

Modifikovana \mathcal{Z} transformacija

Mirna N. Kapetina

Zoran D. Jeličić

19. maj 2020.

1 Uvodna razmatranja

Podsetimo se da je \mathcal{Z} transformacija važan alat za analizu ponašanja linearnih sistema automatskog upravljanja u trenucima odabiranja, kao i da primenom inverzne \mathcal{Z} transformacije možemo da dobijemo informaciju o vrednosti signala na izlazu iz sistema samo u trenucima odabiranja $t = kT$. Stoga, lako se zaključuje da je jedan od nedostataka \mathcal{Z} transformacije gubitak informacije o vrednosti signala između trenutaka odabiranja.

Nedostaci primene \mathcal{Z} transformacije primetni su i pri analizi sistema kod kojih postoji transportno kašnjenje. Pojava kašnjenja se oslikava tako što se trenutna promena ulaznog signala, na izlazni signal odražava posle određenog vremena. Funkcija prenosa takvih sistema sadrži član $e^{-s\tau}$ koji modeluje kašnjenje u trajanju od vremena τ . Ukoliko je kašnjenje jednako celobrojnom umnošku periode odabiranja kT , tada se odgovarajući digitalni ekvivalent lako nalazi direktnom smenom definicije kompleksne promenljive z , $z := e^{sT}$, kao z^{-k} , što je na osnovu ranijeg izlaganja poznato i kao operator kašnjenja za k perioda. Međutim, ukoliko kašnjenje τ nije jednako celobrojnom umnošku periode odabiranja, postupak određivanja digitalnog ekvivalenta člana $e^{-s\tau}$ se usložnjava.

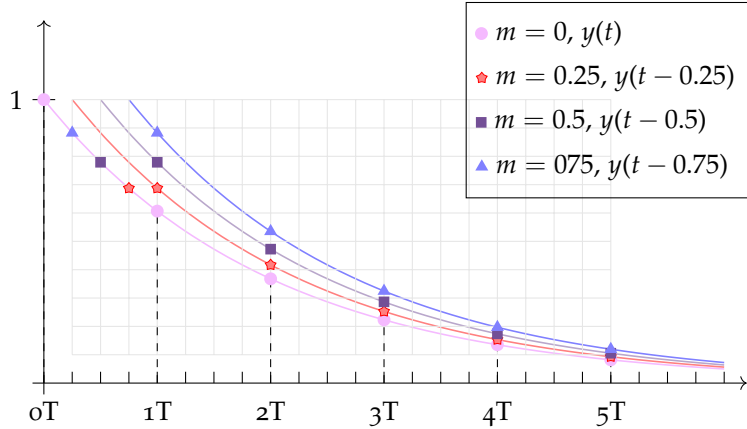
U cilju prevazilaženja pomenutih problema, predložen je postupak koji se naziva *modifikovana \mathcal{Z} transformacija*. Takva transformacija može se koristiti za analizu sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, kao i za određivanje vrednosti signala mimo trenutaka odabiranja.

2 Modifikovana \mathcal{Z} transformacija

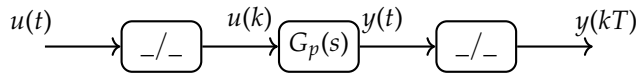
Posmatrajmo signal $y(t)$ prikazan na slici 1 (roze boje) i pretpostavimo da je to izlaz iz kontinualnog procesa koji je deo digitalnog upravljačkog sistema, slika 2.

Analiza takvih sistema u celosti se vrši u diskretnom domenu, pa je i vrednost signala $y(t)$ poznata samo u trenucima odabiranja $t = kT$ (prikazani na slici 1 kružnim roza markerima).

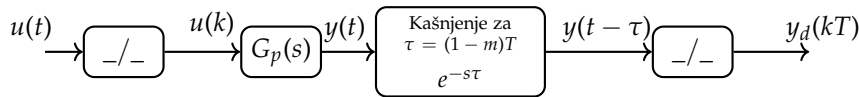
Ukoliko, međutim, želimo da znamo vrednost ovog signala mimo



ovih trenutaka, za $t \neq kT$ (slika 1, vrednosti označene različitim markerima na roza signalu $y(t)$), možemo signal $y(t)$ prethodno zakasniti za vreme τ (translirati grafik funkcije u desno za vrednost τ), a potom diskretizovati odabiračem sa periodom T , kao što je i označeno na slici 1, gde se vidi da su „željene“ vrednosti koje su se ranije nalazile van trenutaka odabiranja sada našle u trenucima takta A/D konvertora.



