# Greške u ustaljenom stanju

*Zoran D. Jeličić*
*Mirna N. Kapetina*
*20. maj 2020.*

## 1 Ocena kvaliteta ponašanja u ustaljenom stanju

Jedna od najvažnijih osobina upravljačkih sistema je sposobnost izlazne veličine ili odziva sistema da prati i/ili dosegne željenu vrednost. I intuitivno je jasno, da je razlika između željene i ostvarene vrednosti signal greške, a da je minimizacija greške [1] logičan zadatak, koji se postavlja pred upravljački algoritam. U okviru ovog poglavlja namera nam je da se fokusiramo na minimzaciju greške u ustaljenom (stacionarnom) stanju ili kolokvijalno rečeno da analiziramo sposobnost sistema da posle određenog vremena [2] dostigne željenu vrednost. Ako se setimo da smo u prethodnim poglavljima uveli jednu od definicija stabilnosti kao *sposobnost sistema da dosegne ustaljeno stanje*, jasno je da se pojam *greška u ustaljenom stanju* u našim razmatranjima odnosi samo na stabilne sisteme.

[1] Projektovanje sistema automatskog upravljanja često se svodi na problem parametarske optimizacije, gde *kriterijumi optimalnosti* za minimizaciju greške mogu biti u jednoj od sledećih formi

$IAE = \int_0^\infty |e(t)|\,\mathrm{d}t.$

$ISE = \int_0^\infty e^2(t)\,\mathrm{d}t.$

$ITAE = \int_0^\infty t|e(t)|\,\mathrm{d}t.$

$ITSE = \int_0^\infty te^2(t)\,\mathrm{d}t.$

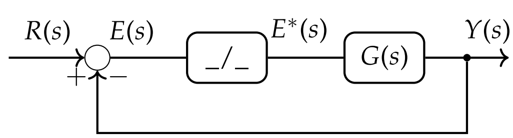
$ISTE = \int_0^\infty t^2e^2(t)\,\mathrm{d}t.$

$IE = \int_0^\infty e(t)\,\mathrm{d}t.$

[2] Jasno je da je termin „određenog vremena"uveden neformalno, sa ciljem da uvede čitaoca u problem i način razmišljanja pre formalne definicje koja sledi.

## 2 Greška u ustaljenom stanju

Da bi čitaoca lakše uveli u postavku, terminologiju i način rešavanja problema minimizacije greške u ustaljenom stanju, počećemo našu studiju prateći sistem sa slike 1




Slika 1: Blok dijagram digitalnog sistema automatskog upravljanja

U nastavku teksta strogo ćemo vodti računa da termine koji su opšti, uvodimo tako što naznačimo *po definiciji* ili koristimo oznaku $\stackrel{\text{def}}{=}$. Svi ostali pojmovi su karakteritični za sistem sa slike 1 i ne mogu se posmatrati uopšteno. Takođe podsećamo da je sistem $G(s)$ „obogaćen" kolom zadrške nultog reda, u suprotnom naša studija ne bi imala smisao.

Za sistem sa slike u prethodnom poglavlju smo izračunali signal greške $E^*(s)$ kao

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)} \,, \tag{1}$$

odnosno u $z$ domenu

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)} \,, \tag{2}$$

gde je $G(z)$ digitalni ekvivalent funkcije prenosa $G(s)$, a $R(z)$ diskretizovani ulaz $R(s)$. Važno je primetiti da greška sistema $E(z)$ zavisi od dva faktora[3]: samog sistema, odnosno njegove funkcije diskretnog prenosa $G(z)$ i željene vrednosti $R(z)$. Samim tim jasno je da će analiza veličine greške, odnosno greške u ustaljenom stanju biti usmerena na analizu uticaja svakog od ta dva faktora ponaosob.

[3] U slučaju složenije strukture sistema, broj faktora može biti veći, ali se uvek svodi na dinamiku funkcije (povratnog) prenosa i karakteristike ulaza.

