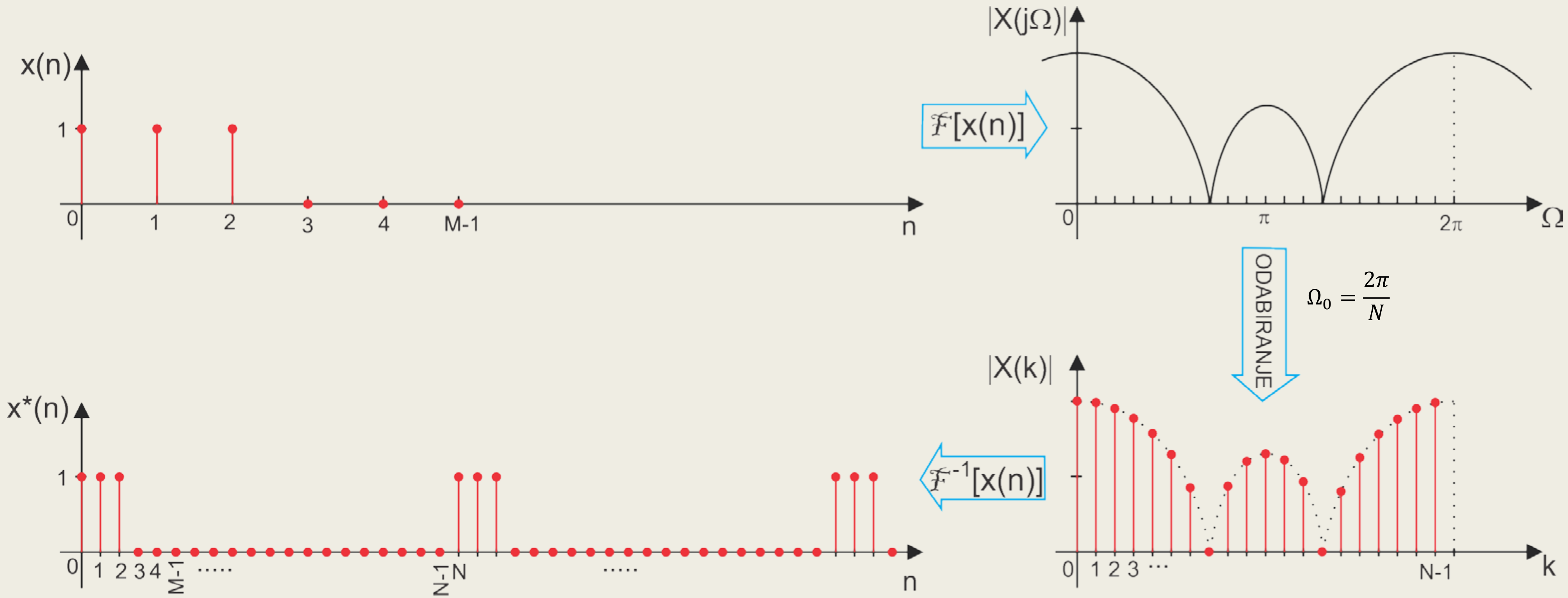
DISKRETNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

Primena DSP u upravljanju

DFT – Diskretna Furijeova Transformacija

- Spektar diskretnih signala je u opštem slučaju kontinualna, kompleksna i periodična funkcija
- Spektar je moguće odrediti analitički ukoliko je signal opisan matematičkim izrazom
- Kako odrediti spektar signala koji ne možemo predstaviti matematičkim izrazom kao što je muzika, video signal itd.?
- Digitalni računari su numerička mašine i ne mogu da rade sa kontinualnim funkcijama
- DFT – predstavlja diskretizaciju jedne periode spektra diskretnog signala u frekvencijskom domenu u N tačaka
- Odabiranje se vrši u tačkama $k \cdot \Omega_0 = k\frac{2\pi}{N}$ gde je $k=0, 1, 2,\ldots,N\text{-}1$

Odabiranje u frekvencijskom domenu



- $X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jn\Omega}$

- $\Omega = k\Omega_0 \quad i \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

- $X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)\, e^{-jnk\Omega_0} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$ $\qquad k=0, 1, 2,\ldots,N\text{-}1$

- Mora biti ispunjen uslov: $N \geq M$

- $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$ $\qquad k=0, 1, 2,\ldots,N\text{-}1$

- $x^*(n)$ se dobija od niza $x(n)$ kada se dopuni nultim elementima tako da dužina niza bude *N* tačaka

DFT i IDFT

- DFT
- $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$ $\qquad$ *k=0, 1, 2,…,N-1*

- IDFT
- $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{jnk\frac{2\pi}{N}}$ $\qquad$ *n=0, 1, 2,…,N-1*

- Rezolucija DFT se povećava sa povećanjem broja tačaka *N*
- Niz *x(n)* se može proizvoljno produžiti dodavanjem nultih elemenata, ne utiče na spektar, ali se dobija više tačaka DFT sa manjim razmakom

Spektralna analiza signala

- Neophodna da bi odredili karakteristike signala (komponente i energiju koju nose, širina spektra...)
- Primenom DFT možemo izračunati spektar signala koji je predstavljen nizom odbiraka na diskretnim učestanostima
- Niz koji predstavlja signal mora biti konačne dužine kako bi DFT mogao da se izračuna
- Realni signali obično dugo traju pa izračunavanje DFT-a nije moguće u prihvatljivom vremanu
- Ako je signal stacionaran spektar možemo proceniti primenom DFT-a nad konačnim segmentom diskretnog signala, odnosno niza konačna dužine N

Izdvajanje dela diskretnog signala

- $\{x(n)\}$ je niz beskonačne dužine čiji je spektar $X(j\Omega)$
- Da bi se procenio spektar $X(j\Omega)$ primenom DFT neophodno je izdvojiti segment niza $\{x(n)\}$ konačne dužine N, odnosno niz $\{v(n)\}$
- Elementi niza $\{v(n)\}$ se mogu predstaviti kao:

$$v(n) = x(n)w(n)$$

- Gde je:

