$\mathfrak{Z}$-transformacija i inverzna $\mathfrak{Z}$ transformacija

Jelena Bulatović
Anja Buljević

$\mathfrak{Z}$ -transformacija predstavlja osnovno matematičko sredstvo u klasičnim metodama analize i projektovanja digitalnih sistema. Uspješno se primjenljuje u diskretnim stacionarnim sistemima sa unformnim procesom odabiranja. U slučaju diskretnih sistema sa više ulaza i izlaza, nelinearnih, nestacionarnih sa promjenljivom periodom odabiranja ova transformacija nije tako efikasna. $\mathfrak{Z}$ -transformacija omogućava primjenu efikasnih metoda sinteze sistema sa po jednim ulazom i jednim izlazom, a i većina savremenih metoda sinteze digitalnih filtara za potrebe digitalne obrade signala zasniva se na primjeni $\mathfrak{Z}$ -transformacije.

U nastavku biće dat kratak pregled definicija koje biti korištene pri rešavanju zadataka.

- Idealno odbirkovan signal

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

- Laplasova transformacija idealno odbirkovanog signala

$$F^*(s) = \mathcal{L}\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$$

- $\mathfrak{Z}$ transformacija diskretnog signala

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

Osnovni motiv za uvođenje $\mathfrak{Z}$ transformacije je prisustvo e^{-sT} u Laplasovoj transformaciji odbirkovanih signala

1. Kompleksni likovi nisu realne racionalne, već iracionalne funkcije

2. Budući da je e^{-sT} periodična funkcija po s, kompleksni lik $F^*(s)$ poseduje beskonačan broj kritičnih učestanosti (polova i nula) u s ravni, što nameće teškoće u nalaženju inverzne transformacije, tj. u određivanju povorke odbiraka $f^*(t)$ na osnovu kompleksnog lika $F^*(s)$.

1 Računanje $\mathfrak{Z}$ -transformacije

Za $\mathfrak{Z}$ -transformaciju se primenjuju nad diskretnim signalima i definiše se kao suma reda

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

Inverznom $\mathfrak{Z}$ transformacijom, dobija se povorka odbirka, odnosno diskretan signal.

$$\mathfrak{Z}^{-1}[F(z)] = f(kT)$$

Laplasova i njena inverzna transformacija su jednoznačne. Kompleksan lik $F(z)$ je jednoznačno određen povorkom $f^*(t)$, kao što je i $f^*(t)$ jednoznačno određena kompleksnim likom $F(z)$, ali $f(t)$ nije jednoznačno određen originalom $F(z)$. To je i fizički jasno, jer jednu istu povorku $f^*(t)$ može imati praktično neograničen skup različitih kontinualnih signala $f(t)$. Otuda kompleksni lik $F(z)$ sandrži informaciju samo o brojnim vrednostima signala $f(t)$ u trenucima odabiranja.

Primer 1. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju signala

a) $f(t) = \delta(t)$

b) $f(t) = h(t)$

Rešenje:

$\mathfrak{Z}$ transformacija karakterističnih signala se radi direktno po definiciji, uz koriščenje elemntranih matematičkih operacija, kao što je sumiranje geometrijskog reda. Obratite pažnju da u prvom slučaju, Dirakov impuls postoji samo u trenutku $t = 0$, te se odogvarajuća $\mathfrak{Z}$ transformacija dobija samo kao vrednost signala $f(0)$, dok su ostali članovi reda identitetski jednaki nuli.

a) $\mathfrak{Z}\{\delta(t)\} = ?$
$\mathcal{L}\{\delta^*(t)\} = 1 \Rightarrow \mathfrak{Z}\{\delta(t)\} = 1$
$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$
$$F = (z) = \cancelto{1}{F(0)} + \cancelto{0}{F(T)z^{-1}} + \cancelto{0}{F(2T)z^{-2}} + \ldots = 1$$

b) $\mathfrak{Z}\{h(t)\} = ?$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{h^*(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} h^*(kT)e^{-skT} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-sT})^k \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{Z}\{h(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ... = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| < 1$

$\mathfrak{Z}\{h(t)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$

Očigledno je da se u ovome slučaju radi o sumi geometrijskog reda, koji konvergira za vrednosti $|z| < 1$.

