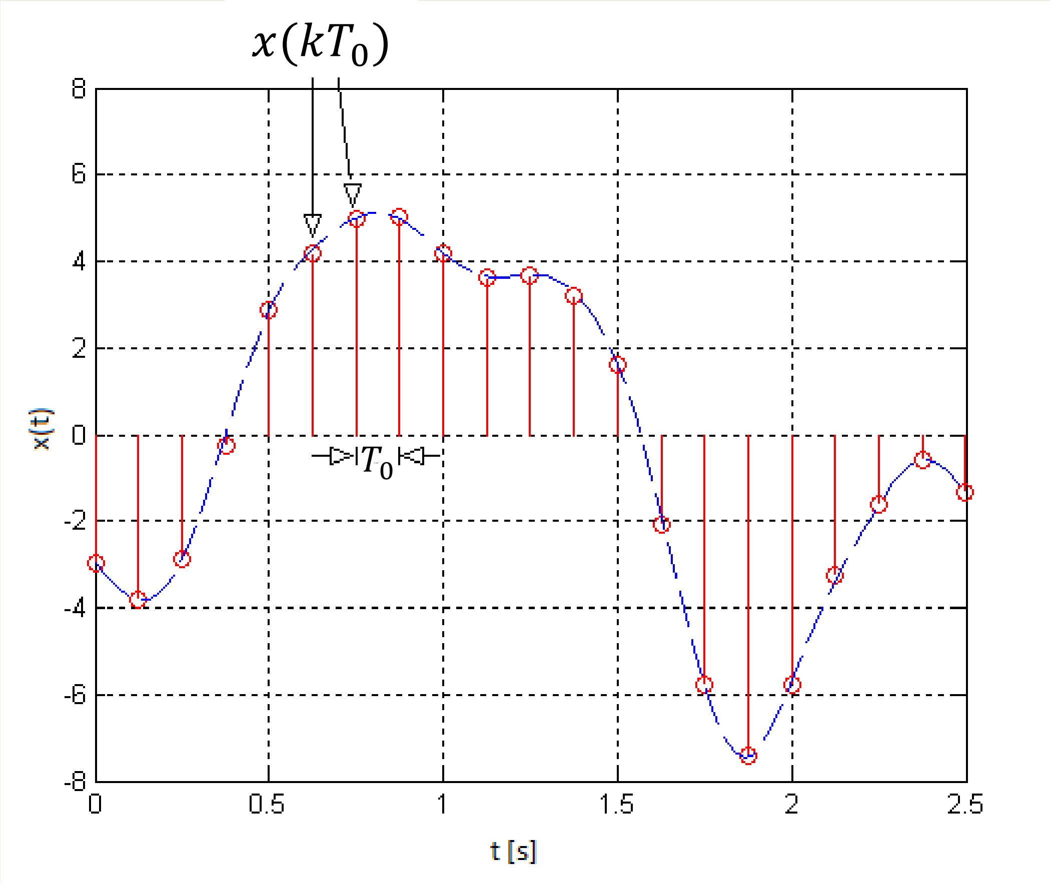
FURIJEOVA TRANSFORMACIJA DISKRETNIH SIGNALA

Primena DSP u upravljanju

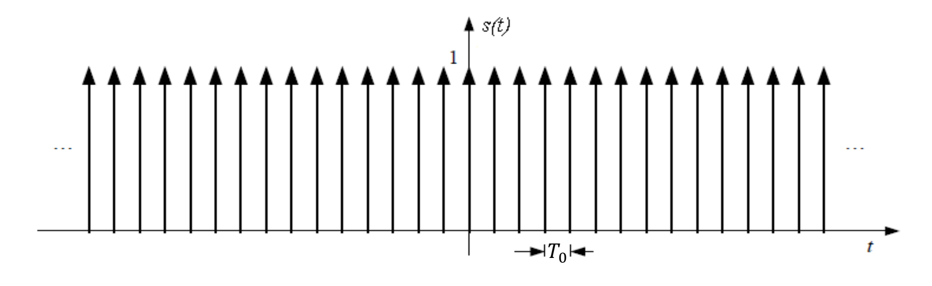
Diskretizacija u vremenu

- Većina signala u prirodi su kontinualni
- Kontinualni signali su nepogodni za obradu na digitalnim računarima
- Vremensko odabiranje *(Sampling)* je proces diskretizacije kontinualnih signala
- Odabiranje se najčešće vrši u ekvidistantnim vremenskim trenutcima
- $x_S(k) = x(t)\Big|_{t=kT_0} = x(kT_0)$
- Gde je T_0 perioda odabiranja