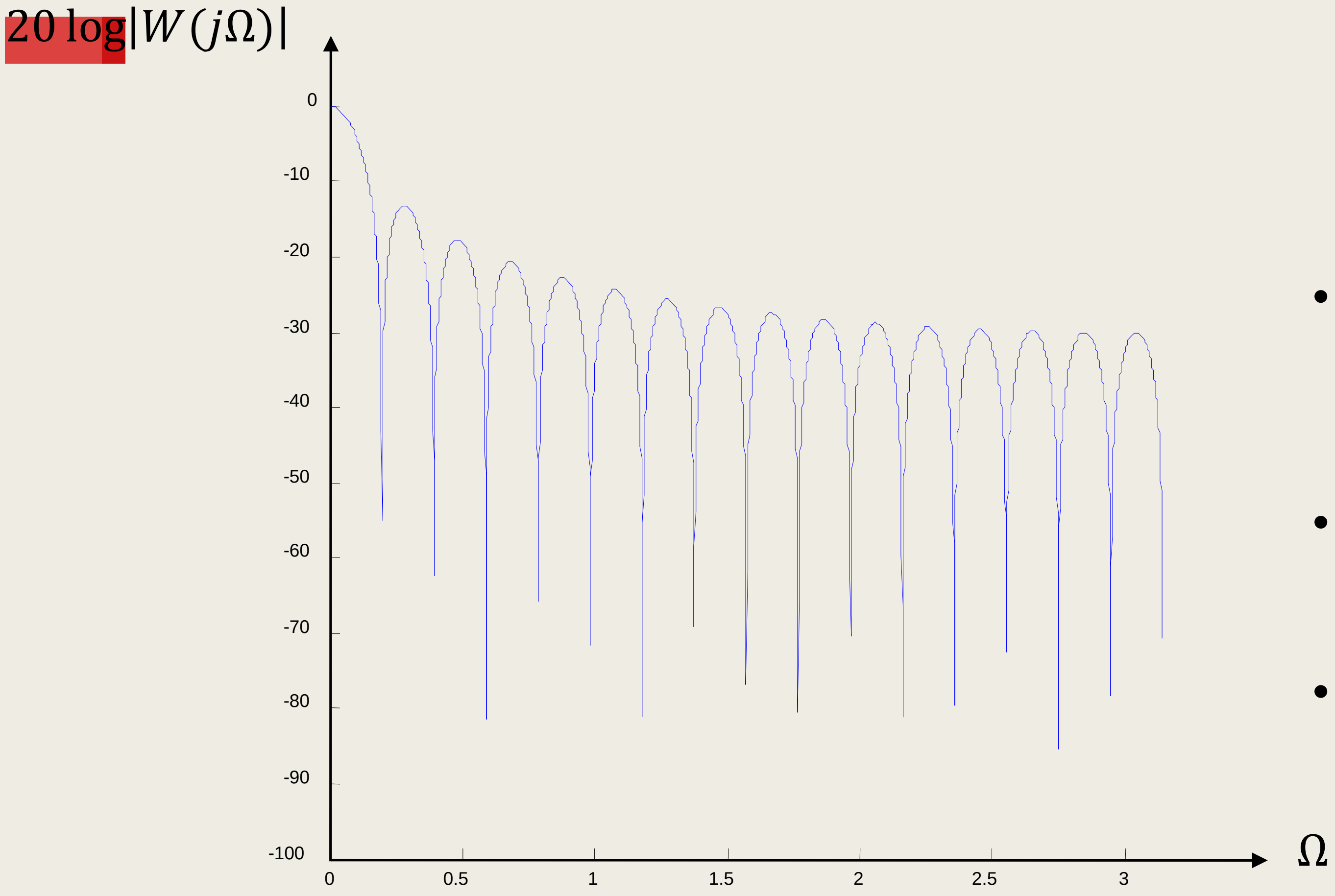
$$w(n) = \begin{cases} 1 \;\; za \;\; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad drugde \end{cases}$$

- $w(n)$ je pravougaoni niz dužine N, naziva se prozorskom funkcijom ili samo prozor

Uticaj prozorske funkcije na spektar signala

- Primenom DFT na niz $\{v(n)\}$ umesto na niz $\{x(n)\}$ određujemo spektar $V(j\Omega)$ koji predstavlja procenu spektra $X(j\Omega)$
- Odnosno rezultat DFT je niz $\{V(n)\}$ i zadatak je da ovaj niz predstavlja što verniju procenu spektra $X(j\Omega)$
- Ako je $v(n) = x(n)w(n)$ tada je $V(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Theta)W[j(\Omega-\Theta)]\, d\Theta$ konvolucija
- Odnosno $V(j\Omega)$ predstavlja spektar $X(j\Omega)$ modifikovan funkcijom $W(j\Omega)$
- $W(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(N-1)/2}$

Amplitudski spektar pravougaone prozorske funkcije, N=32



$$W(j\Omega) = \frac{\sin\left(\Omega N/_2\right)}{\sin\left(\Omega/_2\right)} e^{-j\Omega(N-1)/2}$$

- Povećanje N sužava se lukovi, posebno je bitno da se sužava glavni luk, dok se odnos amplitude glavnog i bočnih lukova ne menja
- Uži glavni luk = bolja procena spektra, idealno bi bilo da je $W(j\Omega)$ delta impuls, što odgovara beskonačno širokom prozoru
- Bočni lukovi izazivaju „curenje spektra“ pojavu komponenti u spektru $V(j\Omega)$ koje realno ne postoje u spektru $X(j\Omega)$

