Rasplinuta logika

Fuzzy logic

Fuzzy logika – osnovni pojmovi

- Nepreciznost jezika & neodređenost u izražavanju
- Lotfi A. Zadeh – Fuzzy skupovi - 1965

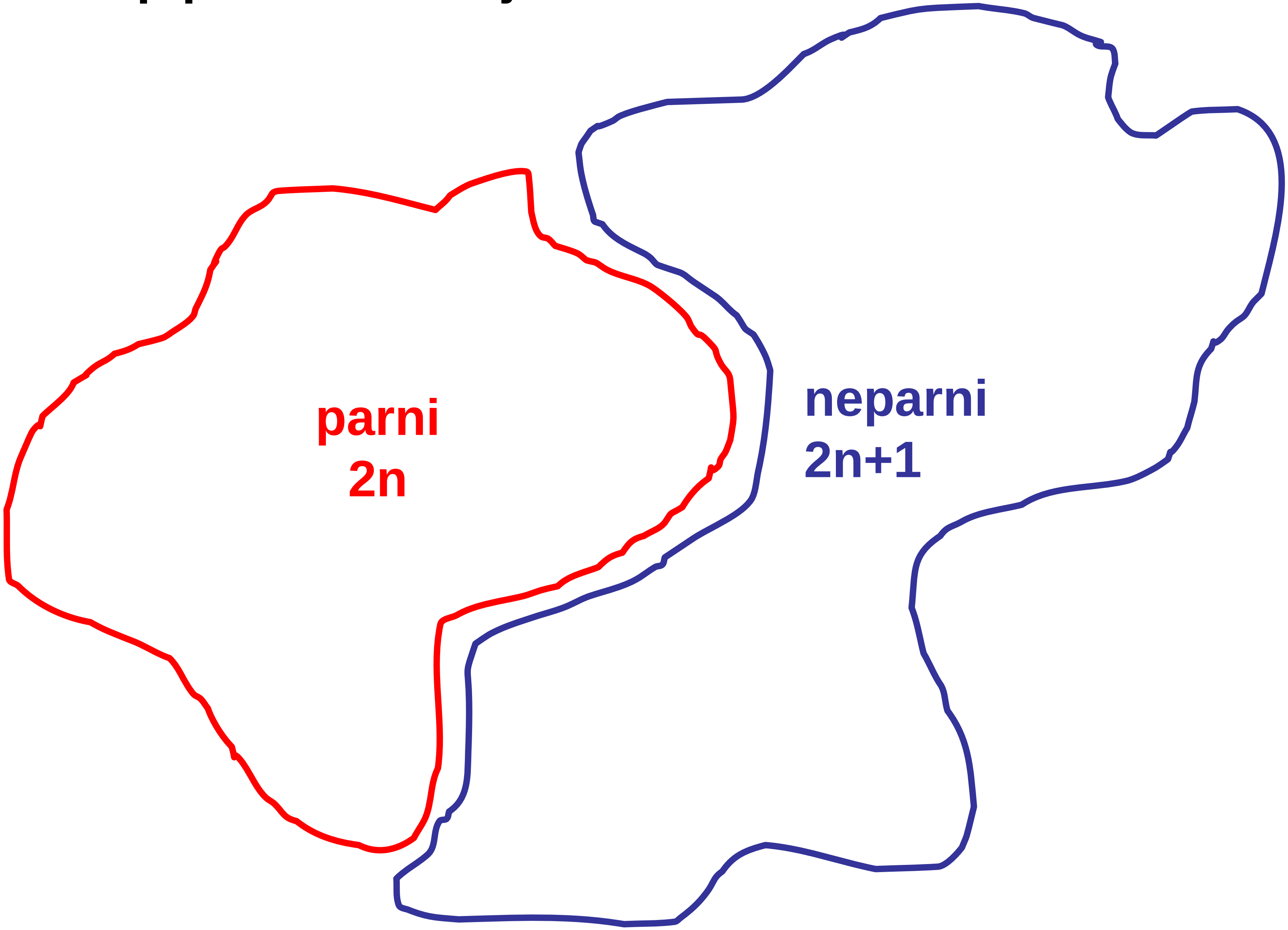
  Sa složenim problemima se možete izboriti samo ako umesto ka rigoroznosti i što većoj preciznosti opisa i razmišljanja o pojavama, krenete upravo u suprotnom smeru i dozvolite da oni budu neprecizni.

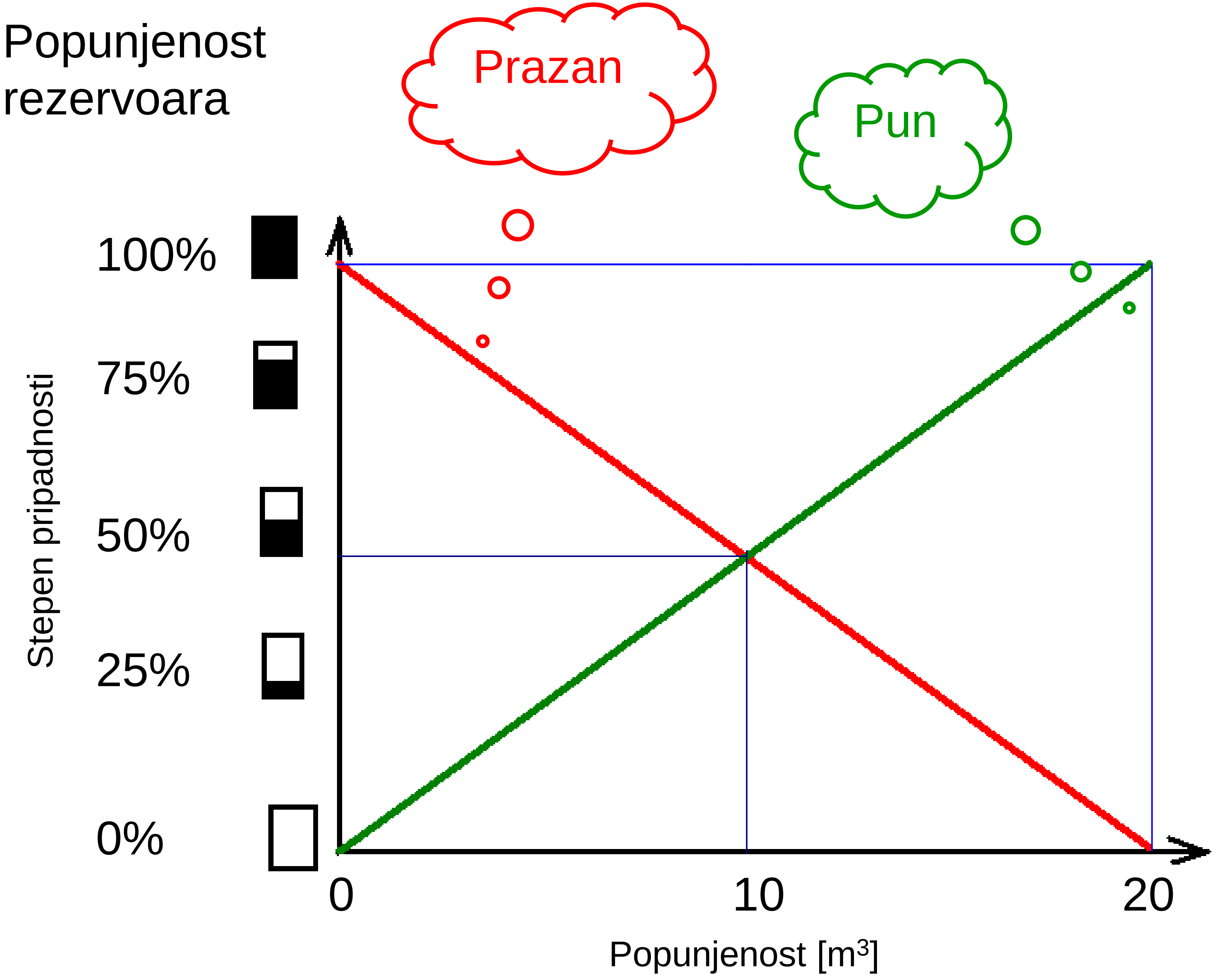
Fuzzy skupovi i fuzzy funkcije pripadnosti

