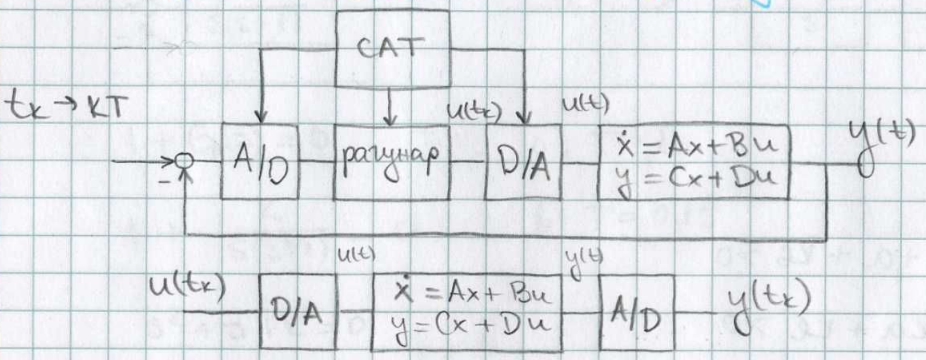
Предавање 5. децембар 2018.

Дискретизација мат. модела у простору стања



$$x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k) + \Gamma u(t_k)$$

$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$$

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx + Du \quad /\mathcal{L}$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}X(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \quad /\mathcal{L}^{-1}$$

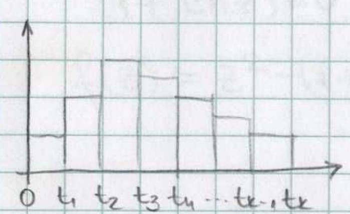
$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

- ако је систем померен $\tau = s'$

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{A(t-s')}Bu(s')\,ds'$$

$t_k \le t \le t_{k+1} \longrightarrow t_k, t_{k+1}, t_{k+2}$



$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{A(t-s')}B\,ds'\, \underbrace{u(t_k)}_{\text{const}}$$

$$t - s' = s$$

$$ds = -ds'$$

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \int_0^{t-t_k} e^{As}B\,ds\; u(t_k)}$$

Границе интеграла се мењају јер уносимо − знак у $\int$

$$\Phi(t, t_k) \qquad \Gamma(t, t_k)$$

$$x(t) = \Phi(t,t_k)x(t_k) + \Gamma(t,t_k)u(t_k)$$

$$t = t_{k+1}$$

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1},t_k)x(t_k) + \Gamma(t_{k+1},t_k)u(t_k)$$

$$\Phi(t_{k+1},t_k) = e^{A(t_{k+1},t_k)}$$

$$\Gamma(t_{k+1},t_k) = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{As}B\,ds$$

Најопштији облик израчунавања мат. модела

$$t_k = KT \equiv K$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ \Gamma &= \int_0^T e^{As}B\,ds \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\dot{x} = \alpha x + \beta u$$

$$\Phi = e^{\alpha T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\alpha T}\beta\,ds$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\left[e^{\alpha T} - 1\right]$$

Кретање у простору стања

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$x(k_0+1) = \Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0)$$

$$x(k_0+2) = \Phi x(k_0+1) + \Gamma u(k_0+1)$$

$$= \Phi^2 x(k_0) + \Phi\Gamma u(k_0) + \Gamma u(k_0+1)$$

$$\vdots$$

$$x(k) = \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \Phi^{k-k_0-1}\Gamma u(k_0) + \dots \Gamma u(k-1)$$

$$x(k) = \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi^{k-1-i}\Gamma u(i)$$ општи облик

Дискретизован

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) \quad / \mathcal{Z}$$

$$zX(z) = \Phi X(z) + \Gamma U(z)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

$$(zI - \Phi) X(z) = \Gamma U(z)$$

$$X(z) = (zI-\Phi)^{-1}\Gamma U(z)$$

$$Y(z) = C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma U(z) + DU(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma + D$$

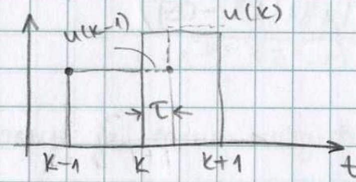
Предавање 11. 12. 2018.

