Optimalno upravljanje

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

30. decembar 2022.

1 Nespecificirani vremenski interval

Posmatrajmo sistem koji je opisan skupom diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_k), \quad i = 1, ..., n, \quad k = 1, ..., m,$$

gde su x_i promenljive stanja, u_k upravljačke (ulazne) promenljive (često samo upravljanje) i t je nezavisna promenljiva.

Naš zadatak je da pronađemo optimalno upravljanje $u = u_{opt}$, odnosno optimalan način na koji menjamo ulaz kako bismo dobili željeni izlaz. Kvalitet izlaza ocenjujemo kriterijumom optimalnosti

$$I = \int_0^T F(t, x_i, u_k) dt.$$

Pretpostavićemo da je $x_i(0) = \alpha_i$ i da je T poznato.
Formiramo prošireni kriterijum optimalnosti

$$\bar{I} = \int_0^T \left\{ F(t, x_i, u_k) - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)[\dot{x}_i - f_i(t, x_i, u_k)] \right\} dt.$$

Ovaj problem se svodi na pronalaženje optimuma **Hamiltonove funkcije**

$$H(t, x_i, u_k, p_i) = F(t, x_i, u_k) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(t, x_i, u_k).$$

Potrebni uslovi za pronalaženje optimuma su

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0.$$

Ukoliko T nije specificirano, onda imamo sledeći *prirodno granični uslov*

$$\boxed{H(T) = 0.}$$

1.1 Zadaci

1. Dat je rezervoar kod koga je nivo tečnosti u početnom trenutku $1cm$ ispod željenog nivoa. Naći optimalnu strategiju upravljanja i optimalnu trajektoriju kako bi se nivo tečnosti vratio u ravnotežno stanje. Dinamički nivo sistema (promena nivoa tečnosti) može se opisati diferencijalnom jednačinom

$$\dot{x} = -2x + u,$$

dok se kriterijum optimalnosti definiše na sledeći način

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T (1 + u^2)dt,$$

pri čemu T nije poznato.

Rešenje.
Formiramo Hamiltonovu funkciju:

$$H = \frac{1}{2}(1 + u^2) + p(-2x + u).$$

Sada koristimo kanonske jednačine:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = -2x + u \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 2p \\
\frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \implies u + p = 0.
\end{aligned}$$

Poznati su nam granični uslovi

$$\begin{aligned}
x(0) &= -0.01 \\
x(T) &= 0.
\end{aligned}$$

Dalje, možemo da odredimo $p(t)$, rešavanjem diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}
\dot{p} - 2p &= 0 \\
m - 2 &= 0 \\
m &= 2 \\
p(t) &= C_1 e^{2t}
\end{aligned}$$

Iz jednačine $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \implies u + p = 0$ nam slijedi da je $u = -p$

$$\begin{aligned}
u(t) &= -C_1 e^{2t} \\
H(T) &= \frac{1}{2}(1 + u^2(T)) - 2x(T)p(T) + u(T)p(T) = 0
\end{aligned}$$

Potrebno je da odredimo konstantu C_1:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - \frac{1}{2}C_1^2 e^{4T} = 0 \\
&-\frac{1}{2}C_1^2 e^{4T} = -\frac{1}{2} \\
&C_1^2 e^{4T} = 1/ \\
&C_1 e^{2T} = \pm 1 \implies C_1 = \pm\frac{1}{e^{2T}}
\end{aligned}$$

Ekstremalu $x(t)$ možemo odrediti rešavanjem sledeće dierencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = -2x + u \\
&\dot{x} + 2x = -C_1 e^{2t} \\
&x = x_h + x_p
\end{aligned}$$

Pošto je u pitanju nehomogena diferencijalna jednačina, potrebno je da odredimo i homogeno i partikularno rešenje:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} + 2x = 0 \\
&m + 2 = 0 \implies m = -2 \\
&x_h = C_2 e^{-2t} \\
&x_p = C_3 e^{2t} \\
&\dot{x}_p = 2C_3 e^{2t} \\
&4C_3 e^{2t} = -C_1 e^{2t} \\
&C_3 = -\frac{C_1}{4}
\end{aligned}$$

