

Odabiranje i zadržka

Zoran D. Jeličić

Aleksandra Mitrović

17. novembar 2022.

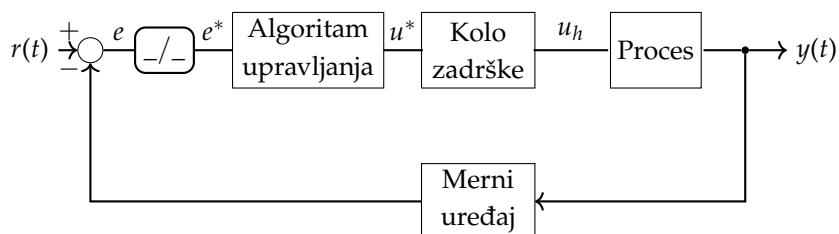
0.1 Uvodna razmatranja

Rad sistema za prenos informacija, regulaciju i upravljanje se najvećim delom zasniva na obradi i prenosu signala. U uopštenom slučaju, razlikuju se *kontinualni* i *diskretni* postupak obrade i prenosa signala.

Kontinualni pristup podrazumeva da je vrednost signala (amplituda signala) poznata u svakom trenutku nekog definisanog vremenskog intervala, dok diskretni pristup podrazumeva da je vrednost signala (amplituda) poznata u samo određenim vremenskim trenucima nekog vremenskog intervala. Ti vremenski trenuci u kojima je poznata vrednost diskretnog signala se nazivaju *trenuci odabiranja*, a vreme između dva trenutka odabiranja se naziva *vreme (perioda) odabiranja (semplovanja)*.

U skladu sa ovim razmatranjem, možemo izvršiti klasifikaciju signala na **analogne** (vrednost signala poznata u svakom vremenskom trenutku), **relejne** (vrednost signala poznata u svakom vremenskom trenutku, ali može da ima samo određene vrednosti definisane *kvantom*; signal je kvantovan po nivou (amplitudi)), **impulsne** (vrednost signala je poznata samo u trenucima odabiranja; signal je kvantovan po vremenu) i **digitalne** (signal je kvantovan i po vremenu i po nivou).

Sada se može definisati opšti strukturni blok dijagram digitalnog sistema automatskog upravljanja:



Slika 1: Tipičan blok dijagram digitalnog sistema automatskog upravljanja

Proces (sistem, objekat upravljanja) je kontinualni i na svom izlazu daje odziv (ostvarenu vrednost) $y(t)$. Takav signal se registruje preko mernog uređaja koji u sebe može imati implementiran i sen-

zor i transmitter, odnosno uloga mernog uređaja je dvojaka. On prvo registruje vrednost veličine od interesa $y(t)$ (npr. pritisak, temperatura itd.) i tu veličinu pretvara u neki karakteristični signal (napon, struja, otpornost itd.), a potom tu vrednost karakterističnog signala skalira na standardne opsege signala koji se koriste u industriji (za strujne signale je to najčešće $4 \div 20$ mA, dok je za naponske $0 \div 10$ V, $-10 \div 10$ V itd.). Takav signal se odzima od referentne (željene) vrednosti kako bi se izračunao signal greške $e(t)$. Kako je upravljački algoritam implementiran na računaru (digitalnom uređaju), neophodno je analogni signal $e(t)$ diskretizovati, odnosno pretvoriti u digitalni signal e^* . Analognu digitalnu konverziju (ADC) vrši **odabirač**, odnosno A/D konvertor. Nakon toga, računar generiše digitalni signal upravljanja u^* . Na kraju, ovakav signal se ne može direktno dovesti na kontinualni proces pa je potrebno izvršiti digitalno analognu konverziju (DAC). Ulogu D/A konvertora vrši **kolo zadržke nultog reda** koje na svom izlazu generiše signal $u_h(t)$.

Na osnovu navedenog objašnjenja principa rada digitalnog sistema upravljanja, zaključujemo da su ključni procesi A/D i D/A konverzije kako bi se izvršilo "povezivanje" kontinualnog sistema i digitalnog sklopa upravljanja u kompaktnu celinu. Proces A/D i D/A konverzije su detaljno objašnjeni u sklopu predavanja, tako da u nastavku neće biti detaljnije razmatrani.

1 Zadaci

1. Prikazati spektar originalnog signala i spektar odbirkovanog signala $f(t) = \sin(\omega_0 t)$. Razmotriti uticaj periode odabiranja.