Дискретизација мат. модела у простору стања са временским кашњењем

- Вв. кашњење на улазу

$$\dot{x} = Ax + Bu(t-\tau)$$

1° случај $T > \tau$



$$x(k+1) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-s')} B u(s') ds'$$

$u(kT)$ имаће вр. $kT+\tau$ до $kT+T$

$u(k-1)T$ kT до $kT+\tau$

$$x(k+1)T = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} \underbrace{e^{A(kT+T-s')}}_{\Gamma_1} B ds' \cdot u(kT-T)$$

$$+ \int_{kT+\tau}^{kT+T} \underbrace{e^{A(kT+T-s')}}_{\Gamma_0} B ds' \cdot u(kT)$$

$$x(k+1)T = \Phi x(kT) + \Gamma_0 u(kT) + \Gamma_1 u(kT-T)$$

Γ_0: $kT+T-s' = s$ $\quad s' = kT+\tau$

$$-ds' = ds$$

$$\Gamma_0 = \int_0^{T-\tau} e^{As} B ds$$

Γ_1: $kT+\tau-s' = s$

$$-ds' = ds$$

$$\Gamma_1 = \int_0^{\tau} e^{A(T-\tau+s)} B ds = e^{A(T-\tau)} \int_0^{\tau} e^{As} B ds$$

2° случај $\tau > T$

пример:

$$\dot{x} = -x + u(t - 2{,}6) \quad , T = 1s$$

$$x(k+1) = \Phi(kT) + \Gamma_1 u(kT - 3T) + \Gamma_0 u(kT - 2T)$$

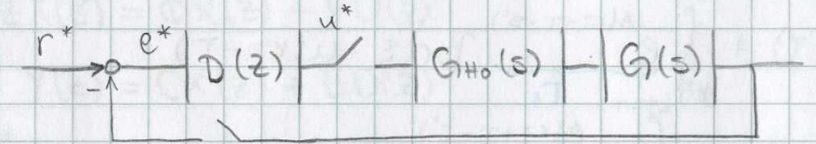
$$\tau = (\overset{2}{d} - 1)T + \overset{0{,}6}{\tau'}$$

$$x(k+1) = \Phi x(kT) + \Gamma_0 u(kT - (d-1)T) + \Gamma_1 u(kT - dT)$$

$$\tau \equiv \tau'$$

Dead beat и Dahlin-ов регулатор

$$G(s) = \frac{1}{T_d s + 1} e^{-s\tau} \quad , T_d > \tau$$



$$W_{sp}(z) = \frac{D(z)\mathcal{Z}\{G_{H0}(s)G(s)\}}{1 + D(z)\mathcal{Z}\{G_{H0}(s)G(s)\}} = \frac{D(z)G_{DE}(z)}{1 + D(z)G_{DE}(z)}$$

$$W_{sp}(z) + W_{sp}(z)D(z)G_{DE}(z) = D(z)G_{DE}(z)$$

$$W_{sp}(z) = D(z)[1 - W_{sp}(z)]G_{DE}(z)$$

$$D(z) = \frac{1}{G_{DE}(z)} \frac{W_{sp}(z)}{1 - W_{sp}(z)}$$

$W_{sp}(z) = 1 \cdot z^{-k}$ У зависности колико кашњење имамо у G_{H0} и G, бирамо k

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{T_d s + 1} e^{-s\tau}\right\} = (1 - z^{-1}) z^{-N} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(T_d s + 1)}\right\}$$

$$= \frac{z-1}{z} z^{-N} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_d}}\right\}$$

$$= \frac{z-1}{z} z^{-N} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T/T_d}}\right]$$

$$= z^{-N} \frac{1 - e^{-T/T_d}}{z - e^{-T/T_d}} = G_{DE}$$

ПРИМЕР $\quad G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{10s + 1} \qquad T_d = 10, \quad \tau = 2$

