

Preslikavanje iz s u z ravan

Mirna N. Kapetina

Zoran D. Jeličić

10. april 2020.

Ponašanje kontinualnih sistema automatskog upravljanja, koji se mogu opisati funkcijom prenosa, potpuno je određeno položajem kritičnih učestanosti u s ravni¹. Odnosno, karakteristične osobine kao što su stabilnost, aperiodičnost, oscilatornost, vreme smirenja i druge koje karakterišu vremenski odziv sistema mogu se proceniti na osnovu polova sistema u zatvorenoj sprezi, tj. nula karakterističnog polinoma sistema.

Na sličan način mogu se proceniti i osobine diskretnih sistema (signala) na osnovu položaja polova u z ravni. Da bi objasnili vezu između položaja polova u z ravni i karakteristika odziva diskretnog sistema, potrebno je ustanoviti preslikavanje tipičnih oblasti ² iz s ravni u z ravan.

¹ Akcenat našeg kursa je na analizi ponašanja i karakteristikama sistema, isti principi i matematički alati, koriste se i u obradi signala, a pojmovi *sistem* i *signal* se često permutuju ili ravnopravno koriste u ovakvim studijama

² Ove oblasti ćemo u daljem tekstu, zbog usklađivanja sa terminima kompleksne analize, zvati *konture*.

Preslikavanje s u z

Prema definiciji 3 transformacije, preslikavanje iz s ravni u z ravan je određeno sa

$$z = e^{sT} \quad (1)$$

i ono je jednoznačno.

Preslikavanje z u s

Preslikavanje iz z ravni u s ravan je određeno sa

$$s = \frac{1}{T} \ln z + jk\omega_s \quad (2)$$

i ono je višeznačno.

Napomena 1. Korišćenjem da je $s = \sigma + j\omega$, izraz (2) sledi iz

$$e^{sT} = z \rightarrow e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j \arg z}$$

zbog periodičnosti funkcije $e^{j \arg z}$

$$\begin{aligned} e^{j \arg z} &= e^{j(\arg z + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{\sigma T} e^{j\omega T} &= |z| e^{j(\arg z + 2k\pi)} \\ e^{\sigma T} = |z| &\implies \sigma T = \ln |z| \implies \sigma = \frac{\ln |z|}{T} \\ \omega T &= j \arg z + j2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Ako znamo da je frekvencija odabiranja $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, odnosno $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$, sledi

$$\begin{aligned} s = \sigma + j\omega &= \frac{\ln |z|}{T} + j \frac{\arg z}{T} + j\omega_s k \\ &= \frac{1}{T} \ln z + j\omega_s k. \end{aligned}$$

Napomena

$$\ln |z| e^{j \arg z} = \ln |z| + j \arg z.$$

Da bi ustanovili povezanost ponašanja sistema (signala) opisanih u s ravni i z ravni, posmatrajmo transformaciju signala $Y(s)$, koja posle odabiranja postaje kompleksni lik povorke odbiraka $Y^*(s)$. U trenucima odabiranja, odbirkovani signal ima iste vrednosti kao i kontinualni signal. Tako, npr. ukoliko je $y(t)$ eksponencijalna funkcija, tada i odbirkovani signal ima eksponencijalno ponašanje u trenucima odabiranja, sa istom amplitudom i vremenskom konstantom kao i kontinualna funkcija. Pa ukoliko je $y(t) = e^{at}$, tada je

$$Y(s) = \frac{1}{s+a}, Y^*(s) = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-aT}} \quad Y(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3)$$

Stoga pol iz s ravni $s = -a$, rezultuje pojavu pola $z = e^{-aT}$ u z ravni, i taj pol $z = z_1$ oslikava iste karakteristike vremenskog odziva u trenucima odabiranja kao i ekvivalentni pol iz s -ravni s_1 . Njihova veza je definisana izrazom $z_1 = e^{s_1 T}$.

Preslikavanje kontura od interesa biće započeto preslikavanjem konture stabilnosti, odnosno oblasti stabilnosti, koja je pre dsikretizacije bila cela leva poluravan³.