Napomena: koristiti relaciju $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dt$.

Rešenje.

Da bismo odredili spektar signala potrebno je da pređemo u frekvencijski domen, a matematički aparat koji nam to omogućava je Furijeova transformacija.¹ Sledi

¹ Koristićemo Ojlerov obrazac:

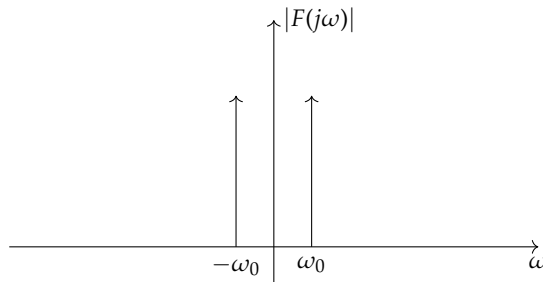
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega_0 - \omega)t} - e^{j(-\omega_0 - \omega)t}] dt, \end{aligned}$$

pa na osnovu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dt = 2\pi \cdot \delta(x)$ prethodno dobijeni izraz

možemo zapisati kao

$$F(j\omega) = \frac{1}{2j} \cdot 2\pi [\delta(\omega_0 - \omega) - \delta(-\omega_0 - \omega)] .$$

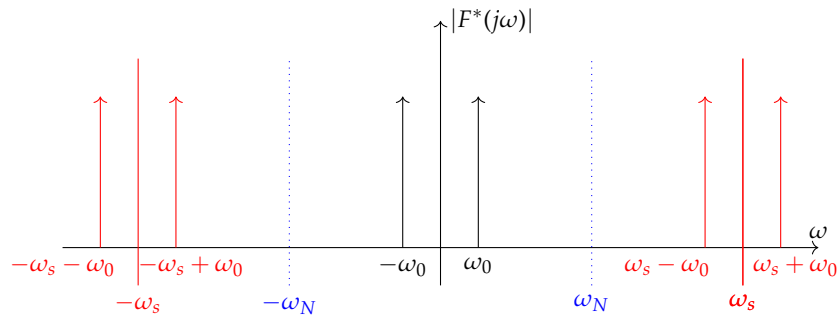
Na osnovu dobijenog izraza zaključujemo da spektar periodičnih funkcije čine delta impulsi na učestanosti signala. Spektar osnovnog signala je prikazan na slici 2.



Slika 2: Spektar signala $f(t)$

Spektar odbirkovanog signala je beskonačno periodičan i dobija se multupliciranjem osnovnog spektra oko učestanosti odabiranja. Da bi se na osnovu spektra odbirkovanog signala izvršila idealna rekonstrukcija originalnog signala, neophodno je beskonačni spektar ograničiti, odnosno propustiti kroz idealni niskopropusni filter koji uklanja sve komponente na učestanostima većim od Nikvistove učestanosti $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$, gde je ω_s učestanost odabiranja. Takođe, rekonstrukciju spektra originalnog signala na osnovu spektra odbirkovanog signala nije moguće izvršiti ukoliko nije zadovoljena Nikvistova teorema odabiranja koja definiše izbor učestanosti odabiranja. Po teoremi važno je izabrati učestanost odabiranja koja je bar dva puta veća od najveće učestanosti u spektru $\omega_s \geq 2\omega_{max}$, u suprotnom, dolazi do pojave *alijasa*, odnosno u spektru odbirkovanog signala se javljaju komponente kojih nema u spektru osnovnog signala.

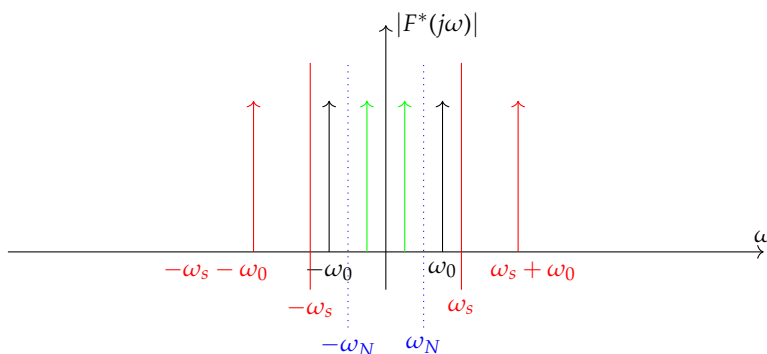
(a) Slučaj kada je zadovoljena teorema odabiranja, $\omega_s \geq 2\omega_0$.