- Osnovni element za predstavljanje i obradu nepreciznosti u fuzzy tehnologijama je **fuzzy skup**.
- Fuzzy skup predstavlja skup elemenata sa **sličnim svojstvima**.
- Diskretan (klasičan) skup je skup elemenata sa **istim svojstvima**.

- Diskretni skup – **crisp set**
- Fuzzy skup – **fuzzy set**
- U diskretnom skupu svaki elemenat pripada tom skupu sa **stepenom pripadnosti 1**.
- U fuzzy skupu svaki element pripada tom skupu u **izvesnom stepenu**.

Skup prirodnih brojeva





Popunjenost
rezervoara
Prazan
Pun
100%
75%
50%
25%
0%
Stepen pripadnosti
0
10
20
Popunjenost [m3]

Funkcija pripadnosti

Definicija. Neka je dat neprazan skup *X*. Fuzzy skup *A* u *X* se opisuje funkcijom pripadnosti:

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]$$

gde je $\mu_A(x)$ stepen pripadnosti elementa *x* fuzzy skupu *A* za svako $x \in X$.

X se naziva **nadskup** ili **univerzalni skup**.

Fuzzy skup *A* se može predstaviti skupom parova:

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\}$$

Najčešće je *X* konačan skup $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, tako da se skup A može predstaviti na sledeći način:

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + ... + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{x_i}$$

diskretna reprezentacija fuzzy skupa

Ako je X beskonačan i neprekidan skup sa elementima $x \in X$, tada se fuzzy skup A može predstaviti u obliku:

$$A = \int_{x \in X} \frac{\mu_A(x)}{x}$$

kontinualna reprezentacija fuzzy skupa

"kada $x \in X$, fuzzy funkcija pripadnosti je predstavljena sa $\mu_A(x)$"

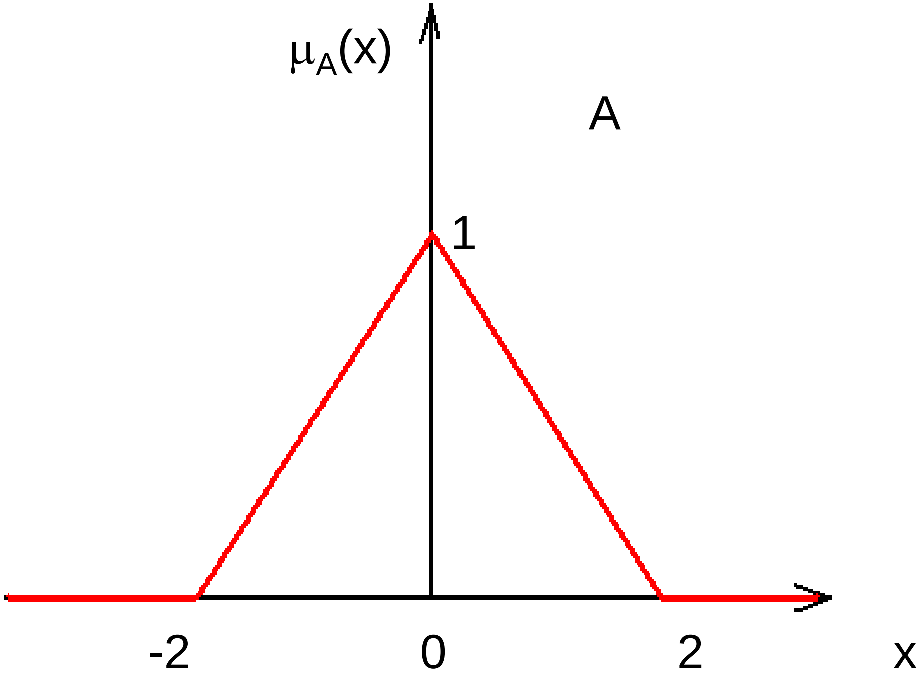
Predstavljanje fuzzy skupova na računaru