U smislu algebre funkcije prenosa, to se može postići propuštanjem kontinualnog izlaza iz sistema najpre kroz kolo koje vrši transportno kašnjenje τ , modelovano sa $e^{-s\tau}$, a zatim kroz A/D konvertor koji ga diskretizuje, slika 3. Variranjem različitih vrednosti kašnjenja τ između 0 i T , dobili bi na odabiraču različite vrednosti funkcije $y(t)$ između dva trenuka odabiranja koje ranije nismo bili u mogućnosti da znamo.



Ukoliko pretpostavimo da vrednost čistog transportnog kašnjenja τ nije veća od periode odabiranja T , tada se može zapisati i kao $\tau = \alpha T$, pri čemu je jasno da važi $0 < \alpha \leq 1$. U skladu sa ovom notacijom, izlaz iz sistema sa slike 3 posle prolaska kroz blok transportnog kašnjenja postaje

$$y_d(t) = y(t - \tau) = y(t - \alpha T) \quad (1)$$

Daljom diskretizacijom, odnosno prolaskom signala $y_d(t)$ kroz A/D

Slika 1: Izlaz iz sistema $y(t)$ zakasneo za različite vrednosti τ

Na slici 1 je prikazana funkcija $y(t) = 2.5e^{-0.5t}$ (roza signal), gde je vrednosti funkcije u trenucima odabiranja, $T = 1$, naznačena roza kružnim markerima. To su jedine vrednosti koje znamo posle \mathcal{Z} (i \mathcal{Z}^{-1}) transformacije, $y(kT)$. Ukoliko želimo da znamo vrednost u trenutku $y(0.25)$ (plavi trougao), to nije moguće jer odabirač „ne okida“ u tom trenutku. Da bi dobili tu vrednost u trenutku „okidanja“ odabirača signal je zakasnjen za 0.75 sekundi, na slici 1 prikazan kao plava linija, i vidi se da je vrednost zakasnelog signala u trenutku odabiranja $t = T$ jednaka vrednosti $y(0.25)$, odnosno oba trougla imaju istu vrednost. Slično je i ukoliko želimo npr. da znamo vrednost $y(0.5)$, postupak je naznačen lila kvadratićima, odnosno lila zakasnelim signalom, i $y(0.75)$ je označeno crvenim zvezda markerom, a odgovarajući zakasneni signal $y(t - 0.25)$ kojim se dobija ta vrednost crvenom linijom.

Slika 2: Blok dijagram digitalnog sistema

Slika 3: Blok dijagram digitalnog sistema sa kašnjenjem

konvertor, dobijemo vrednost signala $y(t)$ u trenutku $t - \alpha T$ koji je između dve periode odabiranja. Ukoliko variramo vrednost parametra α u intervalu $(0, 1]$, dobijamo i ostale vrednosti varijable t , odnosno signala $y(t)$ na izlazu odabirača A/D. \mathfrak{Z} transformacija ovako zakasnelog (transliranog) signala u literaturi je poznata kao *modifikovana \mathfrak{Z} transformacija*. U literaturi se pri definisanju modifikovane \mathfrak{Z} transformacije umesto parametra α , koristi parametar modifikovane \mathfrak{Z} transformacije koji se definiše kao $m = 1 - \alpha$, što će u nastavku biti i naznačeno.

Redosled operacija pri primeni modifikovane \mathfrak{Z} transformacije ne smije biti zamenjen, prvo je potrebno zakasniti signal a potom odbirkovati.

Definicija 1. (Modifikovana \mathfrak{Z} transformacija) Modifikovana \mathfrak{Z} transformacija vremenski kontinualnog signala f , u oznakama $\mathfrak{Z}_m\{f(t)\}$ ili $F(z, m)$, definiše se kao \mathfrak{Z} transformacija vremenski zakasnelog signala $f_d = f(t - \tau)$, gde je $\tau \in (0, T]$,

$$F(z, m) = \mathfrak{Z}\{f(t - \tau)\} = \mathfrak{Z}_m\{f(t)\} \Big|_{\alpha = \frac{\tau}{T}, m = 1 - \alpha}$$

Po definiciji, modifikovana \mathfrak{Z} transformacija podrazumeva da je kašnjenje signala kraće ili jednako trajanju jedne periode odabiranja, obično se kašnjenje izražava u obliku $\tau = \alpha T = (1 - m)T$, gde je $\alpha \in (0, 1]$, odnosno $m \in [0, 1)$.