Podsećamo da se svaka funkcija diskretnog prenosa može posmatrati kroz nule i polove sistema, odnosno može se predstaviti u sledećoj formi

$$G(z) = \frac{K \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)}{(z-1)^N \prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} \,, \quad \text{gde važi} \quad p_i \neq 1 \; z_j \neq 1 \,. \tag{3}$$

U izrazu (3), broj $N$ označava red astatizma ili broj integratora u direktnoj grani [4], a zbog pretpostavke o kauzalnosti mora da važi i sledeća relacija $n + N \geq m$.

[4] U poglavlju o diskretizaciji regulatora, pokazali smo da postupak prevođenja kontinualnog integratora $\frac{1}{s}$ u diskretnu formu nije jednoznačan, ali da se u brojicu funkcije diskretnog prenosa uvek sadrži pol u $(z-1)$, odnosno $\frac{\cdot}{z-1}$.

Radi lakšeg praćenja teksta i dalje matematičke manipulacije uvodimo i novi pojam, pojačanje $K_{dc}$, koje definišemo na sledeći način

$$K_{dc} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{K \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} \right|_{z=1} \,. \tag{4}$$

Lako je zaključiti da $K_{dc}$ predstavlja statičko pojačanje direktne grane, za sistem bez astatizama.

Greška u ustaljenom stanju se definše kao vrednost signala greške kada $k \to \infty$ odnosno

$$e_{ss}(kT) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} e(k) \,, \tag{5}$$

gde je $e(k)$ povorka odbiraka u vremenskom domenu, koja se dobila inverznom $\mathcal{Z}$ transformacijom greške $E(z)$. Pažljivom posmatraču neće promaći neobično označavanje greške u ustaljenom stanju. Naime, greška u ustaljenom stanju je broj i kao takav nije funkcije vremena, kao što smo napisali $e_{ss}(kT)$, već bi bilo uputno da se napiše samo $e_{ss}$. Međutim da bi naglasili da se radi o diskretnim sistemima i odgovarajućoj diskretnoj grešci u ustaljenom stanju uveli smo oznaku $e_{ss}(kT)$, gde je sada očigledno da $(kT)$ ne predstavlja vremensku zavisnost, već samo oznaku da se radi o analizi diskretnih sistema.

Koristeći *teoremu o graničnim vrednostima* iz osobina $\mathcal{Z}$ transformacije izraz (5) možemo napisati i u sledećem obliku

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}E(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z)\ , \tag{6}$$

gde je $E(z) = \mathcal{Z}\big(e(kT)\big)$. Za naš sistem sa slike 1 kod koga je greška $E(z)$ data obrascem (2), izraz (6) postaje

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}\ . \tag{7}$$

U našoj daljoj studiji sistema sa slike 1 , izraz (7) zauzima centralno mesto. Dalju analizu ćemo podeliti u dva koraka, prvo ćemo razmatrati različite klase ulaza u sistem, konkretno *Hevisajdovu* ili *step* funkciju i *nagibnu* ili *rampa* funkciju. Uticaj strukture sistema na vrednost greške u ustaljenom stanju će se posebno razmatrati za svaki od ovih slučajeva.

## 2.1 *Greške u ustaljenom stanju na step pobudu*

Pretpostavili smo da se na ulazu sistema sa slike 1 nalazi jedinična step funkcija (Hevisajdova funkcija). Za ovu klasu ulaza, definisaćemo novu veličinu $K_p$, koju nazivamo *poziciona konstanta* ili *konstanta položaja*. U odnosu na grešku u ustaljenom stanju $K_p$ se definiše na sledeći način

$$e_{ss}(kT) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+K_p}\ . \tag{8}$$

U daljoj studiji, polazimo od dobro poznate činjenice da je $\mathcal{Z}$ transformacija našeg ulaznog Hevisajdovog signala

$$R(z) = \frac{z}{z-1}\ , \tag{9}$$

tada izraz za grešku u ustaljenom stanju (7) postaje

$$
\begin{aligned}
e_{ss}(kT) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\frac{z}{z-1}}{1+G(z)} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G(z)} \\
&= \frac{1}{1+\lim\limits_{z\to 1}G(z)}\ .
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Iz izraza (8) i (10) jasno je da se vrednost *pozicione konstante* utvrđuje kao

$$
K_p = \lim_{z\to 1} G(z)\ . \tag{11}
$$

Dalja analiza vrednosti greške u ustaljenom stanju iz izraza (10) i (11) zavisi od strukture sistema, odnosno reda astatizma sistema $N$ iz izraza (3), u skladu sa tim ćemo i usmeriti i našu diskusiju:

1. U slučaju da sistem nema astatizama $N = 0$, tada je očigledno da je $K_p = K_{dc}$, odnosno da postoji konačna greška u ustaljenom stanju, koja iznosi

   $$
   e_{ss}(kT) = \frac{1}{1+K_{dc}}\ . \tag{12}
   $$

   Jasno je da će greška biti manja ukoliko je pojačanje direktne grane veće. Naravno, dobro je poznato da postoji jasno ograničenje pojačanja, koje sistem može da trpi bez gubitka na performansama, prvo oscilatornosti, a zatim i stabilnosti. Ovaj rezulat može i drugačije da se iskaže: sistem bez astatizma (integralnog dejstva), nije u stanju da eliminiše grešku u ustaljenom stanju na step pobudu.

2. Ako sistem ima bar jedan astatiazm $N \geq 1$, tada se lako izračuna da $K_p \to \infty$, što znači da će $e_{ss} \to 0$. Odnosno potreban je bar jedan astatizam (integralno dejstvo) da bi sistem na step pobudu imao grešku u ustaljenom stanju jednaku nuli. Podsećamo da je ovo osnovni razlog uvođenja integralnog dejstva u upravljačku strukturu $PID$ regulatora.

## 2.2 *Greške u ustaljenom stanju na rampa pobudu*

Slično kao ranije, pretpostavili smo da se na ulaz sistema sa slike 1 nalazi rampa funkcija (nagibna funkcija). I za ovu klasu ulaza, definisaćemo novu veličinu $K_v$, koju nazivamo *brzinska konstanta* digitalnog sistema. U odnosu na grešku u ustaljenom stanju $K_v$ se definiše na sledeći način

$$e_{ss}(kT) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K_v} \,. \tag{13}$$

Vrednost $R(z)$ za ulaznu rampa funkciju iznosi

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \,, \tag{14}$$

a greška u ustaljenom stanju (7) sada se izračunava kao

$$\begin{aligned} e_{ss}(kT) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\frac{Tz}{(z-1)^2}}{1+G(z)} \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{Tz}{(z-1)+(z-1)G(z)} \\ &= \frac{T}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)} \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Vrednost pozicione konstante se lako utvrđuje iz izraza (13) i (15) kao

$$K_v = \lim_{z\to 1}\frac{1}{T}(z-1)G(z) \,. \tag{16}$$

Analiza vrednosti greške u ustaljenom stanju iz izraza (15) i (16) zavisi od reda astatizma sistema $N$ iz izraza (3). Diskusija moguće vrednosti greške u ustaljenom stanju se sada svodi na tri moguća slučaja:

1. U slučaju da sistem nema astatizama $N = 0$, tada je očigledno da $K_v \to 0$, odnosno tada greška u ustaljenom stanju $e_{ss} \to \infty$. Naime, sistem bez astatizama nije u stanju da prati željenu vrednost u formi rampa funkcije. Napomena, podsećamo da se radi o **stabilnom** sistemu, koji doseže ustaljeno stanje, ali bez mogućnosti da prati promene na ulazu.

2. Ako sistem ima jedan astatizam $N = 1$ tada je očigledno

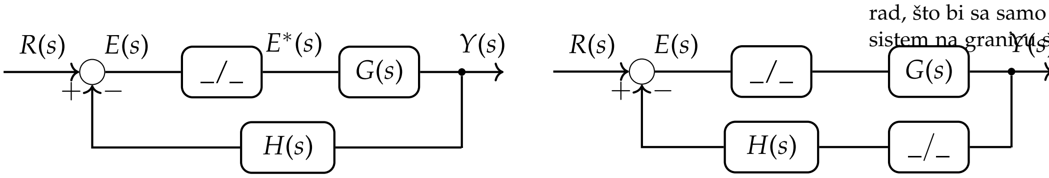
$$e_{ss}(kT) = \frac{1}{k_v} = \frac{T}{K_{dc}} \,. \tag{17}$$