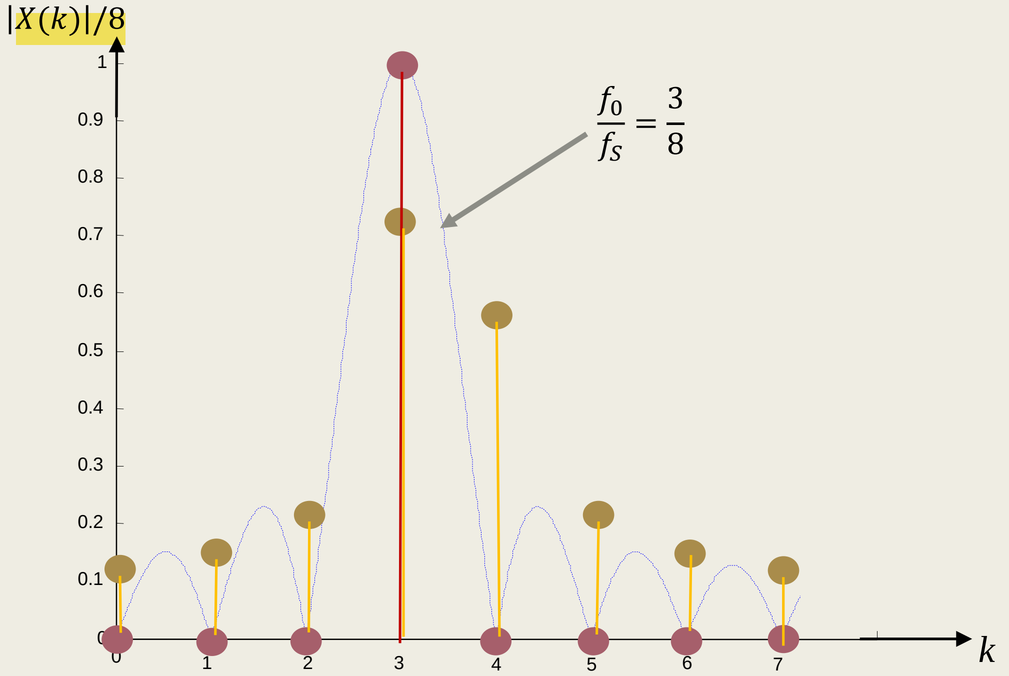
Procena spektra periodičnog niza

- Potpuna – tačna procena spektra niza $\{x(n)\}$ je moguća samo ako je niz periodičan i širina prozora jednaka je celom broju perioda niza
- Ako je $\{x(n)\}$ periodičan sa periodom L, procena će biti potpuna ukoliko je širina prozora $N = kL$ gde je k prirodan broj

Primer 1:

- $x(n) = e^{j\Omega_0 n} = e^{j2\pi n f_0/f_s}$
- Gde je: f_s - frekvencija odabiranja, a f_0 - frekvencija prostoperiodične funkcije
- $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j2\pi\frac{f_0}{f_s}n} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]n}$
- $X(k) = \dfrac{1-e^{-j2\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N}}{1-e^{-j2\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]}} = \dfrac{e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N}}{e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]}} \cdot \dfrac{e^{j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N}-e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N}}{e^{j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]}-e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]}} = \dfrac{e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N}}{e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]}} \cdot \dfrac{\sin\left\{\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N\right\}}{\sin\left\{\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]\right\}}$
- $X(k) = \dfrac{\sin\left\{\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]N\right\}}{\sin\left\{\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right]\right\}} e^{-j\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_s}\right](N-1)}$

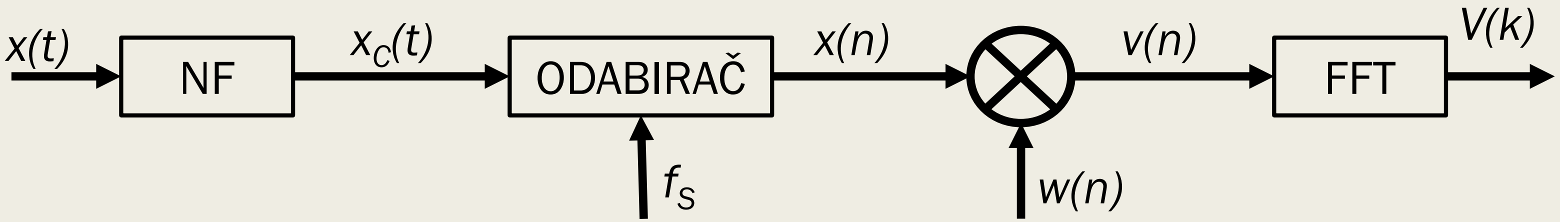
- $|X(k)| = \left| \dfrac{\sin\left\{\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_S}\right]N\right\}}{\sin\left\{\pi\left[\frac{k}{N}-\frac{f_0}{f_S}\right]\right\}} \right|$
- Niz je periodičan ako važi: $\frac{f_0}{f_S} = \frac{r}{l}$ gde su r i l prirodni brojevi
- Za $l = N$ širina prozora jednaka je celom broju perioda niza $\{x(n)\}$, odnosno $\frac{f_0}{f_S} = \frac{r}{N}$
- Tada je za $k = r$ $|X(k)| = N$, dok je za $k \neq r$ $|X(k)| = 0$
- Za $l \neq N$ širina prozora različita od celog broja perioda niza $\{x(n)\}$, odnosno $\frac{f_0}{f_S} \neq \frac{r}{N}$
- Tada je za svako k $|X(k)| \neq 0$
- Primer: N=8
- a) $\frac{f_0}{f_S} = \frac{3}{8}$
- b) $\frac{f_0}{f_S} = \frac{3}{7}$



