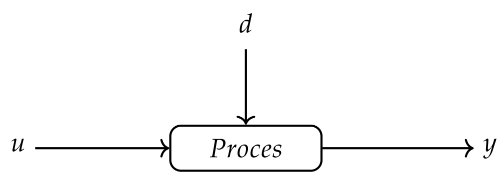
Dinamički procesi (sistemi)

Zoran D. Jeličić
Aleksandra Mitrović
24. oktobar 2022.

1 Uvod

Pojam dinamičkog procesa (sistema) je jedan od osnovnih pojmova u teoriji upravljanja.Dinamički sistem je zatvoren, ali pristupačan fizički sistem u kome se odvija neki fizički proces i ima dve vrste veze sa spoljašnjom okolinom: prva veza se ostvaruje preko *ulaznih signala* (uticaj okoline na posmatrani proces), a druga vrsta veze se ostvaruje preko *izlaznih signala* (uticaj posmatranog sistema na okolinu).

Dinamički sistem se može definisati kao fizički sistem koji predstavlja skup velikog broja elemenata sa još većim brojem interakcija između njih. Šematski se može prikazati preko blok dijagrama:



Slika 1: Uopšteni blok dijagram dinamičkog sistema

Sa slike 1 se može uočiti da se za dinamički sistem (proces) vezuju dve vrste signala:

1. Ulazni signali (pobudni signali) kojima se utiče na posmatrani sistem. Na slici 1 to su signali:
   - Upravljački signali (**u**) na koje se može neposredno uticati;
   - Signali poremećaja (**d**) na koje se ne može neposredno uticati. Najčešće su to nemerljive veličine, pa je zadatak svakog upravljačkog algoritma da obezbedi željeno ponašanje sistema bez obzira na postojanje poremećaja.
2. Izlazni signali (**y**) preko kojih posmatrani sistem utiče na okolinu.

Ulazni signal se još naziva i *pobuda*, a signal koji sistem generiše na pobudu se naziva *odziv*.

Za opisivanje dinamičkih sistema koriste se modeli koji mogu imati različite oblike i mogu biti formulisani na različite načine. U oblasti upravljanja, od interesa je posmatrati matematičke modele koji ponašanje sistema i interakcije unutar sistema opisuju preko matematičkih izraza (*diferencijalnih* ili *diferencnih* jendačina). [1]

[1] Na ovom kursu ćemo diferencijalne jednačine koristiti za opisivanje dinamičkih sistema u kontinualnom vremenskom domenu. Analogno tome, diferencne jednačine ćemo koristiti za opisivanje sistema u diskretnom vremenskom domenu.

2 Vremenski kontinualni matematički modeli u prostoru stanja

Vremenski kontinualni matematički model je reprezent dinamičkog procesa prikazan preko sistema diferencijalnih jednačina prvog reda. Opšti oblik ovakvog matematičkog modela je:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p)\ , \\
y_1 &= h_1(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \\
&\vdots \\
y_l &= h_l(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p)\ ,
\end{aligned}
$$

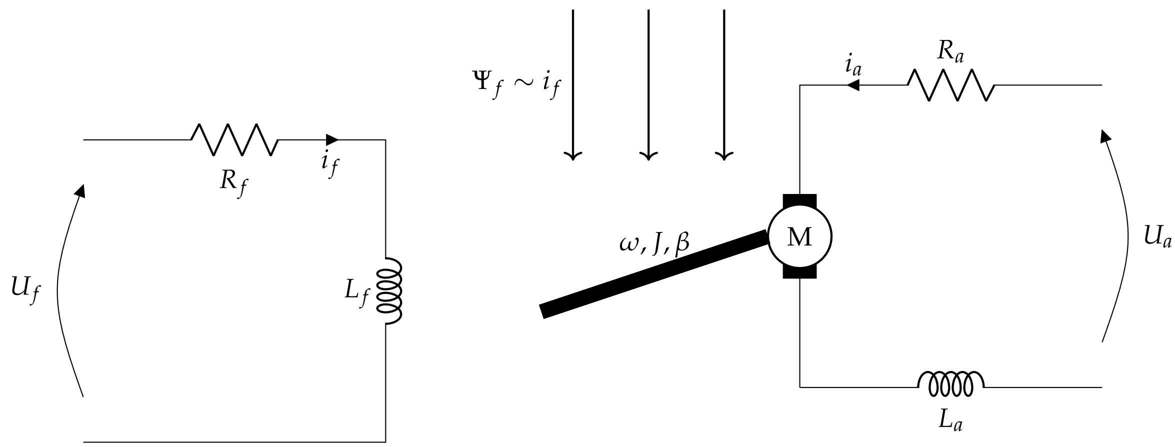
gde je:

- t vremenska promenljiva,
- x_i promenljive stanja (broj promenljivih stanja određuje red sistema n),
- u_i ulazna promenljive ,
- y_i izlazne promenljive ,
- $f_1 \ldots f_n$ preslikavanja koja definišu vrednosti prvih izvoda (tj. brzinu promene) promenljivih stanja u zavisnosti od tekućih vrednosti promenljivih stanja i ulaznih signala ,
- $h_1 \ldots h_l$ preslikavanja koja definišu zavisnost trenutnih vrednosti izlaznih promenljivih od tekućih vrednosti promenljivih stanja i ulaznih signala .

Jednačine $\dot{x}_1 \ldots \dot{x}_n$ nazivaju *jednačine dinamike procesa*, a jednačine $y_1 \ldots y_l$ se nazivaju *jednačine izlaza*.

Navedeni koncept će biti ilustrovan kroz primer.

2.1 Matematički model jednosmerne mašine (DC motora)



Slika 2: Šematski prikaz motora jednosmerne struje

Na slici 2 je prikazan šematski prikaz DC motora čiji su osnovni delovi *rotor* (pokretni deo mašine) i *stator* (nepokretni deo mašine). Veličine koje opisuju rotorsko kolo u indeksu imaju a, dok veličine statorskog kola u indeksu imaju f. Rotor DC motora se povezuje na izvor jednosmerne struje [2]. Stator DC motora male snage (do $200W$) se može predstaviti u obliku stalnog magneta.

[2] Zbog toga i naziv motor **jednosmerne** struje.

Princip rada ovakve mašine se zasniva na elektromagnetnoj indukciji. Naime, stator predstavljen u obliku stalnog magneta ima svoje magnetno polje koje se opisuje fluksom Ψ_f [3]. U tom magnetnom polju statora se nalaze i provodnici rotora koji se, kao što je već pomenuto, priključuju na izvor jednosmerne struje. Usled proticanja struje kroz provodnike rotora koji se nalaze u magnetnom polju statora, stvara se elektromagnetna sila (momenat) koja pokreće rotor mašine. Relativnim kretanjem rotora u odnosu na stator dolazi do promene fluksa usled čega se indukuje elektromotorna sila, odnosno indukovana struja koja ima smer takav da teži poništavanju uzroka svog nastanka [4]:

[3] Fluks je veličina koja predstavlja broj linija magnetnog polja kroz neku površinu.

[4] Ovaj zakon je poznat kao Lencovo pravilo.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} ,$$

gde je Φ fluks. Može se zaključiti da je intenzitet indukovane struje srazmeran brzini promene magnetnog fluksa.

Da bi se izveo matematički model jednosmernog motora, neophodno je prvo definisati veličine od interesa koje su prikazane na slici 2:

- R_a i R_f su otpornosti rotorskog i statorskog kola respektivno,
- L_a i L_f su induktivnosti rotorskog i statorskog kola,
- J je momenat inercije mehaničkog opterećenja,
- β je koeficijent viskoznog trenja u ležajevima mašine,

- ω je ugaona brzina vratila mašine,
- U_a je napon električnog izvora.