Različiti oblici fuzzy funkcija pripadnosti

1. Trougaona funkcija pripadnosti

1.a. Kontinualan slučaj

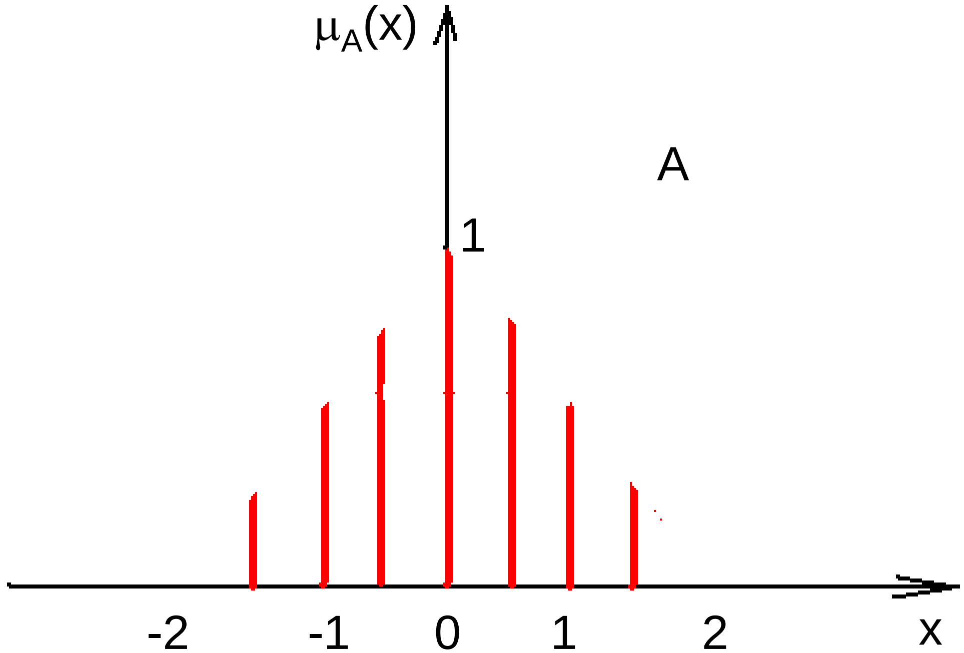
$$A = \int_{-2}^{0} \frac{\left(\frac{2+x}{2}\right)}{x} + \int_{0}^{2} \frac{\left(\frac{2-x}{2}\right)}{x}$$



1.b. Diskretan slučaj

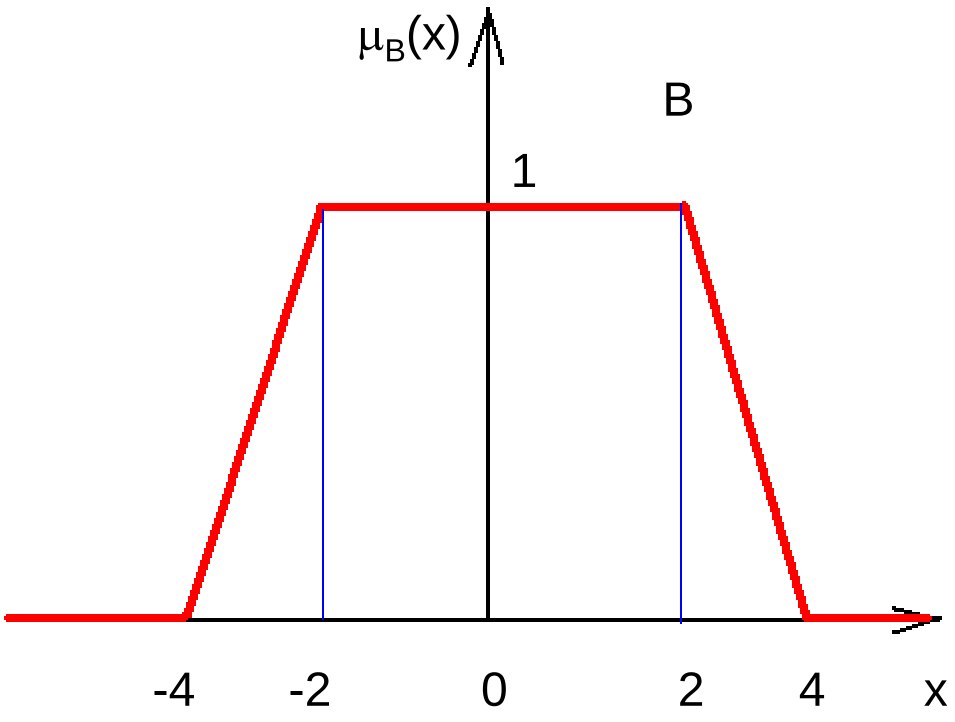
X={-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2}

$$A=\frac{0.25}{-1.5}+\frac{0.5}{-1}+\frac{0.75}{-0.5}+\frac{1}{0}+\frac{0.75}{0.5}+\frac{0.5}{1}+\frac{0.25}{1.5}$$



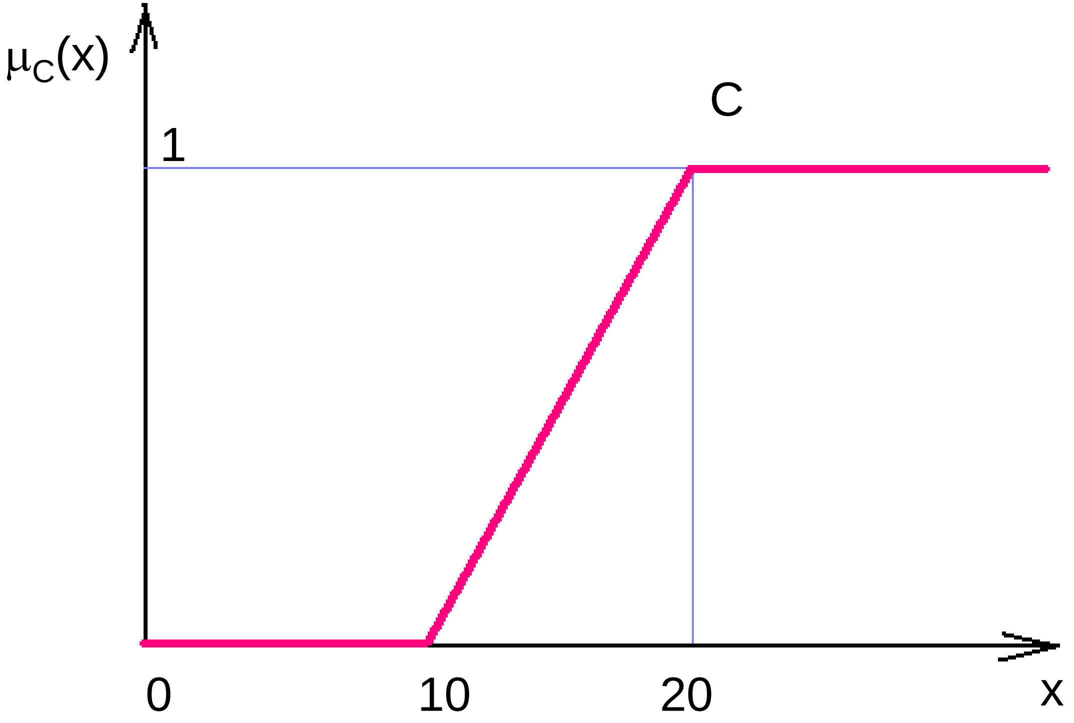
2. Trapezoidna funkcija pripadnosti

$$B = \int_{-4}^{-2} \frac{\left(\frac{4+x}{2}\right)}{x} + \int_{-2}^{2} \frac{1}{x} + \int_{2}^{4} \frac{\left(\frac{4-x}{2}\right)}{x}$$



