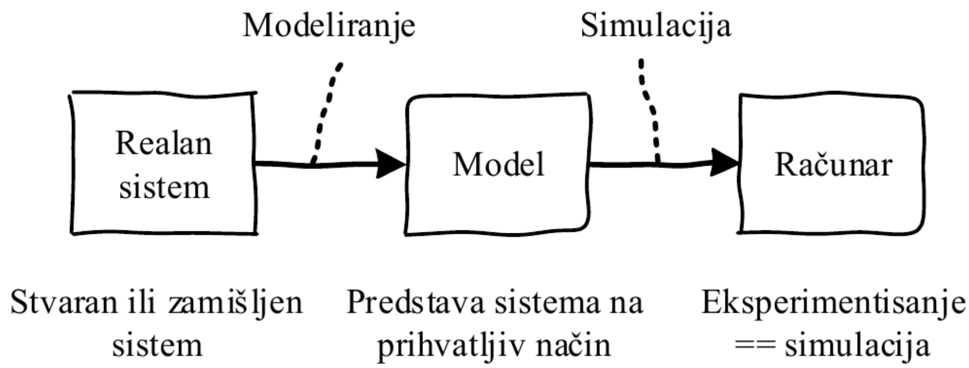
I Osnovni pojmovi modeliranja I simulacije

1. Koji su glavni elementi? Nacrtati crtež

- Glavni elementi su: realan sistem, model I računar.



2. Šta je modelovanje?

- Modelovanje je proces koji na osnovu realnog modela pravi njegov model.

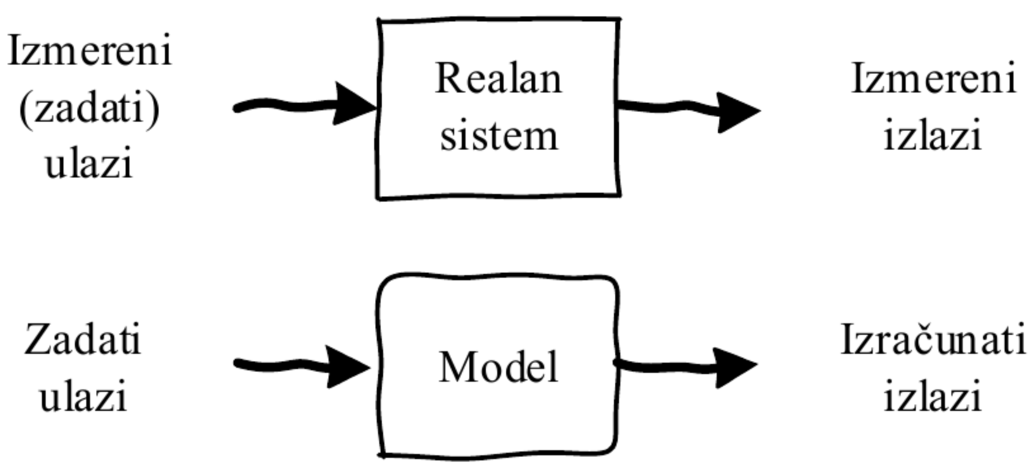
3. Šta je model?

- Model je izdvojeni deo sveta oko nas koji je nama od značaja. Nastao je procesom modelovanja. Pobuđuje se ulazima signalima (izazivaju promene). Logička je zamena realnog sistema.

4. Šta je eksperimentalno okvir?

- Eksperimentalni okvir je model koji je nastao na osnovu ograničenja. Ta ograničenja postavljaju granice u okviru kojih posmatramo ponašanje.

5. Slika model I realan sistem.



*Izlazi iz modela treba da se poklope sa izlazima iz realnog sistema

Moraju se znati konkretne vrednosti na ulazima I izlazima sistema, kako bi se znalo šta treba da se očekuje od ponašanja modela.

6. Šta je simulacija?

- Simulacija određuje ponašanje modela na osnovu poznatih vrednosti na ulazima I vrednosti opisnih promenljivih.
-

7. Šta je studija simulacija?

- Studija simulacija se sastoji od više izvedenih simulacionih eksperimenata (skup eksperimenata).

8. Šta je računarska simulacija?

- Određuje ponašanje modela upotrebom programa na računaru.

9. Zašto model ne može bez teorije?

- Model ne može postojati ako nema teorije (moramo prvo formirati teoriju)
- Teorija služi da izgradi model na osnovu ključnih elemenata teorije
- Uloga teorije:
  1. predviđa ponašanja, povezuje posledicu I uzrok
  2. objašnjava ponašanja
  3. element koji povezuje realan sistem I model

II Faze modelovanja I simulacije

1. Koraci

   1. Razumevanje sistema I vršenje merenja (najskuplja faza)
   2. Formiranje teorije
   3. Formiranje neformalnog modela
   4. Razrada u formalni model
   5. Izgradnja simulacionog modela
   6. Verifikacija I testiranje modela
   7. Simulacija u užem smislu (najeftinija faza)
   8. Analiza rezultata I pravljenje dokumentacije

2. Bazni model

   - savršeni model

3. Objasniti iterativni postupak

- Formiranje neformalnog I formalnog modela I izrada simulacionog sistema su iterativni. Itarativni postupak postepeno uljučuje dodatna ponašanja modela na osnovu kog se modela dorađuje.

4. Šta uvodi neformalan a šta formalan model?

- Neformalan model uvodi: objekte, opisne promenljive I pravila interakcije objekata.

- Formalan model uvodi: nove komponente, nove opisne promenljive, pridružuju se parametri.

5. Loše osobine neformalnog modela?

- Nekompletan
- Nejasan
- Nekonzistentan

6. Zašto su potrebni formalan I neformalan model?

- Formalan model je neophodan za uspešnost simulacije (formalan model nije zamena neformanlnom).

- Neformalan mdel traba da održava suštinu prirode posmatranog sistema, daje glavna dešavanja sistema.

7. Šta sadrži neformalan model?
- Neformalan model sadži osnovne pojmove o modelu.

8. Zašto je modelovanje iterativan proces?

- Modelovanje je iterativan proces gde se vrše korekcije modela kako bi nastao upotrebljiv model.

III Klasifikacija modela

1. Po kojim osobinama možemo da podelimo model?

- apstraktni – fizički
- statički – dinamički
- kontinualni – diskretni
- linearni – nelinearni
- autonomni – neautonomni
- varijantni – invarijantni
- stohastički – deterministički

2. Kakve mogu da budu funkcije prenosa?

$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s)$ - vremenski kontinualna funkcija prenosa

$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z)$ - vremenski diskretna funkcija prenosa

3. Šta je stohastički model?

- Formiramo ga kada imamo promenljive koje je preteško opisati

- Sadrži u sebi slučajno generisane promenljive koje primaju slučajno generisane vrednosti, tako da svako novo pokretanje simulacije generiše nove vrednosti koje utiču na izračunavanje izlaza.

4. Šta je kvazi – statički, kvazi – dinamički model (jedno te isto)?

- Kvazi dinamički model je statički model koji se menja tokom vremena.

5. Kako možemo ispitati valjanost stohastičkom modela?

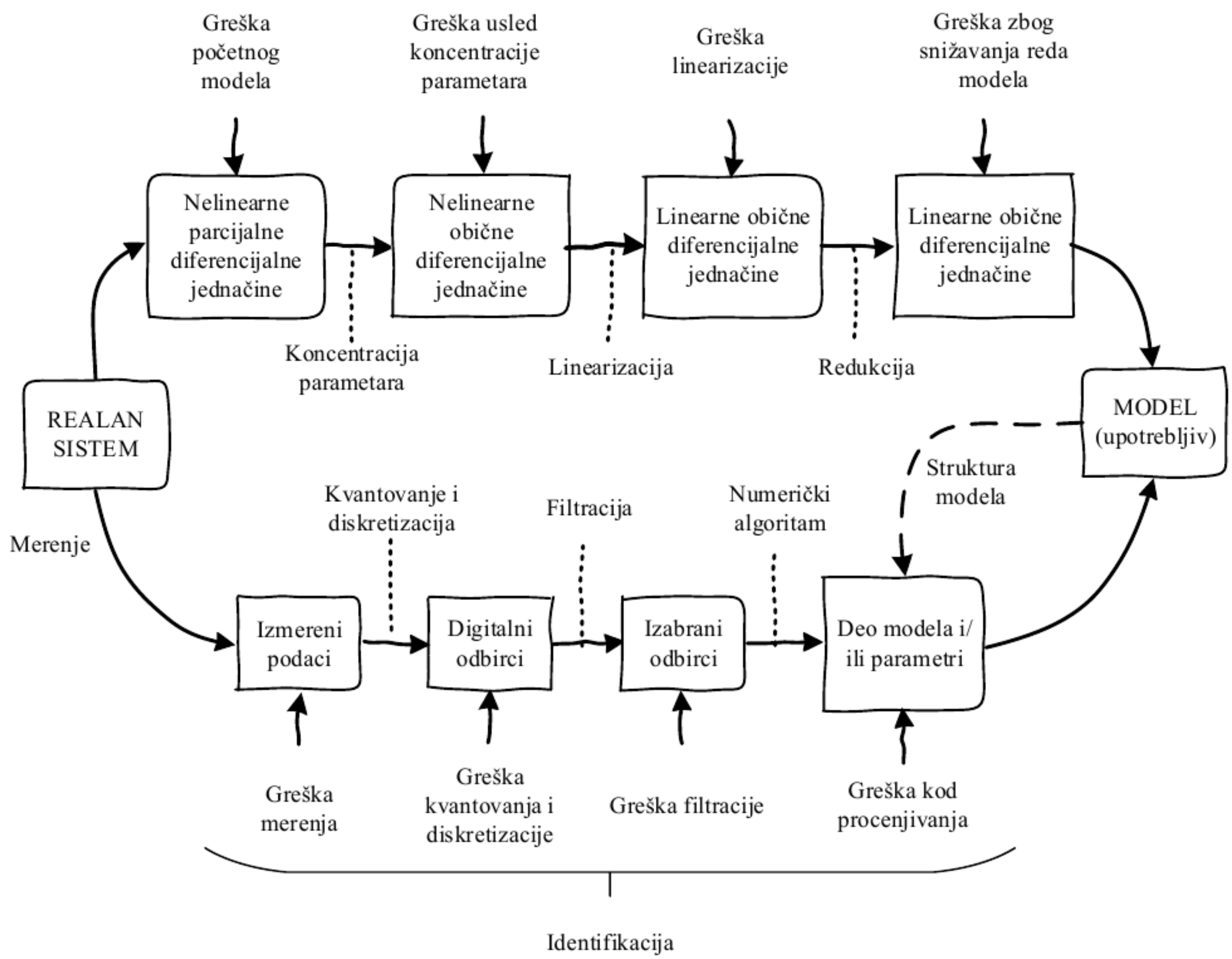
- Kod ispitivanja valjanosti stohastičkih sistema mora se sprovesti niz eksperimenata sa istim vrednostima na ulazima I onda se rezultat statički obradi (posmatraju se stanje vrednosti I rasipanja)

6. Dinamički model

- Daje promene tokom vremena,
- Opisuje se diferencijalnim jednačinama
- Promenljiva vreme se može menjati skokovito ili kontinualno

IV Primer procesa dobijanja modela. Pojednostavljenje modela

1. Blok šema sa obe grane. Opisati postupak koji je lakši, a koji je precizniji. Da li je redosled bitan?



- Redosled nije bitan. Može se prvo izvršiti redukcija pa linearizacija.
- Primenom teorije, nakon svake transformacije dobijamo manje precizan model I time se model sve više razlikuje od realnog sistema, ali se dobijanjem jednostavnijeg modela olakšava njegova upotraba, dok je postupak identifikacije precizniji.

2. Koji se koraci mogu izostaviti?

- Na osnovu teorije se odmah mogu pisati diferencijalne jednačine.
- U realnosi se ne mogu primeniti sve transformacije, niti moraju da idu tim redosledom: može se desiti da početni model prvo redukujemo, pa linearizujemo.

3. Kako se pojednostavljuje model?

- Neke od tehnika su:
  1. Odbacivanje delova modela
  2. pojednostavljavanje pravila interakcije
  3. grupisanje komponenti u veće celine
  4. uvođenje slučajnih promenljivih

V Vericikacija I valjanost modela

1. Formula valjanosti modela

$$\mathcal{J} = \sum_{\substack{po\ svim \\ slučajevima\ (i)}} \sum_{\substack{po\ svim \\ izlazima\ (k)}} \left\| y_{i,k} - d_{i,k} \right\|$$

y izmereni izlazi iz sistema, a d izračunati izlazi, a $\mathcal{J}$ je mera razlike (broj)

2. Kako se zove model kome je J = 0?

- Naziva se bazni model

3. Stepani valjanosti. Nabrojati I objasniti.

1. Replikativana valjanost – porede se izlazi sistema I modela kada su oni pobuđeni istim ulaznim signalom

2. Prediktivna valjanost – model je sposoban da proizvede dobre rezultate I za slučaje koji nsu bili poznati kada je model pravljen

3. Strukturna valjanost – model u potpunosti oslikava način funkcionisanja realnog sistema

4. Kada je model valjan?

- Model je valjan kada je razlika modela I sistema manja od granične vrednosti $J < J_{gr}$

5. Šta se radi kada model nije valjan?

