

Metode formiranja i analyze medicinske slike

OPERACIJE NAD SLIKOM U TRANSFORMACIONOM DOMENU

2D DFT

- ▶ U praktičnim izračunavanjima na računaru se uvek radi sa konačnim diskretnim sekvencama – potrebno je frekvencijski spektar izračunati u konačnom broju diskretnih tačaka
- ▶ Analogno 1D DFT, 2D DFT je definisana **izrazom:**

$$X[k,l] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m,n] e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}, \quad 0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1.$$

2D DFT

- ▶ Inverzna 2D DFT je definisana izrazom:

$$x[m,n] = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X[k,l] e^{j \frac{2\pi}{M} mk} e^{j \frac{2\pi}{N} nl}, \quad 0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1$$

- ▶ Za 2D DFT važi većina osobina 2D FT

2D DFT

- ▶ Periodičnost sa periodom $M \times N$

$$x[m,n] = x[m+M,n] = x[m,n+N] = x[m+M,n+N]$$

$$X[k,l] = X[k+M,l] = X[k,l+N] = X[k+M,l+N]$$

- ▶ Linearnost

$$\sum_{i=1}^K a_i x_i[m,n] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^K a_i X_i[k,l]$$

2D DFT

► Konvolucija

$$x[m,n] * y[m,n] \Leftrightarrow X[k,l]Y[k,l]$$

► Množenje

$$x[m,n]y[m,n] \Leftrightarrow \frac{1}{MN} X[k,l] * Y[k,l]$$

► Separabilnost

$$x[m,n] = x_1[m]x_2[n] \Leftrightarrow X[k,l] = X_1[k]X_2[l]$$

2D DFT

► Pomeraj u prostornom ili frekvencijskom domenu

$$x[< m - m_1 >_M, < n - n_1 >_N] \Leftrightarrow X[k,l]e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}$$

$$e^{j\frac{2\pi}{M}mk_1} e^{j\frac{2\pi}{N}nl_1} x[m,n] \Leftrightarrow X[< k - k_1 >_M, < l - l_1 >_N]$$

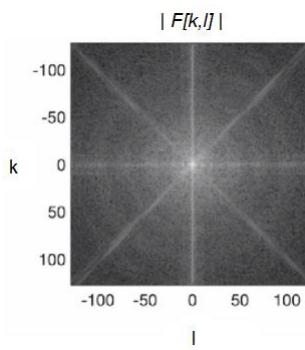
► Simetrija

2D DFT

- ▶ Amplitudski i fazni spekter
- ▶ Pomeranje početka u centar – optička DFT
- ▶ Zbog osobine separabilnosti, moguće je primeniti brze algoritme za izračunavanje DFT po svakoj dimenziji (npr. algoritme sa vektorskim radiksom)

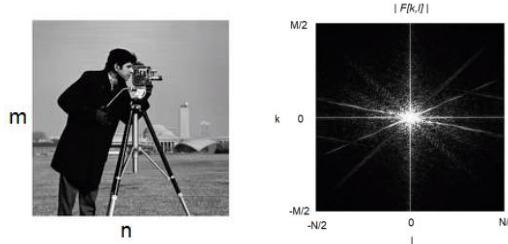
2D DFT

- ▶ Tumačenje amplitudskog spektra



2D DFT

- ▶ Tumačenje amplitudskog spektra



Ostali 2D transformacioni domeni

- ▶ DFT – svaki signal je moguće predstaviti sumom nekih kompleksnih vrednosti
- ▶ Diskretna kosinusna transformacija
- ▶ 1D (za razliku od DFT realna funkcija)

$$C[k] = \alpha[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{\pi}{2N} k(2n+1), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\alpha[k] = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & k = 0, \\ \sqrt{2/N}, & 1 \leq k \leq N-1. \end{cases}$$

Ostali 2D transformacioni domeni

- ▶ Diskretna kosinusna transformacija
- ▶ 2D (za razliku od DFT realna funkcija)

$$C[k, l] = \alpha[k]\beta[l] \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \cos \frac{\pi}{2M} k(2m+1) \cos \frac{\pi}{2N} l(2n+1), \quad 0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1$$

