



# DSP Ispitna Pitanja

## 1. Furijeova Transformacija i Frekvencijski Spektar Kontinualnih Signala

Periodicni Signali

Aperiodicni Signali

## 2. Furijeova Transformacija i Frekvencijski Spektar Diskretnih Signala

Furijeova Transformacija Diskretnog Signala

Spektar Diskretnog Signala

## 3. Teorema o Odabiranju i Antialiasing Filter

Nikvistova Teorema

Aliasing

Anti-Aliasing Filter

## 4. Osnovne Karakteristike (Osobine) Sistema

Osobine

Linearost

Vremenska Invarijantnost

Stabilnost

Kauzalnost

Linearni Vremenski Invarijantni (LVI) Sistemi

Odziv Na Proizvoljnu Pobudu

## 5. Impulsni odziv i njegova upotreba za pronalaženje odziva sistema

Karakteristike Frekvencijskog Odziva

## 6. Definicija i fizičko tumačenje DFT

## 7. Spektralna analiza signala primenom DFT (problemi i princip korišćenja)

Struktura Spektralnog Analizatora

## 8. Prozorske funkcije i njihov uticaj na rezultat DFT spektralne analize

## 9. Funkcija prenosa i frekvencijski odziv diskretnih sistema

Funkcija prenosa

Frekvencijski odziv

## 10. Vrste idealnih filtera i diskusija njihove ostvarljivosti

## 11. Idealni NF filter sa nultom i nenultom faznom karakteristikom

Filter nulte fazne karakteristike

Filter linearne fazne karakteristike

## 12. Analogni Batervortov NF filter

Amplituda Batervortovog filtera

## 13. Frekvencijske transformacije analognih filtera

NF → NF prototip transformacija

VF → NF prototip transformacija

PO → NF prototip

NPO → NF prototip

## 14. Bilinearna transformacija u projektovanju IIR digitalnih filtera

Ako je zadata specifikacija - gabarit digitalnog filtera:  $\Omega_p$  i  $\Omega_a$

Ako je zadata specifikacija - gabarit analognog filtera:  $\omega_p$  i  $\omega_a$

## 15. Funkcija prenosa linearne faze i veza oblika impulsnog odziva sa linearnom faznom karakteristikom

Impulsni odziv FIR sistema linearne fazne karakteristike

## 16. Digitalni FIR filtri opšte karakteristike

## 17. Projektovanje FIR filtra primenom prozorske funkcije

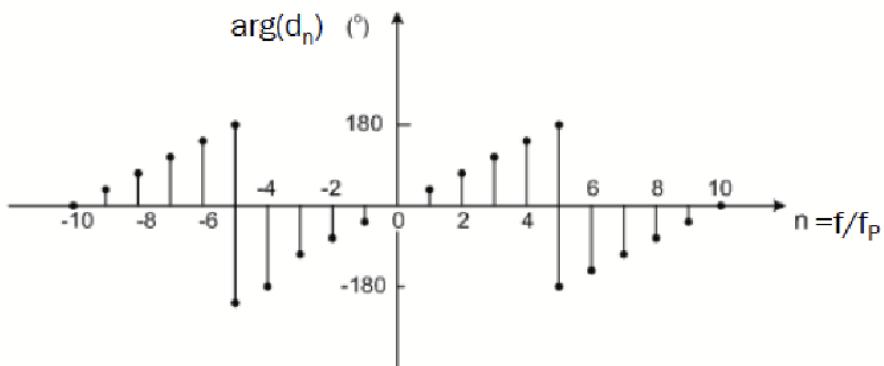
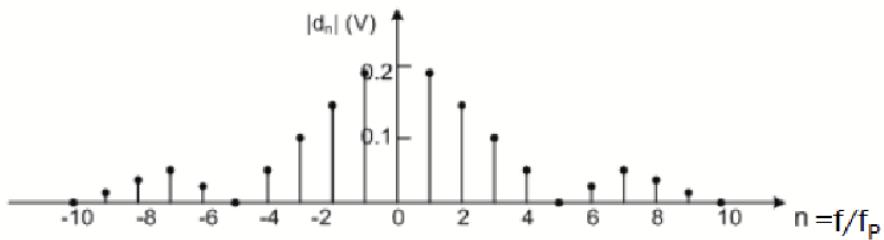
## 18. Projektovanje FIR filtra zasnovano na frekvencijskom odabiranju

---

# **1. Furijeova Transformacija i Frekvencijski Spektar Kontinualnih Signala**

**Furijeova transformacija** predstavlja matematički alat za rastavljanje složenih kontinualnih signala na jednostavnije komponente. Svaki signal, bilo da je periodičan ili aperiodičan, može se opisati pomoću sume sinusoida različitih frekvencija, amplituda i faza. Pojam **frekvencijski spektar** odnosi se na prikazivanje amplituda ili faza tih sinusoida u zavisnosti od njihovih frekvencija. Ovaj spektar je kompleksan, gde je **amplitudski spektar** realna funkcija koja prikazuje amplitude u zavisnosti od frekvencije, a **fazni spektar** isto realna funkcija koja pokazuje fazni pomak.

## **Periodični Signali**



Gornja Slika - Amplitudski spektar, Donja Slika - Fazni spektar

Za periodične signale, koji se ponavljaju nakon određenog intervala  $T$ , koristi se **Furijeov red**. Osnovna ideja je da se svaki takav signal može predstaviti kao sumu sinusnih i kosinusnih funkcija (**harmonika**), gde je svaka opisana posebnom amplitudom i fazom. Prvi član niza, nulti harmonik, predstavlja konstantnu komponentu signala (kao i srednju vrednost signala). **Frekvenčijski spektar ovakvih signala je diskretan.**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_p t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_p t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) \cos(n\omega_p t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) \sin(n\omega_p t) dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot e^{-jn\omega_p t} \rightarrow \text{Furijeov Red}$$

$$d_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) e^{-jn\omega_p t} dt$$

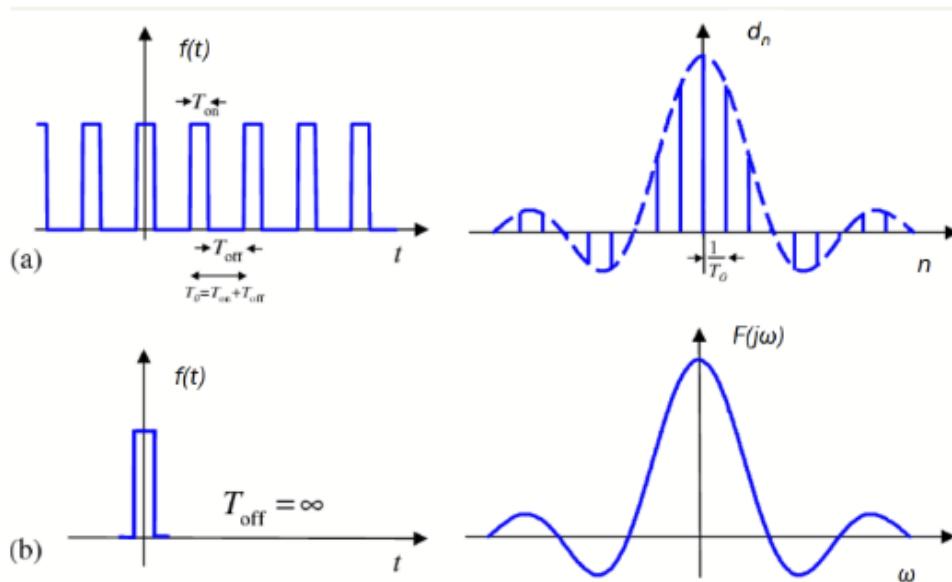
$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_p t + \phi_n)$$

$$A_o = |d_0|, A_n = 2|d_n|, \phi_n = \arg(d_n)$$

## Aperiodicni Signali

Aperiodični signali, za razliku od periodičnih, ne ponavljaju se unutar fiksnog intervala. U analizi ovih signala koristi se Furijeova transformacija, koja omogućava predstavljanje signala u frekvencijskom domenu kao **kontinualnu funkciju**. Aperiodični signal se može smatrati kao slučaj periodičnog signala čija perioda teži beskonačnosti. Zbog toga, diskretni frekvencijski spektar koji se koristi za periodične signale prelazi u kontinualni spektar kod aperiodičnih signala. Amplitudski i fazni spektar prikazuju, slično kao i kod periodičnih, amplitudne i fazne pomake za različite frekvencije, ali ovog puta bez diskretnih skokova.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \rightarrow \text{Furijeova transformacija}$$



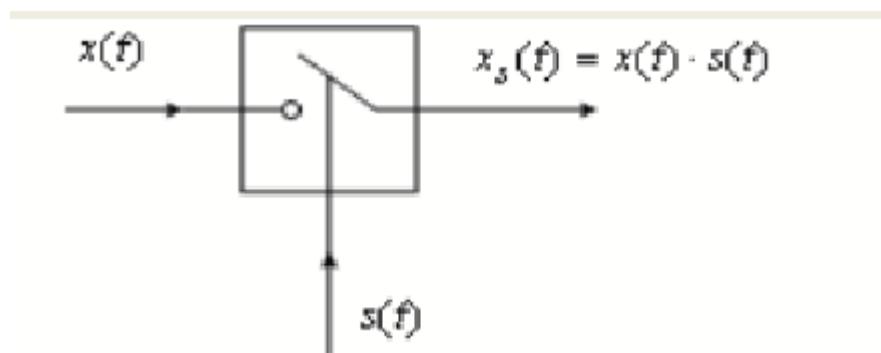
a) Periodican signal, b) Aperiodican signal koji odgovara jednoj periodi

Ako aperiodični signal ima isti oblik kao jedan period periodičnog signala, njihovi spektri će deliti slične karakteristike: oba će prikazivati iste dominantne frekvencije, ali će spektar aperiodičnog signala biti kontinualan, za razliku od diskretnog spektra periodičnog signala.

## 2. Furijeova Transformacija i Frekvencijski Spektar Diskretnih Signala

Većina signala u prirodi su kontinualni, ali zbog potrebe obrade u digitalnim računarima, oni se pretvaraju u diskrete signale procesom **vremenskog odabiranja**. Ovaj proces, poznat i kao **sampling**, najčešće se vrši u ekvidistantnim vremenskim trenucima, pri čemu je  $x_s(k) = x(t)|_{t=kT_0} = x(kT_0)$ , gde je  $T_0$  **perioda odabiranja**.

