Stabilnost diskretnih sistema

Anja Buljević
Jelena Bulatović

1 *Stabilnost diskretnih sistema*

- Sistem je stabilan ako prelazni režim iščezava tokom vremena.
- Za analizu stabilnosti postoje razni algebarski kriterijumi (Rautov, Jurijev), kao i grafo-analitički (Nikvistov kriterijum).
- Digitalni sistem je stabilan ako i samo ako za sve korene karakterističnog polinoma važi $|z_k| < 1$.

Za ispitivanje stabilnosti digitalnih sistema koristićemo Jurijev kriterijum.

Napomena: **Diskretni sistem** je **stabilan** ukoliko se svi njegovi polovi nalaze unutar jediničnog kruga; **nestabilan** je ako se bar jedan pol nalazi van jediničnog kruga ili ima bar jedan višestruki pol na jediničnoj kružnici, a **granično stabilan** je ako se konačan broj jednostrukih polova nalazi na jediničnoj kružnici , dok ostali polovi leže unutar jediničnog kruga.
Kontinualni sistem je **stabilan** ukoliko se svi njegovi polovi nalaze u levoj poluravni s-ravni; **nestabilan** je ako se bar jedan pol nalazi u desnoj poluravni s-ravni, ili ima makar jedan višestruki pol na imaginarnoj osi.

Primer 1. Odrediti stabilnost sistema ako su dati sledeci karakteristični polinomi:

a) $f(z) = (z - 0.8)(z + 0.2)^2$
Rešenje:
Polovi su $z_1 = 0.8$, $z_{2,3} = -0.2$. Sva tri pola se nalaze unutar jediničnog kruga, pa je sistem **stabilan**.

b) $f(z) = (z + 0.3)(z - 0.9)(z + 1.2)$
Rešenje:
Pol $z_3 = -1.2$ se nalazi izvan jediničnog kruga, pa je sistem **nestabilan**.

c) $f(s) = (s + 2)(s + 0.3)^2$
Rešenje:
Polovi: $s_1 = -2, s_{2,3} = -0.3$ se nalaze u levoj poluravni, pa je sistem **stabilan**.

d) $f(z) = (z - 1)(z + 0.4)^2$
Rešenje:
Polovi $z_{1,2} = -0.4$ se nalaze unutar jediničnog kruga, a pol $z_3 = 1$ se nalazi na samoj jediničnoj kružnici, pa je sistem **granično stabilan**.

Zadaci:

Za zadatke koji slede pogledati Jurijev kriterijum u skripti sa predavanja.

1. Dat je sistem čiji je karakteristični polinom $f(z) = (-z^2 + az + b)(z + 0.3)^5$. U ravni parametara (a, b) odrediti oblast stabilnosti sistema.

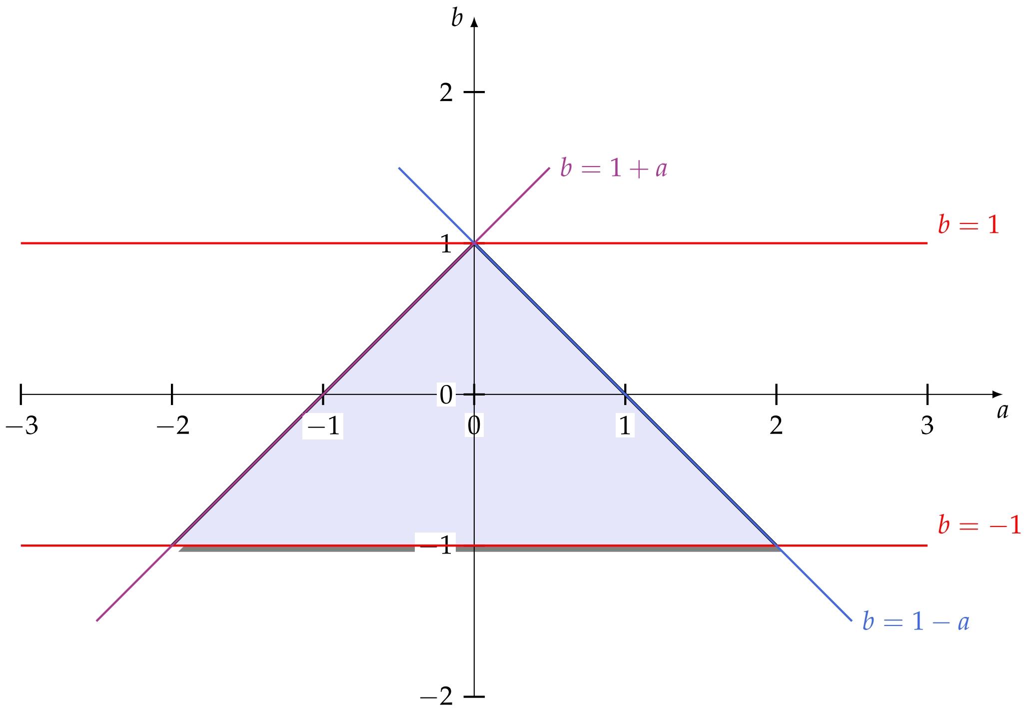
   Rešenje:

	z^0	z^1	z^2
1	b	a	-1

$(z + 0.3)^5$ je samo po sebi stabilno, pa nema potrebe da njega razmatramo.

