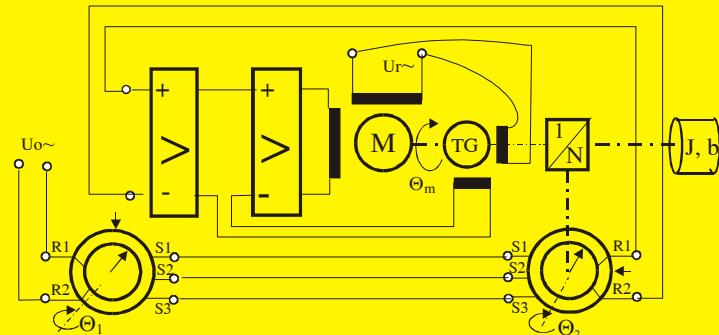


UNIVERZITET U ISTOČNOM SARAJEVU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Ćedomir Milosavljević  
**TEORIJA  
AUTOMATSKOG  
UPRAVLJANJA - 1**

KLASIČNA TEORIJA VREMENSKI KONTINUALNIH  
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA



ISTOČNO SARAJEVO, 2008.



**Čedomir S. Milosavljević** (1940., s. Jovac, Vladičin Han, Srbija). Osnovnu školu pohađao u s. Jovcu, Vranju i s. Stublu, a srednju (*elektroenergetika*) diplomirao 1959. u Nišu. Kao tehničar radio u Termoelektrani RTB-Bor. Studije započeo 1960. u Skoplju (*elektromашinstvo*), nastavio u Nišu (*elektrotehnika*), gde 1962. postaje pogonski inženjer. Kao stipendista EI-Niš (1962.-66.) studije nastavlja u Moskvi, na Moskovskom energetskom institutu (*Fakultet za Automatiku i računarsku tehniku, Profil za automatiku*). Kao Dipl. inž. radio u EI-Niš (Fabrika profesionalne elektronike (1966.-74.), Istraživačko razvojni institut (1974.-77.)). Magistriрао (1975.) na Elektronskom fakultetu u Nišu iz oblasti automatike (*Optimalno upravljanje procesom apsorpcije u apsorberima sa ispunom*). 1977.-78. godine je profesor Više škole za obrazovanje radnika u Nišu. Od 1978. radi na Elektronskom fakultetu u Nišu. Doktorirao na Elektrotehničkom fakultetu u Sarajevu (1982.) iz oblasti Automatskog upravljanja (*Neki problemi diskretnе realizacije zakona upravljanja sistema sa promenljivom strukturom*).

Osnivač je Katedre za automatiku na Elektronskom fakultetu u Nišu i njen šef (1985.-2002.). Organizovao je diplomsku i postdiplomsku nastavu iz oblasti automatike na Elektronskom fakultetu u Nišu.

Autor je osam udžbeničkih publikacija i preko 200, stručnih i drugih radova, objavljenih u poznatim nacionalnim i internacionalnim časopisima ili u zbornicima radova naučnih konferencija. Pionir je u istraživanju *digitalnih sistema promenljive strukture*, sa u svetu zapaženim rezultatima (*Citation index* iznad 100). Autor je V poglavlja: “*Discrete-Time VSS*” u monografiji: “*Variable structure systems: from principles to implementation*”, Ed.: A. Šabanović, L. Fridman, S. Spurgeon, The IEE Press, London, 2004.

Osnivač je Laboratorije za automatiku na Elektronskom fakultetu. Konstruisao je oko 50 uređaja i sistema iz oblasti automatike za lab. vežbe studenata i za industrijsku proizvodnju a neki od njih su bili u serijskoj proizvodnji (*servostabilizatori mrežnog napona, tiristorski stabilizatori napona, tiristorski regulatori brzine obrtanja jednosmernih motora, regulatori temperature, frekventni regulatori brzine obrtanja asinhronih motora i dr.*).

