Hardverski interfejsi - domaći zadatak

Nenad Radović, RA18/2020

18. mart, 2023. godina

1 Problem i prijedlog rješenja

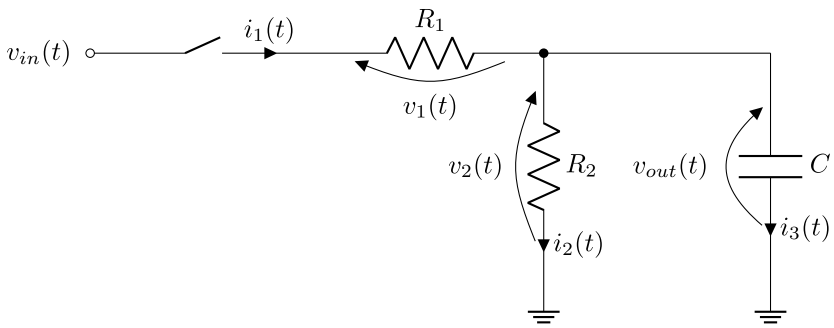

Figure 1: Slika problema

Na slici iznad, pored obilježenog **ulaznog napona** $v_{in}(t)$ i **izlaznog napona** $v_{out}(t)$, obilježimo padove napona na otpornicima R_1 i R_2 $v_1(t)$ i $v_2(t)$, respektivno. Takodje, obilježimo struje $i_1(t)$, $i_2(t)$ i $i_3(t)$ odabranim smjerovima, kao na slici.

Primjetimo da je traženi izlazni napon napon na kondenzatoru. Dakle, uvidjamo vezu struje koja protiče kroz dati kondenzator i izlaznog napona preko jednačine

$$i_3(t) = C\frac{dv_{out}(t)}{dt} \tag{1}$$

Kako imamo dvije konture u kolu, primjenom Kirhofovih zakona na date dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$v_{in}(t) - R_1 i_1(t) - R_2 i_2(t) = 0 \tag{2}$$
$$-v_{out}(t) + R_2 i_2(t) = 0 \tag{3}$$
$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \tag{4}$$

Izrazimo struju $i_1(t)$ iz jednačine (2):

$$i_1(t) = \frac{v_{in}(t) - R_2 i_2(t)}{R_1} \tag{5}$$

Primjetimo da je proizvod $R_2 i_2(t)$ jednak izlaznom naponu $v_{out}(t)$ (ishodi iz jednačine (3)), tako da jednačina (5) postaje:

$$i_1(t) = \frac{v_{in}(t) - v_{out}(t)}{R_1} \tag{6}$$

Pomoću strujnog Kirhofovog zakona (jednačine (4)), jednačinu (1) možemo zapisati kao:

$$i_1(t) - i_2(t) = C\frac{dv_{out}(t)}{dt} \tag{7}$$

Preostali korak u vremenskom domenu će biti da zamijenimo prethodno dobijene izraze za struje $i_1(t)$ i $i_2(t)$ (jednačine (3) i (6)) u jednačinu (7):

$$\begin{aligned} C\frac{dv_{out}(t)}{dt} &= \frac{v_{in}(t) - v_{out}(t)}{R_1} - \frac{v_{out}(t)}{R_2} \\ \frac{dv_{out}(t)}{dt} &= \frac{v_{in}(t)}{R_1 C} - \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})v_{out}(t) \\ \frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})v_{out}(t) &= \frac{v_{in}(t)}{R_1 C} \end{aligned} \tag{8}$$

Dobijamo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu konstantnih koeficijenata koju ćemo riješiti primjenom Laplasove transformacije.

