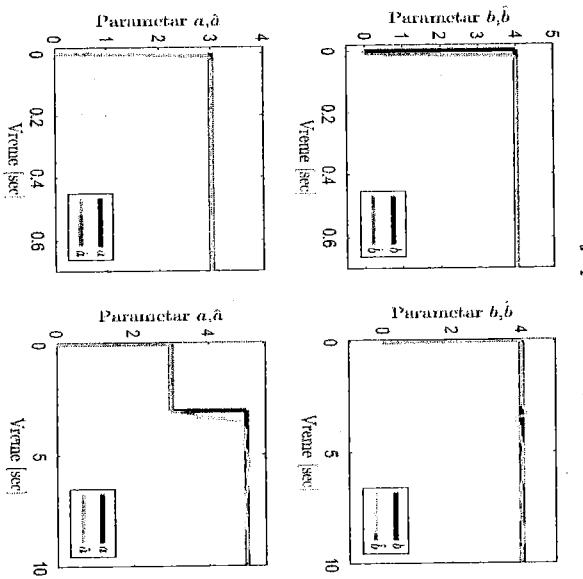
Kod u programskom paketu Matlab za implementaciju postupka prikazan je u listingu 13.5, a dobijeni rezultati numeričke simulacije na slici 13.10.

```

1 function theta = algoritam_adaptacije(ulaz)
2   phi=[-ulaz(1) ulaz(2) 1];
3   eta=ulaz(3);
4
5 persistent P_p
6 persistent theta_p
7 persistent Phi
8 persistent Q
9 persistent R
10 alpha=99999;
11
12 %Postavka pocetnih vrednosti
13 if isempty(P_p)
14   P_p=alpha.*eye(length(phi),length(phi));
15 end
16
17 if isempty(theta_p)
18   theta_p=zeros(length(phi),1);
19 end
20 if isempty(Phi)
21   Phi=eye(length(phi));
22 end
23 if isempty(Q)
24   Q=1e-6*eye(length(phi));
25 end
26
27 if isempty(R)
28   R=eye(length(phi));
29 end
30
31 Hphi';
32
33 %Predikcija vektora stanja i kovarijanse
34 theta=Phi*theta_p;
35 P=phi*P_p*phi+Q;
36
37 %Računanje Kalmanovog pojačanja
38 K_k=P*H' *inv(H*P*H'+R);
39
40 %Korekcija estimacije i kovarijanse
41 theta=theta_p+K_k*(eta-H*theta_p);
42 P=P_p-K_k*H*P_p;
43 theta_p=theta;
44
45 P_p=P;
46
end

```

Listing 13.5: MATLAB kod



Slike 13.10: Prikaz procesa

estimacije parametara pri
menom Kalmanovog filtra
tokom vremena. U prvoj
koloni nalaze se slike koje
prikazuju prve 3 sekunde
procesa estimacije za oba
parametra dok je na slikama
u drugoj koloni prikazano pr
vih 10 sekundi. Uočiti razliku
u ponašanju procesa estima
cije u odnosu na ponašanje
pričekano na slikama 13.6 i
13.7.

Slike 13.10: Prikaz procesa
estimacije parametara pri
menom Kalmanovog filtra
tokom vremena. U prvoj
koloni nalaze se slike koje
prikazuju prve 3 sekunde
procesa estimacije za oba
parametra dok je na slikama
u drugoj koloni prikazano pr
vih 10 sekundi. Uočiti razliku
u ponašanju procesa estima
cije u odnosu na ponašanje
pričekano na slikama 13.6 i
13.7.