Jednačina naponske ravnoteže rotora je [5]

$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} = U_a - U_{ems} \ , \tag{1}$$

gde je U_{ems} indukovana elektromotorna sila srazmerna ugaonoj brzini vratila mašine preko konstante K_e [6]

$$U_{ems} = K_e \omega \ . \tag{2}$$

Kako je mašina priključena na izvor jednosmerne struje, njen izvod po vremenu je jednak nuli, pa se smenom (2) u (1) dobija

$$R_a i_a = U_a - K_e \omega \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{U_a}{R_a} - \frac{K_e \omega}{R_a} \ . \tag{3}$$

Druga jednačina od interesa za formiranje matematičkog modela DC motora je mehanička jednačina [7]

$$J\dot{\omega} + \beta\omega = K_m i_a \ , \tag{4}$$

gde je K_m konstanta motora, dok izraz sa desne strane znaka jednakosti $K_m i_a$ predstavlja pokretački momenat. Smenom (3) u (4) dobija se

$$\begin{aligned}
J\dot{\omega} + \beta\omega &= \frac{K_m U_a}{R_a} - \frac{K_m K_e \omega}{R_a} \ , \\
J\dot{\omega} + \left(\beta + \frac{K_m K_e}{R_a}\right)\omega &= \frac{K_m U_a}{R_a} \ , \\
J\dot{\omega} + \left(\frac{\beta R_a + K_m K_e}{R_a}\right)\omega &= \frac{K_m U_a}{R_a} \quad \Big/ \frac{R_a}{\beta R_a + K_m K_e} \ , \\
T_s \dot{\omega}(t) + \omega(t) = K_{sm} U_a \ ,
\end{aligned}$$

gde je $T_s = \frac{J R_a}{\beta R_a + K_m K_e}$ i $K_{sm} = \frac{K_m}{\beta R_a + K_m K_e}$.

Na kraju, da bi se odredio matematički model DC motora na osnovu izvedenih jednačina, neophodno je odrediti izbor promenljivih stanja. Ulazna veličina kojom se deluje na sistem je napon rotora U_a, dok pri izboru izlazne promenljive postoje dve opcije:

- može se upravljati ugaonom brzinom ω,
- može se upravljati ugaonom pozicijom θ.

a) **Upravljanje ugaonom brzinom.**

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= -\frac{1}{T_s}\omega + \frac{K_{sm}}{T_s} U_a \\
y &= \omega \ ,
\end{aligned}$$

[5] Formira se na osnovu Drugog Kirhofovog zakona.

[6] Često se u literauri ova konsanta naziva uzajamna mehaničko-eléktična impedansa.

[7] Predstavlja jednačinu ravnoteže momenata na vratilu mašine.

odnosno ako se usvoji $x_1 = \omega$, matematički model se može zapisati i na sledeći način

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_s}x_1 + \frac{K_{sm}}{T_s}U_a$$
$$y = x_1 \ .$$

b) **Upravljanje ugaonom pozicijom**. Promenljive stanja nije moguće odrediti direktno kao u prethodnom slučaju pa se vrši sledeća smena

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta} = \omega$$
$$y = \theta \ ,$$

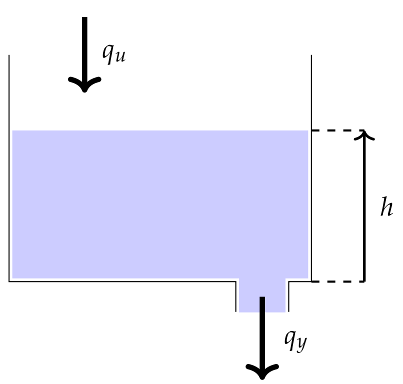
odnosno

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{x}_2 = \dot{\omega} \ .$$

Na kraju, dobija se matematički model u sledećem obliku

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_s}x_2 + \frac{K_{sm}}{T_s}U_a$$
$$y = x_1 \ .$$

2.2 *Matematički model otvorenog rezervoara*



Slika 3: Otvoreni rezervoar

Na slici 3 je prikazan rezervoar u kome se nalazi tečnost. Tečnost se dovodi u rezervoar sa gornje strane preko ventila pa se na taj način može precizno podešavati ulazni protok q_u. Tečnost izlazi iz rezervoara kroz otvor na dnu i opisuje se izlaznim protokom q_y. Nivo (visina) tečnosti u rezervoaru je h.

