# $\mathfrak{Z}$ transformacija i osnove diskretnih sistema

*Mirna N. Kapetina*
*Zoran D. Jeličić*

*2. april 2020.*

Za analizu signala i linearnih dinamičkih sistema (LTI) koriste se transformacione tehnike. Kada govorimo o kontinualnim signalima i kontinulanim sistemima koji predstavljaju procese koji na ulazu imaju kontinualane signale, moćan alat koji značajno pojednostavljuje analitičko određivanje odziva LTI sistema na proizvoljan oblik bila je Laplasova transformacija.

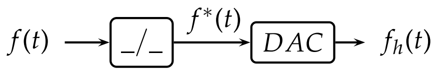
Međutim, u inženjerstvu se vrlo često susrećemo sa diskretnim signalima, u oznaci $f(kT)$, gde je $T$ period semplovanja (odabiranja). To su signali čije su vrednosti poznate samo u diskretnim vremenskim trenucima $kT$, $k \in \mathbb{Z}$. Ovakvi signali mogu biti originalno diskretnog tipa (dobijeni kao rezultat merenja) ili mogu biti rezultat procesa odabiranja neprekidnog, kontinualnog signala $f(t)$ u vremenskom domenu. Sistem koji vrši transformaciju ulaznog diskretnog signala u izlazni diskretni signal naziva se diskretni sistem. Transformacija koja se primenjuje za analizu diskretnih signala i diskretnih sistema je $\mathfrak{Z}$ transformacija, odnosno $\mathfrak{Z}$ transformacija je diskretni ekvivalent Laplasove transformacije.

$\mathfrak{Z}$ transformacija omogućava analitičko određivanje odziva diskretnog sistema na ulaznu diskretnu pobudu, kao i rešavanje diferencnih jednačina kojim se diskretni sistemi opisuju, o čemu će više biti reči u nastavku.

Paralelno sa razvojom tehnike koja se koristi u digitalnim sistemima upravljanja, razvijala se i teorija. Prvi koraci tog razvoja napravili su se tokom Drugog svetskog rata, kao potreba u razvoju radarske tehnike. Do tada je sva teorija bila razvijena za transformaciju kontinualnih signala, pa se razvila potreba za razvoj sličnih alata za obradu diskretnih signala. Prvi korak veže se za Hurewicz-a koji uvodi transformaciju nad sekvencama 1947. godine, koja je potom nazvana $\mathfrak{Z}$ transformacija 1952. od strane Ragazzini-a i Zadeh-a. Transformacija je nezavisno razvijana u Sjedinjenim Američkim Državama, Sovjetskom Savezu i Velikoj Britaniji. Godine 1950. ovu transformaciju Tsypkin je nazvao diskretna Laplasova transformacija i uveo je kao alat za analizu tzv. impulsnih sistema, a slični rezultati dobijeni su i u Engleskoj 1952. godine. Dalji razvoj transformacije i njenih osobina pokazao je Eliohe Jury u svojoj doktorskoj disertaciji na Univerzitetu Kolumbijam.

## 1 Pojam $\mathfrak{Z}$ transformacije

$\mathfrak{Z}$ transformacija se može uvesti polazeći od matematičkog modela odabiranja i zadrške




Slika 1: Ilustracija matematičkog modela postupka odabiranja i zadrške

gde je sa $f^*$ označen idealno odbirkovan signal. Primenom Laplasove transformacije na idealno odbirkovan signal, dobijamo izraz koji nazivamo kompleksni lik povorke odbiraka,

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} \ . \tag{1}$$

Dobijeni izraz (1) nam omogućava da analiziramo odbirkovane signale u kompleksnom (frekvencijskom) domenu. Lako se može uočiti da se u izrazu (1) pojavljuje član $e^{sT}$, koji je nelinearan, odnosno da kompleksni likovi odbirkovanog signala nisu racionalne funkcije od kompleksne promenljive $s$ već iracionalne što usložnjava primenu Laplasove transformacije, kao i nalaženje inverzne Laplasove transformacije, što bi zahtevalo razvoj u red ovog člana, itd. To je ujedno jedan od motiva za uvođenje $\mathfrak{Z}$ transformacije tako što će se član $e^{sT}$ zameniti kompleksnom promenljivom $z$,

$$z := e^{sT} \ . \tag{2}$$

Zamenom (2) u izraz (1),

$$F^*(s)|_{z=\mathrm{e}^{sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\mathrm{e}^{-skT}|_{z=\mathrm{e}^{sT}} \tag{3}$$

možemo definisati $\mathfrak{Z}$ transformaciju za kauzalne diskretne signale[1] .