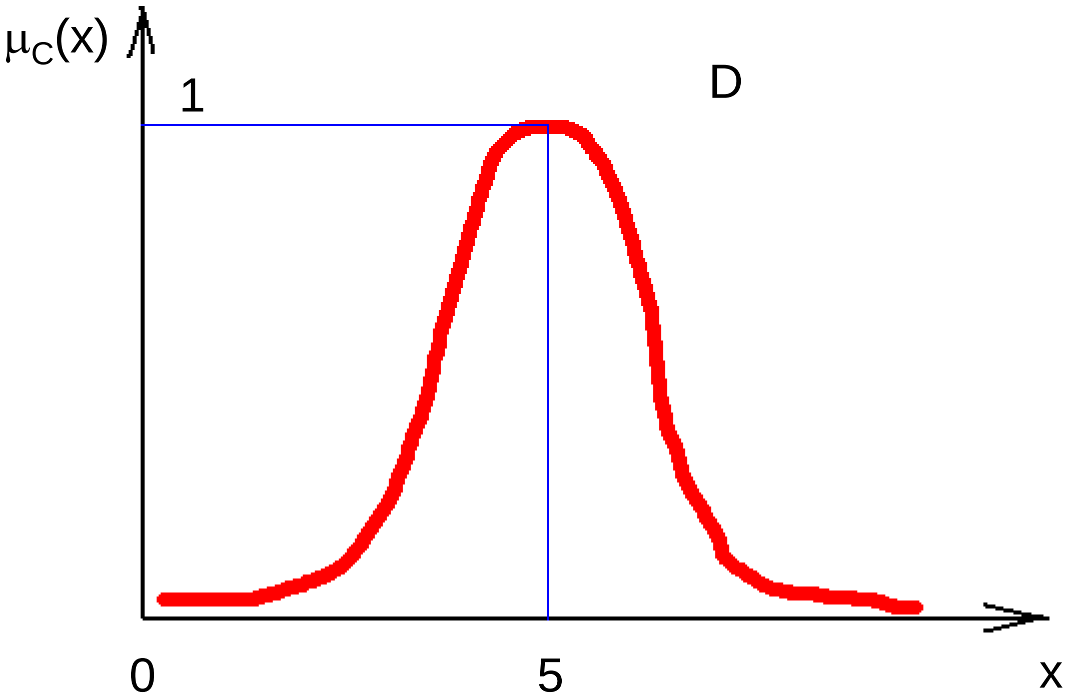
3. Deo po deo pravolinijska funkcija pripadnosti

$$C = \int_{10}^{20} \frac{0.1x - 1}{x} + \int_{20}^{\infty} \frac{1}{x}$$



4. Zvonasta funkcija pripadnosti – radial basis

$$D = \int_X \frac{e^{-0.5(x-5)^2}}{x}$$

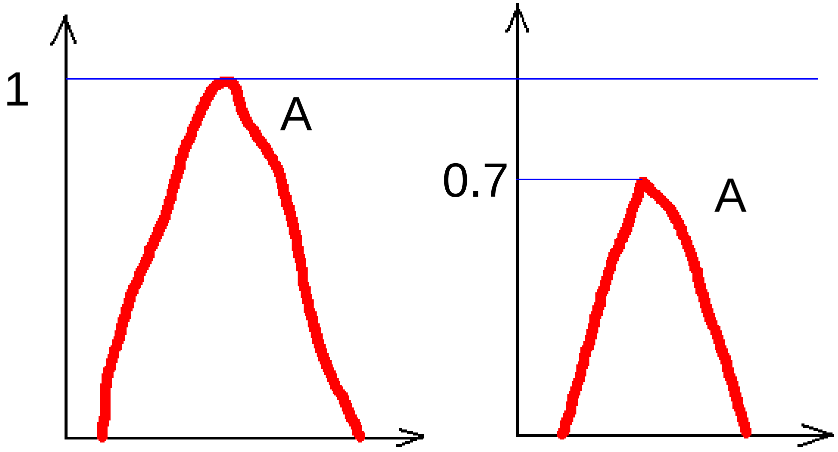


Normalnost, konveksnost i broj elemenata fuzzy skupa

1. Normalnost fuzzy skupa

Fuzzy skup je normalan ako i samo ako je $\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1$

Fuzzy skup koji nije normalan naziva se sub-normalan ili pod normalan fuzzy skup



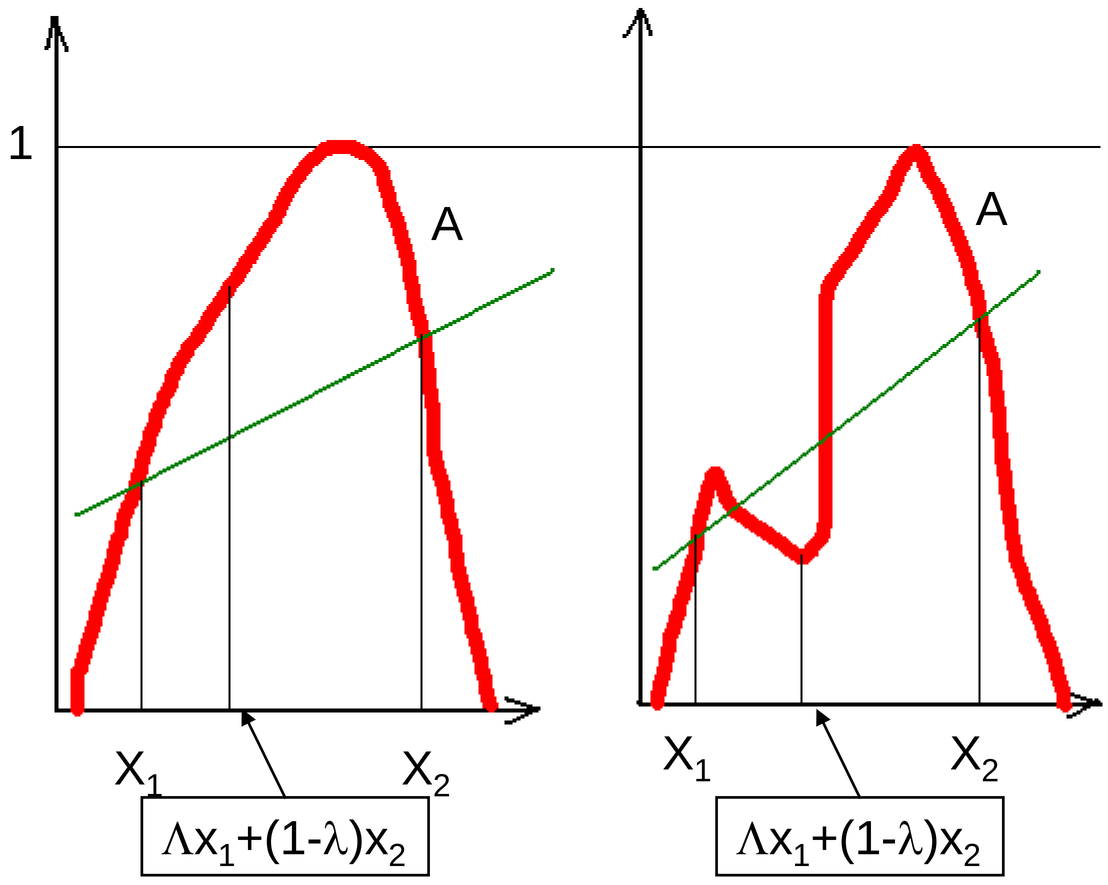
Sub-normalan fuzzy skup se jednostavno može transformisati u normalan ako se sve vrednosti stepena pripadnosti podele najvećim stepenom pripadnosti za dati skup.

