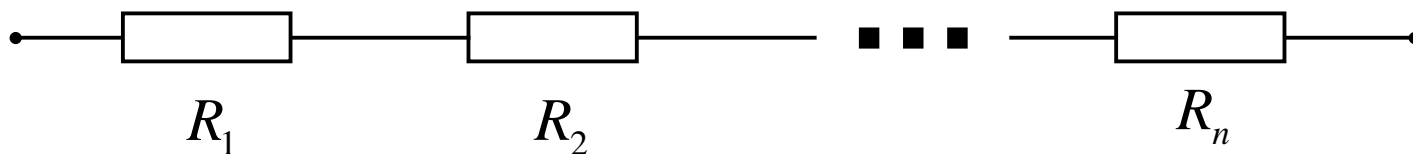


# Jednostavna električna kola

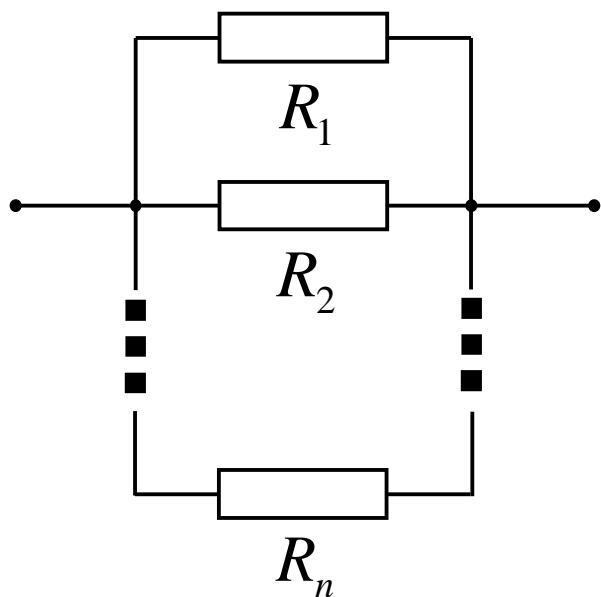
---

- Redno kolo
- Paralelno kolo
- Razdelnik napona
- Razdelnik struje
- Redno – paralelna veza

# Redna i paralelna veza otpornika



$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

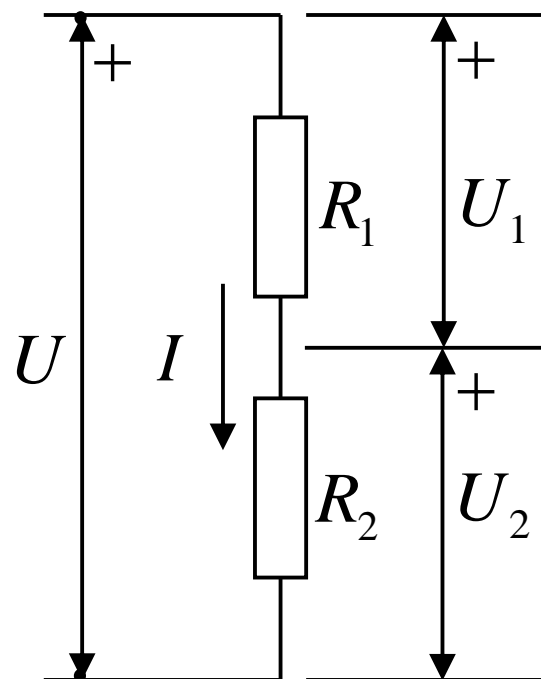


$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

- Za paralelnu vezu koristimo simbol  $\parallel$ .  $R_1 \parallel R_2$  znači da su otpornici  $R_1$  i  $R_2$  paralelno vezani.

# Naponski razdelnik



$$\text{KZN: } U - U_1 - U_2 = 0$$

$$U_1 = R_1 \cdot I \qquad U_2 = R_2 \cdot I$$

$$U - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I = 0$$

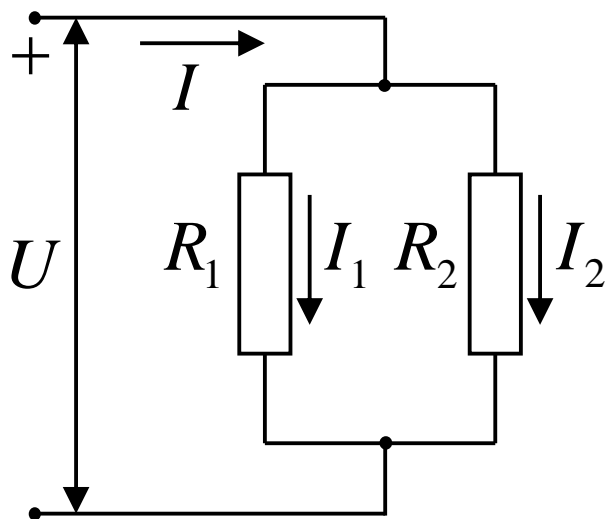
$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

Naponski razdelnik je linearno kolo koje stvara napone koji su proporcionalni deo ulaznog napona.