13.5 Gradijentne metode

Kao mogući algoritam za estimaciju parametara sistema odnosno minimizaciju kvadratnog kriterijuma greške predikcije,

$$J = \frac{1}{2}(\eta - \tilde{\eta})^T = \frac{1}{2}\tilde{\eta}^2, \quad (13.66)$$

gde je η vektor merenih vrednosti izlaza, $\tilde{\eta}$ vektor procenjenih vrednosti izlaza iz sistema, u sklopu ovog udžbenika biće obraden metod koji se naziva algoritam najbržeg pada (engl. *Steepest Descent*) kao jedan od osnovnih metoda za rešavanje problema minimizacije bez ograničenja. Zasnovan na negativnom gradijentu, odnosno opadajućem pravcu, u literaturi se ovaj metod često naziva gradijentni metod (engl. *Gradient method*). Drugim rečima, estimacija parametara vrši se primenom gradijentnog zakona adaptacije²³

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}, \quad (13.67)$$

koji zapisan u diskretnoj iterativnoj formi ima oblik

$$\hat{\theta}_{k+1}(t) = \hat{\theta}_k(t) - \Gamma \frac{\partial J(\hat{\theta}_k(t))}{\partial \theta}, \quad (13.68)$$

gde je $\frac{\partial J}{\partial \theta}$ gradijent koji diferencira kriterijunska funkcija (13.66) po elementu θ_i vektora parametara θ . Znak "−" označava da se približavanje procenjenom minimumu kriterijunske funkcije vrši u antigradijentnom smjeru, dok je Γ konstantna, pozitivno definirana matica skalara koja definiše veličinu koraka u navedenom smjeru.

Uvrštavajući izraz (13.66) u gradijentni postupak (13.67) nalazimo gradijentni zakon adaptacije²⁴

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \Gamma \Phi \tilde{\eta}. \quad (13.69)$$

Da bismo ispitali pod kojim uslovima i da li $\dot{\theta}$ konvergira ka tačnim vrednostima θ , potrebno je da izvršimo analizu konvergencije predloženog algoritma, odnosno zakona adaptacije (13.69), što će biti opisano u nastavku.

13.5.1 Analiza konvergencije i stabilnosti postupaka

Konvergencijska svojstva predloženog algoritma razmatrana su primenom teorije stabilnosti, odnosno direktnog metoda Ljapunova [66, 1]. U duhu pomenute teorije, posmatraćemo kandidata za funkciju Ljapunova u obliku

$$V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}. \quad (13.70)$$

Data funkcija je strogo pozitivno definitna, a njen izvod duž „trajektorije“ procesa adaptacije (13.69) je

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}. \quad (13.71)$$

Uvrštavanjem predloženog zakona adaptacije (13.69) u izvod kandidata za funkciju Ljapunova (13.71), on postaje

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \Gamma \Phi \tilde{\eta} \\ &= -\dot{\theta}^T \Phi \Phi^T \dot{\theta} = -(\dot{\theta}^T \Phi)(\dot{\theta}^T \Phi)^T, \end{aligned} \quad (13.72)$$

gde možemo da primetimo da je \dot{V} negativno, što znači da vrednost funkcije V opada, odnosno da se greška estimacije smanjuje tokom vremena. Na ovaj način potvrđena je konvergencija predloženog postupka za estimaciju parametara. Lako se može zaključiti i da vrednosti matrice Γ utiču na brzinu postupka konvergencije, odnosno koliko brzo će se estimirane vrednosti parametara približiti stvarnim vrednostima.

Napomena 8. Da bismo pokušali da objasnimo značenje teoreme „perzistentno pobudujuće“ ulaza sa uslovima koji se odnose na mogućnost identifikacije strukture modela, posmatraćemo $\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$ kao uslov da kriterijum optimalnosti J ima optimum²⁵,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} &= 0, \\ \dot{\theta} &= -\Gamma \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -\Gamma \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial \theta} \right)^T \tilde{\eta}, \\ &= -\Gamma(-1) \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \right)^T \tilde{\eta} = \Gamma \Phi \tilde{\eta}. \end{aligned} \quad (13.73)$$

Jasno se može primetiti da $\Phi \Phi^T$ mora biti punog ranga da bi se našla inverzna matica.

