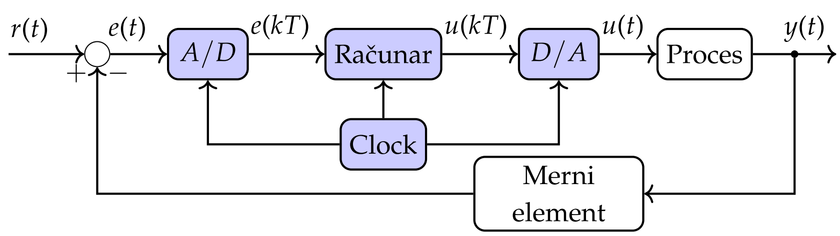
Diskretizacija matematičkog modela u prostoru stanja

Zoran D. Jeličić
Mirna N. Kapetina
28. maj 2020.

1 Matematički model u prostoru stanja

Počećemo ovo poglavlje podsećanjem na strukturu digitalnog upravljačkog sistema, koja je prikazana na slici 1. Do sada smo uspešno matematički opisali sve elemente ovog sistema, uz ograničenje da smo razmatrali samo *procese*, koji se modeluju funkcijom prenosa. Čitaocima je dobro poznato da je primena funkcije prenosa ograničena na sisteme sa malim brojem ulaza i izlaza i nultim početnim uslovima. [1] Međutim u velikom broju slučajeva za opisivanje složenije dinamike *procesa*, koristi se dobro poznata forma, koje se naziva *matematički model u prostoru stanja*.



Slika 1: Shema digitalnog upravljačkog sistema

Linearni vremenski nepromenjivi, kontinualni sistem u prostoru stanja, možemo opisati sledećim sistemom jednačina [2]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\ , \tag{2}$$

gde je $\mathbf{x}$ vektor stanja dimenzije n, $\mathbf{u}$ je vektor ulaza (upravljanja) dimenzije r, a $\mathbf{y}$ je vektor izlaza dimenzije m. Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ nazvali smo matrice stanja, ulaza, izlaza i direktnog prelaza[3] respektivno, sve pod pretpostavkom da su dimenzije matrica usaglašene sa dimenzijama vektora.[4]

Kao što je poznato, digitalni upravljači uređaj šalje vrednost upravljačkog signala u taktu frekvencije odabiranja, a mi to kolokvijalno kažemo „upravljački uređaj vidi” *proces* u trenucima odabiranja.

[1] Funkcija prenosa se koristi da matematički opiše linearne, vremenski nepromenjive sisteme, po pravilu sa jednim ulazom i jednim izlazom.

[2] Koncept matematičkog modela u prostoru stanja je opštiji od izloženog, koji se odnosi na linerane, vremenski nepromenjive sisteme. Tako na primer u studiji nelineranih sistema, jednačine prostora stanja se mogu zapisati kao

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Sa druge strane, linearni vremski promenjivi sistemi navode se u sledećoj formi

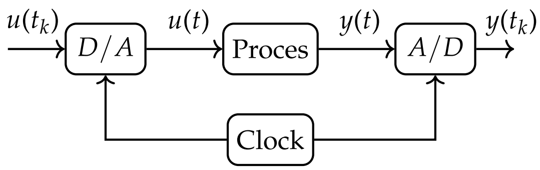
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\ ,$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\ ,$$

Našu studiju, ograničićemo na navedene linearne, vremenski nepromenjive sisteme, uz neka uopštenja koja se mogu primeniti i na nelinearne, odnosno vremsnki promenjive sisteme.

[3] Matrica $\mathbf{D}$ postoji, ako postoji direktan uticaj ulaza na izlaz, što je ipak retko. U literaturi ova matrica se zove (eng.*direct feedthrough matrix*, a koriste sa razni prevodi: izlazno-ulazna matrica, matrica direktnog uticaja ulaza na izlaz i sl.

[4] Obratite pažnju da su sve matrične i/ili vektorske veličine obeležene **masnim** ili **bold** fontom, npr $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Shematski, kako *proces* izgleda iz perspektive upravljačkog uređaja predstavili smo na slici 2. U ovom slučaju se nismo ograničili na vreme odabriranja u ekvidistantnim vremenskim trenucima kT, već smo diskretne vremenske trenutke posmatrali nešto opštije i predstavili ih kao t_k.