# Strujni razdelnik



$$U = R_1 \cdot I_1$$

$$U = R_2 \cdot I_2$$

$$U = R_e \cdot I$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

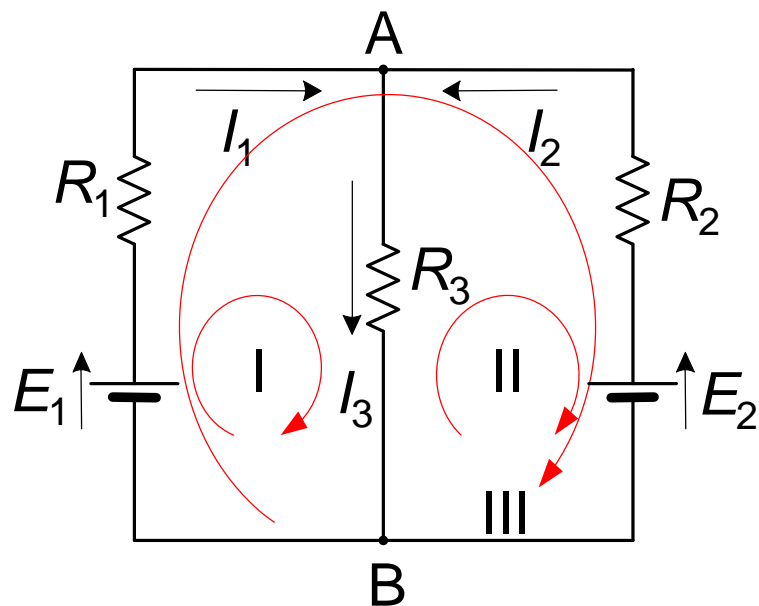
$$U = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Strujni razdelnik je linearno kolo koje stvara izlazne struje koji su proporcionalni deo ulazne struje.

# Primena Kirhofovih zakona



- Broj čvorova ( $n_{\check{c}}$ ) odgovara broju jednačina po KZS koje se koriste

$$n_{\check{c}} - 1$$

(2-1=1 u ovom primeru)

- Broj grana ( $n_g$ ) i čvorova definiše broj jednačina po KZN koje se koriste

$$n_g - (n_{\check{c}} - 1)$$

(3-(2-1)=2 u primeru)

čvor A:  $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$  . . . (1)

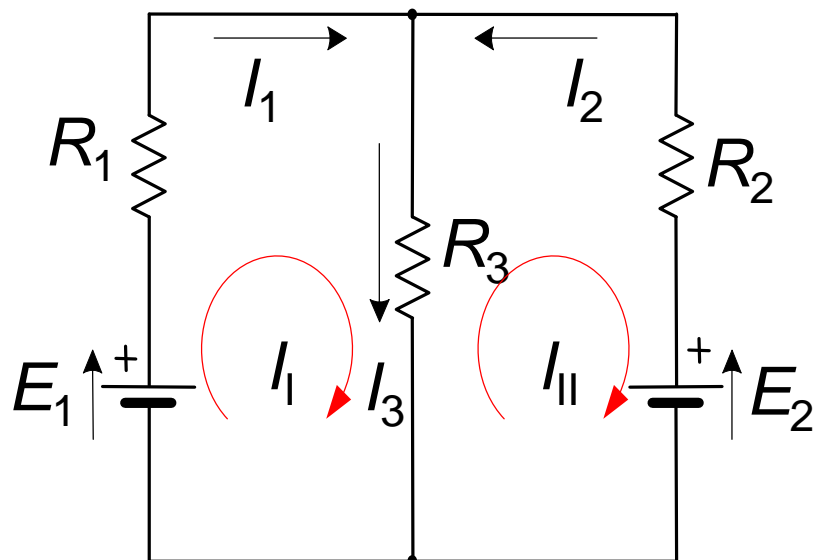
čvor B:  $-I_3 + I_1 + I_2 = 0$

kontura I:  $E_1 - R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 = 0$  . . . (2)

kontura II:  $R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 - E_2 = 0$  . . . (3)

kontura III:  $E_1 - R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - E_2 = 0$

# Metoda konturnih struja



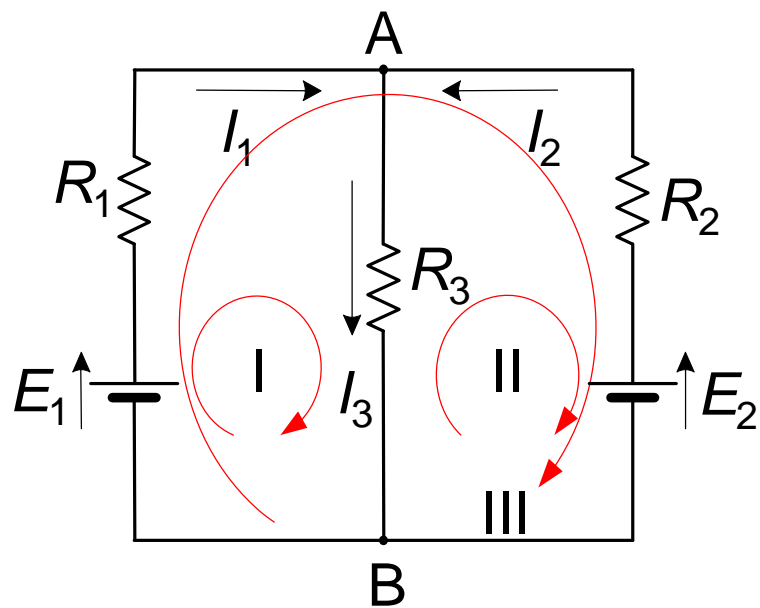
$$R_{11} \cdot I_{\text{I}} + R_{12} \cdot I_{\text{II}} = E_{\text{I}}$$

$$R_{21} \cdot I_{\text{I}} + R_{22} \cdot I_{\text{II}} = E_{\text{II}}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_3 \\ R_{12} &= R_{21} = -R_3 \\ R_{22} &= R_2 + R_3 \\ E_{\text{I}} &= E_1 \\ E_{\text{II}} &= -E_2 \end{aligned} \right\}$$

$$(R_1 + R_3) \cdot I_{\text{I}} - R_3 \cdot I_{\text{II}} = E_1$$

$$-R_3 \cdot I_{\text{I}} + (R_2 + R_3) \cdot I_{\text{II}} = -E_2$$



$$I_{\text{I}} = \frac{\text{DI}_{\text{I}}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & -R_3 \\ -E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