### Furijeova Transformacija Diskretnog Signala



U ovom izvodjenju se prikazuje kako zapravo **Dirakov impuls odbirkuje kontinualni signal**. Gde je  $x(t)$  kontinualni signal a  $s(t)$  beskonacna povorka impulsa

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt$$

gde:  $x_s(t) \cdot s(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{-jn\omega_0 t}$$

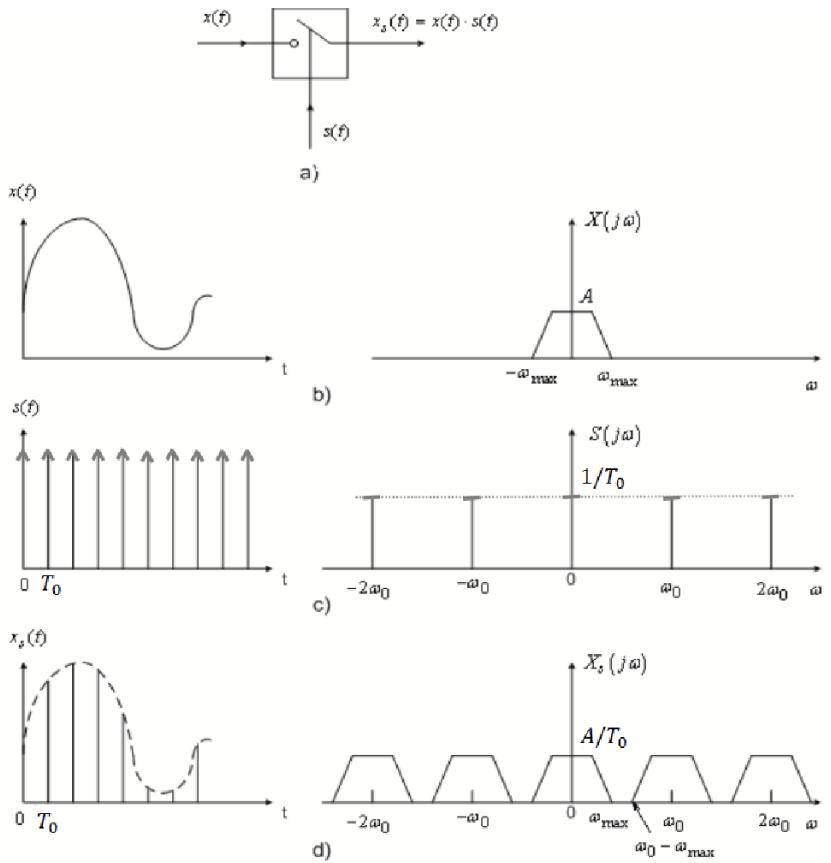
gde:  $s_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$ , pa je

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n\omega_0))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Omega}$$

Praktično smo dobili **Z transformaciju**, gdje je  $z = e^{j\Omega}$ .

## Spektar Diskretnog Signala



Kada se kontinualni signal odbirkuje, svaki uzorak signala uzima se u intervalima  $T_0$ . Matematički, ovo se modeluje kao množenje kontinualnog signala sa nizom **Dirakovih delta impulsa** koji su razdvojeni za  $T_0$ . Rezultat ovog procesa je novi signal koji sadrži isključivo vrednosti kontinualnog signala u diskretnim vremenskim tačkama, dok su sve ostale vrednosti nule. Kada se izvrši Furijeova transformacija ovog signala, dobijeni spektar je transformacija originalnog spektra pomnožena sa  $1/T_0$ .

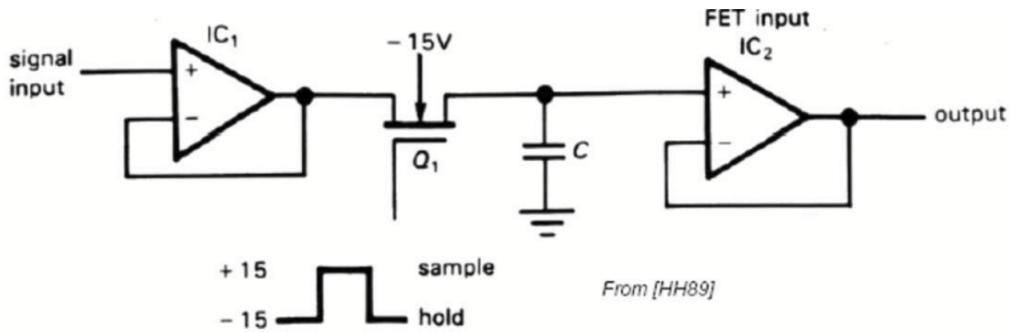
Druga značajna posledica odbirkovanja je da **spektar diskretnog signala postaje periodičan**. Ovo se dešava jer se procesom odbirkovanja generiše preslikavanje osnovnog spektra signala na svakih  $1/T_0$  herca. Matematički, ovo preslikavanje se javlja zbog konvolucije u frekvencijskom domenu između spektra originalnog signala i spektra niza Dirakovih impulsa.

Diskretna ugaona učestanost

$\Omega$  definisana je kao proizvod kontinualne ugaone učestanosti  $\omega$  i perioda odbirkovanja  $T$ , pri čemu je  $\Omega$  periodična sa  $2\pi$ . Diskretna frekvencija  $F$  se dobija deljenjem frekvencije signala  $f$  sa frekvencijom odbirkovanja  $f_s$ , što omogućava analizu frekvencijskih komponenti unutar diskretnog spektra.

### 3. Teorema o Odabiranju i Antialiasing Filter

Odabiranje (**sampling**), predstavlja ključan korak u diskretizaciji signala. Proces odbirkovanja uključuje uzimanje uzoraka originalnog kontinualnog signala u redovnim vremenskim intervalima, poznatim kao **perioda odabiranja  $T_s$** .



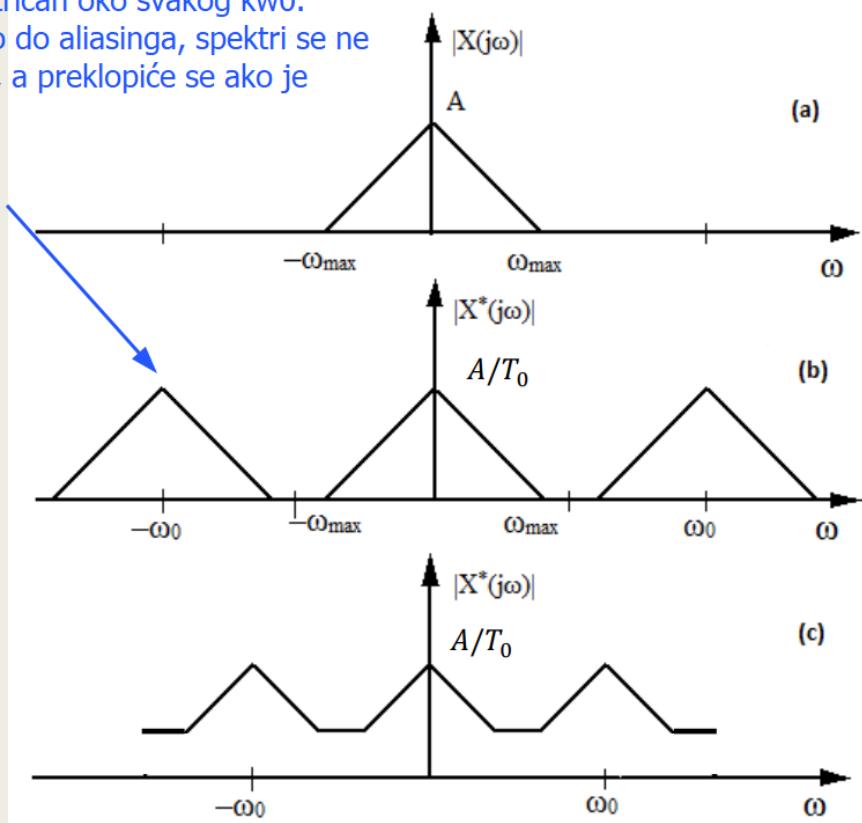
Samo odabiranje vrši se **kolom za odabiranje i zadršku**.

#### Nikvistova Teorema

Da bi odabiranje bilo uspešno i bez gubitka informacija, neophodno je pratiti **Nikvistovu teoremu**, koja nalaže da frekvencija odbirkovanja  $f_s = \frac{1}{T_s}$  mora biti **najmanje dva puta veća od najveće frekvencije prisutne u kontinualnom signalu**, poznate kao **Nikvistova frekvencija**. Ovaj kriterijum osigurava da se sve informacije sadržane u signalu adekvatno zabeleže. Ukoliko nije ispunjen Nikvistov uslov dolazi do **preklapanja spektra (aliasinga)** i nije moguća rekonstrukcija originalnog signala.

Zašto važi Nikvistov kriterijum? Frekvencija odabiranja kontinualnog signala simetrična je oko svakog  $k f_s$ , što će značiti da najveća frekvencija u signalu kojeg semplujemo mora biti do  $f_s/2$ , jer u suprotnom dobijamo **pomenuto preklapanje spektra**.

spektar je simetričan oko svakog  $\omega_0$ .  
kako ne bi došlo do aliasinga, spektri se ne  
smiju preklopiti, a preklopiti se ako je  
 $\omega_{max} > \omega_0/2$ .



## Aliasing

**Aliasing** je pojava koja nastaje kada je frekvencija odbirkovanja nedovoljna da zabeleži sve fluktuacije u signalu, što dovodi do netačne reprezentacije originalnog signala. Ovaj efekat nastaje jer komponente iznad Nikvistove frekvencije generišu kopije sebe unutar prihvativog opsega, sto dovodi do toga da se frekvencije koje ne postoje u originalnom signalu tu nađu.