[1] Signal je kauzalan ako njegova vrednost u svakom vremenskom trenutku pre nultog jednaga nuli, odnosno $f(k) = 0$ za $k < 0$.

**Definicija 1.** ($\mathfrak{Z}$ *transformacija*) Za vremenski diskretan, kauzalan signal $f(k)$, $\mathfrak{Z}$ transformacija, u oznaci $\mathfrak{Z}\{f(k)\}$, se definiše izrazom

$$\mathfrak{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \tag{4}$$

Ovako definisana transformacija naziva se unilateralna ili jednostrana $\mathfrak{Z}$ transformacija.[2] Najvažnija primena unilateralne $\mathfrak{Z}$ transformacije je određivanje odziva LTI sistema sa nenultim početnim uslovima. Za rešavanje tih problema nije moguće koristiti bilateralnu $\mathfrak{Z}$ transformaciju jer ne poznajemo niti pobudu niti stanje sistema (izuzev početnih uslova) za $k < 0$.

[2] Kako što se definiše i dvostrana Laplasova trasformacija (sa integralom od $-\infty$ do $+\infty$) za funkcije koje nisu kauzalne, tako možemo definisati i dvostranu ili bilateralnu $\mathfrak{Z}$ transformaciju po indeksu niza brojeva koji prolazi skupom $\mathbb{Z}$

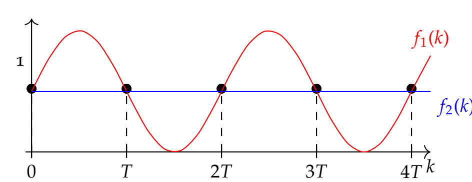
$$\mathfrak{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} \ .$$

U nastavku ćemo posmatrati isključivo kauzalne signale i jednostranu $\mathfrak{Z}$ transformaciju.

**Konvergencija**. Sama vrednost reda $\mathfrak{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$ može biti konačna ili beskonačna. Izraz (4) predstavlja Lorenov red, pa se $\mathfrak{Z}\{f(k)\}$ može odrediti samo za one vrednosti kompleksne promenljive $z$ za koje Lorenov red konvergira, i taj skup vrednosti naziva se oblast konvergencije $\mathfrak{Z}$ transformacije.

**Notacija.** U nastavku će se signali obeležavati malim slovom, pri tome kontinualni vremenski signali kao $f(t)$, a diskretni vremenski signali kao $f(kT)$ ili samo kraće $f(k)$ kada nam vrednost periode odabiranja $T$ nije od interesa već samo redni broj trenutka $k$. Transformacije signala će se obeležavati velikim slovom, tako je Laplasova transformacija kontinualnog signala $F(s)$, a $\mathfrak{Z}$ transformacije vremenski diskretnog signala $F(z)$.

Na slici 2 prikazana su dva različita vremenska signala $f_1$ i $f_2$ mogu imati isti diskretni ekvivalent $f^*$, a samim tim i iste $\mathfrak{Z}$ transformacije




Slika 2: Vremenska diskretizacija dva različita signala $f_1$ i $f_2$ u vremenskom domenu, koji daju isti diskretan signal, i imaju istu $\mathfrak{Z}$ transformaciju

## 2 *Inverzna $\mathfrak{Z}$ transformacija*

Nakon upotrebe $\mathfrak{Z}$ transformacije za analizu i obradu signala, kao i za analitičko računanje odziva diskretnih sistema u kompleksnom domenu, potrebno je dobijeni, rezultujući signal u $\mathfrak{Z}$ domenu $F(z)$ vratiti u vremenski diskretni domen $f(k)$. Transformacija koja nam to omogućava naziva se inverzna $\mathfrak{Z}$ transformacija

$$\mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(k)\ . \tag{5}$$

**Definicija 2.** (*Inverzna $\mathfrak{Z}$ transformacija*) Za signal čija je $\mathfrak{Z}$ transformacija $F(z)$, postoji jedinstven vremenski signal $f(k)$ koji se računa primenom inverzne $\mathfrak{Z}$ transformacije, u oznaci $\mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\}$,

$$f(k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma F(z)z^{k-1}dz\ , \tag{6}$$

gde se kontura $\Gamma$ nalazi u oblasti konvergencije $\mathfrak{Z}$ transformacije.

