

# Diskretizacija kontinualnih linearnih regulatora i kontinualnih linearnih filtara

Zoran D. Jeličić

Mirna N. Kapetina

17. april 2020.

## 1 Principi diskretizacije

Započnimo ovo poglavlje primerom. Od ranije su nam poznate diferencijalna jednačina i/ili funkcija prenosa, koji opisuju osnovni oblik PID regulatora

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

odnosno funkcija prenosa PID regulatora

$$PID(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (1)$$

Pitanje, koje se postavlja, je kako se sistem opisan izrazom (1) konvertuje u formu pogodnu za implementaciju na digitalnom upravljačkom uređaju, odnosno računaru? Odgovor na ovo pitanje nije jednoznačan i zavisi od onoga šta želimo da postignemo. Tako npr. možemo da očuvamo karakteristike regulatora u vremenskom domenu ili možda u frekventnom domenu, što će se pokazati da po pravilu nije isto. Nije nemoguće, da apsolutno stabilan regulator <sup>1</sup> posle diskretizacija postane nestabilan. Postupak pronalaženja digitalnog ekvivalenta <sup>2</sup> kontinualnog sistema, naziva se emulacija i podsećamo nije jednoznačan postupak. Rezultat emulacije su diferencne jednačine ili funkcija diskretnog prenosa, dok je softverska implemetacija posebna oblast tehnike i načelno nije tema ovog kursa. Radi potpunosti teksta, navodimo po jedno moguće rešenje diskretizacije jednačina (1),

$$u(k) = K \left( e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right),$$

odnosno jedan mogući izgled funkcije diskretnog prenosa (funkcije prenosa u z domenu)

Dobro je poznato da se u praksi, koristi modifikovana verzija PID regulatora, koju smo nazvali realan PID, ali verujemo da se osobine, koje želimo da pokažemo lakše sagledavaju u ovoj osnovnoj formi

<sup>1</sup> Pod pojmom „apsolutno stabilan regulator“, podrazumevamo regulator, koji za proizvoljno pojačanje  $K > 0$  ima sve polove u levoj poluravni

<sup>2</sup> Termin *digitalni ekvivalent* na ovom mestu uvodimo logički, a u poglavljima koja slede ovaj pojam ćemo jednoznačno definisati i objasniti.

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2},$$

gde su

$$\begin{aligned} q_0 &= K(1 + \frac{T_d}{T}), \\ q_1 &= -K(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i}), \\ q_2 &= K\frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (2)$$

Rezimirajući ovaj primer, možemo reći, da nam je cilj da u okviru ovog poglavlja uvedemo metode i postupke za prevođenje kontinualnih regulatora <sup>3</sup> u njihove digitalne ekvivalente. Regulatori, filtri ili kompenzatori koje želimo da diskretizujemo imaju dve markantne osobine: prva, spadaju u kategoriju linearnih vremenski nepromenljivih sistema (LTI) <sup>4</sup> i druga, dobro su projektovani tehnikama karakterističnim za kontinualne sisteme i baš te „dobro projektovane“ osobine želimo da očuvamo u diskretnoj izvedbi. Konačno, prevođenje iz kontinualnog u diskretni oblik nije jednoznačno, već zavisi od osobina koje želimo da očuvamo, pogrešan izbor metoda, može da dovede do nepremostivih problema u eksploataciji digitalnih upravljačkih sistema.

U nastavku teksta, razmatraćemo prvo tehnike diskretizacije, koje očuvavaju vremenske karakteristike sistema, zatim frekventne (ili frekvencijske) karakteristike i konačno uvešćemo metode numeričke integracije u svom osnovnom obliku. Preslikavanje nula i polova sistema, je inherentno sadržano u prethodnim poglavljima i nećemo ih posebno razmatrati.

<sup>3</sup> Zbog prethodnog primera pojam *regulator* je sinonima za sisteme, koje razmatramo.

<sup>4</sup> Kao što je poznato LTI sistemi se opisuje običnim diferencijalnim jednačinama sa koncentrisanim parametrima u vremenskom domenu, odnosno *funkcijom prenosa* u kompleksnom domenu.

## 2 Vremenski invarijantna diskretizacija

U okviru ovog poglavlja razmatraćemo postupke diskretizacije, kod kojih se čuvaju karakteristike odziva u vremenskom domenu. Drugim rečima, *ukoliko na pobudu u vremenski kontinualan proces daje odziv y, tada će njegov digitalni ekvivalent pobuđen odbircima signala u davati na svom izlazu odbirke signala y*. U zavisnosti, od tipa pobude *u*, razlikujemo: *impuls invarijantnu* i *step invarijantnu* diskretizaciju.

### 2.1 Impuls invarijantna diskretizacija

Kao što samo ime kaže, impuls invarijantna diskretizacija (engl. *Impulse Invariant*) čuva karakteristike vremenskog odziva, ako je

pobuda Dirakov impuls. U matematičkoj formulaciji, pođimo od pretpostavke da smo sa  $G(s)$  obeležili funkciju prenosa, koju želimo da diskretizujemo, a sa  $G(z)$  odgovarajuću diskretnu funkciju prenosa. Znajući da su Laplasova i  $\mathcal{Z}$  transformacija Dirakove pobude  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ,  $\mathcal{Z}\{\delta(t)\} = 1$  respektivno, odgovarajući odzivi kontinualnog i diskretnog sistema se lako izračunavaju  $Y_c(s) = G(s)1$ ,  $Y_d(z) = G(z)1$ <sup>5</sup>, gde je očigledno da indeksi  $c$  i  $d$  označavaju odziv kontinualnog i diskretnog sistema. Konačno, odgovarajućim inverznim transformacijama dobijamo željene odzive, koji moraju da se poklapaju u trenucima odabiranja, odnosno

$$\mathcal{Z}^{-1}\{G(z)1\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)1\} \quad \text{za} \quad t = KT. \quad (3)$$

Dalje, primenom  $\mathcal{Z}$  transformacije na levu i desnu stranu izraza dobijamo, konačan način izračunavanja  $G(z)$ , koji garantuje isto ponašanje na impulsni odziv u trenucima odabiranja

$$G(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)1\}\}. \quad (4)$$

Izraz (4) se češće zapsiuje u kompaktnijoj formi

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}, \quad (5)$$

pri čemu je jasno, da ovaj kompaktniji izraz (5) nije u potpunosti matematički korektan, jer je  $\mathcal{Z}$  transformacija definisana kao preslikavanje iz vremenskog u kompleksni domen, kao npr. u izrazu (4). Međutim, izraz (5) je uobičajen u teoriji sistema automatskog upravljanja i sigurni smo da kod čitaoca ne unosi zabunu, posebno imajući u vidu zajedničko tablično predstavljanje Laplasove i  $\mathcal{Z}$  transformacije pored odgovarajućih vremenskih originala.