Slika 3: Spektar odbirkovanog signala $f^*(t)$

Na osnovu slike 3 zaključujemo da se na osnovu spektra odbirkovanog signala (deo koji ostaje nakon filtriranja je između $-\omega_N$ i ω_N) može izvršiti rekonstrukcija spektra originalnog signala (isti spektar kao na slici 2).

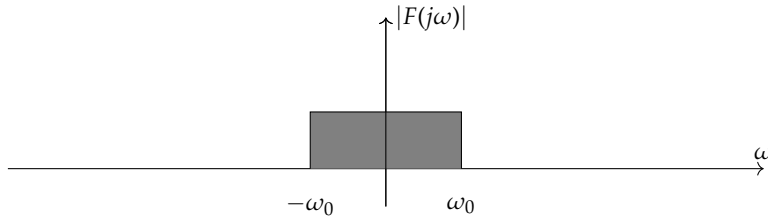
(b) Slučaj kada nije zadovoljena teorema odabiranja, $\omega_s < 2\omega_0$.



Slika 4: Spektar odbirkovanog signala $f^*(t)$

Na osnovu slike 4 možemo zaključiti da komponente na učestanostima $\omega_s - \omega_0$ i $-\omega_s + \omega_0$ (linije označene zelenom bojom) ne postoje u originalnom spektru pa one predstavljaju alijase, odnosno neželjene komponente koje se javljaju u spektru odbirkovanog signala, a posledica su loše izabrane učestanosti odabiranja (nije zadovoljena Nikvistova teorema).

2. Na slici 5 je prikazan amplitudski spektar signala $f(t)$:

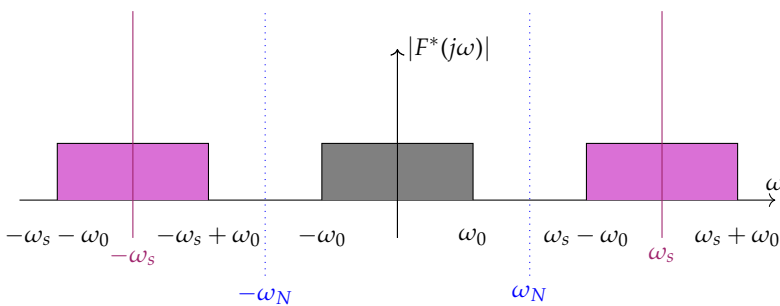
Slika 5: Spektar signala $f(t)$

Nacrtati spektar odbirkovanog signala i diskutovati njegov oblik u zavisnosti od izbora učestanosti odabiranja.

Rešenje.

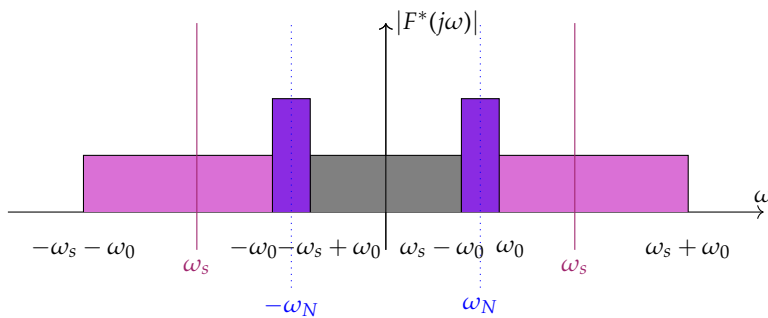
Posmatraćemo dva slučaja:

(a) Učestanost odabiranja je $\omega_s \geq 2\omega_0$.

Slika 6: Spektar odbirkovanog signala $f^*(t)$

Na osnovu slike 6 zaključujemo da se iz spektra odbirkovanog signala može izvršiti rekonstrukcija spektra originalnog signala.

(b) Učestanost odabiranja je $\omega_s < 2\omega_0$.

Slika 7: Spektar odbirkovanog signala $f^*(t)$

Na osnovu slike 7 zaključujemo da se, usled pogrešno izabrane učestanosti odabiranja, ne može izvršiti rekonstrukcija spektra originalnog signala iz spektra odbirkovanog signala.