Analitičko računanje konturnih integrala nije jednostavno, te se u praksi koriste druge metode određivanja inverzne $\mathfrak{Z}$ transformacije.

***Napominjemo, inverznom $\mathfrak{Z}$ transformacijom dobija se vremenski diskretan signal $f(k)$.***

## 3 *$\mathfrak{Z}$ transformacija elementarnih signala*

U nastavku će biti prikazana $\mathfrak{Z}$ transformacija elementarnih signala, kao što su jedinični impulsni signal, step (Hevisajd) signal, eksponencijalna funkcija.

**Primer 1.** *Impulsni signal.* Impulsni jedinični signal je $\delta(k) = 0$, za $k \neq 0$, zbog čega je važi da je

$$\mathfrak{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k} = z^0 = 1 \tag{7}$$

Napominjemo da se suma geometrijskog reda, za $|q| < 1$,računa po izrazu

$$\sum_k^\infty aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

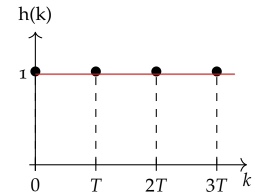
Upravo ovaj izraz je moguće primeniti za određivanje $\mathfrak{Z}$ transformacije, pri čemu mora biti ispunjen uslov $|q| < 1$ što će odrediti i oblast konvergencije $\mathfrak{Z}$ transformacije signala.

**Primer 2.** *Step (Hevisajdov) signal.* Kauzalan jedinični signal prikazan na slici 3 se opisuje diskretnom funkcijom

$$h(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \geq 0 \\ 0 & , \quad k < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Ʒ transformaciju možemo računati po definiciji,

$$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \tag{9}$$



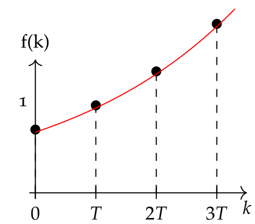

Slika 3: Diskretni Hevisajdov signal

**Primer 3.** *Eksponencijalni signal.* Kauzalni diskretni eksponencijalni signal prikazan na slici 4 se opisuje diskretnom funkcijom

$$f(k) = \begin{cases} a^k & , \quad k \geq 0 \\ 0 & , \quad k < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Ʒ transformaciju možemo računati po definiciji,

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{z}^k = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \tag{11}$$




Slika 4: Diskretni eksponencijalni signal

## 4 *Osnovne osobine Ʒ transformacije*

U nastavku ćemo navesti i dokazati najvažnije osobine Ʒ transformacije na osnovu kojih se pojednostavljuje njena primena.

**Osobina 1.** *Linearnost.* Ʒ transformacija je linearna operacija, koja podrazumeva osobinu aditivnosti i homogenosti. Ʒ transformacija linearne kombinacije signala jednaka je odgovarajućoj linearnoj kombinaciji Ʒ transformacija.

$$\mathcal{Z}\{a_1 f_1(k) + \cdots + a_n f_n(k)\} = a_1 F_1(z) + \cdots + a_n F_n(z) \tag{12}$$

gde je $f_i(k)$ bilo koji diskretni signal, a $a_i$ proizvoljan realni ili kompleksni broj.

Studija sistema sa više ulaza je odličan primer za primenu ove osobine. Podsećamo, tada se odziv na svaki ulaz računa ponaosob, a ukupni odziv dobija kao zbir pojedinačnih odziva

**Dokaz.** Linearnost Ʒ transformacije sledi neposredno na osnovu definicije, kao posledica linearnosti operatora sume,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a_1 f_1(k) + \cdots + a_n f_n(k)\} &\overset{\text{(po definiciji)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \{a_1 f_1(k) + \cdots + a_n f_n(k)\} z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \{a_1 f_1(k) z^{-k} + \cdots + a_n f_n(k) z^{-k}\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_1 f_1(k) z^{-k} + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} a_n f_n(k) z^{-k} \\
&= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k} + \cdots + a_n \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) z^{-k} \\
&= a_1 F_1(z) + \cdots + a_n F_n(z)
\end{aligned}$$