*Impulsno invarijantna transformacija* se obično sprovodi, tako što se kontinualna funkcija prenosa  $G(s)$  rastavi na parcijalne razlomke, odnosno u formu

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (6)$$

uz pretpostavku da polovi nisu višetsruki i da je red sistema  $n$ . Impulsni odziv ovog sistema (6) je onda

$$y_c(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} h(t), \quad (7)$$

gde je  $h(t)$  Hevisajdova funkcija, a indeks  $c$  označava da se radi o kontinualnom odzivu. Odgovarajući invarijantni impulsni odziv bi onda bio

$$y(kT) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k kT} h(kT). \quad (8)$$

<sup>5</sup> Jasno je da 1 u izrazima predstavljaju kompleksnu vrednost Dirakovog impulsa u odgovarajućem domenu.

Tako da je željena funkcija diskretnog prenosa, koja daje nepromenjen impulsni odziv u stvari

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}. \quad (9)$$

Ovaj diskretizacioni postupak je jednostavan za implementaciju, ali treba napomenuti da dobijeni digitalni ekvivalent, nema neku posebnu upotrebnu vrednost, kada nam je cilj očuvanje frekventnih karakteristika.

Jako je **važno** podsetiti da proces odabiranja kontinualnog impulsnog odziva (7), rezultuje frekvencijskim odzivom ekvivalentnog diskretnog signala koji se skalira faktorom  $1/T$ .<sup>6</sup> Odnosno, ako je  $T \ll 1$  pojačanje na niskim učestanostima može biti značajno. Mnogi projektanti smatraju da je uputno kompezovati ovaj efekat i time izbeći, pre svega, promene pojačanja na niskim učestanostima. Matematički to praktično znači da  $G(z)$  sada postaje

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k T}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, \quad (10)$$

što znači da jednačenje kontinualnog (7) i odgovarajućeg diskretnog odziva (8) sada izgleda

$$y(kT) = T y_c(t)|_{t=kt}. \quad (11)$$

U našem daljem radu, po pravilu ćemo koristiti izraz (10), mada u velikom broju slučajeva bez gubitka na opštosti možemo koristiti i emulacionu formulu datu izrazom (5).

**Primer 1** (Impuls invarijantni odziv). Primeri koji slede, služe da ilustruju postupke diskretizacije i nisu sami po sebi složeni, već reprezentativni. Neke od primera prati odgovarajući MATLAB<sup>7</sup> kod, uopštenje ovih simulacionih rešenja je trivijalno.

Za kontinulane sisteme, naći odgovarajuće funkcije diskretnog prenosa, koje obezbeđuju *impuls invarijantni odziv*.

(a) Kontinualni sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Direktno primenom (10) lako dobijamo sledeći tablični izraz za inetrator

$$G(z) = T \frac{z}{z - 1}.$$

<sup>6</sup> Ova činjenica je prvi put spomenuta u poglavlju *Osobine idealno odbirkovanog signala*, koje preporučujemo da se još jednom pažljivo pročita. Mi ćemo u ovoj napomeni dati primer, koji možda može bolje da ilustruje izobličenje odziva.

Prepostavićemo da je  $G(s)$  funkcija prenosa niskoropusnog filtra prvog reda, sa vremskom konstantom  $\tau$  odnosno

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}.$$

Naravno, jasno je da je i impulsni odziv  $Y(s)$  isti kao funkcija prenosa. Međutim diskretizacijom, dobijamo

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{\tau s + 1} + \frac{1}{\tau(s - j\frac{2\pi}{T}) + 1} + \frac{1}{\tau(s + j\frac{2\pi}{T}) + 1} \right].$$

pri tome smo uzeli u obzir samo dve kopije osnovnog spektra.

Dodatno podsećamo na još jednu korisnu činjenicu, koja će nam biti od interesa u daljoj studiji digitalnih upravljačkih sistema, a tiče se vrednosti pojačanja na niskim učestanostima kola zadržke nultog reda, koja služi kao svojevrсна kompezacija efekta odabiranja

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = T$$

<sup>7</sup> U novijim verzijama MATLAB koristi transformacionu formulu (10), koja uključuje skliranje amplitude vremenom odabiranja  $T$ . Još je važno reći i da je iz istih razloga vrednost Dirakovog delta impulsa, pri simulacijama diskretnih sistema sklirana faktorom  $1/T$

(b) Kontinualni sistem je opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Isto kao i u prethodnom premeru, radi se o tabličnom izrazu, pa primenom (5) izračunavamo

$$G(z) = T \frac{z}{z - e^{-T}}.$$

Diskretizaciju funkcije prenosa pod B) ilustrovali smo i u MATLAB okruženju, za vreme odabiranja  $T = 0.1s$

```
1 brojilac=[1];
2 imenilac=[1 1];
3 Gc=tf(brojilac, imenilac);
4 T=0.1;
5 Gd=c2d(Gc,T,'impulse') %metod diskretizacije 'impulse'
```

Čitaocu ostavljamo za vežbu, da uz različita vremena odabiranja, simulira impulsne odzive kontinualnog i diskretnog sistema, opisanih funkcijama prenosa iz ovog primera.