Spektralna analiza primenom DFT

- Dobra metoda koja se danas uspešno koristi na digitalnim računarima
- Brza Furijeova transformacija FFT je algoritam koji omogućava brže izračunavanje DFT
- Tačnost procene spektra jako zavisi od dužine segmenta diskretnog signala
- Kada su osobine signala nepoznate računa se DFT za neko N i za 2N, ako se dobijeni spektri razlikuje ponovo se duplira dužina segmenta sve dok se ne postigne da se izračunati spektri za kN i 2kN ne razlikuju značajno
- Opisan pravougaoni prozor ima visoke bočne lukove koji dovode do značajnog curenja spektra
- Sa druge strane, pravougaoni prozor ima malu širinu glavnog luka što omogućava dobro razdvajanje bliskih komponenti u spektru
- Curenje spektra se može smanjiti prozorskim funkcijama koje imaju niže bočne lukove

Struktura spektralnog analizatora

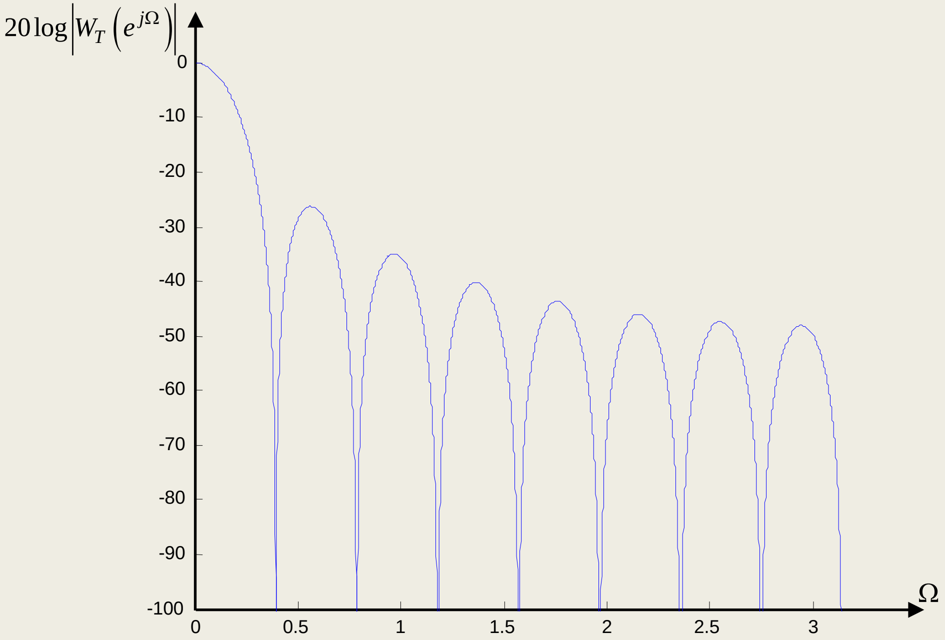


- Elementi niza $\{V(k)\}$ predstavljaju amplitudski spektar na učestanostima $k\frac{f_S}{N}$, $k=0, 1, 2,\ldots,N-1$
- Za realne signale dovoljno je posmatrati prvih $\frac{N}{2}$ komponenti, odnosno opseg $0 \leq f < \frac{f_S}{2}$

Trougaona ili Batervartova prozorska funkcija

$$w_T(n) = \begin{cases} 2n/N, & n = 0,1,\ldots,N/2 \\ w_T(N-n), & n = (N/2)+1,\ldots,N-1 \end{cases}$$

$$W_T\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_T(n) e^{-j\Omega n} = \frac{2}{N}\left(\frac{\sin(\Omega N/4)}{\sin(\Omega/2)}\right)^2 e^{-j\Omega(N/2-1)}$$



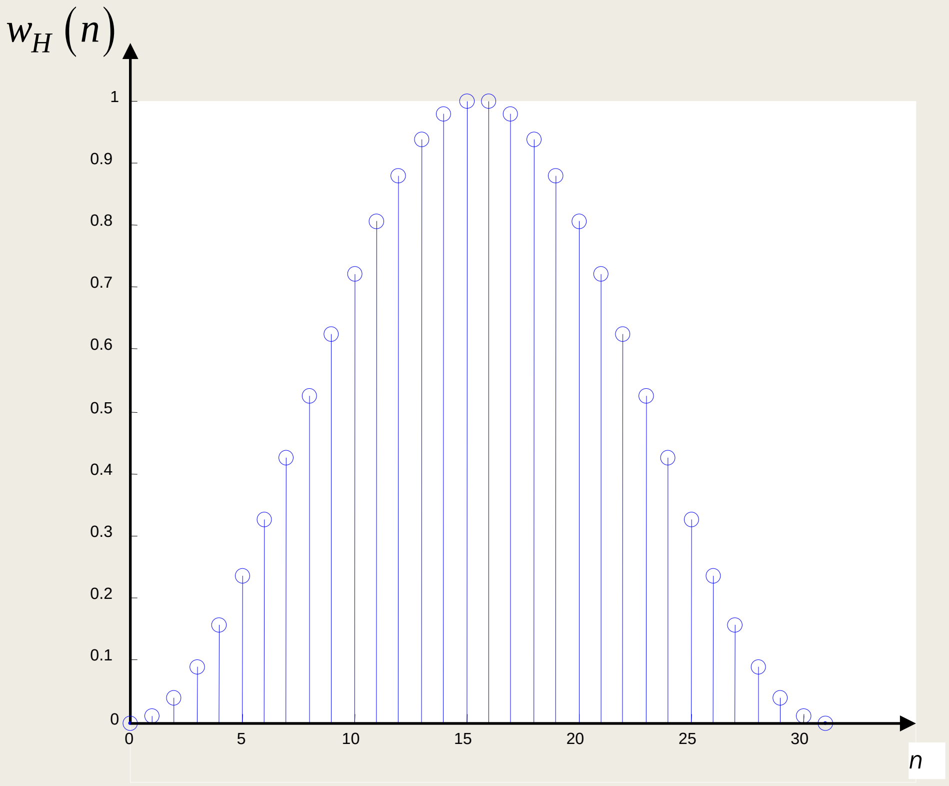
Amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije, N=32