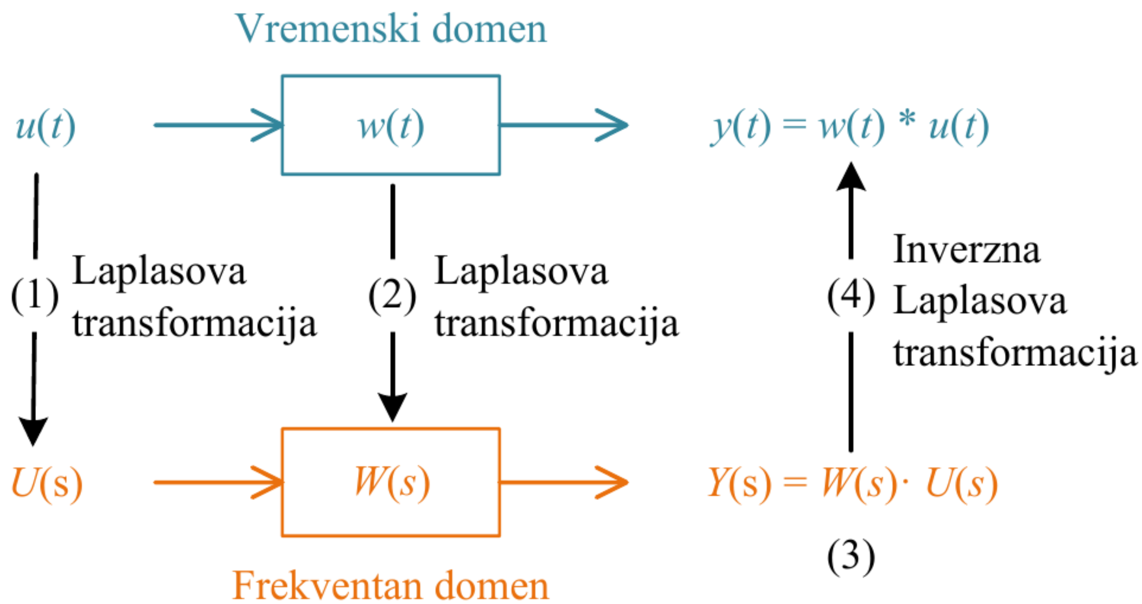
- Model se proširuje. Proširivanjem modela obično postižemo bolje poklapanje sa realnim sistemom.

VI Analitičko I simulaciono rešenje. Simulacija I optimizacija

1. Kako se dolazi do analitičkog rešenja?

- Daje matematički izraz čija vrednost zavisi od parametara koji se mogu naknadno menjati I uvrštavati u formulu bez potrebe za ponovnim rešavanjem sistema jednačina iz modela.

2. Koji su koraci kada se za analitičko rešenje koristi laplasova transformacija. Nacrtati dijagram procesa.



1. Laplasova transformacija na sve ulaze $u_{(t)}$
2. Laplasova transformacija na model sistema
3. Izračunati kompleksne likove
4. Izračunati vremenske signale izlaza

4. Pokazati korake upotrebom Laplasove transformacije

$$\dot{y}(t)+y(t)=u(t) \ / \ \mathscr{L}$$

$$sY(s)+Y(s)=U(s)$$

$$Y(s)(s+1)=U(s)$$

$$W(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$y(s)=W(s)*Y(s)=\frac{1}{s+1}*2 \ / \ \mathscr{L}^{-1}$$

$$y(t)=2*\mathrm{e}^{-t}$$

5. Kada I kako dolazimo do simulacionog rešenja?

- Analitičko rešenje ne možemo sprovesti za proizvoljan model I tada koristimo numeričko rešavanje
- Podrazumeva se pisanje programa za digitalne računare
- Ne dobija se funkcionalna zavisnost izlaza I ulaza

VII Tipovi matematičkih modela

1. nelinearni vremenski kontinualna model (matrična forma)

$$\dot{x}=f\left(x_{(t)},u_{(t)},t\right)\;\;x(0)=x_0$$
$$y(t)=g\left(x_{(t)},u_{(t)},t\right)$$

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\ \cdot\\ \cdot\\ u_n\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}\quad x(0)=\begin{bmatrix}x_{10}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{n0}\end{bmatrix}$$

2. Linearni vremenski kontinualni model (matrična forma)

$$\dot{x}=Ax_{(t)}+Bu_{(t)}$$
$$y(t)=Cx_{(t)}+Du_{(t)}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & . & . & a_{1n}\\ a_{n1} & . & . & a_{nn}\end{bmatrix}_{nxn}\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & . & . & b_{1m}\\ b_{m1} & . & . & b_{mm}\end{bmatrix}_{nxm}\quad C=\begin{bmatrix}c_{11} & . & . & c_{1n}\\ c_{r1} & . & . & c_{rn}\end{bmatrix}_{rxn}\quad D=\begin{bmatrix}d_{11} & . & . & d_{1m}\\ d_{r1} & . & . & d_{rm}\end{bmatrix}_{rxm}$$

3. Linearni vremenski diskretan model (matrična forma)

$$x(k+1)=Ex(k)+Fu(k)\quad E=nxn\quad F=nxm$$
$$y(k)=Cx(k)+Du(k)\quad C=rxn\quad D=rxm$$

4. Primer funkcije prenosa 2. reda

$$G_{(s)}=\frac{1}{s^2+2s+3}$$

5. Primer diskretne funkcije prenosa 1. reda

$$W_{(z)}=\frac{1}{2z+3}$$

7. ARX model

$$A_{(z)}\, y_{(k)} = B_{(z)}\, u_{(k)} + v_{(k)} \rightarrow beli\ šum$$

8.ARMAX model

$$A_{(z)}\, y_{(k)} = B_{(z)}\, u_{(k)} + C v_{(k)} \rightarrow beli\ šum\ , obojeni\ šum$$

9. Diferencncna jednačina koja opisuje ARX I ARMAX modele

$$y_{(k)} + a_1\, y_{(k-1)} + ... + a_n\, y_{(k-n)} = b_0\, u_{(k)} + ... + b_m\, u_{(k-m)} + v_{(k)} \rightarrow ARX$$

$$y_{(k)} + a_1\, y_{(k-1)} + ... + a_n\, y_{(k-n)} = b_0\, u_{(k)} + ... + b_m\, u_{(k-m)} + v_{(k)} + c_1\, v_{(k-1)} + ... + c_r\, v_{(k-r)} \rightarrow ARMAX$$

10. Primer diferencijalne jednačine 2. reda

$$m\, \ddot{y} + ky + c\, \dot{y} = 0$$

11. Primer diferencne jednačine 2. reda

$$y_{(k)} + 2\, y_{(k-1)} + 3\, y_{(k-2)} = u_{(k)}$$

VIII Matematički model (nelinearan) u prostoru stanja

1. Kako izgleda matrični oblik?

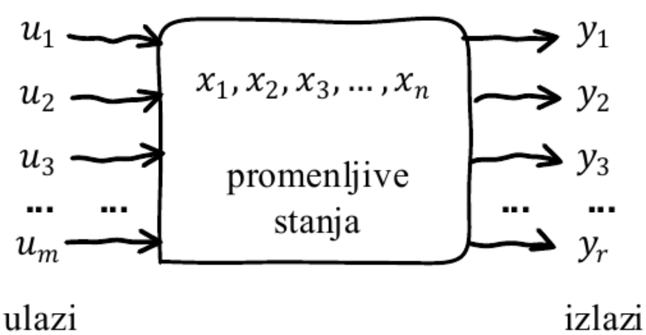
$$\dot{x} = f\left(x_{(t)}, u_{(t)}, t\right) \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = g\left(x_{(t)}, u_{(t)}, t\right)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

2. Primer nelinearnog modela

$$y = au + b$$

3. Multivarijabilni sistem (slika I dimenzije)



4. Kako se opisuje statički model?

- Opisuje se algebarskim jednačinama

5. Kako se opisuje dinamički model?

- Opisuje se diferencijalnim jednačinama

6. Šta su promenljive stanja?

- Promenljive stanja opisuju ponašanje sistema
- Jednoznačno određuju stanje sistema

- Biraju se promenljive koje određuju zakoni fizike.

7. Zašto je diskretizacija bitna?

- Diskretizacija je proces kvantovanja kontinualnog signala u vremenski diskretan signal. Bitna je kako bismo izmerene podatke iz realnog sistema mogli dovesti u računar.

8. Šta se dobija transformacijom modela višeg reda?

- Dobija se skup diferencijalnih jednačina prvog reda.

$$y_i = y^{i-1} \quad i=1$$

IX Linearni matematički model u prostoru stanja

1. Primer linearnog modela

$$y = au_1 + bu_2$$
$$y = f_{(u)} = 2u$$

2. Priemer nelinearnog modela

$$y = au + b$$

3. Vektorski I razvijen zapis linearnog modela

$$x_{(t)} = Ax_{(t)} + Bu_{(t)} \quad A = nxn \quad B = nxm \quad D = rxm$$
$$y_{(t)} = Cx_{(t)} + Du_{(t)}$$

$$\dot{x}(t) = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \ldots + b_{1m}u_m(t)$$
$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \ldots + b_{nm}u_m(t)$$

$$y(t) = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \ldots + b_{nm}u_m(t)$$
$$y_r(t) = c_{r1}x_1 + \ldots + c_{rn}x_n(t) + d_{r1}u_1(t) + \ldots + d_{rm}u_m(t)$$

4. Veza između fizičkih signala I signala u linernom odelu

$$x_k(t) = \bar{x}_k + \hat{x}_k(t), \quad k = 1,2,\dots,n$$
$$u_k(t) = \bar{u}_k + \hat{u}_k(t), \quad k = 1,2,\dots,m$$
$$y_k(t) = \bar{y}_k + \hat{y}_k(t), \quad k = 1,2,\dots,r$$

$\bar{x} \rightarrow nominalan\ vrednost$

$\hat{x} \rightarrow inkrementalna\ vrednost$

5. Osobine linearnosti. Matematički ih opisati

$$superpozicija \quad y_1 + y_2 = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$
$$f(u_1) = y_1 \quad f(u_2) = y_2$$

$$homogenost\ m * y_1 = f(m * u) = m * f(u) \quad f(u) = y_1$$

$$stacionarnost\ y(t - \tau) = f(u(t - \tau)) \quad y = f(u)$$

X Osobine linearnih modela

1. Osobine I matematički ih zapisati (već viđeno)
2. Primer linearnog I nelinearnog modela (već viđeno)
3. Šta je radna tačka?

- Radnu tačku u modelu čine vrednosti ulaza, promenljivih stanja I izlaza. Te vrednosti se predstavljaju zbirom nominalnih I inkrementalnih vrednosti.

- Vrednosti u ustaljenom stanju su nominalne

4. Koji pobudni signali postoje I ašto su bitni?

- Primena osobina linearnih modela je veoma bitna za analizu ponašanja linearnog modela pobuđenog složenim ulaznim signalom. Tada se analiza svodi na analizu ponašanja na pojedinačne ulaze I svaki od ulaza se može predstaviti sumom “elementarnih signala”

XI Linearizacija modela (koraci I radna tačka)

1. Primer nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+8x^3=mg+f_{(t)}$$

2. Priemr linearne diferencijalne jednačine drugog reda

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

3. Koraci linearizacije

1. Odredimo radnu tačku
2. Sve ulaze, izlaze I promenljive stanja zapišemo kao sumu inkrementalnih I nominalnih vrednosti
3. Sve nelinearne članove zamenimo sa prva dva sabirka Ttejlorovog reda
4. Skratimo konstantne članove
5. Definišemo početne vrednosti inkrementalnih vrednosti

4. Čime je određena radna tačka?

- Nominalnim vrednostima ulaza, izlaza I promenljivih stanja

5. Veza fizičkih veličina kod linearizovanog modela?

$$x_k(t) = \bar{x}_k + \hat{x}_k(t), \quad k = 1,2,\dots,n$$
$$u_k(t) = \bar{u}_k + \hat{u}_k(t), \quad k = 1,2,\dots,m$$
$$y_k(t) = \bar{y}_k + \hat{y}_k(t), \quad k = 1,2,\dots,r$$

6. Objasniti grafičku predstavu

- Ukoliko posmatramo funkciju jedne promenljive I prikažemo je na grafiku, radna tačka je mesto u kojoj formiramo tangentu na tu krivu. U okolini radne tačke dobijamo solidno poklapanje linearnog modela sa nelinearnim

7. Objasniti analitički postupak

- Treba napisati ceo postupak linearizacije
- Tejlorov red sa jednom ili dve promenljive

8. Izvesti

- Nelinearna funkcija se razvija u Tejlorov red u okolini $\overline{x}$

XII Linearizacija modela u prostoru stanja

1. Vremenski diskretan model (matrična forma)

$$x_{(k+1)} = Ex_{(k)} + Fu_{(k)}$$
$$y_{(k)} = Cx_{(k)} + Du_{(k)}$$

2. Nelinearni vremenski diskretan model

$$x_{(k+1)} = f\left(x_{(k)}, u_{(k)}, k\right) \quad x_{(0)} = x_0$$
$$y_{(k)} = g\left(x_{(k)}, u_{(k)}, k\right)$$
$$k \equiv kT \quad k = 0, 1, 2$$

3. Primer linearizacije

$$\bar{x}^3 = \bar{u}$$
$$x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t), u(t) = \bar{u} + \hat{u}(t)$$
$$\dot{\hat{x}}(t) + (\bar{x} + \hat{x}(t))^3 = \bar{u} + \hat{u}(t)$$
$$\dot{\hat{x}}(t) + \bar{x}^3 + 3\bar{x}^2\hat{x}(t) = \bar{u} + \hat{u}(t)$$
$$\dot{\hat{x}}(t) + 3\hat{x}(t) = \hat{u}(t)$$

4. Radna tačka (već viđeno)

5. Razvoj u Tejlorov red (već viđeno)

XIII Vremenski diskretan model. Namena, kvantovanje, teorema o odabiranju

1. Šta je odabirač?

- Odabirač je komponenta koja vrši odabiranje po vremenu

2. Matematički zapis povorke signala

$$r^*(t) = r(kT) \cdot \delta(t - kT), \qquad k = 0,1, \ldots$$

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

3. Ċemu služi kolo zadrške 0. reda?

