

Uvod u spektralnu analizu signala

Milan R. Rapać

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

5. septembar 2013

Sadržaj

1	<i>Motivacija</i>	3
2	<i>Prostoperiodična kretanja</i>	5
3	<i>Furijeovi redovi</i>	15
4	<i>Metod impedansi</i>	26
5	<i>Furijeova transformacija</i>	33
6	<i>Jedno uopštenje Furijeove transformacije</i>	47

U nastavku ćemo izložiti osnovne elemente i principe spektralne analize signala. Preciznije, prikazaćemo na koji se način “proizvoljna” promena ili kretanje (signal) može razložiti na elementarna, prostoperiodična kretanja (signale).

Furijeovi redovi (i uopšte Furijeova transformacija i druge slične “integralne” transformacije) imaju izuzetno veliku primenu u širokom spektru inženjerskih disciplina, ali i u mnogim drugim oblastima. Otuda je veoma teško izabrati jedan pristup ovoj materiji koji bi u potpunosti odgovarao svakom čitaocu. Ovaj tekst je prvenstveno prilagođen čitaocima koji će spektralni razvoj primenjivati u oblastima obrade merenog signala (u smislu filtriranja, detekcije ivica i sl.), te za potrebe analize i sinteze linearnih dinamičkih procesa, sa posebnim naglaskom na linearne sisteme upravljanja. S tim u vezi, pretpostavićemo da se sve veličine koje posmatramo menjaju *u vremenu*, odnosno da signali koje posmatramo zavise od jedne nezavisne promenljive koju tumačimo kao vreme. Bez razlike smo mogli posmatrati prostorne promene – svi rezultati bi ostali nepromenjeni.

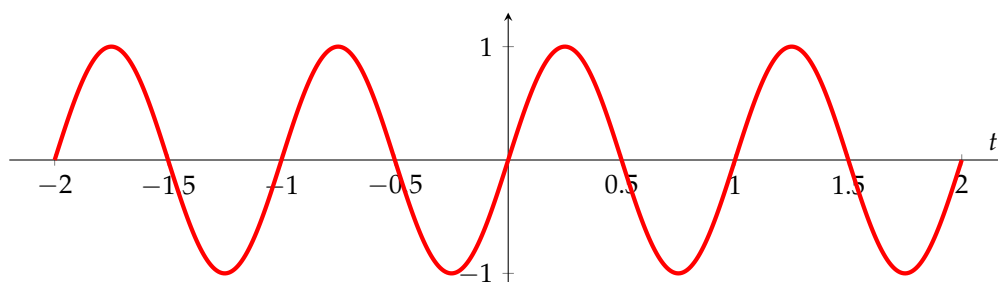
Iako ćemo pojam signala uvesti na vrlo opšti način, *u narednom izlaganju ćemo se ograničiti na vremenski kontinualne signale*. Podsećamo čitaoca da su vremenski kontinualni signali definisani nad neprekidnim vremenskim intervalima. Posmatraćemo najpre periodične signale i signale konačnog trajanja. Videćemo da su sa stanovišta spektralne analize ovi signali međusobno veoma bliski. Spektralna analiza periodičnih signala (tj. signala konačnog trajanja) naziva se razvojem signala u **Furijeov red**. Spektralna analiza signala neograničenog trajanja naziva se razvojem u **Furijeov integral**, odnosno **Furijeovom transformacijom**. U tom smislu, podjednako dobar naslov tekućeg odeljka bio bi i “Uvod u Furijeove redove i Furijeovu transformaciju”.

Imajući u vidu tekući nivo tehnološkog razvoja, moglo bi se pomisliti da je za inženjersko obrazovanje dovoljno poznavati elemente spektralnog razvoja digitalnih (tačnije: vremenski diskretnih) signala. Konačno, gotovo sva obrada signala se danas vrši pomoću digitalnih računara, a savremeni upravljački uređaji su i sami digitalni. Ipak, smatramo da je u cilju potpunog razumevanja spektralne analize signala uopšte neophodno najpre pravilno razumeti spektralnu analizu vremenski kontinualnih (analognih) signala. *Najpre, spektralna analiza analognih signala je deo našeg svakodnevnog iskustva i poimanja sveta koji nas okružuje. Svaki čovek koji je u stanju da vidi ili čuje suštinski razume spektralnu analizu!* Spektralna analiza u srži nije ni teška, ni komplikovana, ni preterano apstraktna! Ona je samo jedno široko uopštenje načina na koji doživljavamo boje i tonove na slučaj veličina koje po svojoj fizičkoj prirodi ne moraju biti svetlost ili zvuk. S obzirom da prostor i vreme intuitivno poimamo kao neprekidne, daleko je lakše razumeti spektralnu analizu analognih signala – diskretizacija neretko prikriva suštinsku jednostavnost osnovnih principa. Dalje, iako su upravljački uređaji obično digitalni, objekti upravljanja najčešće to nisu, a isto važi i za mnoge senzore, izvršne organe, te druge elemente upravljačkih petlji. Otuda je važno napomenuti da se spektralna analiza kontinualnih signala veoma uspešno koristi pri rešavanju običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, koje su osnovni alat za modelovanje raznovrsnih fizičkih pojava i tehničkih procesa. Ilustracije radi, svako ko je ikada koristio metod kompleksnih predstavnika (metod impedansi) za rešavanje električnih kola implicitno se služio Furijeovim redovima. Prethodno razmatranje, naravno, predstavlja samo kratak pregled osnovnih mogućnosti primene spektralne analize signala i ni približno ne iscrpljuje njen značaj.

Organizacija izlaganja. Motivacijom za izučavanje spektralne analize signala kratko se bavimo u prvom odeljku. Prostoperiodičnim signalima i kretanjima bavimo se u narednom, drugom odeljku. Furijeovi redovi su uvedeni u trećem, a metod impedansi u četvrtom odeljku. Konačno, Furijeovu transformaciju i jedno njeno uopštenje uvodimo u poslednja dva odeljka.

1 Motivacija

Celokupna analiza signala se zasniva na jednostavnoj, ali neobično moćnoj ideji da se kretanja i promene u prirodi, te raznoliki pojavni oblici tih kretanja (signali), mogu razložiti na skup jednostavnih, elementarnih činilaca. **U spektralnoj analizi signala sve signale razlažemo na elementarne, prostoperiodične oblike. Drugim rečima, osnovnim gradivnim činiocima smatramo prostoperiodične talase.** Pojedine talase nazivamo **harmonicima**. Otuda se spektralna analiza često naziva i *harmonijskom* analizom.



Slika 1: Prostoperiodični signal učestanosti 1Hz.

Primer prostoperiodičnog (tačnije: sinusnog) signala prikazan je na slici 1. U daljem tekstu ćemo se prostoperiodičnim signalima detaljno baviti. Za sada je bitno samo da uvedemo pojmove perioda i učestanosti (frekvencije). **Period signala je vremenski interval nakon koga se vrednosti signala ponavljaju na identičan način.** **Učestanost signala se definiše kao broj punih perioda signala u jedinici vremena.** Period se meri sekundama (s), a učestanost Hercima (Hz): *učestanost od jednog Herca ima signal čiji period traje tačno jednu sekundu.* Pri spektralnoj analizi signala, komponente viših učestanosti nazivaćemo višim ili bržim harmonicima. Sporije komponente ćemo nazivati nižim harmonicima.

Prostoperiodični signali, naravno, nisu jedini mogući izbor pri izboru elementarnih činilaca pri razvoju signala. Postoji veći broj klasičnih postupaka pomoću kojih se signali mogu razlagati na "prostije" komponente. Klasični primer je svakako razvoj u polinomske redove, a među savremenijim pristupima valja svakako izdvojiti razvoj na "talasiće" (*wavelets*).



Slika 2: Približan spektar vidljive svetlosti.

Verovatno najočigledniji primer spektralnog razvoja signala jesu boje vidljive svetlosti. Ljudsko oko je osetljivo na elektromagnetske talase u opsegu frekvencija od približno 400 do približno 700 tera-Herca ($1\text{THz} = 10^{12}\text{ Hz} = \text{milion miliona oscilacija u sekundi}$). Svetlosne signale različitih učestanosti doživljavamo kao različite boje. Spektar vidljive svetlosti je približno prikazan slikom 2. Naravno, postoje i elektromagnetski talasi koje čovek nije u stanju da vidi, takvi su recimo X-zraci, γ -zraci i sl. Pregled spektra elektromagnetskog zračenja prikazan je tabelom 1.

oblast frekv. (Hz)	radio-talasi	mikro-talasi	infra-crveni	vidljiva sv.	ultra-ljubičasti	X-zraci	γ -zraci
	$< 3 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{12} - 4.3 \cdot 10^{14}$	$4.3 \cdot 10^{14} - 7.5 \cdot 10^{14}$	$7.5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	$3 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{19}$	$> 3 \cdot 10^{19}$

Tabela 1: Pregled elektromagnetskih talasa po opsezima učestanosti.

Razlaganjem zvučnog signala na spektralne komponente dobijamo pojedinačne tonove. Zvuk je mehanički talas u opsegu učestanosti od par desetina do par desetina hiljada Herca. Zvukove nižih učestanosti nazivamo infrazvucima, a zvuke viših učestanosti ultrazvucima. Upravo nam sposobnost da razlikujemo pojedine harmonijske komponente zvučnog talasa omogućava da komuniciramo putem govora, da raspoznamo glasove drugih ljudi i uživamo u muzici.

Spektralna analiza ima višestruku primenu. Različite prostoperiodične komponente signala često imaju potpuno različit smisao i značaj u konkretnoj oblasti. Tako se, recimo, pri analizi merenog signala čitav talasni oblik najčešće može rekonstruisati samo na osnovu relativno malog broja prostoperiodičnih komponenata niske učestanosti. Merni šum je obično lokalizovan na višim učestanostima, te se eliminacijom brzih harmonika merni šum veoma uspešno može otkloniti. Slično, s obzirom da su komponente niskih učestanosti obično sasvim dovoljne za rekonstrukciju oblika signala, spektralna analiza se veoma uspešno može koristiti u kompresiji. Brze spektralne komponente sadrže informacije o brzim promenama signala, te se na osnovu njih može vršiti detekcija naglih promena signala. Nagle promene vrednosti signala mogu ukazivati na promenu ponašanja procesa koji generiše signal ili naglu promenu u drugim signalima koji na taj proces utiču. Pri analizi slike, na ovaj način se mogu detektovati ivice. Uopšte, pri analizi različitih tipova signale određena svojstva su često frekvencijski lokalizovana, odnosno mogu se prepoznati na unapred poznatom skupu učestanosti.

Dobro je poznato da se dinamički procesi različito ponašaju u odnosu na ulazne (pobudne) signale različitih frekvencija. U svakodnevnom životu svedoci smo da se svetlost i zvuk različitih učestanosti na različit način prostiru kroz različite sredine. Ova osobina je dragocena kako pri analizi, tako i pri sintezi sistema za obradu signala i upravljačkih sistema. U nastavku ćemo se posebno baviti linearnim, stacionarnim, dinamičkim procesima koji zadovoljavaju princip superpozicije. Sa tačke analize, recimo, linerni, stacionarni procesi se opisuju linearnim, diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima. Jednačine pomenutog tipa imaju izvanredan značaj pri modelovanju fizičkih pojava i drugih fenomena iz naše okoline. Spektralni razvoj omogućava kvalitativnu i kvantitativnu analizu ovih jednačina, te dublje razumevanje prirode procesa koji se njima opisuju. Na osnovu ovakve analize dalje se projektuju različiti tipovi linearnih filtara i regulatora.

2 Prostoperiodična kretanja

Prostoperiodični signali

Periodični signali. Signal je **periodičan** ukoliko mu se vrednosti ponavljaju na identičan način nakon datog vremenskog intervala.

Drugim rečima, signal f je periodičan sa **periodom** $T > 0$ ukoliko je za svaki vremenski trenutak t

$$f(t) = f(t + T) . \quad (1)$$

Jasno, ukoliko je T period signala tada važi

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \dots$$

Najmanji pozitivan broj T za koji je zadovoljen uslov periodičnosti (1) naziva se **osnovnim periodom**.

Prostoperiodični signali. Prostoperiodični signal (osnovnog) perioda $T > 0$ je svaki signal f koji se može zapisati u jednom od sledećih ekvivalentnih oblika:

$$f(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) , \quad (2)$$

$$f(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) , \quad (3)$$

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) . \quad (4)$$

Koeficijente a i b nazivamo doprinosima sinusne i kosinusne komponente prostoperiodičnog signala. Pozitivni koeficijent A se naziva **amplitudom** prostoperiodičnog signala, dok su φ i ϕ **fazni stavovi** u kosinusnom i sinusnom obliku zapisa, tim redom.

Koeficijenti a , b i A imaju istu fizičku dimenziju kao i sam signal f , što zapisujemo kao

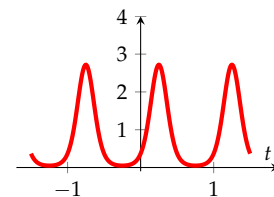
$$f[=]a[=]b[=]A , \quad \text{odnosno kao} \quad [f] = [a] = [b] = [A] .$$

Fazni stavovi φ i ϕ su uglovne veličine koje izražavamo u radijanima. Ugao od jednog radijana odgovara uglu čiji je odgovarajući kružni luk jednak poluprečniku kružnice. Otuda radijan suštinski predstavlja neimenovanu veličinu,

$$[\phi] = [\varphi] = 1 \text{ rad} . \quad (5)$$

Broj punih perioda u jediničnom intervalu vremena naziva se **učestanošću** (tj. **frekvencijom**) signala. Broja vrednost učestanosti je, dakle, recipročna brojnoj vrednosti osnovnog perioda

$$\nu = \frac{1}{T} . \quad (6)$$



Slika 3: Primer periodičnog signala. Periodičan signal koji nije prostoperiodičan (koji nema sinusni oblik) ponekad se naziva složeno-periodičnim signalom.

Relaciju $[=]$ treba čitati kao „imaju iste fizičke dimenzije“. Tako, recimo, izraz $f[=]a$ znači da se veličine f i a mere istim jedinicama, recimo Voltima. U tom slučaju, pisaćemo i $f[=]1V$. Samu jedinicu kojom se meri neka fizička veličina, recimo signal f , obeležavaćemo sa $[f]$, pa tako možemo pisati $[f] = 1V$.

Učestanost se izražava Hercima, $[v] = 1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$. **Kružna učestanost** signala jednaka je ukupnoj brzini promene argumenta prostoperiodičnog signala, a proporcionalna je učestanosti signala,

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T} . \quad (7)$$

Kružna učestanost se izražava radijanima u sekundi, $\omega [=] 1\text{rad/s}$.

Ekvivalentni zapisi prostoperiodičnog signala. Pokazaćemo da su zapisi (2), (3) i (4) međusobno ekvivalentni. Izvešćemo veze između koeficijenata različitih zapisa istog signala.

Posmatrajmo najpre prostoperiodični signal zapisan u obliku fazno pomerenog kosinusnog talasa (3). Ukoliko iskoristimo adicijonu teoremu za kosinus nalazimo da važi

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi) .$$

Ukoliko uvedemo smene

$$a = A \cos(\varphi) , \quad (8)$$

$$b = -A \sin(\varphi) , \quad (9)$$

odmah prepoznamo signal zapisan u obliku superpozicije sinusnog i kosinusnog talasa iste frekvencije (2). Koristeći se osnovnim trigonometrijskim identitetom nalazimo da važi

$$a^2 + b^2 = A^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = A^2 . \quad (10)$$

Dalje je, na osnovu definicije tangensa ugla,

$$\frac{b}{a} = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\tan(\varphi) . \quad (11)$$

Na potpuno sličan način nalazimo vezu između koeficijenata zapisa (2) i (4). Naime,

$$a = A \cos(\varphi) , \quad (12)$$

$$b = -A \sin(\varphi) , \quad (13)$$

te je posledično

$$\tan(\varphi) = \frac{a}{b} . \quad (14)$$

Podsećajući se veze tangensa i kotangensa ugla¹, nije teško zaključiti da je veza između faznog stava kosinusnog i sinusnog oblika zapisa prostoperiodičnog signala

$$\phi - \varphi = \frac{\pi}{2} . \quad (15)$$

Zaključujemo, dakle, da je potpuno svejedno na koji od prethodno razmatranih načina ćemo zapisati prostoperiodičan signal. Pogodnim transformacijama svaki od posmatranih oblika se može svesti na bilo koji drugi, kao što je ilustrovano slikom 4.

Adicione formule:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \\ &\mp \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \\ &\pm \sin(y) \cos(x) \end{aligned}$$

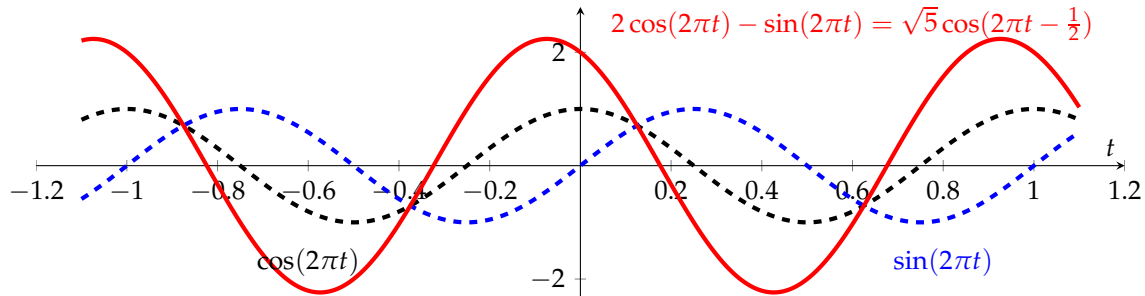
Osnovni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

¹ Kotangens ugla je recipročan tangensu, a istovremeno je jednak tangensu komplementnog ugla,

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Čitaocu ostavljamo za vežbu da pokaže da se superpozicijom (linearnom kombinacijom) proizvoljna dva prostoperiodična signala iste kružne učestanosti ω uvek dobija prostoperiodični signal odgovarajuće amplitude i faze, ali iste kružne učestanosti ω !



Slika 4: Prikaz superpozicije dva prostoperiodična talasa kružne učestanosti 2π . Nakon superpozicije rezultujući talas ostaje iste učestanosti, dok mu se amplituda i fazni pomera menjaju.

Harmonijski oscilatori

Postoji izvestan broj prirodnih pojava koje iskazuju prostoperiodično ponašanje. Svaki fizički sistem koji se menja po prostoperiodičnom zakonu nazivamo **harmonijskim oscilatorom**. Dublje razumevanje harmonijskih oscilatora omogućiće nam da se bolje upoznamo sa osobinama prostoperiodičnih signala i prostoperiodičnih kretanja uopšte.