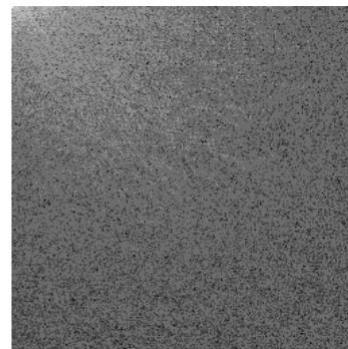
$$x[m, n] = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha[k]\beta[l] C[k, l] \cos \frac{\pi}{2M} k(2m+1) \cos \frac{\pi}{2N} l(2n+1), \quad 0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1$$

$$\alpha[k] = \begin{cases} 1/\sqrt{M}, & k = 0, \\ \sqrt{2/M}, & 1 \leq k \leq M-1. \end{cases}$$

$$\beta[l] = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & l = 0, \\ \sqrt{2/N}, & 1 \leq l \leq N-1. \end{cases}$$

Ostali 2D transformacioni domeni

- ▶ Diskretna kosinusna transformacija



Ostali 2D transformacioni domeni

► Diskretna sinusna transformacija

► 1D (za razliku od DFT **realna** funkcija)

$$S[k] = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin \frac{\pi}{N+1} (k+1)(n+1), \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=0}^{N-1} S[k] \sin \frac{\pi}{N+1} (k+1)(n+1), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

Ostali 2D transformacioni domeni

► Diskretna sinusna transformacija

► 2D (za razliku od DFT realna funkcija)

$$S[k, l] = \frac{2}{\sqrt{(M+1)(N+1)}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \sin \frac{\pi(k+1)(m+1)}{M+1} \sin \frac{\pi(l+1)(n+1)}{N+1}, \quad 0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1$$

$$x[m, n] = \frac{2}{\sqrt{(M+1)(N+1)}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} S[k, l] \sin \frac{\pi(k+1)(m+1)}{M+1} \sin \frac{\pi(l+1)(n+1)}{N+1}, \quad 0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1$$

Ostali 2D transformacioni domeni

- ▶ Diskretna Hartlejeva transformacija
 - ▶ 1D (za razliku od DFT realna funkcija)
 - ▶ Za računare je jako dobro što je jezgro isto

$$X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\cos \frac{2\pi kn}{N} + \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Ostali 2D transformacioni domeni

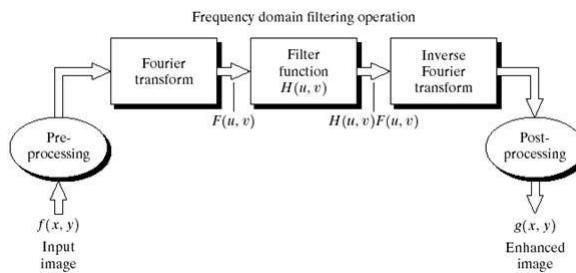
- ▶ Diskretna Hartlejeva transformacija
 - ▶ 2D (za razliku od DFT realna funkcija)

$$X[k, l] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi ln}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, M-1, l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X[k, l] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi ln}{N}\right), \quad m = 0, 1, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots, N-1$$

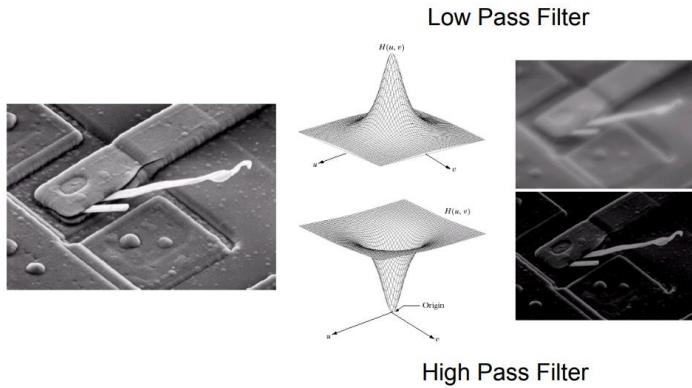
FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM DOMENU

FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM DOMENU



- ▶ Predprocesiranje i postprocesiranje uključuju centriranje spektra, transformacije inteziteta slike, celobrojno zaokruživanje, postavljanje slike na parnu dimenziju...

FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM DOMENU

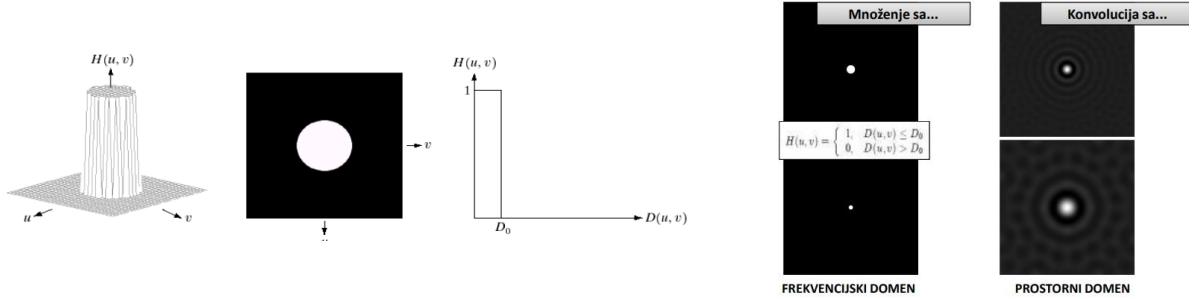


FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM DOMENU

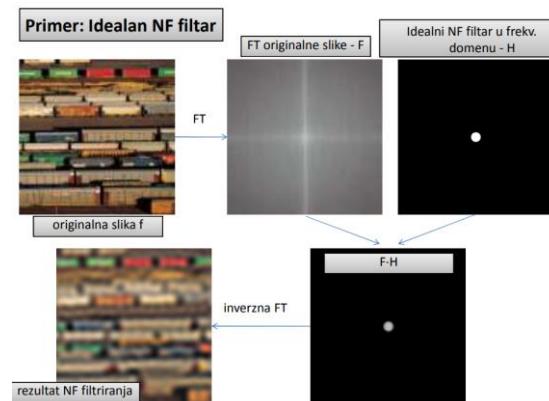
- ▶ Razmatraćemo 3 tipa filtra:
 - ▶ Idealni
 - ▶ Batervortov (Butterworth)
 - ▶ Gausov
- ▶ Najstrmiju karakteristiku ima idealni, najblažu Gausov
- ▶ U zavisnosti od reda Batervortovog filtra, karakteristika istog može podsećati na **idealni** ili **na Gausov**
- ▶ Karakteristiku 2D filtra je moguće prikazati pomoću Euklidovog rastojanja od **centra frekvencijske ravni** sa koordinatama $(u, v) = (M/2, N/2)$

$$D(\underline{u}, \underline{v}) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