HANOVA PROZORSKA FUNKCIJA

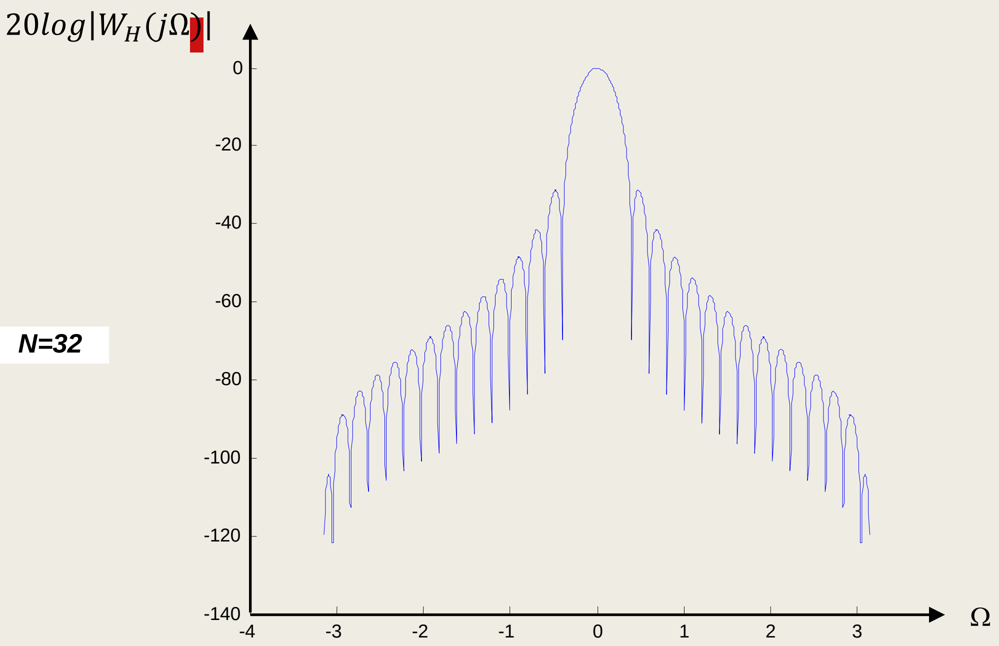
$$w_H(n) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\right), \; n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$W_H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{2}W_R\left(e^{j\Omega}\right) - \frac{1}{4}\left(W_R\left(e^{j(\Omega-2\pi/N)}\right) + W_R\left(e^{j(\Omega+2\pi/N)}\right)\right)$$

