Greška u ustaljenom stanju

Anja Buljević
Jelena Bulatović

Napomena: Obratite pažnju da u prva dva zadatka tražimo **odziv sistema u ustaljenom stanju**, a u ostalim zadacima tražimo **grešku u ustaljenom stanju**.

Zadaci:

1. Naći odziv sistema $G(z) = \frac{z}{z-a}$ u ustaljenom stanju na impulsnu pobudu

(a) bez primene granične teoreme

(b) primenom granične teoreme

Rešenje:

(a)

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{z-a} \cdot 1/\mathcal{Z}^{-1}$$
$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\Big\{\frac{z}{z-a}\Big\} = a^k h(k)$$

Za dobijeni odziv možemo razmatrati tri slučaja:

- $|a| < 1 \Rightarrow y_{ss} = \lim\limits_{k\to\infty} y(k) = 0$
- $|a| = 1 \Rightarrow y_{ss} = \lim\limits_{k\to\infty} y(k) = 1$
- $|a| > 1 \Rightarrow$ **Nema ustaljenog stanja!**

(b) $Y(z) = \frac{z}{z-a}$

Razmatramo dva slučaja [1]:

- $|a| > 1 \Rightarrow$ **Sistem nije stabilan[2], pa nema ustaljeno stanje.**
- $|a| < 1$

$$y_{ss} = \lim_{z\to 1}\Big((1-z^{-1})\frac{z}{z-a}\Big)$$
$$= \lim_{z\to 1}\Big(\frac{z-1}{\cancel{z}}\frac{\cancel{z}}{z-a}\Big) = 0$$

[1] Za $a = 1$ ne ispitujemo jer je sistem granično stabilan. **Sistem ima ustaljeno stanje ukoliko je stabilan.**

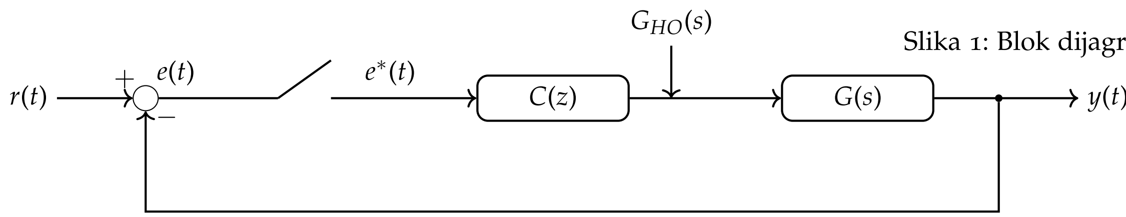
[2] Sistem je stabilan ukoliko mu se polovi nalaze unutar jediničnog kruga.

2. Naći odziv sistema $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$ u ustaljenom stanju na step pobudu.

Rešenje:

$$u(k) = h(k) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$$
$$Y(z) = U(z)G(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0.5} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$
$$y_{ss} = \lim_{z\to 1}\Big((1-z^{-1})\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}\Big) = \lim_{z\to 1}\Big(\frac{\cancel{z-1}}{z}\frac{z^2}{\cancel{(z-1)}(z-0.5)}\Big) = 2$$

3. Izračunati grešku u ustaljenom stanju za sistem prikazan na Slici 1 ako je $G(s) = \frac{1}{s+1}$, $C(z) = K$ i $r(t) = h(t)$.



Slika 1: Blok dijagram sistema.

Rešenje:

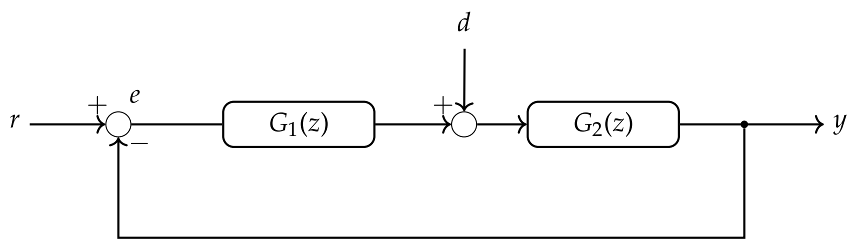
$$
\begin{aligned}
E^*(s) &= R^*(s) - Y^*(s) = R^*(s) - U^*(s)\underline{G_{HO}G(s)^*} \\
&= R^*(s) - E^*(s)C(z)\underline{G_{HO}G(s)^*} \\
R^*(s) &= E^*(s)(1 + C(z)\underline{G_{HO}G(s)^*}) \\
\underline{G_{HO}G(s)^*} &= \mathfrak{Z}\Big\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\Big\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= \frac{z-1}{\cancel{z}}\Big(\frac{\cancel{z}}{z-1} - \frac{\cancel{z}}{z-e^{-T}}\Big) \\
&= \frac{\cancel{(z-1)}(\cancel{z} - e^{-T} - \cancel{z} + 1)}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-T})} \\
&= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \\
G_{RE}(z) &= \frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{1 + C(z)\underline{G_{HO}G(s)^*}} \\
&= \frac{1}{1 + K\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}} = \frac{z-e^{-T}}{z-e^{-T} + K(1-e^{-T})} \\
E(z) &= R(z)G_{RE}(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z-e^{-T}}{z-e^{-T} + K(1-e^{-T})} \\
e_{ss} &= \lim_{z\to 1}\Big(\cancel{\frac{z-1}{z}}\,\cancel{\frac{z}{z-1}}\,\frac{z-e^{-T}}{z-e^{-T} + K(1-e^{-T})}\Big) \\
&= \frac{1-e^{-T}}{1-e^{-T} + K(1-e^{-T})} \\
&= \frac{\cancel{(1-e^{-T})}}{\cancel{(1-e^{-T})}(1+K)} \\
&= \frac{1}{1+K}
\end{aligned}
$$

4. Pronaći grešku u ustaljenom stanju za sistem sa Slike 2 ako je:

   (a) $r(k) = h(k)$, $d(k) = h(k)$, $G_1 z = 1$, $G_2(z) = \frac{1}{z-0.5}$
   (b) $r(k) = h(k)$, $d(k) = h(k)$, $G_1 z = 1$, $G_2(z) = \frac{1}{z-1}$
   (c) $r(k) = h(k)$, $d(k) = h(k)$, $G_1 z = \frac{1}{z-1}$, $G_2(z) = 1$
   (d) $r(k) = k \cdot h(k)$, $d(k) = k \cdot h(k)$, $G_1 z = 1$, $G_2(z) = \frac{1}{z-1}$

Radi boljeg razumevanja i lakšeg rešavanja ovog zadatka pročitati poglavlje 3 *Greška u ustaljenom stanju u prisusutvu poremećaja* sa predavanja.

Napomena: Nije svejedno u kom funkcijskom bloku u direktnoj grani se nalazi integralno dejstvo.



Slika 2: Blok dijagram sistema.

   (a) $R(z) = D(z) = \frac{z}{z-1}$
   e_{ss}[3] $= e_{ssr} + e_{ssd}$
   Prvo ćemo izračunati grešku u ustaljenom stanju od reference.

$$
\begin{aligned}
E(z) &= R(z) - Y(z) = R(z) - E(z)G_1(z)G_2(z) \\
G_{RE}(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G_1(z)G_2(z)} \\
&= \frac{1}{1 + 1 \cdot \frac{1}{z-0.5}} = \frac{z-0.5}{z+0.5} \\
E(z) &= G_{RE}(z)R(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z+0.5)(z-1)} \\
e_{ssr} &= \lim_{z\to 1}\Big(\frac{z-1}{z}E(z)\Big) \\
&= \lim_{z\to 1}\Big(\cancel{\frac{z-1}{z}}\,\cancel{\frac{z}{z-1}}\,\frac{z-0.5}{z+0.5}\Big) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

   Sada ćemo izračunati grešku u ustaljenom stanju od poremećaja.

Napominjemo: ukoliko sistem ima više ulaza, ukupna greška u ustaljenom stanju jednaka je zbiru grešaka u ustaljenom stanju od svih ulaza pojedinačno.

[3] Ukupna greška u ovom slučaju predstavlja zbir greške u ustaljenom stanju od reference e_{ssr} i greške u ustaljenom stanju od poremećaja e_{ssd}.

$$
\begin{aligned}
E(z) &= -Y(z) = -G_2(z)(D(z) + G_1(z)E(z)) \\
&= -G_2(z)D(z) - G_2(z)G_1(z)E(z) \\
E(z)(1 + G_2(z)G_1(z)) &= -G_2(z)D(z) \\
G_{DE}(z) &= \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{-G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} \\
&= \frac{-\frac{1}{z-0.5}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{z-0.5}} = \frac{-1}{z+0.5} \\
E(z) &= D(z)G_{DE}(z) = -\frac{z}{(z-1)(z+0.5)}
\end{aligned}
$$

