II МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ

⑦ 1. Нелинеаран временски ~~дискретан~~ континуалан модел

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \qquad x(0) = x_0$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_m \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_m \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_m \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{bmatrix}$$

u- означено њима спољ. утицаје на систем, од њих зависи понашање система

2. Линеаран -||-

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1m} \\ b_{n1} & b_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

x - променљиве стања (најмањи скуп променљивих помоћу којих се може описати понашање система)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{r1} & c_{rn} \end{bmatrix}_{r\times n}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{1m} \\ d_{r1} & d_{rm} \end{bmatrix}_{r\times m}$$

3. Линеаран временски дискретан модел

$$x(k+1) = E\,x(k) + F\,u(k) \qquad E = n\times n, \quad \Gamma = n\times m$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad C = r\times n, \quad D = r\times m$$

4. Пример ф-је преноса 2. реда:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

5. -||- дискретне 1. реда:

$$\cancel{W}(z) = \frac{1}{z+2}$$

7. ARX модел

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + \nu(k)$$

u – улази

y – излази

ν – бели шум

8. ARMAX модел

$$A(z)y(k) = Bzu(k) + C(z)\nu(k)$$

9. диф. ј-на која их описује:

- $y(k) + a_1 y(k-1) + \dots a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) + \nu(k)$
- $y(k) + a_1 y(k-1) + \dots a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) + \nu(k) + c_1 \nu(k-1) + \dots + c_r \nu(k-r)$

10. пример диференцијалне ј-не 2-реда:

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = 0$$

11. пример диференцне -ll-:

$$y(k) + 2y(k-1) + 3y(k-2) = u(k)$$

8

1.

2

3

4

5

6

a

7

b

g

⑧ Нелинеаран математички модел

1. Како изгледа, матрични облик?

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

концепт простора стања

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_r \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

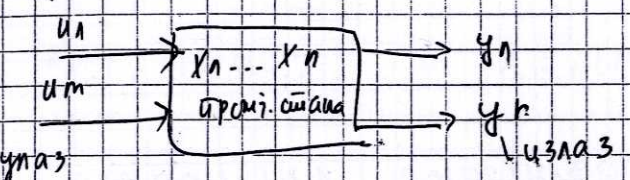
↓ разлози:

- одређ диф ј-на I реда је лакше него виших
- укључивање почетних услова је лако
- овакав приступ се може применити на временски променљиве, стохастичке и дискретне моделе...

2. Пример нелинеарног модела

$y = au + b$

3. Мултиваријабилни систем



4. Како се описује статички модел?
- алгебарским ј-нама

5. -ıı- динамички модел?
- диф. ј-нама

6. Шта су променљиве стања?
- описују понашање система, једнозначно одређују стање система, бирају се пром. које одређују закони физике

7. Зашто је дискретизација битна?
- то је процес квантовања континуалног сигнала у временски дискретан.
- битна је како бисмо измерене податке из PC могли довести у рачунар

8. Шта се добија трансф. Шшет реда?
- скуп диф. ј-на првог реда

$$y = y^{i-1} \quad , i = 1 \dots n$$

9. Линеаран математички модел и трансформације

1. Пример линеарног модела

$$y = au_1 + bu_2$$

$$y = f(u) = 2u$$

2. Пример нелинеарног модела

$$y = au + b$$

3. Векторски запис и развијање лин. модела

бр. пројзаћнњ, линеаризован је без (t)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + D\hat{u}(t)$$

$A = n \times n \quad C = r \times n$

$B = n \times m \quad D = r \times m$

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = a_{11}\hat{x}_1 + \dots a_{1n}\hat{x}_n(t) + b_{11}\hat{u}_1(t) + \dots + b_{1m}\hat{u}_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{x}}_n(t) = a_{n1}\hat{x}_1 + \dots a_{nn}\hat{x}_n(t) + b_{n1}\hat{u}_1(t) + \dots + b_{nm}\hat{u}_m(t)$$

$$\hat{y}_1(t) = c_{11}\hat{x}_1 + \dots + c_{1n}\hat{x}_n(t) + d_{11}\hat{u}_1(t) + \dots + d_{1m}\hat{u}_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}_r(t) = c_{r1}\hat{x}_1(t) + \dots + c_{rn}\hat{x}_n(t) + d_{r1}\hat{u}_1(t) + \dots + d_{rm}\hat{u}_m(t)$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_r \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$$