Slika 2: Shema kontinualnog procesa u prisustvu A/D i D/A konvertora

Zakonomernost na koju želimo da ukažemo, a predstavljena je na slici 2 je sledeća. Veza ulaza i izlaza kontinualnog *procesa* je data jednačinama (1) i (2), dinamiku izlaza upravljački uređaj vidi samo u diskretnim vremenskim trenucima $y(t_k)$, a u istom taktu se menja vrednost ulazne promenenjive $u(t_k)$. Odnosno, sa stanovišta digitalnog regulatora nama treba funkcionalna veza između diskretnog ulaza $u(t_k)$ i diskretnog izlaza $y(t_k)$, koja respektuje dinamiku procesa datu jednačinama (1) i (2). Ova veza diskretnih ulaza i izlaza, uz poštovanje dinamike kontinualnog sistema predstavlja matematički model u prostoru stanja diskretnog sistema, koja se zapisuje na sledeći način

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi x}(t_k) + \mathbf{\Gamma u}(t_k) \tag{3}$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{Cx}(t_k) + \mathbf{Du}(t_k)\ . \tag{4}$$

Digitalni ekvivalent dat jednačinama (3) i (4) naziva se i stroboskopski model[5] (engl. *stroboscopic*) , jer daje vezu između sistemskih promenljivih samo u trenucima odabiranja. Primetite da je jednačina (4) u istoj formi kao odgovarajući kontinualni izraz (2), što je i očekivano, jer bez prisustva operatora diferenciranja/integracije, diskretizacija se svodi na „smenu” $t = t_k$. Iz ranijih postupaka pronalaženja digitalnih ekvivalenata, jasno je da se zaista menja izraz, koji ukazuje na promenu vektora stanja dat diferencijalnim jednačinama (1), koje se transformišu u oblik (3). Uspostavljanje veze između izraza (1) i (3) jeste naš osnovni zadatak u poglavlju koje sledi.

[5] Uvereni smo da su se čitaoci već upoznali sa strobskopskim efektima, koji svetlosno i zvučno prate svaku iole pristojnu: techno, trance, house, progressive, d'n'b žurku. Tako na primer, stroboskop (poznatiji u (anglo)srpskom kao strob, vidi pesmu iz devedsetih „Petak”) je uređaj za cepkanje (diskretizaciju) svetla. Dok efekat koji DJ-evi primenjuju prilikom puštanja muzike i nazivaju strobing je cepkanje zvuka, ručno ili automatski. U kombinaciji sa scratchingom (opet (anglo)srpski) strobing lako postaje alijas osnovnog kontinualnog signala.
Zbog čudne upotrebe engleskih termina, čitaocu možemo preporučiti i knjigu: Du yu speak anglosrpski? Rečnik novijih anglicizama, prof. Vere Vasić sa saradnicima

2 *Diskretizacija matematičkog modela u prostoru stanja*

U okviru ovog poglavlja namera nam je da izvedemo digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja. Odnosno, da nađemo funkcionalnu vezu između diskretnog izlaza $y(t_k)$ i diskretnog ulaza $u(t_k)$, sa slike 2, ako je proces opisan matematičkim modelom u prostoru stanja, tačnije jednačinama (1) i (2). Digitalni ekvivalent očekujemo da bude u formi diferencnih jednačina (3) i (4). Kao u svakom matematičkom modelovanju i/ili izvođenju digitalnog ekvivalenta, usvojili smo određene pretpostavke. Pretpostavili smo da se A/D konvertor modeluje kao idealni odabirač, a da se D/A konvertor može opisati kao kolo zadrške nultog reda. Izvođenje digitalnog ekvivalenta matematičkog modela u prostoru stanja podrazumeva poznavanje teorije kontinualnih sistema automatskog upravljanja. Pretpostavljamo da je čitalac upoznat sa opštim principima i matematičkim alatima koji prate studiju kontinualnih sistema. Međutim, radi potpunosti i lakšeg praćenja teksta u poglavlju koje sledi opisaćemo osnovne formalizme kontinualnih matematičkih modela u prostoru stanja uz izvinjenje čitaocima, ako smo ih opteretili gradivom i izneli za njih već dobro poznate činjenice.