$W_R\left(e^{j\Omega}\right)$ spektar pravougaone prozorske funkcije



N=32

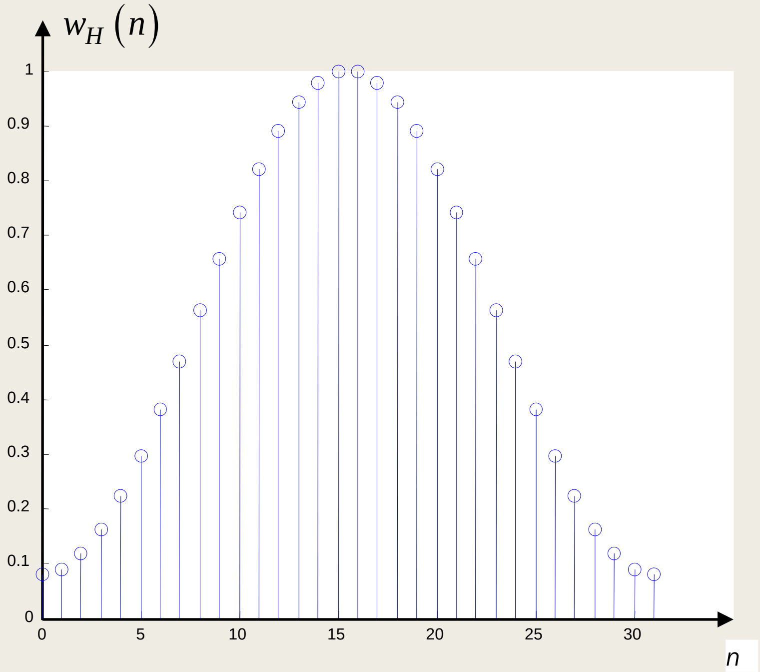


Hemingova prozorska funkcija

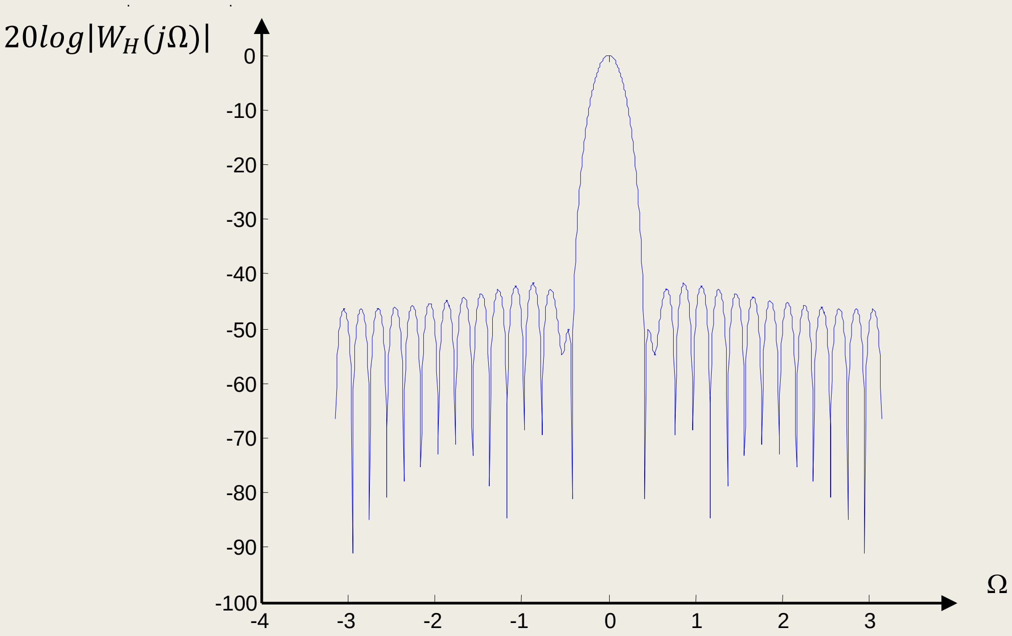
$$w_H(n) = \alpha_H - (1-\alpha_H)\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right),\ n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$W_H\left(e^{j\Omega}\right) = \alpha_H W_R\left(e^{j\Omega}\right) - \frac{1}{2}(1-\alpha_H)\left(W_R\left(e^{j(\Omega-2\pi/N)}\right) + W_R\left(e^{j(\Omega+2\pi/N)}\right)\right)$$

$W_R\left(e^{j\Omega}\right)$ spektar pravougaone prozorske funkcije



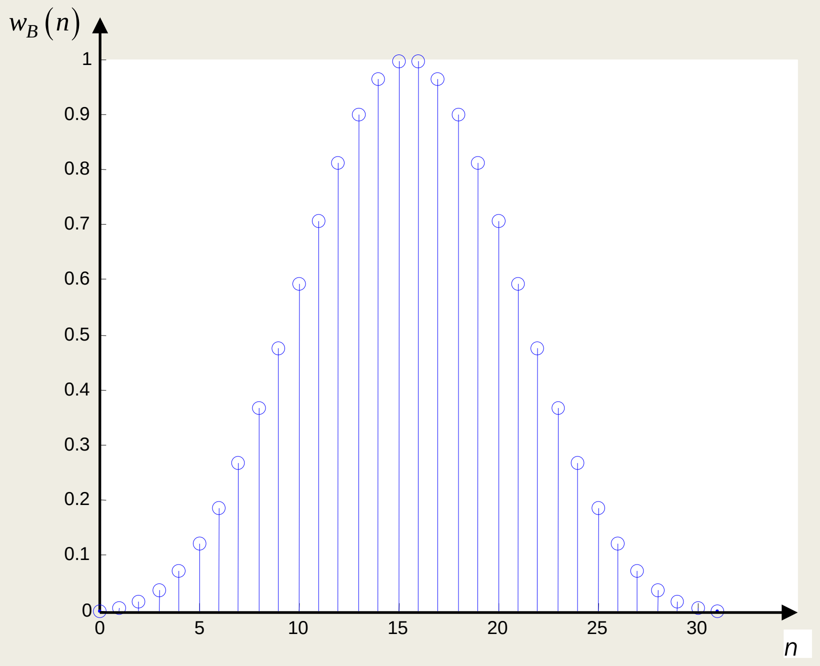
***Hemingova prozorska funkcija*, N=32**



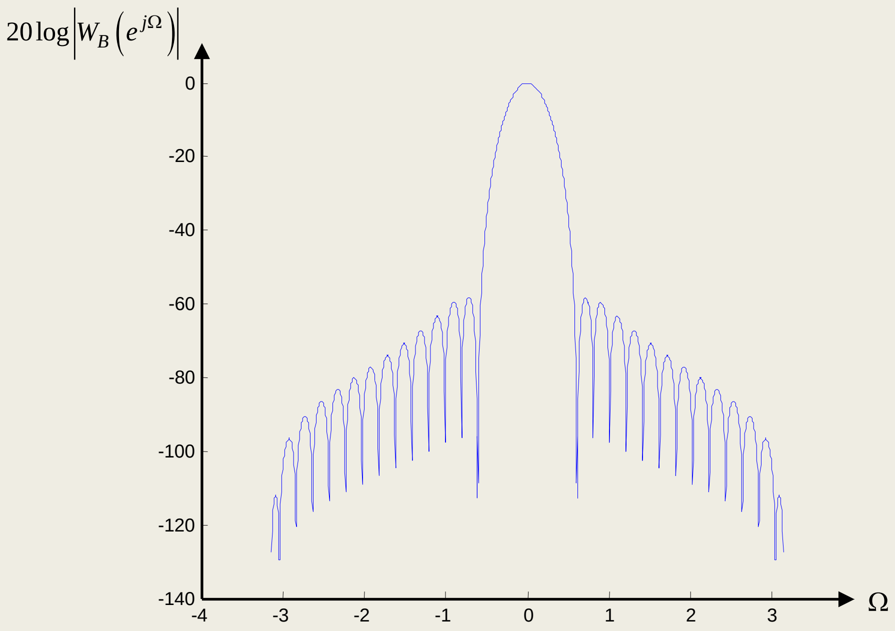
***Amplitudski spektar Hemingove prozorske funkcije*, N=32**

Blekmanova prozorska funkcija

$$w_B(n)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right),\ n=0,1,\ldots,N-1 \qquad \sum_{m=0}^{M} a_m=1 \qquad W_B\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{a_m}{2}\left(W_R\left(e^{j(\Omega-2\pi m/N)}\right)+W_R\left(e^{j(\Omega+2\pi m/N)}\right)\right)$$