Da bi se izveo matematički model rezervoara, neophodno je definisati veličine od interesa:

- ρ je gustina tečnosti u rezervoaru,
- g je gravitaciona konstanta,
- A_1 je površina poprečnog preseka rezervora,
- A_0 je površina poprečnog preseka otvora na dnu rezervoaru,
- V_1 je brzina uticanja tečnosti u rezervoar,
- V_0 je brzina isticanja tečnosti iz rezervoara.

Bernulijeva jednačina [8] za dati rezervoar je

$$p_a + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = p_a + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 \ , \tag{5}$$

gde je prvi sabirak sa obe strane znaka jednakosti atmosferski pritisak, drugi član je hidrostatički pritisak, a treći član je hidrodinamički pritisak. Kako nivo tečnosti merimo od dna rezervoara dobija se $h_0 = 0$. Brzina isticanja tečnosti iz rezervoara je mnogo veća od promene nivoa tečnosti u rezervoaru ($V_1 \ll V_0$) pa se član $\frac{1}{2}\rho V_1^2$ u izrazu (5) može zanemariti. Sledi

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 = \rho g h_1 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gh}, \quad (h = h_1 - h_0) \ .$$

Izlazni protok je srazmeran površini poprečnog preseka otvora na dnu i brzini isticanja tečnosti

$$q_y = A_0 \cdot V_0 = A_0\sqrt{2gh} \ ,$$

dok je promena količine tečnosti u rezervoaru jednaka ulaznog i izlaznog protoka

$$\frac{dQ}{dt} = q_u - q_y \ ,$$

pri čemu je $Q = A_1 h$ i $q_y = A_0 V_0 = A_0\sqrt{2gh}$. Sledi jednačina stanja sistema

$$A_1\frac{dh}{dt} = q_u - A_0\sqrt{2gh}, \quad (A_1 = const.)$$
$$\dot{h} = \frac{1}{A_1}q_u - \frac{A_0}{A_1}\sqrt{2gh} \ ,$$

dok je jednačina izlaza

$$y = h \ .$$

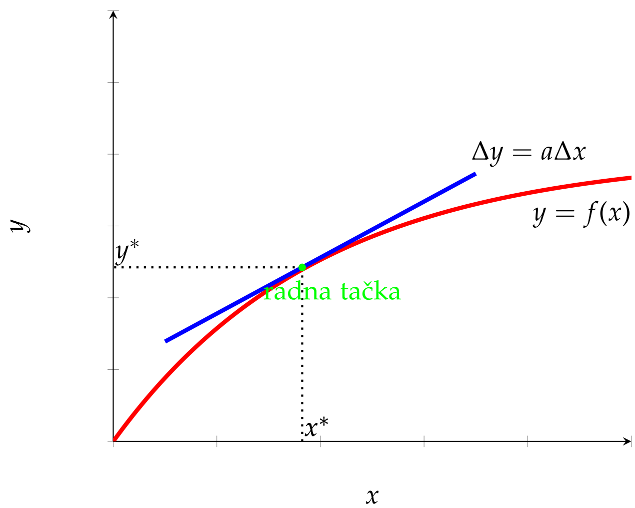
Ukoliko se usvoji $x_1 = h$, dobijeni matematički model rezervoara se može predstaviti u obliku

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{A_1}q_u - \frac{A_0}{A_1}\sqrt{2gx_1}$$
$$y = x_1 \ .$$

[8] Bernulijeva jednačina je jedna od osnovnih matematičkih definicija u dinamici fluida. Opisuje Bernulijev princip, odnosno definiše vezu između pritiska (potencijalne energije fluida) i njegove brzine (kinetičke energije fluida) u strujnoj cevi. Bernulijev princip se izvodi iz zakona o održanju energije, što znači da u uniformnom toku fluida suma svih oblika mehaničkih energija u ukupnom strujnom toku mora biti jednaka u svim tačkama polja.