²³ Ne gubeći na opštosti, postupak kao i analiza konvergencije biće izvedeni u kontinualnom domenu zbog lakšeg razumevanja, međutim, do diskretnе implementacije koja je neophodna na digitalnum uređajima lako se dobi pri mestom numeričkih postupaka za diskreteizaciju i padživim izborom vremena održanja.

²⁴ Detaljno izvođenje izraza koji sledi

²⁵ Detaljno izvođenje izraza koji sledi

Primer 13.6. Posmatrajmo sistem prvog reda opisan funkcijom prenosa.

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \quad (13.75)$$

gde su oba parametra, a i b , nepoznati, prema tome vektor nepoznatih parametara je $\theta = [a \ b]^T$. Prepostavimo da su izlaz iz sistema i njegov prvi izvod direktno merljivi signali. Da bismo estimirali vektor nepoznatih parametara, primenimo predloženu proceduru za estimaciju parametara primenom građenog algoritma.

Neka je ulazni signal oblika $u(t) = \sin(10t) + \sin(5t)$ a sistem možemo zapisati u formi linearne relacije $\dot{y}(t) = -by(t) + au(t)$. Zakon adaptacije (13.69) postaje

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} -y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \ddot{y}. \quad (13.76)$$

Predloženi zakon adaptacije realizovan je u programskom jeziku Matlab i prikazan je u sklopu listinga 13.6.

```

1 function theta = gradientni_adijent(ulaz,Ts)
2 %Ts - vreme odabiranja
3 %ulaz - signali y, u, i - izvod
4 %Inicijalizacija
5 %Parametar a, b
6 %ulaz - signali y, u, i - izvod
7 phi=[-ulaz(1) ulaz(2) 1];
8 eta=ulaz(3);
9 gamma=20;
10 persist theta,p
11 if isempty(theta.p)
12     theta.p=zeros(length(phi),1);
13 end
14 %Gradijentni model
15 %hat_eta=theta.p.*phi;
16 %tilde_eta=eta-hat_eta;
17
18 %Gradijentni zakon adaptacije
19 Gamma=gamma.*eye(length(phi));
20 theta=theta.p-Ts*Gamma*phi.*tilde_eta;
21 theta.p=theta;
22 theta.p=theta;
23
24 end

```

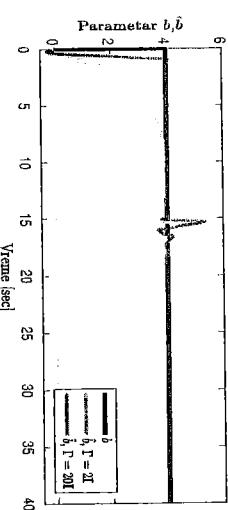
U nastavku će biti prikazani rezultati numeričke simulacije, pri čemu će biti razmatrane različite studije problema bez i sa delovanjem šuma.

- Slučaj kada na izlaz sistema ne deluje poremećaj, a vrednosti parametara naglo se menjaju.

Za tačne vrednosti parametara odabrane su vrednosti $a = 3$ i $b = 4$. U trenutku $t = 15$ sekundi vrednost parametra a naglo se promeni na $a = 5$. Za početna pogodanja nepoznatih parametara odabrane su vrednosti $\hat{a}(0) = 0$ i $\hat{b}(0) = 0$. Treba primetiti i to da se brzina konvergencije procesa estimacije poveća sa povećanjem vrednosti koeficijenta matrica pojačanja adaptacije Γ .

Simulacija je radena za vrednosti $\Gamma = 21$ i $\Gamma = 201$. Rezultati simulacije prikazani su na slici 13.11. Proces adaptacije počeo je u trenutku $t = 0$ sekundi i može se primetiti da su identifikovane tačne vrednosti parametara.