4. Веза између физичких сигнала и сигнала у линеарном моделу

$$x_n(t) = \bar{x}_k + \hat{x}_k(t)$$
$$y_n(t) = \bar{y}_k + \hat{y}_k(t)$$
$$u_n(t) = \bar{u}_k + \hat{u}_n(t)$$

5. Особине линеарности

- суперпозиција: $y_1 + y_2 = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

  $f(u_1) = y_1 \quad f(u_2) = y_2$

- хомогеност: $m \cdot y_1 = f(m \cdot u) = m \cdot f(u)$, $f(u) = y_1$

- стационарност: $y(t-\tau) = f(u(t-\tau)) \quad y = f(u)$

+6 питања

(10) Линеарне особине

1. Које су особине и математички их описати?
   - има изнад

2. Пример линеарног и нелинеарног
   -||-

3. Шта је радна тачка?

Радна тачка је описана номиналним ~~[illegible]~~ вредностима и пром. стања
У околини р.т модел је линеаран

Ли. модел се линеариз. везује за р.т. што је стање система описано номин. вредн. улаза $\bar{u}$, излаза $\bar{y}$ и променљивих стања $\bar{x}$

4. Који побудни сигнали постоје и зашто су битни?

• Примена особина линеарних модела је веома корисна за анализу понашања лин. модела побуђеног сложеним улазним сигналом.
Тада се анализа своди на анализу понашања на појединачне улазе и сваки од улаза се може представити сумом „елементарних сигнала"

(11) Линеаризација модела

1. Пример нелинеарне диф. ј-не 2. реда:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 8x^3 = mg + f(t)$$

2. Пример линеарне диф. ј-не II реда:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = 0$$

3. Кораци линеаризације

1. Одредимо р.т.
2. Све улазе, излазе и пром. стања напишемо као суму инкременталних и номиналних вредности
3. Све нелинеарне чланове заменимо са прва два сабирка Тејлоровог реда
4. Скратимо константне чланове
5. Дефинишемо поч. вредн. инкрем. вр.

$$\hat{x} = x(0) - \bar{x}$$

4. Чиме је одређена р.т?

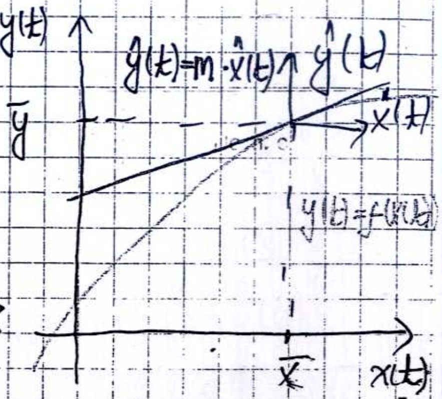
- номиналним вредностима u, y и x

5. Веза физичких величина код линеаризованог модела?

$x_k(t) = \bar{x}_k + \hat{x}_k(t)$

$y_k(t) = \bar{y}_k + \hat{y}_k(t)$

$u_k(t) = \bar{u}_k + \hat{u}_k(t)$



6. Објаснити графичку представу?

- уколико посматрамо ф-ју једне пром., приказано је на графику, р.т. је место у коме формирамо тангенту на ту криву. У околини р.т добијамо солидно поклап. линеарног са нелинеарним моделом

(12) Линеаризација модела у простору стања

7. Објаснити аналитички поступак и извести

- треба написати цео поступак линеар.
- Тејлоров ред су 1, 2 и више промењљивих

нелинеарну ф-ју развијамо у Тејлоров ред у околини $\bar{x}$:

$$y(t) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\Big|_{\bar{x}} \frac{(x(t)-\bar{x})}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{\bar{x}} \frac{(x(t)-\bar{x})^2}{2!} + \dots$$

$$y(t) \approx f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\Big|_{\bar{x}} (x(t)-\bar{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\hat{y}(t) = a\hat{x}(t) \quad , \quad a = \frac{df}{dx}\Big|_{\bar{x}}$$

1. Временски дискретан модел

$x(k+1) = E\,x(k) + F\,u(k)$

$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k)$

2. Нелинеаран временски дискретан

$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$

$y(k) = g(x(k), u(k), k)$

$x(0) = x_0$, $k \equiv kT$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

3. Пример линеаризације

$y(t) = a u(t) + b$

$y(t) = \bar{y}$ $\wedge$ $u(t) = \bar{u}$

$\bar{y} = a\bar{u} + b$

$y(t) = \bar{y} + \hat{y}(t)$ $\wedge$ $x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t)$

$\cancel{\bar{y}} + \hat{y}(t) = a(\cancel{\bar{u}} + \hat{u}(t)) \cancel{+b} \Rightarrow \hat{y}(t) = a\hat{u}(t)$