**Osobina 2.** *Vremensko pomeranje.*

**Osobina 2a.** *Kašnjenje signala.* $\mathfrak{Z}$ transformacija može se primeniti na signal koji kasni, tj. promenljiva $z^{-n}$ može se interpretirati kao operator kašnjenja za $n$-perioda,

$$\mathfrak{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z)\ . \tag{13}$$

**Osobina 2b.** *Prednjačenje signala.* $\mathfrak{Z}$ transformacija može se primeniti na signal koji prednjači za $n$ perioda, tj. promenljiva $z^n$ može se interpretirati kao operator prednjačenja za $n$-perioda pod uslovom da su svi početni uslovi jednaki nuli,

$$\mathfrak{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} f(k)\ . \tag{14}$$

Član $z^n \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} f(k)$ u izrazu (14) predstavlja početne uslove. Početni uslovi se definišu kao vrednost signala u prvih $n$ vremenskih trenutaka.

**Dokaz.** Date osobine se pokazuju na osnovu definicije $\mathfrak{Z}$ transformacije. Tvrđenje o $\mathfrak{Z}$ transformaciji signala koji kasni (13) sledi iz

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}\{f(k-n)\} &\overset{\text{(po definiciji)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n)z^{-k} \\
&\overset{\substack{\text{(smena } m=k-n)\\ \text{(tj. } k=m+n)}}{=} \sum_{m=-n}^{\infty} f(m)z^{-(m+n)} \\
&\overset{\substack{\text{(zbog kauzalnosti)}\\ (f(-n)=\cdots=f(-1)=0)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m}z^{-n} \\
&= z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} = z^{-n}F(z)\ .
\end{aligned}$$

Izraz (14) kojim se opisuje osobina prednjačenja sledi iz

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f(k+n)\} &\overset{\text{(po definiciji)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n)z^{-k} \\
&\overset{\substack{\text{(smena } m = k+n\text{)} \\ \text{(tj. } k = m-n\text{)}}}{=} \sum_{m=n}^{\infty} f(m)z^{-(m-n)} \\
&\overset{\text{(proširimo brojač)}}{=} z^n \left[ \sum_{m=n}^{\infty} f(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{n-1} f(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m)z^{-m} \right] \\
&= z^n \left[ \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m)z^{-m} \right] \\
&= z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k} \,.
\end{aligned}
$$

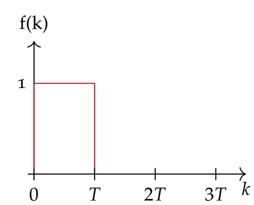
**Primer 4.** Naći $\mathcal{Z}$ transformaciju signala sa slike 5.

*Rešenje:*

Signal koji je prikazan na slici je razlika dve Hevisajdove funkcije, $f(k) = h(k) - h(k-1)$. Ukoliko premenimo osobinu $\mathcal{Z}$ transformacije za signal koji kasni i osobinu linearnosti dobijamo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{h(k) - h(k-1)\} &= \frac{z}{z-1} - z^{-1}\frac{z}{z-1} \\
&= \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1} \\
&= 1 \,.
\end{aligned}
$$

Može se primeniti da je $\mathcal{Z}$ transformacija signala sa slika jednaka $\mathcal{Z}$ transformaciji Dirakove impulsne funkcije iz primera 1. To je posledica što ova dva signala imaju iste vrednosti u trenucima odabiranja. Podsećamo, da je za izračunavnje $\mathcal{Z}$ transformacije, bitno poznavanje vrednosti signala samo u trenucima odabiranja, a vrednosti između nas ne zanimaju. Tako da ova dva signala imaju istu $\mathcal{Z}$ transformaciju.