Dakle, iz jednačine (8) i primjenom Laplasove transformacije, slijedi da je:

$$sV_{out}(s) - v_{out}(0^-) + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})V_{out}(s) = \frac{V_{in}(s)}{R_1 C} \tag{9}$$

za koju važi da su $V_{in}(s)$ i $V_{out}(s)$ kompleksni predstavnici napona $v_{in}(t)$ i $v_{out}(t)$, respektivno.
Sredjivanjem izraza (9), dobijamo funkciju prenosa od $V_{in}(s)$ ka $V_{out}(s)$:

$$V_{out}(s) = \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})}V_{in}(s) + \frac{1}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})}v_{out}(0^-) \tag{10}$$

Pretpostavimo da je u početnom trenutku kondenzator prazan. Tada će važiti da $v_{out}(0^-) = 0$, te se time anulira desni sabirak desne strane jednačine (10).

Po postavci zadatka, u trenutku $t = 0$ prekidač je zatvoren i u tom je stanju sve do trenutka $t = 7$, kada se otvara. Takvo ponašanje možemo modelovati zbirom Hevisajdovih step funkcija $v_{in}(t) = h(t) - h(t-7)$. Time dobijamo da je kompleksni predstavnik $V_{in}(s)$ jednak $\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-7s}$
Slijedi da važi:

$$V_{out}(s) = \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-7s}) \tag{11}$$

Izraz za $V_{out}(s)$ možemo srediti rastavljanjem na parcijalne razlomke. Postupak je sledeći:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s(s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}))} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} \\ \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s(s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}))} &= \frac{A(s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})) + Bs}{s(s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}))} \end{aligned} \tag{12}$$

Dobijamo dati sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
\frac{A}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) &= \frac{1}{R_1 C}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Rješenje sistema po koeficijentima A i B je:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\
B &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Time, finalni izraz u kompleksnom domenu za izlazni napon $V_{out}(s)$ jeste:

$$
\begin{aligned}
V_{out}(s) &= \left(\frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{s} - \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} \right)(1 - e^{-7s}) \\
V_{out}(s) &= \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{s} - \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{s}e^{-7s} - \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} + \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{s + \frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})}e^{-7s}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Primjenjivajući inverznu Laplasovu transformaciju na svaki od članova, dobijamo izraz za izlazni napon u vremenskom domenu:

$$
v_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} h(t) \left(1 - e^{-\frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})t}\right) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} h(t-7) \left(e^{-\frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})(t-7)} - 1\right) \tag{16}
$$

Grafički predstavljeno, pobuda $v_{in}(t)$ i odziv $v_{out}(t)$ izgledaju:

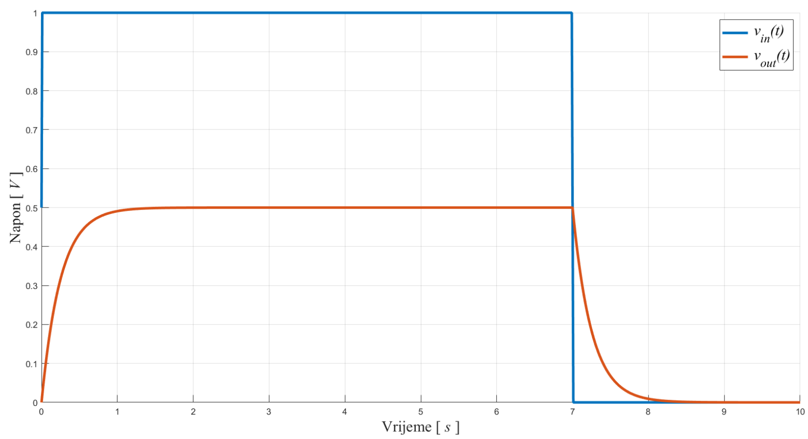

Figure 2: Pobuda $v_{in}(t)$ i odziv $v_{out}(t)$, metapodaci: $R_1 = R_2 = 100\Omega$ i $C = 5\text{mF}$

Rješenje odgovara predvidjenom jer se od početnog trenutka kondenzator puni i ostaje na maksimalnoj napunjenosti sve dok je kolo zatvoreno. Kada otvorimo prekidač u trenutku $t = 7$, kondenzator kreće da "napaja" ostatak kola, prazneći se - potvrdjeno čitanjem sa grafika.