- Omogućava da diskretne vrednosti ostanu nepromenjene tokom trajanja jedne periode

4. Formula za kolo zadrške 0. reda

$$g_0(t)=h(t)-h(t-T)\Rightarrow G_0(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}\Rightarrow G_0(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

5. Formula za povorku signala

$$r^*(t)=\begin{cases} r(kT), & t=kT \\ 0, & t\neq kT \end{cases} \quad k=0,1,\ldots$$

$$R^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot e^{-kTs}$$

6. Teorema o odabiranju

- Ako kontinualni signal f(t) ne sadrži harmonike u području učestanosti w_0, onda se on može zapisati vrednostima udaljenim za periodu $T=0,5(2\pi/w_0)$

7. Izračunati periodu odabiranja ako je data frekvencija

- $T=0,5(2\pi/w_0)$ - formula

8. Kvantovanje signala

1. signali se predstavljaju brojnim vrednostima
2. signali se diskretzuju (po vremenu ili po nivou)
3. kvantovanje po vremenu vrši odabirač (na izlazu se pojavljuje povorka impulsa u trenucima odabiranja t=kT, k=0, 1, 2, …)
4. kvantovanje po nivou vrši analogno – digitalni konvertor (na izlazu se dobijaju brojne vrednosti). Broj vrednosti zavisi od rezolucije A/D konvertora)

9. Razlozi upotrebe

1. upotreba računara (obrada)
2. kodovanje signala
3. vremenski multipleks

XIV Vremenski diskretan model u prostoru stanja. Dobijanje modela

1. napisati u matričnom obliku

$$x_{(k+1)} = Ex_{(k)} + Fu_{(k)}$$
$$y_{(k)} = Cx_{(k)} + Du_{(k)}$$

2. Na osnovu kontinualnog modela izvesti odziv za diskretan model

$$\dot{x}_{(t)} = Ax_{(t)} + Bu_{(t)}$$
$$y_{(t)} = Cx_{(t)} + Du_{(t)}$$

1. posmatramo u t=kT trenutku

$$x_{(kT)} = \Phi_{(kT)} x_0 + \int_0^{kT} \Phi_{(kT-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau$$

2. posmatramo t=kT +T

$$x_{(kT+T)} = \Phi_{(kT+T)} x_0 + \int_0^{kT} \Phi_{(kT+T-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau$$

3. Razdvajamo integral na podintegrale

$$x_{(kT+T)} = \Phi_{(kT+T)} x_0 + \int_0^{kT} \Phi_{(kT-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau + \int_0^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau$$

4. Primenjuje se osobina Φ(a+b)=Φ(a) + Φ(b)

$$x_{(kT+T)} = \Phi_{(T)} \left(\Phi_{(kT)} x_0 + \int_0^{kT} \Phi_{(kT-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau + \int_0^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau \right)$$

5. [kT, kT + T] izlatzni signal je konstantan

$$x_{(kT+T)} = \Phi_{(T)} x_{(kT)} \left(\int_{0}^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)} Bu_{(\tau)} d\tau \right) Bu_{(kT)}$$

6. z = τ – kT

$$\int_{kT}^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)} d\tau = \int_{0}^{T} \Phi_{(T-z)} dz \Rightarrow x_{(kT+T)} = \Phi_{(T)} x_{(kT)} + \left(\int_{0}^{T} \Phi_{(T)} dt \right) Bu_{(kT)}$$

7. y = T – z

$$\int_{0}^{T} \Phi_{(T-z)} dz = \int_{0}^{T} \Phi_{(y)} dy \quad \Rightarrow \quad E = \Phi_{(T)} \quad F = \left(\int_{0}^{T} \Phi_{(t)} dt \right) B$$

$$y_{(k)} = Cx_{(k)} + Du_{(k)}$$

XV Diskretna funkcija prenosa. Diferencna jednačina

1. Definicija diskretne funkcije prenosa?

- Diskretna funkcija prenosa je odnos likova vremenski diskretizovanih signala izlaza I ulaza

2. Nacrtati predstavu diskretne funkcije prenosa

$$U(z) \longrightarrow \boxed{W(z)} \longrightarrow Y(z)$$

3. Kako matematički izgleda?

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

4. Šta je promenljiva z?

- Z je kompleksna promenljiva z = e^{sT}

5. kako se u kodu pravi funkcija prenosa?

```
m = tf(P,Q); - za funkciju prenosa
```

```
m = tf(P, Q, T); - za diskretizovanu funkciju prenosa
```

6. Primer funkcije prenosa 2. reda (diskretne)

$$U_{(z)} = \frac{2z+1}{z^2+z+1} \rightarrow \textit{stepen u imeniocu određuje red}$$

7. Napisati diferencnu jednačinu za taj primer

$$W_{(z^{-1})} = \frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} = \frac{Y_{(z)}}{U_{(z)}}$$

$$\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)Y_{(z)} = \left(2z^{-1}+z^{-2}\right)U_{(z)}$$

$$y_{(k)} + y_{(k-1)} + y_{(k-2)} = 2u_{(k-1)} + u_{(k-2)} \rightarrow \textit{diferencna jednačina}$$

XVI Dobijanje funkcije prenosa od matematičkog modela u prostoru stanja. Funkcija prenosa multivarijabilnog sistema

1. Definicija

- Odnos Laplasove transformacije izlaznog I ulaznog signala uz pretpostavku da su početni uslovi nula

2. Crtež sa signalima

3. Izvesti formulu za funkciju prenosa

$$x_{(t)} = Ax_{(t)} + Bu_{(t)}$$
$$y_{(t)} = Cx_{(t)} + Du_{(t)}$$

$$sX_{(s)} = AX_{(s)} + BU_{(s)}$$
$$X_{(s)} = (sI - A)^{-1} BU_{(s)}$$
$$Y_{(s)} = CX_{(s)} + DU_{(s)}$$
$$Y_{(s)} = ((C(sI - A)^{-1} B) + D) U_{(s)}$$
$$\frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}} = ((C(sI - A)^{-1} B) + D) = G_{(s)}$$

4. Napisati primer funkcije prenosa 2. reda. Diferencijalna jedančina od te funkcije prenosa

$$G_{(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow \frac{1}{s^2 + 2s + 3} = \frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}} \Rightarrow$$
$$s^2 Y_{(s)} + 2sY_{(s)} + 3Y_{(s)} = U_{(s)} \ / \mathscr{L}^{-1}$$
$$\ddot{y}_{(t)} + 2\dot{y}_{(t)} + 3y_{(t)} = u_{(t)}$$

XVII Translatorni mehanički sistemi - promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Promenljive:

- pozicija tela (biramo kao promenljivu stanja)
- brzina tela (proemnljiva stanja)
- ubrzanje tela

Elementi:

- masa – kvantitativna mera inertnosti $d/dt(m*v)=\sum f_i$
- trenje – javlja se kada se dva tela različitih brzina dodiruju fc=c*Δv, Δv=v2-v1, c – koeficijent trenja
- elastičnost – istezanje $\Delta x = x_2 - x_1$,, k – koeficijent elastičnosti $f_e=k\Delta x$

Zakonistosti:

- I Njutnov zakon (Dalamberov) – za svako telo koje ima masu važi $d/dt(m*v)=\sum f_i$ => $\sum f_i=0$
- III Njutnov zakon (zakon akcije I reakcije)
- Zakon pomeraja - $\sum \Delta x_i=0$

Nelinearnost

- Model je nelinearan kada su unjega uključene nelinearne veze fizičkih veličina

Red modela

- na osnovu postavljenih diferencijalnih jednačina znamo kog reda je model. Npr. Ako imamo 2 diferencijalne jednačine 2. reda => model je 4. reda

Formiranje modela

1. usvojimo poziciju I referentni smer kretanja
2. posmatramo sile koje deluju na telo
3. pišemo jednačine na osnovu ravnotežnih sila

XVIII Rotacioni mehanički sistemi – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Promenljive:

- ugaoni pomeraj θ (uzima se kao promenljiva stanja)
- ugaona brzina ω
- ugaono ubrzanje α
- moment sile τ

Elementi:

- moment inercije $J = mr^2$, $J \sum m_i r_i^2$
- trenje $\tau_t = c\Delta\omega$ c – koeficijent trenja
- elastičnost pri rotaciji $\tau_e = k\Delta\theta$
- poluga $x_2/x_1 = L_2/L_1$ $v_2/v_1 = x_2/x_1 = a_2/a_1$
- zupčanici $\theta_1/\theta_2 = R_2/R_1 = 2\pi R_2/2\pi R_1 = z_2/z_1 = N$

Zakonitosti:

- II Njutnov zakon (Dalamberov) – telo koje se rotira $d(J\omega)/dt=\tau$ moment inercije materijalne tačke koja rotira na rastojanju r $J=dmr^2$. Ako je J=const onda je $J\omega' = \tau$
- Zakon ugaonih pomeraja – suma ugaonih pomeraja duž atvorene putanje je nula - $\sum\Delta\theta_i=0$
- Zakon akcije I reakcije – kada jedno telo deluje momentom sile na drugo telo, tada I drugo telo deluje momentom sile istog inteziteta, a suprotnog smera

Dobijanje modela:

1. naznači se pozitivan smer za osnovne promenljive
2. zakon ugaonih pomeraja
3. crta se dijagram za svako telo koje ima inerciju
4. Dalamberov zakon za svaki dijagram

Red modela:

- Na osnovu reda diferencijalne jednačine možemo odrediti kog je reda model. Npr. Imamo 2 diferencijalne jednačine 2. reda => model je 4. reda

Nelinearnost modela:

- Model je nelinearan kada ne ispunjava osobine linearnosti (homogenost, stacionarnost I superpoziciju)

Priprema za simulaciju:

- formiranje FBD dijagrama
- postavljamo jednačine na osnovu FBD dijagrama
- postupak transformacije diferencijalnih jednačina višeg reda u diferencijalne jednačine prvog reda
- upotrebom ODE softvera rešava se sistem diferencijalnih jednačina koje su prvog reda

XIX Termički sistemi – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Prmemnljive:

- temperatura tela θ (biramo za promenljivu stanja temperaturu svakog tela koji ima toplotni kapacitet)
- količina toplote q

Elementi:

- termička kapacitivnost (pasivan) -

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{C}\left(q_{in}(t) - q_{out}(t)\right)$$

- termička otpornost (pasivan) – vezana za proces provođenja toplote

$$q(t) = \frac{1}{R}\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right]$$

- termički izvor (aktivan)

Nelinearnost:

- Ukoliko u modelu postoji neka fizička veličina koja je nelinearna, tada je I model nelionearan

Dobijanje modela:

- Kao promenljive stanja se uzimaju temperature svakog tela koje ima toplotni kapacitet. Prenošenje toplote u telu sa toplotnim kapacitetom zavisi od izvora toplote I prenošenja toplote preko termičkih otpornosti.

XX Sistemi sa fluidima

Povezuju se sa mehaničkim sistemima preko pumpi, ventila, klipova.
Složena zbog nelinearnih karakteristika sistema I prostorne zavisnosti fizičkih veličina

Promenljive:
- zapreminski protok q
- zapremina V
- visina h
- pritisak p

Elementi:
- kapacitet posude za tečnost – hidraulički kapacitet
- otpor proticanja – hidraulička otpornost

Hidraulički kapacitet:
- veza između zapremine tečnosti u posudi I pritiska na dnu posude

$$c_{(h)} = \frac{dV}{dp} = \frac{A_{(h)}}{\rho q}$$

Ventil:

$$q = k\sqrt{\Delta p}$$

$q = f(\Delta p) \rightarrow nelinearna\ veza\ između\ zapreminskog\ protoka\ q\ i\ pada\ pritiska\ na\ elementu$

Hidraulička otpornost R

$$\hat{q} = \frac{1}{R}\Delta\hat{p} \quad \frac{1}{R} = \frac{dp}{d\Delta p}$$

Pumpa:

- izvor energije
- energija se prenosi od elektromotora

Kretanje fluida:

- brzina na istom mestu se ne menja => stacionarno stanje
- fluid je nestišljiv, kreće se => prolazi jednaka masa fluida

$$\frac{{v_1}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=const \rightarrow Bernulijeva\ jedna\check{c}ina$$

$$\frac{{v_1}^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+qz_1=\frac{{v_2}^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+qz_2+\sum_i h_i g \quad h_i - gubici$$

gubici:

1. usled lokalnih otpora (nastaju na mestima na koijma fluidna struja menja pravac, smer I intezitet
2. usled trenja u cevima

XXI Električni sistemi

Promeljive:

- napon u
- jačina struje i
- električna snaga p=ui
- elektična energija E=∫p(t)dt

Elementi:

- otpornik (pasivni)
- kalem (pasivni)
- kondenzator (pasivni)
- strujni I naponski izvor (aktivni)

Zakoni:

- Omov zakon – u(t) = Ri(t) pad napona na otporniku R je proporcionalan struji kroz taj otpornik

- Kirhofovi zakoni
    1. I $\Sigma i_k=0$ ako je kolo sa n čvorova – n-1 jednačina

2. II $\Sigma u_k=0$ m-n+1 jednačina (m - broj grana, n – broj čvorova)

XXII Laplasova transformacija: definicija, osobine i primena u modelovanju i analizi sistema

1. Definicija Lpalasove transdformacije i inverzne laplasove transfrormacije

$$F_{(s)}=\mathscr{L}\{f_{(t)}\}=\int_{0}^{t} f_{(t)}dt \quad t>0$$

$$f_{(t)}=\mathscr{L}^{-1}\{F_{(s)}\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{y-iw}^{y+iw} F_{(s)}e^{st}ds \quad t>0$$

2 . Navesti osobine

1. linearnost
2. čisto vremensko kašnjenje
3. izvod originala
4. pomeranje kompleksnog lika
5. konvolucija originala
6. izvod komleksnog lika
7. granične vrednosti

3. Dokaži čisto vremensko kašnjenje

$$\mathscr{L}\{f_{(t-\tau)}\}=\int_{0}^{\infty} f_{(t-\tau)}e^{-st}dt= \quad [t-\tau=v \quad dt=dv]$$

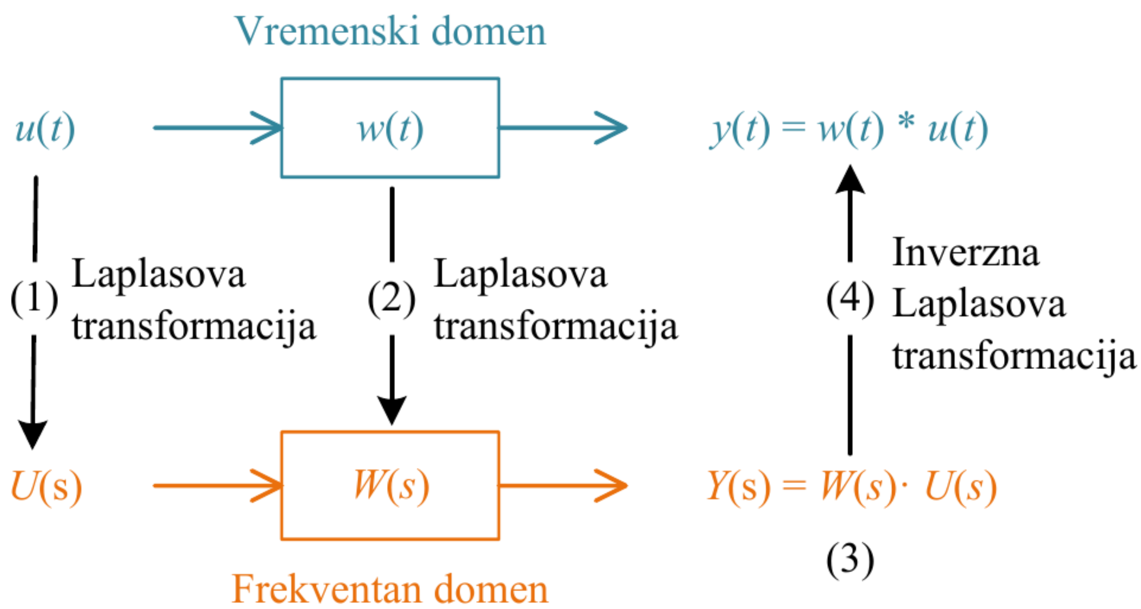
$$\int_{0}^{\infty} f_{(v)}e^{-s(v+\tau)}dv$$

$$e^{-s\tau}\int_{0}^{\infty} f_{(v)}e^{-sv}dv=e^{-s\tau}F_{(s)}$$

4. Šta je promenljiva s?