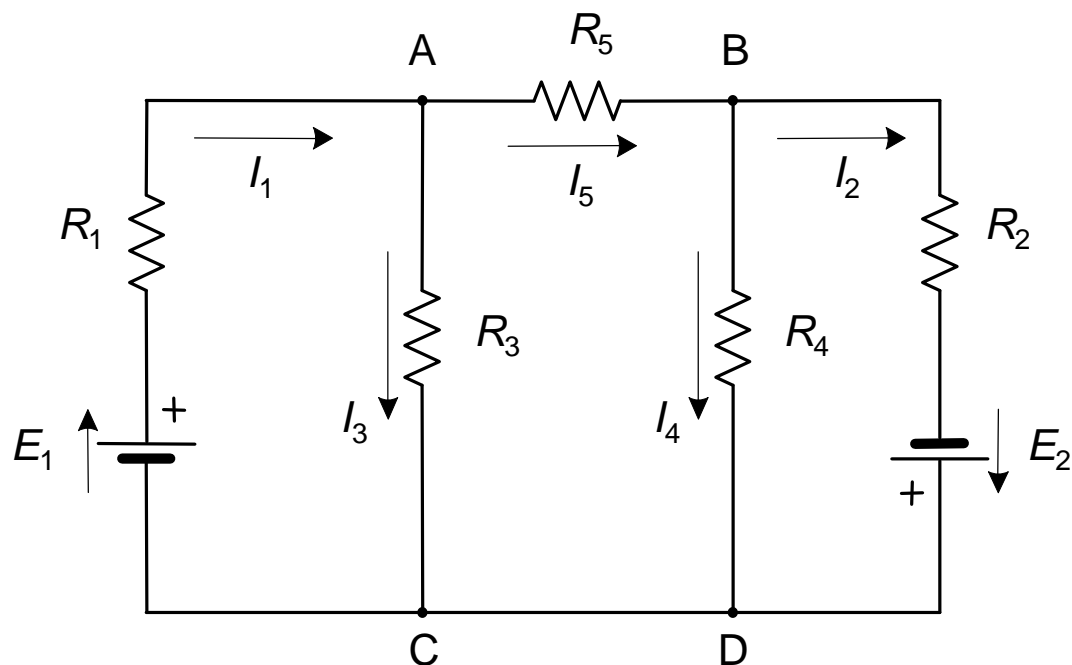
$$I_{\text{II}} = \frac{\text{DI}_{\text{II}}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 \\ -R_3 & -E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = I_{\text{I}}$$

$$I_2 = -I_{\text{II}}$$

$$I_3 = I_{\text{I}} - I_{\text{II}}$$

# Metoda napona između čvorova

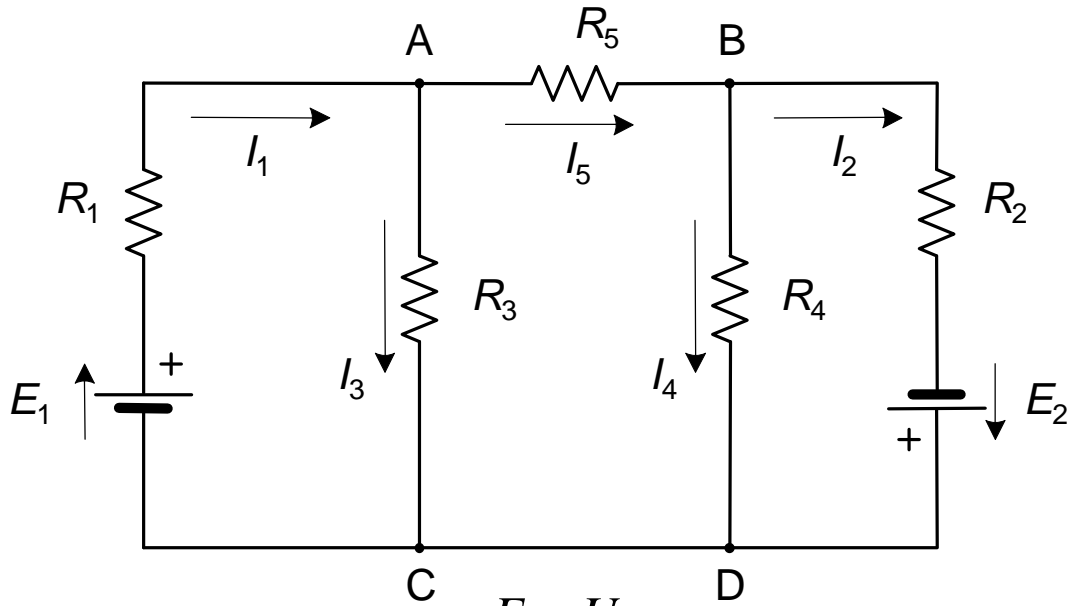


$$C \equiv D \equiv 0$$

$$\text{čvor A:} \quad -I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

$$\text{čvor B:} \quad -I_5 + I_4 + I_2 = 0$$





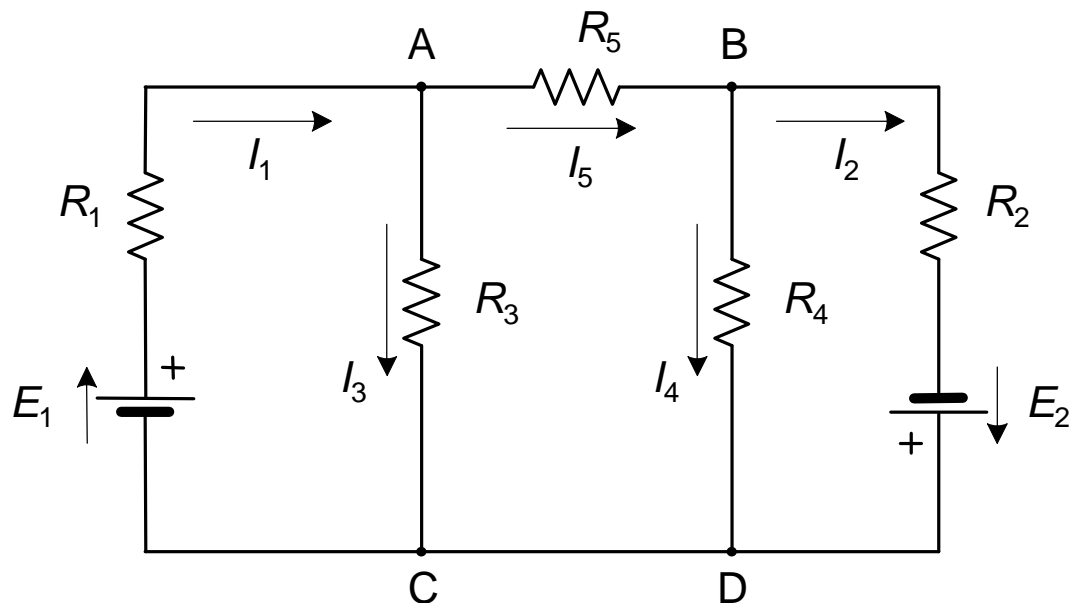
$$U_A = E_1 - R_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_A}{R_1} = (E_1 - U_A) \cdot G_1$$

