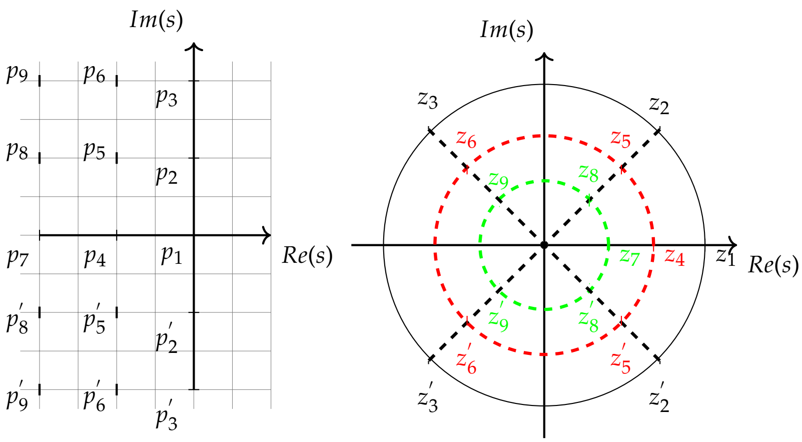
Preslikavanje iz s u z ravan

Anja Buljević
Jelena Bulatović

1 Preslikavanje iz s u z-ravan

Primer 1. Dat je položaj polova u s-ravni. Skicirati odgovarajući položaj polova u z-ravni ako je perioda odabiranja T.



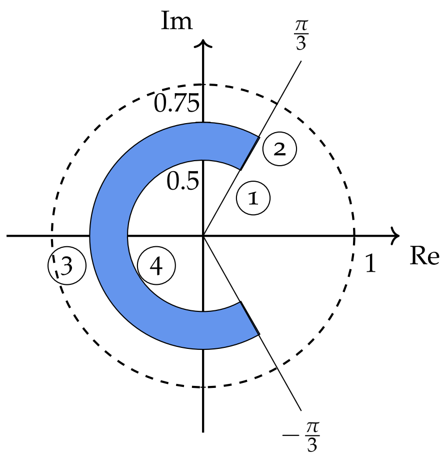
Slika 1: Na slici levo prikazan je raspored polova u s-ravni, dok je na desnoj slici prikazan raspored odgovarajućih polova iz s-ravni u z-ravni.

$$p_1 = 0 \Rightarrow z_1 = e^{0T} = 1 \Rightarrow |z_1| = 1, \angle z_1 = 0$$
$$p_2 = \omega_1 j \Rightarrow z_2 = e^{(0+\omega_1 j)T} = e^{\omega_1 jT} \Rightarrow |z_2| = 1, \angle z_2 = \omega_1 T$$
$$p_3 = \omega_2 j \Rightarrow z_3 = e^{(0+\omega_2 j)T} = e^{\omega_2 jT} \Rightarrow |z_3| = 1, \angle z_3 = \omega_2 T$$
$$p_4 = -\sigma_1 \Rightarrow z_4 = e^{-\sigma_1 T} \Rightarrow |z_4| = e^{-\sigma_1 T}, \angle z_4 = 0$$
$$p_5 = -\sigma_1 + \omega_1 j \Rightarrow z_5 = e^{(-\sigma_1+\omega_1 j)T} \Rightarrow |z_5| = e^{-\sigma_1 T}, \angle z_5 = \omega_1 T$$
$$p_6 = -\sigma_1 + \omega_2 j \Rightarrow z_6 = e^{(-\sigma_1+\omega_2 j)T} \Rightarrow |z_6| = e^{-\sigma_1 T}, \angle z_6 = \omega_2 T$$
$$p_7 = -\sigma_2 \Rightarrow z_7 = e^{-\sigma_2 T} \Rightarrow |z_7| = e^{-\sigma_2 T}, \angle z_7 = 0$$
$$p_8 = -\sigma_2 + \omega_1 j \Rightarrow z_8 = e^{(-\sigma_2+\omega_1 j)T} \Rightarrow |z_8| = e^{-\sigma_2 T}, \angle z_8 = \omega_1 T$$
$$p_9 = -\sigma_2 + \omega_2 j \Rightarrow z_9 = e^{(-\sigma_2+\omega_2 j)T} \Rightarrow |z_9| = e^{-\sigma_2 T}, \angle z_9 = \omega_2 T$$

Smena je $z = e^{sT}$. Moduo pola se označava sa $|z|$, a njegov argument je označen sa $\angle z$. Detaljno ponašanje odziva polova je prikazano u skripti za predavanja.

Zadaci:

1. Na slici 2 je nacrtana oblast u kojoj se nalaze polovi diskretnog sistema. Skicirati oblast u kojoj se nalaze polovi kontinualnog sistema čiji je digitalni ekvivalent dat na slici ako je frekvencija odabiranja $\omega_s = 6\frac{rad}{s}$.