- Promenljiva s je Laplasov operator, kompleksna promenljiva. Naziva se I operator diferenciranja jer množenje sa s u kompleksnom domenu odgovara diferenciranju po t u vremenskom domenu

5. Kako se formira model Laplasa?

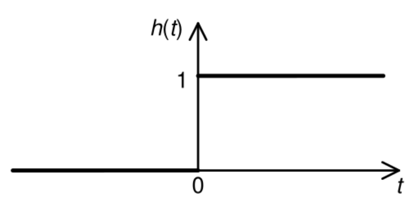


XXIII Standardni pobudni signali. Primena Laplasove transformacije na signale

1. Hevisajdov (jedinični) signal

- Poznat kao jedinični signal

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



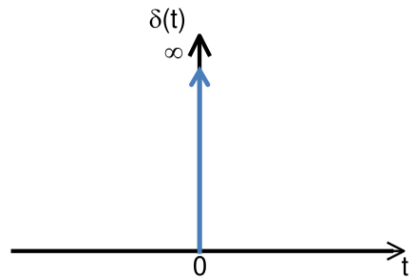
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

2. Dirakov impuls

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

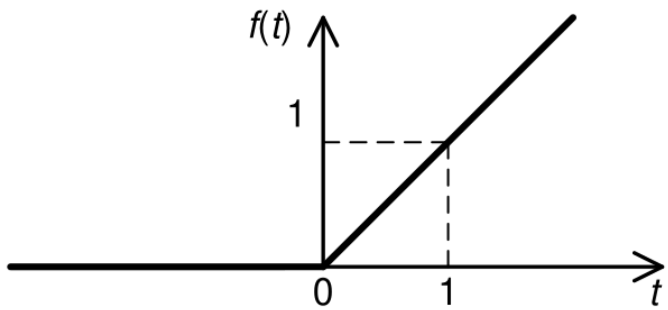
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$



$$D(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{0}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$D(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{h(t)\} - h(0_{-}) = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$$

3. Jedinični nagibni signal



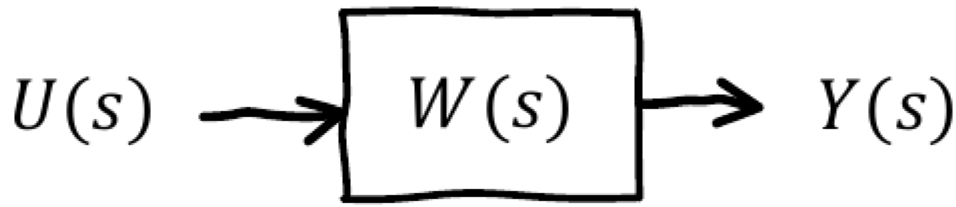
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot h(t)\} = \int_{0}^{\infty} t \cdot e^{-st}dt = -\frac{t \cdot e^{-st}}{s}\bigg|_{0}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

$$u = t, dv = e^{-st}dt$$

XXIV Funkcija prenosa sistema sa jednim ulazom I jednim izlazom

1. Nacrtati sliku funkcije prenosa I obeležiti signale



2. Definicija funkcije prenosa

- Funkcija prenosa je odnos Laplasovih transformacija izlaznog I ulaznog signala uz početne uslove jednake nuli

3. Kako se definiše kašnjenje?

- Funkcija prenosa se pomnoži sa $e^{-s\tau}$
- primer modela prvog reda I njegova funkcija prenosa

$$G_{(s)} = \frac{k}{1+Ts} e^{-\tau s} \quad \tau - vremensko\ kašnjenje$$

4. Šta su polovi, a šta su nule?

$$W_{(S)} = \frac{P_{(S)}}{Q_{(s)}}$$

$$Q_{(S)} - predstavljaju\ polove\ , koreni\ imenioca$$

$$P_{(s)} - nule\ , koreni\ broioca\ funkcije\ prenosa$$

5. Faktorizovan oblik

$$W_{(s)} = k \frac{(s-r_1)....(s-r_m)}{(s-t_1)....(s-t_n)} \quad k - pojačanje$$

$$t_1 \ldots t_n - polovi\,(određuju\,karakter\ ponašanja\ sistema)$$

$$r_1 \ldots r_m - nule$$

6. Kako se defineiše funkcija prenosa multivarijabilnog sistema?

$$G_{(s)} = \frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}}$$

$$G_{(s)} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{1m} \\ . & . & . \\ G_{r1} & G_{r2} & G_{rm} \end{bmatrix}$$

$$U_{(s)} = \begin{bmatrix} U_1 \\ . \\ U_m \end{bmatrix} \quad Y_{(S)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ . \\ Y_m \end{bmatrix}$$

7. Predstave funkcije prenosa

$$G_{(s)}=\frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}}=\frac{b_m s^n+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1} s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

$$W_{(s)}=k\frac{(s-r_1)\ldots(s-r_m)}{(s-t_1)\ldots(s-t_n)}$$

8. Zašto je model na pobudu datu zbirom dve pobude jednak zbiru odziva na te dve pobude pojedinačno?

- Princip superpozicije

10. Kako se modeluje kašnjenje kod funkcije prenosa?

$$G_{(s)}=\frac{k}{1+Ts}e^{-\tau s} \quad \tau-vremensko\,kašnjenje$$

XXV Analitičko izračunavanje izlaza primenom inverzne Laplasove transformacije

1. Koraci

$$F_{(s)}=\frac{P_{(s)}}{Q_{(s)}}=\frac{b_m s^n+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1} s^{n-1}+\ldots+a_0}$$

1. rastavljamo F(s) na pracijalne sabirke
2. Prepoznajemo sabirke u tablicama Laplasove transfrormacije I pišemo originale

2. Šta zavisi od polova funkcije prenosa?

- Od polova funkcije prenosa zavisi nam ponašanje sistema tj. Kakav će na biti odziv

3. Kakvi su polovi ako je odziv kritično aperiodičan? ($D=\varepsilon^2-1$ - diskriminanta)

- Polovi su realni I jenaki ($\varepsilon=1$ $D=0$)

4.Kakvi su polovi ako je odziv aperiodičan?

- Polovi su srealni I različiti ($\varepsilon>1$ $D>0$)

5. Kakvi su polovi ako je odziv periodičan?

- Polovi su konjugovano kompleksni sa negativnim realnim delom ($0<=\varepsilon<1$

6. Kakvi su polovi ako je odziv periodičan?

- Polovi su konjugovano kompleksni sa realnim delom nula ($\varepsilon=0$ $D<0$)

XXVI Analitičko izračunavanje izlaza linearnog modela u prostoru stanja. Fundamentalna matrica

1. Linearni model u prostoru stanja - matrično

$$\dot{x}_{(t)}=Ax_{(t)}+Bu_{(t)} \quad A=nxn \quad B=nxm$$
$$y_{(t)}=Cx_{(t)}+Du_{(t)} \quad C=rxn \quad D=rxm$$

2. Linearan model u prostoru stanja – razvijen oblik

$$\dot{x}(t)=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n(t)+b_{11}u_1(t)+\ldots+b_{1m}u_m(t)$$
$$\dot{x}_n(t)=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n(t)+b_{n1}u_1(t)+\ldots+b_{nm}u_m(t)$$

$$y(t)=c_{11}x_1+\ldots+c_{1n}x_n(t)+b_{11}u_1(t)+\ldots+b_{nm}u_m(t)$$
$$y_r(t)=c_{r1}x_1+\ldots+c_{rn}x_n(t)+d_{r1}u_1(t)+\ldots+d_{rm}u_m(t)$$

3. Definisati fundamentalnu matricu

$$\Phi_{(t)} = \mathscr{L}^{-1}\{\Phi_{(s)}\} \quad \Phi_{(S)} = (sI - A)^{-1}$$

$$\Phi_{(t)} = e^{At} \quad A - skalar$$

4. Kako se dobijaju promenljive stanja I izlaz

$$\dot{x}_{(t)} = Ax_{(t)} + Bu_{(t)} / \mathscr{L}$$

$$sX_{(S)} - X_0 = AX_{(S)} + BU_{(S)}$$

$$(sI - A)X_{(S)} = X_0 + BU_{(s)} \quad I - identična\, matrica$$

$$X_{(S)} = (sI - A)^{-1} X_0 + (sI - A)^{-1} BU_{(s)} / \mathscr{L}^{-1}$$

$$x_{(t)} = \Phi_{(t)} x_0 + \int_0^t \Phi_{(t-\tau)} Bu_{(\tau)} d\,\tau \quad kretanje\ promenljivih\, stanja$$

$$\Phi_{(t)} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$y_{(t)} = Cx_{(t)} + Du_{(t)}$$

$$y_{(t)} = C\,\Phi_{(t)} x_0 + C\int_0^t \Phi_{(t-\tau)} d\,\tau + Du_{(T)}$$

XXVII Numeričko izračunavanje izlaza linearnog vremenski diskretnog modela u prostoru stanja

1. Linearan kontinualni model u prostoru stanja

$$\dot{x}_{(t)} = Ax_{(t)} + Bu_{(t)} \quad A = nxn \quad B = nxm$$
$$y_{(t)} = Cx_{(t)} + Du_{(t)} \quad C = rxn \quad D = rxm$$

2. Linearan diskretni model u prostoru stanja

$$x_{(k+1)} = Ex_{(k)} + Fu_{(k)}$$
$$y_{(k)} = Cx_{(k)} + Du_{(k)}$$

3. Primeniti izraz x(t)=F(t)x_0 +… odrediti (izvesti) matrice vremenski diskretnog modela

$$x_{(t)}=\Phi_{(t)}x_0+\int_0^t \Phi_{(t-\tau)}Bu_{(t)}d\,\tau$$

$t=kT$

$$x_{(kT)}=\Phi_{(kT)}x_0+\int_0^{kT} \Phi_{(kT-\tau)}Bu_{(\tau)}d\,\tau$$

$t=kT+T$

$$x_{(kT+T)}=\Phi_{(kT+T)}x_0+\int_0^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)}Bu_{(\tau)}d\,\tau$$

$$x_{(kT+T)}=\Phi_{(kT+T)}x_0+\int_0^{kT} \Phi_{(kT-\tau)}Bu_{(\tau)}d\,\tau+\int_{kT}^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)}Bu_{(\tau)}d\,\tau$$

$$x_{(kT+T)}=\Phi_{(T)}(\Phi_{(kT)}x_0+\int_0^{kT} \Phi_{(kT-\tau)}Bu_{(\tau)}d\,\tau)+\int_{kT}^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)}Bu_{(\tau)}d\,\tau$$

$[kT, kT+T]$

$$x_{(kT+T)}=\Phi_{(T)}x_{(kT)}+(\int_{kT}^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)}d\,\tau)Bu_{(\tau)}$$

$z=\tau-kT$

$$\int_{kT}^{kT+T} \Phi_{(kT+T-\tau)}d\,\tau=\int_0^T \Phi_{(T-z)}dz$$

$v=T-z$

$$\int_0^T \Phi_{(T-z)}dz=\int_0^T \Phi_{(v)}dv$$

$$x_{(kT+T)}=\Phi_{(T)}x_{(kT)}+(\int_0^T \Phi_{(t)}dt)Bu_{(kT)}$$

$$E=\Phi_{(T)}$$

$$F=(\int_0^T \Phi_{(t)}dt)B$$

$$y_{(k)}=Cx_{(k)}+Du_{(k)}$$

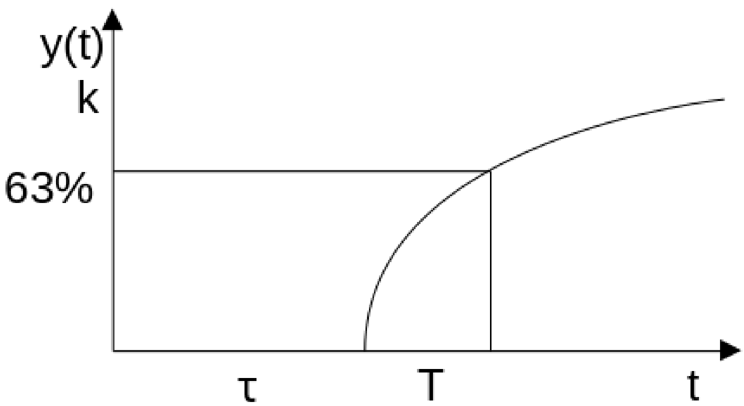
XXIX Dinamički modeli prvog I drugog reda. Utical lokacije polova

1. Šta je funkcija prenosa? (već viđeno)

2. Model prvog reda – fromula

$$G_{(s)} = \frac{k}{1+Ts} e^{-\tau s}$$

3. Odziv modela na jediničnu pobudu – grafik



k – pojačanje
T – vremenska konstanta
τ – vremensko kašnjenje

4. Kašnjenje modela prvog reda?

- Funkcija prenosa se množi sa $e^{-s\tau}$, gde τ predstavlja vremensko kašnjenje