Kao mentor uspešno je vodio veliki broj diplomaca, 12 magistranata i četiri doktoranta. Kao gostujući profesor od 1997. god. izvodi nastavu iz *Teorije automatskog upravljanja* na Elektrotehničkom fakultetu u Istočnom Sarajevu. Recenzent je časopisa: *Automatica* Internacionale federacije za automatiku (IFAC); *IEEE Trans. on Automatic Control*, *IEEE Trans. on Industrial electronics* i dr. Bio je *External examiner* jedne doktorske disertacije na *Indian Institut of Technology, Bombay*. Jedan je od osnivača Društva za energetsку elektroniku u N. Sadu, član je Programskog odbora konferencija: Ee, N. Sad i CONTI Temišvar, Rumunija.

Detaljne reference videti na sajtu:  
[http://www.elfak.ni.ac.yu/phptest/ne/w/licne\\_prezentacije/cedomir\\_milos\\_avljevic/index.htm](http://www.elfak.ni.ac.yu/phptest/ne/w/licne_prezentacije/cedomir_milos_avljevic/index.htm)

## PREDGOVOR

Teorija automatskog upravljanja (TAU) - naučno-tehnička disciplina s burnim razvojem u drugoj polovini XX veka. Ova knjiga je udžbenik za predmet pod nazivom **TAU-1**, za studente Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Istočnom Sarajevu, gde je autor izvodio nastavu u proteklom desetogodišnjem periodu u okviru predmeta: TAU, za studente profila Automatika i elektronika i Sistemi automatskog upravljanja (SAU), za studente profila Elektroenergetika. Prelaskom na Bolonjski proces studiranja, nastava iz TAU odvija se u dva jednosemestralna predmeta: TAU-1 i TAU-2. Prvi predmet obuhvata klasičnu teoriju vremenski kontinualnih SAU, u kojoj se analiza i sinteza vrši u kompleksnom domenu, primenom funkcija prenosa sistema odnosno modela *ulaz-izlaz*. Drugi predmet obuhvata oblast koja se može nazvati *savremena teorija vremenski kontinualnih SAU* i sastoji se iz dve tematske celine: *koncepcija prostora stanja u analizi i sintezi linearnih sistema upravljanja* (četiri poglavlja) i *osnove teorije nelinearnih sistema upravljanja* (pet poglavlja). Ova knjiga obuhvata materiju predmeta TAU-1.

U prvom poglavljju, koje ima uvodni karakter, definišu se osnovni pojmovi, daje kratak pregled istorijskog razvoja i klasifikacija SAU. Zatim je prikazana osnovna regulaciona kontura i njeni funkcionalni elementi. Poglavlje se završava nekim primerima primene sistema automatske regulacije.

U drugom poglavlu - *Matematičko modeli elemenata i sistema*- definišu se načini dobijanja matematičkog modela sistema i *funkcija prenosa sistema*. Zatim se, radi tretiranja električnih, mehaničkih i elektromehaničkih sistema na jedinstven način, uvode *elektromehaničke analogije* koje omogućavaju da se mehanički elementi analiziraju kao ekvivalentni električni elementi. Dat je postupak dobijanja funkcije prenosa električnih linearnih mreža i uvode *struktурне blok-схеме* ili *graf toka signala* kao vizuelne predstave sistema. Izučavaju se sprege elemenata automatike i *algebra strukturnih blok-схема* i *grafa toka signala*. Na primeru mehaničkog sistema ilustruje se postupak dobijanja matematičkog modela, njegovo predstavljanje struktornom blok-

## Č. Milosavljević: *Teorija automatskog upravljanja -2*

---

šemom i grafom toka signala i određivanje matematičkog modela u obliku funkcije prenosa. Na kraju poglavlja daju se elementarna uputstva za korišćenje programskog paketa MATLAB za modelovanje sistema.