   Uslovi stabilnosti:

   1) $f(1) > 0 \implies -1 + a + b > 0 \implies b > -a + 1$
   2) $(-1)^2 f(-1) > 0 \implies -1 - a + b > 0 \implies b > a + 1$
   3) $|b| < 1 \implies -1 < b < 1$



2. Dat je sistem čiji je karakteristični polinom $f(z) = (z^3 + az + b)$. U ravni parametara (a, b) odrediti oblast stabilnosti sistema.

   Rešenje:

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	b	a	0	1
2	1	0	a	b
3	M_0	M_1	M_2	

$$M_0 = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b^2 - 1$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = ab$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

   Uslovi stabilnosti:

1) $f(1) > 0 \implies 1 + a + b > 0 \implies b > -a - 1$

2) $(-1)^3 f(-1) > 0 \implies -(-1 - a + b) > 0 \implies b < a + 1$

3) $|b| < 1$

4) $|M_0| > |M_2| \implies |b^2 - 1| > |-a|$

$b^2 > 1$ se kosi sa trećim uslovom stabilnosti koji kaže $|b| < 1$.

i.

$$\begin{aligned} b^2 - 1 > 0 \qquad &\wedge \qquad -a > 0 \\ b^2 > 1 \qquad &\perp \end{aligned}$$

ii.

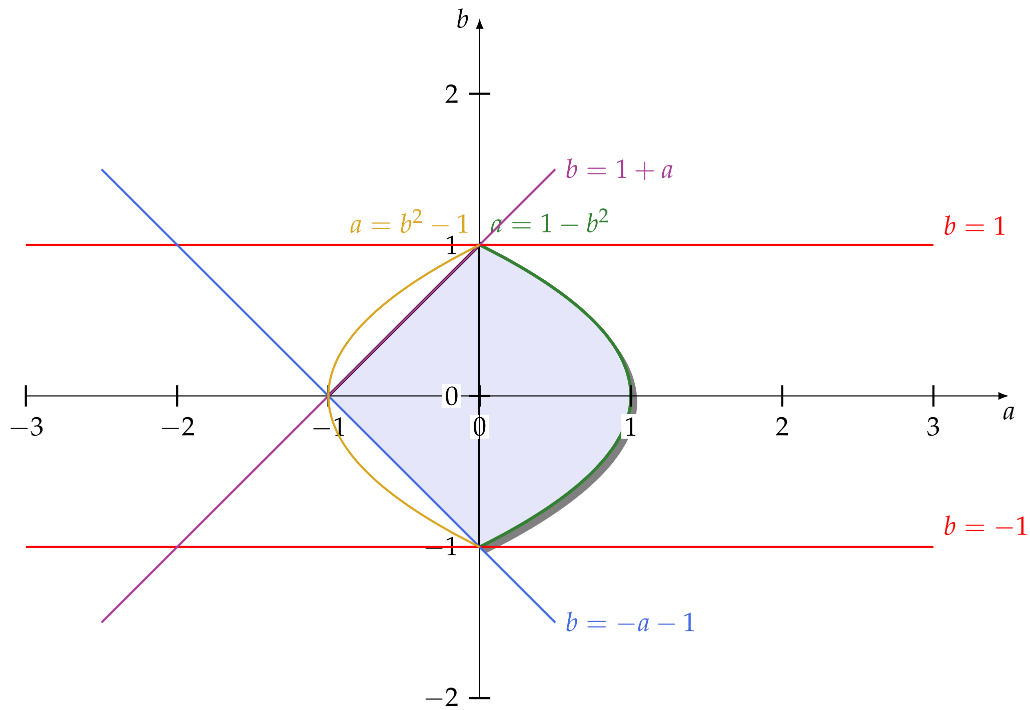
$$\begin{aligned} b^2 - 1 > 0 \qquad &\wedge \qquad -a < 0 \\ b^2 > 1 \qquad &\perp \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} &1 - b^2 > |a| \qquad \wedge \qquad a > 0 \\ &1 - b^2 > a \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} &1 - b^2 > |a| \qquad \wedge \qquad a < 0 \\ &1 - b^2 > -a \\ &b^2 - 1 < a \end{aligned}$$



3. Funkcija prenosa sistema je $G(z) = \frac{1}{z^3+az^2+b}$ U ravni parametara (a, b) odrediti oblast stabilnosti sistema.