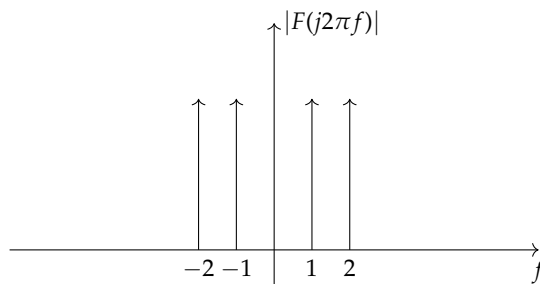
3. Dat je signal $f(t) = \sin(2\pi t) + \cos(4\pi t - \frac{\pi}{3})$.
- Nacrtati spektar originalnog signala.
 - Nacrtati spektar signala odbirkovanog frekvencijom $f_s = 2.5\text{Hz}$ i označiti alijase ukoliko postoje.
 - Predložiti periodu odabiranja tako da nema alijasa i nacrtati spektar odbirkovanog signala.

Rešenje.

- (a) Dati signal $f(t)$ čine dve prostoperiodične komponente na učestanostima $\omega_1 = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $\omega_2 = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ili koristeći relaciju

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi},$$

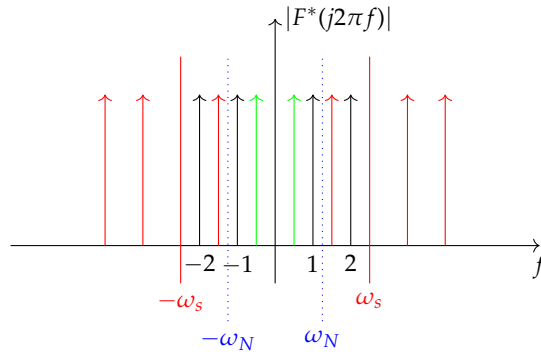
$f_1 = 1\text{Hz}$ i $f_2 = 2\text{Hz}$. Sledi da će spektar signala činiti impulsi na frekvencijama f_1 i f_2 .



Slika 8: Spektar signala $f(t)$

- (b) Spektar odbirkovanog signala se beskonačno puta umnožava oko frekvencije f_s . Zbog toga se takav spektar propušta kroz niskopropusni filter koji odseca sve komponente na frekvencijama većim od Nikvistove

$$f_N = \frac{f_s}{2} = 1.25\text{Hz}.$$



Slika 9: Spektr odbirkovanog signala $f^*(t)$

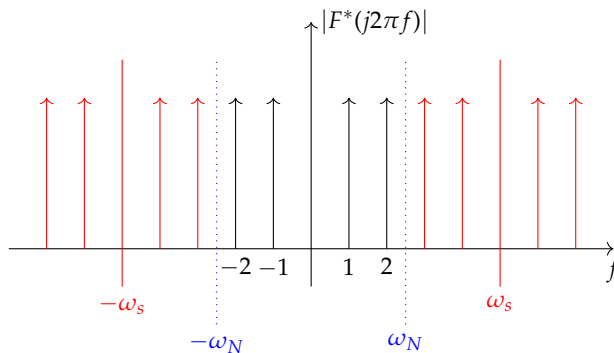
Na osnovu spektra odbirkovanog signala može se zaključiti da su se pojavili alijasi na frekvencijama -0.5Hz i 0.5Hz usled loše izabrane frekvencije odabiranja koja nije bar dva puta veća od najveće frekvencije u originalnom spektru $f_{max} = 2\text{Hz}$.

- (c) Na kraju, da bismo izvršili rekonstrukciju spektra originalnog signala iz spektra odbirkovanog signala potrebno je izabrati frekvenciju smplovanja tako da je zadovoljena Nikvistova teorema

$$f_s \geq 2f_{max} = 4\text{Hz} ,$$

pa možemo izabrati frekvenciju odabiranja $f_s = 5\text{Hz}$. Sledi da će Nikvistova frekvencija biti