Inverzna modifikovana \mathfrak{Z} transformacija nam omogućuje da odredimo vrednost signala $f(t)$ između trenutaka odabiranja, odnosno u trenucima $t = (k + m - 1)T$,

$$f((k + m - 1)T) = \mathfrak{Z}^{-1}\{F_d(z)\} = \mathfrak{Z}_m^{-1}\{F(z, m)\} \quad (2)$$

za bilo koje $m \in [0, 1)$.

Primer 1. Pokazati da je modifikovana \mathfrak{Z} transformacija Hevisajd signala $\mathfrak{Z}_m\{h(t)\} = \frac{1}{z-1}$

Rešenje:

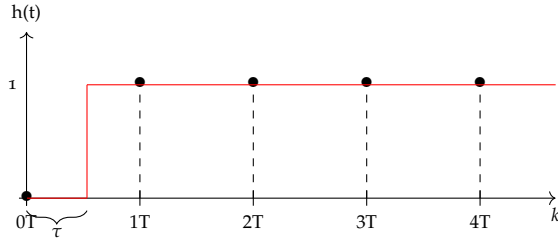
Posmatrajmo signal na slici 4, koji predstavlja zakasnelu Hevisajd funkciju za vreme τ , odnosno $h(t - \tau)$.

Primenom definicije \mathfrak{Z} transformacije dobijamo

$$\begin{aligned} F(z, m) &= \mathfrak{Z}_m\{h(t)\} = \mathfrak{Z}\{h(t - \tau)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(t - \tau) = 0z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots \\ &= z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = z^{-1} \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1}. \end{aligned}$$

Dobijeni izraz za \mathfrak{Z}_m je se smatra tabličnim i može se naći u Prilog A. ¹

¹ Treba primetiti da Hevisajdova funkcija ima sve vrednosti jednake i da je \mathfrak{Z} transformacija zakasnelog signala za vreme $\tau < T$ ista kao transformacija signala zakasnelog za celu periodu T , $\mathfrak{Z}\{h(k-1)\} = \frac{z}{z-1}z^{-1} = \frac{1}{z-1}$.



Slika 4: Zakasnela diskretna Hevisajdova funkcija

Modifikovana \mathfrak{Z} transformacija ostalih elementarnih signala izvodi se po definiciji \mathfrak{Z} transformacije i može se naći u tablicama zajedno sa \mathfrak{Z} transformacijom istih, (vidi četvrtu kolonu tabele u prilogu A).

Ukoliko je poznata Laplasova transformacija signala $f(t)$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, moguće je direktno primeniti modifikovanu \mathfrak{Z} transformaciju, bez da prethodno dobijemo signal $f(t)$ primenom inverzne transformacije,

$$F(z, m) = \mathfrak{Z}\{F(s)e^{-(1-m)Ts}\} . \quad (3)$$

To nam je omogućeno korištenjem tablica za \mathfrak{Z} transformaciju, gde možemo na osnovu pozicije u istoj vrsti uočiti kojem odgovarajućem Laplas obliku signala odgovara tablični izraz za \mathfrak{Z}_m transformaciju izvornog signala.

Primer 2. Proces je opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{s+2}e^{-0.03s}$. Odrediti digitalni ekvivalent procesa ukoliko je perioda odabiranja $T = 0.1$.

Rešenje:

Digitalni ekvivalent podrazumeva \mathfrak{Z} transformaciju zajedno sa kolom zadržske,

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathfrak{Z}\{G_{ho}(s)G(s)\} = \mathfrak{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{1}{s+2} e^{-0.03s}\right\} \\ &= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{(s+2)s} e^{-0.03s}\right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Jasno je da se u izrazu (4) javlja \mathfrak{Z} transformacija procesa sa kašnjenjem $\tau = 0.03$, pri čemu je $\tau < T$, što zahteva primenu modifikovane \mathfrak{Z} transformacije, pri čemu je $\alpha = \frac{0.03}{0.1} = 0.3$, a parametar modifikovane \mathfrak{Z}_m je $m = 1 - \alpha = 0.7$,

Pri računanju izraza (8) korištena je tablica \mathfrak{Z} transformacije, gde treba uočiti sledeće

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\Rightarrow h(t) \Rightarrow \frac{1}{z-1} \\ \frac{1}{s+a} &\Rightarrow e^{at} \Rightarrow \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)s} e^{-0.03s} \right\} \\
&= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{1}{(s+2)s} \right\} \Big|_{m=0.7} \\
&= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\} \Big|_{m=0.7} \\
&= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z - e^{-2T}} \right\} \Big|_{m=0.7} \\
&= \frac{1}{2} \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z - e^{-2T})} \Big|_{m=0.7} \\
&= \frac{0.06532z + 0.02531}{z(z - 0.8187)} \tag{5}
\end{aligned}$$

