Matematički model u prostoru stanja

Anja Buljević
Jelena Bulatović

Matematički model u prostoru stanja opisan je diferencijalnom jednačinom stanja i algebarskom jednačinom izlaza

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

gde je A matrica stanja, B matrica ulaza, C matrica izlaza, a D matrica direktnog prelaza.

Odnosno, u diskretnim vremenskim trenucima imamo odgovarajući digitalni ekvivalent

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{\Phi}x[k] + \mathbf{\Gamma}u[k]\\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}x[k] + \mathbf{D}u[k]\end{aligned}$$

U cilju dobijanja funkcije diskretnog prenosa, najpre ćemo primeniti $\mathfrak{Z}$ transformaciju uz pretpostavku o nultim početnim uslovima.

$$\begin{aligned}z\mathbf{X}(z) &= \mathbf{\Phi}X(z) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{U}(z)\\ \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z)\\ (z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})X(z) &= \mathbf{\Gamma}U(z)\\ \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{U}(z)\\ \mathbf{Y}(z) &= \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(z)\\ \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} &= G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}\end{aligned} \quad .$$

gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica odgovarajuće dimenzije. Poslednji izraz predstavlja, funkciju diskretnog prenosa, kao odnos kompleksnog izlaza i ulaza pri nultim početim uslovima.

Primer 1. Dat je sistem opisan matematičkim modelom u prostoru stanja. Naći diskretnu funkciju prenosa sistema.

$$x_1[k+1] = -0.5x_1[k] + 0.1x_2[k] + u[k]$$
$$x_2[k+1] = -0.3x_2[k] + 0.2x_1[k]$$
$$y[k] = x_1[k] + x_2[k]$$

Rešenje

Iz gore navedenih diferencnih jednačina vidimo da postoje dve promenljive stanja u ovom sistemu, pa date jednačine možemo zapisati u matričnom obliku:

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u[k]$$

Znamo da se diskretna funckija prenosa[1] sistema računa po sledećoj formuli

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}\ .$$

Matrice $\mathbf{C}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{\Phi}$ znamo, a trebamo izračunati matricu $(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}$.

Iz matematike je poznato da se inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ može izračunati ukoliko je matrica $\mathbf{A}$ regularna (determinanta matrice $\mathbf{A}$ je različita od nule) i ako je matrica kvadratna. U tom slučaju invezna matrica se računa $\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj(\mathbf{A})}{det(\mathbf{A})}$.

$$(zI - \mathbf{\Phi}) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+0.5 & -0.1 \\ -0.2 & z+0.3 \end{bmatrix}$$
$$(zI - \mathbf{\Phi})^{-1} = \frac{adj(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})}{det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})}$$

$det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})$ [2] $= (z+0.5)(z+0.3) - 0.1 \cdot 0.2 = z^2 + 0.8z + 0.13 = \Delta$

Koreni karakterističnog polinoma su

$$z_1 = -0.5732, z_2 = -0.2268,$$

pa zaključujemo da je sistem stabilan[3].

$adj(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})$ [4] $= \begin{bmatrix} z+0.3 & 0.1 \\ 0.2 & z+0.5 \end{bmatrix}$

Nakon što smo izračunali adjungovanu matricu i njenu determinantu dobijamo inverznu matricu $(zI - \mathbf{\Phi})^{-1}$:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z+0.3}{\Delta} & \frac{0.1}{\Delta} \\ \frac{0.2}{\Delta} & \frac{z+0.5}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Konačno dobijamo diskretnu funkciju prenosa

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z+0.3}{\Delta} & \frac{0.1}{\Delta} \\ \frac{0.2}{\Delta} & \frac{z+0.5}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{z+0.3}{\Delta} + \frac{0.2}{\Delta} & \frac{0.1}{\Delta} + \frac{z+0.5}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{z+0.5}{z^2 + 0.8z + 0.13}$$

[1] **Napomena:** Pogledati poglavlje 3.2 sa predavanja radi podsećanja na izvođenje funkcije diskretnog prenosa.

[2] Podsećamo da se sopstvene vrednosti (polovi) računaju iz karakteristične jednačine $det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})$, pa na osnovu njih možemo komentarisati i stabilnost sistema.

[3] Podsećamo da je diskretni sistem stabilan ukoliko mu se svi polovi nalaze unutar jedinične kružnice.

[4] **Napomena:** Adjungovana matrica se u opštem obliku računa na sledeći način

$$adj(\mathbf{A}) = [\mathbf{A}_{ij}]^T_{nxn} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Element A_{ij} se naziva **kofaktorom elementa** a_{ij} i računa se po sledećem obrascu

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

gde je M_{ij} minor elementa a_{ij}. Minor elementa M_{ij} je determinanta reda $(n-1)$ koja se dobija iz date matrice izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone. (Kod matrica $2x2$ adjungovana matrica se može izračunati na jednostavan način tako što elementi na glavnoj dijagonali zamene mesta, a elementi na sporednoj dijagonali se pomnože sa -1.)