Jednačina harmonijskog kretanja. Pre nego što prikažemo konkretne primere prostoperiodičnog kretanja, ukratko ćemo razmotriti diferencijalnu jednačinu kojoj se povinuje svako takvo kretanje: **jednačinu harmonijskog oscilatora**,

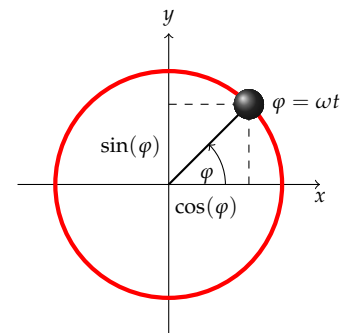
$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0. \quad (16)$$

U pitanju je linearna, diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Nije teško pokazati, što čitaocu ostavljamo za vežbu, da je opšte rešenje jednačine harmonijskog oscilovanja

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad (17)$$

gde su a i b realne konstante čiju vrednost možemo birati na proizvoljan način. Rešenje jednačine (16) je, dakle, prostoperiodični signal kružne učestanosti ω . Konkretno vrednosti konstanti a i b dobijaju se na osnovu dodatnih uslova. Primera radi, ukoliko su poznate početne vrednosti signala f i njegovog prvog izvoda \dot{f} , tada se odgovarajuće vrednosti koeficijenata a i b lako mogu izračunati.

Ravnomerno kružno kretanje. Kao primer jednostavnog prostoperiodičnog kretanja, posmatrajmo telo koje se ravnomerno kreće po kružnici jediničnog poluprečnika (videti sliku 5). Položaj tela na kružnici jednoznačno je određen poznavanjem vrednosti ugla φ . Ukoliko je u trenutku $t = 0$ ugaoni položaj tela $\varphi(0) = \varphi_0$, te ukoliko je ugaona brzina kretanja ω nepromenljiva, tada je u proizvoljnom



Slika 5: Telo koje se ravnomerno (nepromenljivom ugaonom brzinom) kreće po kružnici jediničnog prečnika.

vrenutku vremena

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 . \quad (18)$$

Označimo odstupanje tela od koordinatnog početka po horizontalnoj osi sa x , a po vertikalnoj sa y . Imajući na umu geometrijsku definiciju trigonometrijskih funkcija, odmah uočavamo da je

$$x(t) = \cos(\varphi(t)) = \cos(\omega t + \varphi_0) , \quad (19)$$

$$y(t) = \sin(\varphi(t)) = \sin(\omega t + \varphi_0) . \quad (20)$$

Vidimo da se trigonometrijske funkcije na prirodan način javljaju pri opisu prostoperiodičnog kretanja. Pri opisu ravnomernog prostoperiodičnog kretanja trigonometrijske funkcije *nisu pretpostavljene*, već potreba za njima *sledi* neposredno na osnovu geometrije problema.

Očigledno je da su jednačine koje opisuju promene položaja tela u slučaju ravnomernog kretanja po kružnici poluprečnika A ,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) , \quad (21)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) . \quad (22)$$

Značaj ravnomernog kružnog kretanja leži u tome što se svako prostoperiodično kretanje može svesti na ekvivalentno ravnomerno kružno kretanje. Pri tome, kružna učestanost prostoperiodičnog kretanja jednaka je ugaonoj brzini ravnomernog kružnog kretanja, amplituda odgovara poluprečniku kružnice po kojoj se ravnomerno kružno kretanje vrši, a fazni stav prostoperiodičnog kretanja odgovara početnom ugaonom položaju ravnomernog kružnog kretanja.

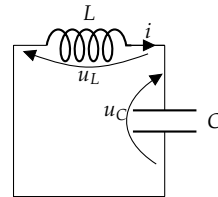
LC kolo kao harmonijski oscilator. Kao sledeći primer, posmatrajmo električno kolo koje sadrži idealan kondenzator kapacitivnosti C i idealan kalem induktivnosti L povezane provodnicima zanemarljive otpornosti (idealnim provodnicima). Ovakav sklop obično nazivamo LC kolom (videti sliku 6).

Kako LC kolo poseduje samo jednu zatvorenu strujnu konturu, ista struja teče i kroz kalem i kroz kondenzator. Dalje je napon na kalemu po intenzitetu jednak, a po znaku suprotan od napona kondenzatora, $u_L = -u_C$. Služeći se osnovnim osobinama idealnog kalema i kondenzatora, neposredno nalazimo da se napon na kondenzatoru menja po zakonu

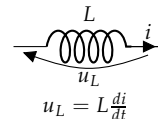
$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0 . \quad (23)$$

Dobijena jednačina je upravo ekvivalentna jednačini harmonijskog oscilatora (16) kružne učestanosti

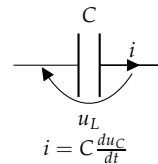
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (24)$$



Slika 6: LC kolo.



Slika 7: Idealni kalem je element na čijim se krajevima indukuje napon srazmerna promeni struje koja kroz njega protiče.



Slika 8: Idealni kondenzator je element kroz koga protiče struja srazmerna promeni napona na njegovim krajevima.

Stoga je opšte rešenje ove jednačine,

$$u_C(t) = a \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + b \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right), \quad (25)$$

gde su a i b realne konstante koje zavise od stanja kola u početnom trenutku, odnosno od početnih vrednosti struje i napona u kolu. Imajući na umu vezu između napona na krajevima idealnog kondenzatora i struje koja kroz njega protiče, struja kola je

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -a\sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + b\sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right). \quad (26)$$

Neka je polazna vrednost struje u kolu $i(0) = i_0$, a neka je polazna vrednost napona kondenzatora $u_C(0) = u_0$. Tada je

$$u_C(0) = u_0 = a, \quad i(0) = i_0 = b\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (27)$$

čime su vremenske zavisnosti napona i struje u potpunosti određene.

Električne harmonijske oscilacije kao ravnomerno kružno kretanje u prostoru energija.* Pažljivijom analizom moguće je uspostaviti još bližu analogiju između ravnomernog kružnog kretanja i promena napona i struje u električnom harmonijskom oscilatoru.

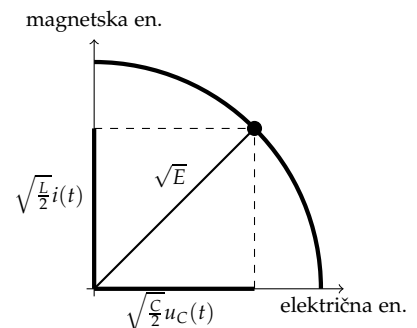
S obzirom da su provodnici u LC kolu idealni, te da kolo ne poseduje izvore, ukupna energija kola se ne menja tokom vremena. Ukupna energija kola jeste zbir energije električnog polja kondenzatora i magnetskog polja kalema,

$$E(t) = E = \underbrace{\frac{1}{2}Cu_C(t)^2}_{\text{energija kondenzatora}} + \underbrace{\frac{1}{2}Li(t)^2}_{\text{energija kalema}}. \quad (28)$$

Pojedinačno i električna i magnetska energija se menjaju tokom vremena, ali i njihov zbir uvek ostaje nepromenjen. Ukupna energija se samo "preliva" iz jednog oblika u drugi.

Prethodno izvedena jednačina svedoči da se promenama u LC kolu može pridružiti i jedno drugačije tumačenje. Naime, intenzitet ukupne energije kola možemo shvatiti kao kvadrat hipotenuze pravouglog trougla čije su katete kvadratni koreni električne i magnetske energije (videti sliku 9). Sa stanovišta promena vrednosti napona i struje, kolo možemo zamisliti kao tačku na kružnici poluprečnika \sqrt{E} koja se ravnomerno kreće ugaonom brzinom $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Međusobni odnos početnog napona kondenzatora i početne struje kola određuje vrednost polaznog ugaonog pomeraja φ_0 ,

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arctan\left(\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i_0}{u_0}\right) & u_0 \geq 0, \\ \pi + \arctan\left(\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i_0}{u_0}\right) & u_0 < 0. \end{cases} \quad (29)$$



Slika 9: Geometrijski prikaz kretanja električnog harmonijskog oscilatora (LC kola). Stanje sistema se može opisati tačkom na kružnici poluprečnika \sqrt{E} . Kvadrat apscisne vrednosti predstavlja elektrostatičku energiju kondenzatora, a kvadrat ordinatne vrednosti magnetsku energiju kalema. Zamišljena tačka se kreće nepromenljivom ugaonom brzinom $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Po analogiji sa ravnomernim kružnim kretanjem možemo definisati ugaoni pomeraj φ kao na slici.

S tim u vezi, jednačine promene napona i struje se mogu zapisati u obliku

$$\sqrt{\frac{C}{2}}u_C(t) = \sqrt{E} \cos\left(\frac{t}{LC} + \varphi_0\right), \quad (30)$$

$$\sqrt{\frac{L}{2}}i(t) = \sqrt{E} \sin\left(\frac{t}{LC} + \varphi_0\right). \quad (31)$$

Smenama $x = \sqrt{\frac{C}{2}}u_C$, $y = \sqrt{\frac{L}{2}}i$, $A = \sqrt{E}$, $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ove se jednačine svode na formalno isti oblik kao i jednačine ravnomernog kružnog kretanja.

Mehanički harmonijski oscilator. Posmatrajmo mehanički sistem prikazan na slici 10. Idealna opruga krutosti k vezana je jednim krajem za krut, nepokretan zid a drugim krajem za telo mase m koje može da se kreće bez trenja i otpora sredine.

Idealna opruga je mehanički element koji na svoje krajeve deluje elastičnom silom f_e proporcionalnom izobličenju (izduženju) koja nastoji da oprugu vrati u prvobitan oblik. Koeficijent proporcionalnosti se naziva krutošću opruge, u oznaci k .

Ukoliko položaj tela merimo od tačke u kojoj opruga nije deformisana, možemo pisati

$$f_e(t) = -kx(t), \quad (32)$$

gde negativan predznak označava da se elastična sila protivi izobličenju. Kako je ukupna masa tela nepromenljiva, a na posmatrano telo ne deluju druge sile, osnovni zakon kretanja glasi

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f_e(t). \quad (33)$$

Nakon jednostavnog preuređenja nalazimo da se i ovaj fizički sistem povinuje jednačini harmonijskog oscilovanja

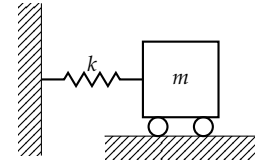
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (34)$$

Opšte rešenje dobijene jednačine je

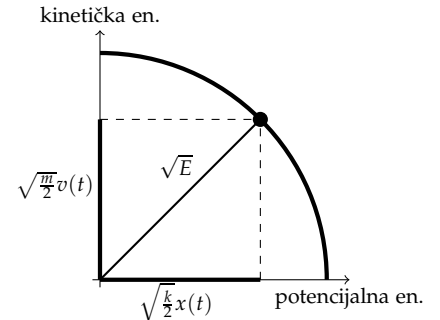
$$x(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad (35)$$

gde su a i b konstante koje se određuju iz početnih uslova, odnosno početne pozicije i brzine kretanja tela.

Mehaničke oscilacije kao ravnomerno kružno kretanje u prostoru energija.* Kretanja mehaničkog harmonijskog oscilatora se, poput kretanja električnog, može posmatrati kao ravnomerno



Slika 10: Shematski prikaz mehaničkog harmonijskog oscilatora. U pitanju je telo koje se kreće bez trenja, a na koje pri tome deluje elastična sila idealne opruge.



Slika 11: Geometrijski prikaz kretanja mehaničkog harmonijskog oscilatora. Stanje sistema se može opisati tačkom na kružnici poluprečnika \sqrt{E} . Kvadrat apscisne vrednosti predstavlja potencijalnu energiju opruge, a kvadrat ordinatne vrednosti kinetičku energiju tela. Zamišljena tačka se kreće nepromenljivom ugaonom brzinom $\omega = \sqrt{k/m}$. Po analogiji sa ravnomernim kružnim kretanjem možemo definisati ugaoni pomeraj φ kao na slici.

kružno kretanje u prostoru energija. S obzirom da se telo kreće bez trenja energija se ne gubi tokom kretanja. Potencijalna energija izobličenja opruge je srazmerna kvadratu položaja, dok je kinetička energija kretanja srazmerna kvadratu brzine tela. Označimo li brzinu kretanja tela sa v , možemo pisati

$$E(t) = E = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) . \quad (36)$$

Ugaona brzina ekvivalentnog kružnog kretanja je $\omega = \sqrt{k/m}$. Ilustracija je prikazana slikom 11.

Fazni stav i njegov fizički smisao. Ukoliko prostoperiodičnu pojavu svedemo na ekvivalentno kružno kretanje, te ukoliko takvo kretanje opišemo matematičkim modelom

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) , \quad (37)$$

tada fazni stav φ ima smisao ugaonog položaja tela (merenog u radijanima) u početnom trenutku vremena. Ukoliko je φ pozitivno kažemo da posmatrano kretanje prednjači u odnosu na kretanje čiji je početni ugao jednak nuli. Slično, ukoliko je φ negativno kažemo da posmatrano kretanje kasni.

Pojam faznog (uglovnog) kašnjenja ima jasan fizički smisao kada se govori o ravnomernom kružnom kretanju, ali ne mora biti sasvim jasan kada se govori o drugim vrstama prostoperiodičnog kretanja. Ukoliko, međutim, zapišemo vrednosti signala f u obliku

$$f(t) = A \cos(\omega(t + \frac{\varphi}{\omega})) = A \cos(\omega(t + \tau)) , \quad (38)$$

tada se implicitno uvedena veličina

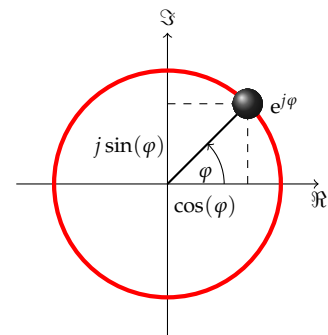
$$\tau = \frac{\varphi}{\omega} \quad (39)$$

može interpretirati kao vremensko prednjačenje (u slučaju $\tau > 0$) ili kašnjenje (u slučaju $\tau < 0$) signala. Jasno je, pri tome, da se vremenski pomeraj meri sekundama, $\tau [=] 1s$.

Imajući prethodna razmatranja u vidu, možemo reći da je fazni stav prostoperiodičnog kretanja jednak kašnjenju ili prednjačenju tog kretanja normalizovanom sa dužinom trajanja jednog perioda. Tako je, recimo, kašnjenje od $\pi/3$ jednako kašnjenju od jedne šestine perioda kretanja, isl. Drugi slični primeri dati su tabelom 2. Posebno, za dva prostoperiodična kretanja iste učestanosti kpgfoja su fazno pomena za π (tj. koja su međusobno pomena za jednu polovinu perioda) kažemo da su u protiv-fazi (tj. kontra-fazi).

Tabela 2: Primeri faznog kašnjenja i njemu ekvivalentnog vremenskog kašnjenja normalizovanog sa dužinom trajanja perioda kretanja T .

φ	τ/T
$\pi/6$	$1/12$
$\pi/3$	$1/6$
$\pi/4$	$1/8$
$\pi/2$	$1/4$
π	$1/2$



Slika 12: Kompleksni model prostoperiodičnog kretanja. Tačka na krugu se opisuje kompleksnim brojem čiji je realni deo jednak položaju na x -osi, a imaginarni deo položaju na y -osi.

Kompleksni prostoperiodični signali

Kompleksni model prostoperiodičnog kretanja. Videli smo da se sve prostoperiodične pojave mogu svesti na ekvivalentna ravnomerna kružna kretanja. Opis prostoperiodične pojave se onda svodi na opis kretanja tačke koja se ravnomernom ugaonom brzinom kreće po kružnici zadatog poluprečnika. Sa stanovišta spektralne analize signala, od izuzetnog je značaja da se ovakvo kretanje može vrlo uspešno i kompaktno opisati pomoću kompleksnih eksponencijalnih funkcija.

Naime, neka je $p(t)$ tekući položaj tela na kružnici poluprečnika A , a neka je $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ tekući ugaoni pomeraj. Zavisnost položaja od vremena se može zapisati na sledeći način

$$x(t) = A \cos(\varphi(t)) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (40)$$

$$y(t) = A \sin(\varphi(t)) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (41)$$

$$p(t) = (x(t), y(t)). \quad (42)$$

Ukoliko x - y ravan interpretiramo kao kompleksnu ravan, pri čemu se realne vrednosti nanose na x -osi, a imaginarne na y -osi, tada možemo pisati

$$p(t) = x(t) + jy(t) = A \cos(\varphi(t)) + jA \sin(\varphi(t)). \quad (43)$$

Odnosno, služeći se Ojlerovim obrascima

$$p(t) = Ae^{j\varphi(t)} = Ae^{j(\omega t + \varphi_0)} = Ae^{j\varphi_0} e^{j\omega t}. \quad (44)$$

Dobijena kompleksna predstava prostoperiodičnog kretanja je u potpunosti ravnopravna sa prethodno razmatranim realnim modelima. Pod pretpostavkom da je ugaona brzina kretanja poznata, sve informacije neophodne da se odredi položaj tačke u bilo kom trenutku vremena date su kompleksnim brojem $P = Ae^{j\varphi_0}$. Pri tome, moduo datog kompleksnog broja predstavlja amplitudu kretanja, a njegov argument početni fazni stav,

$$A = |P|, \quad \varphi_0 = \arg(P). \quad (45)$$

Kompleksni broj P nazivamo *kompleksnim predstavnikom* posmatranog prostoperiodičnog kretanja.

Kompleksni zapis prostoperiodičnih signala. Pretpostavimo da je prostoperiodični signal f zapisan u obliku

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (46)$$

Služeći se Ojlerovim obrascima kosinusnu funkciju možemo zapisati pomoću kompleksnih eksponencijalnih,

$$f(t) = \frac{A}{2} (e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}. \quad (47)$$

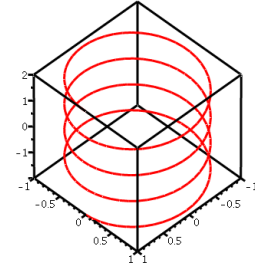
Osnovni Ojlerov obrazac daje vezu kompleksne eksponencijalne funkcije i trigonometrijskih funkcija

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi).$$

Kao neposredna posledica važe i sledeći izrazi

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$



Slika 13: Kompleksni eksponencijalni signal $e^{j2\pi t}$. Realni i imaginarni deo su prikazani na apscisi i ordinati, tim redom, dok je parametar t prikazan na elevati.

Kompleksni brojevi z_1 i z_2 su međusobno konjugovani ukoliko su jedan drugom simetrični u odnosu na realnu osu. Drugim rečima,

$$\Re(z_1) = \Re(z_2), \quad \Im(z_1) = -\Im(z_2),$$

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg(z_1) = -\arg(z_2).$$

Pišemo $z_1 = \overline{z_2}$ ili $z_2 = \overline{z_1}$. Kompleksna konjugacija se ponekad označava i zvezdicom u gornjem desnom indeksu, te se piše i $z_1 = z_2^*$.

