Linearni stacionarni sistemi (stabilnost sistema i projektovanje regulatora)

Zoran D. Jeličić
Aleksandra Mitrović
2. novembar 2022.

1 Uvod

Linearni stacionarni procesi su procesi čiji modeli zadovoljavaju princip superpozicije tj. slaganja dejstava [1]

$$s[au_1(t) + bu_2(t)] = as[u_1(t)] + bs[u_2(t)] \ .$$

Pri njihovoj analizi se koristi Laplasova transformacija koja omogućava prelazak iz kontinualnog vremenskog domena u kompleksni s domen gde se sistemi opisuju funkcijom prenosa.

Funkcija prenosa sistema predstavlja odnos Laplasove transformacije izlaznog i ulaznog signala pri nultim početnim uslovima

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \ , \tag{1}$$

gde je $U(s)$ Laplasova transformacija ulaznog signala, a $Y(s)$ je Laplasova transformacija izlaznog signala. Na osnovu definisane funkcije prenosa, može se odrediti *odziv sistema u vremenskom domenu*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} \ . \tag{2}$$

1.1 Funkcija prenosa jednosmerne mašine (DC motora)

a) **Upravljanje ugaonom brzinom.**

Kao što je već izvedeno u prethodnom odeljku, matematički model DC motora u slučaju kada je posmatrana izlazna veličina ugaona brzina je

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{T_s}\omega + \frac{K_{sm}}{T_s}U_a \quad \Big/ \mathcal{L}$$
$$y = \omega \quad \Big/ \mathcal{L} \ .$$

Da bi se odredila funkcija prenosa sistema, neophodno je primeniti Laplasovu transformaciju na dati sistem nakon čega se

[1] Osobina linearnosti uključuje osobinu homogenosti i aditivnosti.

dobija

$$
\begin{aligned}
sW(s) &= -\frac{1}{T_s}W(s) + \frac{K_{sm}}{T_s}U_a(s) \\
\left(s + \frac{1}{T_s}\right)W(s) &= \frac{K_{sm}}{T_s}U_a(s) \\
W(s) &= \frac{\frac{K_{sm}}{T_s}}{s + \frac{1}{T_s}}U_a(s) \ .
\end{aligned}
$$

Iz jednačine izlaza $Y(s) = W(s)$ sledi

$$
Y(s) = \frac{\frac{K_{sm}}{T_s}}{s + \frac{1}{T_s}}U_a(s) \ .
$$

Na kraju, funkcija prenosa sistema se može odrediti na osnovu definicionog izraza (1)

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{K_{sm}}{T_s}}{s + \frac{1}{T_s}} = \frac{K_{sm}}{sT_s + 1} \ ,
$$

ili jednostavnije

$$
G(s) = \frac{K}{sT_d + 1} \ . \tag{3}
$$

Dobijeni izraz predstavlja opšti oblik *funkcije prenosa prvog reda*, gde se parametar K naziva **pojačanje** sistema, a T_d predstavlja **dominantnu vremensku konstantu** sistema [2]. Usvajanjem relacija

$$
\frac{K}{T} = b, \quad \frac{1}{T_d} = a \ ,
$$

funkcija prenosa (7) se može zapisati i u obliku

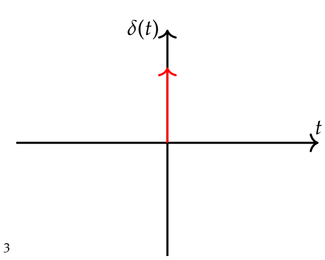
$$
G(s) = \frac{b}{s + a} \ ,
$$

gdje je u tački $p = -a$ pol sistema.
Nakon određivanja funkcije prenosa sistema, moguće je odrediti odziv sistema na različite pobude. U nastavku će biti određeni odzivi sistema na impulsnu i step pobudu.

- **Odizv na impulsnu pobudu.**
  Pobudni (ulazni) signal je impulsni signal (Dirakova funkcija) oblik [3]

$$
u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}
$$

[2] Za sad pojačanje i dominantnu vremensku konstantu sistema posmatramo samo kao parametre, njihova fizička interpretacija će biti objašnjena detaljno u nastavku.



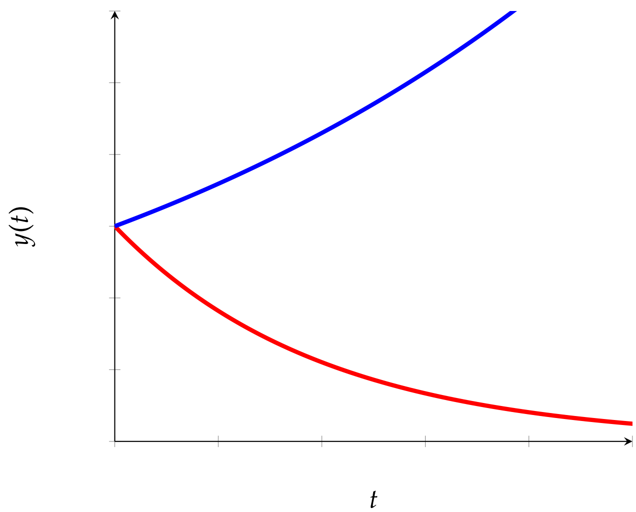
[3]