Treće poglavlje - *Odzivi sistema u prostoru stanja-* je posvećeno nalaženju odziva sistema na osnovu funkcije prenosa. Definiše se pojam *normalnog odziva* i uvode *karakteristični odzivi: impulsni, odskočni i frekvencijski*. Na osnovu frekvencijskog odziva uvode se pojmovi *frekvencijskih karakteristika sistema* i načini njihovog grafičkog predstavljanja. Uvodi se pojam *osnovnih elemenata automatike* i daju njihovi karakteristični odzivi sa akcentom na konstrukciji *Bodeovih dijagrama elemenata i sistema*. Poglavlje se završava kratkim osvrtom na pojam *procesa u linearnim sistemima* i primeni MATLAB-a u određivanju odziva sistema.

Cetvрto poglavlje- *Stabilnost linearnih SAU-* je posvećeno izučavanju metoda za analizu stabilnosti sistema. Najpre su definisani *potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti*. Zatim *kriterijumi za ocenu stabilnosti*. Kao *algebarski kriterijumi stabilnosti* obradeni su kriterijumi *Hurvica, Rausa i Haritonova*. Od grafoanalitičkih kriterijuma obrazloženi su *Mihajlovljev* i *Nikvistov kriterijum* kao i *Bodeov prilaz* primene Nikvistovog kriterijuma. Daje se osvrt na analizu stabilnosti sistema sa transportnim kašnjenjem i uvodi *pretek faze i pretek pojačanja* za ocenu stepena stabilnosti sistema. Poglavlje se završava primenom MATLAB-a za analizu stabilnosti sistema.

Peto poglavlje - *Ocena kvaliteta linearnih SAU*-posvećeno je metodama za ocenu ponašanja sistema u ustaljenom stanju i u prelaznim režimima. Najpre su uvedene *konstante greške* kao elementi za ocenu kvaliteta sistema u stacionarnim ustaljenim stanjima. Zatim su definisani parametri sistema na osnovu dinamičkih ustaljenih i frekvencijskih karakteristika. Dati su parametri koji karakterišu prelazne režime na osnovu normalnog odskočnog odziva sistema. Središnji deo poglavlja posvećen je *metodi geometrijskog mesta korena* kao moćnoj metodi za ocenu ponašanja sistema kada se menja neki parametar. Kao dodatak metodi geometrijskog mesta korena daju se uputstva za primenu MATLAB-a za konstrukciju istog. Značajna pažnja je posvećena integralnim kriterijumima kvaliteta sistema. U ovom poglavlju se daje osnova *Mitrovićeve metode*. Poglavlje se završava analizom *osetljivosti sistema* i kratkim osvrtom na robustnost i invarijantnos sistema.

U šestom poglavlju - *Sinteza linearnih SAU*-najpre su definisane strukture sistema koje su u najčešćoj primeni i problemi realizacije idealnih sistema. Zatim su definisani osnovni linearni zakoni upravljanja. Od metoda za sintezu sistema najpre je obrađena metoda sinteze u frekvencijskom domenu, preko Bodeovih dijagrama. Detaljnije se obrazlaže postupak projektovanja primenom metode geometrijskog mesta korena. Dat je originalni analitički prilaz sinteze diferencijalnog i integralnog kompenzatora baziran na konvencionalnim grafoanalitičkim metodama, propraćen odgovarajućom softverskom podrškom za korišćenje MATLAB-a. Poglavlje se završava kraćim osvrtom na metode *kaskadne kompenzacije* i primene *Smotovog prediktora* za projektovanje sistema sa značajnim transportnim kašnjenjem.

---

## **Predgovor**

---

Sedmo poglavlje - *Inženjerske metode podešavanja regulatora-* daju se praktični inženjerski prilazi sintezi i podešavanju regulatora u slučajevima kada matematički model procesa nije poznat ili nije u potpunosti poznat.