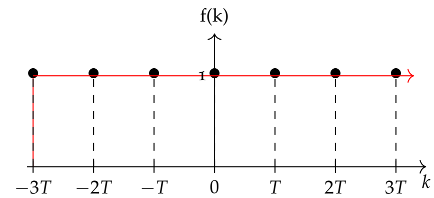
Slika 5: Signal iz primera 4

**Primer 5.** Naći $\mathcal{Z}$ transformaciju signala sa slike 6.

*Rešenje:*

Signal koji je prikazan na slici je Hevisajdova funkciji koja prednjači za tri periode, pa ga možemo zapisati kao $f(k) = h(k+3)$. Ukoliko primenimo osobinu $\mathcal{Z}$ transformacije za signale koji prednjače dobijamo

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Z}\{h(k+3)\} &= z^3\mathfrak{Z}\{h(k)\} - z^3[z^0 + z^{-1} + z^{-2}] \\
&= z^3[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2+z+1}{z^2}] \\
&= z^3\frac{z^3 - z^3 - z^2 - z + z^2 + z + 1}{z^2(z-1)} \\
&= \frac{z}{z-1} \; .
\end{aligned}
$$




Slika 6: Signal iz primera 5

Lako se može primetiti da je $\mathfrak{Z}$ transformacija signala sa slika jednaka $\mathfrak{Z}$ transformaciji Hevisajdove funkcije iz primera 2. To je posledica definicije primenjene $\mathfrak{Z}$ transformacije koja je definisana samo za kauzalne signale.

**Osobina 3.** *Granične teoreme.* Nekada je potrebno odrediti početnu ili krajnju (asimptotsku) vrednost signala, odnosno vrednost signala $f(k)$ za $k = 0$ i $k \to \infty$ pri čemu je poznata njegova $\mathfrak{Z}$ transformacija $F(z)$. Te vrednosti se mogu izračunati primenom graničnih teorema koje ne zahteva određivanje inverzne $\mathfrak{Z}$ transformacije.

**Osobina 3a.** *Prva ili početna granična teorema* Ukoliko je $F(z) = \mathfrak{Z}\{f(k)\}$, i ukoliko postoji $f(0)$ tada je

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) \; . \tag{15}$$

**Osobina 3b.** *Druga ili krajnja granična teorema* Ukoliko je $F(z) = \mathfrak{Z}\{f(k)\}$, i ukoliko postoji $f(\infty)$ odnosno ukoliko postoji vrednost signala $f(k)$ kada promenljiva $k$ neograničeno raste tada je,

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z) \; . \tag{16}$$

**Dokaz.** Da bi dokazali *prvu graničnu teoremu* zapisaćemo $\mathfrak{Z}$ transformaciju signala $f(k)$ po definiciji

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \\ &= f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \cdots \end{aligned}$$

odakle se vidi da $\mathfrak{Z}$ transformacija signala teži nuli za velike vrednosti kompleksne promenljive $z$, i sledi da je $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = f(0)$.

**Dokaz.** Da bi dokazali *drugu graničnu teoremu* i tvrđenje izraza (16) zapisaćemo sledeće dve sume

$$\sum_{k=0}^{m} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + \cdots + f(m)z^{-m} \tag{17}$$

i drugu u kojoj imamo signal koji kasni $f(k-1)$

$$\sum_{k=0}^{m} f(k-1)z^{-k} = 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \cdots + f(m-1)z^{-(m-1)} \tag{18}$$

Oduzimanjem prethodna dva izraza (sume) (17) i (18) dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m} f(k-1)z^{-k} &= f(0) + f(1)z^{-1} + \cdots + f(m-1)z^{-(m-1)} + f(m)z^{-m} \\ &\quad - \left[ f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \cdots + f(m-1)z^{-m} \right] \\ &= f(0)(1 - z^{-1}) + f(1)z^{-1}(1 - z^{-1}) + f(m-1)z^{-(m-1)}(1 - z^{-1}) + f(m)z^{-m} \\ &= (1 - z^{-1})(f(0) + f(1)z^{-2} + f(1)z^{-2} + \cdots + f(m-1)z^{-(m-1)}) + f(m)z^{-m} \end{aligned}$$

odnosno

$$\sum_{k=0}^{m} f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m} f(k-1)z^{-k} = (1 - z^{-1})(f(0) + f(1)z^{-2} + f(1)z^{-2} + \cdots) + f(m)z^{-m}$$

ukoliko $z \to 1$, sledi

$$\lim_{z\to 1} \left[ \sum_{k=0}^{m} f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m} f(k-1)z^{-k} \right] = f(m)\,.$$

jer članovi $(1 - z^{-1}) \to 0$, a član $z^{-m} \to 1$. Kada uradimo $\lim m \to \infty$ obe strane prethodnog izraza, granica sume sada dobija vrednost $\infty$,

$$\lim_{z\to 1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} \right] = \lim_{m\to\infty} f(m)\,. \tag{19}$$