Laplasova transformacija delta imuplsa je

$$u(t) = \delta(t) \quad \Big/ \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad U(s) = 1 \,,$$

nakon čega je

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot U(s) = \frac{b}{s+a} \cdot 1 = \frac{b}{s+a} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1} \\ y(t) &= be^{-at}h(t) \,. \end{aligned}$$



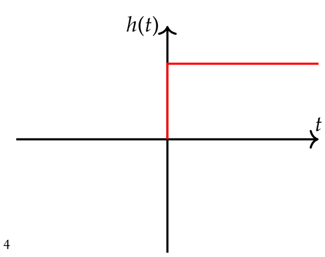
Slika 1: Impulsni odziv sistema prvog reda; odziv označen crvenom bojom je slučaj kada je $a > 0$; odziv označen plavom bojom je slučaj kada je $a < 0$.

- **Odziv na step pobudu.**
Pobudni (ulazni) signal je jedinični step signal (Hevisajdova ili odskočna funkcija) oblika[4]

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Laplasova transformacija step signala je

$$u(t) = h(t) \quad \Big/ \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s} \,,$$

[4] 

nakon čega sledi

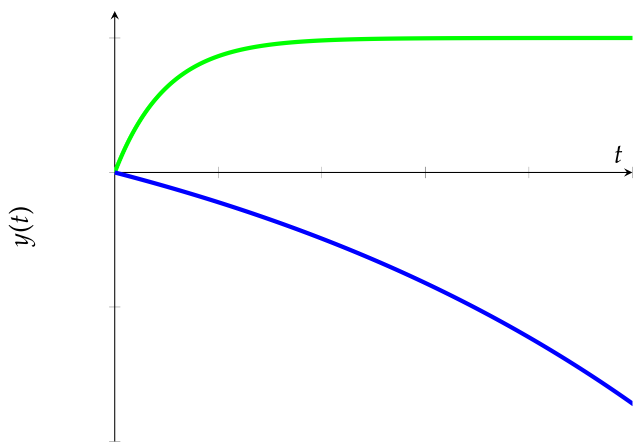
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b}{s+a} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b}{s(s+a)} = \frac{k_1}{s} - \frac{k_2}{s+a} \,,$$

gde je

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{b}{s(s+a)} = \frac{b}{a} \\ k_2 &= \lim_{s \to -a} (s+a) \cdot \frac{b}{s(s+a)} = -\frac{b}{a} \,, \end{aligned}$$

pa se dobija

$$Y(s) = \frac{\frac{b}{a}}{s} - \frac{\frac{b}{a}}{s+a} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1}$$
$$y(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)h(t) \; .$$



Slika 2: Step odziv sistema prvog reda; odziv označen zelenom bojom je slučaj kada je $a > 0$; odziv označen plavom bojom je slučaj kada je $a < 0$.

b) **Upravljanje ugaonom pozicijom.**
Matematički model DC motora u slučaju kada je izlazna veličina ugaona pozicija je

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_s}x_2 + \frac{K_{sm}}{T_s}U_a$$
$$y = x_1 \; ,$$

odnosno u matričnom obliku

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_s} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{sm}}{T_s} \end{bmatrix} u$$
$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (D = 0) \; ,$$

gde je A *matrica dinamike stanja*, B je *matrica ulaza*, C je *matrica izlaza* i D je *direct feed - through matrix*. Na osnovu opšteg oblika matematičkog modela u prostoru stanja formira se izraza za funkciju prenosa oblika

[5]

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \,, \tag{4}$$

gde je I jedinična matrica.
Da bi se odredila funkcija prenosa sistema po izrazu (4) neophodno je prvo odrediti *rezolventnu* matricu

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)},$$

gde je $\mathrm{adj}(sI - A)$ adjungovana matrica [6], a $\det(sI - A)$ je determinanta matrice

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{1}{T_s} \end{bmatrix} .$$

Sledi

$$\det(sI - A) = s\left(s + \frac{1}{T_s}\right) ,$$

$$\mathrm{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_s} & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_s} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} ,$$

na osnovu čega se dobija

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+\frac{1}{T_s}}{s\left(s+\frac{1}{T_s}\right)} & \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_s}\right)} \\ 0 & \frac{s}{s\left(s+\frac{1}{T_s}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_s}\right)} \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{T_s}} \end{bmatrix} .$$

Na kraju, funkcija prenosa na osnovu izraza (4) je

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_s}\right)} \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{T_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{sm}}{T_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_s}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{sm}}{T_s} \end{bmatrix} = \frac{\frac{K_{sm}}{T_s}}{s\left(s + \frac{1}{T_s}\right)} ,$$

ili u jednostavnijem obliku

$$G(s) = \frac{\frac{K}{T_d}}{s\left(s + \frac{1}{T_d}\right)} . \tag{5}$$

Dobijeni izraz predstavlja opšti oblik *funkcije prenosa drugog reda*. Kao i u prethodnom slučaju, uvođenjem relacija

$$\frac{K}{T_d} = b, \quad \frac{1}{T_d} = a \,,$$

[5]