5. Model 2. reda – formula

$$G_{(s)} = \frac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\%\,\zeta\,\omega_n s + \omega_n{}^2} e^{-\tau s}$$

$$k - statičko\ ponašanje$$

$$\omega_n - neprigušena\ prirodna\ učestanost$$

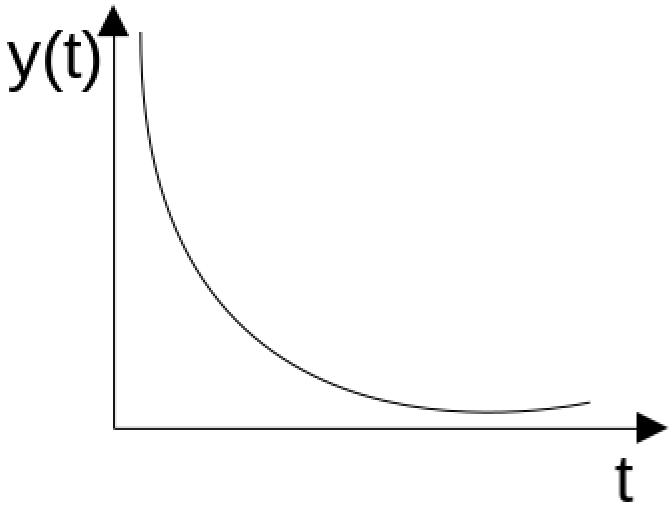
$$\zeta - koeficijent\ prigušenja$$

6. Kritično aperiodičan odziv

- ω_n I ζ utiču na karakter ponašanja. $\zeta=1$ – odziv je kritično periodičan

7. Prigušeno periodičan odziv – grafik

- Polovi su realni I prosti



XXX Numeričko rešavanje algebarskih jednačina. Metoda najmanjih kvadrata

1. Kako izgleda linearan model u prostoru stanja? (već viđeno)

2. Kako izgleda rešenje ako je sistem određen?

- Kada je sistem određen tada postoji jedno rešenje (jedan skup od n vrednosti)

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{11} x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x = A \setminus B - julia$$

3. Kako izgleda rešenje kada sistem nije određen?

- Neodređen=> m><n (sistem nije jednoznačan, ne mora imati rešenje)
- Koristi se metoda najmanjih kvadrata

4. Koja se metoda koristi ako je sistem preodređen? Definisati

- Metoda najmanjih kvadrata m><n uvodi grešku

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n - b_1 = e_1$$
$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n - b_m = e_m$$

- Do nepoznatih vrednosti se dolazi minimizacijom ukupnog odstupanja

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} {e_k}^2$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b - metoda\, najmanjih\, kvadrata$$

5. Kako gradijentni metod obezbeđuje smanjanje funkcije cilja?

- Da bi se J smanjilo iz iteracije u iteraciju potrebno je da

$$J_{(x_0)} > J_{(x_1)} > \ldots > J_{(x_k)} > J_{(x_{k+1})} > J_{(x_{k+1})} - J_{(x_k)} < 0$$

Odavde se usvaja Δx

$$\Delta x = -h \nabla J_{(x_h)} \quad h > 0 - ovim\, obezbeđujemo\, da\, drugi\, sabirak\, u\, jednačini$$
$$J_{(x_{k+1})} \approx J_{(x_K)} + \underbrace{\nabla^T J_{(x_k)} \Delta x_k}_{negativan}, bude\, negativan$$

XXXI Numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Ojlerova metoda I promenljivi korat integracije

1. Definicija Ojlerovog metoda

$$polazni\, problem - \frac{dy}{dt} = f_{(y,t)} \quad y_{(t_0)} = y_0$$

$$y_{i+1} = y_1 + \Delta y = y_i + \frac{dy_i}{dt} h + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{h^2}{2!} + \ldots + ¿ h = t_{n+1} - t_1$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{dy_i}{dt} h, loša\, procena, dodajemo\, \delta sabirak\, gde\, se\, dobija\, tačnije\, y_{i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dt} h + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{h^2}{2!}$$

2. Osnovna ideja

- Zasnovan je na određivanju y_{i+1}, koji se može odrediti na osnovu razvoja u Tejlorov red u okolini tačke (t_i, y_i)

3. Koji su početni elementi

- y_i je izračunata vrednost na osnovu t_i I znamo izvod $f(y_i,t_i)$ => treba da se odredi y_{i+1}

4. Procena vrednosti

$$y_{i+1}^{p} = y_i + \frac{dy_i}{dt} h$$

5. Korigovana vrednost

$$y_{i+1}^{c} = y_{i+1}^{p} + \epsilon_i$$

$$\epsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^{p}}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) \frac{h}{2} - korekcija$$

6. Šta je problem kod fiksnog koraka integracije?

- Ne može da se prilagođava po iteracijama I samim tim je manje efikasna
- Numeričko rešavanje sa manjim korakom ima manju grešku

7. Kako se ispravlja korak integracije?

- Na osnovu veličine korakcije možemo prilagoditi korak h
  1. za veliko ε => smanjiti h
  2. za malo ε => povećati h

8. Formula za ε (korekcija)

$$\epsilon = \left(\frac{dy_{i+1}}{dt} - \frac{dy_i}{dt} \right) \frac{h}{2}$$

9. Dobra osobina diksnog koraka?

- Uvek znamo vrednost pa je računanje jednostavnije

XXXIII Numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina – Runge-Kuta metode

1. Opiši šta on radi, koji mu je cilj, od čega kreće I šta mu je poznato

- Rešava obične diferencijalne jednačine 1 . reda
- Uopštenje je Ojlerovog postupka. Uvedeno je više članova koji bolje aproksiiraju traženu vrednost y
- Ako koristimo 2 člana onda se govori o metodama 2 reda
- Pretpostavili su da postoje neke konstante koje se koriste u proračunu I da to ne moraju da budu tačne vrednosti koje je stavio Ojler
- Poznato mu je y_i u t_i trenutku I izvod $f(y_i,t_i)$ a traži se y_{i+1}

2.Kako Runge – Kuta rešava diferencijalne jednačine višeg reda?

- Jednačine se prepišu u sistem n diferencijalnih jednačina prvog reda, uvodi se n k promenljivih, kolko ima jednačina u sistemu toliko će biti I k_n

3. Kako bi Runge – Kuta realizovao Ojlerovu jednačinu drugog reda?

- Runge – Kuta uvodi 3 konstante c_1, c_2, a_2

$$y_{i+1}=y_i+c_1k_1+c_2k_2$$

$$k_1=f_{(y_i,t_i)}h$$

$$k_2=f(y_i+a_2k_1,t_i+a_2h)h$$

Dobijamo sistem 2 jednačine sa 3 nepoznate, tako da postoji više rešenja za c_1, c_2, a_2 $c_1+c_2=1$ $c_2a_2=1/2$

4. Kruti modeli

- Kod krutih problema neke promenljive stanja se mogu menjati vrlo sporo u odnosu na interval simulacije, a druge mnogo brže. Metode koje nisu dizajnirane za krute probleme nisu efikasne jer ne primenjuju mali korak integracije

5. Dobre I loše osobine

- Dobre osobine: bolja aproksimacija od Ojlerovog metoda
- Loše osobine: metode 2. reda nemaju tačnost pa se koriste metode 3. reda

6. Gde su aproksimacije?

- Aproksimacije su u višim redovima Tejlorovog reda

7. Šta znači Runge – Kuta 4-5

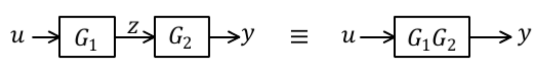
- Predstavlja Runge – Kuta metodu 4 – 5 reda. Kada se iz Tejlorovog reda uzmu prvih 5 sabiraka dobijaju se Runge – Kuta 4 - 5

XXXIV Strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja. Algebra funkcija prenosa

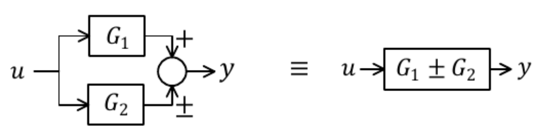
1. Šta je strukturni blok dijagram I koji su njegovi elementi

- SBD je grafička predstava matematičkog modela
- elementi:
  1. grane
  2. signali (opisuju veze između čvorova)
  3. čvorovi
  4. sabirači

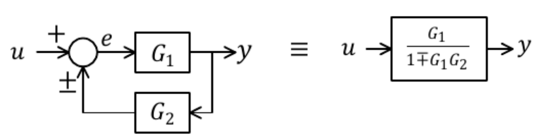
2. Osnovne transformacije?



$z = G_1 u, y = G_2 z \rightarrow y = G_1 G_2 u$

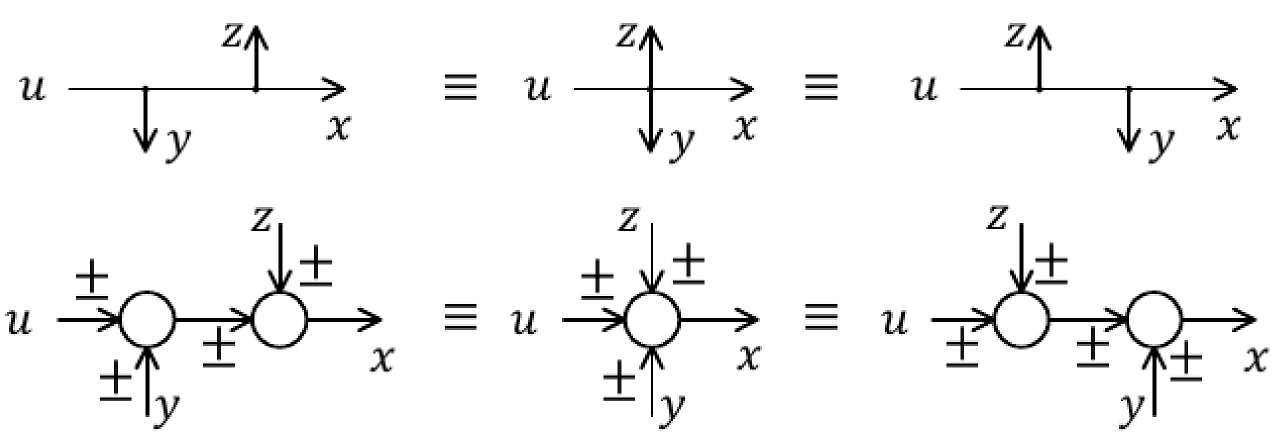


$y_1 = G_1 u, y_2 = G_2 u, y = y_1 \pm y_2 \rightarrow y = (G_1 \pm G_2)u$



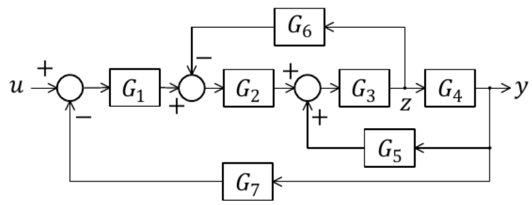
$e = u \pm G_2 y, y = G_1 e, y = G_1 u \pm G_1 G_2 y \rightarrow y = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2} u$

3. Trivijalne transformacije

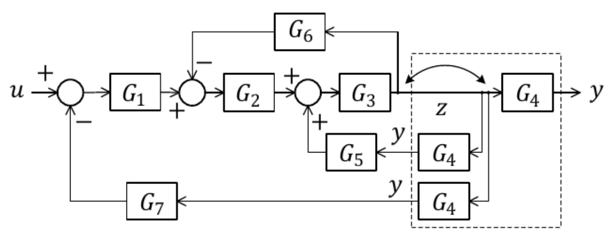


4. Primer blok fijagrama

- Pre:



- Posle:



Postoje i drugi načini:
1. Izvlačenje bloka G_4 ispred čvora z
2. Izvlačenje bloka G_2 ispred srednjeg (njemu levog) diskriminatora
3. Izvlačenje bloka G_2 iza desnog diskriminatora

5. Kada I zašto se koriste jednostavne transformacije

- Koristimo kad želimo da uprostimo strukturni blok dijagram kako bismo došli do funkcije prenosa => želimo dobiti model celog sistema
- Ukoliko ne možemo da iskoristimo neku od osnovnih transformacija da koristimo jednostavne transforamcije

XXXV Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina upotrebom Julija softvera. Metoda najmanjih
kvadrata

1. Ax = b A = mxn x = nx1 b = mx1

2.
- regularnih=> $x=A^{-1}b$=>x=A\b (julia)
- neregularnih (metoda najmanjih kvadrata) =>$x=(A^TA)^{-1}A^Tb$=>2e=Ax-b x=A\b eJ=e´*e

3. Preodređeni oblik sistema linearnih jednačina

x=inv(A´*A)*A´B
$x=(A^TA)^{-1}A^TB$

4. Funkcija cilja

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$$

XXXVI Rešavanje običnih diferencijlanih jednačina upotrebom Julija softverske biblioteke DifferentialEquations (opis jednačina, parametri modela, izbor algoritma, parametri algoritma)

- postupak rešavanja ima sledeće korake:
  1. definisanje problema
  2. rešavanje problema
  3. analiza rezultata

- definisanje problema podrazumeva pisanje funkcije probelma ODE
  1. jedne ODE
  2. sistema ODE(više jednačina 1. reda)

- upotreba:
  1. uključiti biblioteku DifferentialEquations
  2. uvesti promenjlivu koja definiše problem – prob = ODEProblem(f, y0, vremenskiopseg, parametri)
     - f – funkcija koja definiše izvode
     - y0 – početne vrednosti zavisno preomenjlive
     - vremenskiOpseg – posmatrani vremenski interval
     - parametri
  3. numerički rešiti problem – r = solve(prob)
     - r.u – sadrži odgovarajuće vredsnoti zavisno promenljivih
     - r.t – vremenski trenuci izračunavanja

XXXVII Načini predstavljanja modela I konverzije u Julia softverskom paketu ControlSystems

- tipovi modela
  1. linearni, vremenski diskretni modeli
     - model u prostoru stanja – ss
     - funkcija prenosa opisana količnikom polinoma – tf
     - funkcija prenosa opisana nulama/polovima/pojačanjam – zpk
  2. vremesnki diskretni modeli (imaju dodatan parametar Ts – vreme odabiranja)

