Asinhrono variranje; Izoperimetrijski problem

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

15. decembar 2022.

0.1 Asinhrono variranje

U dosadašnjim razmatranjima pretpostavljali smo da prilikom procesa varijacije nezavisno promenljiva (t ili x) ne trpi nikakve promene. Međutim, ima veoma važnih praktičnih situacija kada je neophodno varirati i nezavisno promenljivu koja figuriše u zadatku. Ova pojava se najčešće javlja kod problema u kojima granice u određenom integralu, odnosno kriterijumu optimalnosti nisu specificirane (bilo obe granice ili samo jedna).

Posmatrajmo funkciju u varijacionom zadatku

$$x = x(t) \,,$$

gde je t nezavisno promenljiva. Ranije je definisana klasična ili Lagranževa varijacija na sledeći način

$$\delta x = \overline{x}(t) - x(t) \,.$$

Pretpostavićemo da je i nezavisno promenljiva t sada pretrpela promenu $t + \Delta t$, pa je potrebno uspostaviti vezu između položaja $x(t)$ i variranog položaja $\overline{x}(t + \Delta t)$. Razvojem u Tejlorov red dobijamo izraz

$$\overline{x}(t + \Delta t) = \overline{x}(t) + \dot{\overline{x}}(t)\Delta t \,,$$

gde je

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= \delta x + x(t) \\ \dot{\overline{x}}(t)\Delta t &= [\dot{x} + (\delta x)']\Delta t \approx \dot{x}\Delta t, \quad (\delta x)'\Delta t \approx 0 \,. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u Tejlorov razvoj sledi

$$\overline{x}(t + \Delta t) = \delta x + x(t) + \dot{x}\Delta t \,.$$

Na kraju, definišemo novu veličinu

$$\boxed{\Delta x = \overline{x}(t + \Delta t) - x(t) = \delta x + \dot{x}\Delta t \,,}$$

koja se naziva **generalisana** ili **asinhrona varijacija** funkcije x.

Navedeni matematički aparat ćemo koristiti za pronalaženje optimalne vrednosti akcionog integrala

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \ .$$

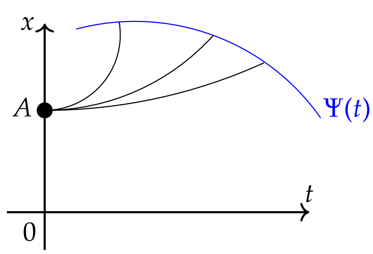
Potreban uslov optimalnosti je

$$\Delta I = 0 \ ,$$

čijim se rešavanjem dobija izraz

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Delta x \Big|_{t_0}^{t_1} + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Delta t \Big|_{t_0}^{t_1} \ . \tag{1}$$

Kao što je napomenuto na početku, variranje nezavisno promenljive se vrši u praktičnim situacijama kada granice kriterijuma optimalnosti nisu poznate. Navedeni koncept primenjujemo na problem čiji je grafički prikaz dat na slici 1.



Slika 1: Problem potere

U početnom trenutku $t = 0$ sistem je specificiran graničnim uslovom

$$x(0) = A \ ,$$

dok gornja granica nije specificirana, nego je zadato da u nepoznatom trenutku $t = T$ sistem treba da zadovolji relaciju

$$x(T) = \Psi(T) \ .$$

Kaže se da sistem treba da završi na **terminalnoj liniji**. Problem sa ovakvom postavkom se naziva **problem potere**. Za njegovo rešavanje se koristi Ojler-Lagranževa diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \ ,$$

čime je prvi sabirak u izrazu (1) eliminisan. Kako je početni trenutak $t = 0$ poznat i kako je poznata vrednost x u tom trenutku, sve varijacije u trenutku $t = 0$ su jednake nuli. Na kraju, u izrazu (1) ostaje

$$\Delta I = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Delta x \Big|_{t=T} + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Delta t \Big|_{t=T} \ .$$

Kako je

$$\Delta x = \delta x + \dot{x}\Delta t = \dot{x}\Delta t, \quad \delta x = 0 \, ,$$

sledi

$$\Delta x(T) = \dot{x}(T)\Delta t = \dot{\Psi}(T)\Delta t \, ,$$

jer važi relacija $x(T) = \Psi(T)$. Daljim uvrštavanjem dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\Psi}(T)\Delta t + \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta t\Big|_{t=T} = 0 \, ,$$

odnosno

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\Psi} - \dot{x}) + F\right)\Delta t\Big|_{t=T} = 0 \, .$$