Uvedemo li kompleksne predstavnike $F^+ = \frac{A}{2}e^{j\varphi}$ i $F^- = \frac{A}{2}e^{-j\varphi}$ posmatrani signal možemo prikazati u obliku

$$f(t) = F^+e^{j\omega t} + F^-e^{-j\omega t}. \quad (48)$$

Jasno, ukoliko je kružna učestanost ω poznata tada se sva svojstva prostoperiodičnog signala mogu čitati iz njegovih kompleksnih predstavnika. Šta više, kako su kompleksni predstavnici međusobno konjugovani sve informacije sadržane u F^+ nalaze se i u F^- i obrnuto,

$$F^+ = \overline{F^-}. \quad (49)$$

Pri tome, moduo kompleksnih predstavnika jednak je polovini amplitude. Argument kompleksnog predstavnika F^+ jednak je faznom stavu signala, dok mu je argument kompleksnog predstavnika F^- suprotan,

$$A = 2|F^+| = 2|F^-|, \quad (50)$$

$$\varphi = \arg F^+ = -\arg F^-. \quad (51)$$

Koeficijenti različitih zapisa povezani su jednostavnim geometrijskim relacijama, kao što je ilustrovano slikom 14. Ukoliko $2F^-$ zamislimo kao kompleksan broj, odnosno kao tačku u kompleksnoj ravni, tada amplitude kosinusne i sinusne komponente možemo shvatiti kao njegov realni i imaginarni deo. Zaista, neposrednom primenom Ojlerovih obrazaca nalazimo

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \frac{a}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + \frac{b}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (52)$$

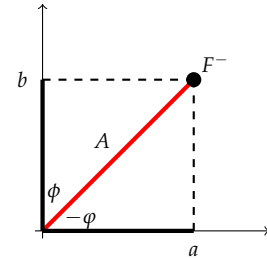
$$= \frac{a - jb}{2} e^{j\omega t} + \frac{a + jb}{2} e^{-j\omega t}. \quad (53)$$

Otuda je

$$F^+ = \frac{a - jb}{2}, \quad F^- = \frac{a + jb}{2}. \quad (54)$$

Dalje je A apsolutna vrednost (moduo) od $2F^+$ (te istovremeno i apsolutna vrednost od $2F^-$). Argument kompleksnog predstavnika F^- jednak je φ .

Za potpuno određivanje realnog prostoperiodičnog signala neophodno je poznavati njegovu kružnu učestanost ω (tj. period T) i dva dodatna realna parametra. U jednom slučaju to su doprinosi sinusne i kosinusne komponente (a i b), u drugom slučaju to su amplituda signala A i njegov fazni stav (φ ili ϕ), a u trećem to su amplituda i argument jednog od kompleksnih predstavnika (F^+ ili F^-). Izuzetno je značajno primetiti da se pri prelasku u kompleksan eksponencijalni oblik, u zapisu prostoperiodičnog signala prividno javljaju dve



Slika 14: Ilustracija geometrijske povezanosti koeficijenata različitih zapisa prostoperiodičnih signala. Ukoliko kompleksni predstavnik $2F^-$ zamislimo kao kompleksan broj, tada su a i b njegov realni i imaginarni deo, A mu je moduo, a $-\varphi$ argument.

učestanosti – jedna pozitivna, a druga negativna. S obzirom da se pri formiranju Furijeovih redova (ali i Furijeove transformacije i drugih sličnih integralnih transformacija) upravo kompleksni zapis najčešće koristi, ovu “podvojenost” frekvencija ćemo vrlo često sretati u nastavku. Stoga napominjemo da *negativne frekvencije nemaju fizičkog smisla same po sebi, već su samo posledica oblika zapisa prostoperiodičnih signala.*

Prostoperiodični signal se može zapisati u većem broju ekvivalentnih oblika. Najpre, svako prostoperiodično kretanje se može opisati diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0 ,$$

uz odgovarajuće početne uslove, recimo

$$f(0) = f_0 , \quad \frac{df(0)}{dt} = f_1 .$$

Opšte rešenje jednačine harmonijskog oscilovanja je

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) ,$$

pri čemu se za date početne uslove doprinosi sinusne i kosinusne komponente računaju pomoću izraza

$$a = f_0 , \quad b = \frac{f_1}{\omega} .$$

Ukoliko se pođe od ekvivalentnog ravnomernog kružnog kretanja, tada dolazimo do oblika

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \phi) .$$

Vrednosti koeficijenata se računaju po formulama

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} , \quad \tan \varphi = -\frac{b}{a} , \quad \tan \phi = \frac{a}{b} .$$

Konačno, za potrebe različitih proračuna i dalja uopštenja posebno je interesantan kompleksni oblik

$$f(t) = F^+ e^{j\omega t} + F^- e^{-j\omega t} .$$

Pri tome je

$$F^+ = \frac{a - jb}{2} , \quad F^- = \frac{a + jb}{2} .$$

3 Furijeovi redovi

Posmatrajmo realan signal f konačnog trajanja T . Neka je

$$f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (55)$$

Kažemo da se posmatrani signal može razviti u Furijeov (ili trigonometrijski) red ukoliko se može razložiti na zbir prostoperiodičnih komponenta čije su učestanosti celobrojni umnošci osnovne učestanosti $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Imajući u vidu prethodna razmatranja vezana za različite oblike zapisa prostoperiodičnog signala, i sam Furijeov red se može zapisati u većem broju oblika. U literaturi se najčešće sreću sledeće forme

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(\omega_1 t), \quad (56)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (57)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \phi_n). \quad (58)$$

Nije teško uočiti da se Furijeov red signala konačnog trajanja sastoji iz jednog konstantnog sabirka (harmonika nulte učestanosti), potom harmonika čiji je period jednak trajanju signala, harmoniku koji u toku ukupnog trajanja načini dva puna perioda, itd. Konstantni članovi su opisani koeficijentima $\frac{a_0}{2}$ i A_0 . Harmonik čija je kružna učestanost jednaka $n\omega_1$, tj. harmonik koji u toki vremena T načini n punih perioda, nazivamo **n -tim harmonikom**. Prvi harmonik nazivamo i **osnovnim harmonikom**.

Furijeov red se može zapisati i u kompleksnom obliku, pomoću kompleksnih eksponencijalnih funkcija

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (59)$$

Pri tome je u slučaju realnih signala uvek $F_{-n} = (F_n)^*$. Valja primetiti da se u kompleksnom obliku Furijeovog reda formalno javljaju i članovi pozitivnih i članovi negativnih frekvencija. Naravno, negativne učestanosti nemaju fizičkog smisla. Služeći se Ojlerovim obrascima, uvek je moguće kompleksni eksponencijalni sabirak učestanosti $-\omega$ i kompleksni eksponencijalni sabirak učestanosti ω spojiti u jedinstveni realni harmonik učestanosti ω .

Interesantno je uočiti da je Furijeov red signala konačnog trajanja dobro definisan za svako $t \in \mathbb{R}$, a ne samo u intervalu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$. Furijeov red signala f konačnog trajanja T definiše periodičan signal čija je jedna perioda upravo polazni signal f . Otuda je potpuno svejedno

da li govorimo o spektralnoj analizi periodičnog signala ili o spektralnoj analizi signala konačnog trajanja. Periodični signal čija je jedna perioda jednaka nekom signalu konačnog trajanja naziva se **periodičnim produženjem** tog signala.

Sračunavanje koeficijenata Furijeovog reda

U ovom odeljku pokazaćemo na koji se način mogu računati vrednosti koeficijenata Furijeovog reda datog signala. Da bi smo to učinili, najpre se moramo upoznati sa još jednom izuzetno važnom osobinom prostoperiodičnih signala (kako realnih, tako i kompleksnih) – sa osobinom ortogonalnosti.

Ortogonalnost signala nad segmentom $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Kažemo da su dva realna signala f i g definisana nad segmentom $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ međusobno ortogonalna, ukoliko je

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)dt = 0. \quad (60)$$

Kompleksni signali f i g su međusobno ortogonalni ukoliko je

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g^*(t)dt = 0. \quad (61)$$

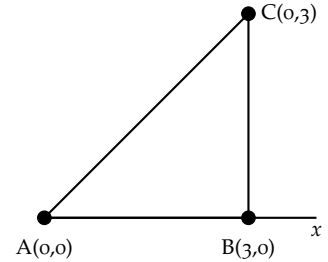
Jasno, prethodne dve definicije su u potpunosti saglasne. Ortogonalni realni signali ostaju međusobno ortogonalni i ukoliko ih formalno posmatramo kao kompleksne.

Ortogonalnost kompleksnih eksponencijalnih signala. Kompleksni eksponencijalni signali $e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$ i $e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$ su ortogonalni uvek kada su m i n različiti prirodni brojevi.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} (e^{jm\frac{2\pi}{T}t})^* dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(n-m)\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{T}{2\pi(n-m)} e^{j(n-m)\frac{2\pi}{T}t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} & n \neq m \\ t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} & n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je za proizvoljan ceo broj k

$$e^{jk\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} = e^{jk\pi} = (-1)^k,$$



Slika 15: Ilustracija geometrijskog pojma ortogonalnosti.

Iako se to ne vidi na prvi pogled, pojam ortogonalnosti signala veoma je srodan klasičnom pojmu ortogonalnosti (upravnosti) geometrijskih vektora. Ovaj pojam ćemo ilustrovati dijagramom sa slike 15. Posmatrajmo vektore (orijentisane duži)

$$\vec{AB} = (0, 3),$$

$$\vec{AC} = (3, 3),$$

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (3, 0).$$

Jasno je da su vektori \vec{AB} i \vec{BC} međusobno upravni (ortogonalni), s obzirom da stoje pod pravim uglom jedan u odnosu na drugi. Vektor \vec{AC} nije upravan ni na jedan od druga dva vektora. Jezikom analitičke geometrije,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 9 \neq 0,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 0.$$

Vektor \vec{AB} predstavlja ortogonalnu projekciju vektora \vec{AC} na osu Ax . Dva vektora su ortogonalna ukoliko je projekcija jednog na osu (pravac) drugog vektora jednaka nuli. Podsećamo čitaoca i na pojam skalarnog proizvoda: skalarni proizvod vektora a i b jednak je proizvodu dužine jednog od njih i dužine ortogonalne projekcije drugog na osu prvog vektora. Vektori su dakle ortogonalni ukoliko im je skalarni proizvod jednak nuli.

nije teško zaključiti da je

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \left(e^{jm\frac{2\pi}{T}t} \right)^* dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T & n = m \end{cases}. \quad (62)$$

Ortogonalnost trigonometrijskih signala. Trigonometrijski signali čiji su periodi celobrojni umnišci zajedničkog osnovnog faktora međusobno su ortogonalni, drugim rečima za svako celobrojno n i m važi

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\frac{2\pi}{T}t) \cos(m\frac{2\pi}{T}t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}, \quad (63)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\frac{2\pi}{T}t) \sin(m\frac{2\pi}{T}t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}, \quad (64)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\frac{2\pi}{T}t) \sin(m\frac{2\pi}{T}t) dt = 0. \quad (65)$$

Prethodni izrazi se mogu pokazati bilo polazeći od osnovnih trigonometrijskih identiteta, bilo na osnovu izraza (62), što se čitaocu ostavlja za vežbu.

Energija i snaga signala nad intervalom $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Pojmovi energije i snage signala su usko povezani sa pojmom ortogonalnosti. Uvođenje pojmova energije i snage značajno je kako sa stanovišta izračunavanje koeficijenata Furijeovih redova, tako i sa stanovišta interpretacije samih redova i dubljeg razumevanja mnogobrojnih njihovih primena, između ostalog primena u oblastima filtracije, aproksimacije i kompresije signala.

U opštem slučaju **energija signala** f (kompleksnog ili realnog) definisanog nad intervalom $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ definiše se izrazom

$$\mathcal{E}\{f\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt. \quad (66)$$

Treba obratiti pažnju na sličnost izraza pomoću koga se definiše energija signala i izraza pomoću kojih se definiše ortogonalnost. Konkretno, nije teško pokazati da je za svaki ceo broj n

$$\mathcal{E}\{Ae^{jn\frac{2\pi}{T}t}\} = A^2 T, \quad (67)$$

$$\mathcal{E}\left\{A \cos(jn\frac{2\pi}{T}t)\right\} = A^2 \frac{T}{2}, \quad (68)$$

$$\mathcal{E}\left\{A \sin(jn\frac{2\pi}{T}t)\right\} = A^2 \frac{T}{2}. \quad (69)$$

Za proizvoljna dva vektora u prostoru $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ skalarni proizvod se definiše kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Ukoliko posmatramo vektore u prostoru sa n dimenzija (tj. konačne nizove) $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ skalarni proizvod se definiše sumom

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k. \end{aligned}$$

Funkcije se mogu posmatrati kao vektori. Umesto komponenta vektora a_1, a_2 , itd. kojih ima prebrojivo mnogo, funkcija se definiše kontinuumom vrednosti $f(t)$ za svako t unutar definicionog intervala. Dakle, funkcije su vektori u prostoru sa beskonačno mnogo dimenzija. Neka su f i g dve realne funkcije definisane nad intervalom $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, njihov skalarni proizvod se može definisati na sledeći način

$$f \cdot g = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t) dt.$$

Čitaocu se obraća pažnja da se skalarni proizvod ponovo definiše na sličan način – kao zbir proizvoda komponenta vektora sa istim indeksom. Funkcije su vektori sa beskonačno mnogo komponenta, te sumu valja zameniti integralom, ali suština ostaje ista. Otuda se uslov ortogonalnosti funkcija (60) svodi na dobro poznatu osobinu upravnih vektora da im je skalarni proizvod jednak nuli.

Dakle, energija signala zavisi od trajanja signala (dužine perioda) i kvadrata amplitude. Nije teško pokazati da fazni stav ne utiče na energiju.

Srednja snaga signala konačnog trajanja definiše se kao odnos energije signala i dužine intervala nad kojim je signal definisan. Za periodičan signala, snaga se definiše kao energija jednog perioda podeljena sa trajanjem perioda.

$$\mathcal{P}\{f\} = \frac{1}{T} \mathcal{E}\{f\}. \quad (70)$$

Pažljiv čitalac će brzo uočiti da su termini “energija” i “snaga” uvedeni donekle proizvoljno. Naime, izrazi (66) i (70) ne moraju, a obično i nemaju, fizičke dimenzije energije i snage. U velikom broju fizički interesantnih slučajeva, međutim, dati su izrazi po vrednosti proporcionalan energiji i snazi, te otuda i naziv.

Sračunavanje koeficijenata kompleksnog eksponencijalnog oblika Furijeovog reda. Upoznavši se sa ortogonalnošću trigonometrijskih signala, te sa pojmovima energije i snage signala, spremni smo da na jednostavan način pokažemo kako se mogu računati koeficijenti Furijeovog razvoja datog signala. Pretpostavićemo, pri tome, da Furijeov razvoj postoji odnosno da se posmatrani signal može razviti u trigonometrijski red. Patološki slučajevima u kojima to nije moguće nećemo se baviti.

Neka je dat signal f definisan nad intervalom $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ koji se može razviti u Furijeov red

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}. \quad (71)$$

Ukoliko pomnožimo prethodni izraz sa $e^{-jm\frac{2\pi}{T}t}$ za neko celobrojno m , a potom dobijeni proizvod integralimo nad intervalom $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, svi članovi reda sem m -tog člana će se poništiti zbog ortogonalnosti.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right) e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right) e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= F_m \mathcal{E}\left\{e^{-jm\frac{2\pi}{T}t}\right\} = F_m T \end{aligned}$$

Konačno, koeficijenti Furijeovog razvoja (**Furijeovi koeficijenti**) se računaju po formuli

$$F_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt. \quad (72)$$

Ukoliko signal i predstavlja jačinu električne struje kroz provodnik otpornosti R , trenutna snaga toplotnih gubitaka je $i^2(t)R$. Ukupna energija toplotnih gubitaka nad nad intervalom $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ je

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i^2(t) R dt.$$

Srednja snaga toplotnih gubitaka je

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i^2(t) R dt.$$

Slični izrazi se mogu izvesti i za mnoge druge signale.

Pojmu energije i snage signala može se dati i geometrijsko tumačenje. Intenzitet (moduo) geometrijskog vektora jeste njegova dužina. Dužina prostornog vektora $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ jednaka je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Kvadrat dužine jednak je skalarnom proizvodu vektora sa samim sobom,

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}.$$

Neposrednim formalnim uopštenjem prethodnog izraza, možemo definisati **intenzitet (moduo) analognog signala** na sledeći način,

$$|f| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt}.$$

Kvadrat modula nazivamo energijom signala,

$$\mathcal{E}\{f\} = |f|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt.$$

Koeficijent F_0 predstavlja srednju vrednost signala,

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt .$$

Ukoliko je f strujni signal, tada se koeficijent F_0 naziva i jednosmernom ili DC (*direct current*) komponentom. Jednostavno se pokazuje da su u slučaju razvoja realnog signala f Furijeovi koeficijenti sa indeksima n i $-n$ međusobno konjugovani,

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}} dt \\ &= \overline{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt} = \overline{F_n} . \end{aligned}$$

Niz brojeva $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ nazivamo **spektrom** signala f . Pri tome se niz $\{|F_n|\}_{n \in \mathbb{Z}}$ naziva **amplitudskim spektrom**, a niz $\{\arg F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ **faznim spektrom** signala.

Sračunavanje koeficijenata trigonometrijskog oblika Furijeovog reda. Koeficijenti trigonometrijskog oblika Furijeovog reda se mogu računati bilo neposredno na osnovu ortogonalnosti, bilo pomoću prethodno izvedenog izraza (72). Ukoliko je

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(\omega_1 t) ,$$

pokazuje se da važi

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt , \quad (73)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\frac{2\pi}{T}t) dt . \quad (74)$$

Izvedeni izrazi takođe objašnjavaju i razlog zbog koga se srednja vrednost signala u trigonometrijskom zapisu Furijeovog reda zapisuje kao $\frac{a_0}{2}$. Na taj način, naime, izrazi za sračunavanje vrednosti koeficijenata (73) i (74) ostaju isti za svaki indeks n .

Aproksimacija parcijalnom sumom Furijeovog reda

Ukoliko se signal f može razviti u Furijeov red

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} ,$$

Moduo kompleksnog broja $z = x + jy$ se računa na potpuno isti način kao moduo vektora $\vec{z} = (x, y)$,

$$|z| = |\vec{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Imajući u vidu svojstva proizvoda kompleksnih brojeva, kvadrat modula se uvek može zapisati kao proizvod kompleksnog broja i njemu konjugovanog kompleksnog broja, otuda je

$$|z| = z\bar{z} .$$

Upravo se stoga u slučaju kompleksnih signala skalarni proizvod definiše izrazom

$$f \cdot f = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt ,$$

a ortogonalnosti na osnovu uslova (61).

Furijeov red signala f definisanog nad intervalom $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ može se formirati na jedan od sledećih načina

Kompleksni eksponencijalni red

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \leftrightarrow F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

Trigonometrijski oblik sa sinusima i kosinusima

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\frac{2\pi}{T}t) dt.$$

Trigonometrijski oblik sa fazno pomeranim (ko)sinusima

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t + \phi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|F_n| = 2|F_{-n}|, \quad \tan(\varphi_n) = \cot(\phi_n) = -\frac{b_n}{a_n}$$

tada se sam signal može aproksimirati (približno zameniti) parcijalnom sumom Furijeovog reda u kojoj se uzima samo konačan broj koeficijenata,

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}. \quad (75)$$

Jasno je, pri tome, da važi $f_{\infty} = f$.