4. Радна тачка

~~има~~

-ll-

5. Развој у Тејлоров ред

-ll-

13. Временски дискретни модели
- сигнали се дискретизују по времену и нивоу

1. Шта је одабирач?
- компонента која врши квантовање по времену

2. Матем. запис поворке сигнала

$r^*(t) = r(kT)\cdot\delta(t-kT), \quad k=1,2\ldots$

$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot\delta(t-kT)$ $\Big\rangle$ квантовање по времену врши одабирач

3. Чему служи коло задршке 0 реда?
- омогућава да дискр. вредности остану непромењене током трајања једне периоде ✓

4. Формула за коло задршке 0-тог реда:

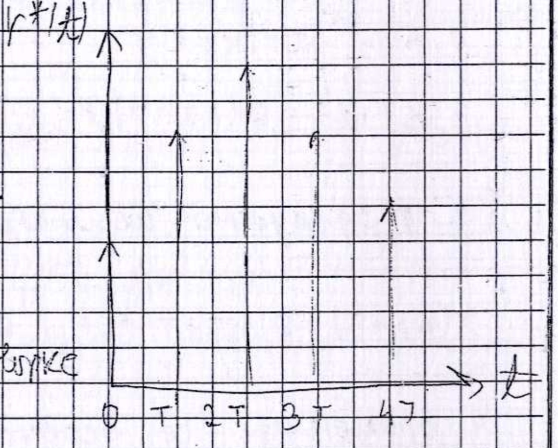
$g_0(t) = h(t) - h(t-T) \Rightarrow G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}$ ✓

5. Формула за поворку сигнала

$r^*(t) = \begin{cases} r(kT), & t=kT \\ 0, & t\neq kT \end{cases} \quad k=1,2\ldots$

$R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot e^{-kTs}$ ✓

комплексни лик поворке одбирка



поворка импулса

6. Теорема о одабирању
- Ако континуалан сигнал f(t) не садржи хармонике у подручју учестаности, онда се он може описати вредностима удаљеним за периоду $T = 0,5\,\frac{2\pi}{\omega_0}$

7. Израчунати периоду одабирања, ако је дата фрекв.

$\frac{2\pi}{2\pi\nu_0} = \frac{1}{\nu_0}$

$T = 0,5\,\frac{2\pi}{\omega_0}$

$T = 0,5\,\frac{1}{\nu_0}$

14. -II- у простору стања добијање модела

(1) Написати у матричном облику

$x(k+1) = Ex(k) + Fu(k)$

$y(k) = Cx(k) + Du(k)$

(2.) На основу континуалног модела извести одзив за дискретан модел

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

1. посматрано $u \Rightarrow t = kT$ тренутку

$$x(kT) = \Phi(kT)x_0 + \int_0^{kT} \Phi(kT-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

2. -II- $t = kT + T$

$$x(kT+T) = \Phi(kT+T)x_0 + \int_0^{kT} \Phi(kT+T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

3. раздвајамо интеграл

$$x(kT+T) = \Phi(kT+T)x_0 + \int_0^{kT} \Phi(kT-\tau)Bu(\tau)d\tau + \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

4. примењује се особина $\Phi(a+b) = \Phi a \cdot \Phi b$

$$x(kT+T) = \Phi T\left(\Phi(kT)x_0 + \int_0^{kT} \Phi(kT-\tau)Bu(\tau)d\tau\right)$$

$$+ \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

5. $x(kT+T) = \Phi(T)x(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)d\tau\right)Bu(kT)$

6. $z = \tau - kT$

$$\int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)d\tau = \int_0^T \Phi(T-z)dz$$

7. $y = T - z$

$$\int_0^T \Phi(T-z)d\tau = \int_0^T \Phi(y)dy \Rightarrow E = \Phi(T), \; F = \left(\int_0^T \Phi(t)dt\right)B$$

$$\Rightarrow x(kT+T) = \Phi(T)x(kT) + \left(\int_0^T \Phi(t)dt\right)Bu(kT)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$x(1) = Ex(0) + Fu(0)$

$x(2) = Ex(1) + Fu(1)$

...

③ Како се рачуна одзив?

$x(k+1) = Ex(k) + Fu(k)$

$y(k) = Cx(k) + Du(k)$

Вредности променљивих стања се могу израчунати рекурзивно на основу познавања $x(0)$ и вредности улаза у свим тренуцима $t = kT$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

④ Које су претпоставке уведене?