2.1 *Kretanje kontinualnih procesa u prostoru stanja*

Pod pojmom kretanja procesa u prostoru stanja podrazumevamo određivanje svih vrednosti vektora stanja $\mathbf{x}(t)$ u svakom vremenskom trenutku, a na osnovu poznavanja vrednosti početnih uslova i poznavanja svih vrednosti vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$. Jasno je da poznavanjem promenjivih stanja, koje podrazumeva i poznavanje upravljačkih promenjivih, u potpunosti karakteriše ponašanje *procesa*.

Za pretpostavljenji matematički model u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \;, \tag{5}$$

gde su početni uslovi poznati i zadati $\mathbf{x}(0)$, uz poznati vektor upravljanja u svim trenucima vremena $\mathbf{u}(t)$, izračunavanje kretanja u prostoru stanja se svodi na integraciju sistema diferencijalnih jednačina (5). Do kretanja u prostoru stanja doći ćemo postupno, prvo ćemo razmatrati kretanje u prostoru stanja koje je posledica početnih uslova, takav odziv nazivamo *sopstveni odziv*. Zatim ćemo uvesti i pobudni signal (vektor upravljanja), ta komponenta odziva naziva se *prinudni odziv*. Ukupni odziv ili kretanje u prostoru stanja dobija se superpozicijom ove dve komponente, što je naravno moguće zbog pretpostavke o *linearnosti* razmatranog sistema. Našu studiju započećemo razmatranjem jednodimenzionih sistema, koje ćemo zatim uopštiti na višedimenzione sisteme.

Sopstveni odziv sistema Dobijanje odziva sistema (5), bez prinudne komponente $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ i prozvoljnim vektorom početnih uslova $\mathbf{x}(0)$ se praktično svodi na integraciju sistema od n homogenih diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\ . \tag{6}$$

U slučaju da se radi o jednodimenzionom sistemu

$$\dot{x}(t) = ax(t)\ , \tag{7}$$

uz početni uslov $x(0)$. Sopstveni ili homogeni odziv $x_h(t)$ se lako dobija u eksponencijalnoj formi, gde je vremenska konstanta sistema $T_s = -1/a$

$$x_h(t) = e^{at}x(0) \tag{8}$$

Eksponencijalni član e^{at} u jednačini (8) može da se razvije u stepeni red, čime ovaj izraz (8) postaje

$$x_h(t) = \left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{a^kt^k}{k!} + \cdots\right)x(0)\ , \tag{9}$$

pri čemu ovaj red konvergira za sve konačne vrednosti $t > 0$. Pretpostavimo sada i da se sopstveni (homogeni) odziv višedimenzionog sistema (6) može dobiti u sličnoj formi stepenovanog reda, pri čemu se skalar a iz jednačine „menja" kvadratnom matricom $\mathbf{A}$. Odnosno, pretpostavili smo rešenje u sledećem obliku

$$\mathbf{x}_h(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} + \cdots\right)\mathbf{x}(0)\ , \tag{10}$$

gde je $\mathbf{x}(0)$ vektor početnih uslova, a $\mathbf{I}$ jedinična matrica odgovarajućih dimenzija. Kako je matrica $\mathbf{A}$ kvadratna, dimenzije $n \times n$, svaki element reda je takođe istih dimenzije, što naravno čini i da je ceo izraz u zagradi dimenzije $n \times n$. Da bismo potvrdili da pretpostavljeno rešenje dato izrazom (10) zadovoljava difrencijalnu jednačinu (6), diferenciraćemo po vremenu jednačinu (10), odnosno

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_h(t) &= \left(0 + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^(k-1)}{(k-1)!} + \cdots\right)\mathbf{x}(0) \\
&= \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} + \cdots\right)\mathbf{x}(0) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t)\ .
\end{aligned} \tag{11}$$