³ Podsećamo da je teoremom odabiranja, leva poluravan svedena na tzv. primarni ili Nikvistov pojas

1 Preslikavanje primarnog pojasa

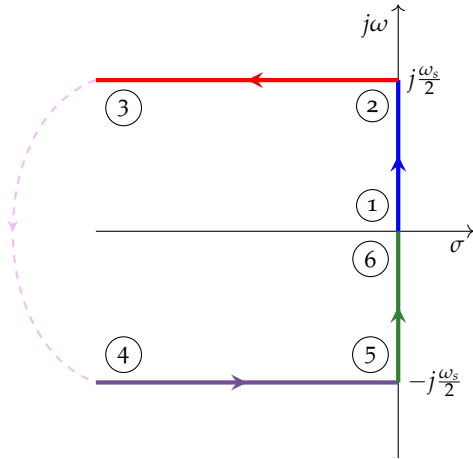
Preslikavanje započinjemo preslikavanjem samo onog dela leve poluravni s , koja je ograničena primarnim pojasom⁴ s ravni koji je prikazan na slici 1a, a koja predstavlja tzv. stabilan deo ravni u kojoj se, po teoremi o odabiranju nalaze sve kritične učestanosti.

Za preslikavanje kompleksne promenljive $s = \sigma + j\omega$ koristićemo izraz (1),

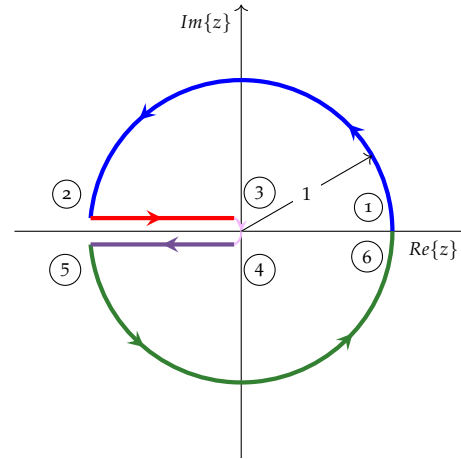
$$z = e^{sT} = e^{\sigma + j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (4)$$

⁴ Podsećamo da je primarni pojas određen Nikvistom frekvencijom $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ i posledica je umnožavanja spektra (karakterističnih frekvencija) oko frekvencije odabiranja ω_s

Izraza (4) predstavlja zapis kompleksne promenljive z u eksponencijalnoj formi, pri čemu je moduo $|z| = e^{\sigma T}$, dok je argument $\angle z = \omega T$



(a) Primarni pojas s-ravni.



(b) Kontura primarnog pojasa preslikana u z ravan.

Preslikavanje dela imaginarne ose iz primarnog pojasa s-ravni, označeneog na slici 1a kao segment od (1) do (2) i simetričan segment u odnosu na realnu osu od (6) do (5), započecemo uz prihvatanje očigledne činjenice da sve tačke na imaginarnoj osi imaju realan deo jednak nuli, $\sigma = 0$, dok se vrednost imaginarnog dela ω menja. Vrednost imaginarnog dela u koordinatnom početku (1) je $\omega = 0$ i ta se vrednost povećava do vrednosti Nikvistove učestalosti (2) $\omega = \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$, odnosno simetrično (segment (6) do (5)) vrednost imaginarnog dela se menja od $\omega = 0$ do $\omega = -\frac{\omega_s}{2}$. Ukoliko iskoristimo izraz (4), a s obzirom da je realni deo $\sigma = 0$ sledi da će se sve tačke tog segmenta preslikati u tačke u z ravni čiji je moduo $|z| = e^{0T} = 1$ a argument se menja od vrednosti $\angle z = 0$, (1), do vrednosti

$$\angle z = \omega_N T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} T = \pi$$

odnosno tačke segmenta od (6) do (5), će se preslikati u tačke gde se argument menja od 0 do $-\pi$. Kao što je prikazano na slici 1, imaginarna osa primarnog pojasa s ravni preslikala se u kružnicu poluprečnika 1 u z ravni.