Na kraju, može se zaključiti da su u slučaju modelovanja DC motora dobijeni *linearni* model prvog reda (kada je izlazna veličina ugaona brzina) i *linearni* model drugog reda (kada je izlazna veličina ugaona pozicija), dok je u primeru modelovanja rezervoara dobijen *nelinearni* model prvog reda. Kako se na nelinearne sisteme ne može primeniti matematički aparat koji se koristi kod linearnih sistema (princip superpozicija, Laplasova transformacija itd), vrši se **linearizacija nelinearnog sistema**.

3 Linearizacija nelinearnih sistema



Slika 4: Aproksimacija nelinearne funkcije $y = f(x)$ linearnom funkcijom $\Delta y = a\Delta x$ u okolini radne tačke (x^*, y^*).

- **Princip linearizacije.**
  Na slici 4 je prikazana nelinearna funkcija $y = f(x)$ koja je aproksimirana linearnom funkcijom $\Delta y = a\Delta x$ u okolini tačke (x^*, y^*) pri čemu važi

$$x = x^* + \Delta x$$
$$y = y^* + \Delta y \; ,$$

gde su x^* i y^* nominalne vrednosti radne tačke, a Δx i Δy su inkrementalne (poremećajne) promenljive koje pokazuju odstupanje stvarne vrednosti od vrednosti u radnoj tački. Ovakva aproksimacija nelinearne fukcije linearnom funkcijom u okolini radne tačke se naziva ***linearizacija*** i neophodna je kako bismo mogli da primenimo matematički alat koji se koristi za analizu linearnih sistema. Da bismo opisali ponašanje sistema u okolini radne tačke, potrebno je uraditi razvoj funkcije u Tejlorov red [9]

[9] Tejlorov red se koristi u matematičkoj analizi da se data funkcija predstavi u okolini tačke po izboru.

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
y &= f(x^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} \frac{\Delta x}{1!} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x^*} \frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots
\end{aligned}
$$

Članovi višeg reda u izrazu za razvoj Funkcije u Tejlorov red se mogu zanemariti pa sledi

$$
\begin{aligned}
y &\approx f(x^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} \Delta x \\
y - f(x^*) &\approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} \Delta x, \qquad a = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} \\
\Delta y &= a\Delta x \ .
\end{aligned}
$$

U slučaju funkcije više promenljivih oblika

$$
y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,
$$

dobija se

$$
\begin{aligned}
y &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x^*} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x^*} \Delta x_2 + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x=x^*} \Delta x_n \\
\Delta y &= a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \cdots + a_n \Delta x_n \ .
\end{aligned}
$$

- **Linearizacija vremenski kontinualnih sistema.**
  Neka je nelinearni, vremenski kontinualni, stacionaran sistem opisan matematičkim modelom oblika

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \ .
\end{aligned}
$$

Proces linearizacije počinje izborom mirne radne tačke, odnosno tačke u čijoj okolini se nelinearni model aproksimira linearnim. *Mirna radna tačka (tačka ravnoteže) dinamičkog sistema je radno stanje u kome proces može ostati neograničeno dugo pod uslovom da na njega ne deluje poremećaj.*Ukoliko je vrednost ulaznog signala fiksirana $u(t) = u_0$, uslov za određivanje mirne radne tačke je

$$
\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0 \ .
$$

Ukoliko je radna tačka sistema $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ važi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} \ ,
\end{aligned}
$$

pa se dinamički sistem može zapisati u obliku

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) \\
\dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{u} \\
\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{u}\ .
\end{aligned}
$$