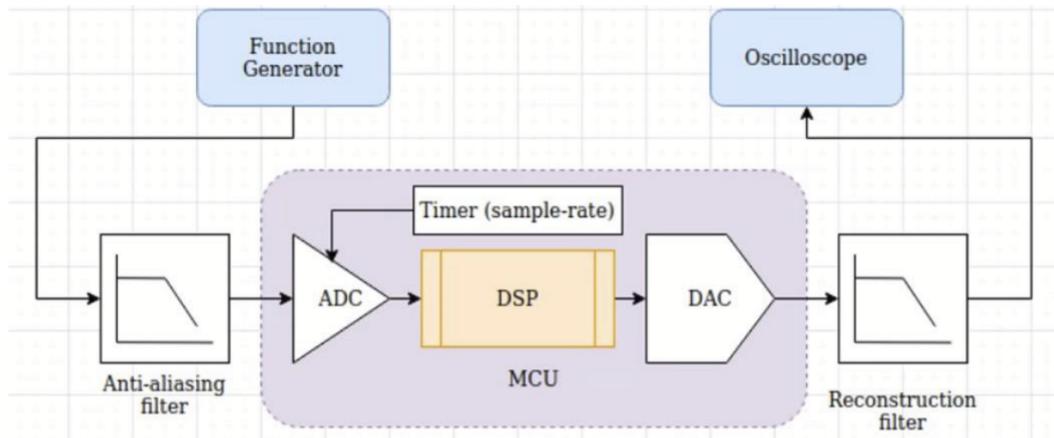
## Anti-Aliasing Filter

Da bi se izbegao aliasing, koristi se **anti-aliasing filter** pre samog procesa odbirkovanja. Ograničava spektar ulaznog signala tako što odseca/potiskuje komponente više od granicne ucestanosti filtra. Time dobijamo signal sa ograničenim spektrom.



Frekvencija sumplovanja mora biti najmanje 2 puta veća od granicne ucestanosti antialiasing filtra.

**Antialiasing filter je pre diskretizacije!** On mora biti kontinualan filter (**realizovan u kontinualnom domenu**). Obično se pravi pomoću operacionih pojačavača i analogne elektronike. Potrebno je da ima strmu karakteristiku kako bi maksimalno potisnuo više komponente.



Antialiasing filter, sam po sebi, predstavlja **niskopropusni filter**, pa se svakako koristi i kod skoro pa idealnih sinusoida zbog prisutnosti šumova i smetnji koji prave viši harmonici koji ne postoje u originalnom signalu.

## 4. Osnovne Karakteristike (Osobine) Sistema



Sistem se može definisati kao tehnička ili prirodna struktura koja ima funkciju u transformaciji ulaznog signala  $x(t)$  u izlazni signal  $y(t)$ . Ovi signali mogu biti različitih tipova, ali se najčešće radi o vremenskim signalima. Transformacija koju sistem vrši nad signalima opisuje se preslikavanjem  $\Phi$ .

**Frekvenčijski odziv** predstavlja odnos između ulaznih i izlaznih signala u frekvenčijskom domenu. Ova karakteristika omogućava razumevanje kako sistem reaguje na različite frekvencije ulaznog signala.

### Osobine

## Linearnost

Linearnost sistema znači da je odziv sistema na linearu kombinaciju ulaznih signala jednak sumi odziva sistema na svaki od ulaznih signala pojedinačno. To se matematički izražava kao:

$$\Phi\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = a\Phi\{x_1(t)\} + b\Phi\{x_2(t)\}$$

## Vremenska Invarijantnost

Sistem je vremenski invarijantan ako njegovi parametri ostaju konstantni tokom vremena, što znači da promena u vremenskom pomaku ulaznog signala proizvodi isti pomak u izlaznom signalu:

$$y(t) = \Phi\{x(t)\} \Rightarrow y(t - \tau) = \Phi\{x(t - \tau)\}$$

## Stabilnost

Sistem je stabilan ako za svaki ograničeni ulazni signal  $x(t) \leq A$  odziv sistema takođe ostaje ograničen  $\Phi\{x(t)\} \leq B$ , gde su  $A$  i  $B$  konačne pozitivne konstante.

## Kauzalnost

Sistem je kauzalan ako odziv na izlazu u bilo koje vreme  $\tau$  zavisi isključivo od vrednosti ulaznog signala do tog trenutka. **Odziv sistema se ne može pojaviti pre samog signala koji ga uzrokuje.**

## Linearni Vremenski Invarijantni (LVI) Sistemi

**LVI sistemi** su oni koji poseduju osobine linearnosti, vremenske invarijantnosti i kauzalnosti. Ovi sistemi se analiziraju kroz njihov impulsni odziv  $h(t)$ , koji definišemo u vremenskom domenu kao  $h(t) = \Phi\{\delta(t)\}$ . LVI sistem je kauzalan ako je  $h(t) = 0$  za  $t < 0$ .

## Odziv Na Proizvoljnu Pobudu

Odziv LVI sistema na bilo koji ulazni signal  $x(t)$  može se izračunati pomoću konvolucije (ukoliko je poznat impulsni odziv  $h(t)$ ):

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

## 5. Impulsni odziv i njegova upotreba za pronalaženje odziva sistema

Impulsni odziv sistema, označen kao  $h(t)$  predstavlja odziv sistema na Dirakov impuls. Matematički izraženo, impulsni odziv je:  $h(t) = \Phi\{\delta(t)\}$  gde  $\delta(t)$  predstavlja Dirakov impuls.

Odziv sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju  $x(t)$  može se odrediti putem konvolucije ulazne funkcije i impulsnog odziva:  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau) d\tau$

Furijeovom transformacijom konvolucije dobijamo proizvod transformacija:

$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$ , pa je frekvencijski odziv sistema  $H(j\omega)$  odnos Furijeove transformacije izlaznog signala prema ulaznom:  $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ .

Takođe, može se izračunati direktno kao Furijeova transformacija impulsnog odziva:  $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\}|_{s=j\omega}$

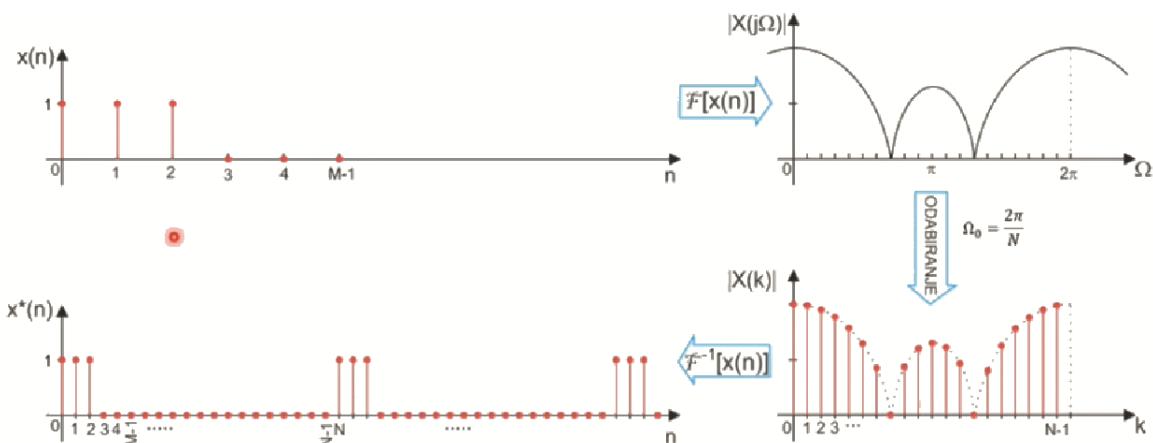
## Karakteristike Frekvencijskog Odziva

**Amplitudska karakteristika** (moduo)  $|H(j\omega)|$  je **uvek parna funkcija**.

**Fazna karakteristika**  $\arg(H(j\omega))$  je **uvek neparna funkcija**.

Linearni vremenski invarijantni (LVI) sistemi se definišu njihovim impulsnim odzivom  $h(t)$  u vremenskom domenu. Impulsni odziv omogućava precizno određivanje odziva sistema na bilo koju poznatu ulaznu funkciju  $x(t)$ , koristeći gorepomenutu konvolucijsku integralnu formulu.

## 6. Definicija i fizičko tumačenje DFT



**Diskretna Furijeova transformacija (DFT)** je alat za analizu spektra u diskretnom obliku, koji omogućava obradu na računaru. DFT nastaje **diskretizacijom jedne periode spektra diskretnog signala**, obično u intervalu od 0 do  $2\pi$ . Ova metoda transformacije se koristi jer spektar diskretnih signala je uglavnom kontinualna i periodična funkcija, a DFT omogućava efikasno rukovanje takvim spektrom kroz računarske algoritme.

Koncept DFT je zasnovan na odabiranju frekvencijskog spektra, sa propisanim periodom odabiranja  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ , gde je  $N$  broj tačaka u kojim je diskretizovan spektar. Formula za DFT se izražava kao:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Ovo u suštini predstavlja uzimanje odbiraka spektra signala na frekvencijama  $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ .

Inverzna DFT omogućava vraćanje iz frekvencijskog nazad u vremenski domen:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Kada se primeni inverzna Diskretna Furijeova transformacija na spektar, dobijeni signal u vremenskom domenu postaje periodičan zbog inherentne prirode DFT-a, koji uvodi ponavljanje u obrađeni signal. Za realizaciju DFT-a, važno je da originalni signal ima konačnu dužinu; u suprotnom, može doći do preklapanja susednih signala (**curenja spektra**). Broj tačaka  $N$  u koje je diskretizovan spektar mora biti dovoljno velik da pokrije originalni signal, čija dužina je  $M$ . Ako je  $N \geq M$ , onda se DFT može smatrati kao da odgovara originalnom signalu koji je produžen dodavanjem nultih tačaka kako bi se popunio spektar do dužine  $N$ , što doprinosi preciznijoj analizi bez gubitka informacija.

**Curenje spektra** nastaje kada frekvencije signala nisu umnošci osnovne frekvencije definisane za DFT, što rezultuje curenjem njihove energije u susedne frekvencije

DFT omogućava detaljniju analizu signala kad se povećava broj tačaka  $N$ , čime se "produžava" niz signalom kojim se operiše. U slučajevima kada se želi veća rezolucija DFT-a, signal se može dopuniti nultim tačkama. Ovo ne utiče na originalni signal, već samo daje više tačaka spektra za analizu, čime se poboljšava detaljnost i preciznost frekvencijske analize.

