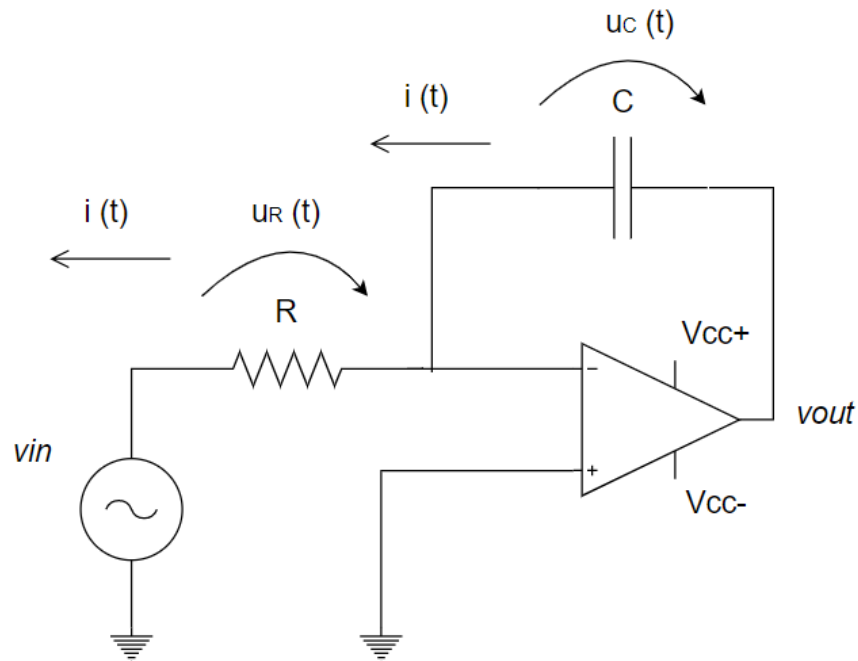


VEŽBE 5

INTEGRATOR

Integrator

Integrator, ili kolo za integraljenje, može se realizovati upotrebom operacionog pojačavača u čijoj se povratnoj sprezi nalazi kondenzator, a na invertujućem ulazu otpornik. Idealni integrator prikazan je na Slici 1.



Slika 1 – Kolo idealnog integratora sa označenim referentnim smerovima napona i struja.

Jednačina koja opisuje rad integratora pod pretpostavkom da je operacioni pojačavač idealan izvodi se koristeći činjenicu da ista struja teče kroz otpornik i kondenzator.

Struja koja protiče kroz kondenzator izražava se kao:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d(v_{out}(t) - 0V)}{dt} = C \frac{dv_{out}(t)}{dt}.$$

dok se struja koja protiče kroz otpornik izražava kao:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{0V - v_{in}(t)}{R} = \frac{-v_{in}(t)}{R}.$$

Nakon izjednačavanja ova dva izraza:

$$C \frac{dv_{out}(t)}{dt} = -\frac{v_{in}(t)}{R},$$

može se izraziti i napon na izlazu kola kao:

$$dv_{out}(t) = -\frac{1}{RC} v_{in}(t) dt.$$

Integraljenjem leve i desne strane izraza, imamo:

$$\int_0^\tau dv_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^\tau v_{in}(t) dt,$$

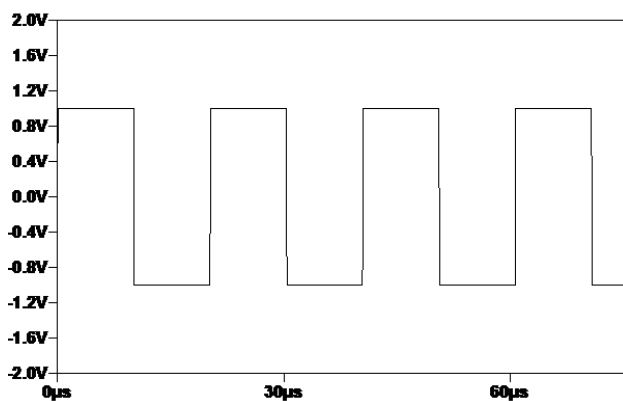
čime dobijamo:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1}{RC} \int_0^\tau v_{in}(t) dt + v_{out}(0).$$

Ako uzmemo u obzir da je napon na izlazu određen naponom na kondenzatoru C, onda možemo izraz za izlazni napon da predstavimo na sledeći način:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1}{RC} \int_0^\tau v_{in}(t) dt + u_c(0).$$

Zadatak 1. Na ulaz integratora kapacitivnosti 1 nF i otpornosti 1 k Ω dovodi se signal četvrtki amplitude 1V i periode 20 μ s prikazan na Slici 2. Skicirati 2 periode signala na izlazu ovog kola, ako je napon na kondenzatoru u početnom trenutku jednak 5V.