$$f_N = \frac{f_s}{2} = 2.5\text{Hz} .$$

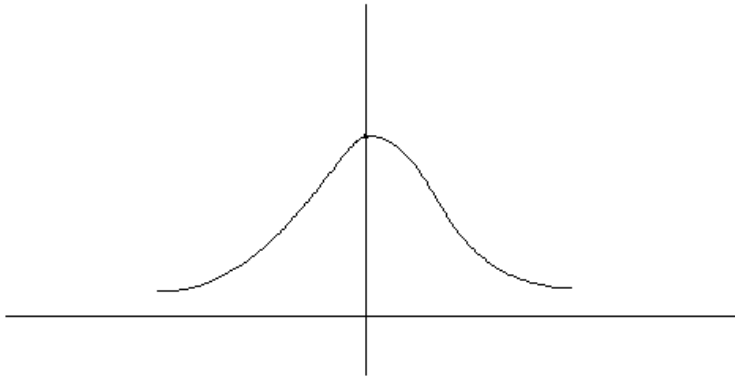


Slika 10: Spektr odbirkovanog signala $f^*(t)$

Možemo zaključiti da se iz spektra odbirkovanog signala kada prođe kroz D/A konvertor (deo spektra koji ostane između $-\omega_N$ i ω_N) može rekonstruisati spektr originalnog signala koji je prikazan na slici 8.

4. Na slici 11 je prikazan spektar signala $y(t)$. Nacrtati spektar odbirkovanog signala i diskutovati njegov oblik u zavisnosti od izbora učestanosti odabiranja.

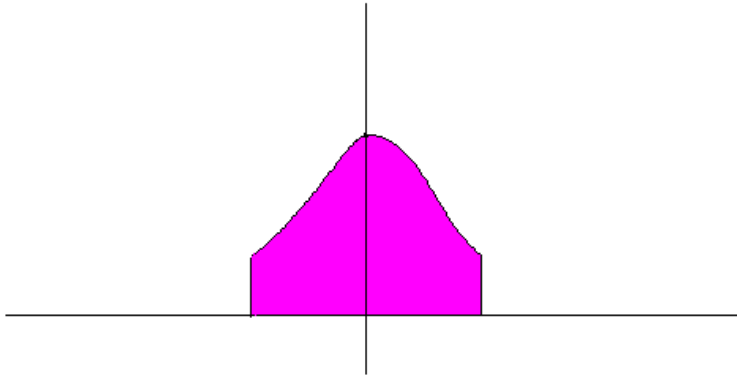
Slika 11: Spektar signala $y(t)$



Rešenje.

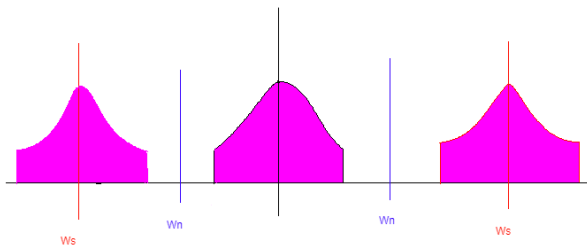
Sa slike 11 se može zaključiti da je spaktar signala neograničen što znači da bez obzira kakvu frekvenciju odabiranja izaberemo, doći će do preklapanja spektra i iz spektra odbirkovanog signala se neće moći izvršiti rekonstrukcija spektra originalnog spektra. Zbog toga se u ovakvim situacijama vrši prefiltriranje signala kako bi se sve neželjene komponenta signala na visokim frekvencijama uklonile i kako bi se ograničio spektar signala. Ovakav filter se naziva *anti-aliasing filter*. Signal $y(t)$ se filtrira niskopropusnim filtrom koji će otkloniti sve spektralne komponente na učestanostima većim od ω_0 .

Slika 12: Spektar filtriranog signala $y_f(t)$



Filtriran spektar signala sa slike 12 se odbirkuje učestanošću odabiranja ω_s pri čemu su razmatrana dva slučaja:

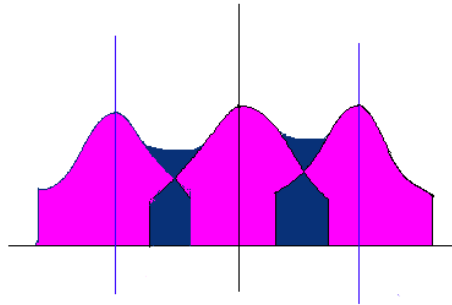
(a) Slučaj kada je učestanost odabiranja $\omega_s \geq \omega_0$.



Slika 13: Spektar filtriranog odbirkovanog signala $y_f^*(t)$

Na osnovu spektra odbirkovanog signala moguće je izvršiti rekonstrukciju spektra originalnog signala.