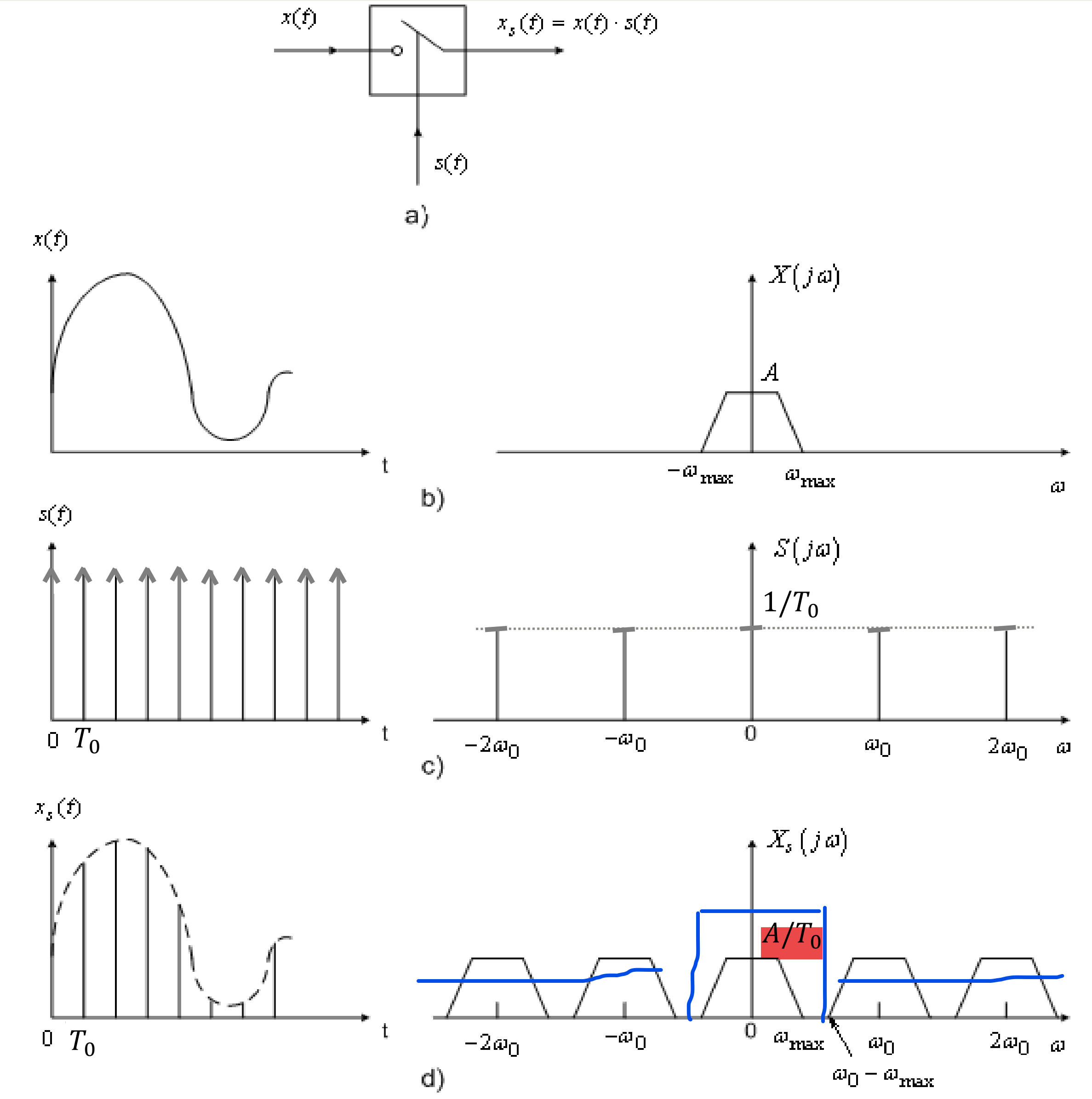
Furijeova transformacija diskretnog signala

- $X_S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_S(t) e^{-j\omega t} dt$
- Pošto važi da je $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ signal $x_S(t)$ pod Furijeovim integralom možemo prikazati kao:
- $x_S(t) = x(t) \cdot s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$
- $X_S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot s(t) e^{-j\omega t} dt$
- $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega_0 t}$ gde je $s_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$ pa je:
- $X_S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$
- $X_S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - n\omega_0)]$