Izraz (11) je pokazao da pretpostavljeni profil rešenja u formi stepenog reda (10) jeste rešenje homogene matrične difrencijalne jednačine (6). Odnosno, sopstveni odziv sistema (6), na početne uslove $\mathbf{x}(0)$ izračunava se kao beskonačna matrična suma, koja zavisi samo od matrice stanja $\mathbf{A}$ i uvedena je jednačinom (10). Na osnovu sličnosti skalarnog (9) i matričnog izraza (10) možemo uvesti matričnu eksponencijalnu funkciju na sledeći način

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \cdots , \tag{12}$$

pri čemu je dimenzija izraza ista kao i matrice $\mathbf{A}$, koja ga u osnovi definiše. Napominjemo, da matrica u eksponentu, naglašava da se radi o matričnoj funkciji. Konačno, u skladu sa izrazima (12) i (10) možemo napisati da se sopstveni (homogeni) odziv višedimenzionog sistema izračunava po sledećem obrascu

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) . \tag{13}$$

Prinudni odziv sistema U okviru ovog paragrafa razmatraćemo potpuni odziv linearnog sistema, odnosno odziv, koji pored početnih uslova uključuje i ulazni signal $\mathbf{u}(t)$. Kao i u prethodnom slučaju, započećemo studiju razmatranjem jednodimenzionog sistema, a kasnije ćemo obrasce i pravila koja ustanovimo, uopštiti i na sisteme veće dimenzionalnosti.

Posmatrajmo sistem prvog reda, kod koga je jednačina stanja data sledećim izrazom

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) . \tag{14}$$

Jednačina (14), može se zapisati i u drugoj formi, koja će se pokazati kao pogodniji za dalju transformaciju

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) . \tag{15}$$

Množenjem obe strane jednačine (15) sa e^{-at}, izraz sa leve strane znaka jednakosti, može se zapisati u obliku totalnog diferencijala po vremenu, odnosno kao

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) &= e^{-at}bu(t) \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-at}x(t)\right) &= e^{-at}bu(t) . \end{aligned} \tag{16}$$

Izraz (16) je direktno integrabilan, a integracijom se lako dobija sledeći identitet

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(e^{-a\tau}x(\tau)\right)\mathrm{d}\tau &= \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ e^{-at}x(t) - x(0) &= \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)\mathrm{d}\tau . \end{aligned} \tag{17}$$

Izraz (17) može se zapisati i u kompaktnioj formi

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) \mathrm{d}\tau \; . \tag{18}$$

Jednačina (18) predstavlja obrazac za izračunavanje kretanja u prostoru stanja sistema prvog reda, pri čemu je očigledno da izraz pod znakom integrala opisuje prinudni odziv sistema, a sopstveni odziv sistema je naravno vezan za početne uslove.

Namera nam je da u nastavku teksta uopštimo izneti formalizam za izvođenje kretanja u prostoru stanja i primenimo ga na sisteme višeg reda

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \; . \tag{19}$$

Množenjem leve i desne strane jednačine (19) sa kvadratnom matricom $e^{-\mathbf{A}t}$ dobijamo

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \; . \tag{20}$$

Integracijom izraza (20) dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(\tau)\right) \mathrm{d}\tau &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}0}\mathbf{x}(0) &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \; . \end{aligned} \tag{21}$$

Ako znamo da je $e^{-\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$ i da važi $(e^{-\mathbf{A}t})^{-1} = e^{\mathbf{A}t}$, prethodni identitet (21) postaje

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \; . \end{aligned} \tag{22}$$

Kretanje u prostoru stanja je određeno jednačinama (22), prvi član uz vektor početnih uslova predstavlja sopstveni odziv sistema, dok *konvolucioni integral*[6] opisuje prinudnu komponentu odziva.