Segment od (2) do (3) koji predstavlja gornju granicu primarnog pojasa čine tačke na Nikvistovoj učestalosti $s = \sigma + j\omega_N$, pri čemu je $\sigma \in (0, -\infty)$. Primenom (4), te tačke će se preslikati u z ravan u kompleksne promenljive sa argumentom $\angle z = \omega_N T = \pi$, i modulom $|z| \in (1, 0)$. Isto tako i simetrični segment (4) do (5) u tačke z ravni sa argumentom $\angle z = -\omega_N T = -\pi$, i modulom $|z| \in (1, 0)$. Na slici 1b se vidi da je to negativni deo realne ose unutar jediničnog kruga. Međutim, podsećamo, da prisustvo polova (karakterističnih

Slika 1: Preslikavanje primarnog pojasa iz s ravni u z ravan

frekvencija) na samoj granici primarnog pojasa nije poželjno, jer se oni nalaze na granici teoreme odabiranja.

Segment (3) do (4) čine polovi čija vrednost realnog dela $\sigma \rightarrow -\infty$, što će pri preslikavanju dovesti do preslikavanja u tačke čiji modul $|z| \rightarrow 0$, odnosno, u koordinatni početak.

Na osnovu prethodne analize, može se zaključiti da će se leva poluravan s ravni preslikati u jedinični krug z ravni. Lako se može pokazati da će se desna poluravan preslikati u prostor van jediničnog kruga u z ravni.

2 Preslikavanje prave vremena smirenja

Prava u s ravni koja ima konstantan realni deo predstavlja mesto tačaka sa jednakim vremenom smirenja⁵

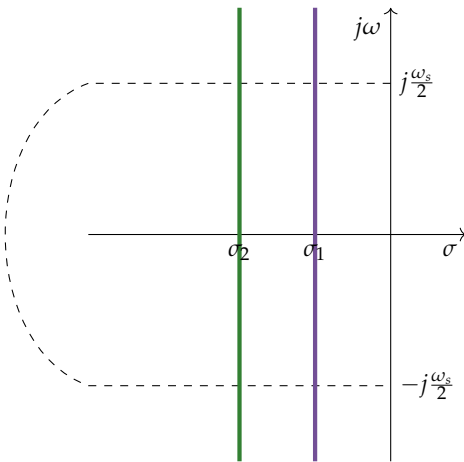
$$s = \sigma + j\omega, \sigma = \text{const}, \omega \in (-\omega_N, \omega_N) \quad (5)$$

Ovo preslikavanje se ostvaruje na osnovu definicije z kompleksnog broja

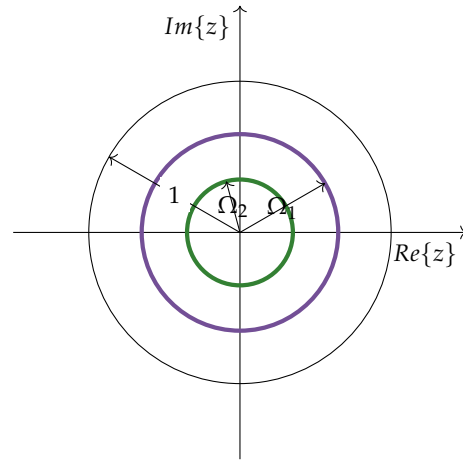
$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \implies |z| = \Omega = e^{\sigma T} = \text{const} \quad (6)$$

Lako se zaključuje da se prava preslikava u kružnicu poluprečnika $\Omega = e^{\sigma T}$ kao što je prikazano na slici 2.

⁵ Vreme smirenja zavisi od dominantne vremenske konstante T_d , koja se računa kao $T_d = \frac{1}{|\text{Re}(s_d)|}$, gde je s_d označen dominantan pol, odnosno stabilan pol najbliži imaginarnoj osi.