Slika 2: Oblast polova diskretnog sistema.

Vidimo da je data oblast polova digitalnog ekvivalenta sistema simetrična u odnosu na realnu osu. Znamo da će i oblast polova kontinualnog sistema tkđ. biti simetrična u odnosu na realnu osu. Iz tog razloga će biti prvo skicirana oblast polova segmenta 1 - 2 - 3 - 4, a zatim će simetrično biti skicirana preostala oblast.
Smena je već poznata, $z = e^{sT}$. Ukoliko je pol kontinualnog sistema $s = \sigma + j\omega$, dobijamo $z = e^{(\sigma + j\omega)T}$. Odavde vidimo da je moduo pola $|z| = e^{\sigma T}$, a argument je $\angle z = \omega_T$.

Rešenje:
$\omega_s = 6\frac{rad}{s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}s$

1

$$z_1 = 0.5e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_1| = 0.5 \qquad \angle z_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$|z_1| = e^{\sigma_1 T} \qquad \angle z_1 = \omega_1 T$$

$$e^{\sigma_1 T} = 0.5 \qquad \frac{\pi}{3}\omega_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\ln 0.5 = \sigma_1 T \qquad \boxed{\omega_1 = 1}$$

$$\ln 0.5 = \sigma_1 \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\sigma_1 = -0.66}$$

Primećujemo da polovi na segmentu 1 - 4 imaju isti moduo, kao i polovi na segmentu 2 - 3. Polovi na segmentu 1 - 2 imaju isti argument, kao i polovi na segmentu 3 - 4.

2

$$z_2 = 0.75e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_2| = 0.75 \qquad \angle z_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$|z_2| = e^{\sigma_2 T} \qquad \angle z_2 = \omega_2 T$$

$$e^{\sigma_2 T} = 0.75 \qquad \frac{\pi}{3}\omega_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\ln 0.75 = \sigma_2 T \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_1 = 1}$$

$$\ln 0.75 = \sigma_2 \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\sigma_2 = -0.28}$$

3

$$z_3 = 0.75e^{j\pi}$$

$$|z_3| = |z_2| \qquad \angle z_3 = \omega_3 T$$

$$\sigma_3 = \sigma_2 \qquad \omega_3 \frac{\pi}{3} = \pi$$

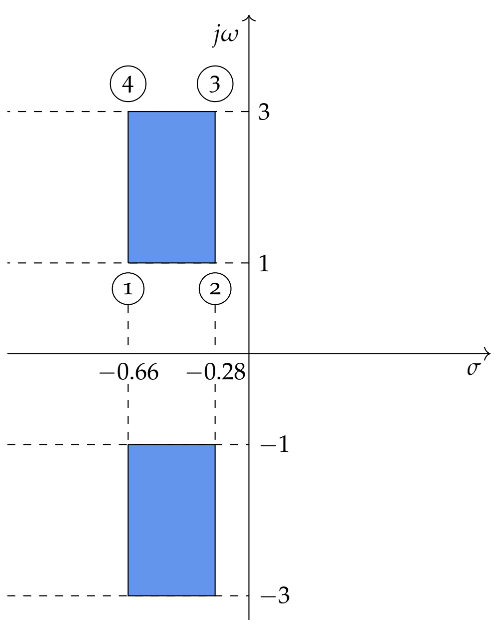
$$\boxed{\sigma_3 = \sigma_2 = -0.28} \qquad \boxed{\omega_3 = 3}$$

4

$$z_4 = 0.5e^{j\pi}$$

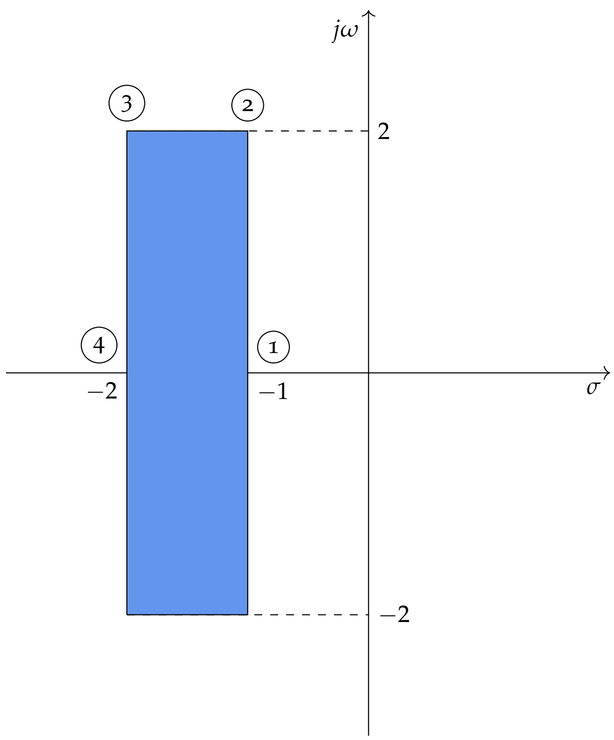
$$\boxed{\sigma_4 = \sigma_1 = -0.66} \qquad \boxed{\omega_4 = \omega_3 = 3}$$