Interesantno je na ovom mestu razmotriti i način na koji se energija signala gubi (ili čuva, u zavisnosti od tačke gledanja) u postupku aproksimacije. I ovde će se svojstvo ortogonalnosti signala pokazati ključnim.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{f_N\} &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_N(t) \bar{f}_N(t) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{n=-N}^{n=N} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right] \overline{\left[\sum_{n=-N}^{n=N} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right]} dt \\ &= T \sum_{n=-N}^{n=N} F_n \bar{F}_n = T \sum_{n=-N}^{n=N} |F_n|^2. \end{aligned}$$

Proširujući dobijeni rezultat na slučaj kompletnog Furijeovog razvoja

signala, nalazimo da je

$$\mathcal{E}\{f\} = T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F_n \bar{F}_n = T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |F_n|^2. \quad (76)$$

Dakle, **ukupna energija signala jednaka je zbiru energija pripadajućih harmonika**. Tvđenje (76) se naziva **Parsevalovom teoremom**.

Parsevalova teorema se može iskazati i na drugačije načine, služeći se alternativnim oblicima zapisa prostoperiodičnih signala

$$\mathcal{E}\{f\} = T \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n^2 = T \frac{a_0^2}{4} + T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (77)$$

Interesantno je razmotriti i energiju greške aproksimacije. Ukoliko definišemo grešku aproksimacije

$$\varepsilon_N(f) = f - f_N = \sum_{n=-N-1}^{N+1} F_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}, \quad (78)$$

nije teško pokazati da je energija greška aproksimacije

$$\mathcal{E}\{\varepsilon_N(f)\} = T \sum_{n=-N-1}^{N+1} |F_n|^2. \quad (79)$$

Takođe se lako pokazuje da su signali f_N i ε_N međusobno upravni.

Primeri

Primer 1

Posmatrajmo povorku četvrtki, odnosno periodični signal f čija je jedna perioda definisana izrazom

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \epsilon \\ 0 & \epsilon < |t| < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (80)$$

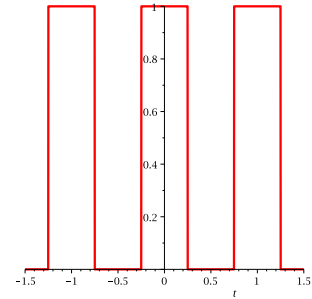
Neposredno sračunavamo da važi

$$F_n = 2 \frac{\sin\left(\frac{n\pi\epsilon}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi\epsilon}{T}\right)}{n\pi} = \frac{\sin\left(2\frac{n\pi\epsilon}{T}\right)}{n\pi}. \quad (81)$$

Pri sređivanju dobijenog izraza iskorišten je trigonometrijski identitet o sinusu dvostrukog ugla: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Ponekad se dobijeni izraz zapisuje i pomoću Sinc funkcije.² Tada pišemo

$$F_n = \frac{2\epsilon}{T} \text{Sinc}\left(2\frac{n\pi\epsilon}{T}\right). \quad (82)$$

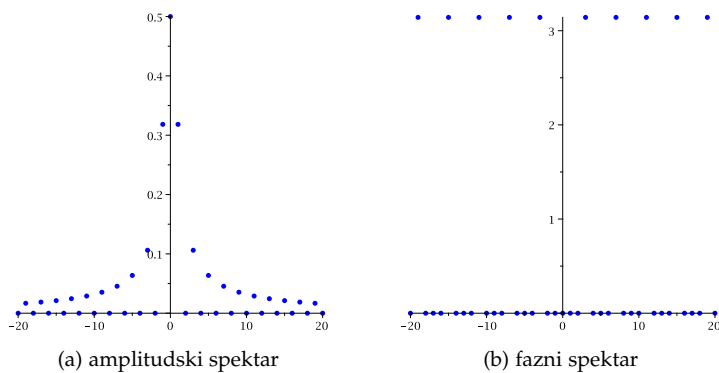
Amplitudski i fazni spektar signala prikazani su dijagramima na slici 17. Rezultati aproksimacije signala Furijeovim redom konačne dužine prikazani su dijagramima na slici 18.



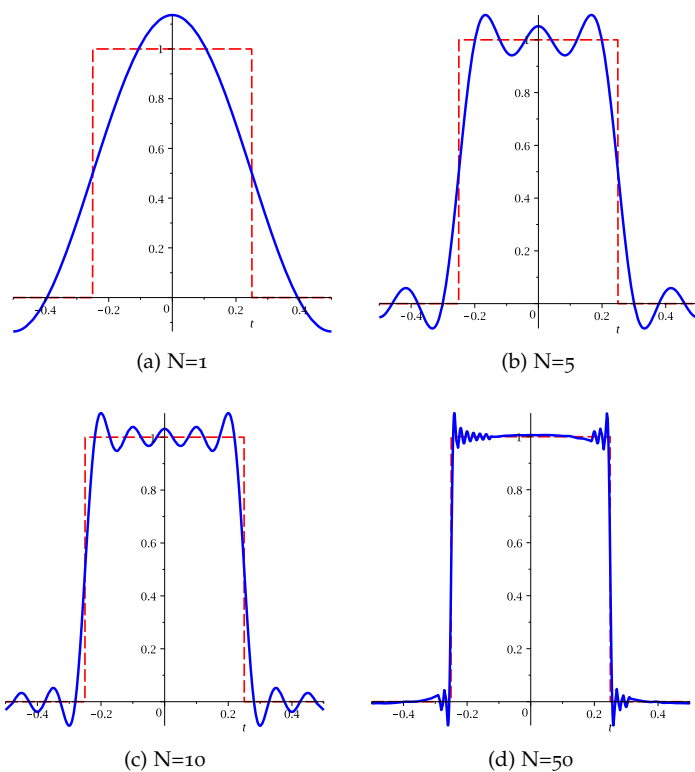
Slika 16: Povorka četvrtki iz primera 1 za $T = 1$ i $\epsilon = 0.25$.

² Sinc(x) funkcija se definiše izrazom

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



Slika 17: Amplitudski i fazni spektar signala iz primera 1. U konkretnom slučaju, F_n je realan broj, pa fazni spektar ima samo dve moguće vrednosti: 0 ako je $F_n > 0$ ili π ukoliko je $F_n < 0$. Proizvoljno je uzeto da je $\arg 0 = 0$.



Slika 18: Rezultati aproksimacije signala Furijeovim redom konačne dužine N . Originalni signal f je prikazan isprekidanom, a aproksimacija f_N punom linijom.

Očigledno je da se dodavanjem većeg broja harmonika polazni signal sve uspješnije aproksimira. Ukoliko bi bilo moguće sumirati sve članove reda (njih beskonačno mnogo!) tada bi se polazni signal idealno rekonstruisao. Jasno je, međutim, da je greška aproksimacije veoma mala već ukoliko se iskoristi samo par desetina harmonika. Čitaocu ostavljamo za vežbu da izračuna energiju greške estimacije $\varepsilon_N(f) = f - f_N$ za različite vrednosti broja N .

Tekući primer može veoma dobro poslužiti kao ilustracija postupka “kompresije” signala pomoću Furijeovih redova. Naime, umesto da se pamte vrednosti signala $f(t)$ za veliki broj različitih vrednosti nezavisne promenljive t , dovoljno je pamtiti samo relativno mali broj Furijeovih koeficijenata F_n . Sam signal (odnosno njegova prikladna aproksimacija) se zatim lako rekonstruiše. Opisan princip ima široku praktičnu primenu. Sličan postupak se, recimo, primenjuje u JPEG standardu za kompresiju slike.

Tekući primer, takođe, lepo ilustruje tzv. **Gibsov fenomen**: u intervalima u kojima se signal veoma brzo menja konvergencija reda je sporija, te je posledično neophodno uzeti relativno veliki broj članova reda kako bi se postigla zadovoljavajuća tačnost. U konkretnom primeru, Gibsov fenomen se očitava u tačkama prekida signala. Šta više, strožija formalna analiza pokazuje da ukoliko je t_0 tačka prekida signala tada Furijeov red u tački t_0 konvergira ka vrednosti

$$\frac{\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)}{2}$$

koja se u opštem slučaju razlikuje od $f(t_0)$. Šta više, $f(t_0)$ može biti i nedefinisano.

Gibsovom fenomenu se može dati i interesantna fizička interpretacija. Naime, harmonici niske učestanosti opisuju spore, a harmonici visoke učestanosti brze promene signala. Otuda je za opisivane blagih promena dovoljno iskoristiti mali broj koeficijenata Furijeovog reda, dok u okolini naglih skokova (prekida) dominantnu ulogu imaju harmonici visokih frekvencija. Otuda je za uspešno opisivane vrednosti signala u okolini skokova neophodno upotrebiti veći broj članova reda.

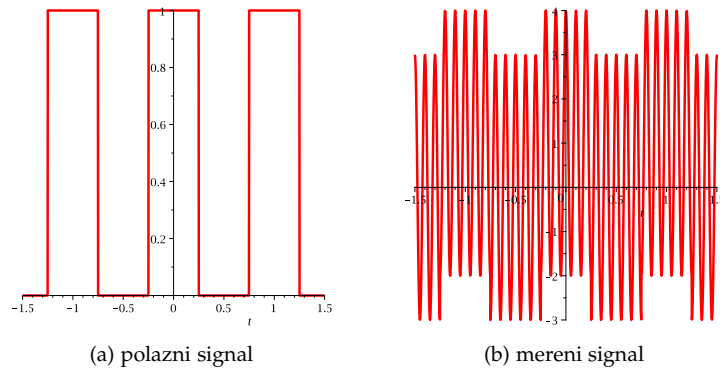
Primer 2

Posmatrajmo isti signal kao u prethodnom primeru, ali sada pretpostavimo da je u procesu merenja vrednost signala zagađena šumom visoke učestanosti. Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je šum prostoperiodičan signal desetostruko veće učestanosti u odnosu

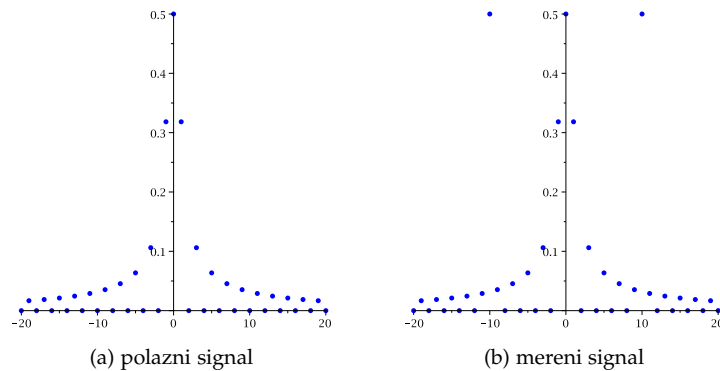
na osnovnu frekvenciju samog signala. Neka je

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos(10\frac{2\pi}{T}t) & |t| < \epsilon \\ 0 + \cos(10\frac{2\pi}{T}t) & \epsilon < |t| < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (83)$$

Naravno, u stvarnosti je intenzitet (amplituda) šuma znatno niža od vrednosti samog signala. Jednostavnosti radi, u ovom primeru je pretpostavljeno da je amplituda šuma jednaka maksimalnoj vrednosti signala. Polazni i “zašumljeni” signal su uporedo prikazani dijagramima na slici 19. Očigledno je veoma teško izdvojiti polazni signal iz merenog. Šta više, da nije unapred specificirano da je prikazani mereni signal dobijen superpozicijom prostoperiodičnog šuma na povorku četvrtki razmatranu u prethodnom primeru, čitalac bi teško uočio vezu između ovih signala.



Slika 19: Ilustracija pojave zagađenja signala šumom u toku merenja. Obično je amplituda šuma manja od amplitude samog signala, a sam šum nije prostoperiodičan signal, već se javlja na širem opsegu viših frekvencija. Ipak, prikazani primer odlično ilustruje samu pojavu.

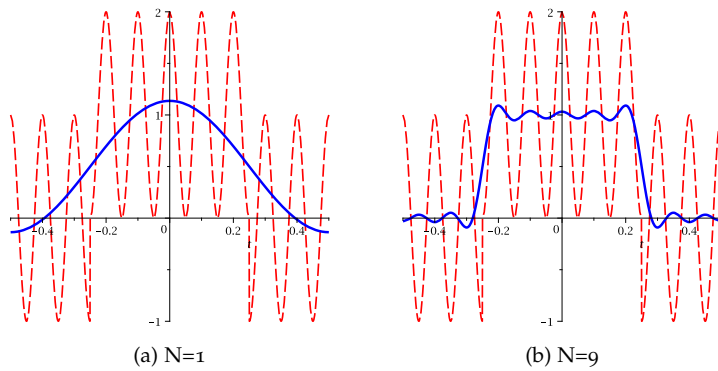


Slika 20: Uporedni prikaz amplitudskih spektara polaznog i merenog signala. Očigledno je da su u frekvencijskom domenu signal i šum potpuno razdvojivi.

Amplitudski spektri signala pre i posle zašumljenja prikazani su dijagramima na slici 20. Valja obratiti pažnju da su u frekvencijskom domenu, odnosno kada se posmatraju koeficijenti Furijeovog reda, polazni signal i šum potpuno razdvojivi (separabilni). Odma se vidi da 10-harmonik (harmonik čija je učestanost jednaka učestanosti šuma) ima amplitudu jednaku nuli u spektru osnovnog signala, a nenultu amplitudu u spektru zašumljenog (merenog) signala. Uklan-

janjem ovog harmonika pri rekonstrukciji signala pomoću Furijeovog reda, potpuno se eliminiše uticaj šuma na signal.

U praksi prethodno opisana idealna rekonstrukcija signala obično nije moguća iz više razloga. Najpre, šumovi i drugi poremećaji obično nisu frekvencijski lokalizovani na uskom skupu učestanosti, već se javljaju na širim frekvencijskim opsezima. Dalje, spektri signala i šuma najčešće nisu u potpunosti razdvojeni. Obično, međutim, najveći deo energije signala nose harmonici niskih učestanosti, dok se energija šuma raspoređuje po visokofrekventnim komponentama Furijeovog razvoja. Otuda se filtriranje signala često vrlo uspešno može ostvariti odsecanjem svih članova Furijeovog reda nakon N -tog harmonika. Naravno, pravilan izbor broja N zavisi kako od karakteristika samog signala, tako i od karakteristika šumova i poremećaja koji na njega deluju. Sam postupak je ilustrovan dijagramima na slici ...



Slika 21: Postupak uklanjanja šuma pomoću spektralnog razvoja signala. Uzimanjem samog srednje vrednosti i osnovnog harmonika očigledno nije dovoljno da bi se približno rekonstruisao oblik signala. Međutim, kako znamo da se šum javlja na 10-tom harmoniku, rekonstrukcijom vrednosti signala samo na osnovu prvih 9 harmonika uspešno se rekonstruiše polazni talasni oblik. Valja obratiti pažnju na karakteristično zaobljavanje ivica u dobijenoj rekonstrukciji. Ovo je sasvim očekivani efekat. Odbacivanjem viših harmonika gubi se mogućnost uspešne rekonstrukcije brzih promena, kao što su ivice i skokovi.

Primer 3

Kao sledeći primer, posmatrajmo signal sačinjen iz niza trougaonih impulsa prikazan na slici 22. Jedna perioda ovog signala opisana je sledećim izrazom

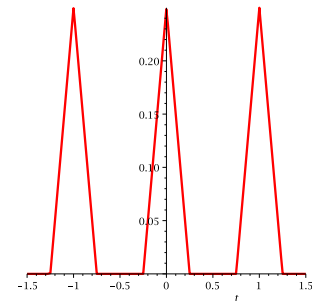
$$f(t) = \begin{cases} \epsilon + t & t \in (-\epsilon, 0) \\ \epsilon - t & t \in [0, \epsilon) \\ 0 & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \setminus (-\epsilon, \epsilon) \end{cases}, \quad (84)$$

gde je $\epsilon < \frac{T}{2}$.

Koeficijenti Furijeovog reda se neposredno sračunavaju u obliku

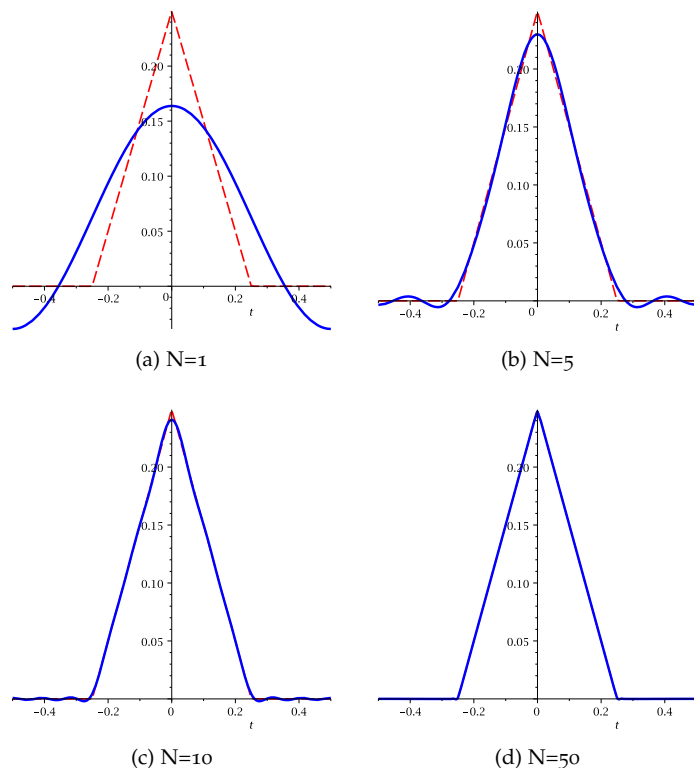
$$F_n = \frac{T}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos^2\left(\frac{n\pi\epsilon}{T}\right)\right). \quad (85)$$

Rezultati aproksimacije posmatranog signala Furijeovim redovima konačne dužine prikazani su dijagramima na slici 23. S obzirom da posmatrani signal nema prekida ili skokova, uočava se brža konvergencija reda. Gibbsov fenomen se i dalje može primetiti, ali se sada



Slika 22: Povorka trougaonih impulsa za $T = 1$ i $\epsilon = \frac{1}{4}$.

javlja u tačkama prekida prvog izvoda, a ne u tačkama prekida signala samog.



Slika 23: Aproksimacija trougaonog signala Furijeovim redom konačne dužine. U svim prikazanim primerima $T = 1$ i $\epsilon = 0.25$. Broj harmonika korištenih pri rekonstrukciji označen je sa N .

4 Metod impedansi

Metod impedansi predstavlja jedan od najšire primenljivanih postupaka za rešavanje linearnih električnih kola. Primenom ovog postupka, diferencijalne jednačine kola u kojima figurišu naponi, struje, otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti elemenata kola se zamenjuju algebarskim jednačinama u kojima figurišu **kompleksni predstavnici** napona i struja, te **impedanse** elemenata kola.

Metod impedansi je neposredno primenljiv samo u slučajevima kada su sve pobude u kolu (svi strujni i naponski izvori) prostoperiodične, iste kružne učestanosti. Primenom metoda superpozicije, metod se može primeniti i ukoliko su pobude u kolu dobijene linearnom kombinacijom prostoperiodičnih signala različitih učestanosti. Oslanjajući se na spektralni razvoj signala (Furijeove redove) bilo koji složeno-periodičan signal se može prikazati u vidu superpozicije beskonačno mnogo prostoperiodičnih signala. Time se upotrebljivost metoda impedansi znatno proširuje.