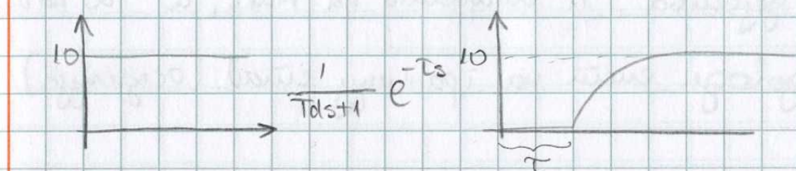
$$G_{DE}(z) = \frac{1 - e^{-1/10}}{z - e^{-1/10}} z^{-2} \qquad W_{sp}(z) = z^{-3}$$

$$D(z) = \frac{1}{G_{DE}(z)} \frac{W_{sp}(z)}{1 - W_{sp}(z)}$$

$$= \frac{z - e^{-1/10}}{1 - e^{-1/10}} \frac{z^{-3}}{1 - z^{-3}} z^2 \cdot \frac{z^{+3}}{z^{+3}}$$

$$= \frac{(z - e^{-1/10})z^2}{(1 - e^{-1/10})(z^3 - 1)}$$

- Далин је само модификација dead beat регулатора



$$W_{sp}(s) = \frac{1}{T_{sp}s + 1} e^{-\tau_{sp} s} \qquad T_{sp} \in (1{,}5 \div 2{,}5)\tau$$

$$W_{sp}(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_{sp}}}}{z - e^{-T/T_{sp}}} z^{-N}$$

$$= \frac{1 - b}{z - b} z^{-N} \quad , b \in (0, 1)$$

ПРИМЕР $\quad G(s) = \dfrac{1}{10s + 1} e^{-2s} \qquad T = 1$

$$G_{DE}(z) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{10}}}{z - e^{-\frac{1}{10}}} z^{-2} \qquad T_{sp} = 4, \quad T_{sp} \in (3, 5)$$

$$W_{sp}(z) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{4}}}{z - e^{-\frac{1}{4}}} z^{-2}$$

$$D(z) = \frac{1}{G_{DE}(z)} \frac{W_{sp}(z)}{1 + W_{sp}(z)}$$

$$= \frac{z - e^{-\frac{1}{10}}}{1 - e^{-\frac{1}{10}}} z^2 \frac{\frac{1 - e^{-1/4}}{z - e^{-1/4}} z^{-2}}{1 - \frac{1 - e^{-1/4}}{z - e^{-1/4}} z^{-2}}$$

Предавање 12.12.2018.

Дискретизација реалног ПИД-а

- Односи се на подешавање параметара K_p, K_i, K_D

Експеримент у отвореној повратној спрези

- Мора да буде сист. првог реда и да има вр. кашњење
- Није могуће ако: сист није стаб

  има астатизам

  прелазна кк-а није монотона

Експеримент у затвореној повратној спрези

- Да би елиминисали I и D дејство, Ti ставимо на макс, а Td на мин
- Затв. повратна спрега доводи сист на границу стаб. (осцилује)

Методе за подешавање

Zigler-Nicholsove препоруке

$a = \mu^{K_p}$ $\quad \mu = \frac{\tau}{T_p}$ $\quad 0{,}1 < \frac{\tau}{T_p} < 1$

- отв. пов. спрега

Тупсин

$$D(t_k) = \left[\frac{2T_d - NT}{2T_d + NT}\right] D(t_{k-1}) - \frac{2KNT_d}{2T_d + NT}\left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)$$

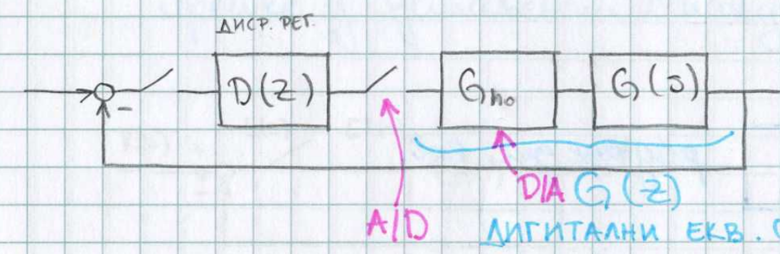
ако $NT > 2T_d$ сист ће бити нестабилан

- Створиће ефекат да грешка опада, а она уствари расте и тада улазимо у осцилације (негативни градијент)

- Ако имплементирамо D-дејство, најлакше је да користимо дискрет. уназад јер је најсигурније