U ovom trenutku, kada se pojam geometrijski red, suma geometrijskog reda ili geometrijska progresija veoma često koriste, podsećamo da u ovom slučaju on pada ka nuli, što se nadamo da nas očekuje uskoro u ovim epidemijskim danima

Primer 2. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju signala direktnom primenom definicionog izraza i korišćenjem teorema $\mathfrak{Z}$ transformacije.

a) $f(t) = e^{at}h(t)$

b) $f(t) = a^t h(t)$

c) $f(t) = \sin \omega t$

d) $f(t) = \cos \omega T$ (zadatak za samostalan rad)

Rešenje:

Sva rešenja iz ovog primera, koriste osobinu kompleksnog pomeranja, koja je kroz sličan primer obrađena u materijalu za predavanja i predstavlja uzor za rešavanje ovih problema.

a) $f(t) = e^{at}h(t) \Rightarrow f(kT) = e^{akT}, \quad k = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT})^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-\frac{e^{aT}}{z}} = \frac{z}{z-e^{aT}}
\end{aligned}$$

b) $f(t) = a^t h(t) \Rightarrow f(kT) = a^{kT}, \quad k = 0, 1, 2, ...$

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT}z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^T}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{a^T}{z}}\frac{z}{z-a^T}
\end{aligned}
$$

Dakle, $f(kT) = a^k \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-a}$

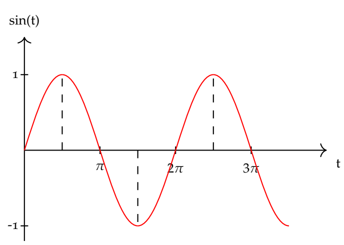
c) $f(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \Rightarrow f(kT) = \frac{e^{j\omega kT}-e^{-j\omega kT}}{2j}$

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \mathfrak{Z}\left\{\frac{e^{j\omega kT}-e^{-j\omega kT}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\left[\mathfrak{Z}\left\{e^{j\omega kT}\right\} - \mathfrak{Z}\left\{e^{-j\omega kT}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right] = \frac{1}{2j}\frac{z(z-e-j\omega T)-z(z-e^{j\omega T})}{(z-ej\omega T)(z-e-j\omega T)} \\
&= \frac{1}{2j}\frac{z(z-e-j\omega T-z+e^{j\omega T})}{z^2-z(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})+e^{j\omega T-j\omega T}} = \frac{1}{\cancel{2j}}\frac{z\cancel{2j}\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1} \\
&= \frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}
\end{aligned}
$$

Primer 3. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju signala $f(t) = \sin t$, ako je

a) $T = \frac{\pi}{2}$

b) $T = \pi$

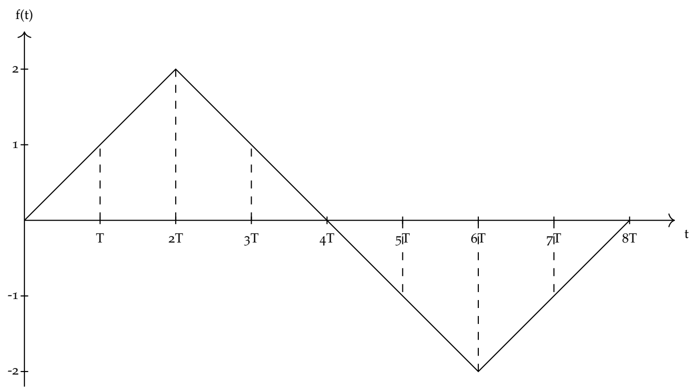


Rešenje:

a) $F(z) = \frac{z\sin\frac{\pi}{2}}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{2}+1} = \frac{z}{z^2+1}$

b) $F(z) = \frac{z\sin\pi}{z^2-2z\cos\pi+1} = 0$
ili
$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin(k\pi)z^{-k} = 0$