Osmo poglavlje- *Komponente SAU-* je posvećeno opisu elemenata osnovne regulacione konture *objektima upravljanja, mernim elementima, pretvaračkim elementima, pojačavačima, izvršnim organima, regulatorima i kompenzatorima*. Poglavlje čini samostalnu celinu. Međutim, elementi tog poglavlja se praktično obrađuju kao ilustrativni primeri tokom nastave ostalih poglavlja.

Svako poglavlje u knjizi se završava spiskom korišćene literature za to poglavlje. Posebno treba istaći da se na kraju svakog poglavlja nalaze *Pitanja za samoproveru* znanja i *Zadaci za vežbu*.

Pitanja za samoproveru su tako koncipirana da se na njih može odgovarati ako se dobro poznaje materija predmetnog poglavlja. To su ustvari iskazi u kojima su izostavljene pojedine ključne reči koje treba student da unese. Ova pitanja - iskazi- mogu poslužiti kao test pitanja prilikom polaganja kolokvijuma ili ispita. Zadaci za vežbu se mogu koristiti kao domaći zadaci koje studenti rešavaju u procesu učenja.

Ova knjiga se bazira na materiji izloženoj u knjigama *Osnovi automatike - I deo* i *Osnovi automatike - III deo* u izdanju Elektronskog fakulteta u Nišu i Elektrotehničkog fakulteta u Istočnom Sarajevu, 2002. godine. Pored ispravke uočenih grešaka, u ovoj knjizi su unete brojne izmene kao što su uvođenje elemenata primene MATLAB-a u analizi i sintezi sistema.

U procesu učenja kod studenata postoje dva prilaza. Dominantan prilaz je da se učenje odvija putem rešavanja numeričkih zadataka bez dubljeg ulaženja u teoriju. Drugi prilaz je da se najpre dobro izuči teorija a da se provera usvojenosti gradiva vrši na numeričkim primerima. Dugogodišnje nastavno iskustvo autora je pokazalo da prvi prilaz učenju ne daje dobre rezultate. Moj savet studentima je da se orjentišu na drugi način osvajanja znanja iz ove (i drugih) oblasti. Osim toga, proces studiranja podrazumeva svestrano izučavanje odgovarajuće oblasti putem praćenja klasične i savremene literature. Ako se u procesu učenja najpre redovno pohadaju sva predavanja i vežbe i na njima aktivno sudeluje vođenjem beležaka, postavljanjem pitanja i aktivnim učešćem u rešavanju zadataka na auditornim vežbama; izučavanjem tih beležaka istog dana nakon nastave, uz konsultaciju sa osnovnim udžbenikom i drugom dostupnom literaturom, tada je za završnu pripremu ispita potrebno samo nekoliko dana na osnovu beležaka, odnosno ispit se uspešno završava putem kolokvijuma i domaćih zadataka.

Januara 2008.