IDEALAN FILTER PROPUSNIK NISKIH UČESTANOSTI

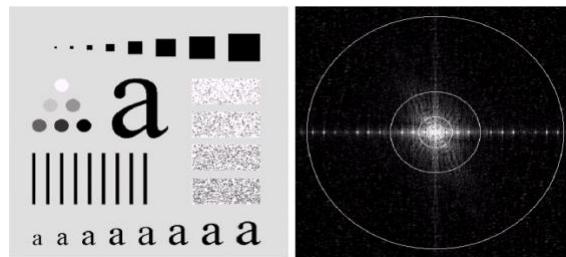


IDEALAN FILTER PROPUSNIK NISKIH UČESTANOSTI

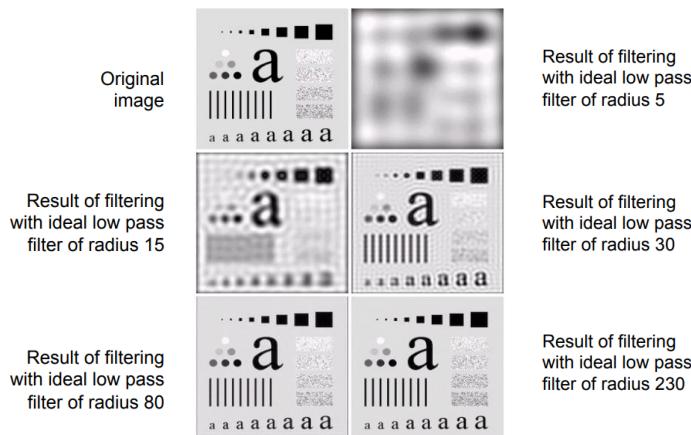


IDEALAN FILTER PROPUSNIK NISKIH UČESTANOSTI

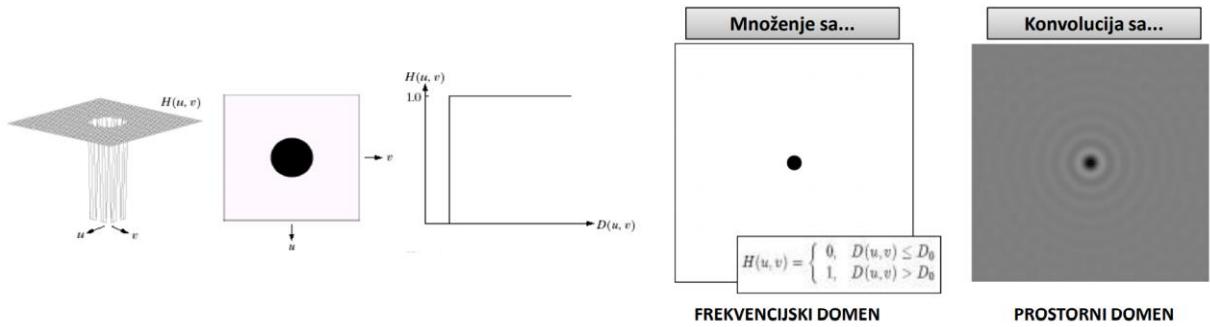
- ▶ 5 različitih karakteristika filtra



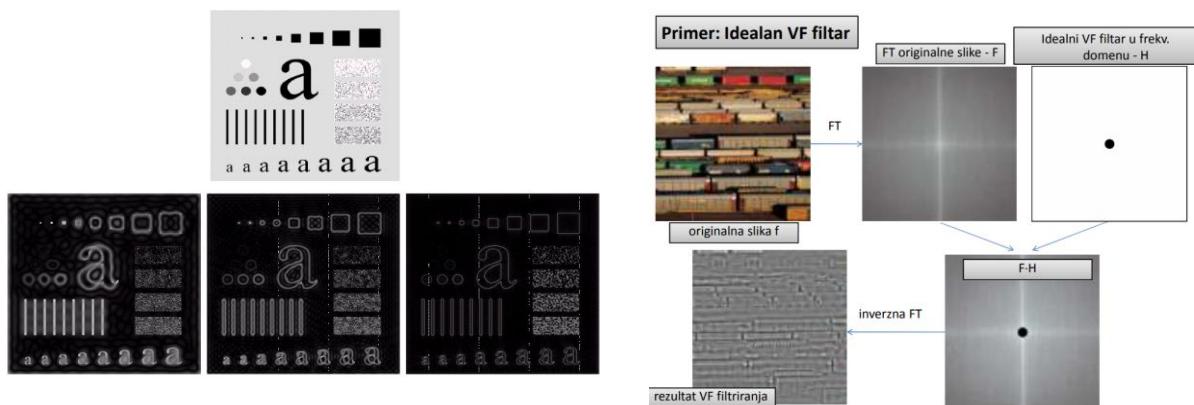
IDEALAN FILTER PROPUSNIK NISKIH UČESTANOSTI