## 7. Spektralna analiza signala primenom DFT (problemi i princip korišćenja)

Spektralna analiza signala putem DFT omogućava značajan uvid u strukturu signala analizom njegovog spektra. Osnovna upotreba spektralne analize se manifestuje kroz prepoznavanje sastavnih komponenata složenog signala. Na primer, kroz analizu kombinovanog signala koji sadrži više sinusoidalnih funkcija može se ustanoviti koje komponente čine taj signal, koje su značajne, a koje predstavljaju šum.

DFT funkcioniše na principu diskretizacije prve periode signalnog spektra u  $N$  tačaka. Svaka tačka na kojoj se uzorkuje spektar određena je formulom  $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Pritom, vrednosti spektra na ovim tačkama predstavljaju DFT određenog diskretnog signala.

Kada su osobine signala nepoznate računa se DFT za neko  $N$  i za  $2N$ . Ako se dobijeni spektri razlikuju, ponovo se duplira dužina segmenta sve dok se ne postigne

da se izračunati spektri za  
 $kN$  i  $2kN$  ne razlikuju značajno

Pronaći DFT nekog niza  $x(n)$  nije problematično ukoliko je taj signal konačne dužine.

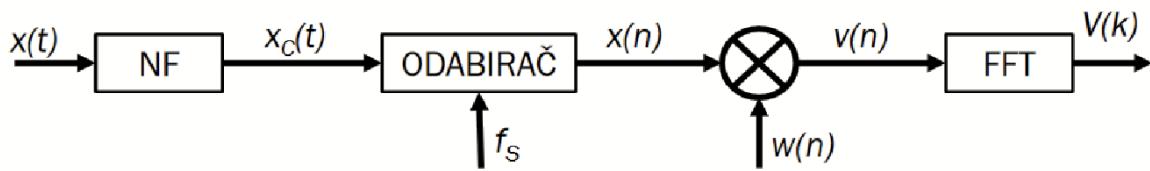
Problem je kada imamo niz beskonačne dužine ( $n \rightarrow \infty$ ). Tada se DFT svodi na beskonačnu sumu i to praktično ne možemo izračunati. U tim slučajevima se vrši izdvajanje jednog dela signala (dobijamo novi signal  $v(n)$ ), gde je  $n$  konačan broj, i prepostavimo da je taj deo niza dovoljno dobar predstavnik celog signala.

$$v(n) = x(n) \cdot w(n)$$

gde je  $w(n)$  **prozorska funkcija**.

Kod pravougaone prozorske funkcije odnos amplitude glavnog i bočnih lukova je relativno mali, ima relativno visoke bocne lukove i zbog toga i dolazi do značajnog curenja spektra. Zbog jako male širine glavnog luka ima dobro razdvajanje bliskih komponenti u spektru. **Što je glavni luk uzi, to je mogućnost razdvajanja 2 susedne komponente bolja.** Ako očekujemo neke bliske komponente treba koristiti pravougaonu prozorsknu funkciju, a druge prozorske funkcije ako nam treba manje curenje spektra

## Struktura Spektralnog Analizatora



**Antialiasing filter (NF filter)** se koristi da ograniči spektar signala na najvišu frekvenciju koja je manja od polovine frekvencije odabiranja (Nikvistova frekvencija) kako bi se izbeglo preklapanje spektra (aliasing) nakon odabiranja. **Odabirač** uzima diskretne vrednosti signala u fiksnim vremenskim intervalima i generiše niz digitalnih brojeva koji predstavljaju originalni signal. **Prozorska funkcija**  $w(n)$  se koristi da redukuje efekat curenja spektra. Kada analiziramo diskretne signale uz pomoć Furijeove transformacije, krajnji delovi signala mogu se zamišljati kao spojeni jedan na drugi. Prozorska funkcija se koristi da smanji amplitudu na krajevima niza.

FFT se obično ne izvodi u realnom vremenu zbog potrebe sakupljanja celog niza podataka o željenoj dužini.

## 8. Prozorske funkcije i njihov uticaj na rezultat DFT spektralne analize

Pronaći DFT nekog niza  $x(n)$  nije problematično ukoliko je taj signal konačne dužine.

Problem je kada imamo niz beskonačne dužine ( $n \rightarrow \infty$ ). Tada se DFT svodi na beskonačnu sumu i to praktično ne možemo izračunati. U tim slučajevima se vrši izdvajanje jednog dela signala (dobijamo novi signal

$v(n)$ ), gde je  $n$  konačan broj, i pretpostavimo da je taj deo niza dovoljno dobar predstavnik celog signala.

$$v(n) = x(n) \cdot w(n)$$

gde je  $w(n)$  **prozorska funkcija**.

Gore navedenim množenjem dobijamo da odbirke koji odgovaraju odbircima prozorske funkcije uzimamo u obzir, a ostale poništavamo (pošto ih množimo sa 0) i time praktično odsecamo deo signala.  $w(n)$  ne mora počinjati u nuli, može biti pomeren levo ili desno.

Spektar signala

$v(n)$  će biti  $V(k)$ , i on nije jednak spektru originalnog signala  $x(n)$ , koji je sad  $X(k)$ . Ako je  $V(k) = X(k)$ , to znači da uzimamo širinu prozora takva da obuhvata ceo broj perioda originalnog signala, i tada je procena spektra potpuna.

Modifikacija ulaznog signala će biti minimalna ukoliko spektar prozorske funkcije što više liči na delta impuls tj. ako mu je glavni luk što uži, a bočni lukovi što manji (to odgovara beskonačno širokom prozoru).

Pošto računamo odbirke spektra i tu može doći do grešaka! Do njih dolazi ako rezolucija nije dobra ili promašimo frekvenciju između 2 tačke, zbog čega moramo paziti da procena spektra bude što je moguće bolja.

Uticaj prozorske funkcije dovodi do

**curenja spektra** gde umesto stvarne komponente u signalu dobijamo komponente koje ne postoje u signalu ali su posledica prozorske funkcije. Zbog toga se pri spektralnoj analizi signala treba voditi računa o širini prozora i tipu prozora koji koristimo.

Curenje spektra se može izbeći samo kod periodičnih signala u kojima odaberemo ceo period ili celi broj perioda niza. Tada dobijamo stvaran spektar signala. U svim ostalim slučajevima (niz nije periodičan ili nismo uzeli celi broj perioda spektra) dolazi do curenja spektra.

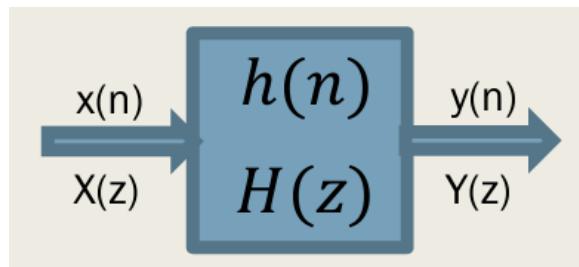
PROZORSKA FUNKCIJA	ŠIRINA GLAVNOG LUKA	SLABVLJENJE PRVOG BOČNOG LUKA [dB]	OPADANJE LUKOVA [dB / oktavi]
Pravougaona	$4\pi / N$	13.2	6
Trougaona	$8\pi / N$	26.6	12
Hanova	$8\pi / N$	31.2	18
Hemingova	$8\pi / N$	42.4	6
Blekmanova	$12\pi / N$	58	18

Najvažniji parametri koji služe za poređenje prozorskih funkcija su:

- **širina glavnog luka** – sposobnost prozorske funkcije da razdvoji bliske komponente, ako je širina prozorskog luka mala postoji šansa da DFT dobijemo to kao 2 komponente, a ako je široka, onda ih možemo dobiti samo kao jednu komponentu i time gubimo informacije
- **slabljenje bočnih lukova** – ako je malo slabljenje bočnih lukova dolazi do curenja spektra, to jest pojava dodatnih frekvencijskih komponenti koje nisu prisutne u originalnom signalu
- **brzina kojom amplitudne bočne lukove opadaju** sa porastom učestanosti

## 9. Funkcija prenosa i frekvencijski odziv diskretnih sistema

### Funkcija prenosa



$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\Y(z) &= X(z)H(z) \\H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \\y(n) &= \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)\end{aligned}$$

### Frekvencijski odziv

Ono što nas više interesuje u teoriji signala jer time povezujemo spektar signala na izlazu

sa spektrom signala na ulazu.

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$$

$|H(j\Omega)| \rightarrow$  amplitudska karakteristika  
 $\arg(H(j\Omega)) \rightarrow$  fazna karakteristika

U kontinualnom sistemu smo imali Laplasovu transformaciju, koja nam je davaла funkciju prenosa. Ako umesto

$s$  stavimo  $j\Omega$  dobijamo Furijeovu transformaciju, odnosno frekvencijski odziv.

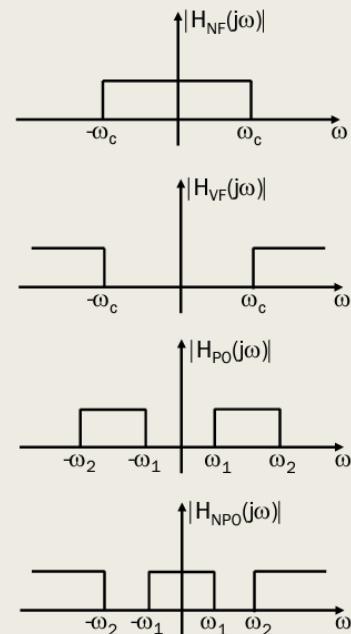
Na identičan način, u diskretnim sistemima, Z transformacija impulsnog odziva nam daje funkciju prenosa, a funkcija prenosa kod kojih je  $z = e^{j\Omega}$ , predstavlja frekvencijski odziv, a to je opet jednako Furijeovoj transformaciji impulsnog odziva.

$$H(j\Omega) = \mathcal{F}\{h(n)\} = \mathcal{Z}\{h(n)\}|_{z=e^{j\Omega}} = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

## 10. Vrste idealnih filtera i diskusija njihove ostvarljivosti

### Idealni filteri Amplitudska karakteristika

- Filter propusnik niskih učestanosti, NF filter
- $H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{za } |\omega| > \omega_c \end{cases}$
- Filter propusnik visokih učestanosti, VF filter
- $H_{VF}(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{za } |\omega| < \omega_c \\ 1 & \text{za } |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$
- Filter propusnik opsega učestanosti, PO filter
- $H_{PO}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{za } 0 < |\omega| < \omega_1 \text{ i } |\omega| > \omega_2 \end{cases}$
- Filter nepropusnik opsega učestanosti, NPO filter
- $H_{NPO}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 \leq |\omega| \leq \omega_1 \text{ i } |\omega| > \omega_2 \\ 0 & \text{za } \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \end{cases}$



Filtri su LVI sistemi čija amplitudska karakteristika frekvencijskog odziva ima vrednost 1 u nekom opsegu frekvencija, a 0 iznad tog opsega frekvencija.