Manje je poznato, međutim, da se metod impedansi principijalno može iskoristiti za analizu (i sintezu) mehaničkih i drugih linearnih, stacionarnih fizičkih procesa. **Shvaćen u svom najopštijem smislu, metod impedansi ne predstavlja ništa drugo do opšti metod rešavanja linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima.** Uopštenjem Furijeovih redova, te uvođenjem Furijeove i Laplasove transformacije, gotovo sva praktična ograničenja u primeni ove metode nestaju.

Takođe napominjemo da se sličan metod može primeniti i za analizu (i sintezu) linearnih prostorno distribuiranih procesa. Primeri ovakvih procesa su transportni procesi, kao što su različiti tipovi difuznih

procesa i proces provođenja toplote, te različite vrste talasnih kretanja.

Prvi korak u primeni metode impedansi jeste da se svi naponi i struje u kolu zamene odgovarajućim **kompleksnim predstavnicima**. Prisetimo se da se proizvoljan prostoperiodičan napon može zapisati u obliku

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U}{2} \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right),$$

Ponavljamo da se svaki realan prostoperiodični signal može zapisati u obliku zbira dva kompleksna eksponencijalna prostoperiodična signala, od kojih jedna ima pozitivnu, a drugi negativnu kružnu učestanost. Kao što smo to i ranije činili, uvodimo kompleksni predstavnik napona

$$\underline{U} = \frac{U}{2} e^{j\varphi},$$

te pišemo

$$u(t) = \underline{U} e^{j\omega t} + \overline{\underline{U}} e^{-j\omega t}.$$

Važno je uočiti da se proizvoljna linearna operacija nad signalima može zameniti odgovarajućom operacijom nad njihovim kompleksnim predstavnicima. Naime, ukoliko su u_1 i u_2 prostoperiodični signali iste kružne učestanosti ω , a c_1 i c_2 proizvoljni realni brojevi

$$\begin{aligned} c_1 u_1(t) \pm c_2 u_2(t) &= c_1 \underline{U}_1 e^{j\omega t} + c_1 \overline{\underline{U}_1} e^{-j\omega t} \pm \left(c_2 \underline{U}_2 e^{j\omega t} + c_2 \overline{\underline{U}_2} e^{-j\omega t} \right) \\ &= (c_1 \underline{U}_1 \pm c_2 \underline{U}_2) e^{j\omega t} + \overline{(c_1 \underline{U}_1 \pm c_2 \underline{U}_2)} e^{-j\omega t}. \end{aligned}$$

Slično, diferenciranje i integracija signala se može svesti na odgovarajuće algebarske operacije nad kompleksnim predstavnicima

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= j\omega \underline{U} e^{j\omega t} - j\omega \overline{\underline{U}} e^{-j\omega t} \\ &= j\omega \underline{U} e^{j\omega t} + \overline{j\omega \underline{U}} e^{-j\omega t}, \\ \int u(\tau) d\tau &= \frac{1}{j\omega} \underline{U} e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega} \overline{\underline{U}} e^{-j\omega t} \\ &= \left(\frac{1}{j\omega} \underline{U} \right) e^{j\omega t} + \overline{\left(\frac{1}{j\omega} \underline{U} \right)} e^{-j\omega t}. \end{aligned}$$

Vidimo da se sve operacije nad signalima mogu zameniti ekvivalentnim algebarskim operacijama nad njihovim kompleksnim predstavnicima, i to na sledeći način

$$\begin{aligned} c_1 u_1(t) \pm c_2 u_2(t) &\leftrightarrow c_1 \underline{U}_1 \pm c_2 \underline{U}_2 \\ \frac{du(t)}{dt} &\leftrightarrow j\omega \underline{U} \\ \int u(\tau) d\tau &\leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{U} \end{aligned}$$

Pri rešavanju električnih kola metod impedansi nam omogućava da Omov zakon koji daje vezu jačine električne struje kroz otpornik i napona na njegovim krajevima formalno primenimo i na kapacitivnosti i induktivnosti u kolu. Da podsetimo, Omov zakon tvrdi da je napon na krajevima otpornika proporcionalan struji,

$$i_R = R u_R.$$

Slično se može tvrditi za bilo koji linearni element električnog kola (kalem ili kondenzator) ili bilo koju linearnu mrežu sa jednim parom krajeva, jedino je neophodno napone i struje zameniti njihovim kompleksnim predstavnicima, a otpornost odgovarajućom impedansom.

$$\underline{I} = Z \underline{U}.$$

Neposredno se pokazuje da su impedanse kondenzatora Z_C i kalema Z_L ,

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_L = j\omega L.$$

Kada se kompleksni predstavnici svih traženih veličina odrede sasvim je jednostavno rekonstruisate i odgovarajuće vrednosti signala.

Rešavanje električnih kola

Postupak primene metoda impedansi na rešavanje električnih kola ilustrovaćemo jednostavnim primerom. Postupak se neposredno uopštava na slučaj linearnog električnog kola, te uopšte linearnog, stacionarnog sistema proizvoljne složenosti.

RC kolo – slučaj prostoperiodičnog izvora napona. Posmatrajmo najpre kolo sa slike 24 u kome su na red vezani prostoperiodični izvor napona v , otpornik otpornosti R i kondenzator kapacitivnosti C .

Ukoliko sa i obeležimo struju kola, a sa u_c napon na kondenzatoru, tada su konstitutivne relacije koje definišu raspodelu napona i struja u kolu

$$-v + Ri + u_c = 0 \quad (\text{II Kirhofov zakon})$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} \quad (\text{karakteristika idealnog kondenzatora})$$

Konačno, jednačina kola izražena preko napona kondenzatora je

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = v.$$

Proizvod RC ima dimenziju vremena i obično se naziva vremenskom konstantnom kola.

Rešićemo dobijenu jednačinu metodom impedansi. Kako je pobuda prostoperiodična, svaku veličinu možemo zameniti odgovarajućim kompleksnim predstavnikom, a svaku operaciju odgovarajućom transformacijom kompleksnih predstavnika, tako dobijamo

$$RCj\omega \underline{U}_c + \underline{U}_c = \underline{V},$$

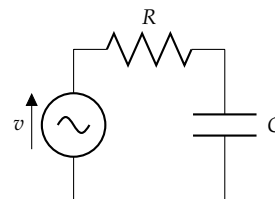
odnosno

$$\underline{U}_c = \frac{1}{j\omega RC + 1} \underline{V}.$$

Kompleksni broj, zapravo kompleksna funkcija kružne učestanosti ω ,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1},$$

naziva se **frekvencijskom karakteristikom** kola. U svakom linearnom električnom kolu, bez obzira na njegovu strukturu i složenost, može se definisati frekvencijska karakteristika između proizvoljne



Slika 24: RC kolo sa prostoperiodičnim naponskim izvorom.

dve električne veličine u kolu. Upravo je mogućnost dobijanja frekventijske karakteristike kola ključna osobenost metode impedansi.

Naime, dobijanjem frekventijske karakteristike, određeno je ponašanje kola na svakoj, proizvoljno izabranoj učestanosti.

Neka su $A(\omega)$ i $\varphi(\omega)$, tim redom, amplituda i fazni stav frekventijske karakteristike u zavisnosti od učestanosti ω . Možemo pisati,

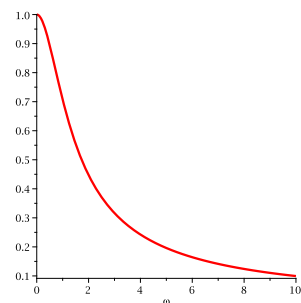
$$\begin{aligned}\underline{U}_c &= G(\omega)\underline{V} \\ &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\frac{V}{2}e^{j\varphi_v} \\ &= \frac{A(\omega)V}{2}e^{j(\varphi_v+\varphi(\omega))},\end{aligned}$$

dakle, amplitudu i fazni stav kompleksnog predstavnika napona na kondenzatoru možemo računati pomoću amplitude i faznog stava pobudnog napona na sledeći način:

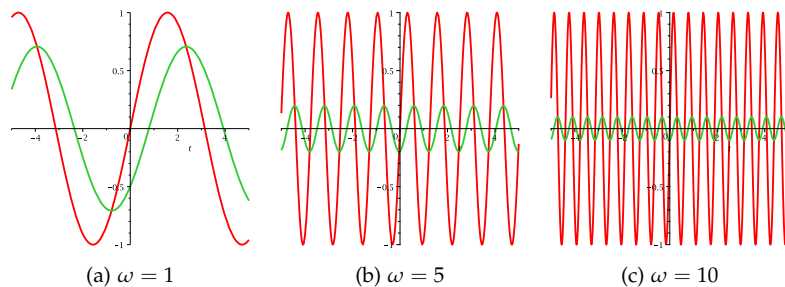
$$\begin{aligned}U_c &= A(\omega)V, \\ \varphi_u &= \varphi_v + \varphi(\omega).\end{aligned}$$

Dakle, **moduo frekventijske karakteristike kola predstavlja frekventijski zavisno pojačanje, a argument frekventijski zavisno fazno prednjačenje.** *Ovaj zaključak je opšte prirode i važi za proizvoljno električno kolo i proizvoljan linearan, stacionaran sistem uopšte.*

Prethodna razmatranja se mogu iskoristiti kako pri analizi, tako i pri sintezi linearnih sistema. Slika 25 prikazuje moduo frekventijske karakteristike u zavisnosti od učestanosti u specijalnom slučaju kada je $RC = 1$. Jasno je da će se pobudni signali niskih učestanosti gotovo neizmenjeni pojaviti na "izlazu", dok će se signali visokih učestanosti prigušivati. Sistemi koji imaju ovu osobenost nazivaju se niskopropusnim filtrima. Zaista, prikazano kolo predstavlja elementarni analogni niskopropusni filter. Primera radi, dijagrami na slici 26 uporedo prikazuju odzive i pobude razmatranog kola za različite učestanosti pobudnog signala.



Slika 25: Frekventijska karakteristika RC kola kod koga je $RC = 1$.



Slika 26: Uporedni prikaz pobudnog napona v (crvena linija) i odziva u_c (zeleno linija). Valja primetiti da se sa porastom učestanosti pobudnog signala amplituda odziva smanjuje. Može se pokazati da istovremeno raste fazno kašnjenje (ovo verovatno nije toliko očigledno samo na osnovu dijagrama sa slike).

RC kolo – slučaj složeno-periodične pobude. U slučaju kada je pobudni naponski signal sadrži veći broj prostoperiodičnih komponenta, primenom principa slaganja dejstava možemo analizirati odziv na svaku od komponenta ponaosob. Ukupni odziv se potom dobija zbrajanjem pojedinačnih odziva.

Upravo ovde, u kombinaciji sa principom slaganja dejstava (superpozicije), spektralna analiza signala (odnosno Furijeovi redovi) dolaze do punog izražaja. *S obzirom da se razvojem u Furijeov red svaki složeno-periodičan signal može prikazati u vidu linearne kombinacije prostoperiodičnih harmonika, metod impedansi se može primeniti na svaki harmonik ponaosob.*

Neka su V_n koeficijenti Furijeovog reda pobudnog napona $v(t)$,

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{jn\omega_1 t},$$

gde je ω_1 osnovna učestanost pobudnog signala. Nije teško zaključiti da je V_n kompleksni predstavnik n -tog harmonika. Kako se frekventijska karakteristika odnosi na svaki harmonik ponaosob, odziv se nalazi u obliku

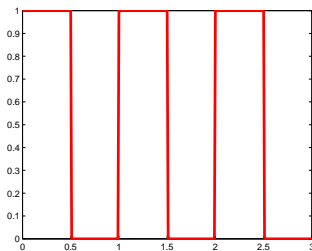
$$u_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{jn\omega_1 T + 1} V_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}.$$

Dakle, koeficijenti Furijeovog razvoja “izlaznog” napona u_c dobijaju se množenjem koeficijenata Furijeovog razvoja “ulaznog” signala v sa frekvencijskom karakteristikom kola na odgovarajućoj frekvenciji,

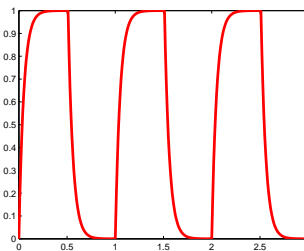
$$u_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{jn\omega_1 t}, \quad U_n = \frac{1}{jn\omega_1 RC + 1} V_n.$$

Pretpostavimo da se posmatrano RC kolo pobuđuje povorkom pravougaonih impulsa. Pobudni napon i rezultujući napon kondenzatora prikazani su dijagramima na slici 27. Valja primetiti da, usled svoje niskopropusne prirode, kolo ne može da “propusti” nagle promene ulaznog napona, te se ivice pobudnog signala zaobljuju.

Pretpostavimo sada da je ulazni signal zašumljen. Jednostavnosti



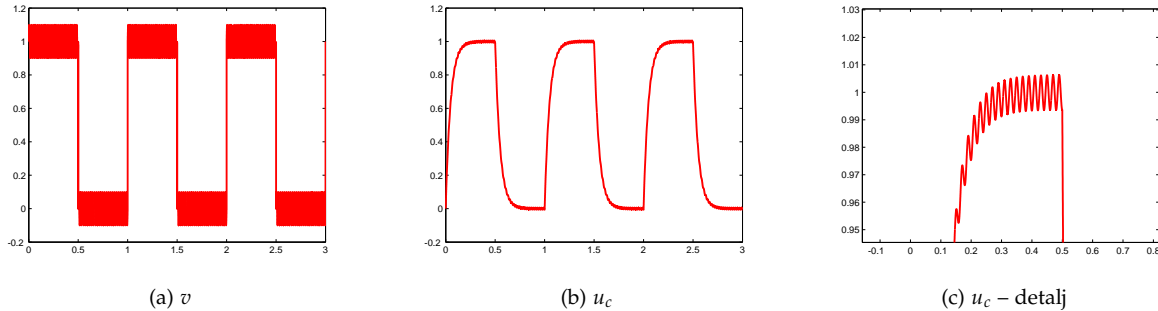
(a) v



(b) u_c

Slika 27: Odziv RC kola kod koga je $RC = 0,05$ na povorku pravougaonih impulsa.

radi, pretpostavimo da je šum prostoperiodični signal amplitude 0,1 i učestanosti 50Hz. Pobudni napon i napon na kondenzatoru prikazani su dijagramima na slici 28. Kolo je pregišilo više harmonike, te je delimično i zaoblilo ivice pobudnog signala. Mernu šum je, međutim, u velikoj meri potisnut i gotovo i da nije prisutan u “izlaznom” naponu.



Slika 28: Odziv RC kola kod koga je $RC = 0,05$ na zašumljenu povorku pravougaonih impulsa.

Linearni, stacionarni sistemi*

Metod impedansi se, na potpuno identičan način, može primeniti i u opštem slučaju određivanja odziva linearnih, stacionarnih sistema. Uopšte, ovaj metod predstavlja veoma učinkovitu proceduru za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, te sistema takvih jednačina.

Posmatrajmo dinamički sistem sa jednim ulazom u i jednim izlazom y opisan diferencijalnom relacijom

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b_nu^{(m)} + \dots + b_0u, \quad (86)$$

gde smo oznakom $(\cdot)^{(i)}$ označili i -ti izvod signala.

Dobro je poznato da se opšte rešenje proizvoljne linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima može dobiti superpozicijom opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine, te jednog proizvoljnog pojedinačnog (partikularnog) rešenja polazne jednačine. Otuda rešenje jednačine (86) tražimo u obliku

$$y = y_h + y_p,$$

gde je y_h opšte rešenje homogene jednačine

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0, \quad (87)$$

a y_p je jedno, proizvoljno izabrano rešenje polazne jednačine (86). Jezikom teorije sistema, homogeno rešenje nazivamo sopstvenim odzivom, a partikularno rešenje koje odgovara nultim početnim

uslovima nazivamo prinudnim odzivom. Sopstveni odziv je posledica prethodnog kretanja sistema, odnosno posledica energije akumulirane u sistemu u početnom trenutku. Prinudni odziv je isključiva posledica delovanja ulaznih signala.

Određivanje prinudnog odziva. Pretpostavimo da je pobudni signal prostoperiodičan, kružne učestanosti ω . Odziv sistema (partikularno rešenje diferencijalne jednačine (86)) će i sam biti prostoperiodičan, iste kružne učestanosti ω . Uvedimo kompleksne predstavnike pobude i odziva, \underline{U} i \underline{Y} , tim redom. Izražena preko kompleksnih predstavnika relevantnih signala, diferencijalna relacija (86) glasi

$$(j\omega)^n \underline{Y} + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} \underline{Y} + \dots + a_0 \underline{Y} = b_m(j\omega)^m \underline{U} + \dots + b_0 \underline{U}. \quad (88)$$

Kompleksni predstavnik odziva procesa je, dakle,

$$\underline{Y} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \underline{U}. \quad (89)$$

Frekvencijska karakteristika posmatranog sistema jeste količnik dva polinoma po $j\omega$,

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (90)$$

Jasno je sada da se pravilnim izborom koeficijenata a_0 do a_{n-1} i b_0 do b_m može postići željeno ponašanje sistema “u frekvencijskom domenu”, tj. može se postići da sistem pojačava ulazne signale na jednom skupu učestanosti, a prigušuje signale drugih frekvencija. Upravo se na taj način projektuju različite vrste filtara i linearnih sistema uopšte.

U slučaju kada se sistem pobuđuje složeno-periodičnim signalom osnovnog perioda T (osnovne učestanosti $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$), ulogu kompleksnih predstavnika igraju koeficijenti Furijeovog reda. Neka su U_n i Y_n koeficijenti Furijeovog razvoja pobude i odziva, tim redom. Primenom principa slaganja dejstava, prethodna razmatranja se mogu primeniti na svaku komponentu Furijeovog razvoja ponaosob,

$$Y_n = G(jn\omega_1) U_n = \frac{b_m(jn\omega_1)^m + \dots + b_0}{(jn\omega_1)^n + a_{n-1}(jn\omega_1)^{n-1} + \dots + a_0} U_n,$$

odnosno

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_m(jn\omega_1)^m + \dots + b_0}{(jn\omega_1)^n + a_{n-1}(jn\omega_1)^{n-1} + \dots + a_0} U_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (91)$$

Određivanje sopstvenog odziva. Pri određivanju sopstvenog odziva postupamo na sličan način, *pretpostavljamo* da je odziv kompleksan eksponencijalni signal

$$y_h = e^{kt} ,$$

gde je k za sada nepoznat, ali inače potpuno proizvoljan kompleksan broj. Uvrštavanjem pretpostavljenog odziva u homogenu jednačinu (87), odmah nalazimo

$$(k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_0) e^{kt} = 0 ,$$

odnosno

$$f(k) = k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_0 = 0 .$$

Polinom f nazivamo karakterističnim polinomom posmatranog sistema. Očigledno, da bi e^{kt} bilo rešenje, k mora biti nula karakterističnog polinoma. Označimo nule karakterističnog polinoma sa k_1 do k_n . Kako su koeficijenti polazne diferencijalne jednačine realni, nule karakterističnog polinoma su ili realna ili se javljaju u konjugovano kompleksnim parovima. Na osnovu principa superpozicije, opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h(t) = C_1 e^{k_1 t} + \dots + C_n e^{k_n t} , \quad (92)$$

gde su C_1 do C_n proizvoljne realne ili kompleksne konstante.