$$U_B = -E_2 + R_2 \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 + U_B}{R_2} = (E_2 + U_B) \cdot G_2$$

$$U_A = R_3 \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{U_A}{R_3} = U_A \cdot G_3$$

$$U_B = R_4 \cdot I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{U_B}{R_4} = U_B \cdot G_4$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = R_5 \cdot I_5 \Rightarrow I_5 = \frac{U_A - U_B}{R_5} = (U_A - U_B) \cdot G_5$$



čvor A:  $-(E_1 - U_A) \cdot G_1 + U_A \cdot G_3 + (U_A - U_B) \cdot G_5 = 0$

čvor B:  $-(U_A - U_B) \cdot G_5 + U_B \cdot G_4 + (E_2 + U_B) \cdot G_2 = 0$

$$(G_1 + G_3 + G_5) \cdot U_A - G_5 \cdot U_B = E_1 \cdot G_1$$

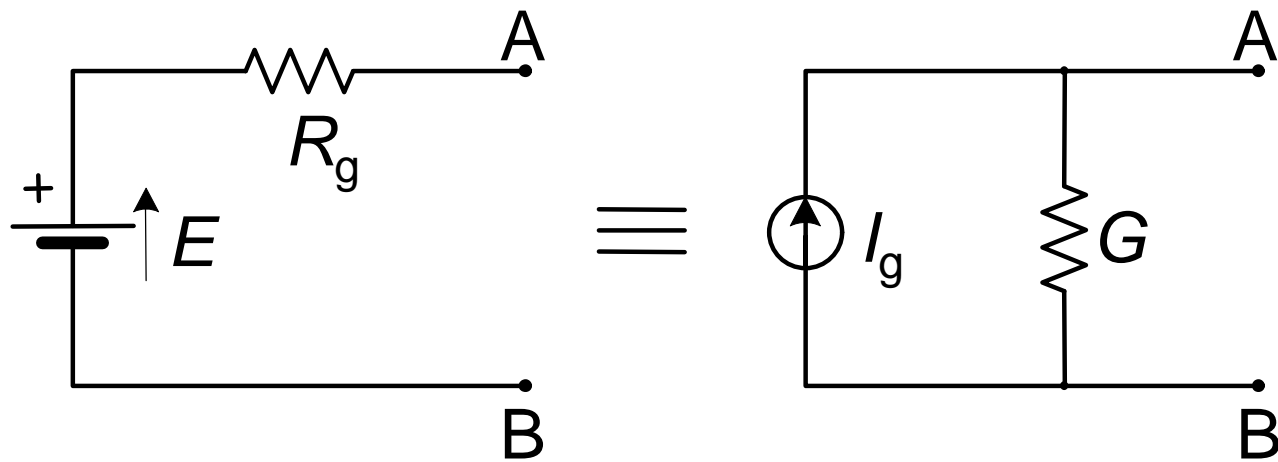
$$-G_5 \cdot U_A + (G_2 + G_4 + G_5) \cdot U_B = -E_2 \cdot G_2$$

$$G_{11} \cdot U_A + G_{12} \cdot U_B = I_I$$

$$G_{21} \cdot U_A + G_{22} \cdot U_B = I_{II}$$

$$U_A = \frac{DU_A}{D} = \frac{\begin{vmatrix} E_1 \cdot G_1 & -G_5 \\ -E_2 \cdot G_2 & (G_2 + G_4 + G_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2 + G_4 + G_5) \end{vmatrix}}$$

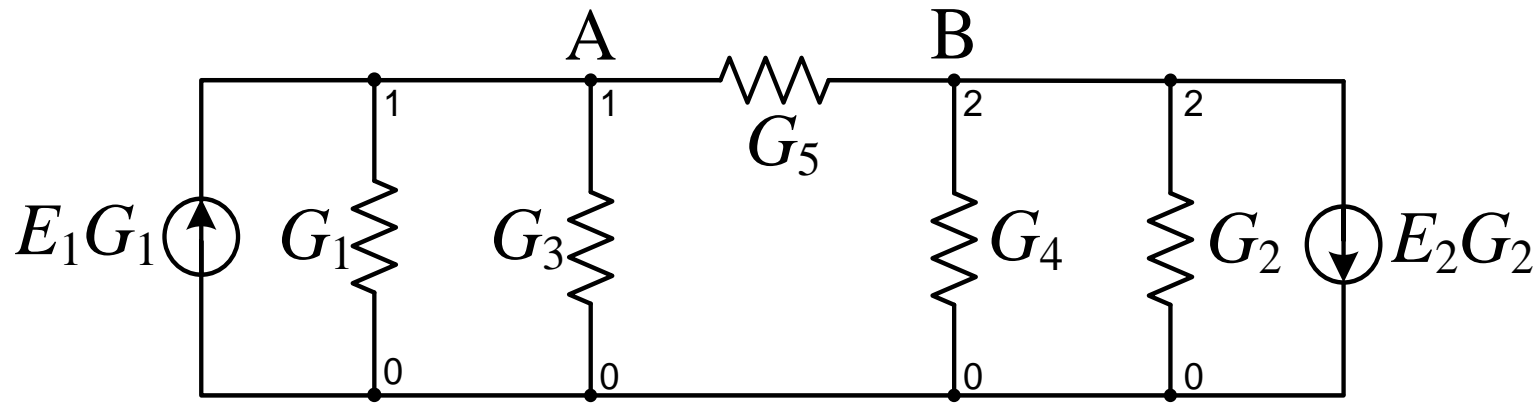
$$U_B = \frac{DU_B}{D} = \frac{\begin{vmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & E_1 \cdot G_1 \\ -G_5 & -E_2 \cdot G_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2 + G_4 + G_5) \end{vmatrix}}$$