## 2.2 Step invarijantna diskretizacija

Ovo poglavlje je sa jedne strane prirodan nastavak prethodnog, a sa druge strane daje suštinsku vezu između funkcija prenosa u kontinualnom i diskretnom domenu, koju ćemo eksploatisati do kraja ovog kursa. U izvođenju step invarijantnog ekvivalenta, pratićemo formalizam iz prethodnog paragrafa, odnosno jednačimo odzive, u trenucima odabiranja, ako je pobuda Hevisajdov step ulaz. Odnosno, izraz (3) uz modifikaciju pobude postaje

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{G(z) \frac{z}{z-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \frac{1}{s}\right\} \quad \text{za } t = KT, \quad (12)$$

dalje, primenom 3 transformacije na levu i desnu stranu izraza, lako dobijamo

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \quad (13)$$

Izraz (13) se koristi za izračunavanje step invarijantnog diskretnog ekvivalenta funkcije prenosa. Odnosno, dobijamo funkciju diskretnog prenosa, koja u trenucima odabiranja ima isti odziv na Hevisajdovu step funkciju, kao i kontinualni original. Važno je reći, da je ovo jednovremeno i *digitalni ekvivalent* kontinualnog procesa, u kolu sa idealnim odabiračem i kolom zadržke nultog reda. Odnosno, to je način kako digitalni upravljački uređaj u trenucima odabiranja „vidi“

proces, uz idealni odabirač i kolo zadržke nultog reda. Ovu činjenicu, ovde prvi put napominjemo, detaljno ćemo je razmatrati u poglavljima, koja slede.

**Primer 2** (Step invarijantni odziv). Primeri koji slede, služe da ilustriraju postupke diskretizacije i nisu sami po sebi složeni, već reprezentativni. Neke od primera prati odgovarajući MATLAB kod, uopštenje ovih simulacionih rešenja je trivijalno.

Za sledeće kontinulane sisteme, naći odgovarajuće funkcije diskretnog prenosa, koje obezbeđuju *step invarijanti odziv*:

(a)

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

gde direktnom primenom (13) dobijamo sledeći izraz

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \frac{T}{z-1}. \end{aligned}$$

(b)

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

gde slično kao i u prethodnom primeru, primenom (5) izračunavamo

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z-1} \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right) \\ &= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}. \end{aligned}$$

Poređenjem rešenja iz primera 1 i ovog primera, lako uočavamo nekoliko očiglednih činjenica. Prvo, postupak diskretizacije nije jednoznačan, već zavisi od izabranog metoda. Ako pažljivo pogledamo dobijene rezultate, uočićemo da transformacije zadržavaju polove sistema<sup>8</sup>, odnosno polovi sistema u oba primera su isti, a ono što se razlikuje su nule i pojačanje funkcije prenosa. Konačno, u ovom primeru se još lakše vidi da funkcija diskretnog prenosa eksplicitno zavisi od vremena odabiranja  $T$ , što dodatno uvodi višeznačnost u ove postupke diskretizacije.

Diskretizaciju funkcije prenosa pod b) ilustrovali smo i u MATLAB okruženju, za vreme odabiranja  $T = 0.1s$

<sup>8</sup> Ovo praktično znači da funkcija diskretnog prenosa, koja ima pol u  $Z = 1$  predstavlja integrator u diskretnom obliku.

```

1 brojilac=[1];
2 imenilac=[1 1];
3 Gc=tf(brojilac, imenilac);
4 T=0.1;
5 Gd=c2d(Gc,T,'zoh') %metod diskretizacije 'zoh' ili step inavrijantna

```

Kao i u prethodnom primeru čitaocu ostavljamo za vežbu, da uz različita vremena odabiranja, simulira step odzive kontinualnog i diskretnog sistema, opisanih funkcijama prenosa iz ovog primera.

### 3 Diskretizacija po principima numeričke integracije

Pretpostavljamo da je čitalac upoznat sa metodama numeričke integracije, koje se koriste za iznalaženje rešenja diferencijalnih jednačina<sup>9</sup>. Sličan pristup, ako ne i isti imamo prilikom diskretizacije kontinualnih funkcija prenosa, odnosno diferencijalnih jednačina, koje funkcije prenosa predstavljaju. Međutim, u digitalnim upravljačkim sistemima nameće se jedan važan kriterijum, koji smo inherentno usvojili i ranije, a to je da se sve transformacije, algoritmi i svi ostali matematički formalizmi moraju „brzo“ izvršavati, pa čak i na račun tačnosti same aproksimacije. Odnosno, izvršavanje diferencijalnih jednačina, koje su krajni rezultat diskretizacije, ne bi smelo da uvodi dodatno kašnjenje, tačnije u realnom slučaju mora da uvede minimalno dodatno kašnjenje u sistemima automatskog upravljanja.

Postupak diskretizacije po principima numeričke integracije odvija se po pravilu na sledeći način: *Kontinualnu funkciju prenosa zapisujemo u formi diferencijalne jednačine, zatim sledi ključni korak numeričke integracije, a to je prevođenje diferencijalne jednačine u diferencnu i konačno diferencnu jednačinu zapisujemo u formu pogodnu za dalju analizu, odnosno kao funkciju diskretnog prenosa.*

Počemo našu studiju od primera, mišljenja smo da je ovaj pristup, od partikularnog kao opštem, uputan u ovom slučaju i da olakšava praćenje i razumevanja teksta.

Počemo našu studiju sistemom, koji se uspešno opisuje funkcijom prenosa prvog reda

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s + a}, \quad (14)$$

gde su  $U(s)$  i  $E(s)$  izlaz i ulaz funkcije prenosa respektivno, parametar  $a$  je nenegativan realan broj. Dalje lako sledi

$$sU(s) + aU(s) = aE(s) \quad \text{odnosno} \quad \dot{u}(t) + au(t) = ae(t), \quad (15)$$

ili

$$\dot{u}(t) = -au(t) + ae(t). \quad (16)$$

<sup>9</sup> Tako npr. metode numeričke integracije po metodologiji *Runge-Kutta*, poznate su okviru programskog paketa MATLAB, kao ode23 i ode45

Najveći uzročnik dodatnog vremenskog kašnjenja u digitalnim upravljačkim sistemima je računar kao upravljački uređaj, odnosno izvršavanje upravljačkog algoritma na digitalnom uređaju. Zato se i definiše pojam upravljanje u realnom vremenu (engl. *real-time control*), što po pravilu podrazumeva da se sve računarske operacije izvršavaju u okviru jedne periode odabiranja

Integracijom  $\dot{u}(t)$  iz izraza (16) dobijamo  $u(t)$

$$u(t) = \int_0^t (-au(\tau) + ae(\tau))d\tau, \quad (17)$$

gde je  $\tau$  pomoćna promenjiva, koju uvodimo da bismo izbegli zabunu sa vremenom  $t$ , koja je u postupku integracije gornja granica integrala.