Ukoliko je kašnjenje signala veće od jedne periode odabiranja, $\tau > T$, ne možemo primeniti definiciju modifikovane \mathfrak{Z} transformacije, jer prema definiciji kašnjenje mora biti manje od jedne periode. Tada je neophodno izraziti kašnjenje preko celih perioda i „ostatka“

$$\tau = rT + \theta T,$$

gde je r ceo broj, a $\theta \in (0, 1]$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z} \{ (f(t - \tau))^* \} &= \mathfrak{Z} \{ (f(t - rT - \theta T))^* \} \\
&= z^{-r} \mathfrak{Z} \{ (f(t - \theta T))^* \} = z^{-r} F(z, 1 - \theta).
\end{aligned}$$

Primer 3. Proces je opisan funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1}{s+2} e^{-0.23s}$. Odrediti digitalni ekvivalent procesa ukoliko je perioda odabiranja $T = 0.1$.

Rešenje:

Postupak rešavanja započinjemo kao u prethodnom primeru

$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathfrak{Z} \{ G_{ho}(s) G(s) \} = \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s+2} e^{-0.23s} \right\} \\
&= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)s} e^{-0.23s} \right\} \tag{6}
\end{aligned}$$

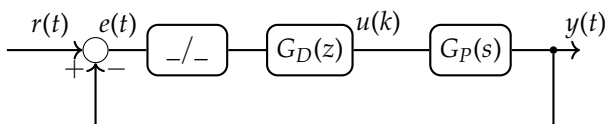
Međutim, u izrazu (6) pojavljuje se kašnjenje $\tau = 0.23$, pri čemu je $\tau > T$, pri čemu ne možemo primeniti modifikovane \mathfrak{Z} transformacije. Ukoliko kašnjenje izrazimo preko celih perioda T , $\tau = 0.2 + 0.03 = 2T + 0.3T$ pa izraz (6) postaje

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)s} e^{-2Ts} e^{-0.3Ts} \right\}. \tag{7}$$

Direktnom primenom definicije kompleksne promenljive z , $z := e^{sT}$, član e^{-2Ts} postaje z^{-2} dok član $e^{-0.3T}$ modeluje ostatak kašnjenja, koji sada iznosi $0.3T$ i manji je od periode T , što omogućuje primenu \mathfrak{Z}_m transformacije za $\alpha = 0.3$, odnosno $m = 0.7$,

$$\begin{aligned}
G(z) &= (1 - z^{-1})z^{-2} \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\} \Big|_{m=0.7} \\
&= (1 - z^{-1})z^{-2} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z - e^{-2T}} \right\} \Big|_{m=0.7} \\
&= \frac{1}{2} \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z^3(z - e^{-2T})} \Big|_{m=0.7} \\
&= \frac{0.06532z + 0.02531}{z^3(z - 0.8187)}
\end{aligned} \tag{8}$$

Primer 4. Primer sistema automatskog upravljanja prikazan je na slici 5. Proces jednosmernog motora modelovan je funkcijom prenosa $G(s) = \frac{2}{s+2}$. Brzinom motora upravlja se pomoću diskretnog P regulatora sa konstantom pojačanja $k_p = 1$. Proces je pobuđen odskočnom pobudom $r(t) = 4h(t)$. Kolika je brzina na izlazu motora u trenutku $t = 0.7$, ukoliko je takt rada digitalnog uređaja na kome je implementiran diskretni P regulator $T = 0.5 \text{ sec}$?



Slika 5: Blok dijagram digitalnog sistema

Rešenje:

Analizirano kolo sistema automatskog upravljanja je hibridna kombinacija komponenti koje rade u vremenski kontinualnom domenu (proces) i vremenski diskretnom domenu (regulator). Da bi analizirali ovakav proces u celosti i odredili njegov odziv neophodno je formirati jedinstvenu funkciju spregnutog prenosa sistema u diskretnom domenu. Odnosno, potrebno je formirati digitalni ekvivalent kontinualnog sistema $G_P(s)$ kao prvi korak pri analizi. Kako je izlaz iz digitalnog regulatora, odnosno upravljački signal, diskretna, $u(k)$, podrazumeva se da je neophodno postojanje D/A konvertora (u našem slučaju kola zadržke nultoga reda $G_{h0}(s)$) na ulazu u sam proces koje će omogućiti konverziju u kontinualni upravljački signal (npr strujni signal). Stoga, digitalni ekvivalent se dobija