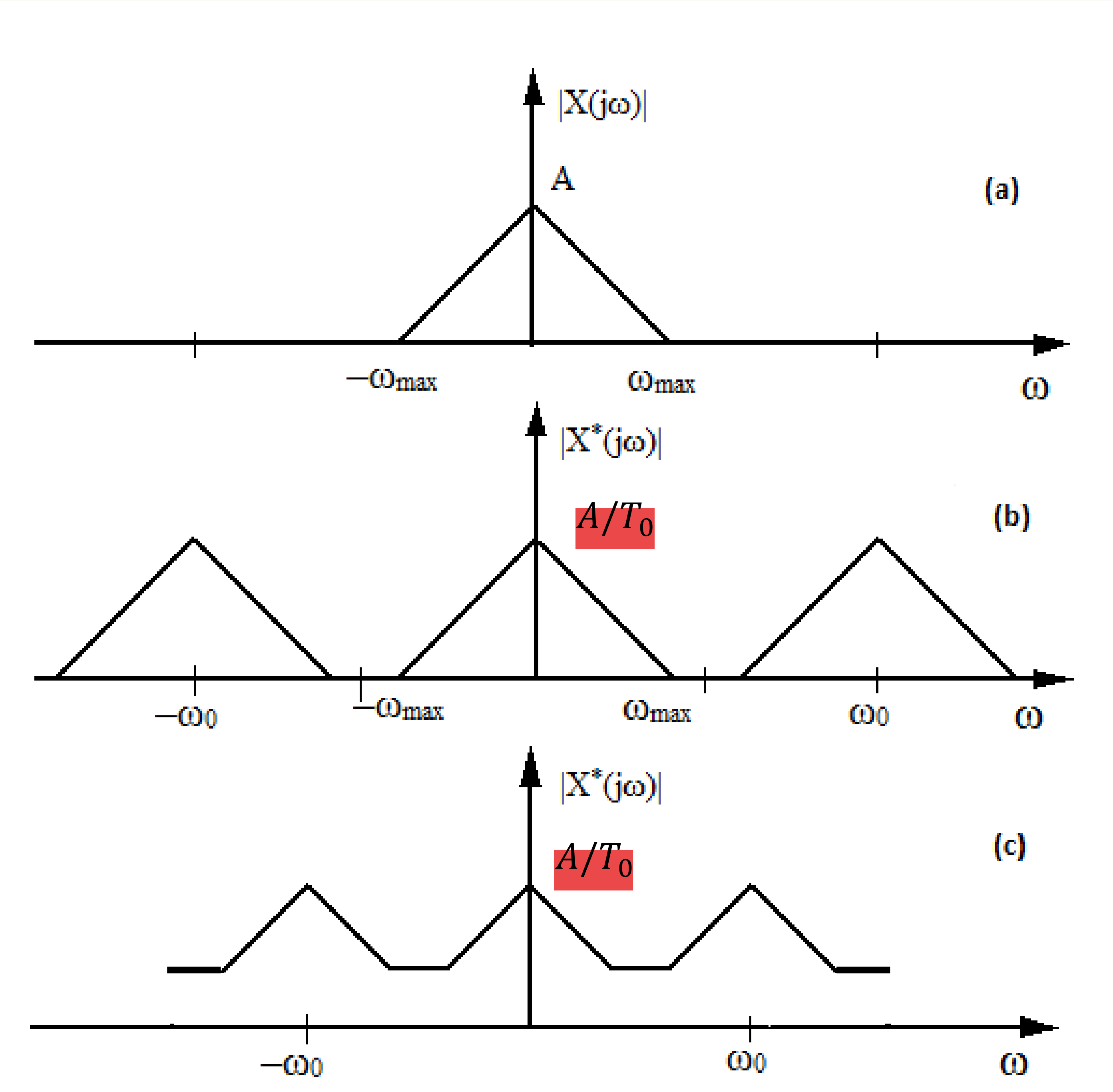
Furijeova transformacija diskretnog signala

- Spektar diskretnog signala je periodičan sa periodom ω_0
- Dualnost:
  - *Periodičan signal = diskretan spektar*
  - *Diskretan signal = periodičan spektar*
- Amplitudski spektar kontinualnog signala je pomnožen konstantom $1/T_0$
- Fazni spektar se periodično ponavlja