U slučaju NF filtra (Low Pass) biće propuštene učestanosti od 0 do  $\omega_{gr}$ , i to bez ikakvih promena. Ono što je veće od  $\omega_{gr}$  biće odsečeno. VF filter (High Pass) propušta učestanosti od  $\omega_{gr}$  pa naviše (na slici je označen kraj opsega čisto zbog šrafiranja). PO filter (Band Pass) propušta spektar signala između dve granične učestanosti  $\omega_{gr1}$  i  $\omega_{gr2}$ . NPO filter (Band Stop) ne propušta spektar između dve granične učestanosti  $\omega_{gr1}$  i  $\omega_{gr2}$  (na slici je takođe označen kraj spektra samo zbog šrafure, nastavlja se inače).

U najvećem broju primena fazna karakteristika nije bitna, bitnija je amplitudska karakteristika. Zbog toga se obično filtri definišu prema amplitudskoj karakteristici. Ako je sistem nekauzalan on ne može da se realizuje. Zbog toga se ni idealni filtri ne mogu realizovati. Znači, idealne filtre ne možemo realizovati, ali se mogu aproksimirati dovoljno tačno da bi smo i to dobijemo nazvali nekim filterom.

### **Glavni razlozi zbog kojih idealni filteri nisu praktično realizovani:**

#### **1. Beskonačan impulsni odziv:**

- Idealni filteri zahtevaju impulsni odziv koji traje beskonačno dugo. U praksi, svi filteri imaju konačan impulsni odziv jer su implementirani pomoću konačnog broja uzoraka i operacija.

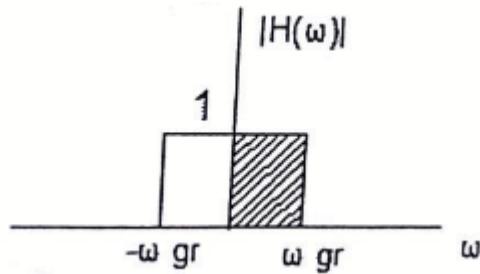
#### **2. Curenje spektra:**

- Kada se signali analiziraju pomoću diskretnih Fourierovih transformacija (DFT), ograničen broj uzoraka i prozorske funkcije uzrokuju curenje spektra. Idealni filteri bi zahtevali savršene frekvencijske karakteristike bez curenja, što nije moguće postići u diskretnom domenu.

#### **3. Realne implementacije:**

- Realni filteri su ograničeni fizičkim komponentama i tehnologijama koje se koriste za njihovu realizaciju. To uključuje ograničenu preciznost, šum i druge nelinearnosti koje utiču na performanse filtera.

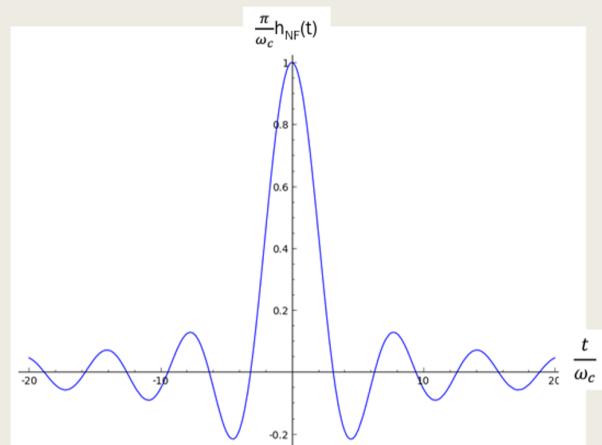
# 11. Idealni NF filter sa nultom i nenultom faznom karakteristikom



Filtri su LVI sistemi čija amplitudska karakteristika frekvencijskog odziva ima vrednost 1 u nekom opsegu frekvencija, a 0 izvan tog opsega frekvencija. U slučaju NF filtra biće propuštene učestanosti od 0 do  $\omega_c$  i to bez ikakvih promena. Ono što je veće od  $\omega_c$  biće odsečeno.

## Filter nulte fazne karakteristike

- Frekvencijski odziv:  $H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{za } |\omega| > \omega_c \end{cases}$
- Impulsni odziv:  $h_{NF}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{NF}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$
- $h_{NF}(t) = \frac{1}{2\pi jt} [e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}] = \frac{1}{\pi t} \sin(\omega_c t) \Rightarrow h_{NF}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$



Ovakav idealan NF filter ima nultu faznu karakteristiku zato što mu je frekvencijski odziv realna funkcija. Sistem koji ima ovakav impulsni odziv je nekauzalan, jer je impulsni odziv beskonačno širok. Dakle  $h(t) \neq 0$  za svako  $t < 0$ .

Ako je sistem nekauzalan on ne može da se realizuje. Zbog toga se ni idealni filtri ne mogu realizovati.

## Filter linearne fazne karakteristike

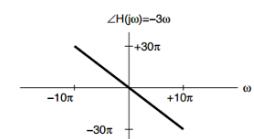
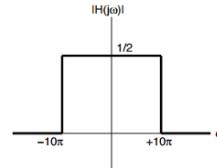
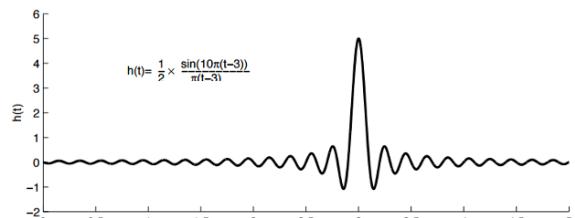
- Frekvencijski odziv:  $H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \text{za } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{za } |\omega| > \omega_c \end{cases}$

- Impulsni odziv:  $h_{NF}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin[\omega_c(t-\tau)]}{\omega_c(t-\tau)}$

- Primer:

- $H_{NF}(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\omega 3} & \text{za } |\omega| \leq 10\pi \\ 0 & \text{za } |\omega| > 10\pi \end{cases}$

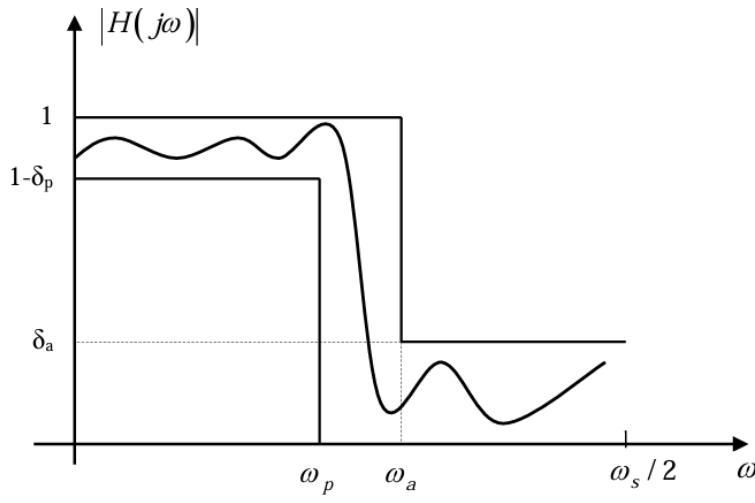
- $h(t) = \frac{10\pi}{2\pi} \cdot \frac{\sin[10\pi(t-3)]}{10\pi(t-3)}$



Idealan NF filter sa linearnom faznom karakteristikom (i dalje je idealan) podrazumeva grupno kašnjenje signala koje je isto za ceo signal – linearna faza. Dakle svaki harmonik će biti zakašnjen za identično vreme  $\tau$  sekundi. Odnosno ceo signal  $y(t)$  biće zakašnjen za  $\tau$  sekundi i neće biti izobličen.

$e^{-j\omega\tau}$  u frekvencijskom domenu predstavlja vremensko pomeranje u vremenskom domenu. Iako pomeren, i dalje ima beskonačno širok odziv pa je nekauzalan i nije ga moguće realizovati.

## 12. Analogni Batervortov NF filter



Slika 1

Gabariti su određeni sa četiri veličine:

$\omega_p$  - granična učestanost propusnog opsega,

$\omega_a$  - granična učestanost nepropusnog opsega,

$\delta_p$  - dozvoljena varijacija amplitude u propusnom opsegu i

$\delta_a$  - dozvoljena varijacija amplitude u nepropusnom opsegu.

**Gabarit filtra** je prikazan na slici, i on definiše izgled amplitudske karakteristike filtera.

Na osnovu gabarita možemo da odredimo red filtra na osnovu uslova:

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2} \leq \frac{1}{1 + \omega_p^{2N}} \leq 1 \rightarrow \text{Propusni opseg}$$

$$\frac{1}{1 + \omega_a^{2N}} \geq \frac{1}{A} \rightarrow \text{Nepropusni opseg}$$

Pri projektovanju filtra uzima se minimalni celobrojan N, koji zadovoljava obe jednačine.

**Batervortova aproksimacija** idealne amplitudske karakteristike filtra izvedena je pod pretpostavkom da je amplitudska karakteristika idealno ravno u koordinatnom pocetku. To znači da je u slučaju fje N-tog reda, prvih  $2N-1$  izvoda kvadrata amplitudske karakteristike jednakim nuli za  $w=0$ .