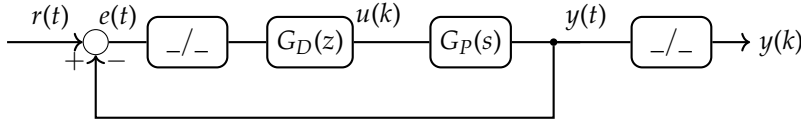
$$\begin{aligned}
G_P(z) &= \mathfrak{Z}\{G_{h0}(s)G_P(s)\} = \mathfrak{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{2}{s+2}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\} = (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right\} = \frac{1 - e^{-2T}}{z - e^{-2T}}
\end{aligned} \tag{9}$$

Sada je moguće blok dijagram kola sa slike 5, predstaviti kao na slici 6, kako je $G_D(z) = 1$ sledi da je

$$\begin{aligned}
W_{sp}(z) &= \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G_P(z)} \\
&= \frac{1 - e^{-2T}}{z - 2e^{-2T} + 1}
\end{aligned} \tag{10}$$

a odziv sistema na ulaznu pobudu $r = 4h(k) \Rightarrow R(z) = 4\frac{z}{z-1}$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= W_{sp}(z)R(z) = 4\frac{z(1 - e^{-2T})}{(z-1)(z - 2e^{-2T} + 1)} \\ &= \frac{2}{z-1} + \frac{2(1 - 2e^{-2T})}{z - 2e^{-2T} + 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

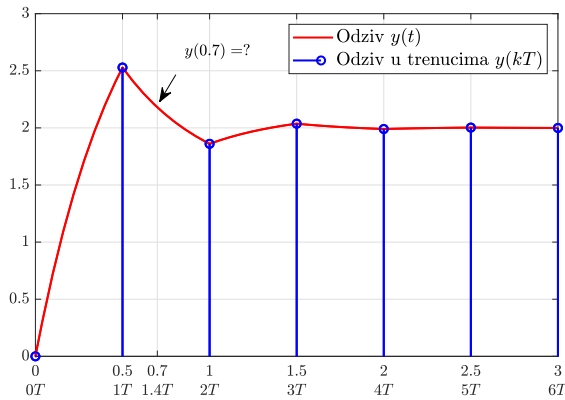


Slika 6: Blok dijagram digitalnog sistema

Primenom inverzne ž transformacije izraza (11) dobijamo

$$y(k) = 2h(k-1) + 2(1 - 2e^{-2T})(2e^{-2T} - 1)^{k-1}h(k-1)$$

Ukoliko prikažemo signal $y(k)$, slika 7, jasno je da ne možemo odrediti traženu vrednost izlaznog signala u trenutku $t = 0.7 \text{ sec}$, jer su poznate samo vrednosti u trenucima odabiranja, dok se tražena vrednost nalazi između dva trenutka odabiranja $t = T$ i $t = 2T$. Iz navedenih razloga potrebno je



Slika 7: Odziv sistema iz Primera 2

translirati (zakasniti) izlazni signal za vreme $\tau = 0.3$ (vreme koje je potrebno da vrednost iz trenutka $t = 0.7$ bude „pomerena“ u trenutak $t = 1$), što bi omogućilo očitavanje vrednosti signala iz trenutku $t = 0.7 \text{ sec}$, jer bi ta vrednost „prošla“ kroz odabirač. Kašnjenje izlaznog signala ćemo modelovati prolaskom signala kroz blok $e^{-s\tau}$ kao što je prikazno na slici 8.

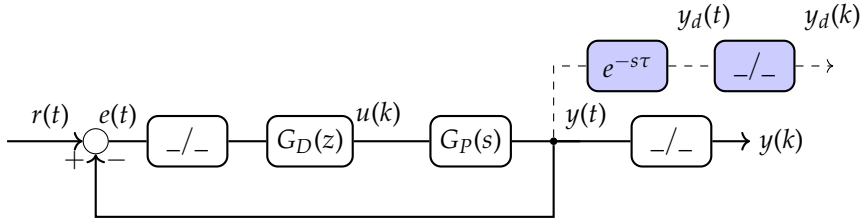
Međutim, uvođenjem novog bloka koji modeluje kašnjenje u direktnu granu, dolazi do promene izgleda funkcije spregnutog prenosa sistema koju dobijamo primenom pravila algebre funkcije prenosa

$$Yd(s) = Y(s)e^{-s\tau} \quad (12)$$

$$Y(s) = G_{ho}(s)G_P(s)U^*(s) \quad (13)$$

$$U^*(s) = G_D(z)E^*(s) \quad (14)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (15)$$