Dobijena jednačina predstavlja jednačinu stanja linearizovanog sistema, dok se jednačina izlaza dobija na sledeći način

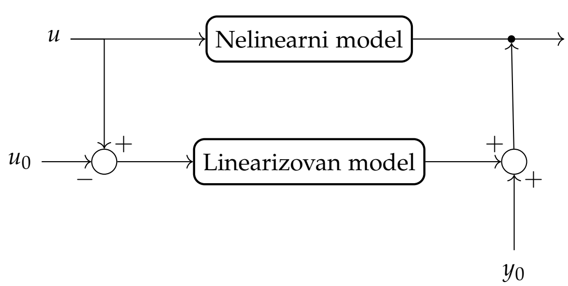
$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \\
\mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) \\
\mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{u} \\
\Delta\mathbf{y} &= \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \Delta\mathbf{u}\ .
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

sledi

$$
\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0}, \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0}, \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0}, \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0}.
$$



Slika 5: Šematski prikaz strukture za uporednu simulaciju nelinearnog i linearizovanog modela

Pri uporednoj simulaciji nelinearnih modela sistema i njihovih linearnih aproksimacija treba imati na umu da su veličine koje fugurišu u linearizovanom modelu poremećajne (inkrementalne) pa fizički predstavljaju odstupanja. Ako želimo da poredimo odziv nelinearnog i linearizovanog modela procesa na istu pobudu, neophodno je linearizovanom modelu dovoditi inkrementalni upravljački signal $\Delta\mathbf{u}$, a nelinearnom apsolutni upravljački signal

$\mathbf{u}$. Izlazu linearizovanog modela treba dodati izlazni vektor u radnoj tački $\mathbf{y}_0$ kako bi bio uporediv sa izlazom nelinearnog modela. Identičan princip se koristi i pri generisanju upravljačkog signala.

3.1 *Linearizacija modela rezervoara*

Dobijeni nelinearni model rezervoara je

$$\begin{aligned}\dot{h} &= \frac{1}{A_1}q_u - \frac{A_0}{A_1}\sqrt{2gh}\\ y &= h\ .\end{aligned}$$

Prvi korak je određivanje mirne radne tačke (Q_0, H_0)

$$\begin{aligned}&\dot{h}\Big|_{Q_0,H_0} = 0\\ &\frac{1}{A_1}Q_0 - \frac{A_0}{A_1}\sqrt{2gH_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_0 = A_0\sqrt{2gH_0}\ ,\end{aligned}$$

pa sledi da sistem ima beskonačno mnogo tačaka (za svaki ulazni protok dobija se odgovarajući nivo tečnosti u rezervoaru). Nakon toga, vrši se linearizacija sistema tako što se, u radnoj tački, računaju parcijalni izvodi obe jednačine dobijenog modela po promenljivim q_u i h

$$\begin{aligned}\Delta\dot{h} &= -\frac{A_0}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2H_0}}\Delta h + \frac{1}{A_1}\Delta q_u\\ \Delta y &= \Delta h\ .\end{aligned}$$

- **Dodatni primer.** Dat je matematički model sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x) + \sin(2u)\\ y &= x\ .\end{aligned}$$

  a) Odrediti mirne radne tačke sistema ukoliko je $u_0 = 0$.
  b) Linearizovati sistem u okolini jedne dobijene radne tačke.

Rešenje.

  a) Određivanje mirne radne tačke sistema.

$$\begin{aligned}&\dot{x} = 0\\ &x_0(1-x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \vee x_0 = 1,\end{aligned}$$

  pa sledi da su radne tačke sistema $(x_0, u_0) = (0, 0)$ i $(x_0, u_0) = (1, 0)$.

  b) Izvršićemo linearizaciju oko radne tačke $(x_0, u_0) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned}&\Delta\dot{x} = (1-2x_0)\Delta x + 2\cos(2u_0)\Delta u \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{x} = \Delta x + 2\Delta u\\ &\Delta y = \Delta x\ .\end{aligned}$$