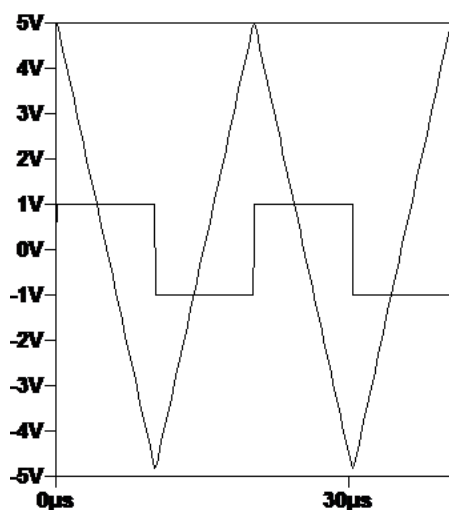


Slika 2 – Signal na ulazu u integrator.

Rešenje:

Signal na ulazu kola je periodičan pri čemu se jedna perioda signala može opisati na sledeći način:

$$v_{in}(t) = \begin{cases} 1V, & t \in (0, \frac{T}{2}) \\ -1V, & t \in (\frac{T}{2}, T) \end{cases}$$



Slika 3 – Dve periode signala na ulazu i izlazu integratora.

Za prvu polovinu periode signala, očekivani izlaz iz integratora je:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1}{RC} \int_0^{\tau} 1V dt + u_c(0),$$

pri čemu je $u_c(0)$ dato u zadatku i iznosi:

$$\mathbf{u_c(0) = 5V.}$$

Uvrštavanjem vrednosti vremenske konstante RC , i vrednosti napona na kondenzatoru u početnom trenutku posmatranja segmenta, dobija se:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1V}{1\mu s} t \Big|_0^{\tau} + 5V = -10^6 \frac{V}{s} (\tau - 0) + 5V.$$

Na osnovu prethodnog izraza zaključujemo da se prvi segment opisuje jednačinom prave čiji je koeficijent nagiba negativan. Poznato je da u početnom trenutku ova prava ima vrednost 5V, dok na kraju prve polovine periode ima vrednost:

$$v_{out}\left(\frac{T}{2}\right) = -10^6 \frac{V}{s} \frac{T}{2} + 5V = -10^6 \frac{V}{s} 10\mu s + 5V = -10V + 5V = -5V.$$

Za drugu polovinu periode signala, izlaz se može izračunati kao:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1}{RC} \int_{\frac{T}{2}}^{\tau} (-1V) dt + u_c\left(\frac{T}{2}\right).$$

Početni trenutak posmatranja ovog segmenta je $\frac{T}{2}$. Uvrštavanjem vrednosti vremenske konstante RC , i vrednosti napona na kondenzatoru u početnom trenutku posmatranja segmenta, dobija se:

$$v_{out}(\tau) = \frac{1V}{1\mu s} t \Big|_{\frac{T}{2}}^{\tau} - 5V = 10^6 \frac{V}{s} \left(\tau - \frac{T}{2}\right) - 5V = 10^6 \frac{V}{s} \tau - 15V.$$

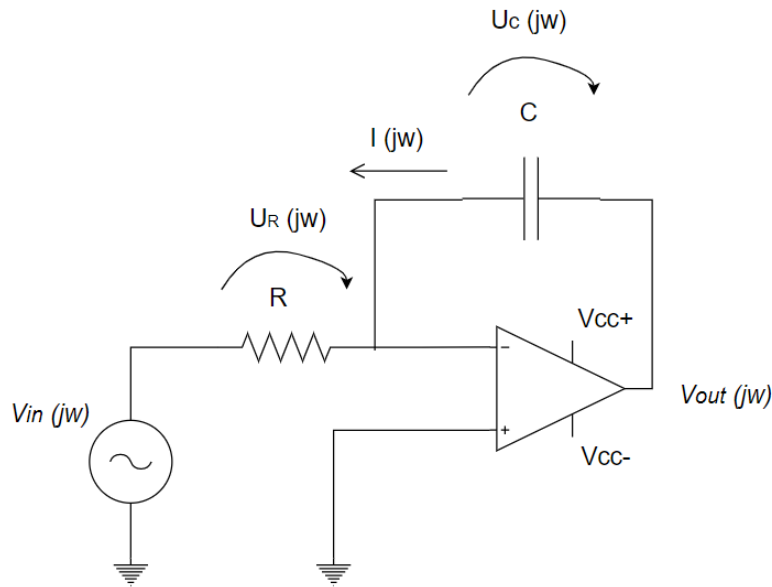
Zaključujemo da je i ovaj deo predstavljen jednačinom prave, ali sa pozitivnim koeficijentom nagiba. Na kraju druge poluperiode, napon ima vrednost:

$$v_{out}(T) = 10^6 \frac{V}{s} T - 15V = 10^6 \frac{V}{s} 20\mu s - 15V = 5V.$$

Nadalje se ovi segmenti periodično ponavljaju i prikazani su na Slici 3.

Funkcija prenosa integratora

Analiza kola u frekvencijskom domenu vrši se upotrebom kompleksnih struja i napona. Kolo sa označenim referentnim smerovima kompleksnih struja i napona prikazano je na Slici 5.



Slika 5 – Kolo idealnog integratora sa označenim referentnim smerovima kompleksnih napona i struja.

Kompleksna struja koja teče kroz otpornik može se izraziti kao količnik napona na otporniku i otpornosti otpornika:

$$I(jw) = \frac{U_R(jw)}{R} = \frac{0V - V_{in}(jw)}{R} = \frac{-V_{in}(jw)}{R}.$$

dok se kompleksna struja kroz kondenzator može izraziti kao količnik kompleksnog napona koji je generisan na kondenzatoru i impedanse kondenzatora:

$$I(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{Z_c(j\omega)} = \frac{V_{out}(j\omega) - 0v}{Z_c(j\omega)} = \frac{V_{out}(j\omega)}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C V_{out}(j\omega).$$

Izjednačavanjem ove dve struje:

$$I(j\omega) = \frac{-V_{in}(j\omega)}{R} = j\omega C V_{out}(j\omega),$$

može se izraziti količnik izlazne i ulazne veličine u kompleksnom domenu, što predstavlja funkciju prenosa kola:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{1}{j\omega CR},$$

odnosno,

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{1}{sCR}.$$

Na osnovu funkcije prenosa može se zaključiti da kolo ima pol u nuli.

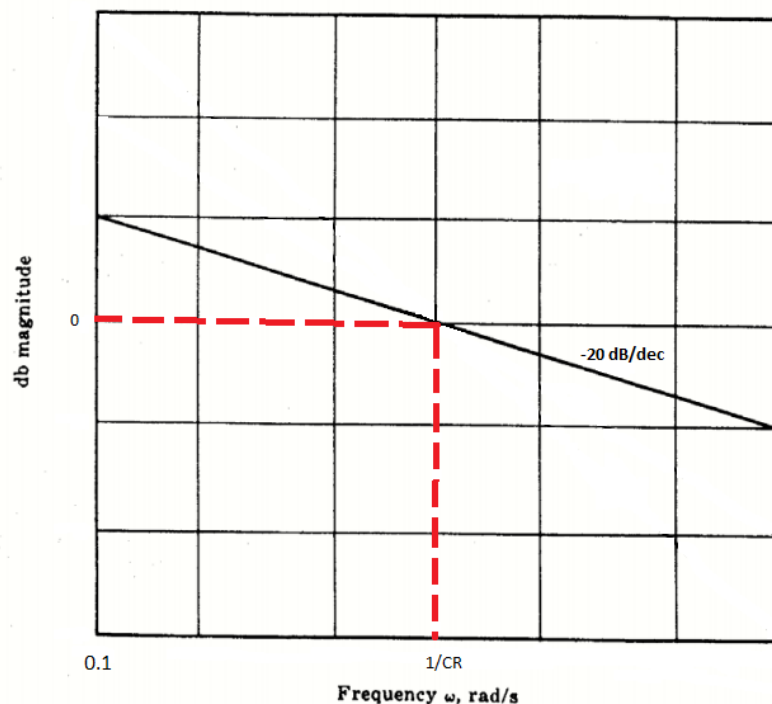
Amplitudska karakteristika kola se može izraziti kao:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(wCR)^2}} = \frac{1}{wCR},$$

dok, kada se izrazi u decibelima, dobija se:

$$20 \log \left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = 20 \log(1) - 20 \log(wCR) = -20 \log(wCR),$$

i prikazana je na Slici 6.