Slika 8: Blok dijagram digitalnog sistema

zamenom (13) u (15), i dalje u (14) i primenom *zvezda* transformacije dobijamo

$$U^*(s) = \frac{G_D(z)R^*(s)}{1 + G_{ho}G_P(s)} \quad (16)$$

a potom uvrštavanjem (18) u (13) i (12) konačno sledi

$$Yd^*(s) = \frac{G_D(z)G_{ho}G_P e^{-sT} R^*(s)}{1 + G_{ho}G_P(s)^*} \quad (17)$$

zapisano u z domenu

$$Wsp(z) = \frac{Yd(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G_P(z, m)}{1 + G_P(z)} \quad (18)$$

Član $G_P(z, m)$ predstavlja modifikovanu ž transformaciju digitalnog ekvivalenta od procesa $G_P(s)$, pri čemu je $m = 1 - \alpha = 1 - \frac{T}{T}$. Primenom tabličnih izraza za modifikovanu ž transformaciju sledi

$$\begin{aligned} G_P(z, m) &= \mathfrak{Z}_m \{ G_{ho}(s)G_P(s)e^{-sT} \} \\ &= \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{2}{s + 2} \right\} \\ &= (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{2}{s(s + 2)} \right\} = (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 2} \right\} \Big|_{\alpha = \frac{T}{T}; m=1-\alpha} \\ &= \frac{z - 1}{z} \left\{ \frac{1}{z - 1} - \frac{e^{-2mT}}{z - e^{-2T}} \right\} = \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z - e^{-2T})} \end{aligned}$$

Funkcija spregnutog prenosa (18) sada dobija oblik

$$Wsp(z) = \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z - 2e^{-2T} + 1)} \quad (19)$$

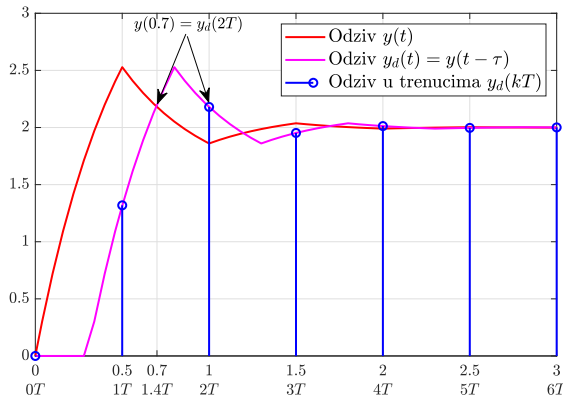
a odziv na ulaznu pobudu

$$\begin{aligned} Y_d(z) &= \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z - 2e^{-2T} + 1)} \frac{4z}{z - 1} = \frac{4z}{z - 1} \frac{z(1 - e^{-2mT}) - e^{-2T} + e^{-2mT}}{z(z - 2e^{-2T} + 1)} \\ &= \frac{A}{z - (2e^{-2T} - 1)} + \frac{B}{z - 1} \end{aligned}$$

gde je $A = \frac{2(2e^{-2mT} - 2e^{-2mT}e^{-2T} + e^{-2T} - 1)}{2e^{-2T} - 2}$ i $B = \frac{2(1 - e^{-2T})}{2e^{-2T} - 2}$. Primenom inverzne ž transformacije, $\mathfrak{Z}^{-1}\{Y_d(z)\}$, vrednost izlazne promenljive $y(t)$ u trenucima $t = (k + m - 1)T$ je

$$y_d(kT) = y((k + m - 1)T) = A(e^{-2T} - 1)^{k-1}h(k - 1) + Bh(k - 1)$$

Na osnovu prethodnog, možemo izračunati vrednost funkcije izlaza u trenutku $t = 0.7 \text{ sec}$ kao rezultat kašnjenja signala za $\tau = 0.3 \text{ sec}$ pri čemu vrednost signala $y(0.7)$ odgovara odbirku $k = 2$. Kako je za $T = 0.5$ i $\alpha = \frac{0.3}{0.5} \Rightarrow m = 1 - \frac{3}{5} = 0.4$, možemo proveriti da je $t = (k + m - 1)T = 0.7$. Dobijena vrednost iznosi $y(0.7) = 2.18$ kao što je prikazano na slici 9.