Dobijamo opšti oblik ekstremale $x(t)$. Uvrštavanjem prirodnograničnih uslova, možemo odrediti konstante C_2 i C_1:

$$\begin{aligned}
&x(t) = C_2 e^{-2t} - \frac{C_1}{4}e^{2t} \\
&x(0) = C_2 - \frac{C_1}{4} = -0.01 \implies C_2 = -0.01 + \frac{C_1}{4} \\
&x(T) = C_2 e^{-2T} - \frac{C_1}{4}e^{2T} = 0 \implies x(T) = \Big(-0.01 + \frac{C_1}{4}\Big)e^{-2T} - \frac{C_1}{4}e^{2T} = 0
\end{aligned}$$

Odredili smo da konstanta C_1 ima dve vrednosti, pa je potrebno da ispitamo oba slučaja i odredimo T:

- $C_1 = e^{-2T}$

$$
\begin{aligned}
&-0.01e^{-2T} + \frac{e^{-4T}}{4} - \frac{e^{-2T}}{4}e^{2T} = 0 \\
&e^{-4T} - 0.04e^{-2T} - 1 = 0 \\
&m = e^{-2T} \\
&m^2 - 0.04m - 1 = 0 \\
&m_1 = -0.9802 \\
&m_2 = 1.0202
\end{aligned}
$$

Za slučaj $m_1 = -0.9802$ dobijamo

$$e^{-2T} = -0.9802$$

što nije moguće, tako da ovaj slučaj odbacujemo.
Za slučaj $m_2 = 1.0202$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&e^{-2T} = 1.0202 \\
&T = -0.01
\end{aligned}
$$

što nije moguće (negativna vrednost za vreme), tako da i ovaj slučaj odbacujemo.

- $C_1 = -e^{-2T}$

$$
\begin{aligned}
&-0.01e^{-2T} - \frac{e^{-4T}}{4} + \frac{e^{-2T}}{4}e^{2T} = 0 \\
&-e^{-4T} - 0.04e^{-2T} + 1 = 0 \\
&m = e^{-2T} \\
&-m^2 - 0.04m11 = 0 \\
&m_1 = 0.9802 \\
&m_2 = -1.0202
\end{aligned}
$$

Za slučaj $m_1 = 0.9802$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&e^{-2T} = 0.9802 \\
&T = 0.01 \\
&C_1 = -0.9802 \\
&C_2 = -0.255,
\end{aligned}
$$

tako da dobijamo sledeće optimalno upravljanje i optimalno kretanje

$$
\begin{aligned}
&x(t) = -0.255e^{-2t} + 0.24505e^{2t} \\
&u(t) = 0.9802e^{2t},
\end{aligned}
$$

gde je $T = 0.01s$.

Za slučaj $m_2 = -1.0202$ dobijamo

$$e^{-2T} = -1.0202$$

što nije moguće, tako da ovaj slučaj odbacujemo.

2 Bolcin problem i njegovo rešenje

Kod problema Bolca, kriterijum optimalnosti se definiše na sledeći način:

$$I = \psi[x(T), T] + \int_0^T F(t, x, u)dt.$$

Da bismo odredili potrebne uslove, potrebno je da prva varijacija bude jednaka nuli:

$$\delta I = 0$$

Odnosno, potrebni uslovi se svode na važenje sledećih kanonskih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(t, x_i, u_k) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial u_k} &= 0 \end{aligned}$$

Ukoliko nam vrednost ekstremale u trenutku T nije poznata, onda ni prva varijacija u trenutku T, nije jednaka nuli:

$$\delta x_i(T) = 0$$

Odakle nam dalje slede prirodno-granični uslovi:

$$p_i(T) = \frac{\partial \psi[x(T), T]}{\partial x_i(T)}$$

2.1 Zadaci

2. Ponašanje Bolcinog problema opisuje se sistemom prvog reda:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 + x_1. \end{aligned}$$

Odrediti x_1, x_2, u_1 i u_2, ako su $x_1(0) = 0$ i $x_2(0) = 0$ za:

$$I = ax_1(1) + bx_2(1) + \int_0^1 (u_1^2 + u_2^2 + x_1)dt$$

Rešenje.
Formiramo Hamiltonijan na osnovu kriterijuma optimalnosti:

$$H = u_1^2 + u_2^2 + x_1 + p_1u_1 + p_2(u_2 + x_1)$$

Da bismo odredili potrebne uslove, koristimo kanonske jednačine:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = u_1 \\
\dot{x_2} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = u_2 + x_1 \\
\dot{p_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -(1 + p_2) \\
\dot{p_2} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \implies p_2 = C_1 \\
\frac{\partial H}{\partial u_1} &= 2u_1 + p_1 = 0 \implies u_1 = -\frac{1}{2}p_1 \\
\frac{\partial H}{\partial u_2} &= 2u_2 + p_2 = 0 \implies u_2 = -\frac{1}{2}p_2
\end{aligned}$$