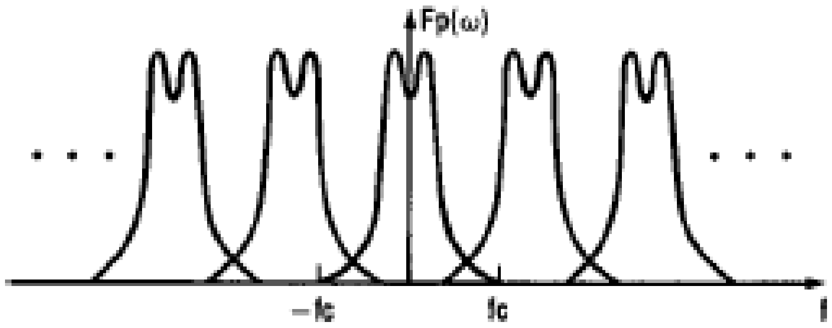


Rekonstrukcija kontinualnog signala

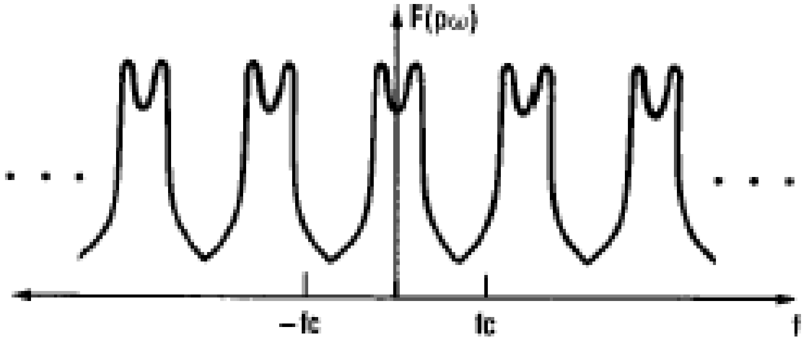
- Kako iz diskretizovanog signala možemo dobiti kontinualni?
- Koji uslov mora biti ispunjen?
- Ako kontinualan signal x(t) ima spektar konačne širine ω_{max} (ograničen spektar)
- Ako je frekvencija odabiranja $\omega_0 > 2\ \omega_{max}$
- Kontinualni (originalni) signal možemo dobiti iz diskretizovanog, bez promene oblika, njegovim propuštanjem kroz NF filter granične frekvencije $\omega_0/2$



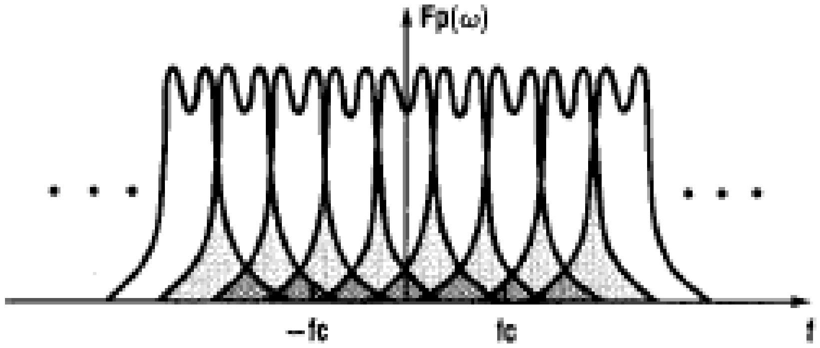
|X(jω)|
A
(a)
−ωmax
ωmax
ω
|X*(jω)|
A/T0
(b)
−ω0
−ωmax
ωmax
ω0
ω
|X*(jω)|
A/T0
(c)
−ω0
ω0
ω



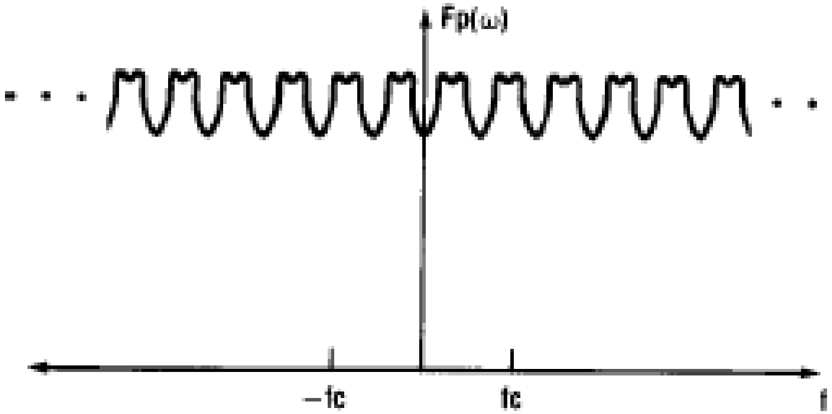
(a)