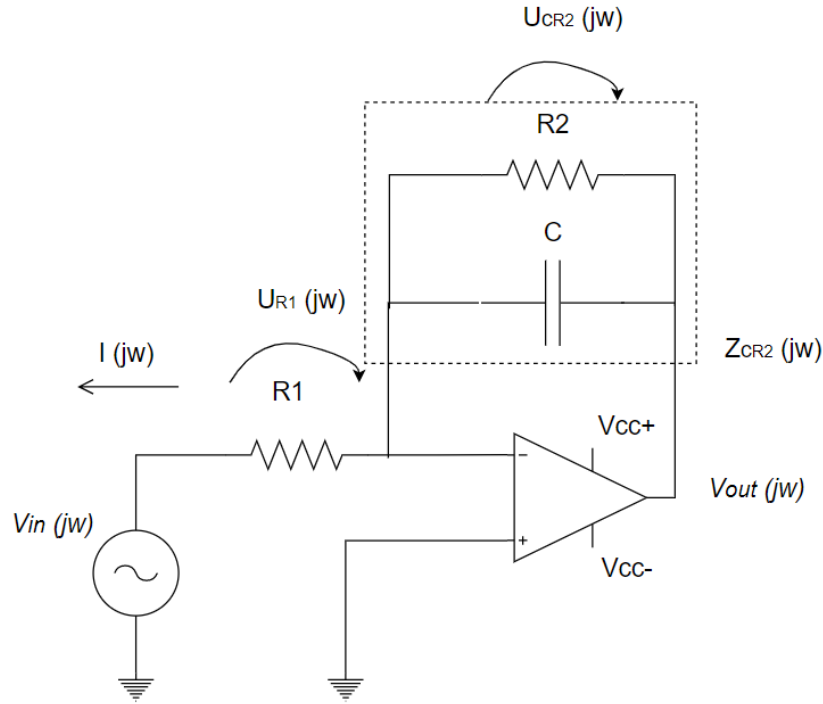


Slika 6 – Bodeova amplitudska karakteristika idealnog integratora.

Na osnovu izraza za amplitudsku karakteristiku ovog kola, može se zaključiti da kolo ima velika pojačanja na malim frekvencijama. U slučaju kada se na ulaz kola dovodi jednosmeran napon ($f = 0$ Hz), pojačanje teži beskonačnosti, odnosno, kolo radi u otvorenoj povratnoj sprezi. Pošto je pojava jednosmernog napona na ulazu realnog operacionog pojačavača neizbežna (naponski ofset), to znači da će (u slučaju da taj naponski ofset ne kompenzujemo) idealni integrator u realnim uslovima raditi u otvorenoj povratnoj sprezi. Iz tog razloga se u praksi koristi kolo praktičnog integratora.

Praktičan integrator

Praktičan integrator u odnosu na kolo idealnog integratora ima dodati otpornik paralelno vezan sa kondenzatorom u povratnoj sprezi. Rezultat ove izmene je ograničavanje vrednosti amplitudske karakteristike na niskim frekvencijama. Kolo je prikazano na Slici 7.



Slika 7 – Kolo praktičnog integratora sa označenim referentnim smerovima kompleksnih napona i struja.

Struja kroz otpornik koji se nalazi na invertujućem ulazu kola može se izraziti kao količnik napona koji se javlja na ovoj komponenti, $U_{R1}(jw)$, i otpornosti otpornika, R_1 :

$$I(jw) = \frac{U_{R1}(jw)}{R_1} = \frac{-V_{in}(jw)}{R_1}.$$

Struja koja teče kroz paralelnu vezu kondenzatora i otpornika u povratnoj sprezi kola, može se izraziti kao količnik napona $U_{CR2}(jw)$ na paralelnoj vezi i impedanse $Z_{CR2}(jw)$:

$$I(jw) = \frac{U_{CR2}(jw)}{Z_{CR2}(jw)} = \frac{V_{out}(jw)}{\frac{1}{\frac{jwC}{R_2} + R_2}} = \frac{V_{out}(jw)}{\frac{1}{jwC} R_2} = \frac{V_{out}(jw)}{\frac{1 + R_2 jwC}{jwC}} = \frac{V_{out}(jw)(1 + R_2 jwC)}{R_2}.$$

Izjednačavanjem ove dve struje:

$$I(j\omega) = \frac{-V_{in}(j\omega)}{R_1} = \frac{V_{out}(j\omega)(1 + R_2 j\omega C)}{R_2}.$$

može se izraziti funkcija prenosa kola kao:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + j\omega CR_2)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + \frac{j\omega}{\frac{1}{CR_2}})},$$

odnosno,

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + \frac{s}{\frac{1}{CR_2}})}.$$

Na osnovu funkcije prenosa može se zaključiti da kolo ima pol na kružnoj učestanosti $\frac{1}{CR_2}$. Ovaj pol će ujedno predstaviti i prelomnu učestanost amplitudske karakteristike.