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad /\mathcal{L}$$
$$y = Cx + Du \quad /\mathcal{L}$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s), (x(0) = 0)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s) = C\Big((sI - A)^{-1}BU(s)\Big) + DU(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$
$$G(s) = C\frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D$$
$$\boxed{f(s) = \det(sI - A)}$$

[6] Da bismo se podsetili određivanja adjungovane matrice, posmatrajmo u opštem slučaju proizvoljnu matricu A dimenzije $n \times n$. Definiše se minor M_{ij} od matrice A kao determinantna matrice dimenzije $(n-1) \times (n-1)$ koja rezultuje brisanjem i-tog reda (vrste) i j-te kolone od matrice A. Nakon toga se definiše kofaktor matrice A kao $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, a potom matrica kofaktora kao $C_{n\times n}$. Na kraju, adjungovana matrica je transponovana matrica od matrice kofaktora $\mathrm{adj}(A) = C^T$.

funkcija prenosa (8) se može zapisati u obliku

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)} ,$$

gde su polovi sistema u tačkama $p_1 = 0$ i $p_2 = -a$. U nastavku će biti određen impulsni i step odziv sistema drugog reda.

- **Odziv na imuplsnu pobudu.**
  Pobudni (ulazni) signal je

  $$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \quad \Big/ \mathcal{L} \\ U(s) &= 1 , \end{aligned}$$

  pa sledi

  $$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b}{s(s+a)} \cdot 1 = \frac{b}{s(s+a)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+a} ,$$

  gde je

  $$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{b}{s(s+a)} = \frac{b}{a} \\ k_2 &= \lim_{s\to -a} (s+a) \cdot \frac{b}{s(s+a)} = -\frac{b}{a} . \end{aligned}$$

  Uvrštavanjem dobijenih vrednosti sledi

  $$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{b}{a}}{s} - \frac{\frac{b}{a}}{s+a} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1} \\ y(t) &= \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)h(t) . \end{aligned}$$

- **Odziv na step pobudu.**
  Pobudni (ulazni) signal je

  $$\begin{aligned} u(t) &= h(t) \quad \Big/ \mathcal{L} \\ U(s) &= \frac{1}{s} . \end{aligned}$$

  Sledi

  $$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b}{s^2(s+a)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+a} ,$$

  gde je

  $$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 0} s^2 \cdot \frac{b}{s^2(s+a)} = \frac{b}{a} \\ B &= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(s^2 \cdot \frac{b}{s^2(s+a)}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{-b}{(s+a)^2} = -\frac{b}{a^2} \\ C &= \lim_{s\to -a} (s+a) \cdot \frac{b}{s^2(s+a)} = \frac{b}{a^2} , \end{aligned}$$

nakon čega se dobija

$$Y(s) = \frac{\frac{b}{a}}{s^2} - \frac{\frac{b}{a^2}}{s} + \frac{\frac{b}{a^2}}{s+a} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1} \; .$$

Na kraju, odziv sistema je

$$y(t) = \frac{b}{a} t h(t) - \frac{b}{a^2} h(t) + \frac{b}{a^2} e^{-at} h(t) \; .$$

2 Stabilnost sistema

Opšti oblik funkcije prenosa sistema konačne dimenzije je

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m \; , \qquad (6)$$

gde se koreni polinoma u brojiocu nazivaju ***nule*** sistema, a koreni polinoma u imeniocu su ***polovi*** sistema.

Stabilnost sistema je u uskoj vezi sa položajem polova dinamičkog sistema u kompleksnoj s ***ravni.***

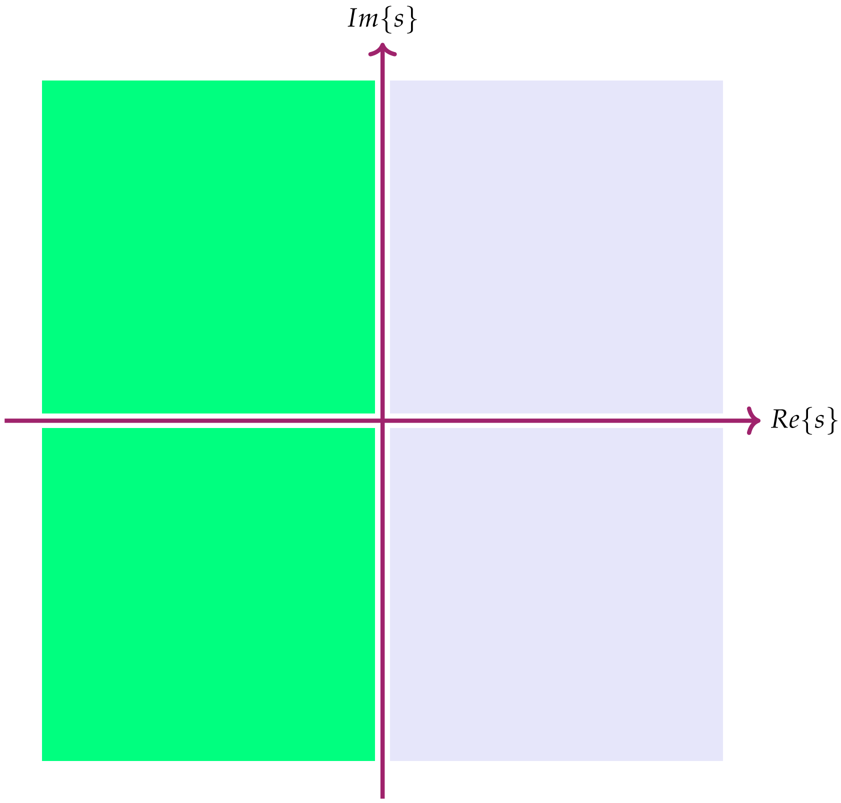
Polovi sistema mogu biti *realni* i *konjugovano kompleksni* (uvek se javljaju u parovima). U opštem slučaju realni pol je oblika $p = a$ gde je $a \in R$, a konjugovano kompleksni par polova je oblika $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ gde je σ realni deo pola dok je ω kompleksni deo pola.