(a) Lila prava označava polove sa dominantom vremenskom konstantom $T_{d1} = \frac{1}{|\sigma_1|}$ dok zelena prava polove sa bržim odzivom $T_{d2} = \frac{1}{|\sigma_2|}$, $T_{d2} < T_{d1}$



(b) Lila kružnica poluprečnika $\Omega_1 = e^{\sigma_1 T}$ označava polove sa dominantom vremenskom konstantom T_{d1} dok zelena kružnica, poluprečnika $\Omega_2 = e^{\sigma_2 T}$, polove sa bržim odzivom, T_{d2}

Zaključujemo da u kontinualnom domenu, realni deo pola σ predstavlja faktor prigušenja, određuje vreme smirenja signala i u vremenskoj funkciji signala se javlja kao član $e^{-\sigma t}$. Što je pol bliže imaginarnoj osi, odnosno $|\sigma|$ je manje to je odziv sporiji. U diskretnom

Slika 2: Preslikavanje prave vremena smirenja iz s ravni u z ravan

domenu, moduo pola $|z|$ u z ravni, određuje iste karakteristike odziva sistema. Polovi sa većim modulom, koji se nalaze na kružnici bližoj jediničnoj kružnici imaju sporiji odziv nego polovi na kružnici sa manjim poluprečnikom.

3 Preslikavanje konstantne frekvencije

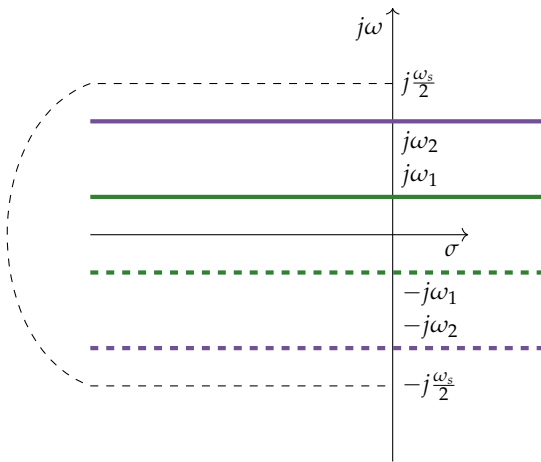
Polovi koji čine liniju sa konstantnim imaginarnim delom, $\omega = \text{const}$, možemo opisati kao

$$s = \sigma + j\omega, \quad \omega = \text{const}, \quad \sigma \in (-\infty, 0) \quad (7)$$

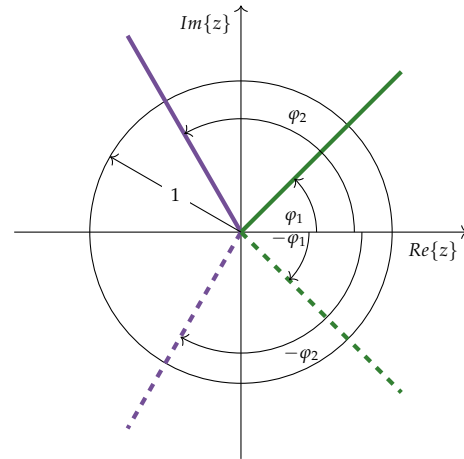
Primenom definicije kompleksne promenljive z važi

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \implies |z| = e^{\sigma T} \in (0, 1) \wedge \angle z = \omega T = \text{const} \quad (8)$$

što se može videti i na slici 3. Prave iz s ravni sa konstantnim imaginarnim delom preslikavaju se u z ravni u radijalne linije sa početkom u koordinatnom početku i uglom $\angle z = \omega T$ koji zavisi od frekvencije ω . Polovi koji se nalaze na radijalnim linijama sa većim uglom karakteriše veća frekvencija oscilovanja.



(a) Lila prave $\pm j\omega_2$ označava polove sa polove sa frekvencijom oscilovanja ω_2 , dok zelene prave $\pm j\omega_1$ polove koji osciluju sa manjom frekvencijom ω_1 .



(b) Lila radijalne prave sa nagibom od $\pm\varphi_2 = \pm\omega_2 T$ preslikavaju polove sa frekvencijom ω_2 , dok zelene radijalne prave sa nagibom od $\pm\varphi_1 = \pm\omega_1 T$ polove koji rezultuju manju frekvenciju oscilovanja.