5 Furijeova transformacija

U dosadašnjima razmatranjima posmatrali smo isključivo periodične signale, odnosno signale konačnog trajanja koji se mogu periodično produžiti. **Sa stanovišta spektralne analize osnovna osobenost periodičnih signala jeste ta da je njihov frekvencijski sadržaj diskretan.** Drugim rečima, periodičan signal se razlaže na diskretan skup harmonika čije su učestanosti jednake celobrojnom umnošku osnovne učestanosti.

Osnovni "trik" pri analizi signala neograničenog trajanja jeste da ih zamislimo kao signale izuzetno velikog konačnog trajanja T , te da potom ispitate šta se dešava kada u graničnom slučaju kada T teži beskonačnosti! Ekvivalentno, signale neograničenog trajanja možemo posmatrati kao periodične signale čiji je osnovni period neograničen.

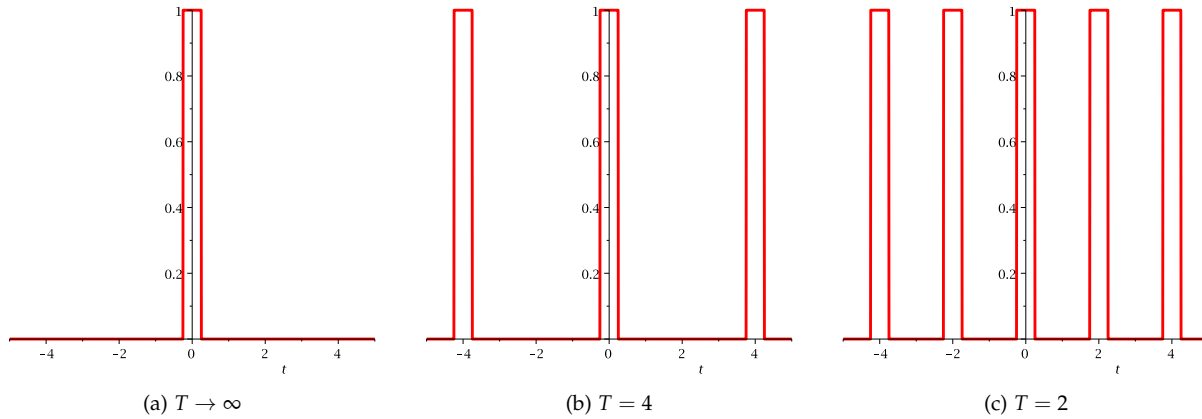
Ukoliko je osnovni period signala T , tada njegova osnovna učestanost (učestanost osnovnog harmonika) iznosi $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Kako se periodičan signal razlaže na harmonike učestanosti $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ osnovna učestanost ujedno predstavlja i frekvencijsko rastojanje između svaka dva uzastopna harmonika. Porastom dužine trajanja signala T

jednovremeno se smanjuje i frekvencijsko rastojanje između njegovih harmonika. U graničnom slučaju, rastojanje između harmonika teži nuli, a spektar signala postaje kontinualan. **Signali neograničenog trajanja se mogu spektralno razložiti, ali njihov spektralni razvoj sadrži harmonike svih realnih učestanosti.**

Primeru radi, osvrnimo se ponovo na signal

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \epsilon \\ 0 & |t| > \epsilon \end{cases},$$

koji smo već razmatrali ranije. Dati se signal može posmatrati kao signal konačnog trajanja $T > \epsilon$, ali i kao signal neograničenog trajanja, kao što je ilustrovano slikom 29.

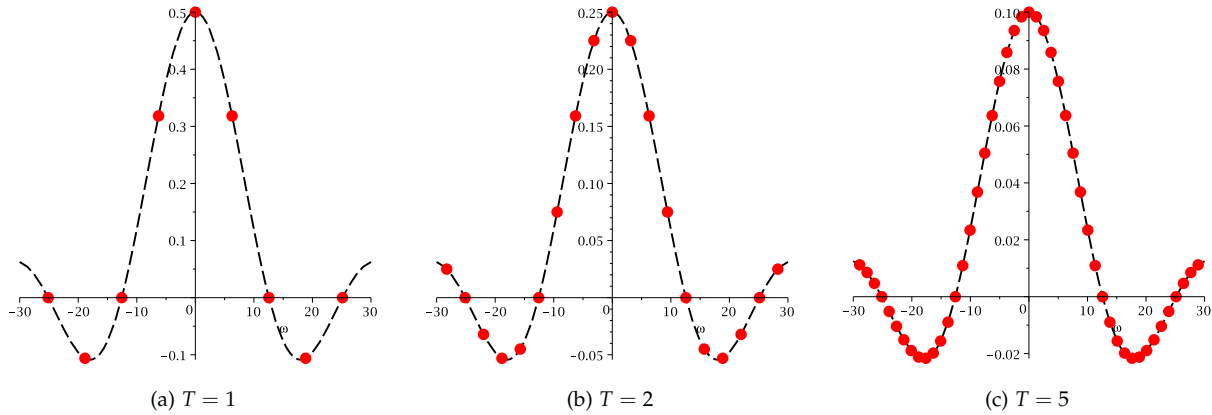


Slika 29: Isti signal konačnog trajanja periodično produžen sa različitim osnovnim periodom T . Ukoliko se periodično produženje "vrši" sa neograničenim periodom, tada signal ostaje neizmenjen.

Razlažući dobijena periodična produženja u Furijeove redove, nalazimo da n -ti član reda odgovara prostoperiodičnom harmoniku učestanosti $n\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, pri čemu je odgovarajući Furijeov koeficijent

$$F_n = \frac{\sin(n\frac{2\pi}{T}\epsilon)}{n\pi} = \frac{2\epsilon}{T} \text{Sinc}(n\frac{2\pi}{T}\epsilon).$$

Razmatrani primeri ilustruju da se signal konačnog trajanja može razviti u Furijeov red na različite načine, kao posledica različitog periodičnog produženja tog signala. Važno je napomenuti, što čitaocu ostavljamo za vežbu da se pomoću svih prikazanih razvoja polazni signal uspešno može rekonstruisati. Širenjem "osnovnog intervala" T intenzitet pojedinih harmonika opada, ali im se gustina u frekvencijskom domenu povećava. Čitalac takođe može proveriti da je ukupna energija signala računata u frekvencijskom domenu kao zbir kvadrata modula svih harmonika i dalje neizmenjena i jednaka ukupnoj energiji signala konačnog trajanja.



Slika 30: Razvoj signala konačnog trajanja u Furijeov red. Signal je periodično produžen sa različitim osnovnim periodima, te je posledično i frekventijski sadržaj dobijenih Furijeovih redova različit. Obratiti pažnju da obvojnica Furijeovih koeficijenata ostaje neizmenjena, jedino se njihov intenzitet deli sa izabranim osnovnim periodom, a frekventijsko rastojanje im se smanjuje.

U graničnom slučaju, kada T neograničeno raste, amplituda harmonika opada i teži nuli, ali im se rastojanje smanjuje. Važno je primetiti da granična vrednost

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \frac{2\pi}{T} = \omega}} T F_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = 2\epsilon \text{Sinc}(\omega\epsilon).$$

postoji za svako pozitivno ω . Ova granična vrednost opisuje obvojnici (anvelopu) Furijeovih koeficijenata, normalizovanu sa usvojenim periodom signala. Upravo će nam ova granična vrednost poslužiti kao osnova za definiciju Furijeove transformacije.

Od Furijeovog reda do Furijeove transformacije

Pođimo od Furijeovog reda periodičnog signala u kompleksnom eksponencijalnom obliku

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Posmatrajmo najpre kako se izraz za izračunavanje koeficijenata reda F_n ponaša kada period signala T neograničeno raste. Podsećamo čitaoca da se sa povećanjem perioda amplituda harmonika i njihovo međufrekventijsko rastojanje smanjuju. Otuda, u graničnom slučaju, spektar signala postaje kontinualan, a ne diskretan. Ne možemo stoga više govoriti o učestanosti n -tog harmonika, jer harmonika sada ima neprebrojivo mnogo. Stoga umesto učestanosti n -tog harmonika $n \frac{2\pi}{T}$ pišemo samo ω ,

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \omega_1 = \omega}} F_n = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \omega_1 = \omega}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

S obzirom da amplituda harmonika opada sa povećanjem osnovnog perioda signala, u većini praktično sretanih slučajeva prethodno

definisana granična vrednost teži nuli. Pogodnije je stoga posmatrati izraz

$$F(j\omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n\omega_1 \rightarrow \omega}} TF_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (93)$$

koji nazivamo **Furijeovom transformacijom** signala f , u oznaci $\mathcal{F}\{f\}$. Važno je primetiti da, poput koeficijenata Furijeovog reda, Furijeova transformacija formalno dozvoljava i negativne frekvencije. Nije teško zaključiti, međutim, da je u slučaju transformacije realnog signala

$$F(-j\omega) = \overline{F(j\omega)}. \quad (94)$$

Ukoliko uvedemo međufrekvencijsko rastojanje kao razliku frekvencija dvaju uzastopnih harmonika, $\Delta\omega = (n+1)\omega_1 - n\omega = \frac{2\pi}{T}$, Furijeov razvoj periodičnog signala možemo zapisati u sledećem ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Delta\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} TF_n e^{jn\Delta\omega t} \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} TF_n e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega. \end{aligned}$$

U graničnom slučaju, kada T neograničeno raste, međufrekvencijsko rastojanje $\Delta\omega$ teži nuli. Furijeov red u tom slučaju prelazi u integral po svim realnim frekvencijama,

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} TF_n e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\substack{\Delta\omega \rightarrow 0 \\ n\Delta\omega = \omega}} TF_n \right) e^{jn\Delta\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Konačno, **inverzna Furijeova transformacija** ili **Furijeov integral** signala f glasi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (95)$$

Pišemo, $f = \mathcal{F}^{-1}\{F\}$.

Furijeova transformacija se, naravno, može formulisati i u trigonometrijskom obliku, ukoliko kompleksne eksponencijalne funkcije zamenimo trigonometrijskim služeći se Ojlerovim obrascima. Za razliku od Furijeovog reda, koji se veoma često zapisuje u različitim oblicima, Furijeova transformacija se gotovo isključivo koristi u kompleksnom eksponencijalnom obliku (93) – (95). Otuda ćemo i mi isključivo koristiti ovu njenu formu.

Furijeova transformacija signala f definiše se kao

$$\mathcal{F}\{f\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt ,$$

ukoliko definicioni nesvojstveni integral konvergira. Rekonstrukcija signala se obično vrši pomoću **Furijevog integrala**, tj. **inverzne Furijeove transformacije**

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega .$$

Kada se Furijeova transformacija može primeniti?

Furijeova transformacija je definisana pomoću određenog integrala čije su i gornja i donja granica neograničene. Otuda se prirodno postavlja pitanje egzistencije Furijeove transformacije, odnosno: *Na koje signale se Furijeova transformacija uopšte može primeniti?*

Na postavljeno pitanje nemoguće je dati precizan odgovor bez dubljih razmatranja matematičke prirode. **Za naše potrebe sasvim je dovoljno reći da Furijeova transformacija postoji za sve “praktično interesantne” signale koji “dovoljno brzo” teže nuli kada vremenska promenljiva t neograničeno raste (u prošlost ili budućnost).**

Primera radi, Furijeova transformacija postoji za svaki signal konačnog trajanja, ali ne i za periodične signale. U tom slisli, za razliku od Furijevih redova koji vrše periodično produženje signala konačnog trajanja, te time ove signale poistovećuju sa periodičnim signalima, Furijeova transformacija pravi jasnu razliku između ove dve klase signala. Furijeova transformacija se ne može primeniti na konstantan signal, sem ukoliko nije identički jednak nuli, kao ni na signale oblika t , t^2 , itd. Transformacija se, međutim, može primeniti, recimo, na signale koji eksponencijalno teže nuli za velike vrednosti vremenske promenljive, poput signala $e^{-|t|}$.

Podjednako je zanimljivo i važno i pitanje pod kojim uslovima Furijev integral konvergira ka vrednosti signala. Ponovo, precizan odgovor na ovo pitanje zahtevao bi dublju analizu koja nije prikladna za uvodna razmatranja o spektralnoj analizi. U najvećem broju praktično interesantnih slučajeva izraz (95) važi u svim vremenskim trenucima u kojima je signal f neprekidan. U tačkama prekida signala Furijev integral, poput Furijevog reda, konvergira ka srednjoj vrednosti levog i desnog limesa. Uopšte, **Gibsov fenomen** je svojstven i Furijeovoj transformaciji, te u okolini tačaka prekida signala Furijev integral sporo konvergira.

Pri definiciji Furijeove transformacije često je zgodno ograničiti se na tzv. **apsolutno integrabilne signale**, tj na signale za koje važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty .$$

Ukoliko je signal apsolutno integrabilan, te ukoliko mu je Furijeova transformacija takođe apsolutno integrabilna, tj. ukoliko važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| d\omega < \infty ,$$

tada Furijev red (95) konvergira ka vrednosti signala f skoro svuda (svuda, sem možda u prebrojivo mnogo tačaka).

Primer 1. Osvrnimo se ponovo na pravougaoni impuls

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \epsilon \\ 0 & |t| > \epsilon \end{cases},$$

čija je Furijeova transformacija

$$F(j\omega) = 2\epsilon \text{Sinc}(\omega\epsilon).$$

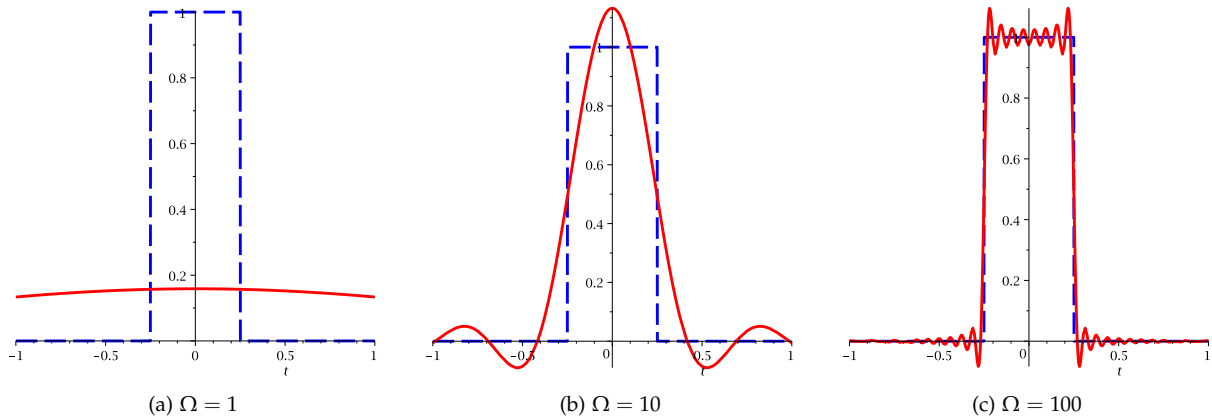
Izvršićemo aproksimaciju polaznog signala signalom

$$f_{\Omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

drugim rečima, rekonstruisaćemo signal na osnovu njegovog frekven-
cijskog sadržaja zaključno sa harmonikom na učestanosti $\Omega > 0$.

Kada Ω neograničeno raste očekivali bismo da aproksimacija teži
polaznom signalu, odnosno da je $f_{\infty} = f$.

Primer je ilustrovan dijagramima na slici 31 u slučaju $\epsilon = 1/4$.
Jasno je da “u skoro svim” tačkama Furijeov integral teži polaznom
signalu. Gibsov fenomen oko tačaka prekida $t = \pm\epsilon$ je takođe jasno
vidljiv. U ovim tačkama Furijeov integral konvergira vrednosti $1/2$.



Slika 31: Rekonstrukcija simetričnog pravougaonog impulsa pomoću krnjeg Furijeovog integrala. Integral teško konvergira u okolini prekidnih tačaka signala. U svim drugim tačkama, Furijeov integral teži vrednosti signala kada se Ω neograničeno uvećava.

Primer 2. Pokušajmo odrediti Furijeovu transformaciju tzv. Hevisaj-
dovog ili odskočnog signala,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Neposredno na osnovu definicije pišemo

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_0^{\Omega} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega} (1 - e^{j\Omega t}). \end{aligned}$$

Poslednji limes *ne postoji* za svako t , s obzirom da $e^{j\Omega t}$ neprekidno osciluje sa porastom Ω . Otuda Furijeovu transformaciju odskočnog signala ne možemo definisati.

Interpretacija i smisao Furijeove transformacije

Energija signala. Energija signala neograničenog trajanja se definiše slično kao i energija signala konačnog trajanja, kao integrala kvadrata apsolutne vrednosti duž čitavog intervala nad kojim je signal definisan,

$$\mathcal{E}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (96)$$

U slučaju signala konačnog trajanja, energija signala se može računati pomoću koeficijenata Furijeovog reda, kao što smo videli ranije. S obzirom da je Furijeova transformacija neposredno uopštenje Furijeovog reda, za očekivati je da se energija signala može računati pomoću njegove Furijeove transformacije. Zaista, može se pokazati da važi

$$\mathcal{E}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (97)$$

Dobijeni izraz se, poput odgovarajućeg izraza koji omogućava sračunavanje energije periodičnog signala, naziva **Parsevalovom teoremom**.

Parsevalova teorema daje jednu interesantnu interpretaciju Furijeove transformacije. Naime, ona kaže da se $\frac{1}{2\pi}(|F(j\omega)|^2 + |F(-j\omega)|^2)$ može interpretirati kao frekvencijska gustina energije signala lokalizovana na frekvenciji ω . Ukoliko je signal f realan, tada je usled simetrije njegove Furijeove transformacije $|F(-j\omega)| = |\overline{F(j\omega)}| = |F(j\omega)|$. Otuda se frekvencijska gustina energije realnog signala f može računati kao $\frac{1}{\pi}|F(j\omega)|^2$. **Ukupna energija realnog signala u frekvencijskom opsegu $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ je**

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (99)$$

Kašnjenje i prednjačenje signala. Ukoliko dva signala imaju isti talasni oblik, samo vremenski pomeren jedan u odnosu na drugi, očigledno je da će im i energetska sadržaj ostati neizmenjen. Na osnovu Parsevalove teoreme zaključujemo da moduo Furijeove transformacije takvih signala mora ostati neizmenjen. Zaključujemo stoga da se u frekvencijskom domenu takva dva signala moraju razlikovati po argumentu Furijeove transformacije.