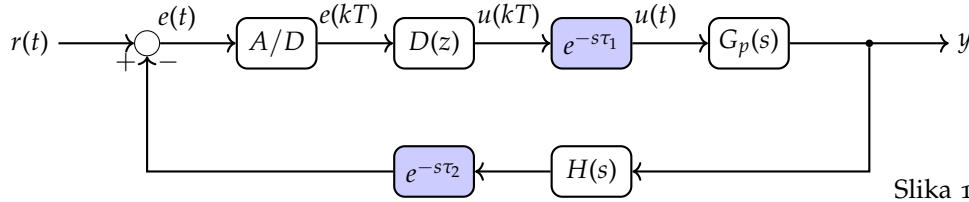


Slika 9: Odziv sistema iz Prime-ra 2

3 Digitalni sistemi sa transportnim kašnjenjem

Većina sistema automatskog upravljanja, pa tako i digitalni sistemi, u praksi poseduju čisto vremensko kašnjenje. Pojava kašnjenja može da bude posledica raznih aspekata, kao deo dinamike samog procesa kojim se upravlja, kao rezultat procesa A/D i D/A konverzije u sklopu digitalnih računara, koja je u savremenim uređajima skoro zanemarljiva zbog napretka tehnologije u brzini protoka i rada računara, reakcije različitih elemenata koji čine sam sistem, često i samog čoveka, kao i prenosa podataka na daljinu. Kašnjenje τ se, kao što smo već napomenuli, modeluje u kompleksnom domenu kao $e^{-s\tau}$, koji kao nelinearan član otežava studiju vremenski kontinualnih sistema. Iz teorije kontinualnih poznatih sistema, poznato je da ovaj član, kao deo funkcije povratnog prenosa, utiče na faznu karakteristiku sistema tako što smanjuje pretek faze i time smanjuje stabilnost celokupnog sistema. Za razliku od kontinualnih sistema, primenom modifikovane \mathfrak{z} transformacije analiza digitalnih sistema upravljanja sa transportnim kašnjenjem je pojednostavljena.

Posmatrajmo sliku 10, na kojoj je prikazan primer digitalnog sistema upravljanja, gde možemo uočiti dva bloka koja modeluju transportno kašnjenje. Kašnjenje τ_1 objedinjuje kašnjenje u direktnoj grani procesa koje je posledica dinamike procesa kojim se upravlja i postupaka A/D i D/A konverzije. Kašnjenje τ_2 iz povratne grane je rezultat kašnjenja pri prenosu podataka od senzora do digitalne računarske jedinice. U cilju analize stabilnosti, računanja odziva sistema,



Slika 10: Digitalni sistem upravljanja sa kašnjenjem

i drugih performansi sistema, potrebno je formirati funkciju prenosa sistema. Neka je $\tau_1 < T$ i $\tau_2 < T$, i pretpostavimo da je $(\tau_1 + \tau_2) < T$ dobijamo da je direktna grana funkcije prenosa

$$\begin{aligned} W_d(z) &= D(z) \mathfrak{Z} \{ G_h(s) G(s) e^{-s\tau_1} \} = D(z) (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} e^{-s\tau_1} \right\} \\ &= D(z) (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{m=1-\frac{\tau_1}{T}} \end{aligned} \quad (20)$$

dok je povratna grana

$$\begin{aligned} W_p(z) &= D(z) \mathfrak{Z} \{ G_h(s) G(s) e^{-s\tau_1} H(s) e^{-s\tau_2} \} = D(z) \mathfrak{Z} \{ G_h(s) G(s) H(s) e^{-s(\tau_1+\tau_2)} \} \\ &= D(z) (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{HG(s)}{s} e^{-s(\tau_1+\tau_2)} \right\} \\ &= D(z) (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{HG(s)}{s} \right\} \Big|_{m=1-\frac{(\tau_1+\tau_2)}{T}} \end{aligned} \quad (21)$$

Ukoliko je $G(z, m_1) = \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{m=1-\frac{\tau_1}{T}}$ i $GH(z, m_2) = \mathfrak{Z}_m \left\{ \frac{HG(s)}{s} \right\} \Big|_{m=1-\frac{(\tau_1+\tau_2)}{T}}$ funkcija spregnutog prenosa je

$$\begin{aligned} W_{sp}(z) &= \frac{W_d(z)}{1 + W_p(z)} \\ &= \frac{D(z)(1 - z^{-1})G(z, m_1)}{1 + D(z)(1 - z^{-1})GH(z, m_2)} \end{aligned} \quad (22)$$

Dobijena funkcija spregnutog prenosa, uz primenu modifikovane ž transformacije, je racionalna funkcija uprkos prisustvu kašnjenja, što u mnogome olakšava primenu svih mehanizama za analizu sistema koji podrazumevaju racionalan oblik funkcije prenosa sistema, odnosno linearnu funkciju karakterističnog polinoma, što napominjemo, nije slučaj kada efekat kašnjenja analiziramo u kontinualnom domenu koji se pojavljuje u nelinearnom maniru.