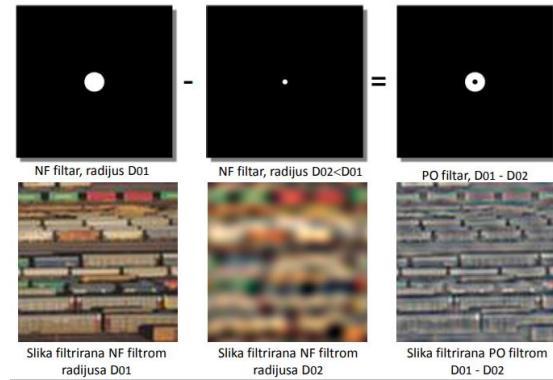
IDEALAN FILTER PROPUSNIK VISOKIH UČESTANOSTI



IDEALAN FILTER PROPUSNIK VISOKIH UČESTANOSTI

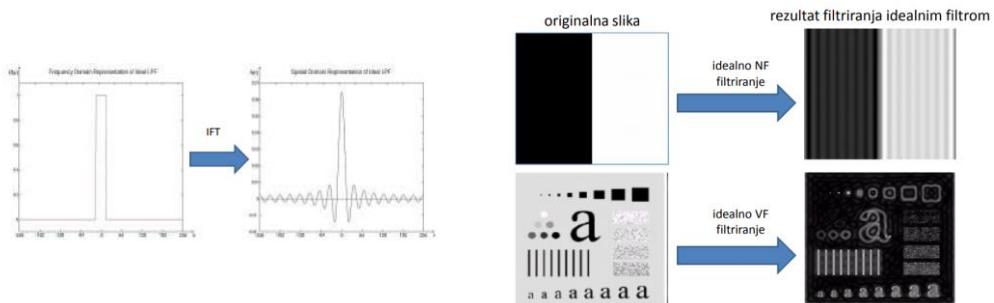


IDEALAN FILTER PROPUSNIK OPSEGА UČESTANOSTI



IDEALNI FILTRI

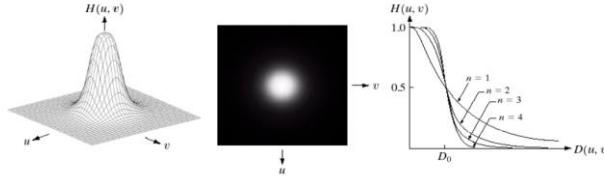
- ▶ Zbog strme karakteristike i procesa filtriranja, idealni filtri **ne daju** idealne rezultate (pojava zvonjenja)!



BATERVORTOV NF FILTAR

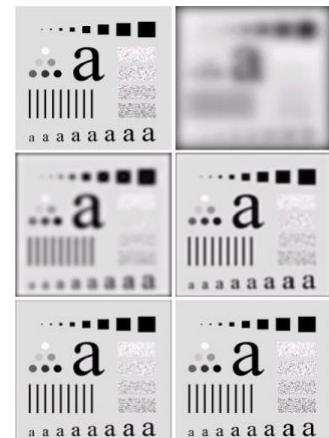
- ▶ Nagib amplitudske karakteristike filtra zavisi od reda filtra n
- ▶ Kada $n \rightarrow \infty$, Batervortov filter tezi idealnom NF filteru

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



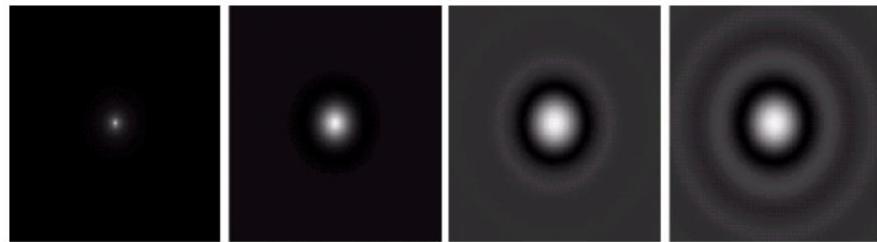
BATERVORTOV NF FILTAR

- ▶ Originalna slika i rezultati filtriranja filtrima razlicitih graničnih učestanosti (**red n=2**)
- ▶ Zvonjava (*ringing*) nije uočljiva ni u jednom slučaju – razlog je mala strmina amplitudske karakteristike Batervortovog filtra drugog reda