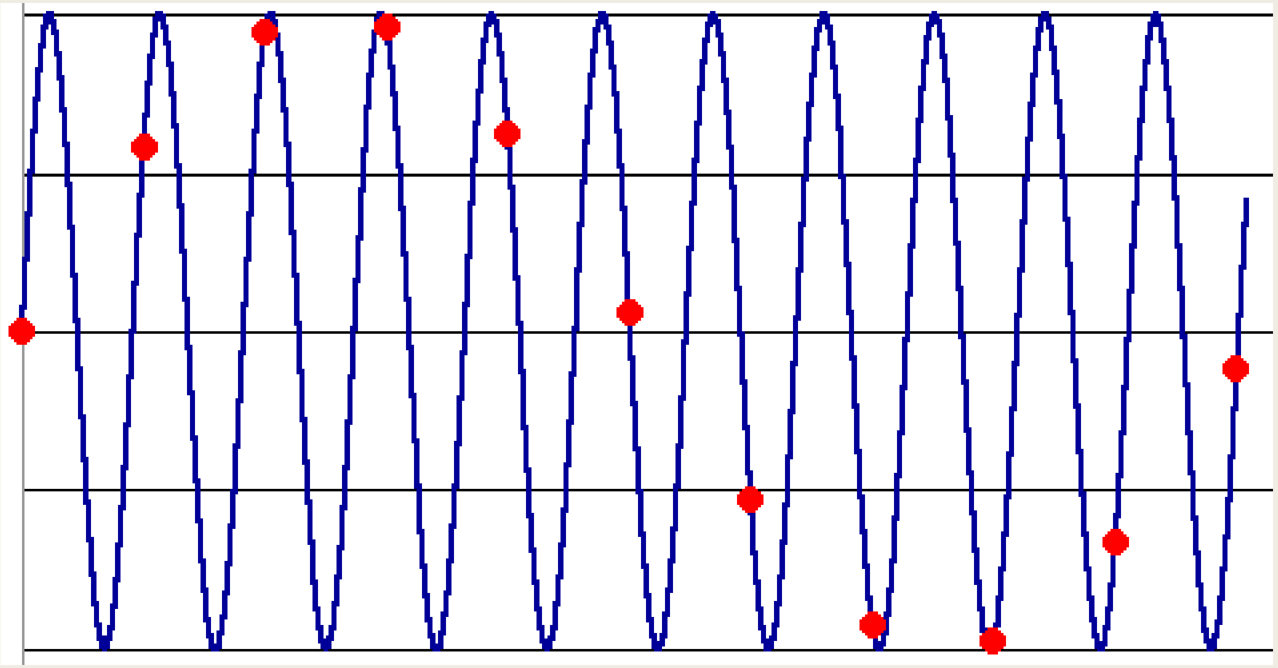
(a)

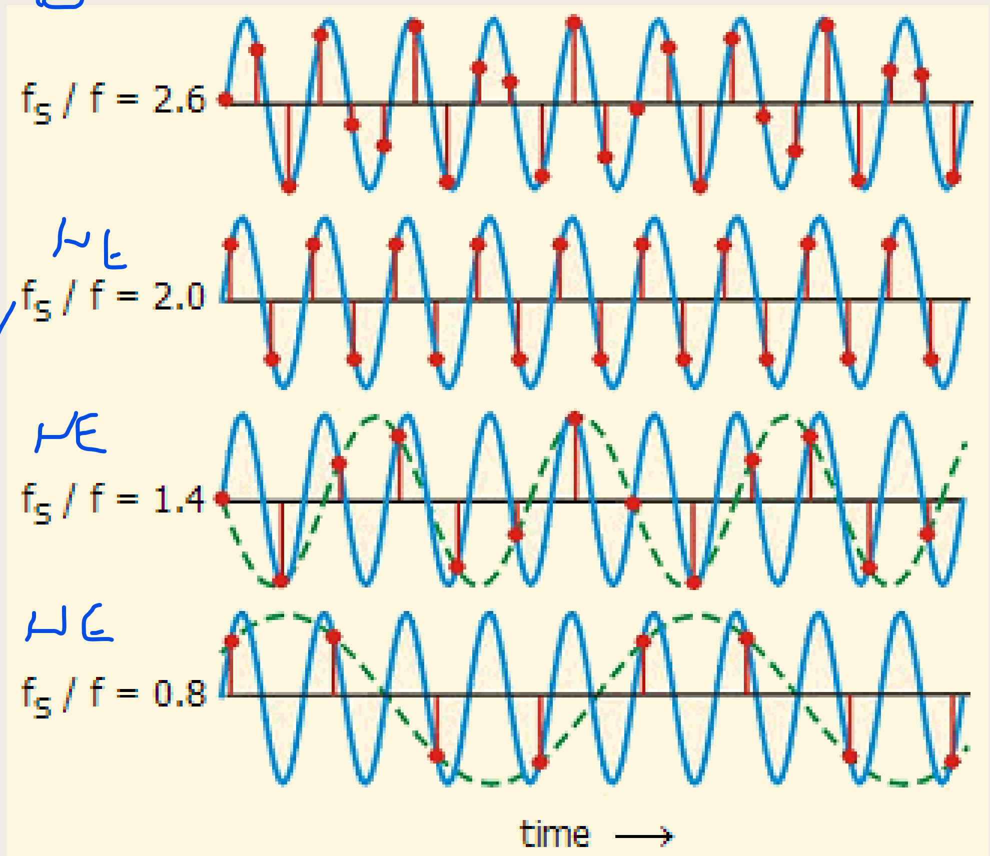


(b)