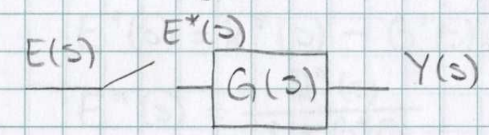
КОЛ 2

Дигитални еквиваленти система



овај дио морамо превести у z домен

- Увек изводимо у присуству A/D и D/A конвертора
- Ако не нацртамо G_{ho}, подразумева се да се садржи



$$Y(s) = E^*(s)G(s) \;/\; ^*$$

$$Y^*(s) = \left[G(s)E^*(s)\right]^*$$

$$\boxed{Y^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s)}$$

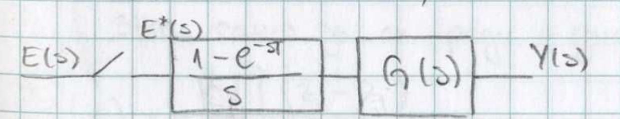
$$Y^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s)E^*(s + jk\omega_s)$$

$E^*(s) = E^*(s + jk\omega_s)$ следи из особина

$$Y^*(s) = E^*(s) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s)}_{G^*(s)}$$

$$Y^*(s) = E^*(s)G^*(s)$$

$$Y(z) = G(z)E(z)$$



$$Y(s) = \left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)E^*(s)\right] \;/\; ^*$$

$$Y^*(s) = \left(\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right)^* E^*(s)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right]E(z)$$

$$Y(z) = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] E(z)$$

$$Y(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$\boxed{G(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$ рачунање дит. екв.

пример $G(s) = \frac{1}{s+1}$

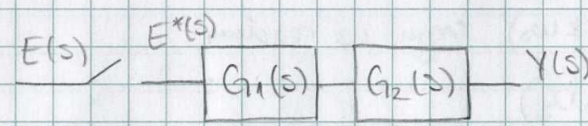
$$G(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$= \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\left[\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right]$$

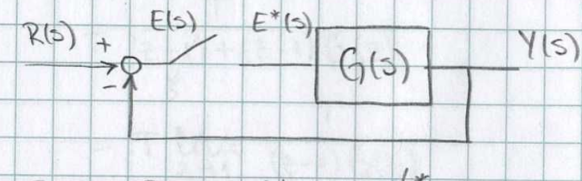
$$= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$ - Ф-ја није једнозначна јер зависи од времена одабирања



$$\frac{Y(z)}{E(z)} = G_1G_2(z) \qquad Y(s) = G_1G_2^*(s)\,E^*(s)$$

Предавање 28. 11. 2018.

Грешке у устаљеном стању



$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad /^*$$

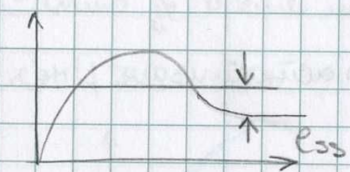
$$Y(s) = G(s)E^*(s) \quad /^*$$

$$E^*(s) = R^*(s) - G^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1+G^*(s)}$$

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)}$$ грешка за систем са слике

Грешка нам зависи од улаза и од самог система



Способност система да прати жељену вредност - e_{ss}

- Не можемо разматрати грешке у устаљеном стању код нестабилних система

$$e_{ss}(kT) \equiv e_{ss} \overset{\text{деф}}{=} \lim_{k\to+\infty} e(kT) = \lim_{z\to1}(1-z^{-1})E(z) = \lim_{z\to1}\left(\frac{z-1}{\cancel{z}}\right)E(z)$$

знаи само да се ради о дискретном систему

$$G(z) = \left.\frac{K\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)}{(z-1)^N\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}\right|_{p_i\neq1} \qquad N+n \geq m$$

N - ред астатизма (бр интеграторa)

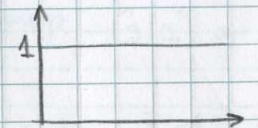
$$K_{dc} \overset{\text{деф.}}{=} \left.\frac{K\prod^{m}(z-p_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}\right|_{z_i\neq1}$$

За систем са слике:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

1. случај

Ако на улазу Хевисајд



$$R(z) = \frac{z}{z-1} \qquad e_{ss} \overset{ДЕФ}{=} \frac{1}{1+K_p}$$

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(\cancel{z-1})\frac{\frac{1\cancel{z}}{\cancel{z-1}}}{1+G(z)}$$

$$= \frac{1}{1+G(z)}$$

a) Ако је $N=0$; $K_p = \lim_{z\to 1} G(z) = K_{dc}$

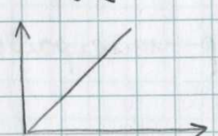
$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_{dc}}$$