U diskretnom slučaju, koji je od našeg interesa, integral iz izraza (17) možemo podeliti u dva intervala: prvi od  $t = 0$  do tzv. prethodnog trenutka  $t = kT - T$  i drugi od  $t = kT - T$  do sadašnjeg trenutka  $t = kT$ , odnosno

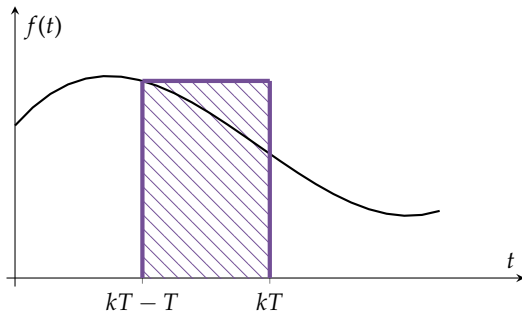
$$\begin{aligned} u(kT) &= \int_0^{kT-T} (-au(\tau) + ae(\tau))d\tau + \int_{kT-T}^{kT} (-au(\tau) + ae(\tau))d\tau \\ &= u(kT - T) + [\text{površina } -au(\tau) + ae(\tau) \text{ u intervalu } kT - T \leq \tau \leq T]. \end{aligned} \quad (18)$$

Metode numeričke integracije, koje ćemo uvesti, razlikuju se u izračunavanju površine<sup>10</sup> između trenutaka odabiranja  $kT - T$  i  $kT$ . Različiti postupci izračunavanja ove površine su predmet poglavlja koja slede. Videćemo da je studija diskretnih sistema, jako ostljiva na izbor postupka numeričke integracije i da čak logički veoma slična rešenja, mogu dati suštinski različite rezultate.

<sup>10</sup> Podsećamo na dobro poznatu činjenicu, da je geometrijska interpretacija određenog integrala, površina ispod funkcije pod znakom integrala

### 3.1 Numerička integracija levim pravougaonicima - Ojlerovo. diferenciranje unapred

Numerička integracija metodom levih pravougaonika se odvija u skladu sa postupkom predstavljenim na slici 1 gde se površina ispod krive aproksimira pravougaonikom, čija je površina proizvod  $f(KT - T)$  i dužine intervala  $T$ . Odnosno, leva vrednost  $f(KT - T)$  se produžava unapred, odatle i naziv postupka. Pod pretpostavkom da je  $f(t)$  sa slike 1 u stvari podintegralna funkcija izraza (18) dobijamo



Leonhard Euler, 1707 – 1783, Švajcarski univerzalista, između ostalog poznat po rečenici “Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum.”, što opisuje sadržaj jednog drugog kursa

Slika 1: Numerička integracija levim pravougaonicima



$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT - T) + [-au(kT - T) + ae(kT - T)]T \\ &= (1 - a)u(kT - T) + aTe(kT - T). \end{aligned} \quad (19)$$

Prevođenjem izraza (19) u kompleksni  $z$  domen dobijamo

$$U(z) = (1 - a)Tz^{-1}U(z) + aTz^{-1}E(z),$$

gde su očigledno  $U(z)$  i  $E(z)$  kompleksni likovi signala  $u(kT)$  i  $e(kT)$ , a u skladu sa teoremom o vremenskom pomeranju  $z^{-1}$  predstavlja čisto vremensko kašnjenje. Ovaj izraz se lako dalje transformiše u

$$zU(z) = (1 - a)TU(z) + aTE(z),$$

odnosno, u funkciju diskretnog prenosa

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{aT}{z - (1 - aT)} = \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a}. \quad (20)$$

Važno je primetiti, da ako uporedimo ogovarajuću polaznu kontinualnu funkciju prenosa (14), sa novodobijenom funkcijom diskretnog prenosa (20), postupak diskretizacije *numeričkom integracijom unapred* praktično se svodi na smenu kompleksne promenjive  $s$  izrazom  $(z - 1)/T$ . Konkretno, ako sprovedemo ovu smenu, funkcija diskretnog prenosa će biti u formi, koja odgovara postupku diskretizacije *numeričkom integracijom unapred*.

U naslovu ovog poglavlja stoji i *Ojlerovo diferenciranje unapred*, namera nam je da u nastavku teksta objasnimo i taj pristup, koji će se u nekim primenama učiniti i logički ispravnijim, npr. kada moramo da direktno diskretizujemo diferencijalni član PID regulatora iz vremenskog domena. Ne treba napominjati, da će se dobiti potpuno ista smena za promenjivu  $s$ , ali kao što smo rekli ovaj pristup direktne diskretizacije diferencijalnih operatora, ima svoju punu svrsishodnost.

**Ojetrovo diferenciranje unapred**

Osnovna zamisao je da se diferencijal zameni konačnom razlikom unapred, odnosno

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}.$$

Ako sada primenimo Laplasovu transformaciju, uz pretpostavku o nultim početnim uslovima i primenjujući teoremu o vremenskom pomeranju dobijamo

$$sY(s) \approx \frac{1}{T}(e^{sT} - 1)Y(s).$$

Odnosno, ako je vremensko pomeranje  $z = e^{sT}$ , iz prethodnog izraza lako se dobija

$$s \approx \frac{1}{T}(z - 1),$$

što je potpuno identično kao transformacija u izrazu (20). Rezimirajući ovaj postupak, možemo reći, da postupak numeričkog diferenciranja u skladu sa Oljerovim diferenciranjem unapred, u kompleksnom domenu znači smenu kompleksnih promenljivih po formuli  $s = (z - 1)/T$

U poglavlju, koje je obrađivalo preslikavanje iz  $s$  u  $z$  ravan, ustanovili smo konturu stabilnosti i objasnili uticaj položaja polova na ponašanje sistema. Numeričkom integracijom, mi smo takođe uveli kompleksno preslikavanje iz  $s$  u  $z$  ravan i neophodno je analizirati uticaj ove transformacije na ponašanje sistema posle diskretizacije. Prvi korak bi bio naći inverznu transformaciju smene uvedene izrazom (20), odnosno

$$z = 1 + sT. \quad (21)$$

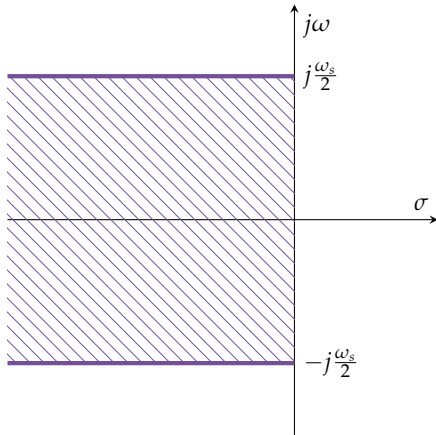
Prateći formalizme iz poglavlja o preslikavanju iz  $s$  u  $z$  ravni, lako ustanovljavamo da se primarna ili Nikvistova oblast preslikava u poluravan, levo od prave  $Re\{z\} = 1^{11}$ , kao i što je prikazano na slici 2.