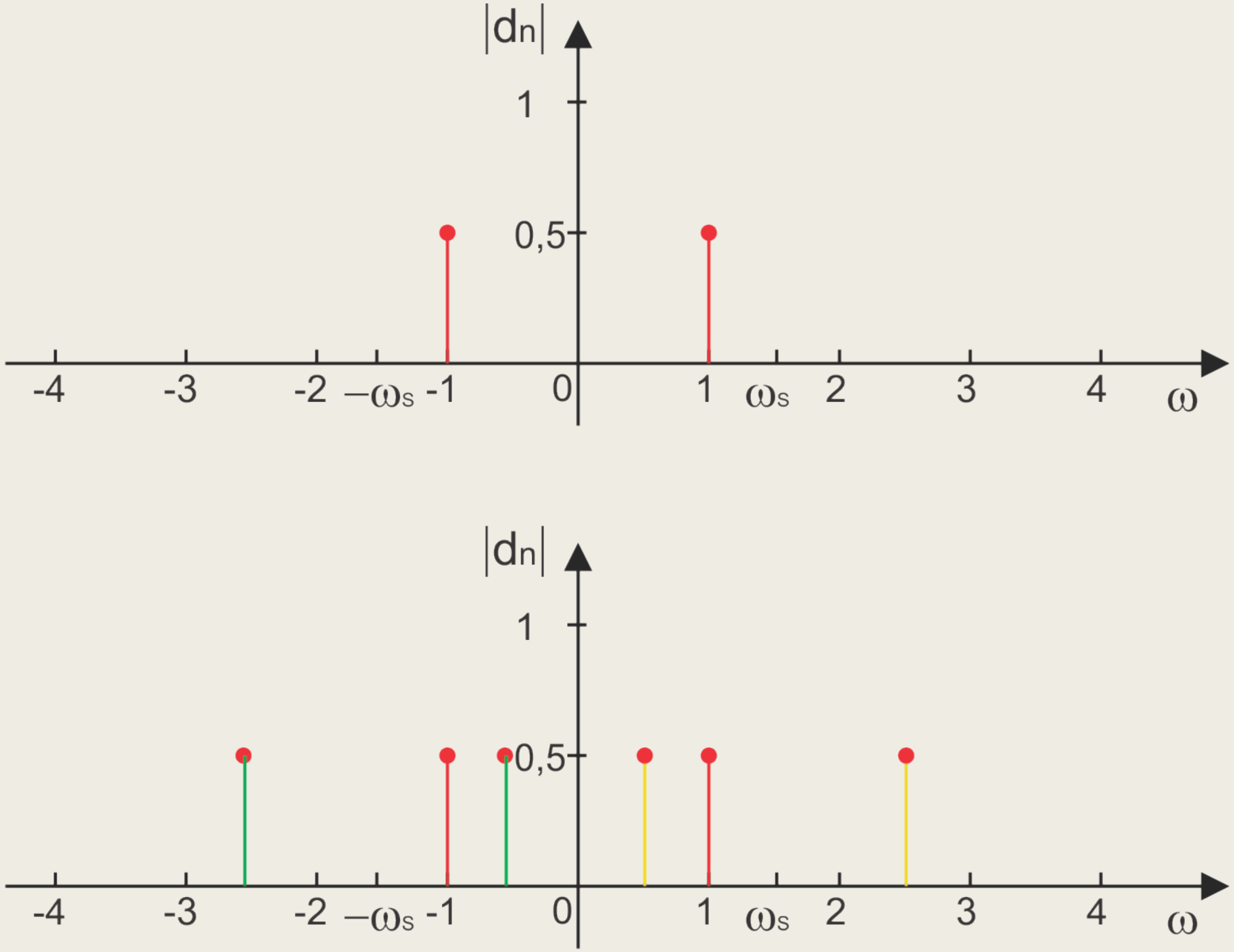


(b)





ako krenemo u 0 (sin = 0) možemo dobiti niz nula (najgore) ili dobijemo niz točaka iste ampl.