Na kraju dobijamo granične uslove, odnosno **uslove transferzalnosti**

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\Psi} - \dot{x}) + F\Big|_{t=T} = 0 \, ,}$$

$$\boxed{x(0) = A \, .}$$

Prilikom rešavanja zadataka, integracijom Ojler-Lagranževe diferencijalne jednačine dobijaju se dve konstante integracije čije se vrednosti određuju iz uslova transferzalnosti. Nepoznati trenutak $t = T$ se određuje kao presečna tačka rešenja Ojler-Lagranževe diferencijalne jednačine i terminalne krive.

Zadaci

1. Odrediti ekstremalu $x(t)$ koja saopštava ekstremnu vrednost integralu $I = \int_1^{t_f} \left(2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2\right)dt$ kao i nepoznati trenutak t_f ukoliko je $x(1) = 4$, $x(t_f) = 4$ i $t_f > 4$.

   Rešenje.
   Prvi korak je formiranje Ojler-Lagranževe diferencijalne jednačine

   $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \, ,$$

   gde je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2$ i $\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \ddot{x}$. Dobijamo diferencijalnu jednačinu čijim rešavanjem dolazimo do oblika ekstremale $x(t)$

   $$\ddot{x} = 2 \Big/ \int$$

   $$\dot{x}(t) = 2t + c_1 \Big/ \int$$

   $$x(t) = t^2 + c_1 t + c_2 \, .$$

Iz uslova

$$x(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 + c_1 + c_2 = 4 \, ,$$

dobijamo jednačinu

$$c_1 + c_2 = 3 \, . \tag{2}$$

Na osnovu uslova transferzalnosti, uvrštavanjem $\Psi(t) = x(t_f) = 4$, sledi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\Psi} - \dot{x}) + F\Big|_{t=f_f} &= 0 \\
\dot{x}(0 - \dot{x}) + 2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2\Big|_{t=f_f} &= 0 \\
-\dot{x}^2 + 2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2\Big|_{t=f_f} &= 0 \\
-\frac{1}{2}\dot{x}^2 + 2x\Big|_{t=f_f} &= 0 \Big/ \cdot 2 \\
4x - \dot{x}^2\Big|_{t=f_f} &= 0 \, .
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem jednačine ekstremale $x(t)$ u prethodno dobijeni izraz

$$\begin{aligned}
4(t_f^2 + c_1 t_f + c_2) - (2t_f + c_1)^2 &= 0 \\
4(t_f^2 + c_1 t_f + c_2) - (4t_f^2 + 4t_f c_1 + c_1^2) &= 0 \, ,
\end{aligned}$$

dobijamo jednačinu

$$4c_2 - c_1^2 = 0 \, . \tag{3}$$

Sledi postupak rešavanja sistema jednačina (2) i (3).

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Rightarrow \quad c_1 = 3 - c_2 \\
(3) \quad &\Rightarrow \quad 4c_2 - (3 - c_2)^2 = 0
\end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine

$$c_2^2 - 10c_2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{2_{1,2}} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \, ,$$

dobijamo vrednosti konstante

$$\begin{aligned}
c_{2_1} &= \frac{18}{2} = 9 \\
c_{2_2} &= \frac{2}{2} = 1 \, .
\end{aligned}$$

Daljim uvrštavanjem u (2) možemo izračunati

$$\begin{aligned}
c_{1_1} &= 3 - 9 = -6 \\
c_{1_2} &= 3 - 1 = 2 \, .
\end{aligned}$$

Da bismo proverili koje vrednosti konstanti zadovoljavaju početnu postavku problema, koristićemo uslov $x(t_f) = 4$, nakon čega dobijamo dve kvadratne jednačine.