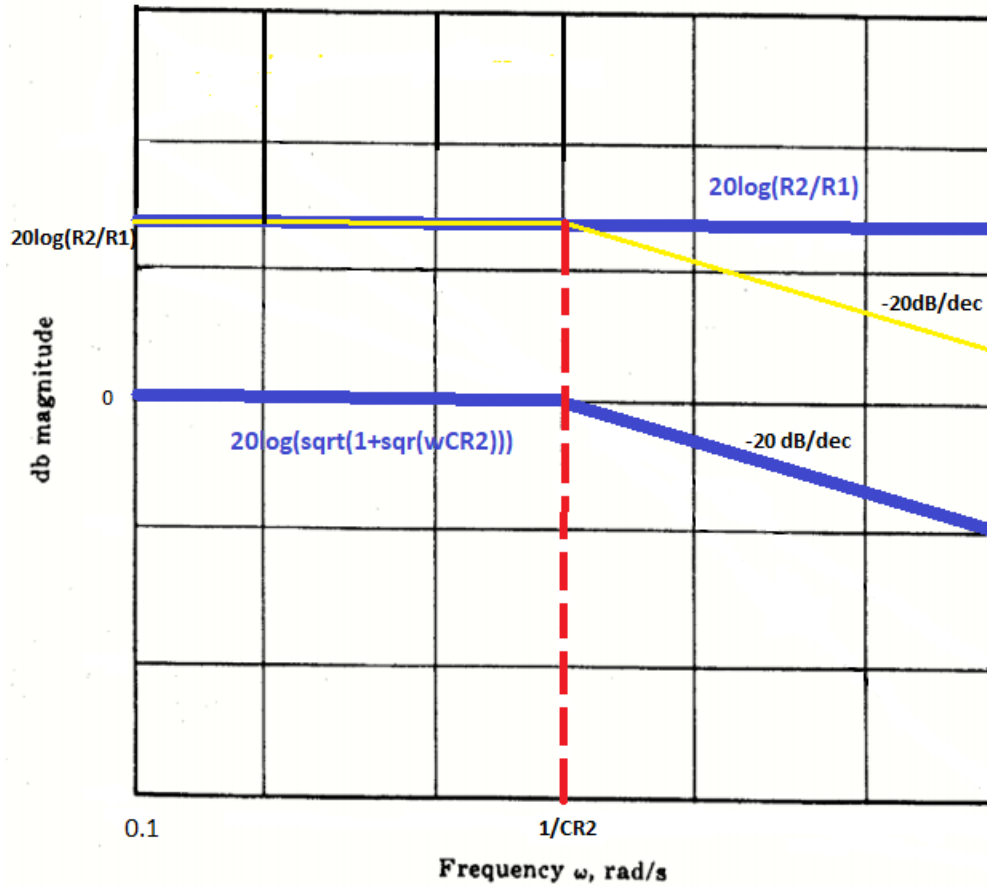
Amplitudska karakteristika kola se može izraziti kao:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\frac{1}{CR_2}})^2}},$$

dok se amplitudska karakteristika izražena u decibelima može izraziti kao:

$$20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\omega CR_2)^2} \right),$$

i prikazana je na Slici 8.



Slika 8 – Bodeova amplitudska karakteristika kola praktičnog integratora (prikazana je žutom bojom).

Na osnovu Bodeove amplitudske karakteristike može se zaključiti da kada je učestanost signala mnogo manja od prelomne učestanosti $\frac{1}{CR_2}$, kolo se ponaša kao pojačavač faktora pojačanja $\frac{R_2}{R_1}$, dok kada su učestanosti veće od prelomne učestanosti $\frac{1}{CR_2}$, sa njihovim povećanjem, i vrednosti karakteristike opadaju. Iz ovog razloga kaže se da se praktični integrator ponaša kao filter propusnik niskih učestanosti, a kružna granična frekvencija propusnog opsega se određuje prema izrazu $w_{gr} = \frac{1}{CR_2}$.