Batervortove aproksimacije amplitudska karakteristika je **striktno monotona u propusnom i nepropusnom opsegu**.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{a_p}{10}} - 1}$$

$$N = \frac{\log\left[\frac{10^{\frac{a_a}{10}} - 1}{\epsilon^2}\right]}{2\log\left[\frac{\omega_a}{\omega_p}\right]}$$

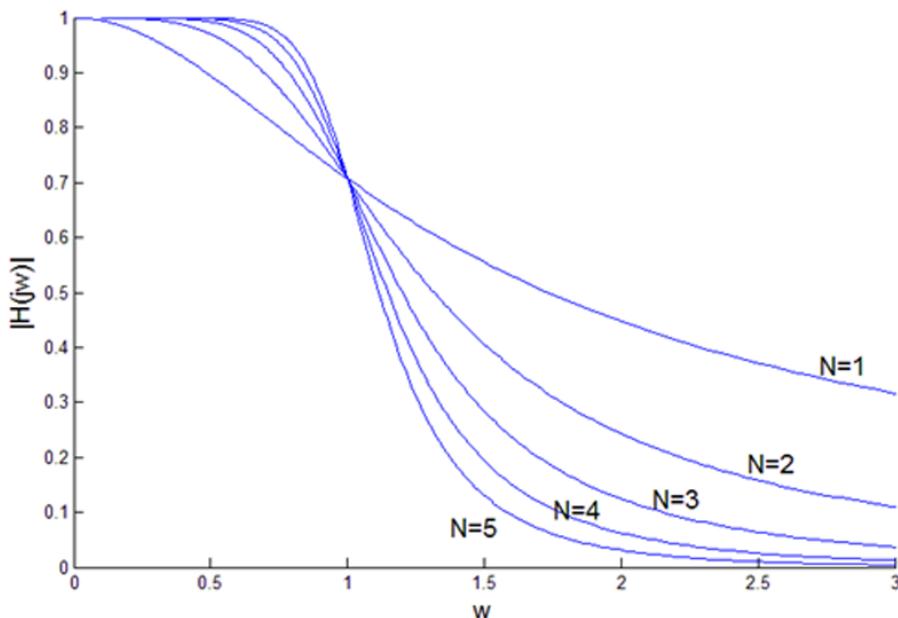
gde je  $a_p$  maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu,  $a_a$  minimalno dozvoljeno slabljenje u nepropusnom opsegu,  $N$  red filtra,  $\omega_p$  granica gaba.

Dalje, polovi  $s_k$  se dobijaju po sledećem izrazu:

$$s_k = \frac{\omega_p}{\sqrt[N]{\epsilon}} e^{j\frac{\pi(2k+N+1)}{2N}}, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

I oni su rasporedjeni po kružnici poluprečnika  $r = \frac{\omega_p}{\sqrt[N]{\epsilon}}$ . Nalaze se na jednakim rastojanjima  $\frac{\pi}{N}$

## Amplituda Batervortovog filtera



U zavisnosti od reda filtera (N) karakteristika ima oblika kao na slici. Ovo je glatka kriva čija vrednost opada sa porastom frekvencije, sto i jeste NF filter. Ova kriva je maksimalno ravna za  $\omega=0$  ima vrednost 0. Za  $\omega=1$  imamo slabljenje 3db, odnosno pojačanje je  $1/\sqrt{2}$ .

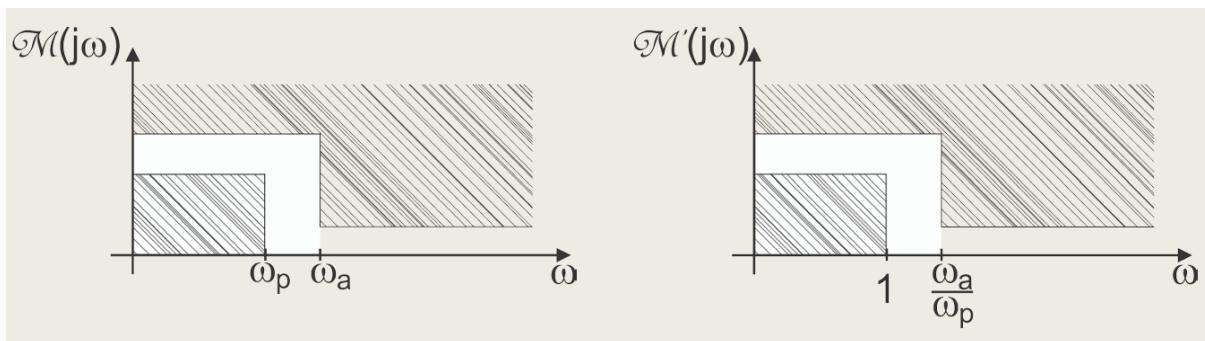
Povećanjem reda filtra ova kriva postaje strmija i prelazna zona je uža. Samim tim dobijamo veću selektivnost filtra. **Selektivnost filtra** je sposobnost filtra da razlikuje dve bliske učestanosti. Idealan filter ima beskonačno veliku selektivnost.

## 13. Frekvencijske transformacije analognih filtara

Metode projektovanja funkcije prenosa analognog filtera su definisane za NF filter jedinične granične učestanosti propusnog opsega. Funkcija prenosa drugih tipova filtara (VF, PO, NPO) se mogu izvesti iz funkcije prenosa NF filtra primenom frekvencijskih transformacija. Frekvencijske transformacije specifikaciju realnog NF, VF, PO ili NPO filtera transformišu u specifikaciju odgovarajućeg NF prototipa. **NF prototip je NF filter jedinične granične učestanosti propusnog opsega.**

### $\text{NF} \rightarrow \text{NF prototip}$ transformacija

NF prototip filter ima  $\omega_{\text{gr}}=1$ . Za NF filter koji ima graničnu učestanost različito od 1, vrši se normalizacija tako što se sve učestanosti dele sa  $\omega_p$



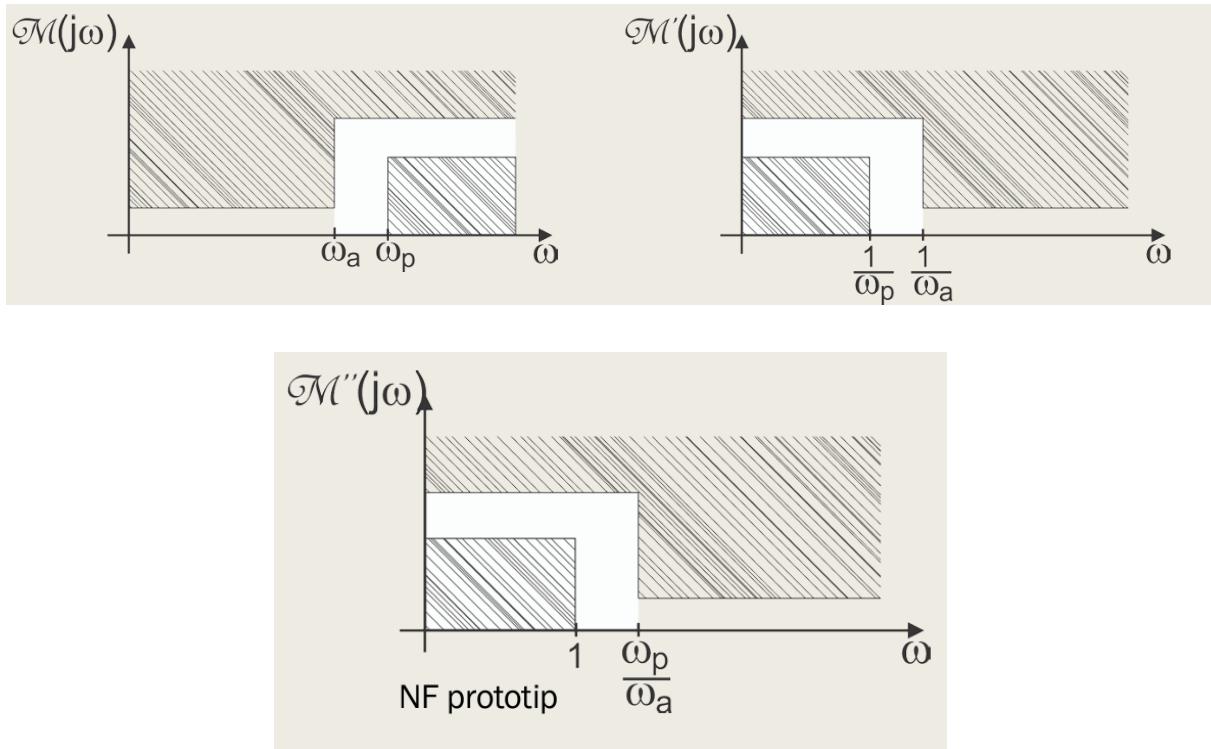
Učestanosti  $\omega_p$  i  $\omega_a$  smo podelili sa  $\omega_p$  i dobijamo kao rezultat 1 i  $\omega_a/\omega_p$  (gabarit je ostao isti samo smo učestanost promenili). Ovo dobijeno je *gabarit filtra prototipa*.

Kada se nađe funkcija prenosa koji zadovoljava gabarit vrši se denormalizacija, tako što se vrednosti polova množe sa  $\omega_p$ . Na ovaj način se od funkcije prenosa filtra prototipa, dobije funkcija prenosa stvarnog filtra

- Normalizacija: Sve frekvencije na gabaritu se podele sa  $\omega_p$  i dobija se NF prototip