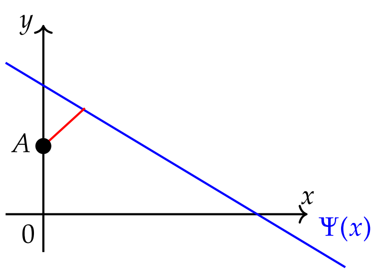
$$t_f^2 - 6t_f + 9 = 4$$
$$t_f^2 - 6t_f + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{f_{1,2}} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$$t_{f_1} = \frac{10}{2} = 5 > 4 \ \checkmark$$
$$t_{f_2} = \frac{2}{2} = 1 > 4 \quad \perp$$

$$t_f^2 + 2t_f + 1 = 4$$
$$t_f^2 + 2t_f - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{f_{3,4}} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - +12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$
$$t_{f_3} = -\frac{6}{2} = -3 > 4 \quad \perp$$
$$t_{f_4} = \frac{2}{2} = 1 > 4 \quad \perp$$

Na kraju, zaključujemo da su tražena rešenja

$$x(t) = t^2 - 6t + 9$$
$$t_f = 5\ .$$

2. Odrediti krivu minimalne dužine koja spaja tačku $A(0, 2)$ i pravu $\Psi(x) = -4x + 5$.



Rešenje.

Prvi korak je formiranje kriterijuma optimalnosti [1] u obliku

$$I = \int_0^{x_f} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx\ ,$$

pri čemu je

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \text{const}\ .$$

[1] Čitaocu napominjemo da je ovakav oblik kriterijuma optimalnosti ranije detaljno izveden, tako da je ovde napisana samo finalna forma.

Sledi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} \cdot 2\dot{y} &= c_1 \\
\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} &= c_1 \Big/^2 \\
\frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} &= c_1^2 \\
\frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} &= c_2 \\
c_2 + c_2\dot{y}^2 &= \dot{y}^2 \\
\dot{y}^2(1-c_2) &= c_2 \\
\dot{y}^2 &= \frac{c_2}{1-c_2} \\
\dot{y} &= \sqrt{\frac{c_2}{1-c_2}} \\
\dot{y} &= c_3 \Big/ \int ,
\end{aligned}$$

pa dobijamo oblik ekstremale

$$y(x) = c_3 x + c_4 \, .$$

Jednu konstantu ćemo odrediti iz uslova

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 2 \, ,$$

dok ćemo drugu odrediti iz uslova transferzalnosti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\left(\dot{\Psi} - \dot{y}\right) + F\Big|_{x=x_f} &= 0 \\
\frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} \cdot 2\dot{y}(-4-\dot{y}) + \sqrt{1+\dot{y}^2}\Big|_{x=x_f} &= 0 \\
\frac{c_3}{\sqrt{1+c_3^2}}(-4-c_3) + \sqrt{1+c_3^2} &= 0 \Big/ \cdot \sqrt{1+c_3^2} \\
c_3(-4-c_3) + 1 + c_3^2 &= 0 \\
-4c_3 - c_3^2 + 1 + c_3^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{4} \, .
\end{aligned}$$

Na kraju dobijamo traženu jednačinu prave

$$y(x) = \frac{1}{4}x + 2 \, .$$

0.2 *Izoperimetrijski problem - varijacioni račun sa ograničenjima tipa integrala*

Posmatra se funkcional oblika

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_i, \dot{x}_i)dt ,$$

gde je $i = 1, \dots, n$. Ograničenja su definisana u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} G_k(t, x_i, \dot{x}_i)dt = A_k ,$$

gde su $k = 1, \dots, m$ i A_k su zadate konstante. Ovako definisan funkcional u prisustvu integralnih ograničenja se u literaturi naziva **izoperimetrijski problem**. Takođe važi da broj integralnih ograničenja može da bude proizvoljan, odnosno $n \gtreqless m$.

Pronalaženje potrebnih uslova optimalnosti se svodi na formiranje novog proširenog funkcionala

$$\boxed{\Phi = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_i, \dot{x}_i)dt + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k G_k(t, x_i, \dot{x}_i) ,}$$

gde su $\lambda_k = \text{const.}$ konstantni Lagranževi množitelji koji se uvode za svako integralno ograničenje, $k = 1, \dots, m$. Uslov stacionarnosti novoformiranog funkcionala dovodi do Ojler-Lagranževih jednačina

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} = 0 ,}$$

gde je $i = 1, \dots, n$.

Zadaci

1. Odrediti ekstremalu $x(t)$ koja daje optimalnu vrednost integralu $I = \int_0^{\pi} \dot{x}^2 dt$ uz ograničenje $\int_0^{\pi} x^2 dt = 1$ i uslove $x(0) = x(\pi) = 0$.