(b) Slučaj kada je učestanost odabiranja $\omega_s < \omega_0$.

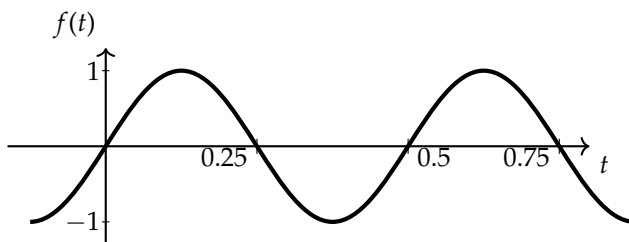


Slika 14: Spektr filtriranog odbirkovanog signala $y_f^*(t)$

Iz spektra odbirkovanog signala se ne može rekonstruisati spektr originalnog signala.

5. Dat je prostoperiodični signal $f(t)$ prikazan na slici 15.

- Nacrtati amplitudski spektr signala $f(t)$.
- Nacrtati spektr odbirkovanog signala $f^*(t)$ ukoliko je učestanost odabiranja $\omega_s = 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
- Predložiti učestanost odabiranja tako da rekonstrukcija originalnog signala bude moguća.



Slika 15: Signal $f(t)$

Rešenje.

- Signal $f(t)$ se može prikazati u obliku

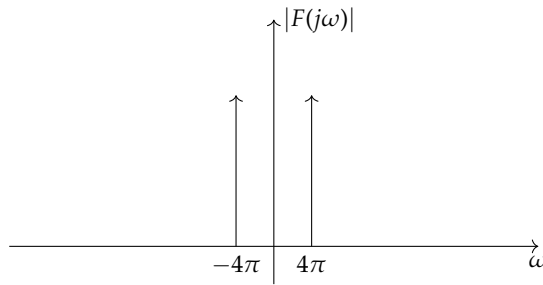
$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) ,$$

gde je A amplituda signala, ω je učestanost i φ je fazni pomeraj signala $f(t)$. Sa slike 15 sledi

$$A = 1$$

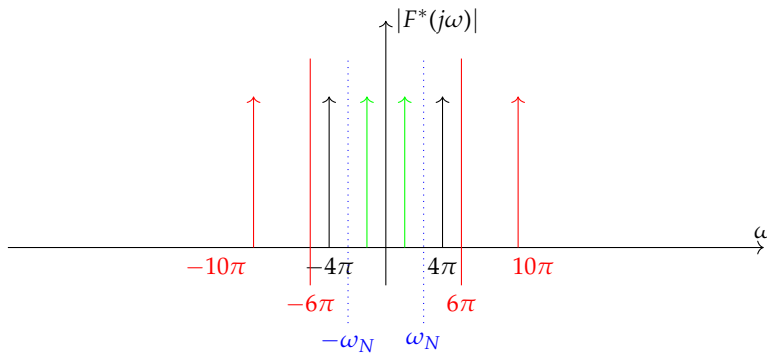
$$\varphi = 0$$

$$T = 0.5\text{s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Slika 16: Spektar signala $f(t)$

(b)



Slika 17: Spektar odbirkovanog signala $f^*(t)$

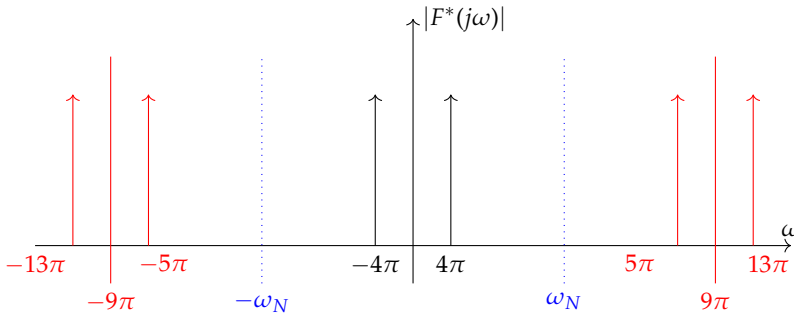
Iz spektra odbirkovanog signala se ne može rekonstruisati spektar originalnog signala.