Sume na levoj strani izraz (4) predstavljaju definicije $\mathfrak{Z}$ transformacije,

$$\lim_{z\to 1} \left[ F(z) - F(z)z^{-1} \right] = \lim_{m\to\infty} f(m)\,.$$

odnosno

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})F(z)\,.$$

Napominjemo, da graničnu teoremu možemo upotrebiti samo kada granična vrednost signala postoji, odnosno kada se polovi kompleksnog lika nalaze unutar ili na jediničnom krugu, u suprotnom može se dobiti rezultat, koji nema smisla.

**Primer 6.** Dat je signal $f(k) = e^{3k}h(k)$. Kada $k \to \infty$ jasno je da signal nema konačnu vrednost, već je njegova vrednost $\infty$. Ukoliko primenimo graničnu teoremu u kompleksnom $\mathfrak{Z}$ domenu, to bi značilo $\lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z) = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{z}{z-3} = 0$ što je očigledno pogrešan rezultat. Pol kompleksnog lika signala je $p = 3$, koji je van jedinične kružnice.

**Definicija 3.** (*Konvolucija diskretnih signala.*) Konvolucija diskretnih signala $f$ i $g$ definiše se

$$(f \star g)(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)g(k-i) \,. \tag{20}$$

Kada su signali koji koristimo kauzalni signali, tad se konvolucija kauzalnih signala $f$ i $g$ definiše

$$(f \star g)(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i)g(k-i) \,. \tag{21}$$

Kao i u slučaju konvolucije vremenski kontinualnih signala, može se pokazati da je konvolucija komutativna operacija

$$f \star g = g \star f \tag{22}$$

kao i asocijativna i distributivna u odnosu na sabiranje

$$\begin{aligned} f \star (g \star h) &= (f \star g) \star h \\ f \star (g + h) &= (f \star g) + (f \star h) \end{aligned} \tag{23}$$

**Osobina 4.** Ʒ *transformacija konvolucije signala.* Ukoliko su $f$ i $g$ kauzalni diskretni signali, tada je

$$\mathfrak{Z}\{(f \star g)(k)\} = \mathfrak{Z}\{f(k)\}\mathfrak{Z}\{g(k)\} = F(z)G(z) \tag{24}$$

**Dokaz.** Primenom definicije Ʒ transformacije nad definicijom konvolucije dva diskretna signala sledi

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\{(f \star g)(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} f(i)g(k-i)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)z^{-k} \\ &\overset{\substack{\text{(smena } m = k-i) \\ \text{(tj. } k = m+i)}}{=} \sum_{m=-i}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(m)z^{-m}z^{-i} \\ &\overset{\substack{\text{(zbog kauzalnosti} \\ \text{(brojač } m = 0)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} g(m)z^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i} \\ &= G(z)F(z) = F(z)G(z) \end{aligned}$$

odakle se vidi da $\mathfrak{Z}$ transformacija signala teži nuli za velike vrednosti kompleksne promenljive $z$, i sledi da je $\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0)$

**Osobina 5.** *Kompleksno pomeranje* Ukoliko je $F(z)$ $\mathfrak{Z}$ transformacija ods $f(k)$, tada je

$$\mathfrak{Z}\{f(k)e^{-akT}\} = F(ze^{aT}) \tag{25}$$

**Dokaz.** Primenom definicije $\mathfrak{Z}$ transformacije dobijamo

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\{f(k)e^{-akT}\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-akT}z^{-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(e^{aT}z)^{-k}\\ &= F(ze^{aT})\end{aligned}$$

**Primer 7.** Dat je vremenski kauzalan signal $f(t) = e^{-at}h(t)$. Naći njegovu $\mathfrak{Z}$ transformaciju posle diskretizacije sa periodom $T$.