U postupku diskretizacije matematičkog modela u prostoru stanja od interesa nam je da razmatramo sisteme koji u opštem slučaju nisu vezani za nulte početne uslove $\mathbf{x}(0)$, već počinju u nekom „zakasnelom" trenutku vremena [7] $\mathbf{x}(t_k)$. Tada izraz (22) postaje

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \; , \tag{23}$$

[6] Upućujemo čitaoca na osobine Laplasove transformacije, gde su se prvi put sreli sa konvolucionim integralom u oblasti teorije linearnih sistema automatskog upravljanja

[7] Pojam zakasneli vremenski trenutak, strogo gledano, ne opisuje fizički vremensko kašnjenje, već naglašava da razmatrani vremenski interval ne počinje u nultom trenutku već u trenutku t_k. Stoga se svi signali od interesa ne obeležavaju sa npr. $f(t)$, već $f(t - t_k)$

za $t > t_k$. Važno je napomenuti još jednu činjenicu, u izračunavanju kretanja u prostoru stanja, koristili smo pojmove kao što su sopstveni i prinudni *odziv*. Čitaocu je jasno, da smo mi izrazima (22) i (23) izračunali koordinate vektora stanja $\mathbf{x}(t)$, a da se izlaz[8] sistema izračunava uz pomoć jednačine (2), odnosno kao

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\,, \tag{24}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{C}\int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\,. \tag{25}$$

[8] Pojam *odziva* se po pravilu vezuje za izlaz sistema, međutim u studiji matematičkog modela u prostoru stanja, pojam odziv se vezuje za komponente kretanja u prostoru stanja, a izlaz sistema se posebno naglašava i kao takav navodi.

2.2 *Digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja*

U cilju iznalaženja digitalnog ekvivalenta u prostoru stanja, podsećamo na pretpostavke, koje smo usvojili. Pretpostavili smo da se A/D konvertor ponaša kao idealni odabirač i da D/A konvertor funkcioniše kao kolo zadrške nultog reda. Odnosno, da se upravljanje menja u trenucima odabiranja t_k i da je neprekidno sa desne strane. U iznalaženju funkcionalne veze između promenjivih stanja, počećemo od izračunavanja kretanja u prostoru stanja između trenutaka odabiranja $t_k < t < t_{k+1}$, tačnije započinjemo od relacije (23)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi')}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi')\mathrm{d}\xi'\,, \tag{26}$$

gde smo uveli novu privremenu promenjivu ξ' koja fizički predstavlja vreme.[9] Dobro je poznato da je kod kola zadrške nultog reda upravljanje nepromenjivo između dva trenutka odabiranja, slika 2, odnosno za posmatrani vremenski interval $t_k < t < t_{k+1}$ upravljanje konstantno i iznosi $u(t_k)$. Stoga, u jednačini (26), upravljanje je nepromenjivo i može se izvesti izvan znaka integrala, pa dobijamo

[9] Kao što je čitaocima dobro poznato grčkim slovom τ se po pravilu obeležava vremensko kašnjenje, da bi se izbegle nedoumice u daljem tumačenju teksta uveli smo ξ kao impresonalnu promenjivu.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi')}\mathbf{B}\mathrm{d}\xi'\,\mathbf{u}(t_k)\,. \tag{27}$$

Da bi pojednostavili identitet (27), uvodimo smenu $t - \xi' = \xi$, odnosno $-\mathrm{d}\xi' = \mathrm{d}\xi$, pa uz promenu granica određenog integrala lako izračunavamo

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_0^{t-t_k} e^{\mathbf{A}\xi}\mathbf{B}\mathrm{d}\xi\,\mathbf{u}(t_k)\,. \tag{28}$$

Izraz (28) se zapisuje u kompaktnoj formi kao

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{\Gamma}(t, t_k)\mathbf{u}(t_k)\,, \tag{29}$$

gde je očigledno da su novouvedene matrice definisane na sledeći način

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(t, t_k) &= e^{\mathbf{A}(t-t_k)} \\ \mathbf{\Gamma}(t, t_k) &= \int_0^{t-t_k} e^{\mathbf{A}\xi}\mathbf{B}\mathrm{d}\xi \ . \end{aligned} \tag{30}$$

Ako su A/D i D/A konvertori sa slike 2 dobro sinhronizovani satom (engl. *clock*) i ako konverzije ne uvode dodatno kašnjenje u sistem, tada se promene vektora stanja i izlaza u trenucima odabiranja $(..., t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, ...)$ mogu izračunati u skladu sa jednačinama (1), (2), (29) i (30) kao