Primer 2. Dat je kontinualni sistem opisan matematičkim modelom u prostoru stanja. Diskretizovati dati sistem, ako je perioda odabiranja $T = \ln 2$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Rešenje

Najpre tražimo rezolventnu matricu $\mathbf{\Phi}(s)$, a zatim primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo fundamentalnu matricu $\mathbf{\Phi}(t)$. [5]

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$
$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$
$$adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$
$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s+1)(s+2)$$
$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sada vršimo diskretizaciju. Zadata perioda odabiranja je $T = \ln 2$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(T) = \begin{bmatrix} e^{-\ln 2} & 0 \\ 0 & e^{-2\ln 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \int_0^T \mathbf{\Phi}(\tau) B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} d\tau$$
$$= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 2e^{-2\tau} & 3e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -e^{-\tau} & -e^{-\tau} \\ -2\frac{1}{2}e^{-2\tau} & -\frac{3}{2}e^{-2\tau} \end{bmatrix} \Bigg|_0^T$$
$$= \begin{bmatrix} -e^{-T} + e^0 & -e^{-T} + e^0 \\ -e^{-2T} + e^0 & -\frac{3}{2}e^{-2T} + \frac{3}{2}e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-T} + 1 & -e^{-T} + 1 \\ -e^{-2T} + 1 & -\frac{3}{2}e^{-2T} + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$T = ln2 \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

[5] Podsetićemo čitaoce na izvođenje fundametntalne matrice kontinalnog sistema. Posmatraćemo procese koji se mogu opisati matematičkim modelom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

čije je stanje u polaznom trenutku $\mathbf{x}(0)$ poznato.

Primenićemo operator Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu. Tako dobijamo

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s).$$

Napomena, kretanje u prostoru stanja se određuje Laplasovom inverzijom dobijenog izraza.

Očigledno, bitnu ulogu u određivanju $\mathbf{X}(s)$ igra matrica $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Ova matrica naziva se **rezolventnom matricom**

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Svaka regularna (invertibilba) matrica poseduje sebi inverznu matricu. Inverzna matrica se može računati na veći broj načina, između ostalog i *kao količnik adjungovane matrice i determinante*. U slučaju rezolvente matrice

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}.$$

Inverzna Laplasova transformacija rezolventne matrice naziva se **fundamentalnom matricom**, u oznaci $\mathbf{\Phi}(t)$,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}.$$

Fundamentalna matrica se može shvatiti kao uopštenje pojma eksponencijalne funkcije na slučaj kada su argumetni matrice. Da bi smo to obrazložili, pokazaćemo najpre da je

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}},$$

pod uslovom, naravno, da suma sa desne strane konvergira. Zaista

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\mathbf{A}}{s}\right)^k - \left(\frac{\mathbf{A}}{s}\right)^{k+1} \right]$$
$$= \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\mathbf{A}}{s}\right)^k - \left(\frac{\mathbf{A}}{s}\right)^k \right] = \mathbf{I}.$$

Dalje se Laplasovom inverzijom prethodnog izraza član po član nalazi

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}. \tag{1}$$

Kako dobijeni izraz formalno podseća na razvoj eksponencijalne funkcije u potencijalni red, često se formalno piše

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

Sada se kretanje linearnog stacionarnog procesa u prostoru stanja može zapisati u obliku

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau)d\tau.$$

Dobijeni diskretizovani sistem je

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{8} \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k).
\end{aligned}
$$

Primer 3. Dat je matematički model u prostoru stanja. Diskretizovati sistem periodom T.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
&y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x + u
\end{aligned}
$$

Rešenje

$$
\begin{aligned}
(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} s & a \\ -a & s \end{bmatrix} \\
det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s^2 + a^2 \\
adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} s & -a \\ a & s \end{bmatrix} \\
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+a^2} & -\frac{a}{s^2+a^2} \\ \frac{a}{s^2+a^2} & \frac{s}{s^2+a^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+a^2} & -\frac{a}{s^2+a^2} \\ \frac{a}{s^2+a^2} & \frac{s}{s^2+a^2} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(T) &= \begin{bmatrix} \cos aT & \sin aT \\ -\sin aT & \cos aT \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma} &= \int_0^T \mathbf{\Phi}(\tau) B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \cos a\tau & \sin a\tau \\ -\sin a\tau & \cos a\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \cos a\tau \\ -\sin a\tau \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin a\tau \frac{1}{a} \\ \cos a\tau \frac{1}{a} \end{bmatrix} \Bigg|_0^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\sin aT - \cancelto{0}{\frac{1}{a}\sin 0T} \\ \frac{1}{a}\cos aT - \cancelto{1}{\frac{1}{a}\cos 0T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\sin aT \\ \frac{1}{a}\cos aT - \frac{1}{a} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dobijeni diskretizovani sistem je

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} \cos aT & \sin aT \\ -\sin aT & \cos aT \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\sin aT \\ \frac{1}{a}\cos aT - \frac{1}{a} \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + u(k).
\end{aligned}
$$

Domaći: Komentarisati stabilnost sistema u zavisnosti od parametra **a**, kao i odziv sistema za te slučajeve.