Potrebno je da odredimo još i prirodno-granične uslove, korištenjem Bolca problema:

$$\begin{aligned}
&p_1(1) = a \\
&p_2(1) = b \implies C_1 = b \\
&\dot{p_1} = -1 - b \\
&p_1(t) = -(1 + b)t + C_2 \\
&C_2 = a + b + 1
\end{aligned}$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine, dobili smo opšti oblik $p(t)$, potrebno je još da odredimo u_1, u_2, x_1 i x_2:

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= (-1 + b)t + a + b + 1 \\
u_1 &= -\frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(1 + b)t - \frac{1}{2}(a + b + 1) \\
u_2 &= -\frac{1}{2}p_2 = -\frac{1}{2}b
\end{aligned}$$

Iz kanonskih jednačina dalje možemo da odredimo $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$, te integraljenjem dalje dobijamo izraz za x_1 i x_2:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{2}(1+b)t - \frac{1}{2}(a+b+1) \\
x_1(t) &= \frac{1}{4}(1+b)t^2 - \frac{1}{2}(a+b+1)t + C_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(1+b)t^2 - \frac{1}{2}(a+b+1)t \\
x_2(t) &= \frac{1}{12}(1+b)t^3 - \frac{1}{4}(a+b+1)t^2 - \frac{1}{2}bt + C
\end{aligned}$$

Potrebno je još da odredimo konstante C i C_2:

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= C_2 = 0 \\
x_2(0) &= C = 0
\end{aligned}$$

Konašno, opšti oblici ekstremala su:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{4}(1+b)t^2 - \frac{1}{2}(a+b+1)t \\
x_2(t) &= \frac{1}{12}(1+b)t^3 - \frac{1}{4}(a+b+1)t^2 - \frac{1}{2}bt
\end{aligned}$$

3. Ponašanje Bolcinog problema opisuje se sistemom drugog reda:

$$\ddot{x} + x = u$$

odrediti x(t), ako su $x(0) = 2$ i $\dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -1$ za:

$$I = \dot{x}^2(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt$$

Rešenje.
Sistem je opisan diferencijalnom jednačinom drugog reda. Kako bismo smanjili red sistema, uvodimo smenu na sledeći način:

$$\begin{aligned}
x_1 = x \Big/ \frac{d}{dt} \implies \quad & \dot{x}_1 = x_2 \\
x_2 = \dot{x} \Big/ \frac{d}{dt} \implies \quad & \dot{x}_2 = \ddot{x} = u - x_1
\end{aligned}$$

Formiramo Hamiltonijan:

$$H = u^2 + p_1 x_2 + p_2(-x_1 + u)$$

Formiramo kanonske jednačine, kako bismo odredili potrebne uslove:

$$\dot{x_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -x_1 + u$$
$$\dot{p_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2$$
$$\dot{p_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + p_2 = 0 \implies u = -\frac{1}{2}p_2$$

Potrebno je da odredimo i prirodno-granične uslove, pošto nam $x_1(\frac{\pi}{2})$ i $x_2(0)$ nisu specificirani:

$$x_1(0) = 2$$
$$x_2(\frac{\pi}{2}) = -1$$
$$p_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1(\pi/2)} = 0$$
$$p_2(0) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2(0)} = -2x_2(0)$$

Dalje je potrebno da rešimo diferencijalne jednačine, kako bismo odredili $p_1(t)$ i$p_2(t)$:

$$\ddot{p_1} = \dot{p_2} = -p_1$$
$$\ddot{p_1} + p_1 = 0$$
$$m^2 + 1 = 0 \implies m = \pm j$$
$$p_1(t) = Asin(t) + Bcos(t)$$
$$p_2(t) = \dot{p_1} = Acos(t) - Bsin(t)$$