Deo prave koji se nalazi u nestabilnoj poluravni s ravni se preslikao u deo radijalne linije van jediničnog kruga, dok se stabilni deo preslikao na deo linije između 0 i 1. Polovi na pravoj $\pm j\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ će se preslikati na negativan deo realne ose z ravni kao što je opisano u poglavlju 1, dok će se aperiodični polovi koji su na realnoj osi preslikati

Slika 3: Preslikavanje prave konstantne frekvencije oscilovanja iz s ravni u z ravan

na pozitivan deo realne ose. Sa slike 3 se vidi da polovi koji u z ravni imaju veći argument, imaće i veću frekvenciju oscilovanja.

4 Preslikavanje položaja polova i vremenskog odziva

Na slici 4 dat je položaj polova u s ravni. Polovi su raspoređeni tako da se nalaze i u stabilnom i u nestabilnom delu s ravni, sa različitim vrednostima realnog i imaginarnog dela pola. Ako se podsetimo da je opšti oblik sistema drugog reda

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9)$$

znamo da su polovi ovakavog sistema par kompleksno konjugovanih brojeva

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= \sigma \pm j\omega \end{aligned} \quad (10)$$

gde je ω_n prirodna neprigušena učestalost, a ζ faktor prigušenja, odnosno σ je realni deo pola, ω imaginarni deo. Impulsni odziv ovakvog sistema drugog reda je

$$y = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) h(t) \quad (11)$$

odakle se lako zaključuje, ono što smo ranije uveli, da realni deo utiče na prigušenje i brzinu odziva dok imaginarni deo na frekvenciju oscilovanja. Na slici 4 označeni su konjugovano kompleksni parovi polova sa različitim i imaginarnim i realnim delovima (odgovarajući konjugovani par je označen kao $(\cdot)'$), kao i realni polovi koji su rezultat sistema prvog reda

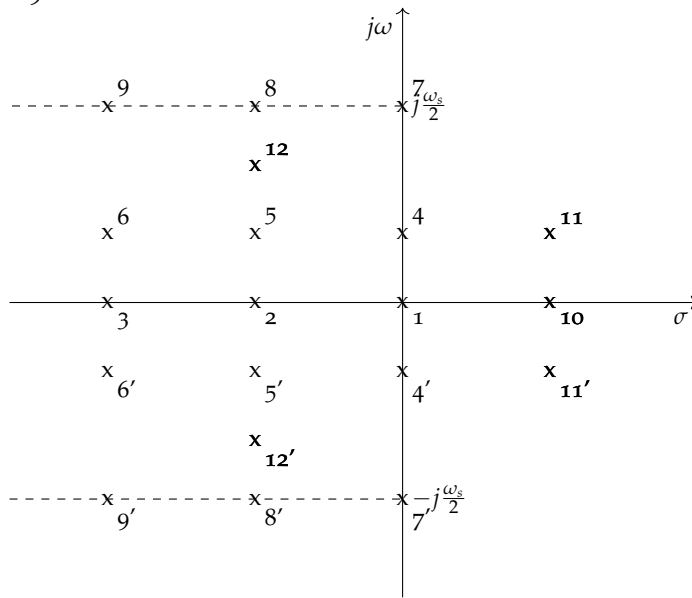
$$G(s) = \frac{k}{s+a} \quad (12)$$

a impulsni odziv ovakvog sistema je

$$y(t) = ke^{-at}. \quad (13)$$

Ukoliko se izvrši diskretizacija ovih sistema sa frekvencijom ω_s dobijamo diskretne sisteme čije polove možemo predstaviti u z ravni kao na slici 5.