BATERVORTOV NF FILTER

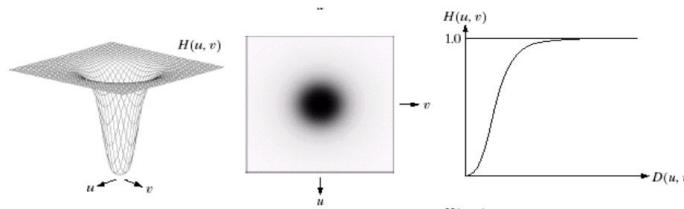
- ▶ Uticaj reda filtra na zvonjavu
 - ▶ Impulsni odzivi za $n=1, 2, 5, 20$



BATERVORTOV VF FILTER

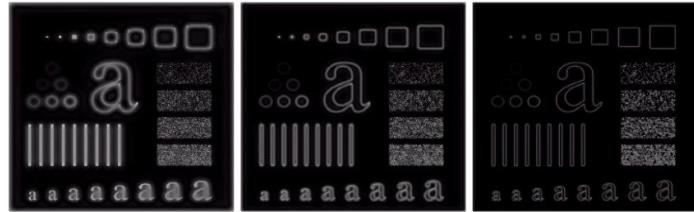
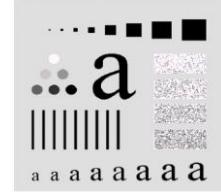
- ▶ Nagib amplitudske karakteristike filtra zavisi od reda filtra n
- ▶ Kada $n \rightarrow \infty$, Batervortov filter teži idealnom VF filteru

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$



BATERVORTOV VF FILTAR

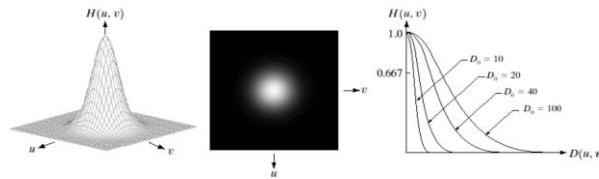
- ▶ Originalna slika i rezultati filtriranja filtrima različitih graničnih učestanosti (red $n=2$)
- ▶ Zvonjava (*ringing*) nije uočljiva ni u jednom slučaju
– razlog je mala strmina amplitudske karakteristike Batervortovog filtra drugog reda



GAUSOV NF FILTAR

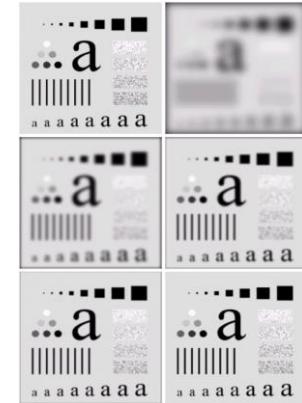
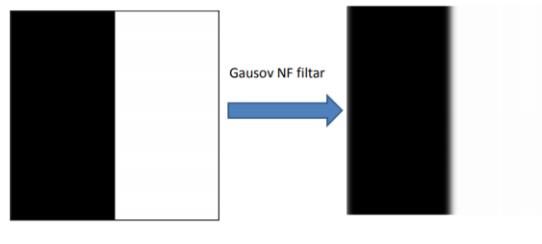
- ▶ Impulsni odziv ovog filtra ima oblik Gausove krive – **nema zvonjave**