Nakon što smo odredili $p_2(t)$, možemo odrediti i $u(t)$

$$u = -\frac{1}{2}p_2$$
$$u(t) = -\frac{1}{2}(Acos(t) - Bsin(t))$$
$$\ddot{x_1} = -x_1 + u$$
$$\ddot{x_1} + x_1 = u$$
$$\ddot{x_1} + x_1 = -\frac{1}{2}(Acos(t) - Bsin(t))$$
$$x_1 = x_{1h} + x_{1p}$$
$$x_{1h} = C_1cos(t) + C_2sin(t)$$
$$x_{1p} = t(C_3cos(t) + C_4sin(t))$$

$$\dot{x}_{1p} = C_3 cos(t) + C_4 sin(t) + t(-C_3 sin(t) + C_4 cos(t))$$
$$\ddot{x}_{1p} = -C_3 sin(t) + C_4 cos(t) - C_3 sin(t) + C_4 cos(t) + t(-C_3 cos(t) - C_4 sin(t))$$

$$\ddot{x}_{1p} + x_{1p} = -\frac{1}{2}(Acos(t) - Bsin(t))$$
$$-2C_3 sin(t) + 2C_4 cos(t) = -\frac{1}{2}(Acos(t) - Bsin(t))$$

$$-2C_3 = \frac{B}{2} \implies B = -4C_3 \implies C_3 = -\frac{B}{4}$$
$$2C_4 = -\frac{A}{2} \implies A = -4C_4$$

Formiramo opšti oblik $x_1(t)$ i $x_2(t)$:

$$x_1(t) = C_1 cos(t) + C_2 sin(t) + t(C_3 cos(t) + C_4 sin(t))$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1 = -C_1 sin(t) + C_2 cos(t) + C_3 cos(t) + C_4 sin(t) + t(-C_3 sin(t) + C_4 cos(t))$$

Potrebno je da odredimo još i nepoznate konstante korištenjem prirodno-graničnih uslova:

$$x_1(0) = C_1 = 2$$
$$x_2(\frac{\pi}{2}) = -C_1 + C_4 - \frac{\pi}{2}C_3 = -1 \implies C_4 - C_3\frac{\pi}{2} = 1$$

Prirodno - granični uslovi:

$$p_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1(\pi/2)} = 0$$
$$p_1(\frac{\pi}{2}) = Asin(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$A = 0$$
$$A = -4C_4 \implies C_4 = 0$$

Pošto smo dobili da je $C_4 = 0$,možemo odrediti konstantu C_3:

$$C_4 - C_3\frac{\pi}{2} = 1$$
$$C_3 = -\frac{2}{\pi}$$

Prethodno smo dobili relaciju da je $B = -4C_3$, pa možemo izračunati konstantu B:

$$B = -4C_3$$
$$B = \frac{8}{\pi}$$

Sada koristimo drugi prirodno granični uslov, pošto $x_2(0)$ nije poznato:

$$
\begin{aligned}
&p_2(0) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2(0)} = -2x_2(0) \\
&-(C_2 + C_3) = A = 0 \\
&-(C_2 - \frac{B}{4}) = 0 \\
&B = 4C_2
\end{aligned}
$$

Odnosno, sada možemo izračunati vrijednost konstante C_2, kao $C_2 = \frac{B}{4}$:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{B}{4} \\
C_2 &= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

Na kraju, kada smo odredili sve neophodne parametre, možemo da formiramo ekstremale $x_1(t)$, $x_2(t)$ i upravljanje $u(t)$:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 2cos(t) + \frac{2}{\pi}sin(t) - \frac{2}{\pi}tcos(t) \\
x_2(t) &= -2sin(t) + \frac{2}{\pi}tsin(t) \\
u(t) &= \frac{4}{\pi}cos(t)
\end{aligned}
$$

4. Upravljati sistemom uz minimalno napora:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + u
\end{aligned}
$$

(a) $I = \int_0^2 \frac{1}{2}u^2 dt$, ako su $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ $x(2) = 3$ $x(2) = 2$.