Estimacija parametara a, b

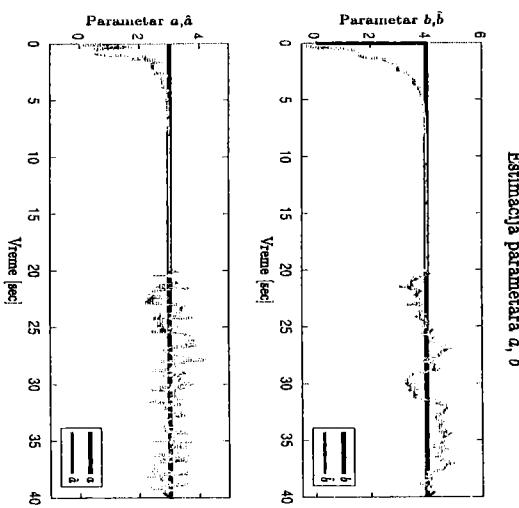


Slika 13.11: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ . Slika ilustruje scenario kada nema delovanja poremećaja na izlaz sistema i kada se stvarne vrednosti parametara naglo menjaju.

Listing 13.6: MATLAB kod

• Slučaj kada na izlaz sistema deluje šum.

Pretpostavlja se da su stvarne vrednosti parametara konstante $a = 3$ i $b = 4$, a u trenutku $t = 15$ počinje delovati šum koji je modelovan kao slučajno generisan broj sa amplitudom iz intervala -0.15 do 0.15 . Početne vrednosti nepoznatih parametara su $\hat{a}(0) = 0$ i $\hat{b}(0) = 0$. Proces estimacije prikazan je na slici 13.12, gde se može videti da je proces adaptacije počeo u $t = 0$ sekundi.



Slika 13.12: Poredjenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ . Slika ilustruje scenario kada na izlazni signal deluje šum.

13.6 Gradijentni metod sa integralnim kriterijumom

Prisustvo šuma merenja neizbežna je pojava kod sistema u realnom okruženju, usled čega trenutna vrednost greške, odnosno raznica izlaza iz modela i izlaza iz sistema može biti nepouzdan pokazateљ kvaliteta estimacije. Iz ponuđenih razloga predlaže se da proces adaptacije ne zavisi samo od trenutne greške nego od ukupne greške, a s tim u vezi i da kriterijum optimalnosti ima

sledeću formu,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \dot{\eta}^2(\tau, t) d\tau, \quad (13.77)$$

* Parametar β ima sličnu ulogu u ponašanju algoritma, kao i parametar λ koji je predstavljan faktor zaboravljanja u algoritmu. Rekurzivni metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja opisan u poglavljiju 13.4.2.

* Detaljno izvođenje izraza koji sledi

gdje je $\dot{\eta}(t, \tau) = \phi^T(\tau) \dot{\theta}(t)$. Definisanjem kriterijuma optimalnost na ovač način, uticaj trenutne i prethodnih grešaka u ukupnom kriterijumu nije isti. Njihov uticaj eksponencijalno opada što je greška više udaljena od trenutne vrednosti. Koliki je eksponencijalno manji uticaj greške iz prethodnih trenutaka zadato je parametrom β koji određuje koliko se brzo smanjuje eksponencijalna funkcija²⁶.

Parametrom β koji određuje koliko se brzo smanjuje eksponencijalna funkcija²⁶. Uvrštavanjem izraza (13.77) u gradijentni postupak (13.67) nalazimo gradijentni zakon adaptacije²⁷,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\Gamma \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \\ &= \Gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \eta(\tau) d\tau - \Gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^T(\tau) \dot{\theta}(t) d\tau \\ &= -\Gamma \left(\underbrace{\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau}_{R} \dot{\theta}(t) - \underbrace{\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \phi(\tau) \eta(\tau) d\tau}_{Q} \right). \quad (13.78) \end{aligned}$$

Dobijeni izraz u literaturi se sreće u kompaktnoj formi kao skup koraka,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\Gamma (R(t)\dot{\theta}(t) - Q(t)), \\ \dot{R} &= -\beta R + \eta \eta^T, \\ \dot{Q} &= -\beta Q + \Phi \eta. \end{aligned} \quad (13.79)$$

Ukoliko primenimo postupak diskretizacije pominjom numeričke integracijske levim pravougaočnicima²⁸ na dobijeni postupak (13.79), dobijemo sledeće diferencne jednačine po kojima se opisani postupak može implementirati na