Autor

# SADRŽAJ

<b>Glava 1. UVOD</b>	1
<b>1.1 Definicija i značaj SAU</b>	1
<b>1.2 Istoriski razvoj SAU</b>	3
<b>1.3 Klasifikacija SAU</b>	4
<b>1.4 Prosta regulaciona kontura</b>	5
<b>1.4 Primeri SAU</b>	9
<b>1.5.1 Stabilizatori napona</b>	9
<b>1.5.2 Regulator napona kod motornih vozila</b>	10
<b>1.5.3 Impulsni stabilizator jednosmernog napona</b>	11
<b>1.5.4 Sistemi za regulaciju temperature</b>	12
<b>1.5.5 Sistemi za distancioni prenos ugaonog pomeraja</b>	13
<b>Literatura</b>	14
<b>Glava 2. MATEMATIČKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA</b>	15
<b>2.1 Uvod</b>	15
<b>2.2 Funkcija prenosa</b>	17
<b>2.3 Elektromehaničke analogije</b>	18
<b>2.4 Funkcija prenosa linearnih električnih kola</b>	22
<b>2.5 Međusobne spreve elemenata i podsistema u sistemu</b>	26
<b>2.5.1 Redna (serijska) sprega</b>	27
<b>2.5.2 Paralelna sprega</b>	27
<b>2.5.3 Međusobna veza elemenata u sistem s povratnom spregom</b>	
<b>Karakteristične funkcije sistema s povratnom spregom</b>	28
<b>2.6 Algebra struktturnih blok-šema i grafa toka signala</b>	30
<b>2.7 Primena MATLAB-a u analizi SAU</b>	36
<b>2.7.1 Startovanje MATLAB-a</b>	36
<b>2.7.2 Definicija prenosa u MATLAB-u</b>	36
<b>2.7.3 MATLAB i algebra struktturnih blok-šema</b>	37
<b>Literatura</b>	38
<b>Pitanja za samopроверу</b>	39
<b>Zadaci za vežbu</b>	40
<b>Glava 3. ODZIVI ELEMENATA I SISTEMA</b>	43
<b>3.1 Uvod</b>	43
<b>3.2 Određivanje odziva na osnovu funkcije prenosa</b>	44
<b>3.2.1 Normalni impulsni odziv sistema</b>	45
<b>3.2.2 Normalni odskočni odziv sistema</b>	46
<b>3.2.3 Normalni odziv sistema na bilo koju pobudni signal</b>	47
<b>3.2.4 Normalni frekvenčni odziv sistema</b>	47
<b>3.2.4.1 Načini predstavljanja frekvenčkih karakteristika</b>	48
<b>3.2.4.1.1 Bodeovi dijagrami elemenata i sistema</b>	49
<b>3.3 Osnovni elementi linernih sistema i njihovi odzivi</b>	50
<b>3.3.1 Pojačavački (proporcionalni) element</b>	51
<b>3.3.2 Integracioni element</b>	51
<b>3.3.3 Diferencijalni element prvog reda</b>	51
<b>3.3.4 Inercijalni (aperiodični) element prvog reda</b>	52

---

3.3.5	Predikcioni element prvog reda	53
3.3.6	Oscilatorni element drugog reda	54
3.3.7	Ppredikcioni element drugog reda	60
3.3.8	Element transportnog (čistog) kašnjenja	60
3.3.9	Nestabilni i neminimalno fazni elementi	60
3.3.10	Konstrukcija Bodeovih dijagrama sistema	61
3.7	Procesi u linearnim SAU	63
3.5	Primena MATLAB-a za određivanje odziva	65
3.5.1	Inverzna Laplasova transformacija	65
3.5.2	Impulsni i odskočni odziv sistema	66
3.5.3	Odziv sistema na bilo koju pobudnu funkciju	67
3.5.4	Primena MTLAB-a za crtanje AFFK (Nikvistove krive)	68
3.5.5	Primena MATLAB-a u konstrukciji Bodeovih dijagrama	68
	Literatura	70
	Pitanja za samopроверу	70
	Zadaci za vežbu	72
Glava 4. STABILNOST LINEARNIH SAU  75		
4.1	Pojam stabilnosti	75
4.2	Stabilnost linearnih SAU	76
4.2.1	Potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti linearnih SAU	76
4.2.2	Algebarski kriterijumi stabilnosti	79
4.2.2.1	Hurvicov kriterijum stabilnosti	79
4.2.2.2	Rausov kriterijum stabilnosti	82
4.2.2.3	Haritonovljev kriterijum robustne stabilnosti	86
4.2.3	Frekvencijski kriterijumi stabilnosti	88
4.2.3.1	Košijeva teorema argumenta	88
4.2.3.2	Mihajlovlev kriterijum stabilnosti	90
4.2.3.3	Nikvistov kriterijum stabilnosti	92
4.2.3.3.1	Postupak skiciranja Nikvistove krive	94
4.2.3.3.2	Cipkinovo pravilo prelaza	96
4.2.3.3.3	Stabilnost sistema s transportnim kašnjenjem	97
4.2.3.3.4	Pretek faze i pretek pojačanja sistema	100
4.2.3.4	Bodeov kriterijum stabilnosti	101
4.3	Primena MATLAB-a u analizi stabilnosti sistema	103
4.3.1	Određivanje korena karakteristične jednačine	103
4.3.2	Ispitivanje stabilnosti po Nikvistu	104
4.3.3	Ispitivanje stabilnosti po Bodeu	104
4.3.4	Određivanje preteka faze i preteka pojačanja	105
	Literatura	106
	Pitanja za samopроверу	107
	Zadaci za vežbu	109
Glava 5. OCENA KVALITETA LINEARNIH SAU  111		
5.1	Metode za ocenu kvaliteta SAU	111
5.2	Ocena ponašanja sistema u ustaljenom stanju -konstante greške	113
5.2.1	Generalisane konstante greške	113
5.2.2	Konstante greške za tipične referentne ulaze	115
5.2.3	Konstante greške i spregnuti prenos sistema	119
5.3	Ocena ponašanja sistema u dinamičkim ustaljenim režimima	120
5.3.1	AFFK-e i ocena ponašanja sistema	120
5.3.1.1	Zavisnost $\zeta$ i $\phi_{pf}$ u sistemu drugog reda bez konačnih nula	121
5.3.1.2	Ocena ponašanja sistema na osnovu amplitudno-frekvencijske karakteristike spregnutog prenosa	122
5.3.1.3	Pokazatelj oscilatornosti i rezonantna frekvencija	122
5.3.1.4	Propusni opseg	123