Za proizvoljno vremensko kašnjenje τ , pokazuje se da važi

$$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}e^{-j\omega\tau}. \quad (100)$$

Energija signala konačnog trajanja može se računati na osnovu koeficijenata Furijeovog reda pomoću jednakosti

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{f\} &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |TF_n|^2 \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |TF_n|^2 \Delta\omega. \end{aligned}$$

U graničnom slučaju, izraza kada T neograničeno raste, $\Delta\omega$ teži nuli, a dobijena suma prelazi u integral, otuda

$$\mathcal{E}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t - \tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-j\omega(t - \tau)}e^{-j\omega\tau} dt \\ &= e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi \\ &= e^{-j\omega\tau} \mathcal{F}\{f(t)\} \end{aligned}$$

Dakle, Furijeova transformacija signala koji kasni za τ vremena ima istu amplitudu kao Furijeova transformacija nepomerenog signala, a faza mu linearno opada sa porastom učestanosti u odnosu na fazu nepomerenog signala,

$$|\mathcal{F}\{f(t - \tau)\}| = |\mathcal{F}\{f(t)\}| ,$$

$$\arg\{\mathcal{F}\{f(t - \tau)\}\} = \arg\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} - \omega\tau .$$

Ukoliko je “kašnjenje” negativno, prethodne relacije su i dalje na snazi, samo što tada govorimo o prednjačenju signala.

Metod impedansi - ponovni osvrt

Uvodeći metod impedansi pokazali smo da se odzivi linearnih, stacionarnih sistema na prostoperiodične signale mogu računati algebarskim metodama. Naime, pokazali smo da se za svaki takav sistem može naći tzv. frekvencijska karakteristika, tj. preslikavanje koje svakoj učestanosti pridružuje kompleksan broj. Modulo frekvencijske karakteristike definiše pojačanje kojim sistem deluje na ulazni prostoperiodični signal, dok argument karakteristike određuje fazno kašnjenje. Podeljeno sa učestanošću ulaznog signala, fazno kašnjenje definiše vremenski pomeraj izlaznog signala u odnosu na ulazni.

Koristeći se Furijeovim redovima, metod impedansi je proširen na proizvoljan periodični signal. Svi zaključci ostaju na snazi, samo što posmatrani sistem deluje na svaki harmonik ulaznog signala ponaosob. Pojedinačni odzivi se potom sabiraju u ukupnom odzivu.

Uvodeći Furijeovu transformaciju u mogućnosti smo da metod impedansi primenimo i u slučaju neperiodičnih ulaznih signala.

Preciznije, u slučaju onih neperiodičnih ulaznih signala za koje se Furijeova transformacija može odrediti. Podsećamo čitaoca da se Furijeovom transformacijom ulazni signal i dalje razlaže na harmonike, samo što je harmonika neprebrojivo mnogo, a amplitude su im neograničeno male.

Posmatrajmo linearni, stacionarni dinamički sistem sa jednim ulazom u i jednim izlazom y . Neka je frekvencijska karakteristika sistema $G(j\omega)$. Ukoliko je $U(j\omega)$ Furijeova transformacija ulaznog signala, a $Y(j\omega)$ Furijeova transformacija izlaznog signala, tada je

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) . \quad (101)$$

Odziv procesa se sada može odrediti izračunavanjem inverzne Furijeove transformacije od $Y(j\omega)$,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Posmatrajmo linearni, stacionaran sistem sa jednim ulaznim signalom u i jednim izlaznim signalom y čija je frekvencijska karakteristika $G(j\omega)$. Pretpostavimo da je posmatrani signal konačnog trajanja, te da ga periodično produžujemo sa velikim, ali konačnim osnovnim periodom T . Tada možemo pisati,

$$Y_n = G(jn\frac{2\pi}{T})U_n ,$$

gde su U_n i Y_n n -ti članovi Furijeovog reda ulaza i izlaza, respektivno. Množenjem leve i desne strane date relacije sa T , te razmatrajući graničnu vrednost kada T neograničeno raste, nalazimo

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

Primer. Odredićemo odziv RC kola na izolovani jedinični pravougaoni impuls širine 2ϵ . Kao što smo videli ranije, ukoliko je v napon izvora, a u_c napon na kondenzatoru, tada se RC kolo može opisati diferencijalnom jednačinom,

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = v.$$

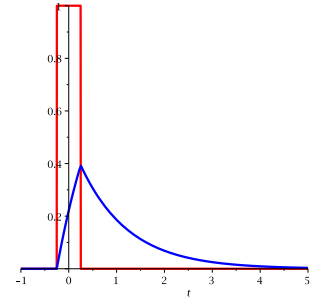
U jednom od ranijih primera ustanovili smo da je frekvencijska karakteristika RC kola $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$. Furijeova transformacija ulaznog signala je $U(j\omega) = 2\epsilon \text{Sinc}(\omega\epsilon)$, te je kompleksni lik odziva

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) = \frac{2\epsilon \text{Sinc}(\omega\epsilon)}{RCj\omega + 1}.$$

Neposrednim sračunavanjem inverzne Furijeove transformacije ovog signala nalazimo da je

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -\epsilon \\ 1 - e^{-(t+\epsilon)} & -\epsilon < t < \epsilon \\ e^{-(t-\epsilon)} - e^{-(t+\epsilon)} & t > \epsilon \end{cases}.$$

Primer je ilustrovan slikom 32.



Slika 32: Pobuda (crvena) i odziv (plava) RC kola na pravougaoni jedinični impuls širine 2ϵ . Vremenska konstanta kola u prikazanom primeru je $RC = 1$.

Neposredno određivanje frekvencijske karakteristike sistema

U svim dosadašnjim razmatranjima frekvencijsku karakteristiku smo određivali posmatrajući odziv posmatranog procesa na prostoperiodičnu pobudu. Do identičnog rezultata možemo doći neposrednom primenom Furijeove transformacije. Uvedimo najpre neke osnovne osobine Furijeove transformacije.

Linearnost. Furijeova transformacija je linearna operacija, u smislu da je Furijeova transformacija linearne kombinacije signala jednaka linearnoj kombinaciji Furijeovih transformacija. Konkretno, ukoliko su a i b konstantne, a f i g signali za koje se može definisati Furijeova transformacija, tada je

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}. \quad (102)$$

Dalje ćemo odrediti vezu između Furijeove transformacija signala i Furijeovih transformacija njegovih izvoda i integrala. Pri tome, valja obratiti pažnju na činjenicu da vrednosti svih posmatranih signala moraju težiti nuli (i to dovoljno brzo) za velike vrednosti vremenske promenljive

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

U suprotnom, Furijeova transformacija se uopšte ne može definisati, barem ne način na koji smo mi to učinili u prethodnom tekstu.

Furijeova transformacija izvoda. Furijeovu transformaciju prvog izvoda signala odredićemo po definiciji,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} \left(f(t) e^{-j\omega t} \right) - f(t) \frac{de^{-j\omega t}}{dt} \right] \\ &= \left(f(t) e^{-j\omega t} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-j\omega) e^{j\omega t} dt .\end{aligned}$$

Prvi sabirak u dobijenom izrazu jednak je nuli, u drugom sabirku odmah prepoznamo transformaciju samog signala, otuda

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = j\omega \mathcal{F}\{f\} . \quad (103)$$

Dobijeni izraz se lako uopštava na sličaj višestrukog diferenciranja,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n \mathcal{F}\{f\} . \quad (104)$$

Furijeova transformacija integrala. Furijeovu transformaciju integrala nalazimo na potpuno sličan način. Čitaocu ostavljamo za vežbu da pokaže da je

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{f\} , \quad (105)$$

te analogno u slučaju višestruke integracije.

Frekvencijska karakteristika sistema. Posmatrajmo sada proizvoljan linearan, stacionaran proces sa jednim ulazom u i jednim izlazom y opisan diferencijalnom jednačinom

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u .$$

Primenom Furijeove transformacije, nalazimo vezu kompleksnih likova ulaza i izlaza u obliku

$$\left((j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0 \right) Y(j\omega) = (b_m(j\omega)^m + \dots + b_0) U(j\omega) ,$$

odnosno frekvencijska karakteristika procesa je

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} .$$

Dobijena frekvencijska karakteristika je, naravno, potpuno identičnog oblika kao ranije. Prikazani postupak, međutim, omogućava da se frekvencijska karakteristika procesa definiše na nešto drugačiji način:

Frekvencijska karakteristika procesa jeste odnos Furijeovih transformacija njegovog izlaza i ulaza.

*Amplitudska modulacija signala**

Amplitudska modulacija signala i danas ima veliku primenu u prenosu radio-signala. AM radio je bio dominantan oblik emitovanja radio-signala tokom prve tri četvrtine dvadesetog veka, a široko se koristi i danas. Amplitudska modulacija signala se postiže množenjem signala koji želimo preneti, "korisnog signala", nosećim prostoperiodičnim talasom visoke učestanosti. Pokazuje se da je ovaj postupak ekvivalentan pomeranju spektra signala u frekvencijskom domenu, te njegovom centriranju oko učestanosti nosioca. Na ovaj način, veći broj radio-stanica može jednovremeno da prenosi signal kroz isti medijum (atmosfera). Svaka stanica odašilje signal koristeći drugu noseću frekvenciju. Modulirani signali svih radio-stanica jednovremeno stižu do prijemnika. Međutim, budući da su poslani signali amplitudski modulirani, signal svake od stanica je potpuno izolovan u frekvencijskom domenu (drugačije je "boje", da se potpuno neformalno izrazimo). Prijemnici se podešavaju tako da izoluju samo određeni spektar učestanosti koji se potom de-moduliše kako bi se polazni signal rekonstruisao u svom osnovnom frekvencijskom opsegu.

Pomeranje u frekvencijskom domenu i teorema modulacije.

Množenje signala u vremenskom domenu kompleksnim eksponencijalnim signalom ekvivalentno je pomeranju njegovog spektra,

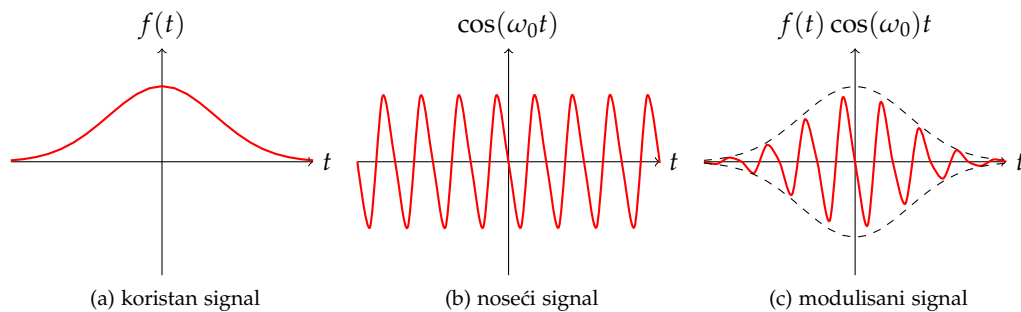
$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(j(\omega - \omega_0)) . \quad (106)$$

Tvrđenje se dokazuje neposredno na osnovu definicije i ostavljamo ga čitaocu za vežbu. Neposredna posledica ovog tvrđenja je **Teorema modulacije** koja kaže da je

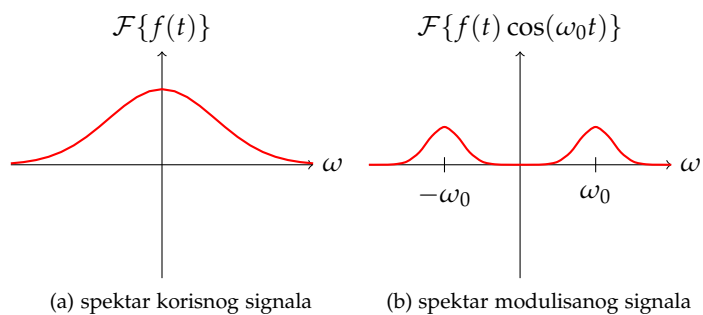
$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t) f(t)\} = \frac{1}{2} (F(j(\omega + \omega_0)) + F(j(\omega - \omega_0))) . \quad (107)$$

U praktičnim primenama, f je "koristan" signal koji se želi preneti, a $\cos(\omega_0 t)$ je noseći signal. Učestanost nosećeg signala naziva se nosećom učestanosti. Signal $f(t) \cos(\omega_0 t)$ nazivamo amplitudski moduliranim signalom. Primeri su prikazani slikama 33 i 34. Koncept prenosa većeg broja poruka kroz isti medijum primenom amplitudske modulacije ilustrovan je slikom 35.

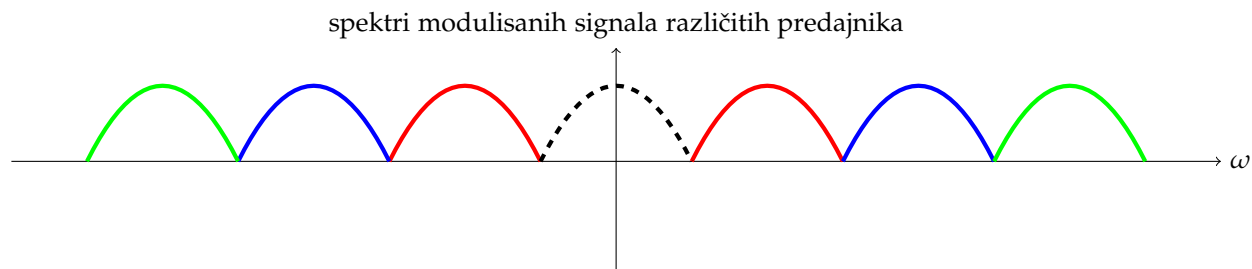
Pomeranje u frekvencijskom domenu je veoma važna osobina Furijeove transformacije koja se koristi i u mnogim slučajevima koji nemaju neposredne veze sa modulacijom signala. Primera radi, ova osobina se pri ispitivanju uticaja procesa diskretizacije (prevođenja signala iz vremenski kontinualnog u vremenski diskretan oblik) na spektar signala.



Slika 33: Primer amplitudske modulacije signala u vremenskom domenu. Treba obratiti da je noseća učestanost znatno veća od dominantnih učestanosti korisnog signala. U praksi je ova razlika učestanosti još izraženija nego u primeru.



Slika 34: Primer amplitudske modulacije signala u frekvencijskom domenu. Spektar korisnog signala je pomeren i centriran oko učestanosti nosećeg signala.



Slika 35: Shematski prikaz amplitudski spektra signala dobijenog mešanjem amplitudski modulisanog signala iz tri različita izvora (signali koji potiču iz različitih izvora prikazani su različitim bojama). Sva tri izvora odašilju istovetan koristan signal, samo modulisan sa različitim nosećim učestanostima.

Furijeova transformacija proizvoda. Osobina pomeranja signala u frekvencijskom domenu omogućava da se odredi Furijeova transformacija proizvoda dva signala. Ideja je jednostavna, znamo kako da odredimo frekvencijski lik proizvoda signala sa prostoperiodičnim signalom, a sama Furijeova transformacija predstavlja razlaganje signala na prostoperiodične komponente. Pretpostavljamo, otuda, da se *proizvodom dva signala jedan od njih moduliše svakim od harmonika onog drugog.*

Posmatrajmo signale f i g čiji su kompleksni likovi F i G , tim redom.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\xi)e^{j\xi t} d\xi}_{f(t)} g(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(\omega-\xi)t} dt}_{G(j(\omega-\xi))} d\xi.\end{aligned}$$

Dobijeni izraz nazivamo konvolucijom kompleksnih likova F i G ,

$$(F \star G)(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\xi)G(j(\omega - \xi))d\xi. \quad (108)$$

Dakle, kompleksni lik proizvoda jednak je konvoluciji kompleksnih likova

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f\} \star \mathcal{F}\{g\}. \quad (109)$$

Konvolucija signala u vremenskom domenu

U toku prethodnih izlaganja, više puta smo pokazali da se odziv proizvoljnog linearnog sistema sa jednim ulazom u i jednim izlazom y može računati pomoću frekvencijskog lika ulaznog signala i frekvencijske karakteristike sistema. Konkretno, važi da je

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega),$$

gde su Y i U Furijeove transformacije izlaza i ulaza, tim redom, dok je G frekvencijska karakteristika sistema. Prirodno se postavlja pitanje: *Koja operacija nad signalima u vremenskom domenu se transformiše u proizvod njihovih frekvencijskih likova?* Odgovor na ovo pitanje je: **operacija konvolucije.**

Inverzna Furijeova transformacija proizvoda. Neka su G i U Furijeove transformacije proizvoljnih signala g i u , tim redom. Eksplicitno ćemo sračunati Furijeov integral njihovog proizvoda,

Konvolucija je jedna od najvažnijih operacija među signalima. Obraćamo pažnju čitaoca da je rezultat konvolucije dvaju signala treći signal čija se vrednost u trenutku t računa prema izrazu (110). Upravo zbog toga konvoluciju dva signala a i b u trenutku t najčešće obeležavamo sa $(a \star b)(t)$, umesto uobičajene ali neprecizne oznake $a(t) \star b(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)U(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)U(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(\tau)e^{-j\omega\tau}}_{G(j\omega)} U(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)} d\omega}_{u(t-\tau)} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Dobijeni izraz se naziva operacijom konvolucije, u oznaci

$$(g \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau) d\tau. \quad (110)$$

Furijeova transformacija konvolucije dvaju signala jednaka je, dakle, proizvodu Furijeovih transformacija signala,

$$\mathcal{F}\{g \star u\} = \mathcal{F}\{g\}\mathcal{F}\{u\}. \quad (111)$$

Sračunavanje odziva u vremenskom domenu. Uvođenjem operacije konvolucije, odziv procesa na poznatu pobudu može se neposredno računati, u vremenskom domenu. **Definisaćemo najpre karakterističnu (Grinovu) funkciju procesa kao inverznu Furijeovu transformaciju njegove frekvencijske karakteristike,**

$$g(t) = \mathcal{F}\{G(j\omega)\}. \quad (112)$$

Odziv procesa na proizvoljnu pobudu može se računati kao konvolucija pobude sa karakterističnom funkcijom procesa,

$$y(t) = (g \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau) d\tau. \quad (113)$$

*Neke dalje osobine Furijeove transformacije**

Simetričnost. Furijeova transformacija realnih signala zadržava osobinu simetričnosti Furijeovih redova. Podsećamo čitaoca da je za proizvoljan realan periodičan signal $F_{-n} = \overline{F_n}$. U slučaju realnih aperiodičnih signala, imamo

$$\begin{aligned}
F(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{e^{-j\omega t}} dt \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t} dt}.
\end{aligned}$$

Konvolucija, ima niz osobina koje je čine sličnom proizvodu. Konkretno, konvolucija je komutativna i asociativna operacija, distributivna u odnosu na sabiranje, itd.

$$\begin{aligned}
a \star b &= b \star a \\
a \star (b \star c) &= (a \star b) \star c \\
(a + b) \star c &= a \star c + b \star c
\end{aligned}$$

Kasnije ćemo pokazati da se karakteristična funkcija može smatrati odzivom procesa na jednu vrlo specifičnu pobudu koju nazivamo Dirakovim impulsom. Interesantno, uvođenje Dirakovog impulsa omogućuje nam da definišemo Furijeovu transformaciju periodičnih i drugih signala za koje definicioni integral ne konvergira.