*Rešenje:*

Posle diskretizacije ovaj signal postaje diskretan oblika $f(k) = e^{-akT}h(kT)$. Na ovakav signal može se primeniti osobina kompleksnog pomeranja, ukoliko se podsetimo da je $\mathfrak{Z}\{h(kT)\} = \frac{z}{z-1}$, tada je

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\{e^{-akT}h(kT)\} &= \frac{ze^{aT}}{ze^{aT}-1}\\ &= \frac{z}{z-e^{aT}}\end{aligned}$$

## 5 *Diskretni sistemi*

Sistem opisujemo kao proces kojim se vrši transformacija ulaznog signala ili pobude u izlazni signal ili odziv sistema. Diskretni sistem definišemo kao proces koji transformiše diskretni ulazni signal u diskretni izlazni signal,

$$y(k) = \mathfrak{T}\{u(k)\} \tag{26}$$

gdje je sa $u(k)$ označen ulazni, sa $y(k)$ izlazni signa, a sa $\mathfrak{T}$ označen operator kojim LTI sistem transformiše pobudni signal u signal odziva.

Linearni, vremenski invarijantni (LTI) diskretni sistemi se opisuju *diferencnim* jednačinama,

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j u(k-i) \ \ , a_0 = 1 \tag{27}$$

gde su $a_i$ i $b_j$ realne konstante. Određivanje odziva diskretnog sistema na pobudu proizvoljnog oblika direktnim rešavanjem u domenu diskretnog vremena u opštem slučaju nije jednostavan problem. LTI sistem se u potpunosti mogu okarakterisati i preko njegovog odziva na jedinični impuls, koji nazivamo impulsnim odzivom. Ukoliko je poznat impulsni odziv, odziv na pobudu proizvoljnog oblika se može dobiti pomoću operacije konvolucije.

*Impulsni odziv* $g(k)$ vremenski invarijantnog sistema se definiše kao odziv na jedinični impulsni signal,

$$g(k) = \mathfrak{T}\{\delta(k)\}. \tag{28}$$

Poznavajući impulsni odziv sistema, matematičkom operacijom koja je označena kao konvolucija, moguće je odrediti odziv LTI sistema na pobudni signal proizvoljnog oblika.

Na osnovu definicije idealno odbirkovanog signala, zapisaćemo signal pobude na sledeći način.

$$u(k) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)\delta(k-i) \tag{29}$$

Zamenom izraza (29) u izraz diskrtenog sistema (26) i na osnovu osobine linearnosti sistema dobijamo

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathfrak{T}\{\sum_{i=0}^{k} u(i)\delta(k-i)\} \\ &= \sum_{i=0}^{k} u(i)\mathfrak{T}\{\delta(k-i)\} \\ &= \sum_{i=0}^{k} u(i)g(k-i) \end{aligned} \tag{30}$$

Poredeći dobijeni izraz (30) sa definicijom konvolucije dva diskretna signala (21), vidimo da je odziv diskretnog vremenskog sistema jednak konvoluciji impulsnog odziva sistema i pobudnog signala,

$$y(k) = g(k) \star u(k) \ . \tag{31}$$

Na osnovu osobine ʒ transformacije nad konvolucijom dva signala

$$Y(z) = G(z)U(z) \ , \tag{32}$$

gde je $U(z)$ $\mathfrak{Z}$ transformacija pobudnog signala $u(k)$, a $G(z)$ je $\mathfrak{Z}$ transformacija impulsnog odziva $g(k)$, odnosno *funkcija prenosa sistema*. Primenom inverzne $\mathfrak{Z}$ transformacije, odziv linearnog diskrtenog sistema možemo da odredimo kao

$$y(k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathfrak{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\} \; . \tag{33}$$

*Funkcija prenosa diskrtenog sistema.* Poznavajući kako se računa odziv sistema u kompleksnom $z$ domenu primenom $\mathfrak{Z}$ transformacije nad konvolucijom (32), zaključujemo da je funkcija prenosa diskretnog sistema količnik $\mathfrak{Z}$ transformacije odziva i $\mathfrak{Z}$ transformacije signala pobude,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \; . \tag{34}$$

Kako se diskretni sistemi opisuju rekuzivnim (diferencnim) jednačinama koja opisuje zavisnost ulaznog i izlaznog signala, direktnom primenom $\mathfrak{Z}$ transformacije uz nulte početne uslove dobijamo

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M} b_j u(k-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(k-i) \Big/ \; \mathfrak{Z}$$