Ova se operacija naziva **normalizacija**.

2. Konveksnost (ispupčenost) fuzzy skupa

Fuzzy skup je konveksan ako i samo ako važi: $\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X,\ \lambda \in [0,1]$

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2))$$



3. Broj elemenata (kardinalnost) fuzzy skupa

Ako je X diskretan i konačan skup, onda se kardinalnost fuzzy skupa izražava **zbirom stepena pripadnosti** pojedinih elemenata fuzzy skupa:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

Ova definicija broja elemenata fuzzy skupa **odgovara definiciji** broja elemenata diskretnog skupa.

4. Relativna kardinalnost fuzzy skupa

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|}$$

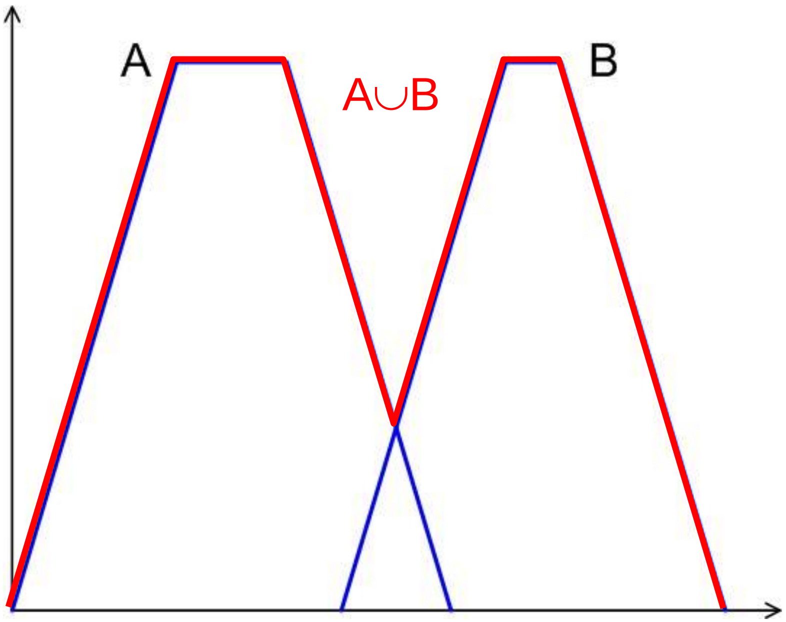
Relativna kardinalnost fuzzy skupa se dobija kada se njegova kardinalnost podeli kardinalnošću celog domena tog skupa.

Osnovne operacije sa fuzzy skupovima

Zbir dva fuzzy skupa – unija fuzzy skupova - ∪

Zbir (unija) fuzzy skupova A i B je fuzzy skup A∪B predstavljen pomoću funkcije pripadnosti:

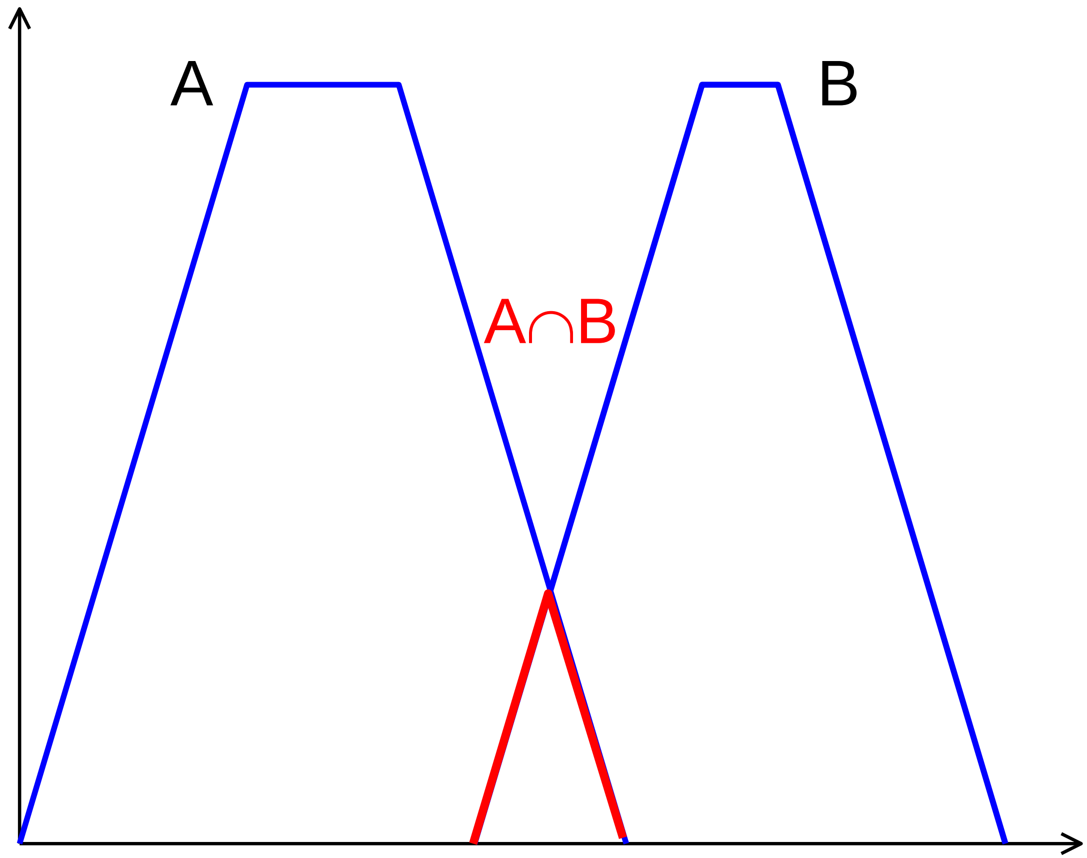
$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$