---

## SADRŽAJ

---

5.3.1.5 Selektivnost  124
5.3.1.6 Zavisnost između preteka faze i pokazatelja oscilatornosti  124
5.3.1.7 Uticaj fazno-frekvencijske karakteristike na ponašanje sistema  126
<b>5.4 Ocena ponašanja sistema u prelaznim režimima  126</b>
5.4.1 Parametri odskočnog odziva sistema  127
5.4.2 Uticaj konačne nule na karakteristike sistema drugog reda s konjugovano kompleksnim polovima  129
5.4.3 Uticaj konačne nule na odziv sistema drugog reda s realnim polovima  130
5.4.4 Uticaj realnog pola u sistemu trećeg reda s parom kompleksnih polova  131
5.4.5 Polovi i nule čiji se uticaj može zanemariti  132
<b>5.5 Metoda geometrijskog mesta korena (GMK) Ivensa-Teodorčika  132</b>
5.5.1 Uvod  132
5.5.2 Polazne osnove metode GMK  133
5.5.3 Pravila za konstrukciju GMK  135
5.5.4 Približno određivanje nula polinoma pomoću GMK  144
5.5.5 Presek GMK s $\zeta$ - pravom  145
5.5.6 Konstrukcija GMK pri promeni drugih parametara  146
5.5.7 GMK sistema s transportnim kašnjenjem  148
5.5.8 Primena MATLAB-a za konstrukciju GMK  151
<b>5.6 Mitrovićeva metoda  154</b>
<b>5.7 Integralni kriterijumi kvaliteta sistema  157</b>
5.7.1 Izbor integralnog kriterijuma kvaliteta  158
5.7.2 Integralni kvadratni kriterijumi kvaliteta  159
<b>5.8 Osetljivost  165</b>
5.8.1 Strukturni metod modela osetljivosti sistema  167
<b>5.9 Robustnost sistema  170</b>
<b>5.10 Invarijantnost  171</b>
Literatura  172
Pitanja za samopроверу  173
Zadaci za vežbu  176
<b>Glava 6. SINTEZA LINEARNIH SAU  179</b>
<b>6.1 Uvod  179</b>
<b>6.2 Izbor strukture i zakona upravljanja SAU  180</b>
6.2.1 Osnovna struktura SAU  180
6.2.2 Struktura s referentnim modelom  180
6.2.3 Struktura s prenosom (Feed-Forward) kompenzacijom  181
6.2.4 Kombinovani sistem  182
6.2.5 Kombinovani sistem s prenosom kompenzacijom  182
6.2.6 Problemi realizacije idealnih sistema  182
6.2.7 Zakoni upravljanja SAU  185
<b>6.3 Sinteza kompenzatora proste regulacione konture  187</b>
6.3.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode  188
6.3.2 Sinteza kompenzatora primenom metode GMK  191
6.3.2.1 Projektovanje diferencijalnog kompenzatora  193
6.3.2.1.1 Standardni postupak  193
6.3.2.1.2 Metoda skraćivanja  197
6.3.2.2 Projektovanje integralnog kompenzatora  198
6.3.2.3 Sinteza integro-diferencijalnog kompenzatora  201
6.3.2.4 Primena MATLAB-a za projektovanje kompenzatora  201
6.3.2.4.1 Primena MATLAB-a za projektovanje diferencijalnih kompenzatora  201
6.3.2.4.1 Primena MATLAB-a za projektovanje integralnih kompenzatora  204