***Blekmanova prozorska funkcija*, N=32**



Amplitudski spektar Blekmanove prozorske funkcije, N=32

Poređenje prozorskih funkcija

PROZORSKA FUNKCIJA	ŠIRINA GLAVNOG LUKA	SLABVLJENJE PRVOG BOČNOG LUKA [dB]	OPADANJE LUKOVA [dB/oct]
Pravougaona	$4\pi/N$	13.2	6
Trougaona	$8\pi/N$	26.6	12
Hanova	$8\pi/N$	31.2	18
Hemingova	$8\pi/N$	42.4	6
Blekmanova	$12\pi/N$	58	18

OSOBINE DISKRETNE FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

Primena DSP u upravljanju

Osobine DFT: Linearnost

- Ako je niz $\{x(n)\}$ linearna kombinacija nizova jednakih dužina $\{x_1(n)\}$ i $\{x_2(n)\}$

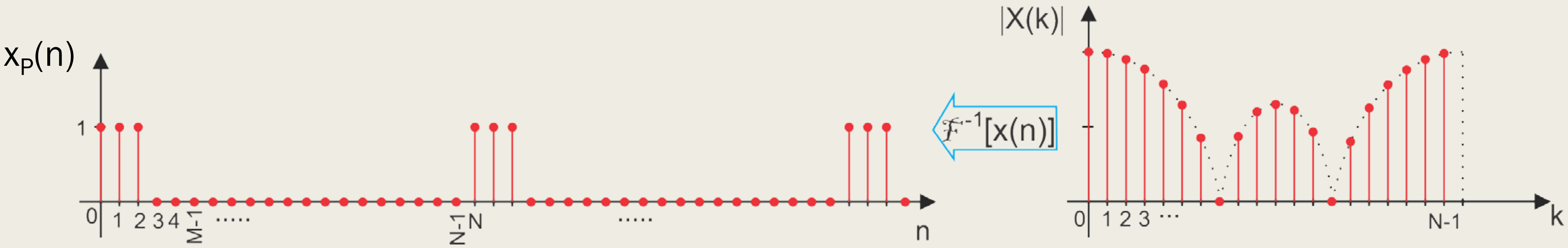
  $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ gde su a i b proizvoljne konstante
- DFT niza $\{x(n)\}$ je linearna kombinacija DFT-ova nizova $\{x_1(n)\}$ i $\{x_2(n)\}$

  $\mathrm{X}(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$
- $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1}[ax_1(n) + bx_2(n)]\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} =$

$$= a\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + b\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = aX_1(k) + bX_2(k)$$

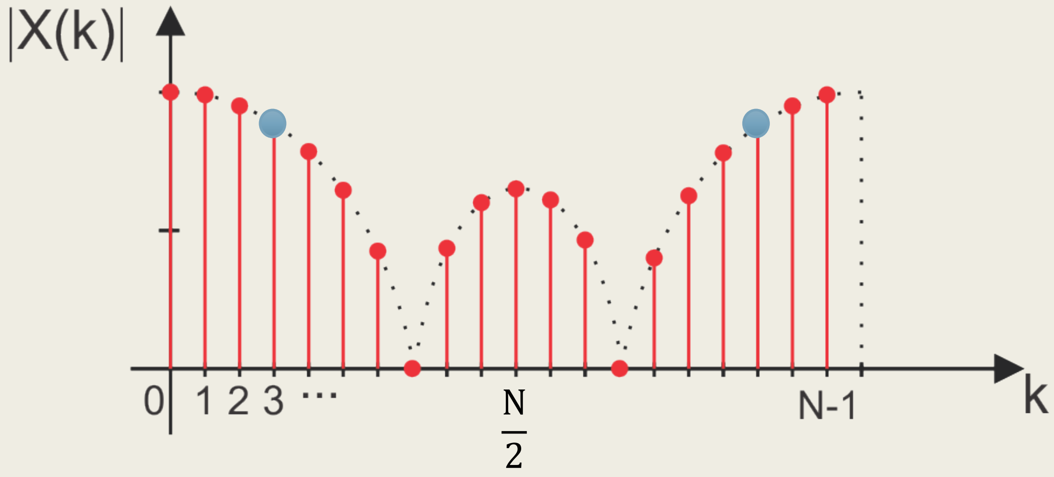
Osobine DFT: Periodičnost

- DFT i IDFT daju periodičan rezultat
- $X(k+N)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-jn(k+N)\frac{2\pi}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}e^{-jnN\frac{2\pi}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$
- $x(n+N)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,e^{j(n+N)k\frac{2\pi}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,e^{jnk\frac{2\pi}{N}}e^{jNk\frac{2\pi}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,e^{jnk\frac{2\pi}{N}}$



Osobine DFT: DFT realnog niza

- Ako je niz $\{x(n)\}$ realan, realan deo niza $\{X(k)\}$ (njegovog DFT-a) je parni, a imaginarni deo neparni niz u odnosu na član broj $N/2$
- $X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jn(N-k)\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jnN\frac{2\pi}{N}} e^{jnk\frac{2\pi}{N}} = X^*(k)$



Osobine DFT: DFT realnog parnog niza

- DFT realnog parnog niza je čisto realan niz
- Neka je niz $\{x(n)\}$ kauzalan niz dužine N
- On je paran oko elementa $(N\text{-}1)/2$ ako važi: $x(N-n) = x(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots (N-1)/2$
- $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{(N-1)/2}\left[x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + x(N-n)e^{-j(N-n)k\frac{2\pi}{N}}\right]$
- $X(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} x(n)\left[e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + e^{-jnN\frac{2\pi}{N}}e^{jnk\frac{2\pi}{N}}\right] = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} x(n) 2\cos(nk\frac{2\pi}{N})$
- Ako je niz $\{x(n)\}$ realan tada je i niz $\{X(k)\}$ realan