$$1) \quad G = \frac{1}{R_g}$$

$$2) \quad I_g = \frac{E}{R_g} = E \cdot G$$

3) smer



$$G_{11} \cdot U_{10} + G_{12} \cdot U_{20} = I_I$$

$$U_{10} = U_A$$

$$G_{21} \cdot U_{10} + G_{22} \cdot U_{20} = I_{II}$$

$$U_{20} = U_B$$

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_5$$

$$I_I = E_1 \cdot G_1$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_5$$

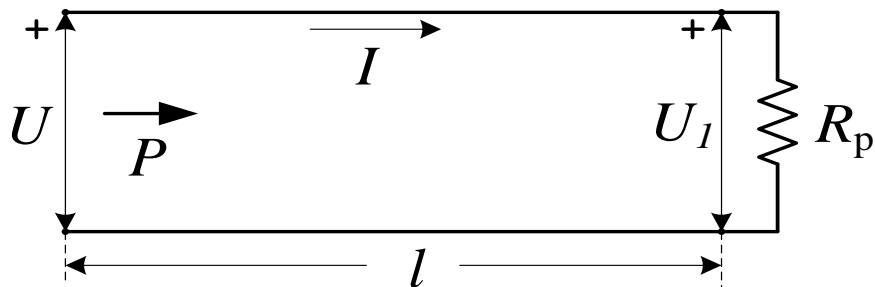
$$I_{II} = -E_2 \cdot G_2$$

$$G_{22} = G_2 + G_4 + G_5$$

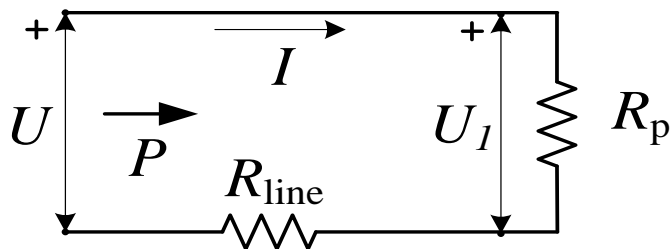
$$(G_1 + G_3 + G_5) \cdot U_A - G_5 \cdot U_B = E_1 \cdot G_1$$

$$-G_5 \cdot U_A + (G_2 + G_4 + G_5) \cdot U_B = -E_2 \cdot G_2$$

# Dužina provodnika



Ekivalentno kolo:



$$I = \frac{P}{U}$$

Otpornost provodnika: 
$$R_{\text{line}} = \rho \cdot \frac{2 \cdot l}{S}$$

$k$  – dozvoljeni relativni gubitak snage

$$k \cdot P = R_{\text{line}} \cdot I^2$$

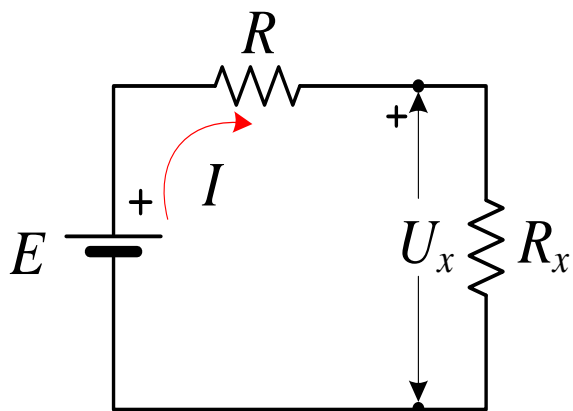
$$k \cdot P = \rho \cdot \frac{2 \cdot l}{S} \cdot \frac{P^2}{U^2}$$

$$S = \rho \cdot \frac{2 \cdot l \cdot P}{k \cdot U^2}$$

- Bakar ima veoma visoku provodnost i najčešće se koristi kao materijal za žice.

# Teorema o maksimalnom prenosu snage

Da bi se postigla maksimalna snaga od eksternog izvora konačne unutrašnje otpornosti, otpornost opterećenja mora biti jednaka otpornosti izvora posmatrano sa njegovih izlaznih krajeva.



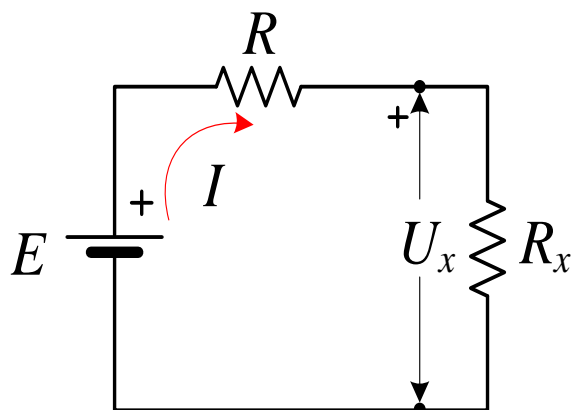
$$P_x = U_x \cdot I = (R_x \cdot I) \cdot I = R_x \cdot I^2$$

$$I = \frac{E}{R + R_x}$$

$$P_x = E^2 \cdot \frac{R_x}{(R + R_x)^2} = R_x \cdot \left( \frac{E}{R + R_x} \right)^2$$

$$\frac{dP_x}{dR_x} = \frac{E^2}{(R + R_x)^2} - \frac{2 \cdot R_x \cdot E^2}{(R + R_x)^3} = \frac{E^2 \cdot (R + R_x - 2 \cdot R_x)}{(R + R_x)^3}$$

$$\frac{dP_x}{dR_x} = 0 \Rightarrow R - R_x = 0 \Rightarrow R = R_x$$



$$P_x(R_x = R) = R_x \cdot \frac{E^2}{(R + R_x)^2} = \frac{R \cdot E^2}{4 \cdot R^2} = \frac{E^2}{4 \cdot R}$$