   Jedan astatizam daje mogućnost sistemu da prati promene ulaza uz konačnu grešku u ustaljenom stanju. Greška će biti manja ukoliko je pojačanje direktne grane veće. Slično kao u prethodnom primeru povećanje pojačanja direktne grane će smanjiti grešku u ustaljenom stanju, a prekomerno pojačanje narušiće performanse sistema. Međutim, ovde prvi put primećujemo da greška u ustaljnom stanju eksplicitno zavisi od vremena odabiranja $T$.

3. Ako sistem ima bar dva astatizma $N \geq 2$, tada se lako izračuna da $K_v \to \infty$, što znači da će $e_{ss} \to 0$. Odnosno, potrebna su bar dva astatizma (integralna dejstva) da bi sistem na rampa pobudu imao grešku u ustaljenom stanju nula [5].

[5] Analizirajući prethodne primere, čitalac može zaključiti da veći broj astatizama garantuje nultu grešku u ustaljenom stanju za široku klasu ulaznih signala. Podsećamo da svaki astatizam doprinosi faznom delu frekventne karakteristike $-90^o$ ili $-\pi/2$ rad, što bi sa samo dva asatizma dovelo sistem na granicu stabilnosti.

Čitaocu ostavljamo za vežbu da analizu, koju smo sproveli za sistem sa slike 1 sprovede za sisteme sa slike 2. Odnosno, da izračuna izraze za $e_{ss}$, $K_p$ i $K_v$.

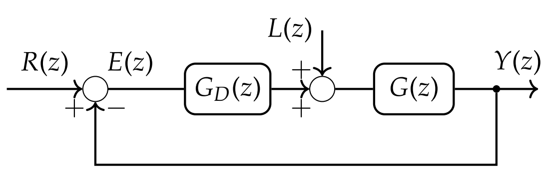



(a) (b)

Slika 2: Blok dijagrami digitalnog upravljačkog sistema sa nejediničnom povratnom spregom

## 3 Greška u ustaljenom stanju u prisustvu poremećaja

Upravljački sistemi sa povratnom spregom projektuju se tako da mogu da eliminšu ili smanje na dovoljno malu meru uticaj neželjenih poremećaja. Namera nam je da u okviru ovog poglavlja analiziramo uticaj poremećaja na grešku u ustaljenom stanju. Zbog prisustva poremećaja sada po prvi put razdvajamo elemente direktne grane u kolu sa povratnom spregom i to na funkciju digitalnog prenosa regulatora $G_D(z)$ i digitalni ekvivalent funkcije prenosa $G(z)$, slika 3. Kao što će se videti za minimzaciju uticaja poremećaja $L(z)$ moramo voditi računa o strukturi svakog od elemenata direktne grane ponaosob ili tačnije ako smo u ranijoj analizi zaključili da se greška u ustaljenom stanju smanjuje uz prisustvo integralnog dejstva, sada ćemo pokazati da nije svejedno u okviru kog funkcijskog bloka u direktnoj grani se nalazi ovo dejstvo.




Slika 3: Blok dijagram digitalnog upravljačkog sistema u prisustvu poremećaja

Odziv sistema $Y(z)$ u prisustvu dva ulaza[6], dobija se u sledećoj formi

$$Y(z) = G_D(z)G(z)E(z) + G(z)L(z)\ . \tag{18}$$

[6] Podsećamo čitaoce na osobinu *superpozicije* 3 transformacije, koja je osnova za ovo izračunavanje

Ako znamo da je $Y(z) = R(z) - E(z)$ , tada se iz izraza (18) izračunava vrednost greške $E(z)$ kao

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_D(z)G(z)}R(z) - \frac{G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}L(z)\ , \tag{19}$$

gde je prvi član $1/\big(1 + G_D(z)G(z)\big)$ faktički funkcija prenosa koja povezuje $E(z)$ i $R(z)$, a drugi član $-G(z)/\big(1 + G_D(z)G(z)\big)$ funkcija prenosa, koja povezuje $E(z)$ i poremećaj $L(z)$.