- model se opisuje jednom promenljivom
- konstruktori modela (ss, tf, zpk) se mogu koristiti da konvertuju već formiran model
- funkcija c2d konvertuje vremenski kontinualan u vremenski diskretan model (potrebna je promenljiva Ts sa kojom se zadaje period odabiranja)

- primer – ss(A,B,C,D,Ts) – vremesnki diskretan
- primer – tf(P,Q) P = 3 Q =[1 1.25 9]
- primer – nule = [] polovi = [0, -12.5] pojačanje =3.9 hm = zpk(nule,polovi,pojačanje)
- primer konverzije h = tf(1,[1,2,1]) hm=zpk(h)
- primer diskretizacije hd=c2d(hm,Ts)

XXXVIII Analiza ponašanja modela u Julia softverskom paketu ControlSystems

- analiza se može sprovesi u vremenskom I u kompleksnom domenu
- analiza u vremesnkom domenu se odnosi na simulaciju, tj. Na izračunavanje izlaza kada se model pobudi željenim ulazom

- funkcije za izračunavanje izlaza su:
  1. lsim – daje odziv na ulaz zadat u vidu niza vrednosti (može se zadati početna vrednost promenljivih stanja)
  2. step – daje jedinični odziv (ulaz je Hevisajdov signal)
  3. impulse – impulsni odziv (ulaz je Dirakov impuls)

XXXIX Formiranje složenih linearnih modela u Julia softverskom paketu ControlSystems

- delovi sistema su opisani promenljivima ss, tf, zpk
- na delove modela s mogu primeniti transformacije modela

- postupno povezivanje modela:
  1. series – serijska veza (može se koristiti operator *)
  2. parallel – paralelna veza (može se koristiti operator +)
  3. feedback – povratna sprega (mogu se koristiti operatori ^ i /)

- append – povezivanje delova u nepovezan model – dobija se blok dijagonalna forma rezultujućeg modela

XL Zadeh-ov opis problema identifikacije. Primena I načini sprovođenja. Postupak identifikacije

1. Definicija po Zadeh-u

- Zadeh: "Identifikacija je određivanje na osnovu ulaznih i izlaznih signala procesa, modela iz određene klase modela, koji je ekvivalentan procesu na kome su izvršena određena merenja."

2. Bavi se formiranjem modela na osnovu podataka iz posmatranog sistema

3. Potrebno je:
   - usvojiti strukturu ekvivalencije
   - definisati kriterijum ekvivalencije
   - izvršiti merenja

4. Postupak identifikacije:

   1. izmerimo podatkle ulaza I izlaza
   2. filtriramo, one koje smetaju eliminišemo
   3. definšemo klasu modela

4. definišemo konkretan model
5. ispitujemo usvojene osobine
6. ukoliko ne zadvoljava => 4 (menjamo algoritam identifikacije), 3 (menjamo strukturu modela), 2 I 1 (novi ulaz/izlaz)

5. Način sprovođenja identifikacije:
1. on-line- određivanjemodela se vrši tokom rada objekta(proces je automatizovan)
2. off-line - formiranje modela se vrši van normalnog rada objekta
3. real-time - on-line identifikacija gde se procesiranje merenih podataka vrši posle svake periode odabiranja

6. Šta je identifijabilnost?

- To je osobina modela koja se vezuje za mogućnost procene odrađenog modela
- Uvek se određuje preko funkcije osetljivosti

$$U_{i(t,a)} = \frac{dy_{(t,a)}}{dq} - linearno\, nezavisna - model\, identifijabilan$$

7. Rezidual određuje disperziju signala šuma

$$\epsilon = y - s\hat{q}\,,\, gde\, su\, pojedinačne\, vrednosti\; \epsilon_k = y_k - u_k \hat{q}$$

XLI Metode parametarske identifikacije (kratak opis linearnih i nelinearni modela i metoda identifikacije)

1. Pomoću iterativnog postupka tj. Iterativne metode parametarske identifikacije

$$J_{(q)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k-1} e^T_{k(q)} e_{k(q)}$$

← matrični oblik
e – greške

$$e_{k(q)} = e_{(k,q)} = J_{v(k)} - y_{(k,q)}$$

J – razlika izmerenih izlaza sistema
y – izlaz iz modela

=> kriterijum optimalnosti

$$J_{(q)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k-1} e^2_{k(q)}$$

$$q_{(n+1)} = q_n + \Delta q_n$$

- u svakoj iteraciji se vrši korigovanje tekuće vrednosti parametra q_n za Δq_n
q_0 – početna procena, približna stvarnoj vrednosti

=> Gradijentni, Gaus-Njutnov su iterativni postupci

$$\|\Delta q_m\| = \sum_{i=0}^{i} \Delta q_i^2$$ zaustavljanje

$$\|\Delta q_m\| < e_q$$

$$\Delta(q_m) < e_j$$

n_{max} – dozvoljen broj iteracija $n < n_{max}$

2. ARX I ARMAX

=> generalizovana struktura

$$A_{(z)} y_{(t)} = \frac{B_{(z)}}{F_{(z)}} u_{(t)} + \frac{C_{(z)}}{D_{(z)}} v_{(t)}$$

3. Primenom metode najmanjih kvadrata (rekurzivna metoda najmanjih kvadrata)

$$y_{k(t)} = y_{1(t)} q_1 + \ldots + \rho_{p(t)} q_p + v_{(t)}$$

$$y_{v(t)} = \Phi_{(t)} q + v_{(t)}$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k} e_k^2 \Rightarrow \hat{q} = (S^T S)^{-1} S^T y$$ → procena nepoznatih parametara

$$\Phi = [y_1 y_2 \cdots y_p]$$

$$S = \begin{bmatrix} y_{11} & . & . & . & y_{1p} \\ . & . & . & . & . \\ y_{k1} & . & . & . & y_{kp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ . \\ \Phi_k \end{bmatrix}$$

$$y = [y_{n1} \cdots y_{nk}]$$

4. Osobine belog šuma?

1. Vrednost se generiše po normalnoj raspodeli
2. Srednja vrednost je 0, a standardna devijacija 1
3. Vrednost ne zavisi od prethodnih vrednosti, tj. autokorelacija je 0 za sve pomeraje signala

XLII Parametarska identifikacija i metoda najmanjih kvadrata (LS algoritam)

1. Za modele koji su linearni po nepoznatim parametrima

2. Procena parametara je tačna kada je nepomerena E{q}=q I kada je efikasna lim δ_q^2=0

3.

$$KO: J=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k}\left(y_{nk}-\Phi_k q\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k} e_k^2 \quad S=\begin{bmatrix} y_{11} & . & . & y_{1p} \\ . & . & . & . \\ y_{k1} & . & . & y_{kp} \end{bmatrix}_{kxp}$$

$$\Phi=[\phi_1 \dots \phi_p]-vektor\ funkcija \quad q=[q_1 \dots q_p]-nepoznati\ parametri$$

$$J=\frac{1}{2}e^T e=\frac{1}{2}(y-Sq)^T(y-Sq) \quad e=[e_1 \dots e_k]^T$$

4. Procena parametara

$$\partial=(S^T S)^{-1} SY \quad Y=[y_{n1} \dots y_{nk}]^T$$

$$S=\begin{bmatrix} \phi_{11} & . & . & \phi_{1p} \\ . & . & . & . \\ \phi_{k1} & . & . & y_{kp} \end{bmatrix}-ponavljamo\, eksp\, k-puta$$

5. Ukoliko imamo model koji je linearan po parametrima I ako model ima beli šum tada će procena biti tačna jer da bi procena bila nepomerena moramo imati beli šum jer je srednja vrednost jednaka 0

Da bi procena bila tačna:

1. beli šum na ulazu
2. Mora da bude puno merenja => srdenja vrednost = 0 I ujedno disperzija teži 0

Matematičko očekivanje procene -q tada jer je I matematičko očekivanje belog šuma jednako 0

XLIII Identifikacija parametara ARX modela

1. ARX moel je dinamički, vremenski diskretan model

$$A_{(z)}\, y_{(k)} = B_{(z)}\, u_{(k)} + v_{(k)} - matrično$$

Diferencna jednačina

$$y_{(k)} + a_1\, y_{(k-1)} + \ldots + a_n\, y_{(k-n)} = b_0\, u_{(k)} + \ldots + b_m\, u_{(k-m)} + v_{(k)}$$

A, B, C – polinomi po $z=e^{sT}$ v – beli šum

2.

1. izabere se radni nominalni režim (y_0, u_0)
2. t=kΔt se zadaju ulazi I mere izlazi k=0...k-1
3. $u(k)=u_0+u(k)$ se dovode na ulaz sistema
4. izmeri se izlaz iz sistema y(k) I I zračuna inkrementalna vrednost izlaza $y(k)=y(k)-y_0$

3. Tačne vrednosti parametara modela potvrđuje vrednost kriterijuma s ako je bliža 0

4. Pseudo-slučajan binarni signal je vremenski diskretizovani signal sa vrednostima {-a, a} koje se nasumično menjaju u svakom trenutku odabiranja. Koristi se kao ulaz u identifikaciji dinamičkih modela

5. Autokorelacija je 0, standardna devijacija je 1, a srednja vrednost 0

6. Kako kašnjenje utiče na procenu parametara?

- Kašnjenje je dobro poznavati jer se tada smanjuje broj parametara B koji se identifikuju. Ako kašnjenje postoji, a ne modeluje se, identifikuju se B parametri za koje se zna da imaju vrednost 0

7. Preko diskretne funkcije prenosa ili po z^{-1} (?)

8. Čemu je jednaka procena parametara?

$$\hat{q} = (S^T S)^{-1} S^T Y$$

9. Identifikacija parametara ARX modela se vrši metodom najmanjih kvadrata jer je izlaz linearan po nepoznatim parametrima koje množe ranije vrednosti ulaza i izlaza

XLIV Identifikacija parametara ARMAX modela

1. ARMAX model je dinamički, vremenski diskretan model

$$y_{(k)}+a_1 y_{(k-1)}+\ldots+a_n y_{(k-n)}=b_0 u_{(k)}+b_1 u_{(k-1)}+\ldots+b_m u_{(k-m)}+v_{(k)}+c_1 v_{(k-1)}+\ldots+c_r v_{(k-r)}-diferencna\ jednačina$$

$$A_{(z)} y_{(k)}=B_{(z)} u_{(k)}+C_{(z)} v_{(k)}-matrično$$

2. Dvokoračni metod – osnovna ideja je da se model transformiše u ARX model, odrede parametri, a zatim se odrede I traženi parametri A, B, C

Izvođenje:

$$A_{(z)} y_{(k)}=B_{(z)} u_{(k)}+C_{(z)} v_{(k)} / : C_{(z)}$$

$$\underbrace{\frac{A_{(z)}}{C_{(z)}}}_{H_{(z)}} y_{(k)}=\underbrace{\frac{B_{(z)}}{C_{(z)}}}_{G_{(z)}} u_{(k)}+v_{(k)}$$

I metodom najmanjih kvadrata se identifikuju parametri polinoma H(z) I G(z)
Izračuna se procena šuma

$$\hat{v}_{(k)}=G_{(z)} y_{(k)}-H_{(z)} u_{(k)}$$

3. Proces računaja parametara modela se pokreće više puta za razne kombinacije dužina polinoma A I B I posmatra se vrednost funkcije cilja J. Dobro procenjen model ima malo J uz što manje dužine polinoma

XLV Identifikacija promenljivih parametara. Rekurzivni metod najmanjih kvadrata

1. Metoda najmanjih kvadrata – korišćena za određivanje nepoznatih parametara modela. Primena metode u parametarskoj identifikaciji ima parametre q kao nepoznate promenljive, ukoliko se ti parametri menjeju tokom vremena, onda se metoda najmanjih kvadrata ne može koristiti. Tada koristimo rekurzivnu metodu najmanjih kvadrata. Ima manje dodatne pogodnosti koje se ogledaju u manjim memorijskim zahtevima, brže izvršavanje

2. Pogodna je za on-line I rel-time identifikaciju

3. Kriterijum optimalnosti je odstupanje od greške ukoliko je J=0. Tada ne postoji greška

4.

$$\underbrace{g_{(k+1)}}_{\text{tekuća procena } q} = \underbrace{g_{(k)}}_{\text{prethodna procena } q} + \underbrace{p_{(k+1)}}_{\text{korekcioni vektor}} \left(\underbrace{y_{(k+1)}}_{\text{novo merenje}} - \underbrace{\Phi^T_{(k+1)} \hat{q}_{(k)}}_{\text{predviđeno merenje}} \right)$$

5. Koraci:

1. prikupe se nove vrednosti ulaza u(n+1) I izlaza y(k+1)
2. formira se Φ(n+1)
3. Izračuna se P(k+1)
4. Izračuna se procena parametara q(k+1)
5. memorišu se p(n)=p(k+1) I q(k) =q(k+1) za naredni trenutak odabiranja

6. Funkcija cilja rekurzivne metode najmanjih kvadrata (ρ – faktor zaboravljanja)

$$\mathcal{J}_\rho = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \rho^{k-i} \left(y(i) - \boldsymbol{U}^T(i)\boldsymbol{q}\right)^2, \qquad 0 < \rho \leq 1$$

XLVI Iterativne metode parametarske identifikacije (Gaus-Njutnov algoritam)

1. Koriste sa za modele koji su nelinearni po nepoznatim parametrim. Posmatraju se vremenski diskretan I iteretivan je tj. iz iteracije u iteraciju koriguje vreši korigovanje nepoznatih parametara

2. Kriterijum zaustavljanja

$$\|\Delta q_n\| < \epsilon_q$$
$$\Delta(q_n) < \epsilon_j$$
$$n < n_{max}$$

3. Treba definisati:
   1. vektor funkcija oblika f(x) = 0
   2. Jakobijan ∇f(x)

4. Osobine:
   1. brzo završavanje (konvergencija u okolini optimuma), ali moguća divergencija u početnim iteracijama
   2. mali broj iteracija

5. Korak

$$\Delta \boldsymbol{x}_k = -\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\right)^{-1}\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

- x je vektor promenljivih koje se traže
- Δx je korekcija u k-toj iteraciji iterativnog postupka
- f(x) = 0 je sistem jednačina koji se rešava
- J(x) je Jakobijan, tj. ∇f(x)