Primer 4. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju signala sa slike:



$$
\begin{aligned}
F_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} &+ \cancelto{0}{f(0T)z^{0}} + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + \cancelto{0}{f(4T)z^{-4}} + \\
&+ f(5T)z^{-5} + f(6T)z^{-6} + f(7T)z^{-7} + \cancelto{0}{f(8T)z^{-8}} + \cancelto{0}{f(9T)z^{-9}} + \ldots \\
&= z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} - z^{-5} - 2z^{-6} - z^{-7} \\
&= (z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) - z^{-4}(z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{z^4}\right)(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}) \\
&= \frac{z^4 - 1}{z^4}\frac{z^2 + 2z + z}{z^3} = \frac{(z^4 - 1)(z + 1)^2}{z^7}
\end{aligned}
$$

Primer 5. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju periodičnog signala čija je jedna perioda data signalom iz zadatka 4.

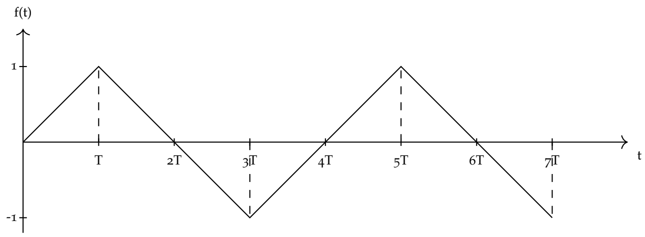
$$
\begin{aligned}
F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} f(kT)z^{-k} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT + nT)z^{-k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT + 2nT)z^{-k-2n} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT + \cancelto{periodicnost}{nT})z^{-k-n} + \ldots \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right](1 + z^{-n} + z^{-2n} + \ldots) = F_p(z)\frac{z^n}{z^n - 1}
\end{aligned}
$$

$n = 8$

$$
F(z) = \frac{(z^4 - 1)(z + 1)^2}{\cancel{z^7}}\frac{z^{\cancel{8}}}{z^8 - 1} = \frac{z\cancel{(z^4 - 1)}(z + 1)^2}{\cancel{(z^4 - 1)}(z^4 + 1)} = \frac{z(z + 1)^2}{z^4 + 1}
$$

Primer 6. (*Zadatak za samostalan rad*) Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju periodičnog signala čija je jedna perioda prikazana na slici 1.

Napomena: Uporediti dobijeni rezultat sa rezultatom iz primera 3a. Vrednosti funkcije su iste u trenucima $t = kT \Rightarrow \mathfrak{Z}$ -transformacije su im iste!



Slika 1: Slika iz zadatka 6.

2 *Inverzna $\mathfrak{Z}$-transformacija*

$$F(z) = \mathfrak{Z}\{f(kT)\} \Rightarrow f(kT) = \mathfrak{Z}^{-1}\{F(s)\}$$

Postoji više postupaka za određivanje $\mathfrak{Z}^{-1}$:

1. Metoda direktnog deljenja
2. Metoda odziva (računska)
3. Metoda rastavljanja
4. Metoda inverzne integracije (ne radimo)

1. Metoda direktnog deljenja:
   $F(z)$ razvijamo u red po z^{-1} (direktno delimo brojilac i imenilac)
   Primer:
   $F(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$, pronaći $f(0T), f(1T), f(2T), f(3T), ...$
   $F(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}\frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$
   Sada delimo polinom $10z^{-1} + 5z^{-2}$ polinomom $1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}$ i dobijamo rezultat $10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + ...$
   Dakle, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-5} = f(0) + f(1T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + ...$
   Te su prva četiri člana reda $f(n)$
   $f(0) = 0, f(T) = 10, f(2T) = 17, f(3T) = 18.4$
   Mana ove metode je to što ne daje rešenje u zatvorenoj (analitičkoj) formi, sem u retkim slučajevima.