1. улазни сигнали $u_i(kT)$ $k = 1, 2 \ldots$ констант. током периоде одабир..
2. излази се рачунају само у $t = kT$ тренуцима

⑤ Ако се промени периода одабирања T, да ли се добија другачији модел?

- нећемо, само ће једна од периода утицати на лошу прецизност, али не и на тачност доброг понашања

15. Дискретна ф-ја преноса

1) дефиниција

- однос комплексних ликова временски дискретизованих сигнала излаза и улаза

2) Нацртати представу дискретне ф-је преноса

$$U(z) \rightarrow \boxed{W(z)} \rightarrow Y(z)$$

3) Како математички изгледа

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

4) Шта је променљива z?

$z = e^{sT}$ → комплексна променљива

5) Како се у коду прави ф-ја преноса?

tf (P, Q) за FP

tf (P, Q, T) за DFP

6) Пример ф-је преноса II реда

$$W(z) = \frac{2z+1}{z^2+z+1}$$, степен имениоца одређује ред

7) Написати диф. ј-ну за тај пример

$$W(z^{-1}) = \frac{2 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} + z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$(1 + z^{-1} + z^{-2}) Y(z) = (2z^{-1} + z^{-2}) U(z)$$

$y(k)+y(k-1)+y(k-2)=2u(k-1)+u(k-2)$

⑯ Добијање ф-је преноса од ММУПС. Ф-ја преноса мултиваријабилног система.

① Дефиниција

- Однос Л.Т излазног и улазног сигнала уз претпоставку да су почетни услови нула и да је $u(t)=y(t)\equiv 0$, за $t<0$

② Цртеж са сигналима

$$U(s)\rightarrow \boxed{W(s)} \rightarrow Y(s)$$

③ Извести формулу за ф-ју преноса

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \quad / \mathcal{L}$$

$$sX(s)=AX(s)+BU(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}\cdot BU(s)$$

$$Y(s)=C\cdot X(s)+DU(s)$$

$$Y(s)=(C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B\cancel{U(s)}+D)U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=W(s)=C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B+D$$

④ Пример ф-је преноса II реда

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+3}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$s^2Y(s)+2sY(s)+3Y(s)=U(s) \quad / \mathcal{L}$$

⑤ диф. ј-на $\Rightarrow$

$$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)$$

#15 ⑧ Апериодични одзив

$\varepsilon \geq 1$, полови су реални и одзив апериодичан

⑨ Представа ф-је преноса са zpk

$$W(s) = K \cdot \frac{(s-p_1)\ldots(s-p_m)}{(s-t_1)\ldots(s-t_n)}$$

$p_1 \ldots p_m$ - нуле

$t_1 \ldots t_n \rightarrow$ полови

K - појачање

#14

Зашто је одзив два улаза једнак збиру појединачних одзива?

зато што је то према принципу суперпозиције

мултиваријабилни:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \ldots & G_{1m} \\ \vdots & & & \\ G_{r1} & G_{r2} & & G_{rm} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}$$

#9 ① Које су каракт. побуде и зашто су битне?

- Дираков сигнал, рампа и ~~[illegible]~~ уписају

- познавањем одзива система лакше долазимо до понашања модела побуђеног сложеним сигналом

② Од чега зависи понашање система?

- уколико посматрамо ф-ју преноса => зависи од полова

- -//- модел у развијеном облику => прем. стања

- понаш. система I реда је најједн. и ф-ја преноса која их описује је $G(s)=\frac{K}{1+Ts}e^{-\tau s}$

③ Алгоритам за снижавање реда:

$y_i = y^{(i-1)}$ $i=1\dots n$

④ Како дати улаз утиче појединачно на одзив

- принцип суперпозиције се односи и на понашање излаза модела где постоји већи бр. улаза.

- нпр. 2 улаза и 1 излаз

- прво одредимо како 1 улаз утиче на излаз, док је 2. улаз $=0$ и обрнуто

- сабирамо оба одзива и добијамо коначан одзив

⑤ Временски инваријантан и промењив

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad y(t) = C(t)x(t)+D(t)u(t)$$

инваријантан | варијантан

#13 ① Чему служи A/D и D/A конвертори?

A/D => измерене вредности из реалног система доводи у рачунар и преводи у дигиталне речи

D/A - ~~ондје~~ вредности који су излази управљ. програма, преводе се у физичке сигнале

Z трансф. поворке сигнала:

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot z^{-k}, \quad z=e^{sT}$$ - комплекс промењива

s - Лапласов оператор, T - период одабирања