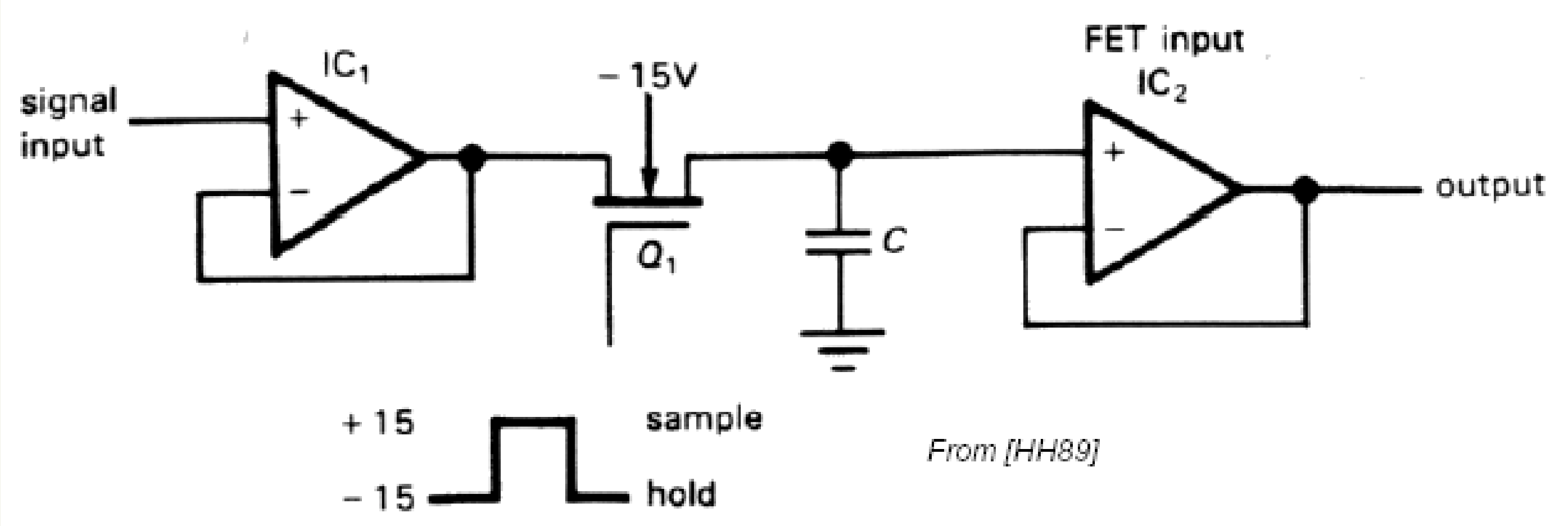


|dn|
1
0,5
-4
-3
-2
−ωs
-1
0
1
ωs
2
3
4
ω
|dn|
1
0,5
-4
-3
-2
−ωs
-1
0
1
ωs
2
3
4
ω

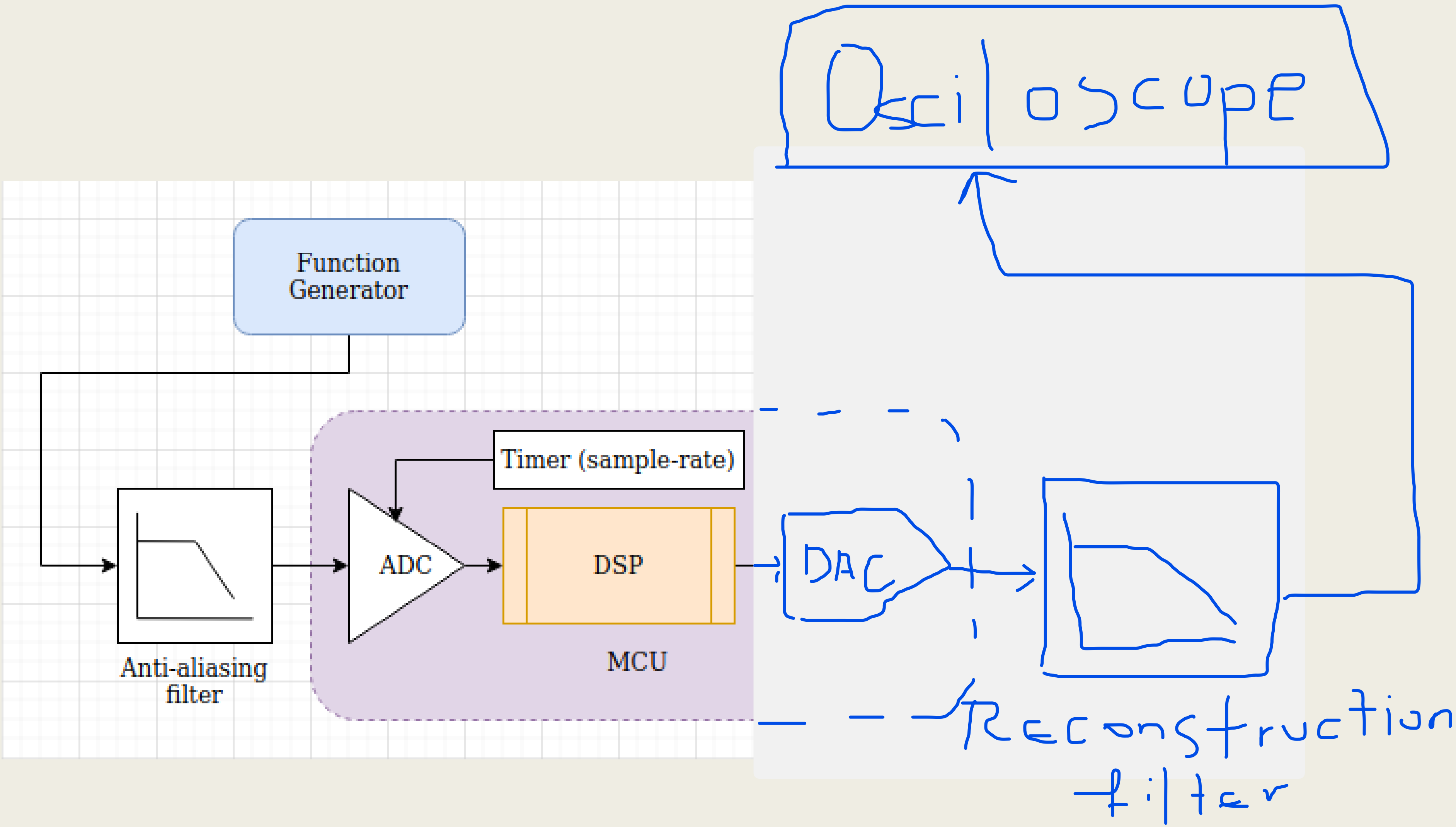
Teorema o odabiranju Nyquist-Shannon teorema