Odnosno, kada je $w \ll \frac{1}{CR_2}$, Bodeova amplitudska karakteristika se svodi na:

$$20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(jw)}{V_{in}(jw)} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log(1) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

dok, kada je $\omega \gg \frac{1}{CR_2}$, Bodeova amplitudska karakteristika se svodi na:

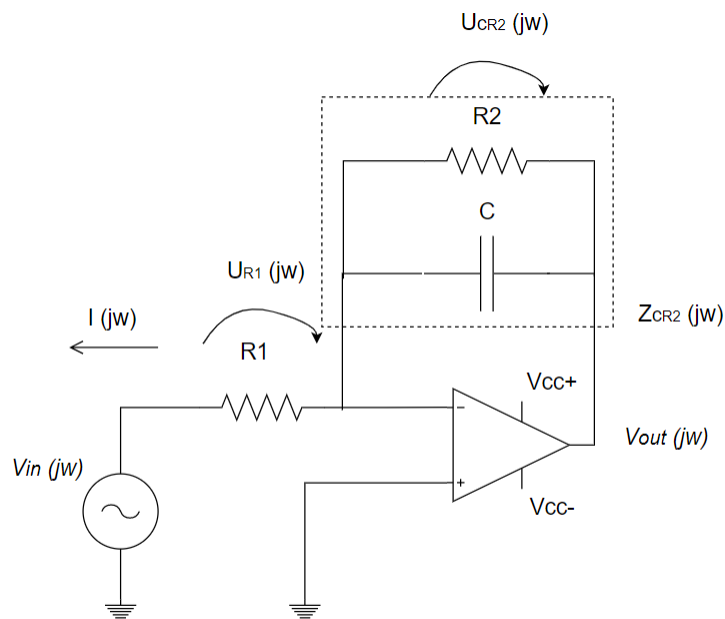
$$\begin{aligned} 20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| \right) &= 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log \left(\sqrt{(\omega CR_2)^2} \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log(\omega CR_2) \\ &= 20 \log \left(\frac{1}{\omega CR_1} \right) = -20 \log(\omega CR_1). \end{aligned}$$

Ovaj posljednji izraz je karakterističan i za amplitudsku karakteristiku idealnog integratora. Prema tome, možemo pretpostaviti da će se kolo na visokim frekvencijama ponašati kao idealan integrator.

Zadatak 2. Projektovati kolo praktičnog integratora tako da granična frekvencija propusnog opsega bude 1.59 kHz, a pojačanje u propusnom opsegu iznosi 10, ukoliko je na raspolaganju kondenzator kapacitivnosti 1nF. Simulirati rad kola u LTSpice-u za slučaj da se na ulaz dovodi signal sinusoide amplitude 1V i frekvencije 50 kHz. Pretpostaviti da se kolo na visokim frekvencijama ponaša kao idealan integrator i napon na kondenzatoru u početnom trenutku postaviti na 318mV.

Rešenje:

Kolo praktičnog integratora prikazano je na Slici 9.



Slika 9 – Kolo praktičnog integratora sa označenim referentnim smerovima kompleksnih struja i napona.

Prema analizi koja je data u prethodnom odeljku, izvodi se funkcija prenosa praktičnog integratora:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + j\omega CR_2)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + \frac{j\omega}{\frac{1}{CR_2}})}.$$

Izraz za funkciju prenosa ovog kola (kao i kola idealnog integratora) se može izvesti i polaganjem od toga da se pojačavač ponaša kao invertujući, odnosno, direktnom primenom izraza za pojačanje invertujućeg pojačavača:

$$V_{out}(j\omega) = -\frac{Z_{CR2}}{Z_{R1}} V_{in}(j\omega).$$

Nadalje se izražava amplitudska karakteristika kola kao moduo funkcije prenosa:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\frac{1}{CR_2}})^2}}$$

Pošto se kružna prelomna učestanost računa prema izrazu:

$$\omega_g = 2\pi f_g = \frac{1}{CR_2},$$

a u zadatku je dato da linijska granična učestanost, f_g , iznosi 1.59 kHz, otpornost R_2 se može izračunati kao:

$$R_2 = \frac{1}{2\pi f_g C} = 10^5 \Omega = 100 \text{ k}\Omega.$$

Kada je učestanost signala mnogo manja od prelomne učestanosti $\frac{1}{CR_2}$, amplitudska karakteristika se svodi na:

$$\left| \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} \right| = \frac{R_2}{R_1},$$

što predstavlja i pojačanje kola u propusnom opsegu.