2. Metoda odziva
   Posmatramo sistem sa funkcijom prenosa koja je jednaka Z-transfrmaciji signala koji posmatramo:

$$U(z) \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow Y(z)$$

   $u(kT) = \delta(kT) \Rightarrow U(z) = 1 \Rightarrow Y(z) = U(z)F(z) = F(z)$
   Formiramo diferencnu jednačinu koju rešavamo:
   $F(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{Y(z)}{U(z)}$
   $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}} \Rightarrow Y(z)[1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}] = U(z)[10z^{-1} + 5z^{-2}] \Big/ \mathfrak{Z}^{-1}$
   $y[k] - 1.2y[k-1] + 0.2y[k-2] = 10u[k-1] + 5u[k-2]$
   $y[k] = 1.2y[k-1] - 0.2y[k-2] + 10u[k-1] + 5u[k-2]$
   Budući da je $u[n] = \delta[n] \Rightarrow u[0] = 1$
   $y[0] = 0$
   $y[1] = \cancelto{0}{1.2y[0]} - \cancelto{0}{0.2y[-1]} + 10u[0] + \cancelto{0}{5u[-1]} = 10$

$$y[2] = 1.2y[1] - \cancel{0.2y[0]}^{0} + \cancel{10u[1]}^{0} + 5u[0] = 1.2 \cdot 10 + 5 = 17$$
$$y[3] = 1.2y[2] - 0.2y[1] + \cancel{10u[2]}^{0} + \cancel{5u[1]}^{0} = 1.2 \cdot 17 - 2 = 18.4$$

- Metoda je pogodna za računarsku implementaciju
- Ne daje rešenje u zatvorenoj formi

3. Metoda rastavljanja
   Primer:

$$F(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.2}$$
$$= \frac{A(z-0.2)+B(z-1)}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{z(A+B)-0.2A-B}{(z-1)(z-0.2)} \Big/ (z-1)(z-0.2)$$
$$10z+5 = A(z-0.2)+B(z-1)$$
$$10z+5 = Az - 0.2A + Bz - B$$

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 10 \\ -0.2A-B &= 5 \end{aligned}\right\} +$$
$$0.8A = 15 \Rightarrow A = 18.75$$
$$B = 10 - A \Rightarrow B = -8.75$$

$$\mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathfrak{Z}^{-1}\left\{18.75\frac{1}{z-1}\right\} - \mathfrak{Z}^{-1}\left\{8.75\frac{1}{z-0.2}\right\}$$
$$= 18.75\mathfrak{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\frac{z}{z-1}\right\} - 8.75\mathfrak{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\frac{z}{z-0.2}\right\} =$$
$$= 18.75h[k-1] - 8.75h[k-1]0.2^{k-1}$$

Da bismo odredili $\mathfrak{Z}$ -transformaciju ovih izraza, potrebno je da ih pomnožimo izrazom $\frac{z}{z}$. Sa predavanja je poznato da je $\frac{1}{z}$ vremensko kašnjenje za jednu periodu odabiranja. Dakle $\mathfrak{Z}^{-1}\{z^{-1}\frac{z}{z-1}\} = h[k-1]$

Budući da je $h(k) = 1$ za $k \geqslant 0$ imaćemo:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 18.75 - 8.75 = 10$$
$$f(2) = 18.75 - 8.75 \cdot 0.2 = 17$$
$$f(3) = 18.4$$

Zadaci

Primer 1. Dato je $F(z) = \frac{12z}{z-1}$. Naći f[k].
Rešenje: $\mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\} = 12\mathfrak{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-1}\} = 12h[k] = 12h(kT)$

Primer 2. Dato je $F(z) = \frac{z+2}{z^2(z-2)}$

1. Metodom rastavljanja naći f[k]

2. Metodom direktnog deljenja i odziva pronaći f[k] za $k \in \{0,1,2,3\}$

Rešenje:

1. $F(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-2}$
   *Napomena:

$$\frac{P}{(z-a)^n} = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(z-a)^n}$$

$$A_i = \lim_{z \to a} \frac{1}{q!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z-a)^n F(z), \quad q = n-i$$

n predstavlja maksimalnu vrednost stepena, dok je i stepen u kom trenutno računamo

$$C = \lim_{z \to 2} \cancel{(z-2)} \frac{z+2}{z^2 \cancel{(z-2)}} = 1$$

$$A = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0} \left(\cancel{z^2} \frac{z+2}{\cancel{z^2}(z-2)} \right) = -1$$

$$B = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1} \left(\cancel{z^2} \frac{z+2}{\cancel{z^2}(z-2)} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{1(z-2) - 1(z+2)}{(z-2)^2} = \lim_{z \to 0} \frac{-4}{4} = -1$$

$$F(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2} = -z^{-2} - z^{-1} + z^{-1} \frac{z}{z-2}$$

$$f[k] = \mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\} = -\mathfrak{Z}^{-1}\{1 \cdot z^{-2}\} - \mathfrak{Z}^{-1}\{1 \cdot z^{-1}\} + \mathfrak{Z}^{-1}\{z^{-1} \frac{z}{z-2}\} =$$

$$= -\delta[k-2] - \delta[k-1] + 2^{k-1} h[k-1]$$

$$f[0] = 0$$

$$f[1] = 0 - 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$f[2] = -1 - 0 + 2 \cdot 1 = 1$$

$$f[3] = -0 - 0 + 2^2 \cdot 1 = 4$$

2. Metoda direktnog deljenja
   $F(z) = \frac{z+2}{z^3 - 2z^2}$
   $F(z) = \frac{z+2}{z^3 - 2z^2} \frac{z^{-3}}{z^{-3}} = \frac{z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - 2z^{-1}}$
   Delimo polinom $z^{-2} + 2z^{-3}$ polinomom $1 - 2z^{-1}$ i dobijamo rezultat
   $z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + ...$
   Dakle, $F(z) = z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$
   Te je prvih pet članova reda $f[n]$:
   $f[0] = 0$
   $f[1] = 0$
   $f[2] = 1$
   $f[3] = 4$
   $f[4] = 8, ...$

3. Metoda odziva
   $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+2}{z^3-2z^2} = \frac{z^{-2}+2z^{-3}}{1-2z^{-1}} \Rightarrow Y(z)(1-2z^{-1}) = U(z)(z^{-2}+2z^{-3})$
   $y[k] = 2y[k-1] + u[k-2] + 2u[k-3]$
   $y[0] = 0$
   $y[1] = 0$
   $y[2] = 0 + 1 + 0 = 1$
   $y[3] = 2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 1 = 4$

Primer 3. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju signala $f(t) = h(t)[2 + 3t + 4^{-t}]$ odbirkovanog periodom $T = 2$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\{f(t)\} &= 2\mathfrak{Z}\{h(t)\} + 3\mathfrak{Z}\{th(t)\} + \mathfrak{Z}\{h(kT)(4^{-t})^k\} = \\ &= 2\frac{z}{z-1} + 3\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-4^{-T}} \\ &= 2\frac{z}{z-1} + 6\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-\frac{1}{16}}\end{aligned}$$

Zadaci za samostalan rad

Primer 4. Naći inverznu $\mathfrak{Z}$ -transformaciju koristeći

a) metodu rastavljanja
b) metodu deljenja i
c) metodu odziva

$$F(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)}$$

*Napomena: $\mathfrak{Z}\{ka^k h(k)\} = \frac{az}{(z-a)^2}$

Voditi računa da pri rastavljanju racionalne funkcije na parcijalne razlomke stepen brojioca mora biti manji od stepena imenioca. Ako to nije slučaj, potrebno je oboriti stepen brojioca.

Primer 5. Naći inverznu $\mathfrak{Z}$ -transformaciju koristeći

a) metodu rastavljanja
b) metodu deljenja i
c) metodu odziva

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 3}$$

*Napomena: $\mathfrak{Z}\{a^k \sin(kt\omega)\} = \frac{az\sin(\omega T)}{z^2 - 2az\cos(\omega T) + a^2}$

Primer 6. Naći $\mathfrak{Z}$ -transformaciju signala sa slike ako je

a) $T = 1$
b) $T = 2$
c) $T = 8$