²⁶ Čiji je postupak opisan u poglavljiju 10

digitalnom uređaju

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k+1} &= \hat{\theta}_k - \Gamma (\mathbf{R}_k(t)\hat{\theta}_k(t) - \mathbf{Q}_k(t)), \\ \mathbf{R}_{k+1} &= \mathbf{R}_k - \beta \mathbf{R} + \varphi \varphi^T, \\ \mathbf{Q}_{k+1} &= \mathbf{Q}_k - \beta \mathbf{Q} + \Phi \eta. \end{aligned} \quad (13.80)$$

13.6.1 Analiza konvergencije i stabilnosti postupka

Konvergencija gradijentnog algoritma sa integralnim kriterijumom može se analizirati na isti način kao što je opisano u sekciji 13.5 uz primenu teorije Ljapunova. Predloženi oblik za kandidata Ljapunovljeve funkcije je

$$V = \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} \hat{\theta}. \quad (13.81)$$

Predložena forma Ljapunovljevog kandidata je pozitivno definitsna, dok je njen izvod duž „trajektorije“ procesa estimacije²⁹

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \\ &= \hat{\theta}^T \Gamma^{-1} \Gamma (\mathbf{R}(t)\hat{\theta}(t) - \mathbf{Q}(t)) \\ &= -\hat{\theta}^T \mathbf{R}(t)\hat{\theta}. \end{aligned} \quad (13.82)$$

Dobijeni izraz je uvek negativan, s obzirom na to da član $\mathbf{R}(t)$ uvek ima pozitivnu vrednost³⁰ tokom procesa estimacije.

Primer 13.7. Posmatrajmo problem opisan u primeru 13.6. Primenom gradijentnog algoritma sa integralnim kriterijumom izvršće se procena nepoznatih parametara koja je realizovana u programskom jeziku Matlab i prikazana na listingu koda 13.7. Sistem je pobuđen istim ulaznim signalom kao u primeru 13.6, a eksperiment je vršen bez i sa pristupom poremetaja. Dobijeni rezultati numeričke simulacije prikazani su na slikama 13.13 i 13.14.

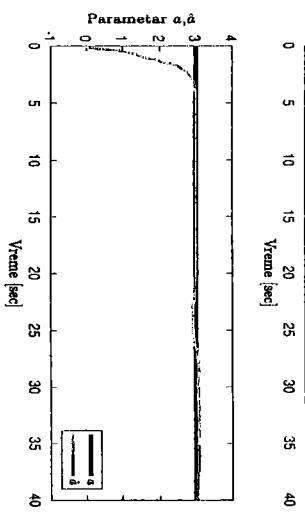
```

1 function theta = gradientni_integralni.algoritam(ulaz,Ts)
2 %Ts - vreme odabiranja
3 %ulaz - siganli y, u, i y-izvod
4 %inicijalizacija
5 phi=[-ulaz(1) ulaz(2) ]';
6 eta=ulaz(3);
7 persistent theta_p
8 persistent R_p
9 persistent Q_p
10 persistent R_p
11 persistent Q_p
12 if isempty(theta_p)
13 theta_p=zeros(length(phi),1);
14 end
15 if isempty(R_p)
16 R_p=zeros(length(phi), length(phi));
17 end
18 if isempty(Q_p)
19 R_p=zeros(1,length(phi),1);
20 end
21 Q_p=zeros(1,length(phi),1);
22 end
23 bet=0.1;
24 gamma=2;
25 Gamma=gamma.*eye(length(phi));
26 %Građenje zakon adaptacije
27 %Građenje zakon adaptacije
28 Q(t)=int_0^t e^{-beta*(t-\tau)}\varphi(\tau)\eta(\tau)d\tau
29 Q=0.01*Ts*(-beta, -Q+p*phi*eta);
30 R=R_p-Ts*(-beta*p-R_p+phi*phi');
31 theta=theta_p-Ts*Gamma*(R*theta_p-Q);
32 theta.a=p*theta;
33 theta.a.p=theta;
34 theta.a.p=theta;
35 Q_p=0;
36 R_p=R;
37 end