Na osnovu gornje definicije sledi da će sistem opisan izrazom (6) biti stabilan ukoliko mu se svi polovi nalaze sa leve strane imaginarne ose (imaju negativni realni deo). Sa druge strane, sistem je nestabilan ukoliko ima polove desno od imaginarne ose (pozitivni realni deo). Na kraju, ukoliko sistem ima proste polove tačno na imaginarnoj osi onda je on granično stabilan.

Polovi sistema se mogu predstaviti u kompleksnoj s ravni kao na slici 3, pa sledi:

- ***Stabilni polovi se nalaze u levoj poluravni kompleksne*** s ***ravni*** (oblast označena zelenom bojom).
- ***Nestabilni polovi se nalaze u desnoj poluravni kompleksne*** s ***ravni*** (oblast označena ljubičastom bojom).
- ***Granično stabilni polovi se nalaze na imaginarnoj osi kompleksne*** s ***ravni.***

Važno je zapamtiti da ukoliko sistem ima konjugovano kompleksne polove, stabilnost se određuje na osnovu položaja realnih delova polova u kompleksnoj s ***ravni!***



Slika 3: Kompleksna s ravan

U skladu sa prethodno korištenim oznakama to znači da je par konjugovano kompleksnih polova oblika $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ stabilan ako je realni deo pola u levoj poluravni kompleksne s ravni ($\sigma < 0$), granično stabilan ukoliko je pol na imaginarnoj osi ($\sigma = 0$) i nestabilan ukoliko je realni deo pola u desnoj poluravni kompleksne s ravni ($\sigma > 0$).

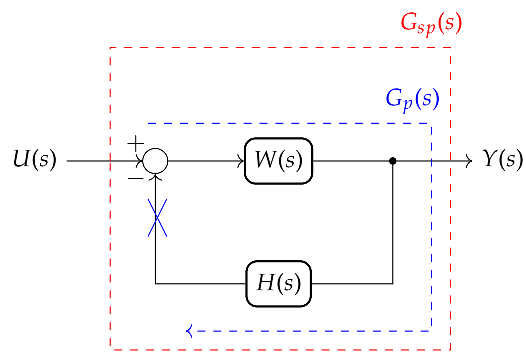
S obzirom da stabilnost sistema zavisi od položaja polova sistema u kompleksnoj s ravni, važno je naglasiti da se kod upravljačkih i drugih sistema u zatvorenoj sprezi može govoriti o stabilnosti sistema u otvorenoj (opisuje se funkcijom povratnog prenosa) i u zatvorenoj sprezi (opisuje se funkcijom spregnutog prenosa). Posmatrajmo strukturni blok dijagram sistema prikazan na slici 4.

Na osnovu slike 4 definiše se

- *Funkcija spregnutog prenosa sistema* $\Rightarrow$ $G_{sp} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{1+W(s)H(s)}$,
- *Funkcija povratnog prenosa sistema* $\Rightarrow$ $G_p = W(s)H(s)$,

odnosno

- Funkcija spregnutog prenosa se definiše kao "direktna grana podeljeno sa jedan plus (znak + ide zbog negativne povratne sprege)



Slika 4: Strukturni blok dijagram sistema

direktna grana puta povratna",

- Funkcija povratnog prenosa se definise kao "proizvod direktne i povratne grane".