Primer 5. Naći funkciju spregnutog prenosa sistema sa slike 10 ukoliko je funkcija prenosa procesa $G(s) = \frac{1}{s+2}$ koji u svojoj dinamici poseduje i kašnjenje od $\tau_1 = 0.04$ sekundi, kojim upravlja digitalni uređaj koji radi sa procesnim taktom od $T = 0.1$ sekund na kome je implementiran algoritam diskretnog PI regulatora dobijen primenom

transformacije diferenciranjem unazad, $D(z)$. Senzor koji se nalazi u povratnoj sprezi je idealan, $H(s) = 1$, međutim usled udaljenog prenosa podataka javlja se kašnjenje od $\tau_2 = 0.03$ sekunde.

Rešenje:

Postupak određivanja funkcije spregnutog prenosa (22), započemo od modelovanja regulatora $D(z)$. Poznato je da je PI regulator u kontinualnom vremenskom domenu opisan kao odnos kompleksnog lika upravljačkog signala i signala greške $PI(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s})$. Primenom diskretizacije „diferenciranjem unapred“, $s = \frac{z-1}{T}$, dobijamo diskretni regulator

$$D(z) = K_p(1 + \frac{T}{T_i} \frac{1}{z-1}) = K_p \frac{T_i(z-1) + T}{T_i(z-1)}. \quad (23)$$

Postupak nastavljamo nalaskom neophodnih digitalnih ekvivalenata i modifikovanih transformacija

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\{Gho(s)G(s)e^{-s\tau_1}\} &= (1-z^{-1})G(z, m_1) \Big|_{m_1=(1-\tau_1)/T=0.6} \\ &= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} \Big|_{m=0.6} \\ &= (1-z^{-1})\frac{1}{2}\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\} \Big|_{m=0.6} \\ &= (1-z^{-1})\frac{1}{2}\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\right\} \Big|_{m=0.6} \\ &= \frac{0.05654z + 0.03409}{z(z-0.8187)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\{Gho(s)G(s)H(s)e^{-s(\tau_1+\tau_2)}\} &= (1-z^{-1})G(z, m_2) \Big|_{m_2=(1-(\tau_1+\tau_2))/T=0.3} \\ &= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} \Big|_{m=0.3} \\ &= (1-z^{-1})\frac{1}{2}\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\} \Big|_{m=0.3} \\ &= (1-z^{-1})\frac{1}{2}\mathfrak{Z}_m\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-2mT}}{z-e^{-2T}}\right\} \Big|_{m=0.3} \\ &= \frac{0.02912 + 0.06152}{z(z-0.8187)}, \end{aligned} \quad (25)$$

Uvrštavanjem izraza (23),(24),(25) u (22) sledi

$$W_{sp}(z) = \frac{5.654 K_p T_i z^2 + (0.5654 K_p - 2.2445 K_p T_i) z + 0.34095 K_p - 3.4095 K_p T_i}{(10^2 T_i + 2.9118 K_p T_i) z^2 + (0.29118 K_p - 1.8187 10^2 T_i + 3.2399 K_p T_i) z + 0.61517 K_p + 81.873 T_i - 6.1517 K_p T_i} \quad (26)$$

Izračunata funkcija (26) potvrđuje prethodno navedeno tvrđenje da se usled pristutva kašnjenja, zahvaljujući modifikovanoj 3 transformaciji, dobija izraz koji je racionalna funkcija, a njen imenilac, odnosno karakteristični polinom, linearna funkcija po kompleksnoj promenljivoj z . Čitaocu ostavljamo za dodatni rad da analizira pod kojim opsegom vrednosti parametara regulatora K_p i T_i je analizirani sistem stabilan.

A Prilog

Tablica Laplasove transformacije, ž -transformacije i modifikovane ž -transformacije

$F(s)$	$f(t)$	$F(z)$	$F(z, m)$
e^{-kTs}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}	z^{m-1-k}
1	$\delta(t)$	1	0
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{k!} t^k$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} \right)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \sin m\omega_0 T + \sin(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos \omega_0 t$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \sin \omega_0 mT + e^{-aT} \sin(1-m)\omega_0 T]}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}} e^{-amT}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \cos \omega_0 mT - e^{-aT} \cos(1-m)\omega_0 T]}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}} e^{-amT}$

$f(k)$	$F(z)$	$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1	$h(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$a^k h(k)$	$\frac{z}{z-a}$	$ka^k h(k)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\sin \theta k$	$\frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$	$\cos \theta k$	$\frac{z(z - \cos \theta)}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$