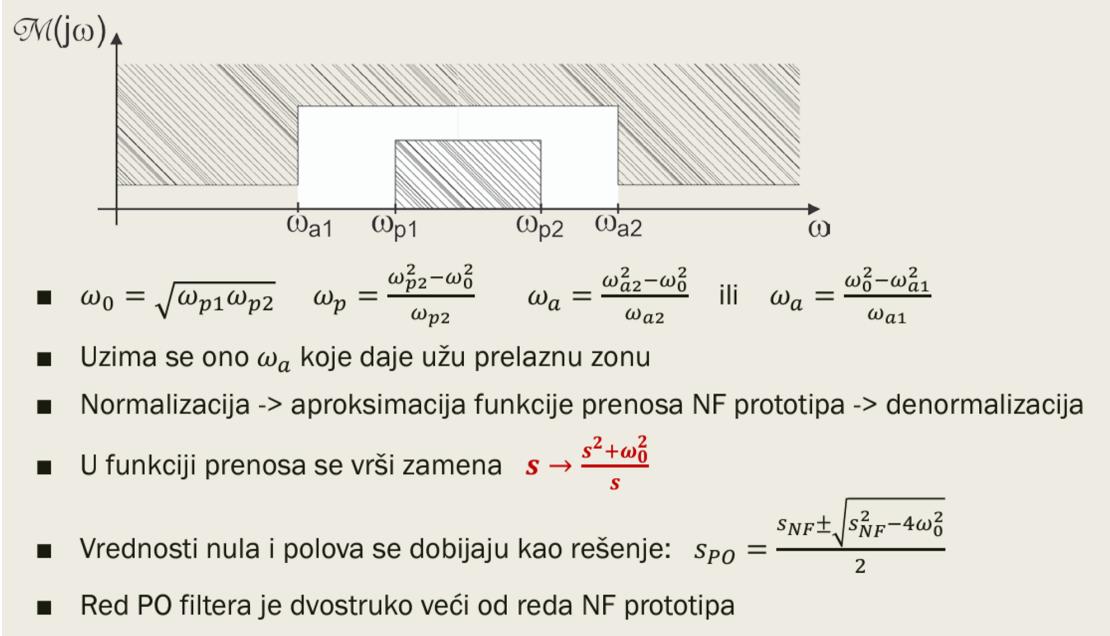
- Denormalizacija: Nakon aproksimacije funkcije prenosa u funkciji prenosa vrši se smena:  $s \rightarrow s \frac{\omega_p}{\omega_{p1}}$
- Rezultat je funkcija prenosa NF filtra željenog gabarita

## VF → NF prototip transformacija



- Aproksimacija funkcija prenosa NF prototipa
- Denormalizacija učestanosti:  $s \rightarrow \frac{s}{\omega_p}$
- U tako dobijenoj funkciji prenosa izvrši se smena:  $s \rightarrow \frac{1}{s}$

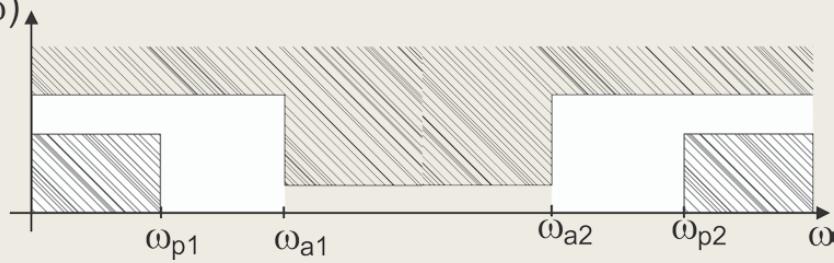
## PO → NF prototip



1. Vrši se prelazak na odgovarajući NF gabarit. Računaju se  $\omega_0, \omega_p, \omega_a$ .  $\omega_0$  je **centralna učestanost**.  
Imamo dve vrednosti  $\omega_a$ , pri čemu se uzima ono  $\omega_a$  koje daje užu prelaznu zonu (minimum između 2 apsolutne vrednosti)
2. Vrši se NF  $\rightarrow$  NF transformacija (učestanosti se dele sa  $\omega_p$ ). Tako dobijamo NF filter prototip.
3. Određivanje funkcije prenosa koja zadovoljava NF prototip.
4. Vrši se denormalizacija množenjem polova sa  $\omega_p$ .
5. U dobijenoj funkciji prenosa zamenjujemo promenljivu S sa  $\frac{s^2 + \omega_0^2}{s}$

## NPO $\rightarrow$ NF prototip

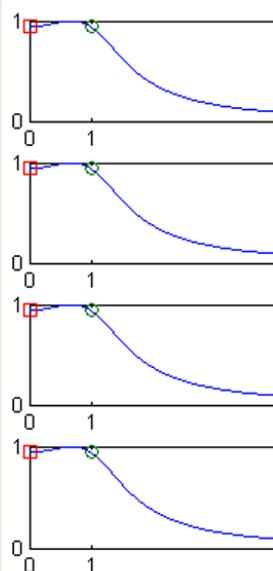
$$\mathcal{M}(j\omega)$$



- $\omega_0 = \sqrt{\omega_{a1}\omega_{a2}}$     $\omega_p = \frac{\omega_{a1}}{\omega_0^2 - \omega_{a1}^2}$     $\omega_a = \frac{\omega_{p1}}{\omega_0^2 - \omega_{p1}^2}$  ili  $\omega_a = \frac{\omega_{p2}}{\omega_{p2}^2 - \omega_0^2}$
- Uzima se ono  $\omega_a$  koje daje užu prelaznu zonu
- Normalizacija -> aproksimacija funkcije prenosa NF prototipa -> denormalizacija
- U funkciji prenosa se vrši zamena  $s \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
- Vrednosti nula i polova se dobijaju kao rešenje:  $s_{NPO} = \frac{1/s_{NF} \pm \sqrt{1/s_{NF}^2 - 4\omega_0^2}}{2}$
- Red NPO filtera je dvostruko veći od reda NF prototipa

Praktično identično kao prethodno. Određujemo opet  $\omega_0$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_a$ . Sad smo dobili odgovarajući gabarit NF filtra, vrsimo normalizaciju deljenjem sa  $\omega$  i dobijamo NF prototip. Tražimo funkciju prenosa NF prototipa. Nakon toga se vrsi denormalizacija učestanosti i promenljiva  $S$  se zamenjuje sa  $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

## Frekvencijske transformacije sumarno

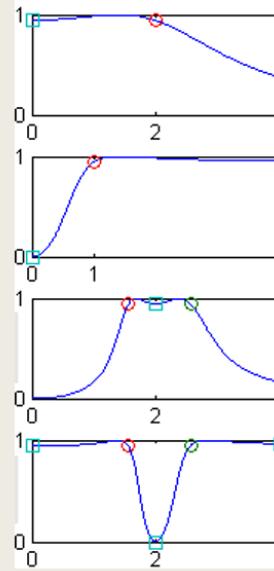


$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_p}$$

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{s}$$

$$s \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$



$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{a1}\omega_{a2}}$$

Prototip je isti za sve tipove filtra, na kraju se razlikuje samo smena koja se uvrštava u dobijenu aproksimaciju.

## 14. Bilinearna transformacija u projektovanju IIR digitalnih filtara

Ako želimo da isprojektujemo neki IIR digitalni filter sa željenim karakteristikama, isprojektujemo analogni filter i transformacijom tu funkciju prenosa transformišemo u funkciju prenosa diskretnom sistemu. Impulsno invarijantna transformacija je sa jedne strane dobra jer je transformacija učestanosti linearna, ali zbog činjenice da nemaju ograničen impulsni odziv dolazi do preklapanja frekvencijskog odziva prilikom diskretizacije.

Zato se bilinearnom **izbegava preklapanje frekvencijskog odziva pri diskretizaciji** kao kod impulsno invarijantne transformacije. Amplitudska karakteristika digitalnog IIR filtra je praktično identična kao i kod analognog filtra.

Dolazi do nelinearnog sabijanja frekvencija imaginarna osa  $-\infty < \omega < \infty$  preslikava se u segment diskretnih učestanosti  $-\pi < \Omega < \pi$ . Zbog toga dolazi do **faznog izoblicenja (nelinearna fazna karakteristika)**. Da bi sistem imao linearu faznu karakteristiku on mora imati simetričan impulsni odziv u odnosu na neku centralnu tačku

$$\text{Bilinearna transformacija: } s = \frac{2}{T_o} \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]$$

Odlična amplitudska karakteristika, ali nelinearna fazna karakteristika. Ukoliko se zahteva očuvanje fazne karakteristike treba koristiti impulsno invarijantnu transformaciju umesto bilinearne. Takodje bilinearna transformacija **može se koristiti kod bilo kog tipa filtra** a ne samo kod NF I PO

### Ako je zadata specifikacija - gabarit digitalnog filtera: $\Omega_p$ i $\Omega_a$

- Za svaku diskretnu učestanost  $\Omega_i$  iz specifikacije se odredi ekvivalentna učestanost analognog prototipa filtera  $\omega_i$
- Projektuje se analogni prototip sa ovako zadatom specifikacijom i određuje se njegova funkcija prenosa
- Primenom bilinearne transformacije dobija se funkcija prenosa digitalnog filtera

- Granične učestanosti će biti na pozicijama koje su definisane u gabaritu digitalnog filtera

### Ako je zadata specifikacija - gabarit analognog filtera: $\omega_p$ i $\omega_a$

- Određuje se funkcija prenosa analognog prototipa  $H_a(s)$
- Bilinearna transformacija daje funkciju prenosa digitalnog filtera, međutim ne važi ista veza između kontinualnih i diskretnih učestanosti
- Rešenje: pre bilinearne transformacije izvršiti NF-NF transformaciju
- $s \rightarrow s \frac{\omega_p}{\omega_{p1}}$
- Nad tako dobijenom funkcijom prenosa primeni se bilinearna transformacija

## 15. Funkcija prenosa linearne faze i veza oblika impulsnog odziva sa linearnom faznom karakteristikom

Sistem koji ima linearnu faznu karakteristiku jeste idealan NF filter, kod kojeg je impulsni odziv pomeren u vremenu.



duze pitanje nego odgovor jbt

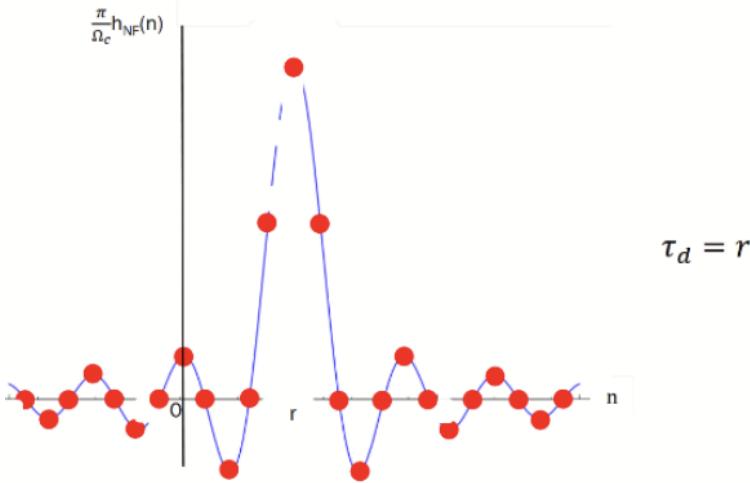
$$\text{Frekvencijski odziv: } H_{NF}(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega r} & \text{za } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{za } \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Impulsni odziv: } h_{NF}(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{NF}(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin[\Omega_c(n-r)]}{\Omega_c(n-r)}$$

$\tau d$ (odnosno  $r$ ) je konstanta i predstavlja pomeraj impulsnog odziva u desno za  $n$  odbiraka. Fazna

karakteristika je proporcionalna učestanosti, zbog toga se zove linearna fazna karakteristika.