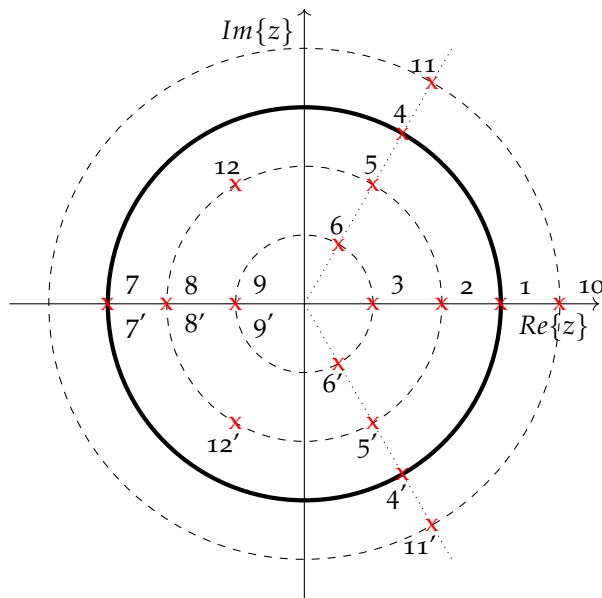
0.9



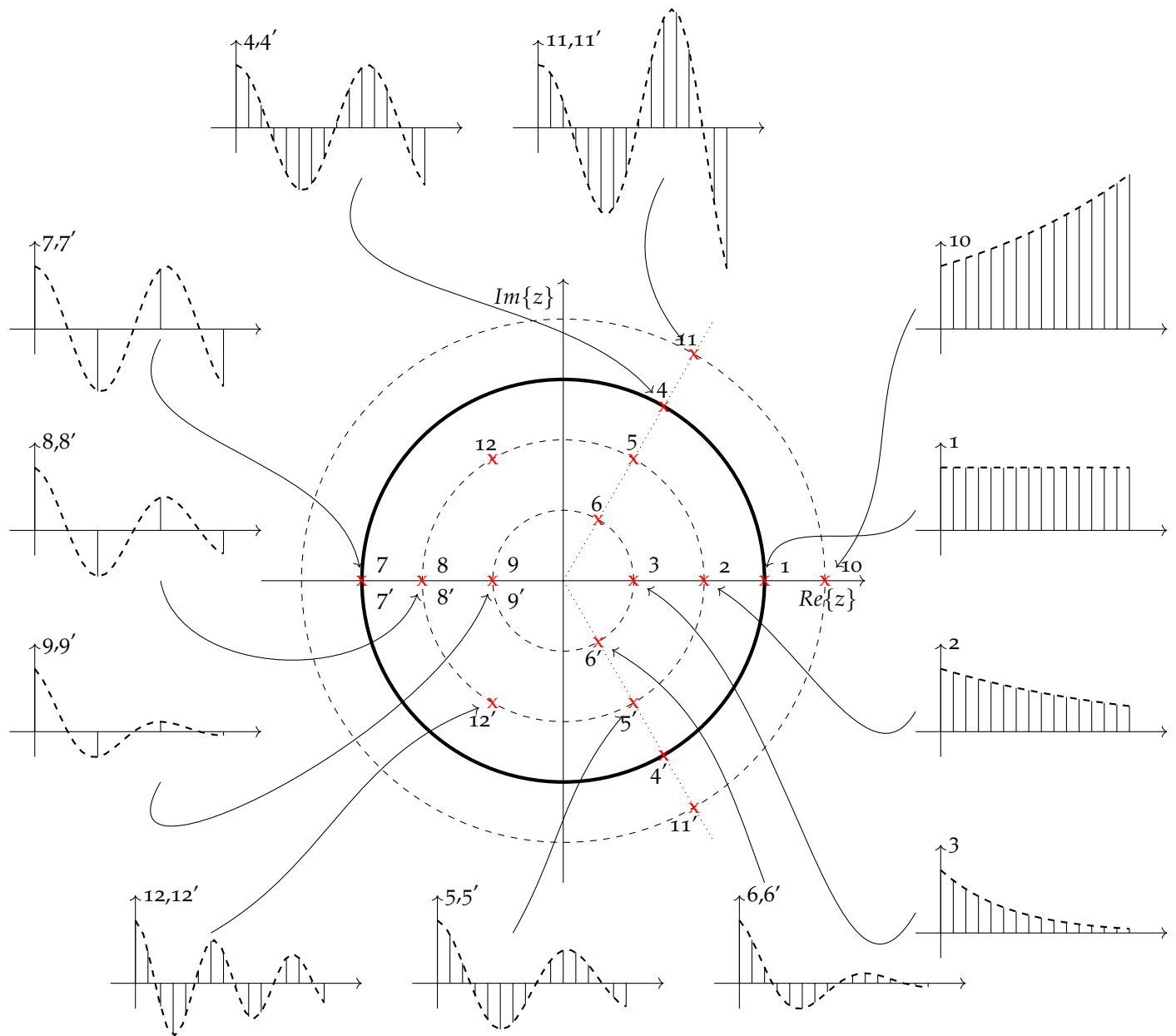
Slika 4: Položaj polova kontinualnog sistema.