Neka je funkcija prenosa $W(s) = k\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$ gde je parametar k pojačanje, dok su $P_m(s)$ i $Q_n(s)$ polinomi. Funkcija prenosa u povratnoj grani $H(s)$ je takođe realna racionalna funkcija kompleksne promenljive s, ali ćemo zbog jednostavnijeg zapisa zadržati samo oblik $H(s)$. Funkcija spregnutog prenosa sistema se onda može izraziti na sledeći način

$$G_{sp}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)H(s)} = \frac{k\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}}{1 + k\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}H(s)} = \frac{kP_m(s)}{\boxed{Q_n(s) + kP_m(s)H(s)}} .$$

Imenilac funkcije spregnutog prenosa se naziva ***karakteristični polinom*** sistema

$$f(s) = Q_n(s) + kP_m(s) ,$$

i na osnovu njega se formira ***karakteristična jednačina*** sistema

$$f(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_n(s) + kP_m(s) = 0 .$$

Rešenja karakteristične jednačine sistema su polovi sistema. *Zaključujemo da kompletnu informaciju o stabilnosti sistema nosi karakteristični polinom sistema.*

2.1 *Uticaj položaja polova na ponašanje sistema prvog reda*

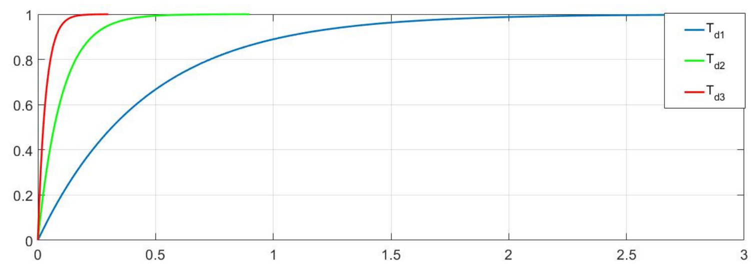
Posmatra se sistem prvog reda koji je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{b}{s+a} , \tag{7}$$

gde je u tački $p = -a$ pol sistema. Odziv datog sistema na step pobudu je

$$y(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{1}{T_d}t}\right)h(t) ,$$

gde je $K = \frac{b}{a}$, $T_d = \frac{1}{a}$ i ovakvi odzivi se nazivaju **aperiodičnim**. Parametar K se naziva ***pojačanje*** sistema, a parametar T je ***dominantna vremenska konstanta*** sistema.



Slika 5: Grafički prikaz odziva sistema sa različitom dominantnom vremenskom konstantom; T_{d1} (plava boja)>T_{d2} (zelena boja)>T_{d3} (crvena boja)

Dominantna vremenska konstanta sistema je važan parametar u karakterizaciji odziva sistema. *Dominantna vremenska konstanta pokazuje koliko brzo odziv sistema ulazi u ustaljeno (stacionarno) stanje* (slika 5). To znači da se dominantna vremenska konstanta definiše **samo za stabilne sisteme**. Računa se na osnovu dominantnog pola sistema kao recipročna vrednost njegovog realnog dela pri čemu je dominantni pol sistema onaj pol koji je najbliži Im-osi (posmatra se pol koji ima realni deo najmanji po apsolutnoj vrednosti). Kako je pol sistema (7) $p = -a$, dominantna vremenska konstanta se računa kao

$$T_d = \frac{1}{\mid a \mid}\text{sec} .$$

Međutim, ukoliko sistem ima konjugovano kompleksne polove onda se dominantna vremenska konstanta računa kao

$$T_d = \frac{1}{\mid \sigma \mid}\text{sec} ,$$

gdje je σ realni deo dominantnog pola.

Primer. Odrediti dominantnu vremensku konstantu sledećih sistema:

a) $f(s) = (s+1)(s+2)(s+0.4) \rightarrow \text{p}_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -0.4$
$\Rightarrow \quad \text{T}_d = \frac{1}{0.4} = 2.5\text{sec}$,

b) $f(s) = (s+5)(s^2+6s+10) \rightarrow \text{p}_1 = -5, p_{2,3} = -3 \pm j$
$\Rightarrow \quad \text{T}_d = \frac{1}{3}\text{sec}$,

c) $f(s) = (s-0.5)(s+1)(s+0.7) \rightarrow \text{p}_1 = 0.5, p_2 = -1, p_3 = -0.7$
$\Rightarrow$ Ne može se izračunati T_d jer je sistem nestabilan (ima pol u tački 0.5).

Pojačanje [7] sistema određuje koliko puta sistem pojačava ulazni signal i definiše se kao

[7] U literaturi se naziva i statičko pojačanje.

$$K = G(0) = \frac{b}{a} .$$

2.2 Uticaj položaja polova na ponašanje sistema drugog reda

Opšti oblik funkcije prenosa sistema drugog reda je

$$G(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \ , \tag{8}$$

gde je K statičko pojačanje, ω_n je prirodna neprigušena učestanost i ξ je faktor relativnog prigušenja. Imenilac funkcije prenosa (8) predstavlja karakteristični polinom

$$f(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \ ,$$

a njegovim izjednačavanjem sa nulom se dobija karakteristična jednačina sistema čiji su koreni polovi sistema