Rešenje:

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	b	0	a	1
2	1	a	0	b
3	M_0	M_1	M_2	

$$M_0 = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b^2 - 1$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = ab$$

Uslovi stabilnosti:

1) $f(1) > 0 \implies 1 + a + b > 0$

$$b > -a - 1 \tag{1}$$

2) $(-1)^3 f(-1) > 0 \implies -(-1 + a + b) > 0$

$$b < 1 - a \tag{2}$$

3) $|b| < 1 \implies -1 < b < 1$

4) $|M_0| > |M_2| \implies |b^2 - 1| > |ab|$

$b^2 > 1$ se kosi sa trećim uslovom stabilnosti koji kaže $|b| < 1$.

i.

$$\begin{array}{ccc} b^2 - 1 > 0 & \wedge & ab > 0 \\ b^2 > 1 & \perp & \end{array}$$

ii.

$$b^2 - 1 > 0 \qquad \wedge \qquad ab < 0$$
$$b^2 > 1 \qquad \perp$$

iii.

$$b^2 - 1 < 0 \qquad \wedge \qquad ab > 0$$
$$|b| < 1 \qquad \wedge \qquad sgn(a) = sgn(b)$$

A. $b \in (0, 1) \qquad \wedge \qquad a > 0$

$$-b^2 + 1 > ab$$

$$a < \frac{1}{b} - b \tag{3}$$

B. $b \in (-1, 0) \qquad \wedge \qquad a < 0$

$$-b^2 + 1 > ab$$

$$a < \frac{1}{b} - b \tag{4}$$

iv.

$$b^2 - 1 < 0 \qquad \wedge \qquad ab < 0$$
$$|b| < 1 \qquad \wedge \qquad sgn(a) \neq sgn(b)$$

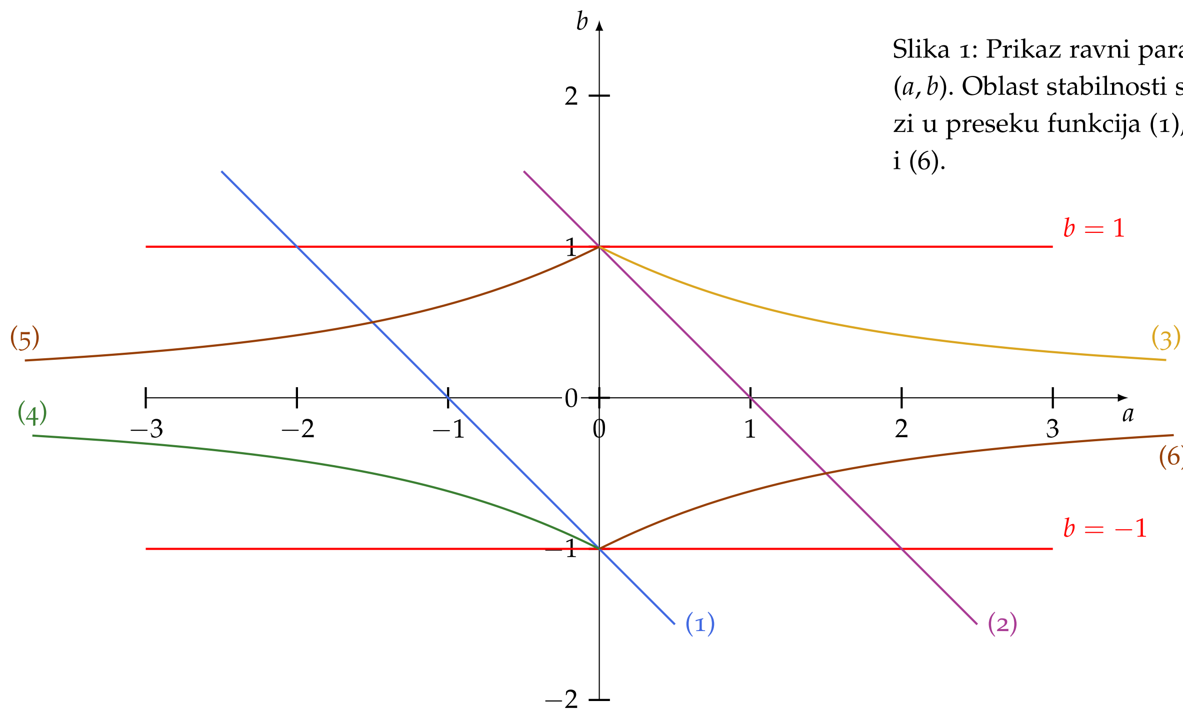
A. $b \in (0, 1) \qquad \wedge \qquad a < 0$

$$-b^2 + 1 > -ab$$

$$a > \frac{1}{b} - b \tag{5}$$

B. $b \in (-1, 0) \qquad \wedge \qquad a > 0$

$$a > \frac{1}{b} - b \tag{6}$$



Slika 1: Prikaz ravni parametara (a, b). Oblast stabilnosti se nalazi u preseku funkcija (1), (2), (5) i (6).