---

<b>6.4 Metoda kaskadne kompenzacije</b>	208
6.4.1 Metoda tehničkog optimuma	208
6.4.2 Metoda kaskadne kompenzacije	211
6.4.3 Metoda simetričnog optimuma	213
6.4.4 Smitov prediktor	214
Literatura	216
Pitanja za samoproveru	217
Zadaci za vežbu	220
<b>Glava 7. INŽENJERSKE METODE PODEŠAVANJA REGULATORA</b>	221
<b>7.1 Podešavanje I- regulatora</b>	222
<b>7.2 Podešavanje P - regulatora</b>	224
7.2.1 Objekat bez samoregulacije	224
7.2.2 Objekat sa samoregulacijom	225
<b>7.3 Podešavanje PI - regulatora</b>	226
7.3.1 Objekat bez samoregulacije	226
7.3.2 Objekat sa samoregulacijom	227
<b>7.4 Približne metode podešavanja regulatora</b>	228
7.4.1 Eksperimenti s otvorenom povratnom spregom	228
7.4.2 Eksperimenti sa zatvorenom povratnom spregom	230
Literatura	231
<b>Glava 8. KOMPONENTE SAU</b>	233
<b>8.1 Objekti upravljanja</b>	233
8.1.1 Generator jednosmerne struje	234
8.1.2 Motor jednosmerne struje (MJS)	236
8.1.2.1 MJS upravljan strujom rotora	238
8.1.3 Hidraulični multivarijabilni objekat	239
8.1.4 Termički objekat	241
<b>8.2 Merni elementi - senzori</b>	242
8.2.1 Elementi za detekciju pozicije	242
8.2.1.1 Potenciometri	243
8.2.1.2 Selsini	245
8.2.1.2.1 Transformatorska sprega selsina	247
8.2.1.2.2 Diferencijalni selsin	251
8.2.1.2.3 Indikatorska sprega selsina	252
8.2.1.3 Obrtni transformatori - rizolveri	254
8.2.1.3.1 Dvopolni obrtni transformatori	254
8.2.1.3.2 Višepolni obrtni transformatori	258
8.2.1.3.3 Skotov transformator	258
8.2.2 Elementi za merenje ugaone brzine	259
8.2.2.1 Tahogeneratori	259
8.2.2.1.1 Tahogenerator jednosmerne struje	259
8.2.2.1.2 Asinhroni tahogenerator	260
8.2.2.1.3 Sinhroni tahogeneratori	261
8.2.2.1.4 Optoelektronski tahogeneratori	262
8.2.2.1.5 Tahometarski merni mostovi	262
<b>8.3 Pretvarački elementi</b>	264
8.3.1 Strujni merni pretvarač	264
8.3.2 Naponski merni pretvarač	264
8.3.3 Modulatori	265
8.3.3.1 Modulator sa snalognim prekidačem	265
8.3.3.2 Modulator sa bipolarnim tranzistorima	267
8.3.3.3 Širinsko-impulsni modulator	268
8.3.4 Demodulatori	272
8.3.4.1 Fazno-osetljivi diodni demodulator	272