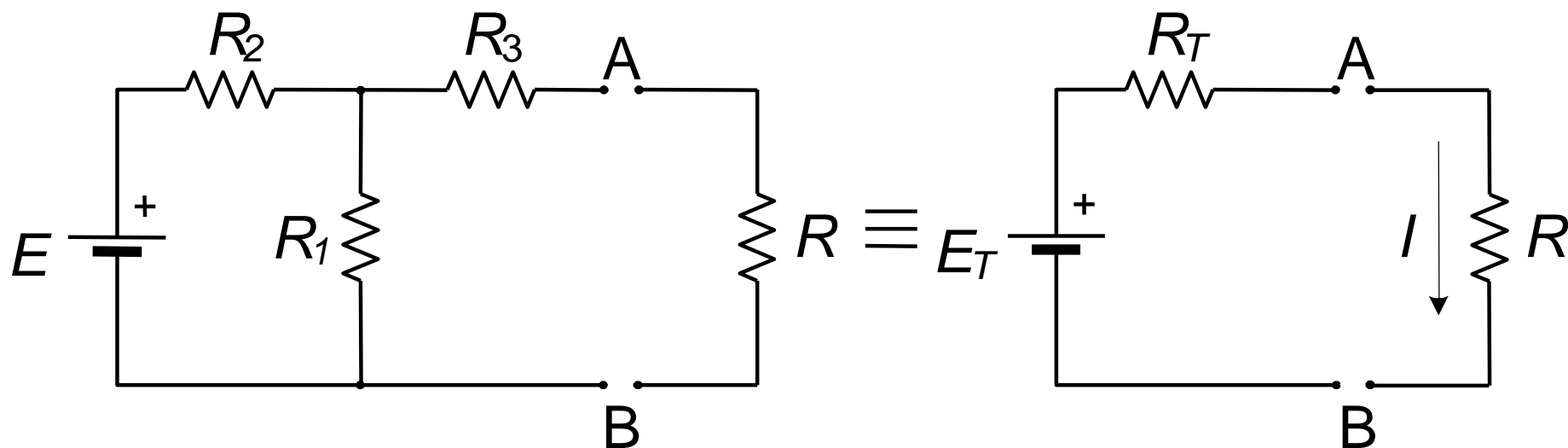
$$P = U \cdot I = E \cdot I = E \cdot \frac{E}{R + R_x} = \frac{E^2}{2 \cdot R}$$

$$\frac{P_x}{P} = \frac{\frac{E^2}{4 \cdot R}}{\frac{E^2}{2 \cdot R}} = 0,5$$

- Ova teorema se primenjuje kada postoji **konačna unutrašnje otpornost** izvora koju ne možemo da promenimo. Uopšteno, ako možemo da smanjimo  $R$ , više snage se prenosi na opterećenje.
- Maksimalna efikasnost izvora se ne sme mešati sa maksimalnim prenosom snage, jer otpornost izvora (baterije ili jednosmernog motora) može da se smanji tako da bude približno jednaka nuli.



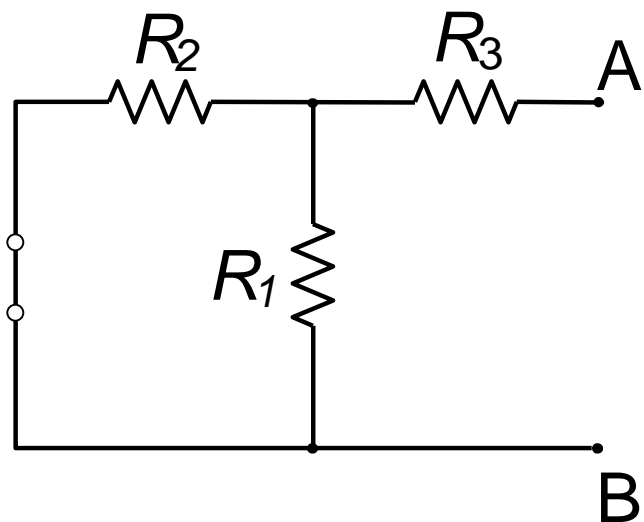
# Tevenenova teorema



Prema Tevenenovoj teoremi, bilo koje električno kolo između dve tačke moguće je zameniti ekvivalentnim kolom (Tevenenovim generatorom) koji se sastoji samo od naponskog izvora i otpornika koji su vezani na red. Tevenenov generator predstavlja realni naponski generator čija je unutrašnja otpornosti  $R_T$

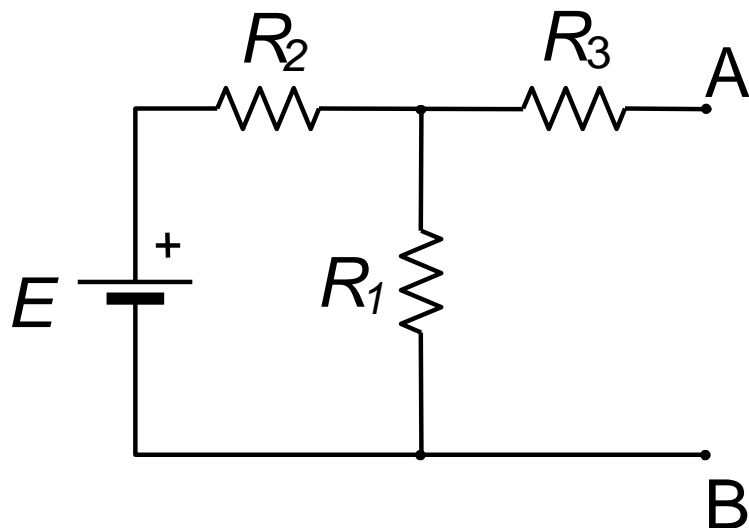
$$I = \frac{E_T}{R_T + R}$$

# Tevenenova teorema



Tevenenova otpornost se određuje nalaženjem ekvivalentne otpornosti između krajeva kola pri čemu se **naponski generatori zamenjuju kratkom a strujni otvorenim vezom.**