Ovakvo preslikavanje van jediničnog kruga, očigledno može da dovede do narušavanja stabilnosti i harmonijskog odziva, pa se ova transformacija u inženjerskoj praksi ne preporučuje.

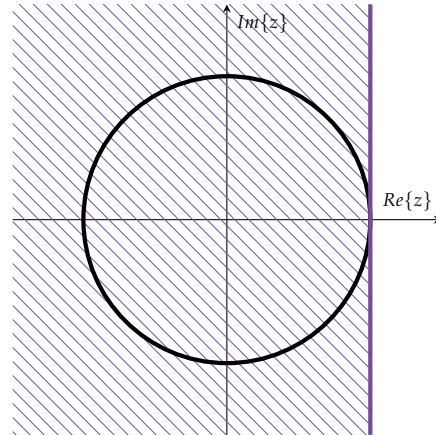
Čitaocu ostavljamo za vežbu da na primere iz prethodnih poglavlja primeni ovaj način diskretizacije.

<sup>11</sup> U pravu se očigledno preslikava segment  $s = j\omega$

Ovo praktično znači da kontinualni regulator, koji ima sve polove u levoj poluravni u diskretnoj izvedbi može da ima polove van jediničnog kruga. Odnosno, da ako umesto diferencijala u softverskoj izvedbi uvedemo konačno diferenciranje unapred, ovako diskretizovan regulator može da uvede ceo sistem u nestabilnost.



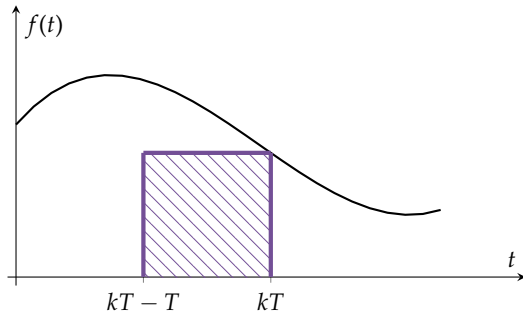
(a) Primarni pojas s-ravni.



(b) Kontura primarnog pojasa preslikana u z ravan .

### 3.2 Numeričke integracije desnim pravougaonicima - Ojlerovo diferenciranje unazad

Ovaj postupak numeričke integracije je veoma sličan prethodnom, može se pomisliti i da nema značajnih razlika, međutim kao što će se videti, njihova upotreba vrednost je suštinski različita. Numerička integracija metodom desnih pravougaonika se odvija u skladu sa postupkom predstavljenim na slici 3 gde se površina ispod krive aproksimira pravougaonikom, čije je površina proizvod  $f(KT)$  i dužine intervala  $T$ . Odnosno, desna vrednost  $f(KT)$  se prostire unazad, odatle i naziv postupka. Pod pretpostavkom da je  $f(t)$  sa slike 3 u stvari podintegralna funkcija izraza (18) dobijamo



Slika 2: Preslikavanje primarnog pojasa iz s ravni u z ravan, primenom diferenciranja unapred

Slika 3: Numerička integracija desnim pravougaonicima

$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT - T) + [-au(KT) + ae(KT)]T \\ u(kT)(1 + aT) &= u(kT - T) + aTe(kT) . \end{aligned} \quad (22)$$

Pratimo postupak iz prethodnog poglavlja i prevodimo (22) u kom-

pleksni domen

$$U(z)(1 + aT) = z^{-1}U(z) + aTE(z)$$

$$U(z)(z + zaT) = U(z) + aTzE(z)$$

$$U(z)(z + zaT - 1) = aTzE(z).$$

i dalje u funkciju diskretnog prenosa

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{aTz}{z - 1 + aTz} = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}. \quad (23)$$

Slično kao ranije, ako uporedimo ogovarajuću polaznu kontinualnu funkciju prenosa (14), sa novodobijenom funkcijom diskretnog prenosa (23), postupak diskretizacije *numeričkom integracijom unazad* se svodi na smenu kompleksne promenjive  $s$  izrazom  $(z - 1)/Tz$ . Odnosno, ako sprovedemo ovu smenu, funkcija diskretnog prenosa će biti u formi, koja odgovara postupaku diskretizacije *numeričkom integracijom unazad*.

Kao i u prethodnom paragrafu, namera nam je da uvedemo *Ojlerovo diferenciranje unazad*, kao direktan način diskretizacije diferencijalnih operatora.

#### Ojlerovo diferenciranje unazad

Osnovna zamisao je da se diferencijal zameni konačnom razlikom unazad, odnosno

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T}.$$

Ako primenimo Laplasovu transformaciju, uz pretpostavku o nultim početnim uslovima i primenjujući teoremu o vremenskom pomeranju dobijamo

$$sY(s) \approx \frac{1}{T}(1 - e^{-sT})Y(s).$$

Odnosno, ako je vremensko pomeranje  $z^{-1} = e^{-sT}$ , iz prethodnog izraza lako se dobija

$$s \approx \frac{z - 1}{Tz}.$$

Što je potpuno identično kao transformacija u izrazu (23).

Rezimirajući ovaj postupak, možemo reći, da postupak numeričkog diferenciranja u skladu sa Oljerovim diferenciranjem unazad, u kompleksnom domenu znači smenu kompleksnih promenljivih po formuli  $s = (z - 1)/zT$

I ova aproksimacija može da se posmatra iz perspektive preslikavanja  $s$  u  $z$  ravan. Podsećamo, da rezultat preslikavanja između dve kompleksne ravni, opredeljuje kvalitet postupka diferenciranja.