   Rešenje.
   Formira se prošireni kriterijum oblika

   $$\Phi = \dot{x}^2 + \lambda x^2 .$$

   Ojler-Lagranževe diferencijalna jednačina je

   $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = 0$$
   $$2\lambda x - 2\ddot{x} = 0 \Big/ : (-2)$$
   $$\ddot{x} - \lambda x = 0 .$$

Dobijena homogena diferencijalna jednačina se rešava formiranjem karakteristične jednačine

$$m^2 - \lambda = 0$$
$$m^2 = \lambda \, .$$

U zavisnosti od vrednosti λ razmatraćemo dva slučaja:

- $\lambda > 0$
  Sledi da su koreni karakteristične jednačine realni i prosti
  $$m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \, ,$$
  pa je opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine
  $$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} t} \, .$$
  Uvrštavanjem početnih uslova dobijamo
  $$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -c_2 \tag{4}$$
  $$x(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \, . \tag{5}$$
  Uvrštavanjem smene iz (4) u (5) sledi
  $$-c_2 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$
  $$c_2(-e^{\sqrt{\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \, .$$
  Dalje možemo izračunati
  $$c_1 = -c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \, .$$
  Na kraju dobijamo da je ekstremala
  $$x(t) = 0 \, ,$$
  ali ovo rešenje odbacujemo zbog ograničenja.
- $\lambda < 0$
  Koreni karakteristične jednačine su konjugoavno kompleksni
  $$m_{1,2} = \pm j\sqrt{|\lambda|} \, ,$$
  pa je opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine
  $$x(t) = A\cos(\sqrt{|\lambda|} t) + B\sin(\sqrt{|\lambda|} t) \, .$$
  Uvrštavanjem početnih uslova dobijamo
  $$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$
  $$x(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0 \;\vee\; \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0 \, ,$$
  pa u okviru drugog slučaja posmatramo dva podslučaja:

(a) $B = 0$
Sledi da je jednačina ekstremale

$$x(t) = 0\ ,$$

pa ovo rešenje, kao i u prvom slučaju, odbacujemo.

(b) $\sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0$
Data jednakost će biti zadovoljena ako je

$$\sqrt{|\lambda|}\pi = 0 + n\pi \Big/ : \pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\sqrt{|\lambda|} = n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Uvrštavanjem dobijenih vrednosti u jednačinu ekstremale sledi

$$x(t) = B\sin(nt)\ .$$

Nepoznatu konstantu možemo izračunati iz ograničenja

$$\int_0^\pi x^2 dt = 1$$
$$\int_0^\pi B^2 \sin^2(nt) dt = 1$$
$$B^2 \cdot I_1 = 1\ ,$$

gde je $I_1 = \int_0^\pi \sin^2(nt)dt$. Prvo ćemo izračunati neodređeni integral

Koristićemo trigonometrijsku relaciju

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\ .$$

$$\int \sin^2(nt)dt = \int \frac{1-\cos(2nt)}{2}dt = \int \frac{1}{2}dt - \int \frac{1}{2}\cos(2nt)dt = \left| \begin{array}{c} 2nt = m \\ 2ndt = dm \\ dt = \frac{1}{2n}dm \end{array} \right| =$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(m)\frac{1}{2n}dm = \frac{t}{2} - \frac{1}{4n}\int \cos(m)dm = \frac{t}{2} - \frac{1}{4n}\sin(m) + C =$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2nt) + C\ .$$

Sada možemo izračunati vrednost integrala I_1 uvrštavanjem granica integrala u prethodno dobijeni izraz

$$I_1 = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2nt)\right]\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\ .$$

Sada možemo izračunati nepoznatu konstantu kao

$$B^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ .$$

Na kraju, ekstemala je

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nt), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Odrediti ekstemalu $x(t)$ ako je $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt$ uz ograničenje $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(t)dt = 1$ i uslove $x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Rešenje.
Formiramo novi funkcional

$$\Phi = \dot{x}^2 - x^2 + \lambda x \sin(t) \ .$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ -2x + \lambda \sin(t) - 2\ddot{x} &= 0 \Big/ : (-2) \\ \ddot{x} + x &= \frac{\lambda}{2}\sin(t) \ . \end{aligned}$$