6. Izvođenje

Problem: $f(x) = 0$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k,\ \ k = 0,1,\ldots$$

$$f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)\Delta x_k = 0$$

$$\Delta x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

XLVII Iterativne metode parametarske identifikacije (gredijentni I Levenberg-Markart algoritam)

Gradijentni algoritam

osobine:

1. brzo napredovanje u početnim iteracijama, ali sporo na kraju u okolini optimuma
2. veliki broj iteracija (izvodi u okolini cilja su veoma mali pa je malo i Δx)

- takođe se naziva i algoritam najstrmijeg pada zato što je korekcija x u svakoj iteraciji $\Delta x = -h * \nabla\mathcal{J}(x)$, $h > 0$ srazmerna gradijentu od $\mathcal{J}$ (najbrži porast) ali sa suprotnim predznakom (najbrži pad)

- izvođenje

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_k = -h\cdot\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k),\ h > 0$$

$$\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) = \nabla\left(\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\right) = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k), \text{ gde je } \boldsymbol{J} = \nabla\boldsymbol{f}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_k = -h\cdot\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

Levenberg-Markart algoritam

- λ_k je pozitivna vrednost koja se koriguje tokom rada algoritma. Koriguje se u svakoj iteraciji k na osnovu tekuće $\mathcal{J}_k$ i prethodne $\mathcal{J}_{k-1}$ vrednosti funkcije cilja

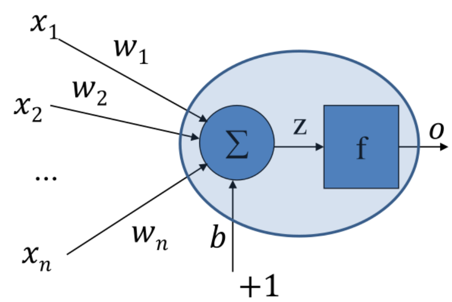
$$\Delta\boldsymbol{x}_k = -(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) + \lambda_k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

$$\mathcal{J}_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

$$\lambda_k = \nu\lambda_{k-1} \text{ za } \mathcal{J}_k \geq \mathcal{J}_{k-1}$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\nu}\lambda_{k-1} \text{ za } \mathcal{J}_k < \mathcal{J}_{k-1}$$

XLVIII Model veštačkog neurona I aktivacione funkcije



- neuron je osnovni procesni element VNM
- sadrži:
1. ulaze x_i
2. sinapse -w_i
3. stanje aktivacije - z
4. izlaznu (aktivacionu) funkciju - f
5. jedan izlaz - o
6. prag – b

- podesivi parametri su: w_1, w_2, …, w_n i b
- o = f(z) = f($\sum_i w_i x_i$ + b)

- Aktivaciona funkcija je izllazna funkcija neuronske mreže. Postoji više aktivacionih funkcija:
  1. linearna
  2. pragovska
  3. semi linearna
  4. log-sigmodialna
  5. hiperbolični tangens
  6. ReLU (RectifiedLinear Unit)
  7. Leaky ReLU
  8. Maxout
  9. ELU

$$a)\quad f(z) = a \cdot z$$

$$b)\quad f(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$c)\quad f(z) = \begin{cases} a, & z \geq q \\ \frac{a}{q} \cdot z, & -q \leq z \leq q \\ -a, & z \leq -q \end{cases}$$

$$d)\quad f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

$$e)\quad f(z) = \frac{2}{1 + e^{-z}} - 1$$

$$f)\quad f(z) = \max(0, z)$$

$$g)\quad f(z) = \max(0.1z, z)$$

$$h)\quad f(z) = \max(W_1 x + b_1, W_2 x + b_2)$$

$$i)\quad f(z) = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ \alpha(e^z - 1), & z < 0 \end{cases}$$

XLIX Modeli veštačkih nauronskih mreža

- Neuroni se postavljaju u slojeve (nekada par slojeva a nekada mnogo – deep learning)
- Slojevi se organizuju hijerarhijski
  1. broj enurona varira pos lojevima
  2. tipovi slojeva su fully connected, convolutional, normalisation, …

L Obučavanje veštačkih neuronskih mreža (BP algoritam)

Back Propagation Algorithm

- Epoha – jedna iteracija u procesu obuke neuronske mreže gde se težine doteruju na osnovu jednog prolaza kroz obučavajući skup
- U osnovu BP algoritma je gradijentni algoritam koji se koristi za obuku neuronske mreže
- Obučavajući skup čine parovi ulaza I željenog izlaza iz modela
- Najčešće upotrebljavan algoritam. Koristi gradijentni algoritam za minimizacju funkcije cilja

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial J}{\partial w}, \qquad \Delta b = -\eta \frac{\partial J}{\partial b}$$

konstanta $0 < \eta < 1$ je koeficijent brzine obučavanja (*learning rate*)

- za računanje gradijenta primenjuje se računanje izvoda složene funkcije po promenljivim parametrima (proces računanja se kreće od izlaza ka ulazu)

- koraci BP algoritma:
  1. inicijalituju se težine W i b na slučajne male vrednosti (b = 0)
  2. postavi se ulaz X i izračunaju se izlazi neurona O
  3. izračuna se greška Ep, tj. ukupna greška J. Izračunaju se gradijenti J po prarametrima na osnovu ΔW i Δb (gde izvodi propagiraju unazad)
  4. koriguju se parametri mreže W i b
  5. proveri se da li je mreža obučena (ako nije nastavlja se sa novom epohom od koraka 2)

- implementacije BP
  1. model neuronske mreže drži slojeve (niz slojeva)
  2. svaki sloj koristi matrice i vektore da modeluje parametre sloja i računanje vezano za sloj
  3. matrice modeluju obučavajući skup
  4. računanje po BP se sprovodi za ceo obučavajući skup (cela epoha u jednoj iteraciji)

LI Uloga veštačkih neuronskih mreža u modeliranju i simulaciji

- Za obučavanje se koristi obučavajući skup tj. podaci za obučavalje (obučavanje se sprovodi iterativno)
- Tokom obuke se menjaju podesivi parametri w I z
- sposobnost NM da mapira ulaze na izlaze joj omogućava da modelira (i simulira) ponašanje sistema

- obučavanje VNM ulazno-izlaznim podacima iz sistema predstavlja postupak identifikacije sistema

- mogu se vršiti:
  1. direktna identifikacija - bitna i česta u upotrebi
  2. inverzna identifikacija - retka u upotrebi i nekada nije moguća

LII Veštačka neuronska mreža kao model dinamičkog sistema

Dinamički model

- preslikavanje ulaza na izlaze zavisi od vremena (od stanja u kome se sistem nalazi) te se model ne može relaizovati feed-forward neuronskom vežbom
- dinamički model se može realizovati upotrebom rekurzivnih neuronskih mreža (RNN)
- potrebno je uspostaviti stanje sistema (jer se njime realizuje memorija) -izlazi zavise od ulaza i stanja

Primer:

- model opisan diferencnom jednačinom $y(k) = -a1\ y(k-1) - a2\ y(k-2) + b0\ u(k) + b1\ u(k-1)$
- NARX tip mreže (nelinearni tip ARX modela)

LIII Upotreba veštačkih neuronskih mreža u Julia softverskom paketu Flux

- Obučavajući skup se deli na 2 dela
  1. podskup za obuku – koristi se da se doteruju težine
  2. podskup za kontrolu – omogućava nam da izbegnemo pretreniranje mreže. Pretreniranjem se udaljavamo sve više I više od cilja

- Prilikom učenja veštačke neuronske mreže menjaju se podesivi parametri w I b
- Neuroni se postavljaju u slojeve(par, mnogo – deep learning)
- Ulazi se dovode do prvog sloja, pa na 2 do izlaza
- Broj neurona varira po slojevima
- Tipovi neurona:
  1. fully connected
  2. concolutional
  3. max pool …
- funkcija train parametri:
  1. funkcioja cilja J
  2. kolekcija parametara koji se podešavaju
  3. obučavajući skup
  4. algoritam za obuku optAlg

- Izračunavanje izvoda BP algoritma

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial J}{\partial w}, \quad \Delta b = -\eta \frac{\partial J}{\partial b} \quad 0 < \eta < 1$$

$$\frac{\partial J}{\partial w} = \sum_{p=1}^{p} \frac{\partial E_p}{\partial w} \quad \frac{\partial J}{\partial b} = \sum_{p=1}^{p} \frac{\partial E_p}{\partial b}$$

- biblioteka Flux uvodi
  1. gradijent – za izračunavanje izvoda, oblika neuroneke mreže
  2. linearan neuron – računa izlaz neurona sa linearnom aktivacionom funkciom
  3. dense – opis sloj neurona I modeluje fully connected sloj neurona (svi ulazi su povezani na sve izlaze)
  4. descent – implementira gradijenti postupak sa zadatim koeficijentom brzine obučavanja
  5. train! - njenim pozivom se sprovodi obuka
  6. chain – povezujje slojeve neurona
  7. momentum – implementira gradijentni postupak sa inercijom

- brojni tipovi slojeva neurona:
  1. Dense
  2. RNN
  3. Convolutional
  4. Max Pool
  5. Maxout

- neuronska mreža kao dinamički model – ARX model
- da bi se formirao moldel dinamičkog sistema upotrebljena je neuronska mreža sa propagacijom signala unapred (feed forward)

- sam postupak obuke, zasnovan na BP algoritmu, iterativno ažurira vrednosti parametara mreže upotrebom izvoda funkcije cilja po parametrima (w, b) mreže

LIV Osnovni elementi i procesi sistema sa redovima čekanja

1. Osnovni elementi I osobine

- entitet (klijent) – nešto što može da promeni stanje I koristi usluge sistema
  osobine: broj entiteta koji dolaze u sistem, vreme međudolaska entiteta, naziv entiteta

- redovi – popunjava se entitetima koji trenutno ne mogu biti usluženi
  osobine: pravilo upravljanja I kapacitet

- resurs – zadatak obrade zahteva ili opsluživanje entiteta
  osobine: auzetost, aktivnost, zavisnost

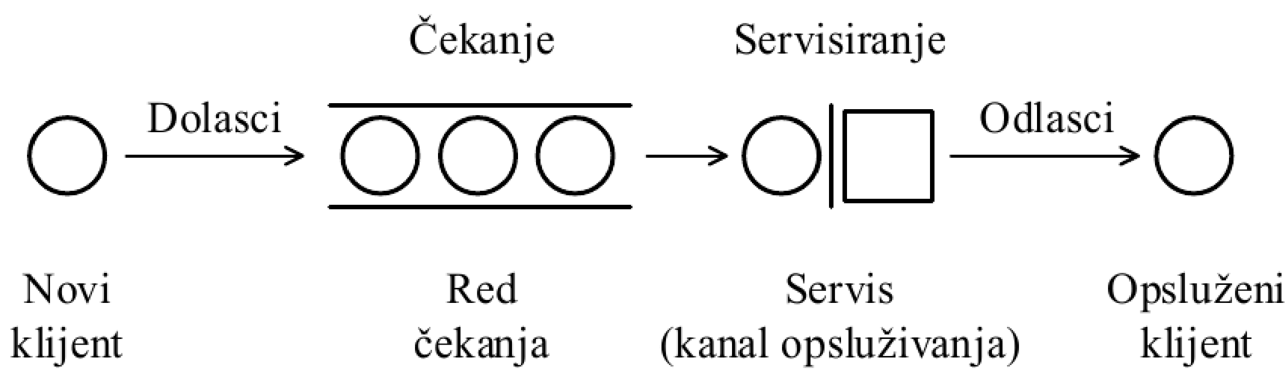
2. Koji su procesi I događaji?

- Dolasci
- izbor reda čekanja
- izbor kanala
- servisiranje
- napuštanje sistema ili prelazak u neki drugi red čekanja (vraća s ena korak 2)

3. Razlika između odustajanja I napuštanja?

- Odustajanje – klijent koji pristiže u sitem može odustati od čekanja I napustiti sistem
- Napuštanje – klijent staje u red čekanja I posle nekog vremena uoči da je njegov progres u redu spor pa odustaje od čekanja I napušta sistem

4. Skicirati najednostavniji primer

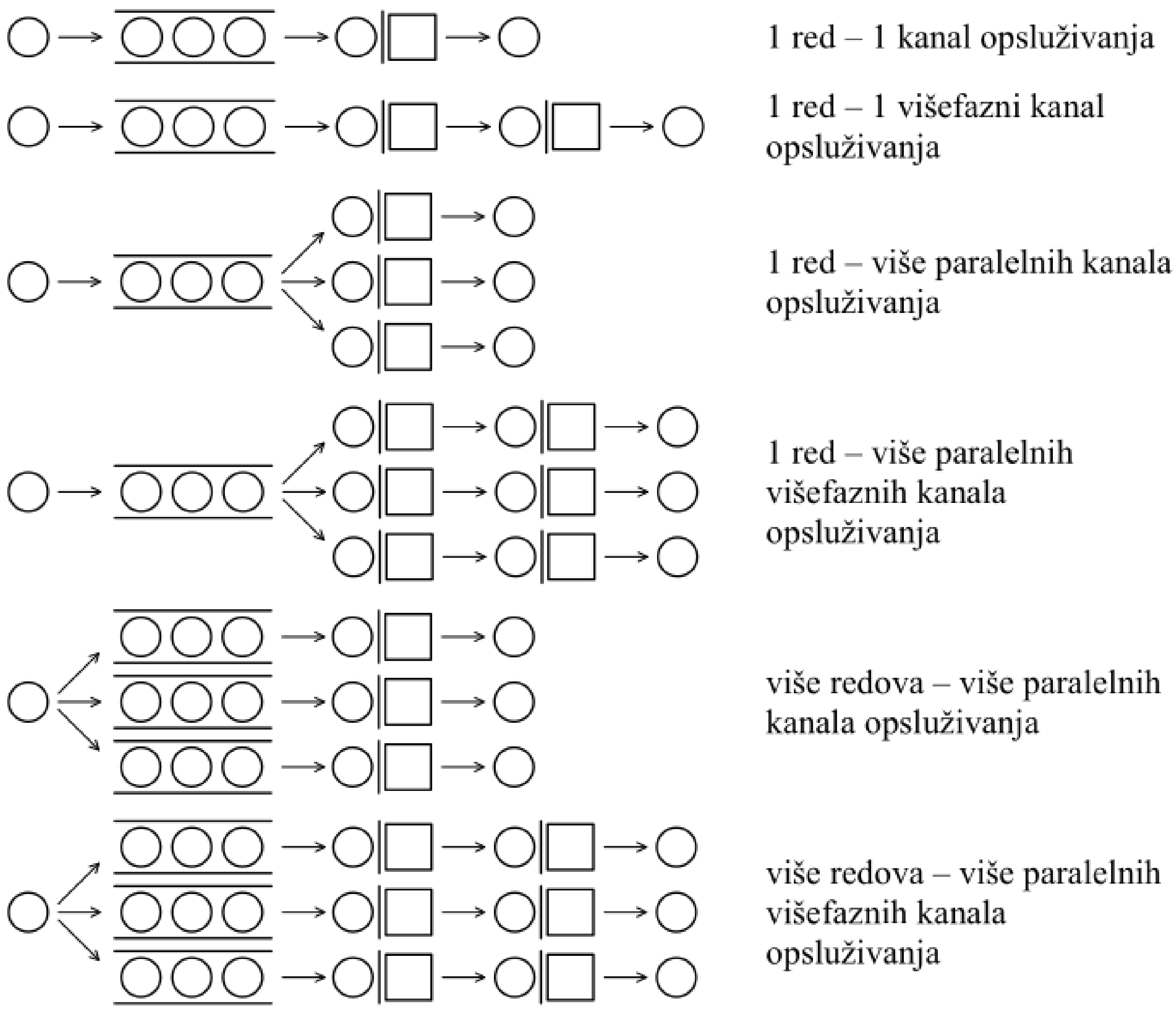


LV Simulacije redova čekanja (Tipovi sistema. Algoritam. Parametri. Rezultati simulacije.)