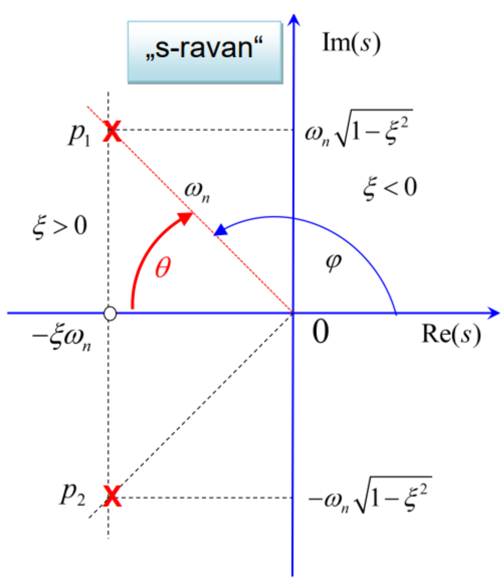
$$f(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm j\omega \ ,$$

gde je σ faktor apsolutnog prigušenja, a ω je prirodna prigušena učestanost sistema. Ukoliko pol sistema predstavimo u obliku

$$p_1 = \mid p_1 \mid e^{j\mathrm{Arg}\{p_1\}} \ ,$$

sledi

$$\begin{aligned} \mid p_1 \mid &= \sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \omega_n \\ \mathrm{Arg}\{p_1\} = \varphi &= \pi - \mathrm{arctg}\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n} = \pi - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \end{aligned}$$



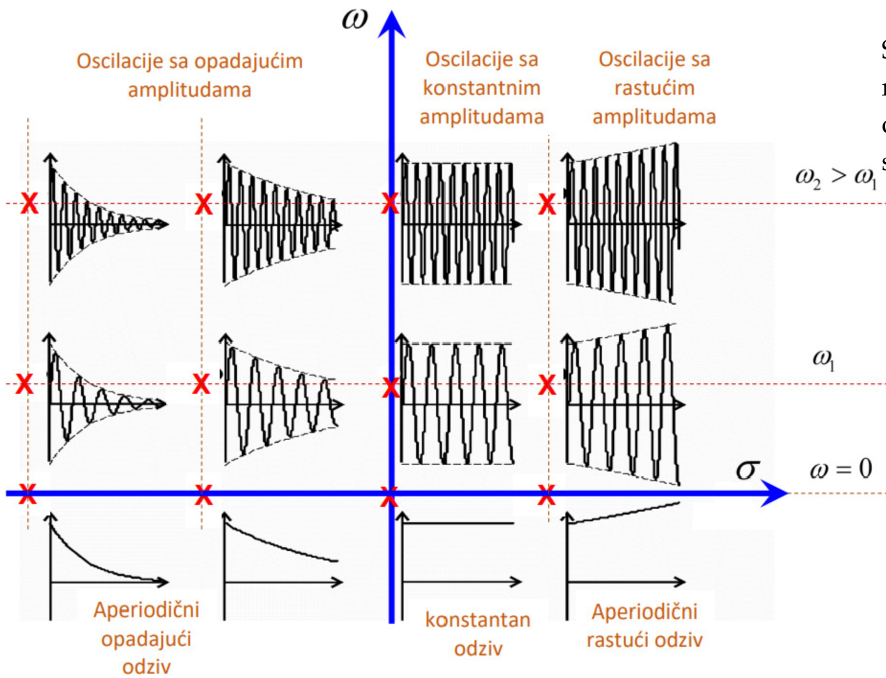
Slika 6: Grafički prikaz para konjugovano kompleksnih polova u kompleksnoj s ravni

Na osnovu navedenog može se izvesti uopšteni izraz za step odziv sistema drugog reda [8]

[8] Izraz će biti samo informativno napisan u ovom obliku.

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi) \, ,$$

odakle možemo zaključiti da sistemi sa konjugovano kompleksim polovima imaju **oscilatoran** odziv.

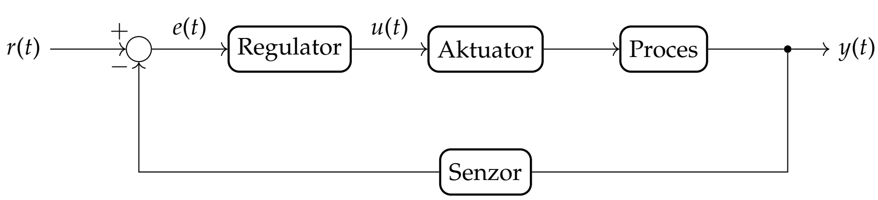


Slika 7: Impulsni odziv sistema drugog reda u zavisnosti od različitog položaja polova sistema

Na kraju, na osnovu slike 7 možemo doneti važan zaključak:

- **Realni deo pola utiče na** ***stabilnost sistema*** **i** ***brzinu smirenja***,
- **Imaginarni deo pola utiče na** ***učestanost oscilovanja***.

3 PID regulatori



Slika 8: Uopšteni strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja

PID regulator koristi tri osnovna dejstva:

- **P - proporcionalno**
- **I - integralno**
- **D - diferencijalno**

Upravljački signal PID regulatora je

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] ,$$

gde je k_p konstanta pojačanja integralnog dejstva, T_i je vremenska konstanta integralnog dejstva i T_d je vremenska konstanta diferencijalnog dejstva. Takođe, važi $\frac{k_p}{T_i} = k_i$ i $k_p T_d = k_d$, gde su k_i i k_d konstante pojačanja proporcionalnog i diferencijalnog dejstva [9], respektivno.