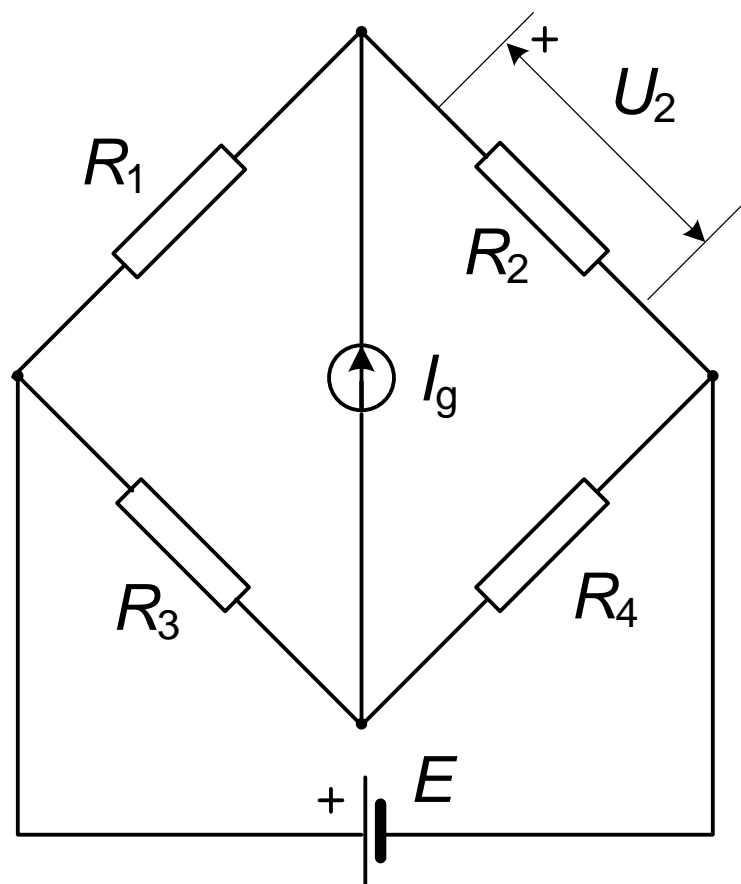
$$R'_{ekvAB} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_T$$



Vrednost naponskog generatora se određuje izračunavanjem napona između krajeva kola (korišćenjem bilo koje od metoda za analizu kola)

$$U'_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E = E_T$$

# Teorema superpozicije

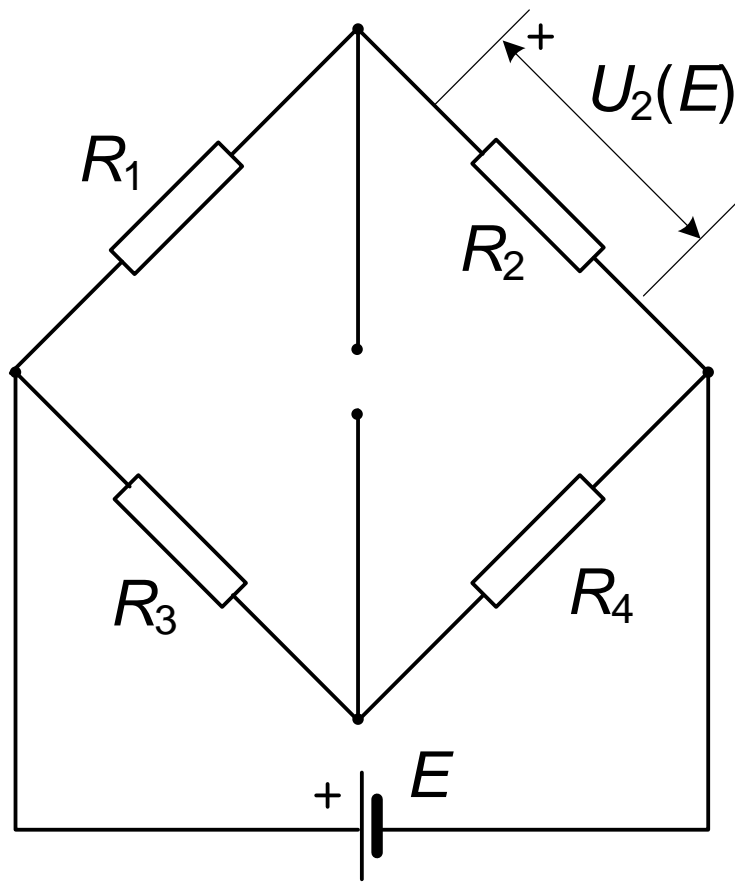


Prema teoremi superpozicije odziv (napon ili struja) u bilo kojoj grani linearnog kola koje poseduje više od jednog nezavisnog izvora se može odrediti kao algebarska suma odziva pojedinačnih uticaja svakog od nezavisnih izvora.