- Ако се на улазу налази Хевисајд и сист. нема астатизам, на излазу ће увек бити грешка
- Што је појачање веће, грешка ће бити мања

b) $N \geq 1$, $K_p \to \infty$, $e_{ss} \to 0$

- Ако систем има бар један астатизам, довољан је да се елиминише грешка у устаљеном стању

2. случај



$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss} \overset{ДЕФ}{=} \frac{1}{K_v}\left(\frac{T}{K_v}\right) \quad K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)$$

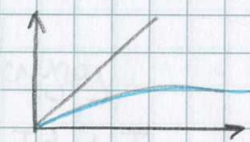
За систем са слике

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(\cancel{z-1})\frac{\frac{T\cancel{z}}{(z-1)^2}}{1+G(z)}$$

$$= \frac{T}{(z-1)+(z-1)G(z)}$$

$$= T\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)G(z)}$$

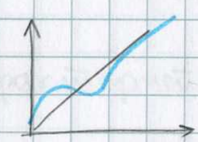
a) $N=0$, $K_v \to 0$, $e_{ss} \to \infty$



b) $N=1$, $K_v = \frac{K_{dc}}{T}$ $\qquad e_{ss} = \frac{T}{K_{dc}}$

- Грешка у устаљеном стању експлицитно зависи од времена одаб.
- Што је време мање, грешка ће бити мања

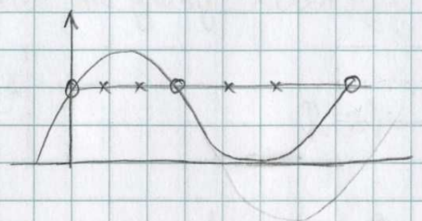
c) $N \geq 2$, $K_v \to \infty$, $e_{ss} \to 0$



Предавање 04.12.2018.

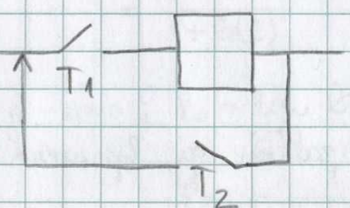
Модификована З трансформација

- Уведена да би проценили понашање система између тренутака одабирања

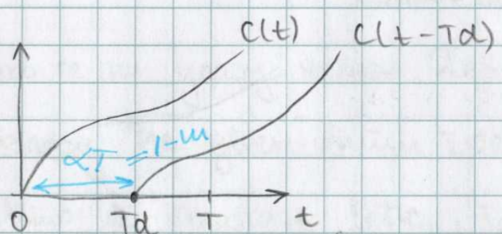


- Користи се за системе са временским кашњењем e^{-sT_d}

- Ако имамо система са два A/D конв.



$T_1 = nT_2$

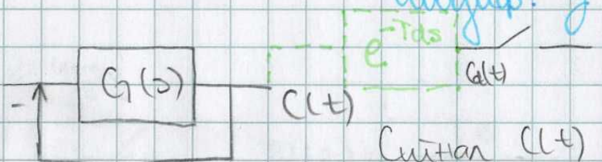


$C_d(t) = C(t - T_d)$, $T_d < t$

$C_d(t) = C(t - \alpha T)$ $T_d = \alpha T$

$C_d(t) = C(t-(1-m)T)$ $\alpha = \frac{T_d}{T}$ $m = 1-\alpha$

параметар модиф. З тр-је



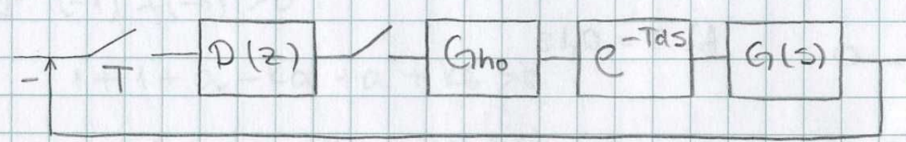
Сигнал C(t) вештачки закаснимо, па добијемо Cd(t) и онда добијемо мод. З тр-ју

$$\boxed{C(z,m) \overset{ДЕФ.}{=} \mathcal{Z}[C_d(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} C(kT-(1-m)T)z^{-k} = \mathcal{Z}_m[C(t)]}$$