Vidimo da su se realni polovi (1,2,3,10) preslikali na pozitivan deo realne ose kako je u prethodnim poglavljima diskutovano. Pol 10 koji je nestabilan, preslikao se u deo pozitivnog dela realne ose izvan jediničnog kruga, dok se pol 1 koji je na granici stabilnosti preslikao na kružnicu. Polovi 2 i 3 su oba realna ali pol 3 ima manju dominantu vremensku konstantu odnosno veći koeficijent prigušenja (realni deo pola), zbog čega se on preslikao bliže koordinatnom početku u odnosu na pol 2.

Konjugovano kompleksni polovi 11,4,5,6 imaju jednak imaginarni deo, što će rezultovati jednakom uglu, da se nalaze istoj radialnoj polupravoj (simetrično 11',4',5',6'). Kako je pol 11 nestabilan on će biti van jedinične kružnice. Polovi 4,4' su na granici stabilnosti, što odgovara jediničnoj kružnici, dok polovi 5,5' imaju isti realni deo kao pol 2 pa će imati i jednak modu i nalaziti se na istom odstojanju od koordinatnog početka, kao par polova 12,12' koji će zbog veće vrednosti imaginarnog dela imati veći argument u Z ravni. Isto je i sa polovima 6,6' u odnosu na pol 3. Polovi 7,8,9 (7',8',9') se nalaze na Nikvistovoj učestalosti pa će se preslikati sa argumentom od π , odnosno na negativan deo realne ose u rasporedu koji je određen njihovim realnim delom.



Slika 5: Odgovarajući položaj polova diskretizovanog sistema



Slika 6: Karakteristični impul-
sni odzivi diskretnog sistema
zavisno od položaja polova

Na slici 6 prikazani su karakteristični impulsni odzivi na označene polove, tj. parove konjugovano kompleksnih polova. Prikazani odzivi su diskretni i prikazani kao povorke impulsa. Imajući na umu da argument pola određuje frekvenciju oscilovanja, jasno je da će polovi $6,5,4,11$ (i odgovarajući konjugovano kompleksni parovi $6',5',4',11'$) oscilovati istom frekvencijom. Kod nestabilnih polova $11,11'$ odziv nije prigušen zbog čega se amplituda oscilacija povećava tokom vremena. Diskretan sistem sa parom polova $12,12'$ koji imaju veći argument od npr. polova $5,5'$, će oscilovati većom frekvencijom, ali kako im je moduo isti, njihovo vreme ulaska u ustaljeno stanje, tj. dominantna vremenska konstanta će biti isto, kao i kod sistema sa polom 2, koji će rezultovati aperiodičan odziv ali isto vreme ulaska u ustaljeno stanje. Pored pola 2, aperiodičan odziv će dati i polovi $3,1,10$ sa različitim prigušenjem. Sistemi sa polom 3, parom $6,6'$, i $9,9'$ koje karakteriše isti moduo, takođe, će imati isto vreme ulaska u ustaljeno stanje. Treba obratiti pažnju na izgled odziva na polove $7,7',8,8',9,9'$, gde se vide impulsi na velikom rastojanju iz kojih teško da može da se rekonstruiše oblik signala koji bi trebalo da predstavljaju. Razlog tome je što su se ovi polovi nalazili u s -ravni na Nikvistovoj učestalosti, odnosno na granici teoreme odabiranja, zbog čega odbirkovanje, kao što se može primeniti, nije ni dobro.