$e_{ssd} = \lim\limits_{z\to 1} \left(\cancel{\frac{z-1}{z}} \cancel{\frac{z}{z-1}} \frac{-1}{z+0.5} \right) = -\frac{2}{3}$
Konačno, ukupna greška je

$$
e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = -1.
$$

(b) $R(z) = D(z) = \frac{z}{z-1}$
Prvo ćemo izračunati grešku u ustaljenom stanju od reference.

$$
\begin{aligned}
E(z) &= R(z) - Y(z) = R(z) - E(z)G_1(z)G_2(z) \\
G_{RE}(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G_1(z)G_2(z)} \\
&= \frac{1}{1 + 1 \cdot \frac{1}{z-1}} = \frac{z-1}{z} \\
E(z) &= G_{RE}(z)R(z) = \frac{z(z-1)}{z(z-1)} = 1 \\
e_{ssr} &= \lim_{z\to 1} \left(\frac{z-1}{z} E(z) \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(\frac{z-1}{z} \cdot 1 \right) = 0
\end{aligned}
$$

Sada ćemo izračunati grešku u ustaljenom stanju od poremećaja.

$$\begin{aligned}
E(z) &= -Y(z) = -G_2(z)(D(z) + G_1(z)E(z)) \\
&= -G_2(z)D(z) - G_2(z)G_1(z)E(z) \\
E(z)(1 + G_2(z)G_1(z)) &= -G_2(z)D(z) \\
G_{DE}(z) &= \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{-G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} \\
&= \frac{-\frac{1}{z-1}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{z-1}} = \frac{-1}{z} \\
E(z) &= D(z)G_{DE}(z) = -\frac{1}{(z-1)} \\
e_{ssd} &= \lim_{z \to 1} \Big(\frac{\cancel{z-1}}{z} \big(\frac{-1}{\cancel{z-1}} \big) \Big) = -1
\end{aligned}$$

Konačno, ukupna greška je

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = -1.$$

(c) $R(z) = D(z) = \frac{z}{z-1}$

Prvo ćemo izračunati grešku u ustaljenom stanju od reference.

Ponavljamo: astatizmi koji se nalaze posle greške, a pre sabirača sa poremećajem (levo od poremećaja) utiču na karakter greške.

$$\begin{aligned}
E(z) &= R(z) - Y(z) = R(z) - E(z)G_1(z)G_2(z) \\
G_{RE}(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G_1(z)G_2(z)} \\
&= \frac{1}{1 + 1 \cdot \frac{1}{z-1}} = \frac{z-1}{z} \\
E(z) &= G_{RE}(z)R(z) \qquad = \frac{z(z-1)}{z(z-1)} = 1 \\
e_{ssr} &= \lim_{z \to 1} \Big(\frac{z-1}{z} E(z) \Big) \\
&= \lim_{z \to 1} \Big(\frac{z-1}{z} \cdot 1 \Big) = 0
\end{aligned}$$

Sada ćemo izračunati grešku u ustaljenom stanju od poremećaja.

$$
\begin{aligned}
E(z) &= -Y(z) = -G_2(z)(D(z) + G_1(z)E(z)) \\
&= -G_2(z)D(z) - G_2(z)G_1(z)E(z) \\
E(z)(1 + G_2(z)G_1(z)) &= -G_2(z)D(z) \\
G_{DE}(z) &= \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{-G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} \\
&= \frac{-1}{1 + \frac{1}{z-1} \cdot 1} \\
&= -\frac{z-1}{z} \\
E(z) &= D(z)G_{DE}(z) = -\frac{z}{\cancel{z-1}}\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}} = -1 \\
e_{ssd} &= \lim_{z \to 1} \Big(\frac{z-1}{z} \cdot (-1) \Big) = 0
\end{aligned}
$$