Rešenje.
Formiramo Hamiltonijan:

$$
H = \frac{1}{2}u^2 + p_1 x_2 + p_2(-x_2 + u)
$$

Formiramo kanonske jednačine:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = x_2 \\
\dot{x_2} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = -x_2 + u \\
\dot{p_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \implies p_1(t) = C_1 \\
\dot{p_2} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 + p_2 \implies \dot{p}_2 - p_2 = -C_1 \\
\frac{\partial H}{\partial u} &= u + p_2 = 0 \implies p_2 = -u
\end{aligned}$$

Rešavamo diferencijalnu jednačinu:

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_2 - p_2 = -C_1 \\
&p_{2h} = C_2 e^t \\
&p_{2p} = C_3 \\
&\dot{p}_{2p} = 0 \\
&-C_3 = -C_1 \implies C_3 = C_1
\end{aligned}$$

Rešavanjem diferencijalnih jednačina dobijamo opšti oblik $p_2(t)$ i $u(t)$:

$$\begin{aligned}
&p_2(t) = C_2 e^t + C_1 \\
&u(t) = -p_2 = -(C_2 e^t + C_1)
\end{aligned}$$

$x_2(t)$ ćemo odrediti rešavanjem nehomogene diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}
&\dot{x_2} + x_2 = -(C_2 e^t + C_1) \\
&\dot{x}_{2h} + x_{2h} = 0 \\
&x_{2h} = C_3 e^{-t} \\
&x_{2p} = C_4 e^t + C_5 \\
&\dot{x}_{2p} = C_4 e^t \\
&2C_4 e^t + C_5 = -(C_2 e^t + C_1) \\
&C_5 = -C_1 \\
&C_4 = -\frac{C_2}{2}
\end{aligned}$$

Dobijamo opšti oblik za $x_2(t)$, čijim integraljenjem ćemo dobiti i $x_1(t)$. Uvršavanjem početnih uslova možemo odrediti nepoznate konstante C_1, C_2 i C_3:

$$x_2(t) = C_3 e^{-t} - \frac{C_2}{2}e^t - C_1$$
$$x_2(0) = C_3 - \frac{C_2}{2} - C_1 = 0$$
$$x_2(2) = C_3 e^{-2} - \frac{C_2}{2}e^2 - C_1 = 2$$

Integraljenjem x_2, dobijamo izraz za $x_1(t)$:

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$x_1(t) = -C_3 e^{-t} - \frac{C_2}{2}e^t - C_1 t + C_6$$
$$x_1(0) = -C_3 - \frac{C_2}{2} + C_6 = 0$$
$$x_1(2) = -C_3 e^{-2} - \frac{C_2}{2}e^2 2C_1 + C_6 = 5$$

Opšti oblik ekstremala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ je:

$$x_1(t) = -6.104 + 6.6983e^{-t} + 7.29t - 0.5936e^t$$
$$x_2(t) = -6.6983e^{-t} + 7.2918 - 0.5936e^t$$

(b) $I = \frac{1}{2}(x_1(2) - 5)^2 + \frac{1}{2}(x_2(2) - 2)^2 + \int_0^2 \frac{1}{2}u^2 dt$, ako su $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$

Rešenje.
U prethodnom primeru odredili smo opšti izraz za $x_1(t)$ i $x_2(t)$ koji možemo iskoristiti i u ovom slučaju. Pošto nam vrednosti $x_1(t)$ i $x_2(t)$ nisu specificirane za $t = 2$, potrebno je da odredimo i prirodno-granične uslove:

$$x_2(t) = C_3 e^{-t} - \frac{C_2}{2}e^t - C_1$$
$$x_1(t) = -C_3 e^{-t} - \frac{C_2}{2}e^t - C_1 t + C_6$$

Prirodno granične uslove kod Bolca-problema, možemo odrediti na sledeći način:

$$x_1(0) = 0$$
$$x_2(0) = 0$$
$$p_1(2) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1(\pi/2)} \implies p_1(2) = x_1(2) - 5$$
$$p_2(2) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2(0)} \implies p_2(2) = x_2(2) - 5$$

Preostalo nam je još da odredimo i vrednosst konstanti C_1 i C_2:

$$C_1 = x_1(2) - 5$$
$$C_2 e^2 - C_1 = x_2(2) - 2$$

Na kraju dobijamo opšti oblik ekstremala:

$$x_1(t) = -2.4223 + 2.539e^{-t} + 2.6973t - 0.1375e^{t}$$
$$x_2(t) = -2.5598e^{-t} + 2.6973 - 0.1375e^{t}$$