Kao i ranije počecemo od veze između kompleksnih promenljivih, ali inverzno od uvedene aproksimacije (23) odnosno

$$z = \frac{1}{1 - sT}. \quad (24)$$

Preslikavanje po formuli (24) je znatno složenije nego prethodno i detaljno ćemo ga objasniti u nastavku teksta. Podsećamo, da rezultat preslikavanja dominantno opredeljuje transformacija imaginarne ose u  $s$  ravni odnosno kada je  $s = j\omega$ , koristeći tu vezu izraz (23) postaje

$$z = \frac{1}{1 - sT} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1 + j\omega T}{1 + (\omega T)^2} = x + jy, \quad (25)$$

gde smo sa  $x$  i  $y$  obeležili realni i imaginarni deo kompleksnog broja. Ovu smenu smo uveli da bismo pojednostavili dalju studiju problema. Iz izraza (25) dalje sledi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left( \frac{1}{1 + (\omega T)^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2} \right)^2 = \frac{1 + (\omega T)^2}{(1 + (\omega T)^2)^2} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= \frac{1}{1 + (\omega T)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 &= 0 \Rightarrow \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (26)$$

Poslednji član u izrazu (26) očigledno predstavlja jednačinu kružnice sa centrom u  $(0.5, 0)$  i prečnikom 0.5, prikazane na slici 4. Sve ostale tačke primarnog pojasa preslikaće se unutar ove kružnice.

Važno je naglasiti da ova emulacija sa *difrenciranjem unazad*, očigledno zadržava stabilnost, jer se svi stabilni polovi kontinualnog sistema preslikavaju u diskretne polove unutra jedinične kružnice. Međutim, kako se kritične učestanosti ne preslikavaju unutar cele jedinične kružnice, već u jedan manji njen deo, jasno je da će doći do degradacije harmonijskog oziva (odnosno frekventnih karakteristika), a da će se najmanje degradirati one učestanosti, koje se u kontinualnom domenu nalaze najbliže imaginarnoj osi ( $s = j\omega$ ). Isto tako, jasno se vidi da će se za manje vreme odabiranja  $T$  ove karakteristike bolje očuvati. Na kraju, treba reći da ova transformacija, omogućava da se i neki nestabilni polovi kontinualnog sistema, preslikaju u stabilne, ali na našu sreću zahtev za očuvanje nestabilnosti, nije karakterističan za sisteme automatskog upravljanja.

Dozvolićemo sebi jedan neformalniji zaključak. U okviru poglavlja *Diskretizacija po principima numeričke integracije*, obradili smo dva

Kroz primer želimo da podsetimo čitaoce na elementarna pravila kompleksne analize.

Neka je  $C$  kružnica u kompleksnoj poluprečnika 4 sa centrom u  $(2, 1)$ . Tada se kružnica  $C$  može opisati sledećom jednačinom

$$|z + 2 - j| = 4,$$

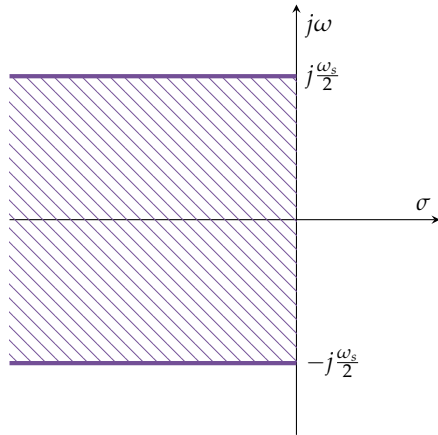
gde je sa  $| \cdot |$  obeležen moduo kompleksnog broja. Odnosno ako, razdvojimo realni i imaginarni deo kompleksnog broja  $z = x + jy$ , dobijamo

$$|(x + 2) + j(y - 1)| = 4,$$

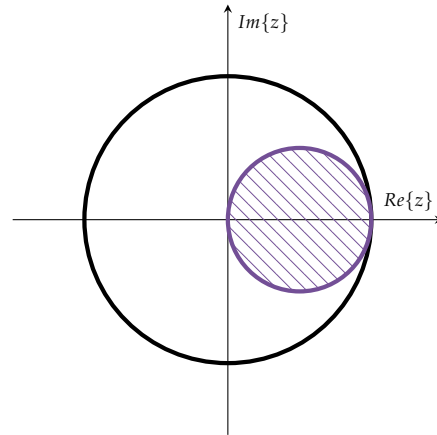
ili konačno izračunavamo moduo kompleksnog broja

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16.$$

Što je i željena jednačina kružnice u poznatoj formi.



(a) Primarni pojas s-ravni.



(b) Kontura primarnog pojasa preslikana u z ravan.

naizgled veoma slična postupka *Levi pravougaonici - diferenciranje unapred* i *Desni pravougaonici - diferenciranje unapred*: Slobodni smo čak da kažemo, da su do sada ovo dva postupka posmatrano ravnopravno i da je teško bila uočljiva suštinska razlika između njih. Međutim sa stanovišta praktične implementacije u digitalnim algoritmima automatskog upravljanja, očigledno je da jedan postupak može da uvede sistem u nestabilnost i bespovratno degradira sve performanse sistema.

Slika 4: Preslikavanje primarnog pojasa iz s ravni u z ravan primenom diferenciranja unazad

### 3.3 Numerička integracija trapeznim pravilom - Tustinova aproksimacija

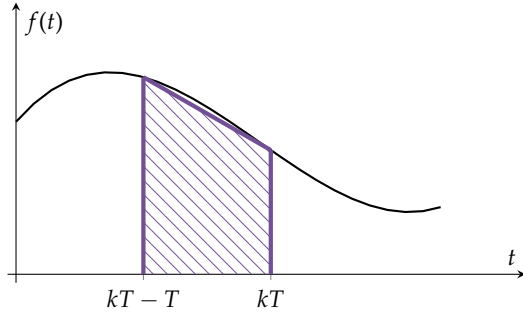
Postupak numeričke integracije trapeznim, Tustinovim<sup>12</sup>, pravilom, na neki način predstavlja prirodan nastavak prethodna dva postupka. Naime, vrednost podintegralne funkcije se aproksimira linijskim segmentom slika 5, koji povezuje vrednosti  $f(kT - T)$  i  $f(kT)$ . Konkretno mi ćemo vrednost funkcije aproksimirati srednjom vrednošću ova dva vremenska odbirka, a površinu funkcije pod znakom integrala dobićemo kao proizvod ove usrednjene vrednosti i vremena odabiranja  $T$  tj. kao  $T[f(kT - T) + f(kT)]/2$ . Za naš konkretan slučaj integracije podintegralnog izraza (18) dobijamo

$$u(kT) = u(kT - T) + \frac{T}{2} [-au(kT - T) + ae(kT - T) - au(kT) + ae(kT)], \quad (27)$$

odnosno u z domenu

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2} [-az^{-1}U(z) + az^{-1}E(z) - aU(z) + aE(z)]. \quad (28)$$