Filtar koji ima ovakvu karakteristiku nema faznog izobličenja, i on ima linearnu faznu karakteristiku. Impulsni odziv tok idealnog NF filtra je beskonačno dugačak (i diskretan je). Impulsni odziv je simetričan u odnosu na tačku  $r$ .



Da bi sistem imao **linearnu faznu karakteristiku** potrebni uslovi su:

- Ukoliko je njegov impulsni odziv **simetričan** u odnosu na središnju tačku
- Ukoliko je njegov impulsni odziv **antisimetričan** u odnosu na središnju tačku. U ovom slučaju postoji i dodatni pomeraj od  $\pm\pi/2$ .

## Impulsni odziv FIR sistema linearne fazne karakteristike

Kad su  $M$  celi ili ne ili  $N$  parni ili ne i da li je impulsni odziv simetričan ili antisimetričan. Tako se dobiju 4 varijacije pogodne za različite tipove filtara.

- Dužina odziva  $N$  je neparan broj i simetričan oko  $M = \frac{N-1}{2}$ :
  - Kašnjenje filtera  $M$  je ceo broj
  - Pogodan za sve tipove filtera (NF, VF, PO, NPO)
- Dužina odziva  $N$  je paran broj i simetričan oko  $M = \frac{N-1}{2}$ :
  - Kašnjenje filtera  $M$  nije ceo broj
  - Pogodan za NF i PO filtere, ne može se koristiti za VF i NPO
- Dužina odziva  $N$  je neparan broj i antisimetričan oko  $M = \frac{N-1}{2}$ :
  - Kašnjenje filtera  $M$  je ceo broj
  - Pogodan samo za PO filtere
- Dužina odziva  $N$  je paran broj i antisimetričan oko  $M = \frac{N-1}{2}$ :
  - Kašnjenje filtera  $M$  nije ceo broj

- Pogodan za VF i PO filtere, ne može se koristiti za NF i NPO

## 16. Digitalni FIR filri opšte karakteristike

To su filtri koji se realizuju pomoću **nerekurzivnih diferencnim jednačinama**.

Za FIR filtre ne postoji odgovarajući analogni prototip. Ako analogni filter transformišemo bilinearnom transformacijom, dobijamo IIR filter.

Nerekurzivan sistem opisan diferencnom jednacinaom

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

Funkcija prenosa:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$$

*Funkcija prenosa se ne može dobiti transformacijom analognog prototipa filtera jer odgovarajući analogni prototip ne postoji.* FIR filteri se projektuju direktnom aproksimacijom idealnih filtera. Osnovna prednost je linearna fazna karakteristika. FIR filter koji ima uporedivu amplitudsku karakteristiku kao IIR filter mora biti znatno višeg reda, ali može da obezbedi linearu faznu karakteristiku.

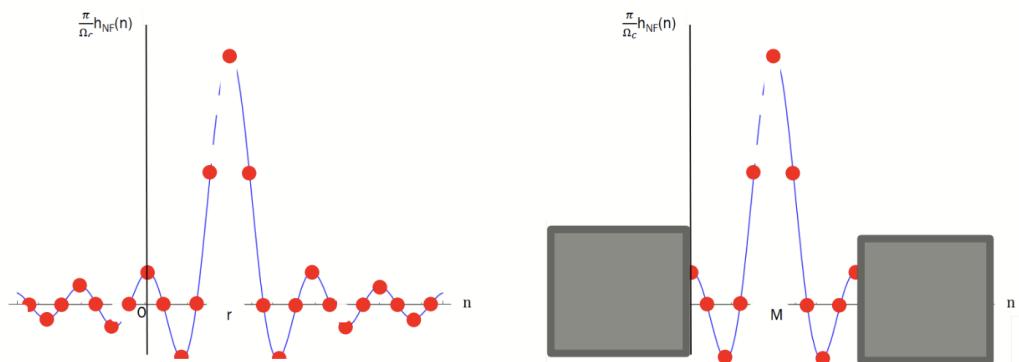
Dobra osobina i prednost u odnosu na IIR filtere im je sto imaju linearu faznu karakteristiku, čime se ostvaruje konstantno grupno kašnjenje signala. Što se amplitudske karakteristike tiče, da bi FIR filter zadobio iste gobarite kao i IIR filter, filter mora biti znatno višeg reda pa je kompleksniji za realizaciju.

FIR filter može da ima simetričan ili antisimetričan impulsni odziv. Taj impulsni odziv mora biti ograničen i pomeren, tako da kreće od nule. Kašnjenje signala jednak je sredini tog impulsnog odziva.

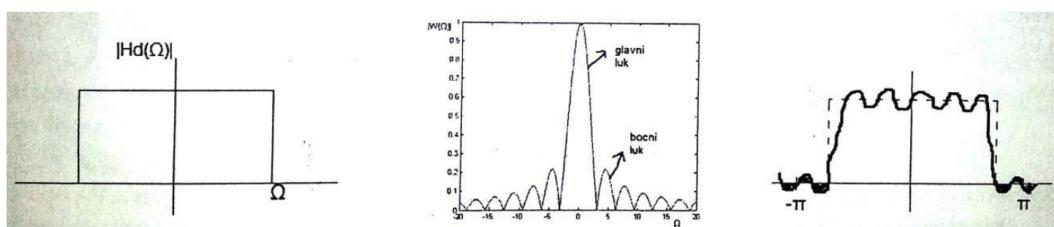
## 17. Projektovanje FIR filtra primenom prozorske funkcije

Frekvencijski odziv željenog idealnog filtera ima beskonačan **nekauzalan impulsni odziv**. On se može učiniti kauzalnim primenom prozorske funkcije

ukoliko se ograniči sa  $N$  odbiraka i zakasni za  $M = \frac{N-1}{2}$ . Zbog primene prozorske funkcije i bočnih lukova dolazi do propusnosti u nepropusnom opsegu, a što je glavni luk uži to je veća selektivnost tako da povećanje  $N$  povećava selektivnost, ali ne poboljšava problem propuštanja u nepropusnom opsegu.

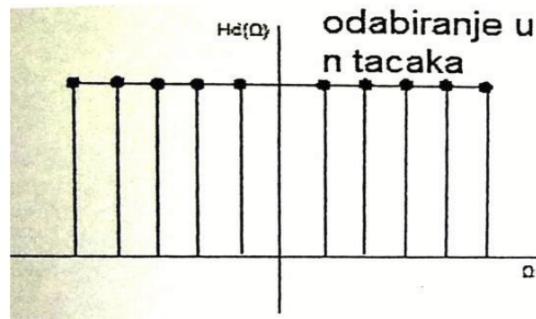


Ideja ove metode projektovanja je da se impulsni odziv ograniči primenom prozorske funkcije. Znaci da jednostavno odsečemo deo tog filtra i pomerimo taj impulsni odziv, kako bi dobili kauzalan sistem. Tada je impulsni odziv kauzalnog filtera:  $h(n) = hd(n - M)w(n)$  gde je  $w(n)$  prozorska funkcija.

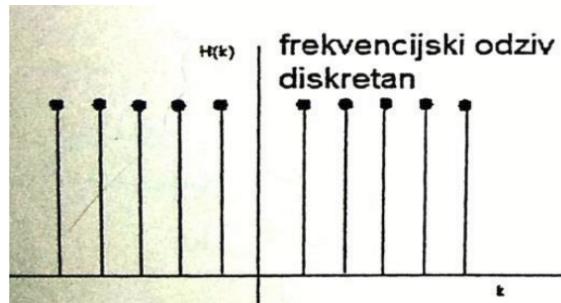


Prva slika je frekvencijski odziv filtra, druga predstavlja frekvencijski odziv prozorske funkcije, a treća je konvolucija ta dva signala. Ovakav impulsni odziv neće imati frekvencijski odziv idealnog filtra, nego će to biti frekvencijski odziv kao na trećoj slici. Razlog za to je **postojanje bočnih lukova** u prozorskoj funkciji.

## 18. Projektovanje FIR filtra zasnovano na frekvencijskom odabiranju



Polazi se od  $H_d(j\Omega)$  –frekvencijski odziv idealnog filtra koji želimo da aproksimiramo, koji izgleda kao na slici. Potom se frekvencijski odziv odabira u  $n$  tačaka. Ovo ima konačan broj tačaka dakle kauzalan je.



Ako uradimo IDFT nad ovim signalom u  $N$  tačaka, dobićemo impulsni odziv koji je takođe dugačak  $N$  tačaka. To u stvari predstavlja impulsni odziv našeg željenog FIR filtra.

Ukoliko je dat frekvencijski odziv željenog idealnog filtera  $H_d(j\Omega)$ , i ukoliko se vrši odabiranje odziva u  $N$  tačaka dobiće se DFT  $H(k) = H_d(j\Omega)|\Omega = 2\pi \frac{k}{N}, k = 0, 1, \dots, N - 1$  gde je IDFT  $h(n)$  zapravo impulsni odziv FIR sistema. Odziv željenog sistema  $h_d(n)$  je beskonačan a dobijenog  $h(n)$  konačan tako da je dobijen sistem samo aproksimacija.

$H(j\Omega)$  će se podudarati sa  $H_d(j\Omega)$  samo u tačkama odabiranja  $\Omega = 2\pi \frac{k}{N}$  između se samo aproksimira.

Ovim procesom dobija se sistem sa zadovoljavajućom karakteristikom u propusnom opsegu, ali **malim slabljenjem u nepropusnom opsegu**, čak ispod 20dB. Rešenje je da se ne aproksimira idealan filter već filter sa nenultom prelaznom zonom

Generalno, FIR filtri imaju lošije karakteristike od IIR filtara, osim linearne fazne karakteristike. Amplitudska karakteristika je daleko bolja kod IIR filtra, jednostavniji su za realizaciju i u principu se najviše koriste