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



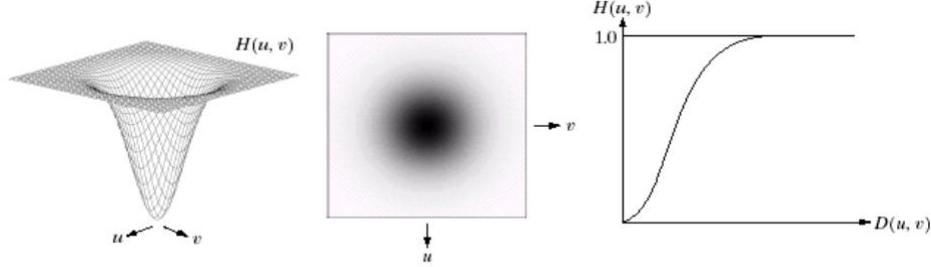
GAUSOV NF FILTAR

- ▶ Originalna slika i rezultati filtriranja filtrima različitih graničnih učestanosti



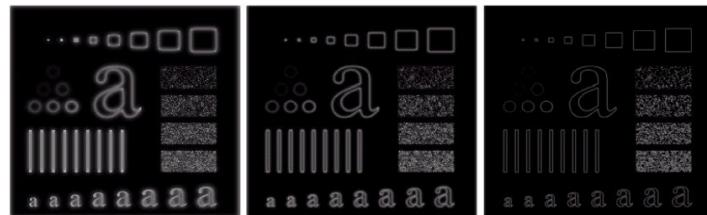
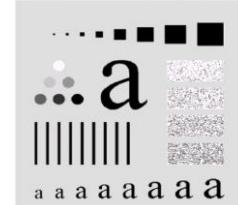
GAUSOV VF FILTAR

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$



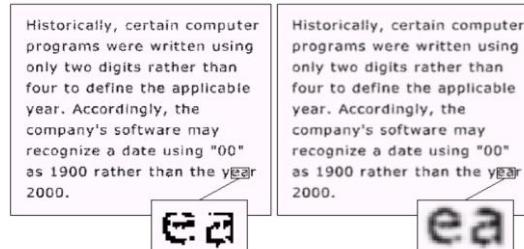
GAUSOV VF FILTAR

- ▶ Originalna slika i rezultati filtriranja filtrima različitih graničnih učestanosti



UPOTREBA NF FILTARA

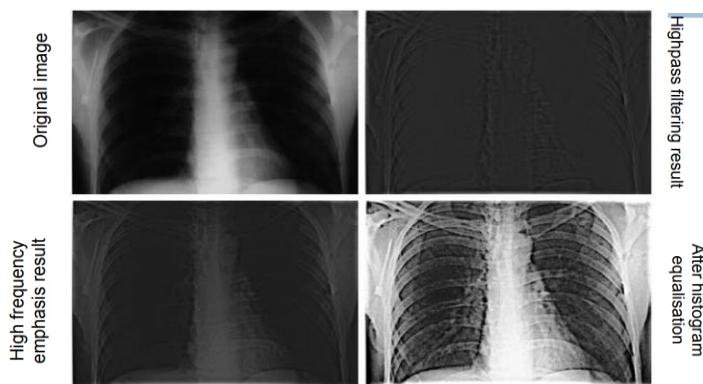
- ▶ Skenirani ili kopirani dokumenti sadrže karaktere koji su nepovezani, što otežava automatsko prepoznavanje teksta
- ▶ Ublažavanjem slike NF filtrom - karakteri u tekstu postaju povezani



UPOTREBA NF FILTARA



UPOTREBA VF FILTARA



VEZA IZMEĐU FILTRIRANJA U PROSTORНОM I FREKVENCIJSKOM DOMENU

- ▶ U prostornom domenu, filtriranje se vrši konvolucijom slike sa maskom, koja u stvari predstavlja impulsni odziv **filtrarske funkcije**
- ▶ Amplitudska karakteristika filtrarske funkcije iz koje je dobijena maska nije mnogo selektivna jer je maska malih **dimenzija** - filtriranje je lošije
- ▶ U prostornom domenu se zahteva dosta manji broj operacija
- ▶ U frekvenčnom domenu, filtriranje se vrši množenjem frekvenčnog spektra slike sa frekvenčnom **karakteristikom filtra**
- ▶ Samim tim, velika je selektivnost
- ▶ Zbog potrebe za izračunavanjem FT iIFT - velik broj operacija

Hvala na pažnji!