Nakon što smo matematički izračunali gde se polovi segmenta 1 - 2 - 3 - 4 digitalnog ekvivalenta sistema nalaze u s-ravni, možemo ih skicirati u s-ravni i zatim simetričnu u odnosu na realnu osu preslikati.



Slika 3: Oblast polova u s-ravni.

2. Dat je položaj polova u s-ravni. Skicirati odgovarajući položaj polova u z-ravni ako je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{4}s$. Skicirati oblast u z-ravni u koju se preslikavju polovi posle diskretizacije sa dominantnom vremenskom konstantom T_d većom od 0.5 i manjom od 1, ukoliko je je perioda odabiranja $T = \frac{\pi}{4}s$.



Slika 4: Oblast polova u s-ravni.

Kao i u prethodnom zadatku, prvo ćemo preslikati oblast polova 1 - 2 - 3 - 4, a zatim ćemo simetrično u odnosu na realnu osu preslikati i drugi deo oblasti.

Rešenje:

1

$$p_1 = -1$$
$$z_1 = e^{-T}$$
$$\boxed{|z_1| = e^{-\frac{\pi}{4}} = 0.4559}$$
$$\boxed{\angle z_1 = 0}$$

2

$$p_2 = -1 + 2j$$
$$z_2 = e^{(-1+2j)T}$$
$$\boxed{|z_2| = e^{-\frac{\pi}{4}} = 0.4559}$$
$$\boxed{\angle z_2 = 2T = \frac{\pi}{2}}$$

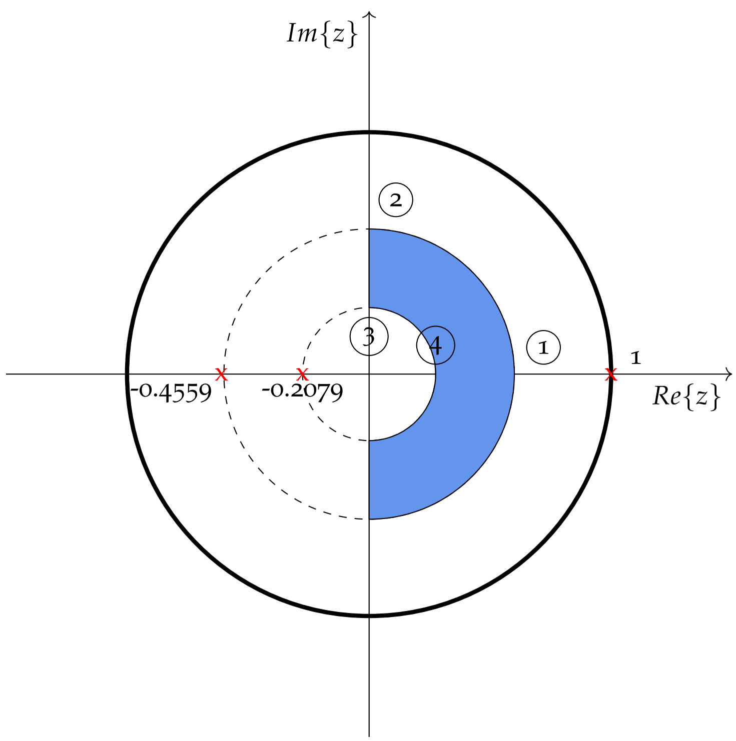
3

$$p3 = -2 + 2j$$
$$z_3 = e^{(-2+2j)T}$$
$$\boxed{|z_3| = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2079}$$
$$\boxed{\angle z_3 = 2T = \frac{\pi}{2}}$$

4

$$p4 = -2$$
$$z_4 = e^{-2T}$$
$$\boxed{|z_4| = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2079}$$
$$\boxed{\angle z_4 = 0}$$

U tekstu zadatka je zadato da $0.5 < T_d < 1$, što znači da se odgovarajući polovi nalaze u intervalu $-2 < a < -1$. Oblast u z-ravni sa datim opsegom dominantne vremenske konstante se nalazi između kružnice poluprečnika $\Omega_1 = e^{-2T}$ i kružnice poluprečnika $\Omega_1 = e^{-T}$.



Slika 5: Odgovarajući položaj polova diskretizovanog sistema