Zajednički skup dva fuzzy skupa – presek - $\cap$

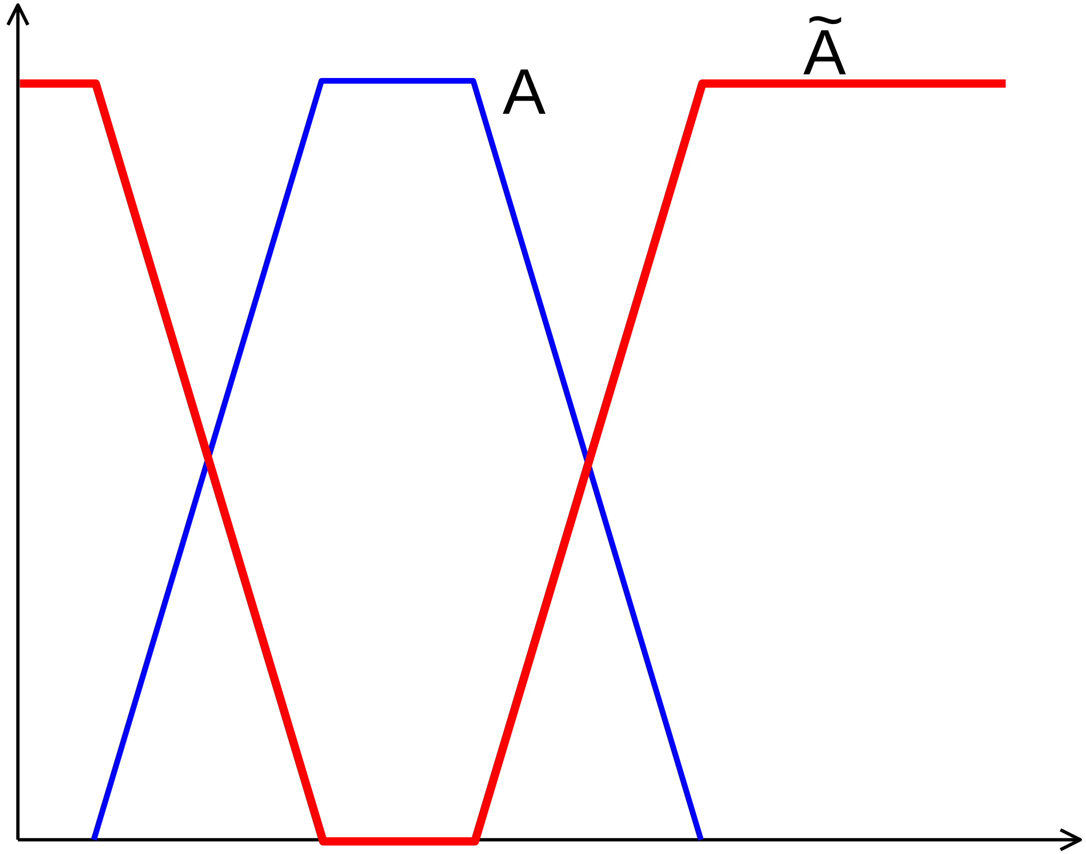
Zajednički skup (presek) dva fuzzy skupa A i B je fuzzy skup $A \cap B$ predstavljen pomoću funkcije pripadnosti:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$



Komplement fuzzy skupa $-\tilde{A}$

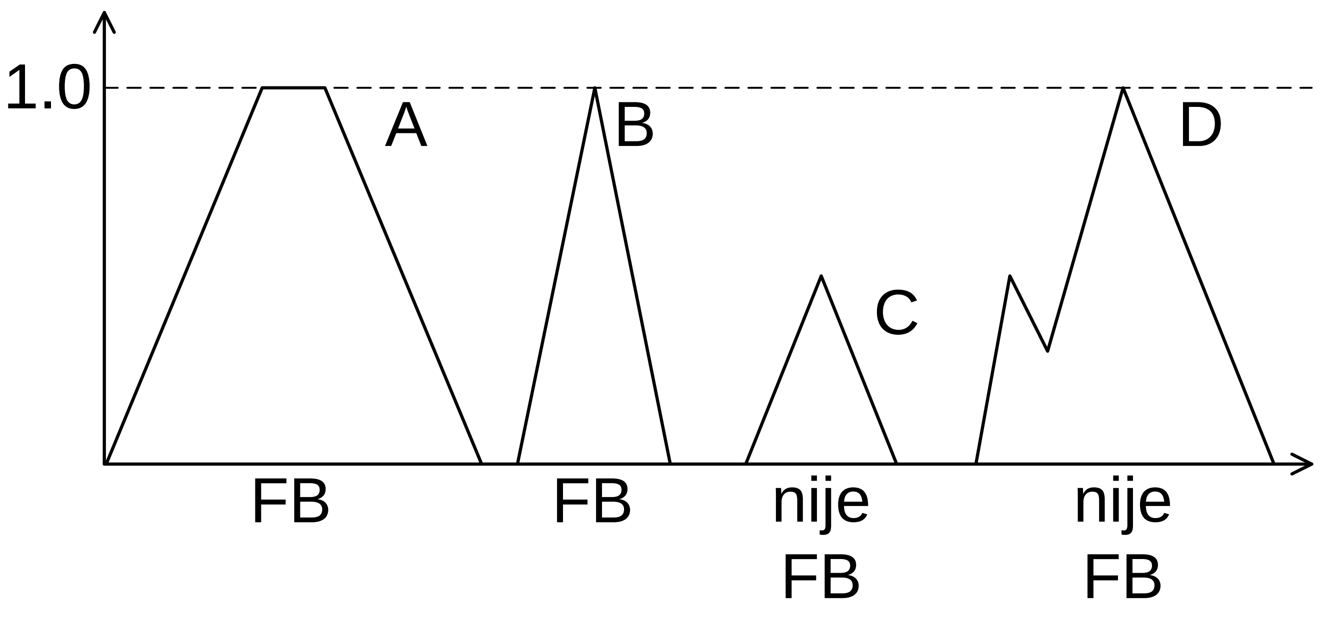
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Fuzzy broj