Odnosno,

$$f \text{ je realan signal} \Rightarrow F(-j\omega) = \overline{F(j\omega)}. \quad (114)$$

Amplitudski spektar realnog signala je simetrična, a fazni kososimetrična funkcija učestanosti

$$f \text{ je realan signal} \Rightarrow \begin{cases} |F(-j\omega)| = F(j\omega) \\ \arg F(-j\omega) = -F(j\omega) \end{cases} \quad (115)$$

Skaliranje vremenske i frekvenzijske ose. Skaliranje vremenske ose signala povlači jednovremeno skaliranje ose učestanosti i obrnuto. Čitaocu se ostavlja za vežbu da pokaže da je za proizvoljno realno $c \neq 0$,

$$\mathcal{F}\{f(ct)\}(j\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}\{f(t)\}(j\frac{\omega}{c}). \quad (116)$$

Množenje sa stepenom funkcijom u vremenskom domenu

– **Diferenciranje u frekvencijskom domenu.** Diferenciranje signala u frekvencijskom domenu odgovara množenju signala sa $-jt$ u vremenskom domenu. Čitaocu za vežbu ostavljamo da pokaže da važi,

$$\mathcal{F}\{tf(t)\} = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega}. \quad (117)$$

Primeru radi, recimo da posmatrani signal opisuje pojavu koja se tokom nekoliko milisekundi. Prirodno je u tom slučaju izabrati 1 milisekundu kao osnovnu vremensku jedinicu. Formalno, time se vremenska osa skalira sa faktorom $c = 1000$. Posledično, osnovna dimenzija učestanosti više nije 1 Hz, već 1 kHz, što odgovara smeni ω sa $\omega/1000$ u spektru.

6 Jedno uopštenje Furijeove transformacije

Dirakov δ -impuls

Do sada smo videli da se spektralna analiza signala može primeniti na periodične signale (pomoću Furijeovih redova), kao i na neperiodične signale koji dovoljno brzo teže nuli (primenom Furijeove transformacije). Videli smo, takođe, da se za linearne, vremenski invarijantne procese može definisati frekvencijska karakteristika, koja omogućava predviđanje odziva sistema na osnovu njegovog spektralnog razvoja. Pri tome, frekvencijska karakteristika povezuje frekvencijski lik ulaznog signala sa frekvencijskim likom izlaznog, bez obzira da li se taj lik definiše pomoću Furijeovog reda ili Furijeove transformacije.

U nastavku ćemo pokazati da se Furijeova transformacija i Furijeov red mogu objediniti, odnosno da se Furijeova transformacija može uopštiti tako da bude primenljiva i na periodične signale. Šta više, prikazani pristup će nam omogućiti da definišemo Furijeovu transformaciju na širokoj klasi signala koji ne teže nuli sa porastom vremenske promenljivosti. Da bi smo to učinili, međutim, moraćemo uvesti jedan vrlo specifičan signal – Dirakov delta-impuls.

Neka su f i g signali, a a , b , τ i ω_0 konstante. Pod pretpostavkom da sve potrebne operacije dobro definisane, Furijeova transformacija zadovoljava sledeća osnovna svojstva:

Linearnost. $\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$

Simetričnost. f je realan signal $\Rightarrow F(-j\omega) = \overline{F(j\omega)}$

Skaliranje. $\mathcal{F}\{f(ct)\}(j\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}\{f(t)\}(j\frac{\omega}{c})$

Pomeranje u frekvencijskom domenu. $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(j(\omega - \omega_0))$

Transformacija pomerenog signala. $\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = \mathcal{F}\{f\}e^{-j\omega\tau}$

Množenje stepenom funkcijom. $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$

Transformacija izvoda. $\mathcal{F}\{\frac{df}{dt}\} = j\omega\mathcal{F}\{f\}$

Transformacija integrala. $\mathcal{F}\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}\{f\}$

Transformacija proizvoda. $\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f\} \star \mathcal{F}\{g\}$

Transformacija konvolucije. $\mathcal{F}\{g \star u\} = \mathcal{F}\{g\}\mathcal{F}\{u\}$

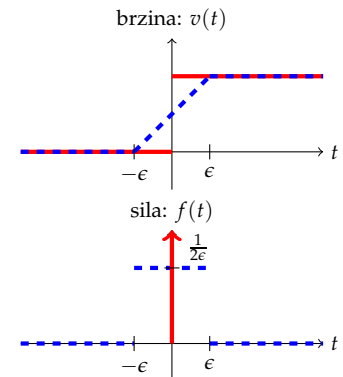
Parsevalova teorema. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

Primer. Pojam Dirakovog impulsa uvešćemo služeći se jednostavnim primerom. Posmatrajmo kruto telo jedinične mase koje se bez trenja kreće po horizontalnoj podlozi. Pretpostavimo da je do trenutka $t = 0$ telo mirovalo, a da se u tom trenutku počinje kretati ravnomerno pravolinijski, brzinom $v = 1$ m/s. Postavljamo sledeće pitanje: *Kakva sila je, delujući na posmatrano telo, uzrokovala opisano kretanje?*

Jasno je naravno da je opisano kretanje fizički neostvarivo. Ni jedno telo ne može trenutno promeniti brzinu. Trenutna promena brzine implicira trenutnu promenu kinetičke energije, što bi zahtevalo neograničenu snagu. Otuda možemo naslutiti da će i sila koja bi uzrokovala takvo kretanje biti neostvariva (neograničena). Stoga ćemo umesto opisanog idealnog kretanja posmatrati fizički ostvarivo kretanje u kome telo postepeno ubrzava od početne brzine $v(-\epsilon) = 0$ do $v(\epsilon) = 1$ tokom vremenskog intervala $[-\epsilon, \epsilon]$,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\epsilon}t & -\epsilon < t < \epsilon \\ 1 & t > \epsilon \end{cases} \quad (118)$$

Posmatrano kretanje se u potpunosti može opisati Drugim Njut-



Slika 36: Zamišljeno kretanje u kome telo trenutno ubrzava u trenutku $t = 0$ (prikazano punom, crvenom linijom) i fizički ostvarivo kretanje kada telo ubrzava tokom konačnog intervala širine 2ϵ . Gornji dijagram prikazuje grafik brzine kretanja tela, a donji grafik sile. Kako širina intervala opada ka nuli tako intenzitet sile raste neograničeno. Kako krajnja brzina ostaje neizmenjena, ukupni integral je

novim zakonom,

$$f(t) = \frac{dv(t)}{dt} . \quad (119)$$

Odgovarajuća sila se stoga može dobiti diferenciranjem ostvarene brzine, tj. u obliku

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & |t| < \epsilon \\ 0 & |t| > \epsilon \end{cases} . \quad (120)$$

U graničnom slučaju kada ϵ teži nuli, maksimalni intenzitet sile neograničeno raste, ali je konačna ostvarena brzina, odnosno integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 , \quad (121)$$

dobro definisan.

“Formalna” definicija Dirakovog impulsa. Postoji čitava klasa signala koji, poput prethodno opisane sile, sami po sebi nisu ostvarivi, ali čije se *dejstvo* na različite fizičke sisteme može dobro definisati. Takve signale nazivamo **uopštenim signalima**. Dirakov δ -impuls, u oznaci $\delta(t)$, definiše se kao uopšteni signal takav da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0) , \quad (122)$$

za proizvoljan signal g koji je neprekidan u nuli. Još opštije, možemo definisati pomereni Dirakov impuls, $\delta(t - t_0)$, za koji važi

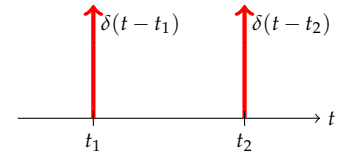
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t_0) , \quad (123)$$

za proizvoljno g neprekidno u okolini t_0 . Grafički se Dirakov impuls koji deluje u trenutku t_0 obeležava se vertikalnom strelicom u tački $t = t_0$, kao što je prikazano slikama 36 i 37.

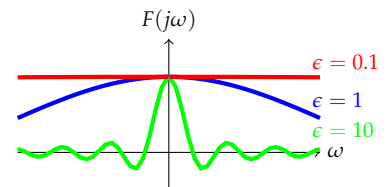
Furijeova transformacija Dirakovog impulsa. Služeći se definicijom Dirakovog impulsa (122) nije teško odrediti njegovu Furijeovu transformaciju. Po definiciji je, naime,

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega 0} = 1 . \quad (124)$$

Dakle, Dirakov impuls je signal čiji je frekvencijski lik jednak jedinici na svakoj učestanosti. Drugim rečima, Dirakov impuls je signal čiji je frekvencijski sadržaj ravnomerno raspoređen na svim učestanostima. U tom smislu, Dirakov impuls je analogan “idealnoj belo svetlosti” koja u sebi sadrži podjednako zastupljene elektromagnetske talase svih učestanosti.



Slika 37: Grafički prikaz Dirakovih impulsa koji deluju u trenucima t_1 i t_2 .



Slika 38: Dijagrami ilustruju kako spektar pravougaonog impulsa jedinične površine, širine 2ϵ prelazi u jedinični spektar δ -impulsa kada ϵ teži nuli,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Sinc}(\omega\epsilon) = \text{Sinc}(0) = 1 .$$

Frekvencijska karakteristika sistema kao Furijeova transformacija impulsnog odziva. Činjenica da je frekvencijski lik Dirakovog impulsa jednak jedinici ima veoma interesantne praktične posledice. Naime, ranije smo pokazali da se Furijeova transformacija odziva linearnog, stacionarnog procesa može računati po formuli,

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) ,$$

gde je U frekvencijski lik ulaznog signala, a G frekvencijska karakteristika odziva procesa. Otuda, ukoliko proces pobudimo Dirakovim impulsom, Furijeova transformacija odziva jednaka je upravo frekvencijskoj karakteristici procesa. Na taj način dolazimo do alternativne definicije frekvencijske karakteristike: **Frekvencijska karakteristika linearnog, stacionarnog procesa sa jednim ulazom i jednom izlazom jednaka je Furijeovoj transformaciji odziva procesa na jedinični Dirakov impuls.**

Dirakov impuls kao izvod prekidne funkcije.* Dirakov impuls se može iskoristiti i da se na veoma elegantan način uopšti pojam izvoda, odnosno da se definiše izvod funkcije i u tačkama prekida. Posmatrajmo proizvoljna dva signala f i \dot{f} , takve da je

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} . \quad (125)$$

Prethodnu diferencijalnu relaciju možemo zapisati i u integralnom obliku,

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \dot{f}(\tau) d\tau + f(-\infty) . \quad (126)$$

Prednost izraza (126) u odnosu na izraz (125) leži prevashodno u tome što je integralni oblik opštiji. Naime, ukoliko je f prekidna funkcija tada se izvod u klasičnom smislu (125), ali se može naći (opštena) funkcija \dot{f} tako da važi integralna relacija (126). Uvodimo, stoga, sledeću definiciju izvoda: **Neka je f dati signal, ukoliko se može naći signal \dot{f} takav da važi (126), tada signal \dot{f} nazivamo prvim izvodom signala f .**

Primeru radi, nije teško pokazati da je Dirakov delta impuls izvod Hevisajdovog odskočnog signala,

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (127)$$

Furijeova transformacija periodičnih signala

U ovom odeljku pokazaćemo kako se, uz oslonac na Dirakov delta impuls, Furijeova transformacija može primeniti i na periodične signale.

Furijeova transformacija prostoperiodičnih signala. Ukoliko Furijeovu transformaciju kompleksnog prostoperiodičnog signala $e^{j\omega_0 t}$ potražimo po definiciji naći ćemo se u problemu, s obzirom da definicioni integral

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (128)$$

nije dobro definisan ni za jednu vrednost učestanosti ω . Umesto toga, postavimo suprotno pitanje: **Kakav signal $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}$ uvršten u Furijeov integral daje $e^{j\omega_0 t}$ kao rezultat?**

$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} e^{j\omega t} d\omega \rightarrow \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = ?$$

Dirakov impuls u frekvencijskom domenu definisali bismo analogno kao u vremenskom, kao "funkciju" kružne učestanosti ω takvu da za svako $g(\omega)$ neprekidno u okolini ω_0 važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) g(\omega) d\omega = g(\omega_0).$$

Imajući u vidu prethodne relacije, definisamo Furijeovu transformaciju kompleksnog eksponencijalnog signala na sledeći način:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (129)$$

Zaista, uvrštavanjem tako definisanog izraza u Furijeov integral dobijamo upravo kompleksni prostoperiodični signal kružne učestanosti ω_0 ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}.$$

Služeći se Ojlerovim obrascima, nije teško definisati Furijeovu transformaciju realnih prostoperiodičnih signala, konkretno sinusnog i kosinusnog signala,

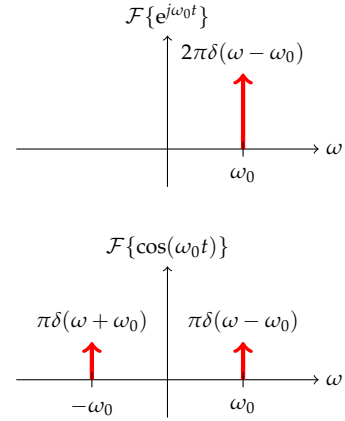
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} \\ &= -j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)), \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} \\ &= \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)). \end{aligned} \quad (131)$$

S obzirom da se konstantan signal može posmatrati kao prostoperiodičan signal nulte učestanosti, možemo pisati

$$\mathcal{F}\{c\} = \mathcal{F}\{ce^{j0t}\} = 2\pi c\delta(\omega), \quad (132)$$

za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$.



Slika 39: Spektri prostoperiodičnih signala kružne učestanosti ω_0 . Kompleksni prostoperiodični signal se javlja u vidu impulsa u frekvencijskom domenu. Realni prostoperiodični signali, u ovom slučaju kosinusni signal, javljaju se kao upareni impulsi prepolovljene amplitude na kružnim učestanostima ω_0 i $-\omega_0$.

Već smo ustanovili da je odziv procesa čija je frekvencijska karakteristika $G(j\omega)$ na prostoperiodičnu pobudu kružne učestanosti ω_0 , $u(t) = e^{j\omega_0 t}$, upravo

$$y(t) = G(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}.$$

Do istog zaključka dolazimo i primenom Furijeove transformacije, naime, Furijeova transformacija izlaza jednaka je proizvodu Furijeove transformacije ulaza i frekvencijske karakteristike

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= G(j\omega) U(j\omega) \\ &= 2\pi G(j\omega) \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Sam odziv se sada može računati pomoću Furijevog integrala,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi G(j\omega) \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

Da zaključimo, *uvodjenjem Dirakovih impulsa u spektar, Furijeova transformacija se može proširiti i na periodične signale. Sa stanovišta primene, potpuno je svejedno da li spektar periodičnih signala posmatramo kao niz Furijeovih koeficijenata ili kao niz Dirakovih δ -impulsa čije su "visine" jednake tim koeficijentima!*

Furijeova transformacija složeno-periodičnih signala. Pri-
menom Furijeovih redova svaki periodičan signal se može razložiti
na sumu prostoperiodičnih harmonika. Kao što je pokazano u
prethodnim odeljcima, ukoliko je f signal osnovnog perioda T
možemo pisati

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t},$$

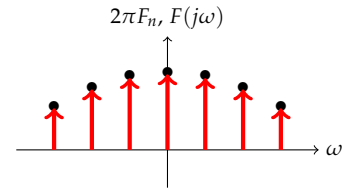
gde je $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ kružna učestanost prvog harmonika. Koristeći se
linearnošću Furijeove transformacije neposredno nalazimo

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_1 t}\},$$

te je konačno,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1). \quad (133)$$

Dakle, Furijeova transformacija periodičnog signala jednaka je
povorki Dirakovih impulsa čije su amplitude proporcionalne koefici-
jentima Furijeovog reda datog signala (koeficijent proporcionalnosti je
 2π). Svaki od Dirakovih impulsa lokalizovan je na učestanosti $n\omega_1$ za
neko celobrojno n .



Slika 40: Spektar periodičnog signala. Crnim tačkama prikazani su koeficijenti Furijeovog reda. Furijeova transformacija, data povorkom Dirakovih impulsa, prikazana je crvenom bojom.

Uopštenje Furijeove transformacije*

Furijeovu transformaciju signala f smo prvobitno definisali kao

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt.$$

Da bi Furijeova transformacija signala bila dobro definisana, neophodno
je da definicioni integral konvergira, odnosno da posmatrani signal
teži nuli dovoljno brzo. Koristeći se Dirakovim impulsom uspeli smo
da proširimo Furijeovu transformaciju tako da obuhvata konstan-
tan signal, prostoperiodične i periodične signale uopšte. Čitaocu
obraćamo pažnju da se za ovakve signale strogo govoreći Furijeova
transformacija ne može sračunati primnom definicionog integrala.

Služeći se jednostavnim trikovima Furijeovu transformaciju
možemo dodatno proširiti. Već smo ustanovili, naime, da je

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = h(t),$$

gde je h Hevisajdov odskočni signal. Imajući u vidu vezu između Furijeovih transformacija signala i njegovog integrala, nalazimo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{h(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right\} \\ &= \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \frac{1}{j\omega} .\end{aligned}\quad (134)$$

Na sličan način može se odrediti Furijeova transformacija proizvoljnog kauzalnog stepenog signala,

$$\mathcal{F}\{t^k h(t)\} = \frac{k!}{(j\omega)^{k+1}} . \quad (135)$$

Služeći se dobijenim izrazom, možemo definisati Furijeovu transformaciju proizvoljnog kauzalnog signala koji se za $t > 0$ može razviti u *stepeni* red. Primera radi, neka je

$$f(t) = h(t) \sum_{k=0}^{\infty} a_0 t^k ,$$

tada je

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{k!}{(j\omega)^{k+1}} . \quad (136)$$

Služeći se višim izvodima Dirakovog signala, Furijeovu transformaciju je moguće još više proširiti, te se tako mogu definisati i transformacije nekauzalnih stepenih signala i mnogih drugih. Ovakvo uopštenje Furijeove transformacije, međutim, zahtevalo bi dublje zalaženje u teoriju uopštenih funkcija što želimo da izbegnemo.

Primera radi, posmatrajmo signal $e^t h(t) = h(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ koji ne samo da ne teži nuli za veliko pozitivno t , već neograničeno, eksponencijalno raste.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^t h(t)\} &= \mathcal{F}\left\{h(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{k!}{(j\omega)^{k+1}} = \frac{1}{j\omega - 1} .\end{aligned}$$

Pojmovnik

amplituda signala, 5

boja, 3

energija signala, 17

fazni stav, 11

fazni stav signala, 5

frekvencija, *vidi* učestanost

frekvencsija,

seeučestanost³

Furijev integral, 2

Furijev red, 2, 15

Furijeova transformacija, 2

harmonijska analiza, *vidi*

spektralna analiza signala

harmonijski oscilator, 7

jednačina, 7

harmonik, 3

n -ti, 15

osnovni, 15

viši i niži, 3

impedansa, 26

kompleksni predstavnik

prostoperiodičnog kretanja,

12

signala, 26

kružna frekvencija, *vidi* kružna
učestanost

kružna učestanost, 6

ortogonalnost, 16

period, 3

osnovni, 5

periodični signal, 3

periodično produženje, 16

prostoperiodičan signal

ekvivalentni zapisi, 14

kompleksni, 12

prostoperiodični signal, 3

signal

periodičan, 5

prostoperiodičan, 5

složeno-periodičan, 5

spektar, 19

amplitudski, 19

fazni, 19

spektralna analiza signala, 3

srednja snaga signala, 18

srednja vrednost signala, 19

ton, 4

učestanost, 3, 5