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{u}(t_k) \tag{31}$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t_k) \ , \tag{32}$$

gde su sada matrice stanja i ulaza

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) &= e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)} \\ \mathbf{\Gamma}(t_{k+1}, t_k) &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{\mathbf{A}\xi}\mathbf{B}\mathrm{d}\xi \ . \end{aligned} \tag{33}$$

Jednačine (31) - (33) predstavljaju digitalni ekvivalent matematičkog modela u prostoru stanja, koji je u svom kontinualnom obliku dat jednačinama (1) i (2). U najvećem broju slučajeva matrica $\mathbf{D} = 0$ jer kod digitalnih upravljačkih sistema izlaz $\mathbf{y}$ se prvo izmeri pa se na osnovu vrednosti $\mathbf{y}(t_k)$ generiše upravljački signal $\mathbf{u}(t_k)$. Dobro je primetiti da se vrednost vektora stanja sistema, između trenutaka odabiranja, može izračunati u skladu sa jednačinama (29) i (30). Takođe, važno je istaći da se ponašanje sistema tada faktički računa kao step odziv sistema uz respektovanje početnih uslova, odnosno da je između trenutaka odabiranja prekinuta povratna sprega ili može se reći da tada sistem radi u otvorenoj povratnoj sprezi.

U slučaju da je vreme odabiranja ekvidistantno raspoređeno duž vremenske ose $t_k = kT$, jednačine diskretnog matematičkog modela u prostoru stanja (31) - (33) dobijaju sledeći oblik

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(kT) \tag{34}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \ , \tag{35}$$

gde su matrice stanja i ulaza

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{\Gamma} &= \int_0^{T} e^{\mathbf{A}\xi}\mathbf{B}\mathrm{d}\xi \ . \end{aligned} \tag{36}$$

Ova forma, data jednačinama (34) - (36) u našoj studiji diskretnih sistema imaju centralnu ulogu [10].

Primer 1 (Diskretizacija sistema prvog reda)**.** U ilustraciji diskretizacije u prostoru stanja, krenućemo od najednostavnijeg slučaja, sistema prvog reda. Pretpostavimo da je sistem opisan sledećom diferencijalnom jednačinom

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta u(t) \ .$$

U skladu sa jednačinama (36) izračunavamo matrice stanja i ulaza digitalnog ekvivalenta kao

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= e^{\alpha T} \\ \mathbf{\Gamma} &= \int_0^T e^{\alpha \xi} \beta \mathrm{d}\xi = \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right) \ . \end{aligned}$$

odnosno diferencna jednačina, koja opisuje promenu stanja diskretnog sistema je

$$x(k+1) = e^{\alpha T} x(k) + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right) u(k) \ .$$

Primer 2 (Inverzna diskretizacija)**.** Cilj nam je da na osnovu diferencne jednačine, koja predstavlja diskretni model u prostoru stanja, rekonstruišemo kontinualni ekvivalent. Dinamika diskretnog sistema je opisana sledećom diferencnom jednačinom

$$x(k+1) = a x(k) + b u(k) \ .$$

Na osnovu prethodnog primera možemo napisati sledeće identitete

$$\begin{aligned} e^{\alpha T} &= a \\ \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right) &= b \ . \end{aligned}$$

gde su očigledno α i β vrednosti matrica stanja i ulaza kontinualnog sistema respektivno. Dalje lako izračunavamo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T} \ln a \\ \beta &= \frac{1}{T} \ln a \frac{b}{a-1} \ . \end{aligned}$$

3 Kretanje diskretnog sistema u prostoru stanja i funkcija diskretnog prenosa

Namera nam je da u ovom kratkom poglavlju rešimo diferencne jednačine, koje opisuju dinamiku diskretnog sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \tag{37}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \ . \tag{38}$$

[10] Matematički model u prostoru stanja diskretnog sistema se često piše i u svojoj skraćenoj formi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \ . \end{aligned}$$

Bez gubitka na opštosti u daljem tekstu ćemo ravnopravno koristiti obe predstavljene forme matematičkom modela u prostoru stanja.