[9] Čitaocu skrećemo pažnju da je u ovoj jednačini sa T_d označena vremenska konstanta diferencijalnog dejstva PID regulatora, što nije ekvivalentno dominantnoj vremenskoj konstanti sistema koju smo u prvom delu teksta takođe označavali sa T_d. Međutim, u nastavku će iz samog konteksta biti jasno o kom parametru se radi.

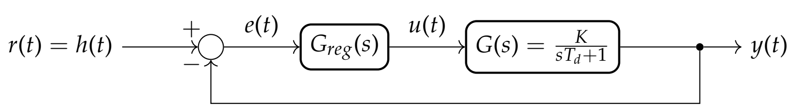
Prilikom projektovanja regulatora osnovni zahtevi su da sistem bude **stabilan** i da je **greška u ustaljenom stanju nula**.

3.1 *Upravljanje ugaonom brzinom jednosmerne mašine (DC motora)*

Kao što je već izvedeno, funkcija prenosa DC motora u slučaju upravljanja ugaonom brzinom je (3)

$$G(s) = \frac{K}{sT_d + 1} ,$$

pa je strukturni blok dijagram celokupnog sistema automatskog upravljanja



Slika 9: Strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja

Potrebno je prvo odrediti funkciju prenosa regulatora tako da budu ispunjeni osnovni zahtevi po pitanju stabilnosti sistema u zatvorenoj sprezi i nulte greške u ustaljenom stanju. Krenućemo od projektovanja najjednostavnijeg P-regulatora čija je funkcija prenosa

$$u(t) = k_p e(t) \quad \Big/ \mathcal{L}$$

$$U(s) = k_p E(s) \quad \Rightarrow \quad G_{reg}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \ .$$

- **Stabilnost.** Da bismo komentarisali stabilnost sistema neophodno je odredimo karakteristični polinom sistema čiji su koreni polovi sistema. Funkcija spregnutog prenosa sistema prikazanog na slici 9 je

$$W_{sp}(s) = \frac{G_{reg}(s)G(s)}{1+G_{reg}(s)G(s)} = \frac{k_p \cdot \frac{K}{sT_d+1}}{1+kp \cdot \frac{K}{sT_d+1}} = \frac{k_pK}{sT_d+1+k_pK} =$$
$$= \frac{k_pK}{T_d(s+\frac{1}{T_d}+k_p\frac{K}{T_d})} = \frac{k_pb}{s+a+k_pb} \ ,$$

gde je $b = \frac{K}{T_d}$ i $a = \frac{1}{T_d}$. Karakteristični polinom sistema je imenilac funkcije spregnutog prenosa

$$f(s) = s + a + k_pb \ ,$$

pa je pol sistema u tački $p = -a - k_pb = -(a + k_pb)$. Sistem će biti stabilan u zatvorenoj sprezi za $a + k_pb > 0$, a ukoliko želimo da postavimo polove sistema u tačno određenu vrednost (npr. u tačku $-p^* \in R$), tj. da parametre regulatora odredimo metodom podešavanja polova sistema, onda prvo formiramo željeni karakteristični polinom sistema

$$f_z(s) = s + p^*.$$

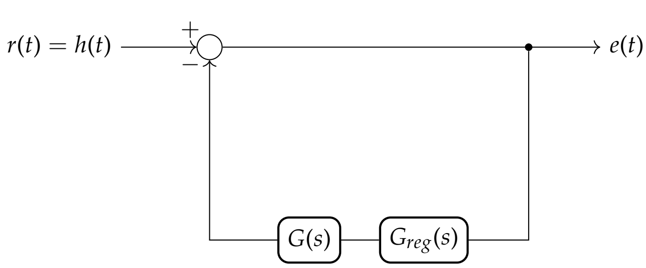
Izjednačavanjem koeficijenata željenog karakterističnog polinoma i stvarnog karakterističnog polinoma sistema dobija se parametar regulatora za koji će pol sistema biti u tački p^*

$$p^* = a + k_pb \quad \Rightarrow \quad k_p = \frac{p^*-a}{b} \ .$$

- **Greška u ustaljenom stanju.** Greška u ustaljenom stanju se računa primenom granične teoreme

  $$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) \ ,$$

  pa je prvo potrebno odrediti funkciju prenosa od signala reference do signala greške. Strukturni blok dijagram sa slike (9) se može transformisati na sledeći način



Slika 10: Transformisani strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja

Na osnovu slike (10) može se odrediti funkcija prenosa

$$G_{RE}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_{reg}(s)G(s)} = \frac{1}{1+k_p \cdot \frac{K}{sT_d+1}} = \frac{sT_d+1}{sT_d+1+k_pK} \ ,$$

pa sledi

$$E(s) = \frac{sT+1}{sT_d+1+k_pK}R(s) = \frac{sT_d+1}{sT_d+1+k_pK}\frac{1}{s} = \frac{s+a}{s+a+k_pb}\frac{1}{s} .$$

Na kraju, vrednost greške u ustaljenom stanju je

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+a}{s+a+k_pb} \cdot \frac{1}{s} = \frac{a}{a+k_pb} = \text{const.}$$