- (c) Da bi se pravilno izvršila rekonstrukcija spektra originalnog spektra iz spektra odbirkovanog signala potrebno je da učestanost odabiranja bude bar dva puta veća od najveće učestanosti u spektru

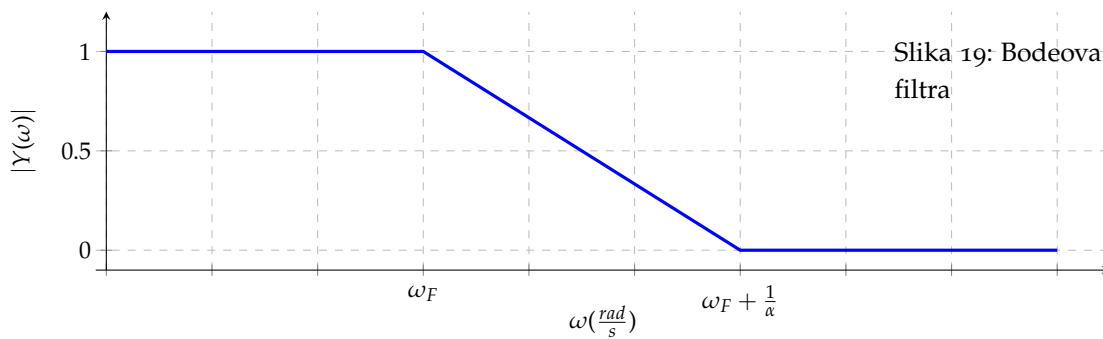
$$\omega_s \geq 2\omega_{max} = 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Možemo izabrati učestanost odabiranja npr. $\omega_s = 9\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Sledi

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = 4.5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Slika 18: Spektar odbirkovanog signala $f^*(t)$

6. Dat je signal $y(t)$ koji se sastoji od osnovnog signala $x(t) = \sin(20t) + \sin(30t)$ i šuma $n(t) = 0.5 \sin(70t)$.
- Nacrtati amplitudski spektar signala $y(t)$.
 - Ukoliko je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{40}s$, izračunati učestanost odabiranja kao i Nikvistovu učestanost. Nacrtati amplitudski spektar nakon odabiranja.
 - Na slici 19 je data Bodeova karakteristika filtra. Ukoliko su parametri filtra $\alpha = 0.05 \frac{s}{rad}$ i $\omega_F = 40 \frac{rad}{s}$, odrediti funkciju prenosa filtra i nacrtati amplitudski spektar filtriranog signala $|Y_F(\omega)|$.
 - Nacrtati amplitudski spektar filtriranog signala ukoliko je vreme odabiranja $T = \frac{\pi}{40}s$.
 - Ukoliko bismo iskoristili filter prikazan na slici 19 za filtriranje nekog nepoznatog signala, koliko bi trebalo biti maksimalno vreme odabiranja tako da ne bi došlo do pojave alijasa?

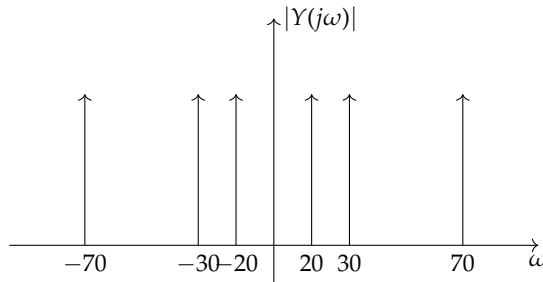


Slika 19: Bodeova karakteristika filtra

Rešenje.

(a) Signal $y(t)$ je

$$y(t) = x(t) + n(t) = \sin(20t) + \sin(30t) + \sin(70t) .$$



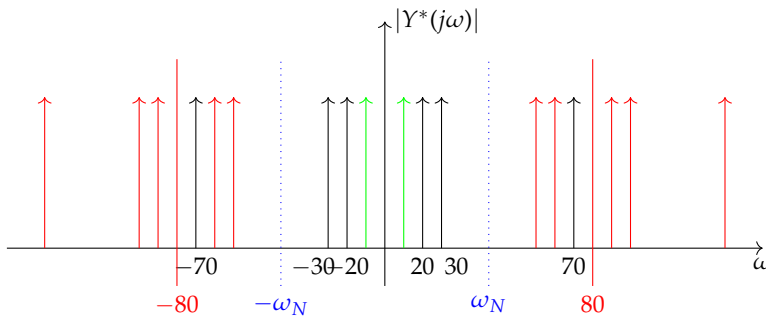
Slika 20: Spektar signala $y(t)$

(b) Na osnovu periode odabiranja može se odrediti učestanost

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} ,$$

dok je Nikvistova učestanost

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$



Slika 21: Spektar odbirkovanog signala $y^*(t)$

Na osnovu spektra odbirkovanog signala možemo zaključiti da se ne može izvršiti rekonstrukcija spektra originalnog signala jer su se na učestanosti $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $\omega = -10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ pojavili alijasi.