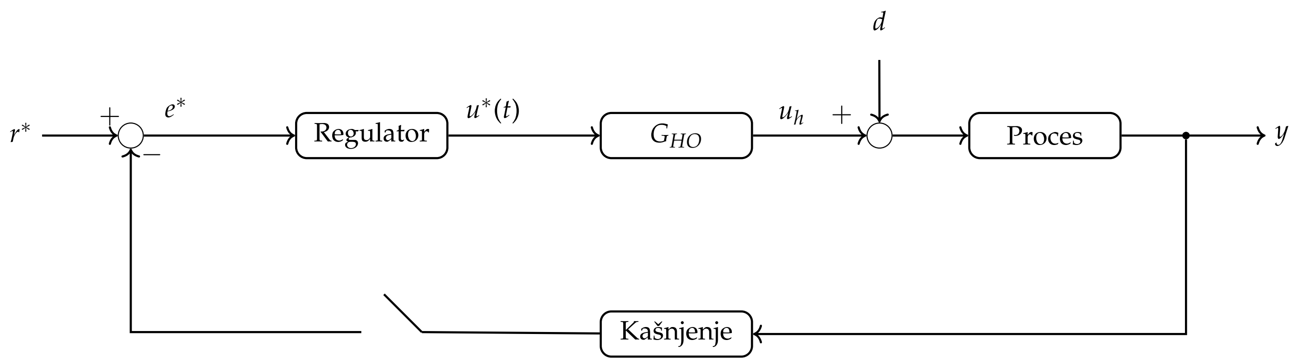
Konačno, ukupna greška je

$$
e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = 0.
$$

(d) Uraditi za domaći. :)

5. Formirati upravljački algoritam koji će regulisati nivo vode u rezervoaru. Voda se u rezervoar dovodi kroz cevi kod kojih usled starosti dolazi do curenja vode na spojevima. Računar na kom je implementiran upravljački algoritam udaljen je od rezervoara zbog čega je signalu sa senzora potrebno $0.04s$ da bi bio očitan na računaru. Perioda odabiranja je $T = 0.1s$.

   Rešenje:



Model procesa[4]:

$$\dot{h} = \frac{1}{A_1}q - \frac{A_0}{A_1}\sqrt{2gh}$$
$$y = h$$

[4] Pogledati prethodne vežbe radi podsećanja za izvođenje modela rezervoara.

Linearizovani model [5]:

$$\dot{\Delta h} = a\Delta h + b\Delta q$$
$$\Delta y = \Delta h$$

[5] Linearizacija datog modela je već rađena. Pogledati izvođenje.

Funkciju prenosa sistema dobijamo kada uradimo Laplasovu transformaciju prethodne dve jednačine i dobijamo

$$G(s) = \frac{b}{s+a}.$$

Za upravljanje možemo koristiti PI regulator čiji je osnovni oblik u kontinualnom domenu

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}.$$

Nakon diskretizacije Tustinom dobijamo sledeći diskretni PI regulator

$$C(z) = \frac{z(K_p + \frac{K_iT}{2}) + (\frac{K_iT}{2} - K_p)}{z-1} = \frac{zp+q}{z-1}.$$

- **Kolika je greška u ustaljenom stanju ako su i referenca i poremećaj step signali?**

Ukupna greška je $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd}$.

Greška od reference:

$$G_{RE}(z) = \frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{1 + C(z)\underline{G_{ho}GH^*(s)}}$$

$$\underline{G_{HO}GH^*(s)} = \mathfrak{Z}\Big\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{b}{s+a}e^{-0.04s}\Big\} = (1-z^{-1})\mathfrak{Z}_m\Big\{\frac{b}{s(s+a)}\Big\}\Big|_{m=\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{z-1}{z}\frac{b}{a}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\Big)$$

$$= \frac{b}{a}\frac{z(a-e^{-amT}) + (e^{-amT} - e^{-aT})}{z(z-e^{-aT})} = \frac{zl+n}{z(z-e^{-aT})}$$

$$G_{RE}(z) = \frac{z(z-1)(z-e^{-aT})}{z(z-1)(z-e^{-aT}) + (zp+q)(zl+n)}$$

$$E(z) = G_{RE}(z)R(z) = \frac{z}{\cancel{z-1}}\frac{z\cancel{(z-1)}(z-e^{-aT})}{z(z-1)(z-e^{-aT}) + (zp+q)(zl+n)}$$

$$e_{ssr} = \lim_{z\to 1}\Big(\frac{z-1}{z}E(z)\Big) = 0$$

Za domaći izračunati grešku od poremećaja.

Domaći: Funkcije prenosa su $G_1(z) = \frac{1}{z-0.5}$, $G_2(z) = \frac{z}{z-1}$, $G_3(z) = 2$ i $G(4) = \frac{1}{z-1}$. Sistem je prikazan na slici ispod. Izračunati pojedinačne greške od svih ulaza (reference i poremećaja) ukoliko ti ulazi mogu biti sledeći signali: $\delta(k), h(k), kh(k)$.