Preostali izvori se pri izračunavanju zamenjuju njihovim ekvivalentnim unutrašnjim otpornostima, naponski kratkom vezom, a strujni otvorenom.

$$U_2 = U_2(E)|_{I_g=0} + U_2(I_g)|_{E=0}$$

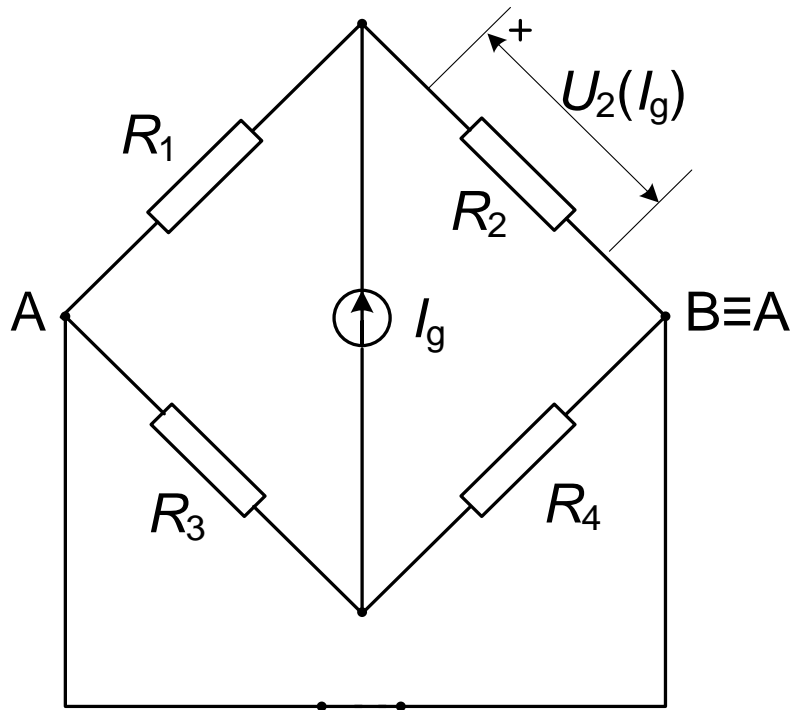
$$U_2(E)|_{I_g=0} = ?$$



- strujni generator = otvorena veza
- naponski razdelnik

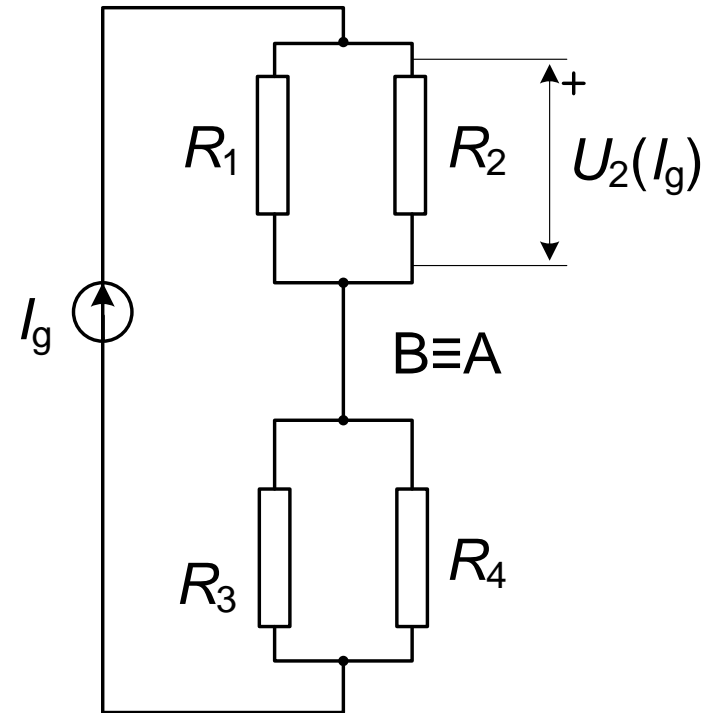
$$U_2(E)|_{I_g=0} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

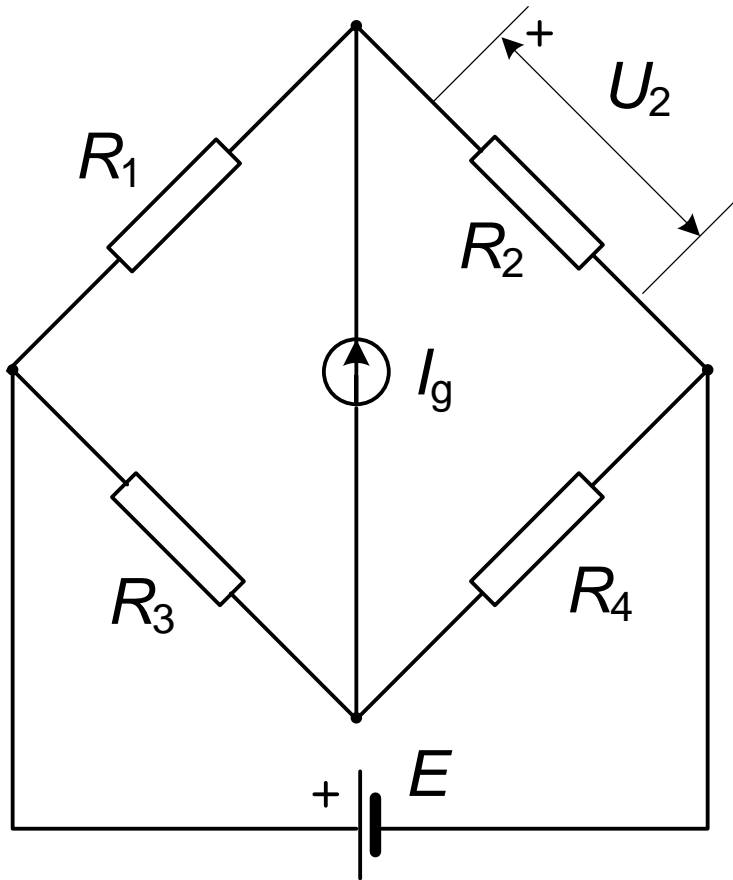
$$U_2(I_g) \Big|_{E=0} = ?$$



- naponski generator = kratka veza

$$U_2(I_g) \Big|_{E=0} = I_g \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$





$$U_2 = U_2(E) \Big|_{I_g=0} + U_2(I_g) \Big|_{E=0}$$

$$U_2 = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} + I_g \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$