1. Koji tipovi postoje?

- tipovi sistema - podele se vrše prema

1. broju redova čekanja : jedan / više
2. broju kanala opsluživanja : jedan / više
3. broju faza servisiranja : jednofazni / višefazni
4. dužini reda čekanja : ograničen / neograničen
5. kapacitetu sistema: ograničen / neograničen



2. Performanse na osnovu kojih se analizira sistem

1. izlaz
2. dužina reda čekanja

3. s – broj servera u sistemu
4. λ – srednje vreme do dolaska novog klijenta po jedinici vremena
5. μ – srednej vreme opsluživanja klijenta

3. Šta je cilj simulacije?

- Simulacija za cilj ima da uoči dobre I loše osobine sistema, da se tako izmeni I poboljša

4. Šta mi određujemo u simulaciji?

- Određujemo vremenske odrednice koje se vezuju
  1. vreme dolaska d_i
  2. početak servisiranja p_i
  3. trajanje servisiranja s_i
  4. završetak servisiranja z_i
  5. čekanje u redu $w_i=p_i-d_i$

5. Da li se može simulirati u Juliji?

- Može se simulirati u Juliji pomoću paketa SimJulia. SimJulia je zasnovana na osnovnoj obradi događaja u toku simulacije pri čemu su sortirani po prioritetu, vremenu nastanka I slično

6. Šta dobijamo na kraju simulacije?

- Prosečno vvreme čekanja, prosečno vreme zadržavanja u sistemu, prosečna dužina reda čekanja...

7. Šta dobijamo na kraju simulacije?

Rezultati simulacije:
1. prosečno vreme čekanja : ukupno čekanje klijenata
2. iskorišćenost reda čekanja: vreme u kome ima klijenata u redu, ukupno vreme
3. iskorišćenost servera: zauzetost servera, ukuono vreme

LVI Kendalova notacija. Raspodele

1. Definisati Kendalovu notaciju I odrediti granične vrednosti

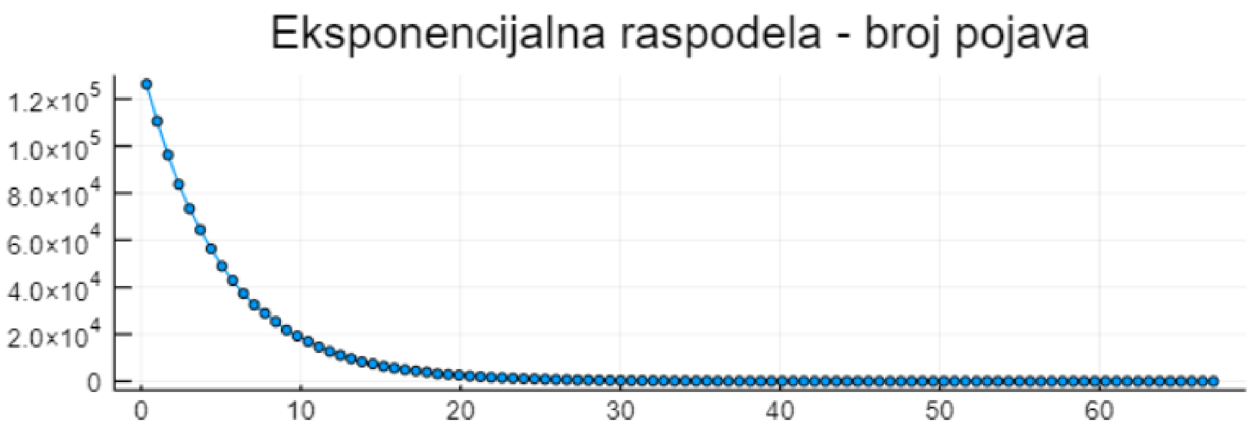
- Kendalova notacija predstavlja sistem sa redovim čekanja
  A/B/C/X/Y/Z

1. A – pravilo dolaska klijenta
2. B – pravilo servisiranja
3. C – broj paralelnih servisa
4. X – pravvilo opsluživanja klijenta iz reda čekanja
5. Y – kapacitet sistema
6. Z – veličina populacija
   Y I Z predstavljaju ograničenja. Kada nisu ograničeni stavlja se ∞

2. Šta znači M/M/1?

- Sistem sa 1 kanalom opsluživanja kod koga su dolasci I servisiranje (vremena međudolaska) generisani po eksponencijalnoj raspodeli

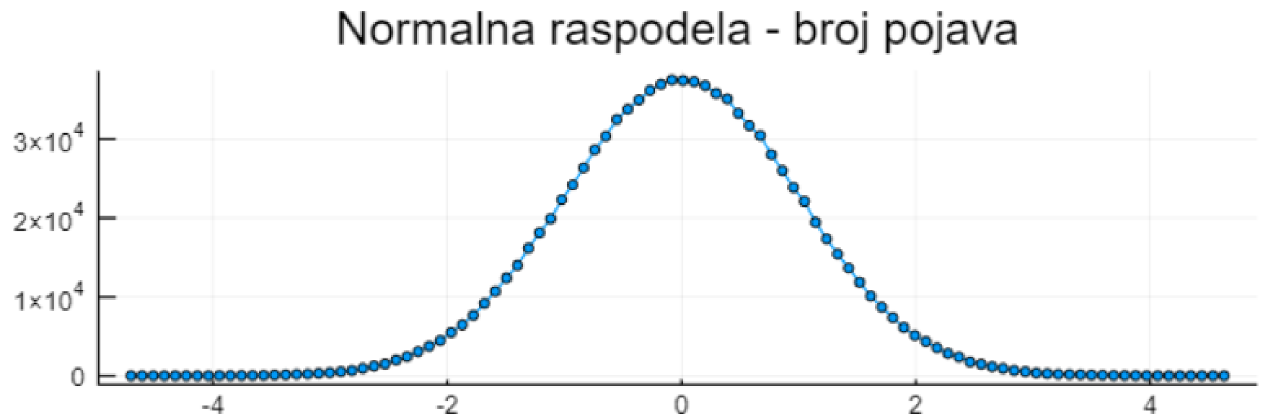
3. Grafik funkcije raspodele



$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

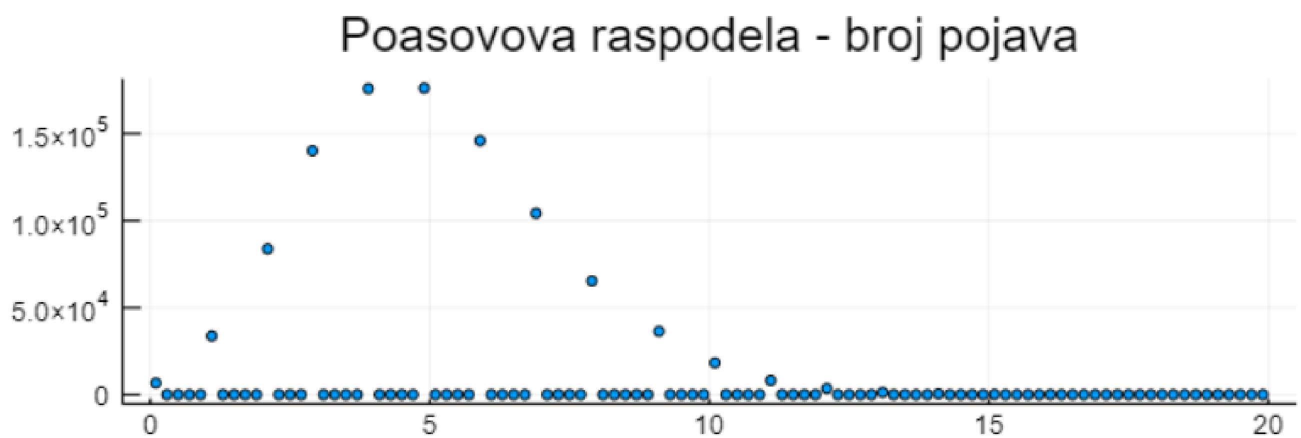
λ je prosečan broj dolazaka u jedinici vremena, ili

$\theta = \lambda^{-1}$ je prosečno vreme između dva dolaska



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ je srednja vrednost, σ^2 je varijansa



$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^k}{k!} \qquad k \in \{0,1,2, \dots\}, \lambda > 0$$

A – dolasci klijenata u sistem

- generišu se vremena dolaska klijenata u sistem prema nekoj zakonitosti(raspodeli):

1. eksponencijalna - Poasonova (oznaka M)
2. Erlangova reda k (gama eksponencijalna) - oznaka Ek
3. deterministička ili uniformna (konstantno vreme između dolaska klijenta) - oznaka D
4. opšta raspodela (npr. normalna) - oznaka G

- Poasonova raspodela - diskretna raspodela koja predstavlja verovatnoću da se određeni broj događaja ostvari u zadatom vremenskom intervalu, ako se događaji ostvaruju nezavisno od vremena realizovanja posldenjeg događaja.

  Za slučajnu promenljivu kažemo da ima Poasonovu raspodelu ako je zadovoljeno

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^k}{k!} \qquad k \in \{0,1,2, \dots\}, \lambda > 0$$

- λ - očekivana vrednost slučajne promenljive X ili prosečan broj pojava nekog događaja u jedinici vremena
- pogodna za modelovanje telefonskih poziva u jedinici vremena, broj autobusa koji dolaze na neku stanicu, broj stabala neke šume po jedinici površine…

- karakteristike:

1. stacionarnost - verovatnoća pojave događaja u segmentu [t, t+s] je nezavisna od t i predstavlja funkciju samo od s (dužine intervala)
2. ordiarnost - verovatnoća da se u kratkom vremesnkom intervalu Δt(Δt->0) odigra više od jednog događaja je zanemarljiva
3. odsustvo memorije - prošlost ne utiče na buduće događaje

Normalna raspodela

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- μ - srednja vrednost
- σ^2 - varijansa

Eksponencijalna raspodela

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

- λ -prosečan broj dolazaka u jednici vremena

- $\theta = \lambda^{-1}$ - prosečno vreme između dva dolaska

B - proces servisiranja
- ista notacija kao i za dolazak klijenata u sistem
- primer: M / M / 1 - sistem sa jednim serverom u koji klijenti pristižu i opslužuju se u vremenima generisanim po Poasonovoj raspodeli (oznaka M)
- μ - prosečno vreme trajanja servisiranja
- problem: brzina pristizanja je veća od brzine opsluživanja $\lambda > \mu$!

X - zakonitosti opsluživanja
- način opsluživanja može biti utvrđen po jednom od sledećih pravila:
1. FIFO - opslužuje se klijent koji je prvi ušao u sistem
2. SIRO - Service in Random Order - slučajnim redosledom
3. LIFO - klijenti koji poslednji uđu u sistem se uslužuju prvi
4. PRI - opsluživanje sa prioritetom

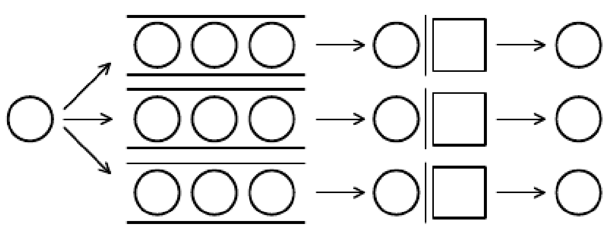
Primer : M / M / 1 / FiFO / ∞ / ∞ se pojednostavljuje sa M / M / 1

LVII Simulacija diskretnih događaja u Julia softverskom paketu SimJulia

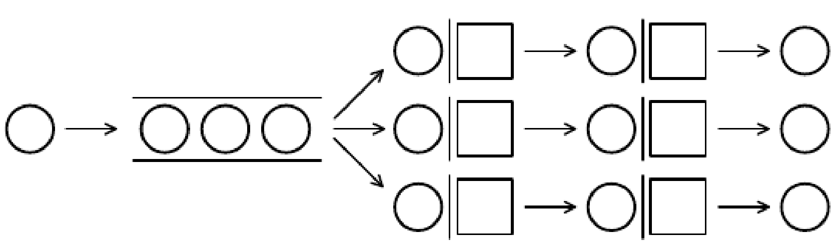
1. Osnovne komponente koje učestvuju u simulaciji su:
   - simulaciono okruženje
   - procesi
   - događaji

2. Deljeni resursi
   - Resources
   - Containers
   - Stores

3. Kako modelujemo više redova čekanja, a kako više kanala opsluživanja



više redova – više paralelnih kanala opsluživanja



1 red – više paralelnih višefaznih kanala opsluživanja