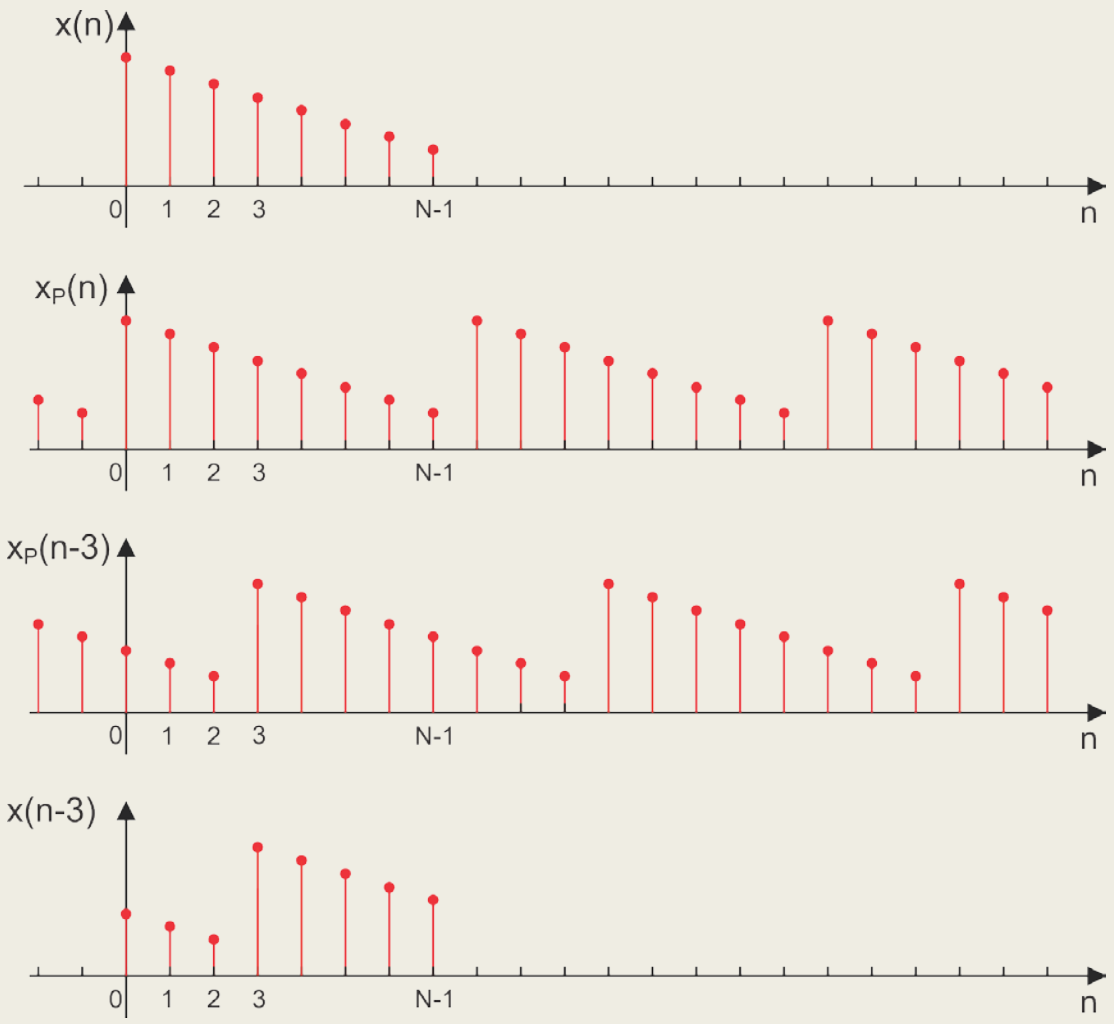
Osobine DFT: DFT realnog neparnog niza

- DFT realnog neparnog niza je čisto imaginaran niz
- Neka je niz $\{x(n)\}$ kauzalan niz dužine N
- On je neparan oko elementa $(N\text{-}1)/2$ ako važi: $x(N-n) = -x(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots (N-1)/2$
- $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{(N-1)/2}\left[x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + x(N-n)e^{-j(N-n)k\frac{2\pi}{N}}\right]$
- $X(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} x(n)\left[e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} - e^{-jnN\frac{2\pi}{N}}e^{jnk\frac{2\pi}{N}}\right] = -\sum_{n=0}^{(N-1)/2} x(n)2jsin(nk\frac{2\pi}{N})$
- Ako je niz $\{x(n)\}$ realan tada je niz $\{X(k)\}$ imaginaran

Osobine DFT: cikličan pomeraj u vremenskom domenu

- Nizovi vezani za DFT su periodični sa periodom N
- Mi samo posmatramo jednu periodu, odnosno nizove $\{x(n)\}$ i $\{X(k)\}$, periodičnih nizova $\{x_P(n)\}$ i $\{X_P(k)\}$
- Kod pomeranja niza u vremenu moramo posmatrati pomeranje periodičnog niza
- Pomeren niz $\{x_1(n)\}$ nastaje tako što odbirci koji odlaze sa kraja intervala $[0, N-1]$ ponovo ulaze na njegov početak. Ovo se naziva **ciklični pomeraj**
- $\{x_1(n)\} = \{x(n-m)_N\}$ simbol N u indeksu je oznaka periode cikličnog pomeraja
- $X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)\, e^{-j(r+m)k\frac{2\pi}{N}} = e^{-jmk\frac{2\pi}{N}} X(k)$

Ciklični pomeraj signala



Osobine DFT: cikličan pomeraj u frekvencijkom domenu

- $\{X_1(k)\} = \{X(k-l)_N\}$ simbol N u indeksu je oznaka periode cikličnog pomeraja
- $x_1(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k-l)\, e^{jnk\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} X(r)\, e^{jn(r+l)\frac{2\pi}{N}} = e^{jnl\frac{2\pi}{N}} x(n)$

Osobine DFT: Parsevalova teorema

- Energija niza konačne dužine N može se izračunati direktno u vremenskom domenu ili indirektno u frekvencijskom domenu pomoću DFT koeficijenata

- $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$