Odnosno da u zatvorenoj, analitičkoj formi dobijemo izraz koji opisuje kretanje u prostoru stanja i odgovarajući izlaz sistema. U nastavku ćemo zanemariti početne uslove i izračunati odgovarajuću funkciju diskretnog prenosa.

3.1 Kretanje u prostoru stanja

Slično kao kod kontinualnih sistema, da bi izračunali kretanje u prostoru stanja, pretpostavili smo da su vrednosti vektora stanja u početnom trenutku k_0 poznati i zadati $\mathbf{x}(k_0)$. Takođe su poznate vrednosti vektora upravljanja u svim diskretnim trenucima vremena $\mathbf{u}(k_0), \mathbf{u}(k_0+1)$... Kroz iterativnu proceduru, lako uočavamo zakonomernost promene vektora stanja

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k_0+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k_0) \\
\mathbf{x}(k_0+2) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k_0+1) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k_0+1) \\
&= \mathbf{\Phi}^2\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k_0) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k_0+1) \\
&. \\
&. \\
&. \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{\Phi}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{\Phi}^{k-k_0-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k_0) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k-1) \\
&= \mathbf{\Phi}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^{k-i-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(i)\ . \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Iz izraza (39) je jasno da je kretanje u prostoru stanja, kao i kod kontinualnih sistema, određeno početnim uslovima (sopstveni odziv) i ulaznom pobudom (prinudni odziv). Isto tako iz izraza (39) je jasno da će sopstvene vrednosti matrice stanja $\mathbf{\Phi}$ u potpunosti odrediti karakter odziva. Podsećamo da se sopstvene vrednosti dobijaju iz karakteristične jednačine $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}) = 0$.

Na osnovu izraza za kretanje u prostoru stanja (39) i jednačine izlaza (38) lako dobijamo analitičku formu za izračunavanje izlaza diskretnog sistema

$$
\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{C}\sum_{i=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^{k-i-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \qquad (40)
$$

Interesantno bi bilo ponovo navesti kontinalne izraze za izračunavanje kretanja u prostoru stanja i izlaza kontinualnih sistema. Izraze postavljamo da čitaocima ukažemo na jasnu analogiju između odgovarajućih kontinualnih i diskretnih jednačina. Procenjujemo da uz poznavanje postupaka diskretizacije kontinualnih regulatora čitaoci mogu sami da uspostave logiku i povežu ove identitete

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{k-i-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(i)\ ,$$

odnosno

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{C}\int_{t_k}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{C}\sum_{i=k_0}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{k-i-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k).$$

U nastavku ćemo na osnovu uspostavljene funkcionalne veze ulaza i izlaza diskretnog sistema (40) odrediti funkciju diskretnog prenosa.

3.2 *Funkcija diskretnog prenosa*

Počećemo od matematičkog modela u prostoru stanja diskretnog sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \tag{41}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\ . \tag{42}$$

Primenom $\mathfrak{Z}$ transformacija prvo na izraz (42) dobijamo

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\,\mathbf{U}(z)\ . \tag{43}$$

Na sličan način možemo naći i $\mathfrak{Z}$ transformaciju izraza (41)

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{U}(z)\ , \tag{44}$$

odnosno

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{x}(0)\ + (z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{U}(z)\ . \tag{45}$$

Naravno, za izračunavanje diskretne funkcije prenosa početni uslovi se ne uzimaju u obzir $\mathbf{x}(0) = 0$, pa respektujući tu činjenicu, zamenom izraza (45) u (43) dobijamo

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\,\mathbf{U}(z)\ . \tag{46}$$

Konačno funkcija diskretnog prenosa, kao odnos kompleksnog izlaza i ulaza dobija se u sledećoj formi

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\ + \mathbf{D}\ \ . \tag{47}$$

Hvala na pažnji, vidimo se na ispitu. Uz konačnu napomenu, da je ova skripta namenski pisana u toku ovog semestra za vaš kurs. Skripta u formatu udžbenika sadrži preko 150 strana, a prati je preko 12h sati video materijala. Rešeni zadaci su napisani na preko 50 strana, a prate ih simulacioni kodovi. Red je da položite.