- Frekvencija odabiranja kontinualanog signal x(t) čiji je spektar širine f_{max} treba da bude veća od $2f_{max}$, odnosno: $f_0 = \frac{1}{T_0} > 2f_{max}$
- Nikvistova brzina odabiranja: $f_0 = 2f_{max}$
- Nikvistova frekvencija: $f_{nyquist} = {f_0}/{2}$
- Ukoliko nije ispunjen Nikvistov uslov dolazi do preklapanja spektra (*aliasing-a*) i nije moguća rekonstrukcija originalnog kontinualnog signala
- Npr. muzički signali se odabiraju sa 44,1KHz
- Šta je neophodno pre odabiranja?

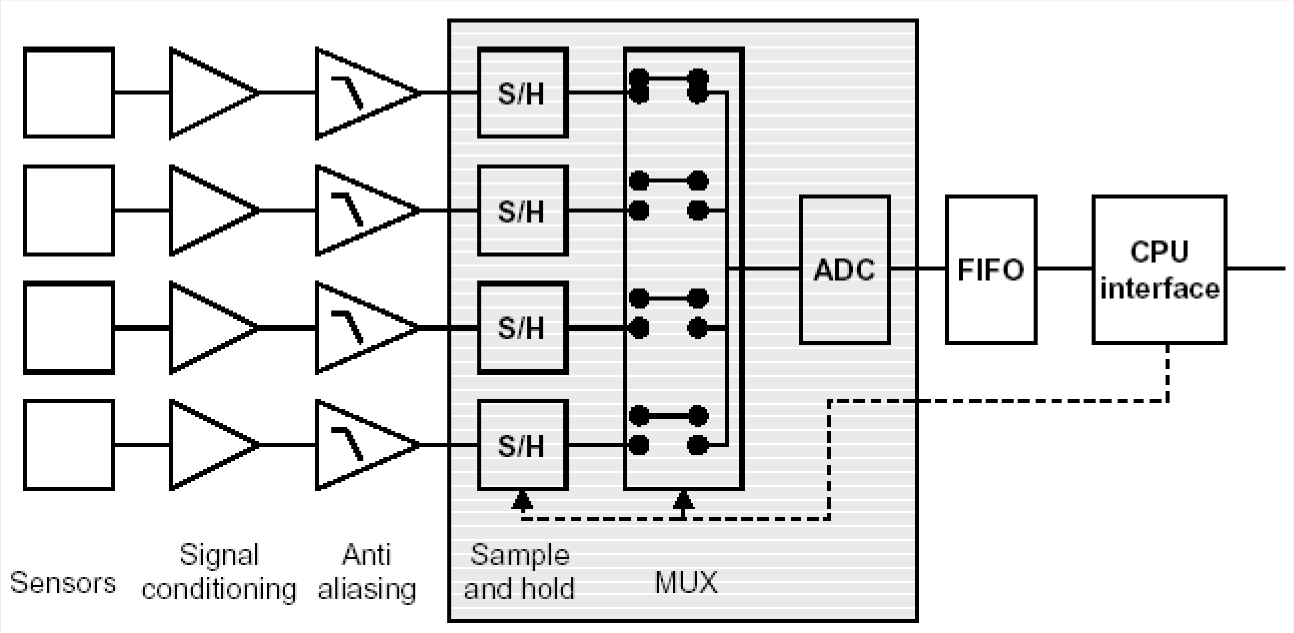
Kolo za odabiranje i zadršku



Anti aliasing filter



Anti aliasing filter i multiplekser



Furijeova transformacija diskretnog signala

- $X_S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_S(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0)\,\delta(t - nT_0) e^{-j\omega t} dt$
- $X_S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0)\, e^{-jn\omega T_0}$
- Ako uvedemo pojam diskretne učestanosti: $\Omega = \omega T_0$ i $x(nT_0) = x(n)$ i $X_S(j\omega) \rightarrow X(j\Omega)$
- $\boldsymbol{X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jn\Omega}}$
- $X_S(j\omega)$ periodično sa $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
- $X(j\Omega)$ periodično sa 2π
- Inverzno:
- $\boldsymbol{x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega)\, e^{jn\Omega} d\Omega}$