Dobijena je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda čije rešenje se sastoji iz homogenog i partikularnog dela

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \ .$$

- homogeno rešenje:
  Formira se homogena diferencijalna jednačina

  $$\ddot{x} + x = 0 \ ,$$

  čija je karakteristična jednačina

  $$\begin{aligned} m^2 + 1 &= 0 \\ m^2 &= -1 \\ m_{1,2} &= \pm j \ . \end{aligned}$$

  Kako su koreni karakteristične jednačine konjugovano kompleksni, homogeno rešenje je

  $$x_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \ .$$

- partikularno rešenje:
  Partikularno rešenje se formira na osnovu funkcije $f(t) = \frac{\lambda}{2}\sin(t)$

  $$x_p(t) = t(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) \ ,$$

  pri čemu se član t dodaje ispred zagrade zbog istog oblika homogenog i partikularnog rešenja. Kako je diferencijalna jednačina čije rešenje tražimo drugog reda, neophodno je odrediti prvi i drugi izvod partikularnog rešenja

  $$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + t(-c_1\sin(t) + c_2\cos(t)) \\ \ddot{x}_p(t) &= -c_1\sin(t) + c_2\cos(t) - c_1\sin(t) + c_2\cos(t) + t(-c_1\cos(t) - c_2\sin(t)) \ . \end{aligned}$$

Smenom u početnu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$-2c_1\sin(t)+2c_2\cos(t)-t(c_1\cos(t)+c_2\sin(t))-t(c_1\cos(t)+c_2\sin(t))=\frac{\lambda}{2}\sin(t)$$

$$\begin{aligned}-2c_1=\frac{\lambda}{2}\quad&\Rightarrow\quad c_1=-\frac{\lambda}{4}\\ 2c_2=0\quad&\Rightarrow\quad c_2=0\,.\end{aligned}$$

Sledi da je partikularno rešenje

$$x_p(t)=-\frac{\lambda}{4}t\cos(t)\,.$$

Na kraju, sabiranjem homogenog i partikularnog rešenja dobijamo ekstremalu

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\cos(t)+B\sin(t)-\frac{\lambda}{4}t\cos(t)\,.$$

Nepoznate konstante određujemo iz uslova zadatka i integralnog ograničenja.

$$\begin{aligned}x(0)=0\quad&\Rightarrow\quad A=0\\ x\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=0\quad&\Rightarrow\quad B=0\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrednost sledi da je ekstremala

$$x(t)=-\frac{\lambda}{4}t\cos(t)\,.$$

Preostali nepoznati parametar određujemo iz ograničenja

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(t)dt&=1\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\lambda}{4}t\cos(t)\sin(t)dt&=1\\ -\frac{\lambda}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos(t)\sin(t)dt&=1\\ -\frac{\lambda}{4}\cdot I_1&=1\,,\end{aligned}$$

Čitaocu napominjemo sledeće relacije

$$\int\sin(ax)=-\frac{1}{a}\cos(ax)+C$$
$$\int\cos(ax)=\frac{1}{a}\sin(ax)+C\,.$$

gde je $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos(t)\sin(t)dt$. Prvo ćemo izračunati neodređeni integral

Koristićemo trigonometrijsku relaciju

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)\,.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos(t)\sin(t)dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t\cos(t)\sin(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(2t)dt=\\ &=\left|\begin{array}{cc}u=t & dv=sin(2t)dt\\ du=dt & v=-\frac{1}{2}\cos(2t)\end{array}\right|=\frac{1}{2}\Big[-\frac{t}{2}\cos(2t)+\int\frac{1}{2}\cos(2t)dt\Big]=\\ &=-\frac{t}{4}\cos(2t)+\frac{1}{8}\sin(2t)+C\,.\end{aligned}$$

Vrednost integrala I_1 ćemo izračunati uvrštavanjem granica integrala u prethodno dobijeni izraz

$$I_1 = \left[-\frac{t}{4}\cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2t) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \, .$$

Vrednost Lagranževog množitelja ćemo izračunati iz sledeće relacije

$$-\frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\pi}{8} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{32}{\pi} \, .$$

Na kraju, ekstemala je

$$x(t) = \frac{8}{\pi} t \cos(t) \, .$$