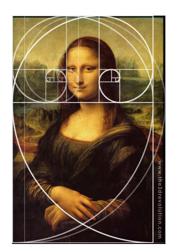
$$Y(z) = \sum_{j=0}^{M} b_j U(z) z^{-j} - \sum_{i=1}^{N} a_i Y(z) z^{-i} \tag{35}$$

Količnik $\mathfrak{Z}$ transformacija ulaznog signala i izlaznog signala, odnosno $Y(z)$ i $U(z)$ opisuje funkciju prenosa koja je sada racionalna funkcija, odnosno količnik dva polinoma

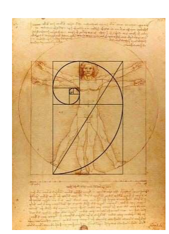
$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \; . \end{aligned} \tag{36}$$

**Primer 8.** Naći zatvorenu analitičku formu za Fibonačijev niz brojeva. [3]

[3] Na više zanimljivosti o Fibonačijevim brojevima, čitaoca upućujemo na knjigu „Da Vinčijev kod”, Den Braun, poglavlje 20.



Slika 7



Slika 8

*Rešenje:*

Fibonačijev niz brojeva karakteriše da je vrednost svakog elementa niza jednaka sumi prethodna dva elementa, s tim što su prva dva elemta niza 0 i 1. Stoga, ovaj problem možemo da opišemo kao diferencnu jednačinu drugoga reda,

$$f(k+2) = f(k+1) + f(k) \; , \quad f(0) = 0, f(1) = 1 \tag{37}$$

Primenom $\mathfrak{Z}$ transformacije na izraz (37) dobijamo

$$z^2 F(z) - z^2 (f(0) + f(1) z^{-1}) = zF(z) - zf(0) + F(z) \; , \tag{38}$$

i ukoliko uvrstimo početne uslove $f(0) = 0, f(1) = 1$

$$F(z)(z^2 - z + 1) = z \;\rightarrow\; F(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}\,. \tag{39}$$

Faktorisanjem dobijenog izraza na parcijalne razlomke

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{z}{z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right]. \tag{40}$$

i primenom tabličnog izraza za inverznu $\mathfrak{Z}$ transformaciju [4] dobijamo analitički zapis u vremenkom domenu

[4] Tablični izraz $\mathfrak{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right). \tag{41}$$

Dobijena vrednosti u eksponencijalnoj funkciji $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ poznata je u literaturi kao konstanta zlatnog preseka.

## Tabica Laplasove transformacije, Z-transformacije i modifikovane Z-transformacije

| $F(s)$ | $f(t)$ | $F(z)$ | $F(z,m)$ |
|---|---|---|---|
| $e^{-kTs}$ | $\delta(t-kT)$ | $z^{-k}$ | $z^{m-1-k}$ |
| 1 | $\delta(t)$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{s}$ | 1 | $\frac{z}{z-1}$ | $\frac{1}{z-1}$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ | $\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}$ |
| $\frac{1}{s^{k+1}}$ | $\frac{1}{k!}t^k$ | $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}(\frac{z}{z-e^{-aT}})$ | $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}(\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}})$ |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ | $\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$ |
| $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ | $\sin\omega_0 t$ | $\frac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$ | $\frac{z\sin m\omega_0 T+\sin(1-m)\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$ |
| $\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ | $\cos\omega_0 t$ | $\frac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$ | $\frac{z\cos m\omega_0 T-\cos(1-m)\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$ |
| $\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ | $e^{-at}\sin\omega_0 t$ | $\frac{ze^{-aT}\sin\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$ | $\frac{[z\sin\omega_0 mT+e^{-aT}\sin(1-m)\omega_0 T]}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}e^{-amT}$ |
| $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ | $e^{-at}\cos\omega_0 t$ | $\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$ | $\frac{[z\cos\omega_0 mT-e^{-aT}\cos(1-m)\omega_0 T]}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}e^{-amT}$ |

| $f(k)$ | $F(z)$ | $f(k)$ | $F(z)$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(k)$ | 1 | $h(k)$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $a^k h(k)$ | $\frac{z}{z-a}$ | $ka^k h(k)$ | $\frac{az}{(z-a)^2}$ |
| $\sin\theta k$ | $\frac{z\sin\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}$ | $\cos\theta k$ | $\frac{z(z-\cos\theta)}{z^2-2z\cos\theta+1}$ |