<sup>12</sup> Arnold Tustin, 1899 – 9 January. Profesor na *Imperial College London*, poznat po svom doprinosu teoriji automatskog upravljanja



Slika 5: Numerička integracija trapeznim pravilom

Uz malo elementarne matematike, dobijamo odgovarajuću funkciju diskretnog prenosa

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{a \frac{T}{2}(z+1)}{z-1 + a \frac{T}{2}(z+1)} = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + a}. \quad (29)$$

Kao i ranije, ako uporedimo odgovarajuću polaznu kontinualnu funkciju prenosa (14), sa novodobijenom funkcijom diskretnog prenosa (29), postupak diskretizacije *numerička integracija trapeznim pravilom* se svodi na smenu kompleksne promenjive  $s$  izrazom  $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ . Odnosno, ako sprovedemo ovu smenu, funkcija diskretnog prenosa će biti u formi, koja odgovara postupku diskretizacije *numeričke integracije trapeznim pravilom*. Ova konkretna smena u literaturi se naziva *Tustinova aproksimacija* i u nastavku teksta i mi ćemo koristiti taj termin.

Od izuzetnog je značaja analizirati preslikavanje iz  $s$  u  $z$  ravan primenom *Tustinove aproksimacije*. Počecemo od inverzene forme, odnosno veze između promenljivih  $z$  i  $s$ , koji se dobija „inverznim“ trapeznim pravilom

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}. \quad (30)$$

Preslikavanje ćemo započeti smenom  $s = j\omega$ , odnosno preslikaćemo imaginarnu osu  $s$  ravni

$$z = \left. \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \right|_{s=j\omega} = \frac{1 + j\frac{\omega T}{2}}{1 - j\frac{\omega T}{2}} = \frac{1 - (\frac{\omega T}{2})^2 + j\omega T}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2}, \quad (31)$$

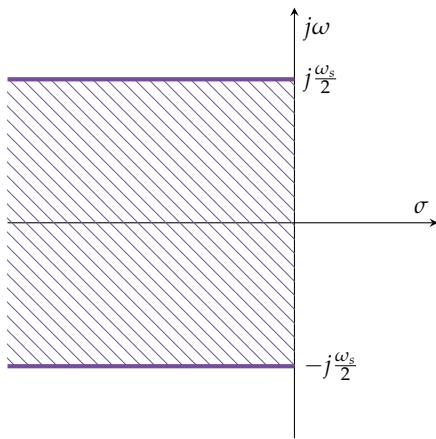
ovako dobijeni kompleksni broj ćemo razdvojiti na realni i imaginarni deo

$$z = x + jy = \frac{1 - (\frac{\omega T}{2})^2}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} + \frac{j\omega T}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2}. \quad (32)$$

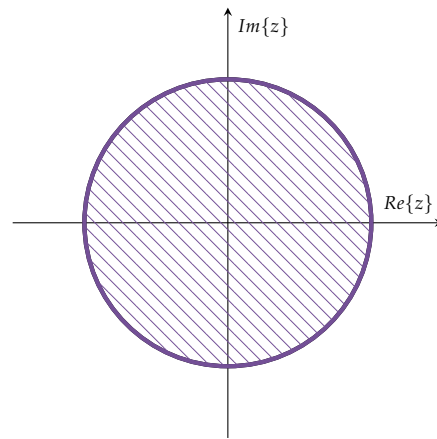
Daljom transformacija kompleksnog broja iz izraza (32) dobijamo

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{1 - (\frac{\omega T}{2})^2}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega T}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} \right)^2 = \frac{1 + (\frac{\omega T}{2})^2}{1 + (\frac{\omega T}{2})^2} = 1; \quad (33)$$

Kao što se vidi izraz (33)  $x^2 + y^2 = 1$  opisuje jediničnu kružnicu, tj. kružnicu poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku, kao na slici 6. Iz perspektive preslikavanja iz  $s$  u  $z$  ravan primenom (inverzne) *Tustinove aproksimacije* to znači da će diskretni sistem dobiti na ovaj način uvek biti stabilan. Međutim, bilo bi dobro proučiti preslikavanje frekvencijskih karakteristika primenom *Tustinove transformacije*. Napomena, želimo da pokažemo da postoje izvesna izobličenja u frekvencijskim karakteristikama, ali da se u opsegu niskih frekvencija ili na tačno određenoj frekvenciji, karakteristika kontinualnog i diskretnog sistema mogu izjednačiti. Ovo svojevrsno ugađanje frekventnih karakteristika, neki smatraju novim postupkom diskretizacije kontinualnih filtara.



(a) Primarni pojas  $s$ -ravni.



(b) Kontura primarnog pojasa preslikana u  $z$  ravan.

Da bi lakše objasnili ovo slaganje frekvencijskih karakteristika, privremeno ćemo uvesti dve nove oznake  $\omega_c$  i  $\omega_d$ , koje predstavljaju učestanosti u kontinualnog odnosno diskretnog sistema respektivno. Analiza frekventnih karakteristika se praktično svodi na preslikavanje imaginarnog dela primarnog pojasa  $s$  ravni odnosno  $s = j\omega_d$  u granicama od 0 do  $\omega_s/2$ . Počecemo od izraza (30), koji smo malo modifikovali, odnosno uopštili

$$s = A \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (34)$$

gde smo uveli opštiji parametar  $A$  umesto  $2/T$  sa ciljem da novo-vedni parametar  $A$  adaptivno biramo u skladu sa projektantskim zahtevima za usaglašavanje frekvencija. Frekventnu analizu nastavlja-