(c) Na osnovu Bodeove karakteristike filtra koja je prikazana na slici 19 može se formirati funkcija prenosa na sledeći način ²

$$G(s) = k \frac{s + 60}{s + 40} ,$$

gde je k pojačanje sistema, $\omega_F = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $\omega_F + \frac{1}{\alpha} = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Nakon prelaska u frekvencijski domen kompleksna promenljiva s se menja sa $j\omega$

$$G(j\omega) = k \frac{j\omega + 60}{j\omega + 40} .$$

² Podsetnik: svaki pol sistema obara amplitudsku karakteristiku za $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$, dok svaka nula podiže karakteristiku za $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$.

Modulo funkcije prenosa je

$$|G(j\omega)| = k \frac{\sqrt{\omega^2 + 60^2}}{\sqrt{\omega^2 + 40^2}}.$$

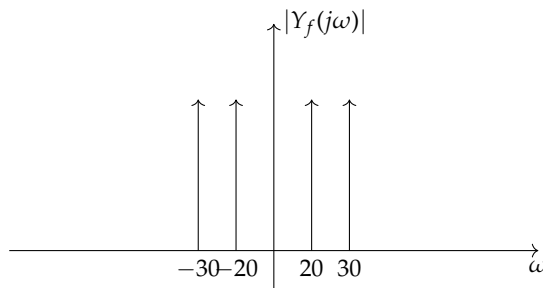
Kako je na osnovu Bodeovog dijagrama sa slike 19 pojačanje sistema na učestanosti $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ jednako $|G(j)| = 1$, sledi

$$k \frac{\sqrt{1^2 + 60^2}}{\sqrt{1^2 + 40^2}} = 1 \Rightarrow k = 0.6668.$$

Na kraju, funkcija prenosa filtra je

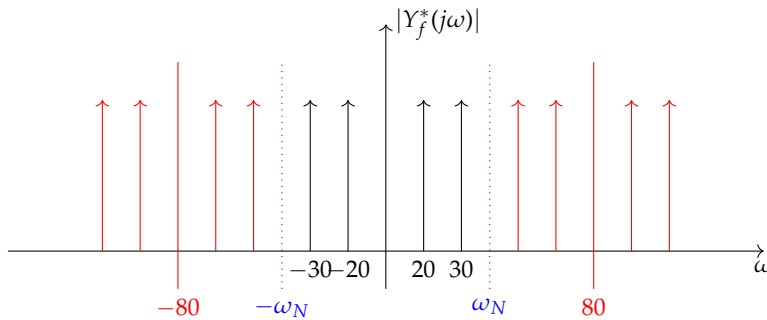
$$G(s) = 0.6668 \frac{s + 60}{s + 40}.$$

Dobijeni filter je niskopropusni, pri čemu sve učestanosti veće od $60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ potpuno uklanja. Sledi da će dati filter filtrirati ulazni signal $y(t)$ tako što će ukloniti komponentu na $70 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ koja potiče od šuma, a ostatak signala će propustiti.



Slika 22: Spektar filtriranog signala $y_f(t)$

(d)



Slika 23: Spektar odbirkovanog filtriranog signala $y_f^*(t)$

Na osnovu spektra odbirkovanog filtriranog signala možemo zaključiti da nije došlo do pojave alijasa, odnosno na osnovu spektra odbirkovanog signala moguće je izvršiti rekonstrukciju spektra originalnog signala. Filter opisan funkcijom prenosa $G(s)$ u ovom slučaju predstavlja anti-aliasing filter koji uklanja šum u signalu $y(t)$.

- (e) Kako dati filter propušta sve komponente do učestanosti $\omega = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ sledi da je minimalna učestanost sa kojom je potrebno odbirkovati signal

$$\omega_s = 2\omega = 120 \frac{\text{rad}}{\text{s}} ,$$

odnosno maksimalna perioda odabiranja je

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \approx 0.052\text{s} .$$