Na osnovu ovoga, izračunava se otpornost R_1 koja iznosi $10^4 \Omega = 10 \text{ k}\Omega$.

S druge strane, kada je učestanost signala mnogo veća od prelomne učestanosti ($\omega \gg \frac{1}{CR_2}$), funkcija prenosa čiji je izraz $\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1(1+j\omega CR_2)}$ se može aproksimirati izrazom:

$$\frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = -\frac{1}{j\omega CR_1},$$

odnosno, u Laplasovom domenu:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{1}{sCR_1},$$

što predstavlja funkciju prenosa idealnog integratora.

Na osnovu ove funkcije prenosa, izlazna veličina u Laplasovom domenu se može predstaviti kao:

$$V_{out}(s) = -\frac{1}{sCR_1} V_{in}(s).$$

Inverznom Laplasovom transformacijom ove funkcije dobija se i zavisnost izlazne od ulazne veličine u vremenskom domenu:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1}{CR_1} \int_0^\tau v_{in}(t) dt,$$

što ukazuje na to da se kolo na visokim frekvencijama ponaša kao integrator. Ovaj izraz karakteriše rad idealnog integratora u ustaljenom stanju pod pretpostavkom da su početni uslovi jednaki nuli. Pošto je funkcija prenosa praktičnog integratora izvedena za slučaj da sistem ima nulte početne uslove (što mora biti zadovoljeno da bi sistem imao funkciju prenosa), početni uslovi ne figurišu ni u dobijenom izrazu za izlazni napon.

Ako pretpostavimo da početni uslovi imaju uticaj na vrednost izlaznog napona, i iskoristimo izraz za rad idealnog integratora, dobijamo signal:

$$v_{out}(\tau) = -\frac{1}{CR_1} \int_0^\tau 1V \sin(wt) dt + u_c(0) = \frac{1V}{CR_1} \frac{1}{w} \cos(wt) \Big|_0^\tau + u_c(0)$$

$$= \frac{1V}{10^{-5}s \cdot 314 \cdot 10^3 \frac{rad}{s}} \cos(wt) \Big|_0^\tau + u_c(0) = 318mV \cos(w\tau) - 318mV + u_c(0).$$

Upotrebljena vrednost frekvencije je: $\omega = 2\pi 50kHz = 314 \text{ krad/s}$.

Kada uzmemo u obzir da je $u_c(0) = 318mV$, dobija se:

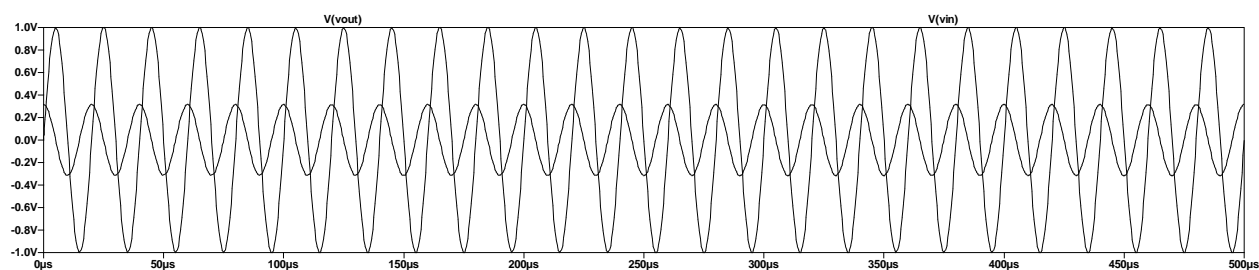
$$v_{out}(\tau) = 318mV \cos(w\tau).$$

Rezultati simulacije u LTSpice-u

1. Simulacija u vremenskom domenu

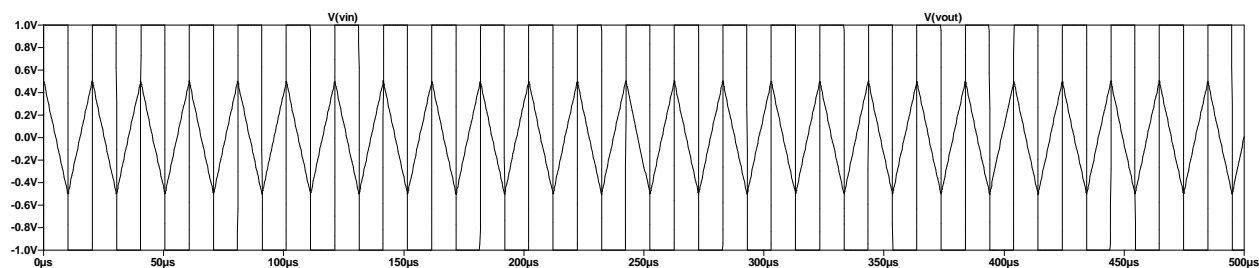
Napon na kondenzatoru u početnom trenutku se u LTSpice-u može definisati pritiskom na dugme ctrl i istovremenim desnim klikom miša nakon čega se u polje **SpiceLine** upisuje direktiva **IC = vrednost napona**.

Na Slici 10 prikazan je izlaz kola.



Slika 10 – Ulaz i izlaz iz praktičnog integratora, sa zadatim naponom na kondenzatoru u početnom trenutku ($u_c(0) = 318 \text{ mV}$).

Ukoliko bismo na ulaz kola doveli signal četvrtki iz Zadatka 1, takođe na visokoj frekvenciji (50 kHz), u skladu sa analizom iz Zadatka 1, na izlazu bismo dobili trougaoni signal, ponovo centriran oko nule (Slika 11).



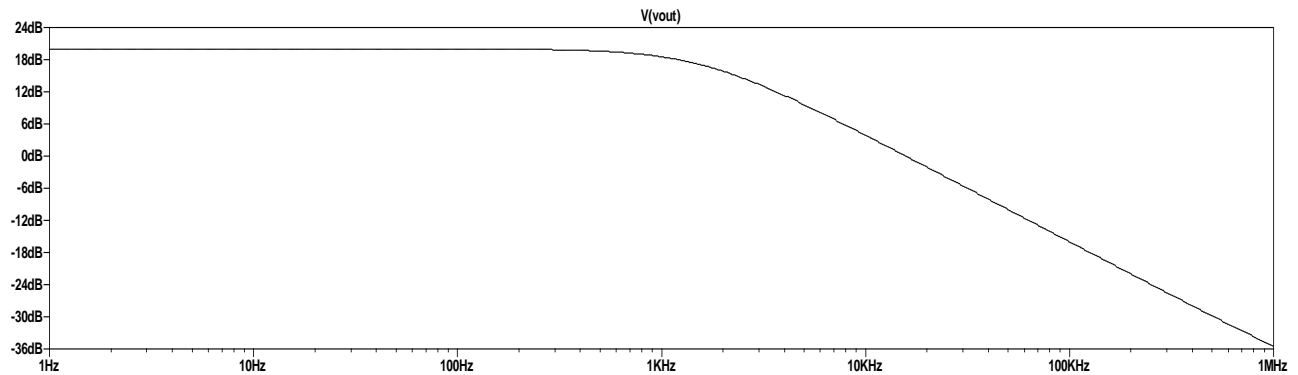
Slika 11 – Ulaz i izlaz iz praktičnog integratora, sa zadatim naponom na kondenzatoru u početnom trenutku ($u_c(0) = 500 \text{ mV}$).

2. Simulacija u frekvencijskom domenu

Simulacija u frekvencijskom domenu, tj. za naizmenični režim rada kola daje mogućnost prikaza amplitudske i fazne karakteristike kola. Parametri kojima se podešava ovaj režim simulacije su: skaliranje apscise (linearno, dekadno, oktavno), broj simulacionih, tj. test tačaka, i frekvencijski opseg za koji će biti prikazane karakteristike.

Pored navedenog, potrebno je definisati i koji će izvor signala u kolu biti zamenjen generatorom sinusoide tokom simulacije u naizmeničnom režimu.

Amplitudska karakteristika integratora datog u zadatku prikazana je na Slici 12.



Slika 12 – Amplitudska karakteristika kola praktičnog integratora – ponaša se kao filter propusnik niskih učestanosti.

Kolo se ponaša kao filter propusnik niskih učestanosti pri čemu pojačanje u propusnom opsegu iznosi 20 dB, dok na graničnoj učestanosti (1.59 kHz) dolazi do slabljenja za 3 dB u odnosu na ovo pojačanje, što se može potvrditi analizom rezultata simulacije.

$$20 \log \left(\left| \frac{V_{out}(j\omega_g)}{V_{in}(j\omega_g)} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_g}{\frac{1}{CR_2}} \right)^2}} \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1 \sqrt{2}} \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 3dB.$$