→ модификована З тр-ја

$$\mathcal{Z}_m^{-1}[C(z,m)] = C(kT-(1-m)T)$$
$$= C(k+m-1)T$$
$$= C(kT+mT-T)$$
$$0 \le m \le 1$$

Инверзна модификована З -тр-ја



1° случај

$T_d < T$

$$W(z) = D(z)\,\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} e^{-T_d s} G(s)\right]$$
$$= D(z)(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s} e^{-T_d s}\right]$$
$$= D(z)(1-z^{-1})\,G_s(z,m)\big|_{m=1-T_d/T}$$

Карактеристична ј-на

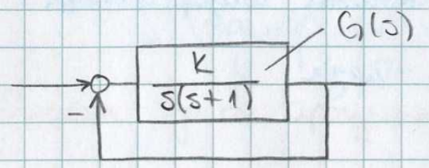
$$1 + W(z) = 0$$
$$z + D(z)(z-1)\,G_s(z,m)\big|_{m=1-T_d/T} = 0$$

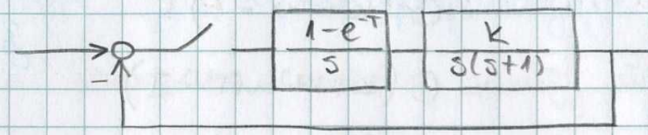
$T_d > T$

$T_d = nT + \lambda T$
$n = 1,2,3,\dots$ $0 \le \lambda < 1$

$$W(z) = D(z)\,\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} e^{-nTs} e^{-\lambda T s} G(s)\right]$$
$$W(z) = D(z)(1-z^{-1})z^{-n}\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s} e^{-\lambda T s}\right]$$
$$W(z) = D(z)(1-z^{-1})z^{-n}\,G_s(z,m)\big|_{m=1-\lambda}$$
$$1 + W(z) = z^{n+1} + D(z)(z-1)\,G_s(z,m)\big|_{m=1-\lambda} = 0$$

* Може доћи на кол.!!!





$$1+G(s)=0$$

$$1+\frac{K}{s(s+1)}=0$$

$$s^2+s+K=0$$

Сист. стаб. $\forall K>0$

a) $T=1s$

b) $T=0{,}1s$

$$G(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right]$$

$$=\frac{z-1}{z}K\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$=\frac{z-1}{z}K\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=\frac{z-1}{\cancel{z}}K\left[\frac{T\cancel{z}}{(z-1)^2}-\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}}+\frac{\cancel{z}}{z-e^{-T}}\right]$$

$$=K\left[\frac{T}{z-1}-1+\frac{z-1}{z-e^{-T}}\right]$$

$$=K\left[\frac{T(z-e^{-T})-(z-1)(z-e^{-T})+(z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

$$=K\left[\frac{Tz-Te^{-T}\cancel{-z^2}+ze^{-T}\cancel{+z}+e^{-T}\cancel{+z^2}\overset{-z}{\cancel{-2z}}+1}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

$$=K\left[\frac{(T+e^{-T}-1)z-Te^{-T}-e^{-T}+1}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

$T=1s$ $\quad a=0{,}3678$

$b=0{,}2694$

$$G(z)=K\frac{(az+b)}{z^2-(1+a)z+a}$$

$$1+G(z)=0$$

$$f(z)=z^2-(1+a)z+Kaz+a+Kb$$

1° $f(1)>0$

$$1\cancel{-(1+a)}+Ka\cancel{+a}+Kb>0$$

$$K(a+b)>0$$

$$K>0$$

2° $(-1)^2f(-1)>0$

$$1+1+a-Ka+a+Kb>0$$

$$2+2a-Ka+Kb>0$$

$$2(1+a)>K(a-b)$$

$$K<\frac{2(1+a)}{a-b}$$

$$K<26$$

3° $|a+Kb|<1$

$$Kb<1-a \qquad -a-Kb<1$$

$$K<\frac{1-a}{b}$$

Нема потребе, јер ће K увек бити веће од 0 $K>0$

$$K<2{,}39$$

$$0<K<2{,}39$$