Na osnovu dobijenog zaključujemo da P-regulator ne zadovoljava osnovne uslove po pitanju postizanja nulte greške u ustaljenom stanju pa je zbog toga neophodno izabrati složeniju strukturu regulatora. Do ovakvog zaključka se moglo doći i analizom tabele za određivanje greške u ustaljenom stanju

N / r(t)	h(t)	th(t)	t$^2h(t)$
0	const	∞	∞
1	0	const	∞
2	0	0	∞

Naime, za ulazni step signal, po datoj tabeli sledi da nam je potreban bar jedan astatizam za postizanje nulte greške u ustaljenom stanju. Kako ni u projektovanom P-regulatoru, ni u samom sistemu ne postoji astatizam (N=0) sledi da će vrednost greške u ustaljenom stanju biti konstantna vrednost što je pokazala i prethodno izvedena računica. Zaključujemo da je za postizanje nulte greške u ustaljenom stanju potrebno izabrati strukturu regulatora koja u sebi ima integralno dejstvo pa ćemo u nastavku projektovati PI-regulator čija je funkcija prenosa

$$u(t) = k_pe(t) + k_i\int_0^t e(\tau)d\tau \quad \Big/\mathcal{L}$$
$$U(s) = \Big(k_p + \frac{k_i}{s}\Big)E(s) \quad \Rightarrow \quad G_{reg}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_ps+k_i}{s} .$$

Dalja procedura je identična kao u prethodnom slučaju pa će u nastavku biti napisani samo krajnji oblici izraza od interesa. Funkcija spregnutog prenosa sistema je

$$W_{sp}(s) = \frac{bk_ps+k_ib}{s^2+s(a+bk_p)+k_ib} ,$$

pa je karakteristični polinom sistema

$$f(s) = s^2 + s(a+bk_p) + k_ib .$$

Ukoliko želimo da podesimo vrednosti parametara regulatora metodom podešavanja polova tako da polovi sistema u zatvorenoj sprezi budu u tačkama $-p_1^*$ i $-p_2^*$ dobijamo željeni karakteristični polinom sistema

$$f_z(s) = (s + p_1^*)(s + p_2^*) = s^2 + s(p_1^* + p_2^*) + p_1^* p_2^* \ .$$

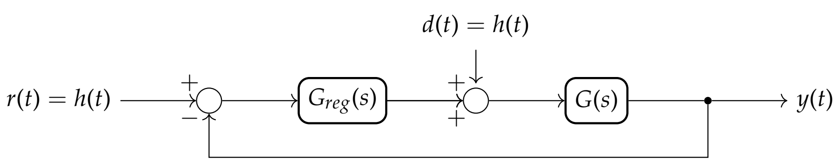
Izjednačavanjam koeficijenata željenog karakterističnog polinoma sa koeficijentima stvarnog karakterističnog polinoma sistema dobijamo parametre regulatora

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{p_1^* + p_2^* - a}{b} \\ k_i &= \frac{p_1^* p_2^*}{b} \ . \end{aligned}$$

Ostalo je još da pokažemo da sa izabranim PI-regulatorom dobijamo nultu grešku u ustaljenom stanju (u strukturi regulatora imamo jedan astatizam potreban za eliminaciju greške u ustaljenom stanju na ulazni step signal) pa sledi

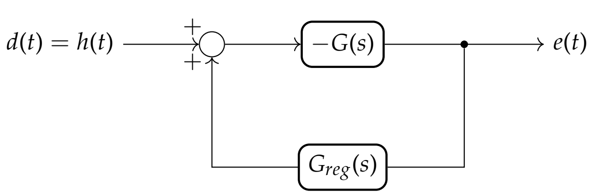
$$e_{ssr} = \lim_{s \to 0} \frac{s(s+a)}{s(s+a) + b(k_p s + k_i)} = 0 \ .$$

Pored ulaznog signala reference, u sistemu se može pojaviti i signal poremećaja koji deluje na ulazu u proces tako da se struktura sa slike (9) može transformisati



Slika 11: Strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja sa signalom poremećaja

Da bismo pokazali da PI-regulator elimiše i grešku od poremećaja treba da odredimo funkciju prenosa od signala poremećaja do signala greške na osnovu transformisanog blok dijagrama



Slika 12: Transformisani strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja sa signalom poremećaja

$$G_{DE}(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-G(s)}{1 + G_{reg}(s)G(s)} = \frac{-bs}{s^2 + s(a + k_p) + k_i b} \ ,$$

odnosno

$$e_{ssd} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{-bs}{s^2 + s(a + k_p) + k_i b} \cdot \frac{1}{s} = 0 \ .$$

Do identičnog zaključka smo mogli doći i posmatrajući samo tabelu za određivanje vrednosti greške u ustaljenom stanju. Naime, po datoj tabeli, u zavisnosti od vrste signala poremećaja, posmatramo broj astatizama **levo od poremećaja**. Kako u našem slučaju levo od signala poremećaja koji je step imamo jedan astatizam u funkciji prenosa PI-regulatora, sledi da će po navedenoj tabeli vrednost greške u ustaljenom stanju biti nula. Na kraju ukupna greška u ustaljenom stanju je

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = 0 \ .$$