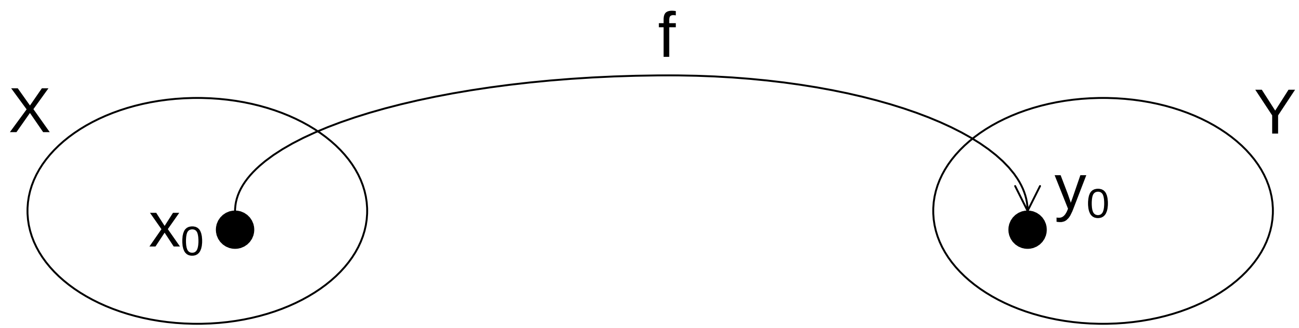
Fuzzy broj (FB) A je fuzzy skup predstavljen funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$ sa sledećim osobinama:

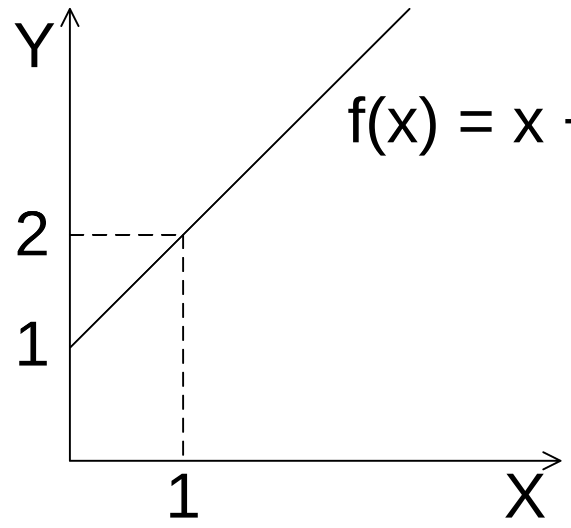
1. $\mu_A(x)$ je definisana nad skupom Re;
2. $\mu_A(x)$ je konveksna;
3. $\mu_A(x)$ je normalna;
4. $\mu_A(x)$ je deo po deo neprekidna funkcija.



Princip proširenja (ekstenzije)

Data je funkcija $f: X \rightarrow Y$. Na osnovu konkretne vrednosti x_0 iz domena X pomoću preslikavanja f izračunava se y_0 iz Y. Ako je $f(x)=x+1 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow y_0=f(x_0)=x_0+1=1+1=2$.

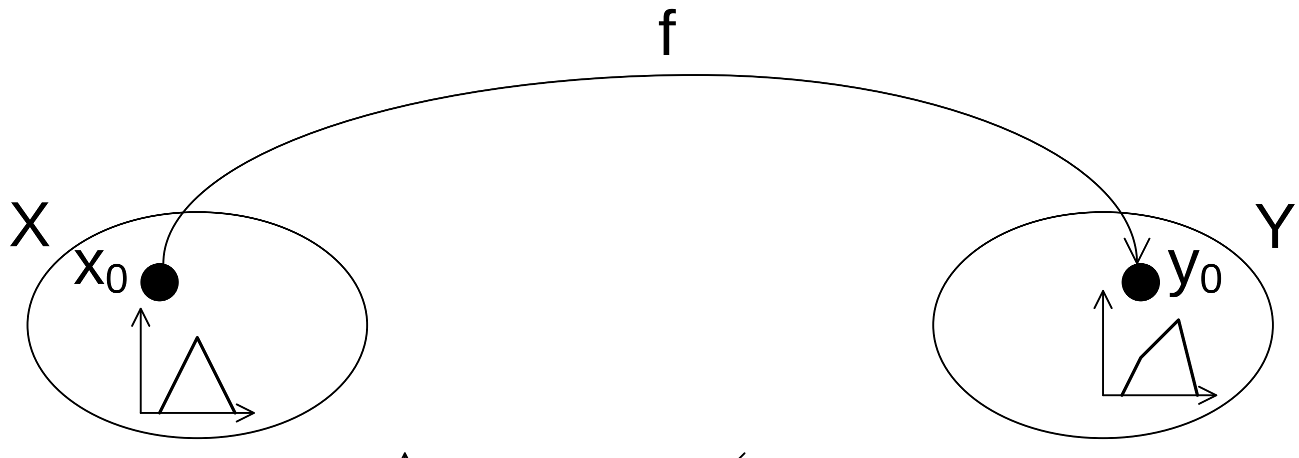


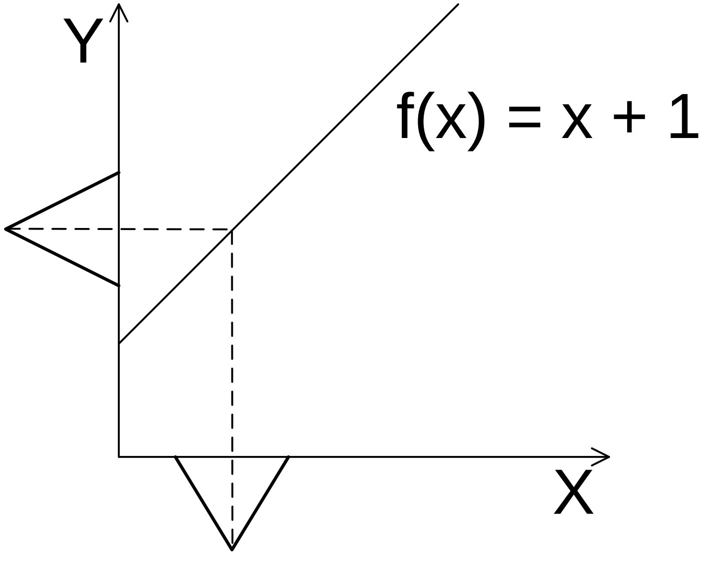


Šta ako je x_0 fuzzy broj, a $f(x)=x+1$ ostaje isto?

Pretpostavlja se da će y_0 takođe biti fuzzy broj.

y_0 se određuje primenom pravila proširenja.