U skladu sa *teoremom o graničnim vrednostima*, opisanu izrazom (6), grešku u ustaljenom stanju na osnovu jednačine (19) izračunavamo u sledećem obliku

$$\begin{aligned} e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) =& \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{1 + G_D(z)G(z)}R(z) - \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}L(z) \\ =& e_{Rss}(kT) + e_{Lss}(kT)\ , \end{aligned} \tag{20}$$

gde je

$$e_{Rss}(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{1 + G_D(z)G(z)}R(z)\ , \tag{21}$$

odnosno

$$e_{Lss}(kT) = -\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}L(z)\ . \tag{22}$$

Očigledno je prvi izraz (21) greška u ustaljenom stanju, koja nastaje kao posledica ulaza $R(z)$, a izraz (22) je greška u ustaljenom stanju koja je posledica poremećaja $L(z)$. Vrednost greške u ustaljenom stanju, koja je posledica ulaza $R(z)$, načelno smo analizirali u prethodnom paragrafu. Namera nam je da u nastavku teksta analiziramo mogućnost smanjenje greške $e_{Lss}(kT)$, koja je posledica neželjnog ulaza, odnosno poremećaja $L(z)$.

Bez gubitka na opštosti možemo pretpostaviti da je poremećaj $L(z)$ konstantan, odnosno bolje je reći da odgovara Hevisajdovoj funkciji i njegova $\mathfrak{Z}$ transformacija je u obliku $L(z) = z/(z-1)$. Za ovu vrednost $L(z)$ izraz (22) postaje

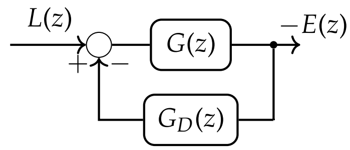
$$e_{Lss}(kT) = -\frac{1}{\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{G(z)} + \lim\limits_{z\to 1}G_D(z)}\ . \tag{23}$$

Iz izraza je jasno da se greška u ustaljenom stanju, koja je nastala kao posledica *step* poremećaja $L(z)$, može smanjiti na jedan od dva načina:

povećanjem statičkog pojačanja funkcije prenosa $G_D(z)$ ili smanjenjem statičkog pojačanja funkcije prenosa $G(z)$ [7].

Da bi bolje ilustrovali postupak smanjenja greške u ustaljenom stanju, koja je posledica neželjenog poremećaja $L(z)$, možemo pretpostaviti da je željeni ulaz $R(z) = 0$ i tada se slika 3 transformiše u blok dijagram funkcije prenosa kao na slici 4

Sa slike 4 je jasnije da ako želimo da minimizujemo vrednost izlaza $E(z)$ moramo ili da povećamo vrednost statičkog pojačanja funkcije prenosa u povratanoj sprezi $G_D(z)$ sa ciljem da manje vrednosti $E(z)$ dosegnu vrednost ulaza $L(z)$ ili da smanjimo statičko pojačanje $G(z)$, što direktno dovodi do manje vrednosti greške $E(z)$, odnosno manje vrednosti greške u ustaljenom stanju.




Slika 4: Ekvivalent funkcije prenosa u slučaju da je ulaz samo poremećaj $L(z)$

Simulacije u Simulinku uticaja poremećaja su veoma jednostavne i ostavljamo ih čitaocima za samostalni rad i vežbu.

[7] Statičko pojačanje funkcije diskretnog prenosa $A(z)$ se definiše kao $\lim_{z\to 1} A(z)$. Očevidno je da će u slučaju da $A(z)$ ima astatizam vrednost statičkog pojačanja težiti beskonačnosti.
Ovo bi praktično značilo, da je za smanjenje greške u ustaljenom stanju, potrebno da regulator sistema $G_D(z)$ sadrži astatizam, odnosno da nije svejedno gde se integralno dejstvo nalazi, u okviru regulatora ili procesa $G(z)$.