Slika 6: Preslikavanje primarnog pojasa iz  $s$  ravni u  $z$  ravan primenom Tustinovog pravila



mo uobičajenom smenom  $s = j\omega_c$  i  $z = e^{j\omega_d T}$

$$\begin{aligned} j\omega_c &= A \frac{1 - e^{-j\omega_d T}}{1 + e^{-j\omega_d T}} = A \frac{e^{j\omega_d T} + 1}{e^{j\omega_d T} - 1} \\ &= A \frac{e^{j\omega_d T/2} e^{j\omega_d T/2} - e^{-j\omega_d T/2} e^{-j\omega_d T/2}}{e^{j\omega_d T/2} e^{j\omega_d T/2} + e^{-j\omega_d T/2} e^{-j\omega_d T/2}} \\ &= jA \frac{\sin \frac{\omega_d T}{2}}{\cos \frac{\omega_d T}{2}} = jA \tan \frac{\omega_d T}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

gde konačnu vezu posebno naglašavam

$$j\omega_c = jA \tan \frac{\omega_d T}{2}. \quad (36)$$

Cilj nam je da odredimo koeficijent  $A$ , koji će nam usaglasiti učestanosti u kontinualnom domenu i nakon diskretizacije. Počecemo od vrednosti parametra, koji odgovara *Tustinovoj* aproksimaciji, odnosno

$$j\omega_c = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_d T}{2}. \quad (37)$$

Ako pretpostavimo da je vreme odabiranja „malo“, odnosno ako se odabiranje vrši dovoljno brzo, matematički se lako pokazuje da važi sledeća relacija

$$\tan \frac{\omega_d T}{2} \approx \sin \frac{\omega_d T}{2} \approx \frac{\omega_d T}{2},$$

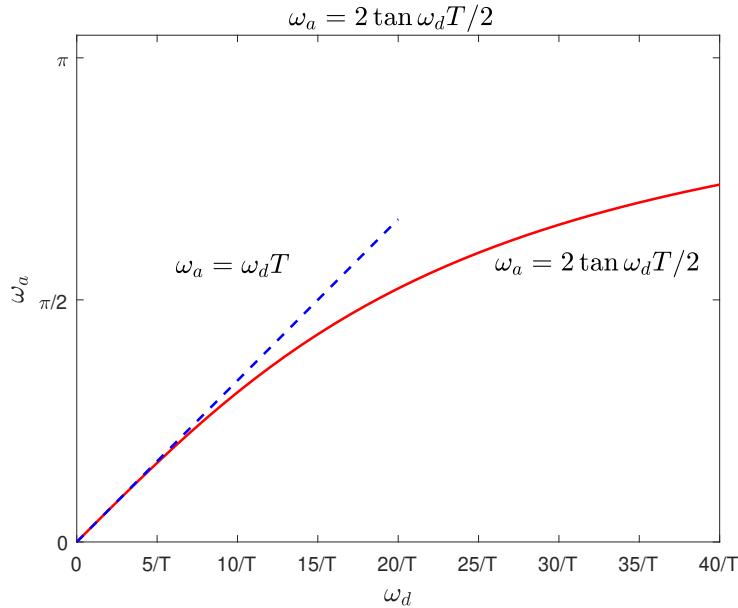
odnosno u našem slučaju

$$\omega_c \approx \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_d T}{2} \approx \omega_d. \quad (38)$$

Ovo praktično znači da za male vrednosti vremena odbiranja  $T$  kontinualni sistem i njegov odgovarajući digitalni ekvivalent, dobijen *Tustinovom aproksimacijom* imaju dobro poklapanje frekvencijskog spektra, kao što je prikazano na slici 7, u delu krive gde arctan ima skoro pa linearno ponašanje. Međutim kako se  $(\omega_d T)/2$  približava vrednosti  $\omega_s/2$  odnosno  $\pi/T$  dolazi do distorzije frekvencija, odnosno frekventne krive se razmimoilaze. Pitanje koje se postavlja je, kako odrediti koeficijent  $A$  iz izraza (34), tako da se slažu frekvencije na učestanosti  $\omega_0$ , izvan dela u kome *Tustinova* aproksimacija obezbeđuje preklapanje. Najlakši način je da se parametar  $A$  izabere na sledeći način

$$s = \frac{\omega_0}{\tan \frac{\omega_0 T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (39)$$

Jasno je i bez posebnog dokazivanja, da će se ovom transformacijom obezbediti preklapanje na učestanosti od interesa  $\omega_0$ . Ovaj pristup,



Slika 7: Uklapanje frekvencija u skladu sa Tustinovom aproksimacijom

dat izrazom (39) naziva se *ugađanje* ili *slaganje frekventnih karakteristika* i predstavlja posebni postupak diskretizacije kontinualnih sistema.

Važno je reći da se sve transformacije tipa

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (40)$$

gde je  $w$  kompleksna promenjiva nazivaju, zbog svoje matematičke forme *bilinearne transformacije*. Očigledno je da sve transformacije iz ovog poglavlja spadaju u tu klasu, odnosno termin *bilinearna* se ravnopravno koristi u njihovom opisivanju.

Čitaocu ostavljamo za vežbu da direktno primeni MATLAB funkcije za diskretizaciju primenom *Tustinove* i/ili *bilinearne* transformacije. Same funkcije dajemo u nastavku.

```

1 [Brojilacd,Imenilacd] = bilinear(Brojilac,Imenilac,Fs);
2 % direktna primena Tustinove aproksimacije, gde je Fs frekvencija
  uzorkovanja
3
4 [Brojilacd,Imenilacd] = bilinear(Brojilac,Imenilac,Fs,Fp)
5 % Primena formule sa ugađanjem frekvencija, gde je Fp eljena frkevenacija.
6
7 %ili
8 Gd=c2d(Gc,T,'tustin') %metod diskretizacije 'tustin'
```

Novouvedena kompleksna promenjiva  $w$  i sam izraz (40) često se koriste kao svojevrzne pomoćne promenjive u analizi stabilnosti diskretnih sistema. Naime, smenom kompleksne promenjive  $z$ , uz pomoć izraza (40), u karakterističnom polinomu, dobijamo novi karakteristični polinom, sada u funkciji  $w$ , kod koga stabilnost možemo analizirati uz pomoć dobro poznatih alata za kontinualne sisteme. Ovo je moguće, jer se promenjiva  $w$  jedinični krug stabilnosti diskretnog sistema, preslikava u levu poluravan, čime faktički daje mogućnost za primenu analitičkih kriterijuma za analizu stabilnosti kontinualnih sistema. Dokaz ove činjenice, čitalac može i intuitivno naći u ovom poglavlju i ostavljamo ga namerno nedorečenim. Sa druge strane  $w$  nema karakter učestanosti, već je nazivamo pseudoučestanost zbog svog bezdimenzijskog karaktera i ova činjenica je inherentno sadržana u ovom poglavlju i nećemo je posebno razmatrati.