Princip proširenja i neke od njegovih primena:

U odnosu na funkciju $f{:}X \to Y$ i fuzzy skup A u univerzumu X, gde je skup A dat u obliku

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{x_n}$$

princip ekstenzije se predstavlja relacijom:

$$f(A) = f\left(\frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{x_n}\right) = \frac{\mu_1}{f(x_1)} + \frac{\mu_2}{f(x_2)} + \cdots + \frac{\mu_n}{f(x_n)}$$

Ako je više od jednog elementa skupa X preslikano funkcijom *f* u isti element *y* u Y, uzima se maksimum među njihovim stepenima pripadnosti tj. važi:

$$\mu_{f(A)}(y) = \max_{\substack{x_i \in U \\ f(x_i)=y}} \left[\mu_A(x_i) \right]$$

Uopšteni princip proširenja

Neka je f(.) funkcija koja preslikava n-dimenzionalni prostor $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ u jednodimenzionalni prostor Y, tako da je $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fuzzy skupovi u $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Primenom principa proširenja može se, na osnovu preslikavanja f(.), formirati (definisati) fuzzy skup B

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f^{-1}(y)} \left[\min\limits_i \mu_{A_i}(x_i) \right], & ako\ je\ f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0, & ako\ je\ f^{-1}(y) = 0 \end{cases}$$

Data je funkcija $f{:}X \to Y$, i fuzzy skup A definisan u X: $A = \dfrac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \dfrac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \dfrac{\mu_A(x_n)}{x_n}$. Sada se može formirati fuzzy skup B: $B = f(A) = \dfrac{\mu_A(x_1)}{y_1} + \dfrac{\mu_A(x_2)}{y_2} + \ldots + \dfrac{\mu_A(x_n)}{y_n}$, gde je: $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Drugim rečima, fuzzy set B se može definisati vrednostima $f(.)$ od $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ako $f(.)$ vrši preslikavanje više vrednosti u jednu, tada postoje $x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2$, takvi da je $f(x_1) = f(x_2) = y^*$; $y^* \in Y$. U tom slučaju je funkcija pripadnosti $y = y^*$ skupu B maksimalna (sup) od funkcija pripadnosti $x = x_1$ i $x = x_2$ fuzzy skupu A, odnosno $\mu_B(y) = \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$

Primer: Neka je $A = \dfrac{0.1}{-2} + \dfrac{0.4}{-1} + \dfrac{0.8}{0} + \dfrac{0.9}{1} + \dfrac{0.3}{2}$ i $f(x) = x^2 - 3$. Primenom pravila proširenja formirati fuzzy skup B.

$$B = \frac{0.1}{1} + \frac{0.4}{-2} + \frac{0.8}{-3} + \frac{0.9}{-2} + \frac{0.3}{1} = \frac{0.8}{-3} + \frac{0.4 \vee 0.9}{-2} + \frac{0.1 \vee 0.3}{1} = \frac{0.8}{-3} + \frac{0.9}{-2} + \frac{0.3}{1}.$$

Fuzzy relacije

Binarna fuzzy relacija

Neka su X i Y dva univerzalna skupa.

Tada je $R=\{((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$ binarna fuzzy relacija.

$\mu_R(x,y)$ je dvodimenzionalna funkcija pripadnosti.

Primer:

Neka je X=Y=Re$^+$ (pozitivan deo realne ose) i
R="y je mnogo veće od x".

Funkcija pripadnosti fuzzy relaciji *R* može biti (subjektivno) definisana kao

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{x+y+2} & \text{ako je } y>x \\ 0 & \text{ako je } y \leq x \end{cases}$$

Ako je X={3, 4, 5} i Y={3, 4, 5, 6, 7} fuzzy relacija *R* se može predstaviti matricom:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.111 & 0.200 & 0.273 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.091 & 0.167 & 0.231 \\ 0 & 0 & 0 & 0.077 & 0.143 \end{bmatrix}$$

gde je elemenat r_{ij} jednak funkciji pripadnosti između *i-tog* elementa *X* i *j-tog* elementa *Y*.

Ostale uobičajene binarne fuzzy relacije su:

x je blizu ***y*** (brojevi)

x zavisi od ***y*** (događaji)

x liči na ***y*** (objekti, ljudi)

Ako je ***x*** veliko ***y*** je malo (upravljanje, fuzzy sistemi zaključivanja)

Max-min kompozicija

Neka su R_1 i R_2 fuzzy relacije definisane u X×Y i Y×Z, respektivno. Max-min kompozicija R_1 i R_2 je fuzzy skup definisan sa

$$R_1 \circ R_2 = \left\{ \left[(x,z); \max_y \min (\mu_{R1}(x,y), \mu_{R2}(y,z)) \right] \mid x \in X;\ y \in Y;\ z \in Z \right\})$$

ili

$$\mu_{R1 \circ R2}(x,z) = \max_y \min (\mu_{R1}(x,y), \mu_{R2}(y,z)) = \vee_y [\mu_{R1}(x,y) \wedge \mu_{R2}(y,z)]$$

gde su operatori $\vee$=max i $\wedge$=min

Kada su R1 i R2 predstavljeni u matričnom obliku, izračunavanje veoma liči na matrično množenje samo što se množenje i sabiranje menjaju sa $\wedge$=min i $\vee$=max, respektivno. Iz tog razloga se max-min kompozicija često naziva i max-min proizvod

Osobine max-min proizvoda

Neka su R, S, T binarne relacije na $X \times Y$ i $Y \times Z$ i $Z \times W$. Tada važi:

asocijativnost:

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T;$$

distributivnost u odnosu na uniju:

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T);$$

slaba distributivnost u odnosu na presek:

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T);$$

monotonost:

$$S \subseteq T \Rightarrow (R \circ S) \subseteq (R \circ T).$$

Max-proizvod kompozicija

Primenom iste notacije kao i kod max-min kompozicije definiše se max-proizvod kompozicija

$$\mu_{R1 \circ R2}(x,z) = \max_{y}[\mu_{R1}(x,y)\mu_{R2}(y,z)]$$

Primer

Neka su:

$$R_1 = \text{„x je relevantno za y“},$$

$$R_2 = \text{„y je relevantno za z“}$$

dve fuzzy binarne relacije definisane na $X \times Y$ i $Y \times Z$, gde je

$$X=\{1, 2, 3\},\ Y=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}\ Z=\{a,b\},$$

i neka su R1 i R2 predstavljeni sledećim matricama

$$R_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad R_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array}$$

Potrebno je odrediti $R_1 \circ R_2$ = „x je relevantno za z“ i bazira se na R_1 i R_2.

Radi jednostavnosti odrediće se samo stepen zavisnosti između elemenata $2 \in X$ i $a \in Z$.

Max-min kompozicijom se dobija

$$\mu_{R1 \circ R2}(2,a) = \max(0.4 \wedge 0.9,\ 0.2 \wedge 0.2,\ 0.8 \wedge 0.5,\ 0.9 \wedge 0.7) =$$

$$= \max(0.4,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.7) = 0.7$$

Max-proizvod kompozicija daje

$$\mu_{R1 \circ R2}(2,a) = \max(0.4 \cdot 0.9,\ 0.2 \cdot 0.2,\ 0.8 \cdot 0.5,\ 0.9 \cdot 0.7) =$$

$$= \max(0.36,\ 0.04,\ 0.40,\ 0.63) = 0.63$$

kraj