```

Listing 13.7: MATLAB kod

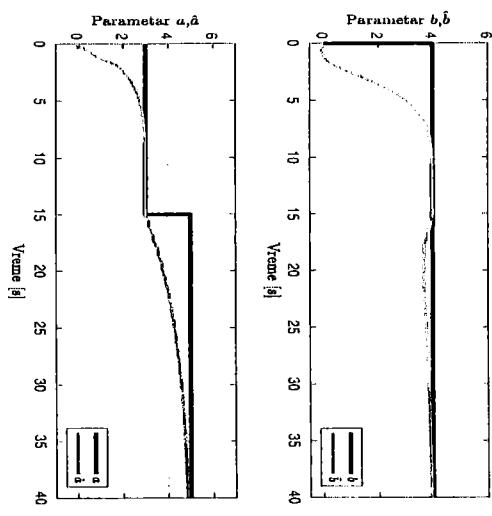
²⁹ Član $\mathbf{R}(t)$ dobije se integralnim funkcije koju čime kvadratni član i eksponenциjalna funkcija koja je po svojoj prirodi uvek pozitivna.



Estimacija parametara a, \hat{a}

Slika 13.14: Poređenje stvar-

nih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ . Slika ilustruje scenario kada nema delovanja pozmeđa na izlaz sistema i kada se stvarne vrednosti parametara menjaju naglo.



Slika 13.13: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ . Slika ilustruje scenario kada nema delovanja pozmeđa na izlaz sistema i kada se stvarne vrednosti parametara menjaju naglo.

A

Dodatak

Tablica Laplasove transformacije, $\tilde{\jmath}$ -transformacije i modifikovane $\tilde{\jmath}$ -transformacije

$F(s)$	$f(t)$	$F(z)$	$F(z, m)$
e^{-kTs}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}	z^{m-1-k}
1	$\delta(t)$	1	0
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{k!} t^k$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} \right)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \sin m \omega_0 T - \sin(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos m \omega_0 T + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos \omega_0 t$	$\frac{z(2z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \cos m \omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos m \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \sin \omega_0 m T + e^{-aT} \sin(1-m)\omega_0 T] e^{-amT}}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \cos \omega_0 m T - e^{-aT} \cos(1-m)\omega_0 T] e^{-amT}}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$

Tablica 3-transformacije

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$h(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$a^k h(k)$	$\frac{z}{z-a}$
$ka^k h(k)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\sin \theta k$	$\frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
$\cos \theta k$	$\frac{z(z-\cos \theta)}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$

Bibliografija

- [1] M.R. Rapaić i Z.D. Jelić. Projektoranje linearnih regulatora i estimatora u prostoru stanja. Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2014., str. 409.
- [2] Ronald Newbold Bracewell and Ronald N Bracewell. *The Fourier transform and its applications*. Vol. 31999. McGraw-Hill New York, 1986.
- [3] J.F. de Canete et al. *Automatic Control Systems in Biomedical Engineering: An Interactive Educational Approach*. Springer International Publishing, 2018.
- [4] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions. Prentice-Hall, 1991.
- [5] Čedomir Milosavljević. *Teorija automatskog upravljanja - 2*. Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 2007.
- [6] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2010.
- [7] Zoran Vukic. *Nonlinear Control Systems*. CRC Press, 2003.
- [8] Li Sun, Donghai Li, and Kwang Y Lee. "Optimal disturbance rejection for PI controller with constraints on relative delay margin". In: *ISA transactions* 63 (2016), pp. 103-111.
- [9] Lane Desborough and Randy Miller. "Increasing customer value of industrial control performance monitoring-Honeywell's experience". In: *AIChE symposium series*, 326. New York: American Institute of Chemical Engineers, 1998. 2002, pp. 169-189.