---

## SADRŽAJ

---

<b>8.4 Pojačavači</b>	274
8.4.1 Elektromašinski obrtni pojačavači	275
8.4.1.1 Generator jednosmerne struje	275
8.4.1.2 Amplidin	276
8.4.1.3 Alternator	277
8.4.2 Elektronski pojačavači	277
8.4.2.1 Pojačavači sa elektronskim cevima	277
8.4.2.2 Pojačavači sa tranzistorima	274
8.4.2.2.1 Operacioni pojačavači	278
8.4.2.2.2 Tranzistorski pojačavači snage	281
<b>8.5 Izvršni organi</b>	282
8.5.1 Dvofazni asinhroni servomotor	282
8.5.2 Servosistemi	290
8.5.2.1 Mehanički reduktori	291
8.5.2.1.1 Reduktori s cilindričnim zupčanicima	294
8.5.2.1.2 Planetarni reduktor	294
8.5.2.1.3 Talasni reduktor	295
<b>8.6 Kompenzatori i regulatori</b>	296
8.6.1 Kompenzatori	297
8.6.1.1 Diferencijalni kompenzatori	297
8.6.1.2 Diferencijalni kompenzatora s aktivnim elemetima	298
8.6.1.3 Višestruki diferencijalni kompenzator	298
8.6.1.4 Transformator kao realni diferencijator	299
8.6.1.5 Realni diferencijator sa operacionim pojačavačima	299
8.6.2 Integralni kompenzator	300
8.6.2.1 Integralni kompenzator sa aktivnim elementima	301
8.6.3 Integro-diferencijalni (diferencijalno-integralni) kompenzator	301
8.6.4 Regulatori	303
Literatura	305
Pitanja za samoproveru	306
Zadaci za vežbu	309
<b>Prilog: Tabela Laplasove transformacije</b>	311
<b>Registar pojmova</b>	313

<b>Glava 1. UVOD</b>	1
<b>1.1 Definicija i značaj SAU</b>	1
<b>1.2 Istorijski razvoj SAU</b>	3
<b>1.3 Klasifikacija SAU</b>	4
<b>1.4 Prosta regulaciona kontura</b>	5
<b>1.4 Primeri SAU</b>	9
<b>1.5.1 Stabilizatori napona</b>	9
<b>1.5.2 Regulator napona kod motornih vozila</b>	10
<b>1.5.3 Impulsni stabilizator jednosmernog napona</b>	11
<b>1.5.4 Sistemi za regulaciju temperature</b>	12
<b>1.5.5 Sistemi za distancioni prenos ugaonog pomeraja</b>	13
Literatura	14

# Glava 1

## UVOD

### 1.1 Definicija i značaj SAU

U svakodnevnom životu često se susrećemo s terminima: *sistem, automatika, regulacija, upravljanje, automatska regulacija i automatsko upravljanje*. Na prvi pogled čini nam se da su oni sasvim jasni, čak i laiku. Međutim, ako bi pokušali da damo njihovu preciznu definiciju, mnogi od nas ne bi bili u stanju da to učine sažeto, već bi pokušavali da opisno, putem primera, objasne te pojmove.

Reč *sistem* je grčkog porekla<sup>1</sup> (*systema*). Upotrebljava se u mnogim oblastima, na primer s atributima: društveno-politički, pravni, ekonomski, biološki, ekološki, obrazovni, tehnički, tehnološki itd. Za nas je ovde od prvenstvene važnosti definicija sistema u tehničkom smislu. Najpreciznija je:

*Sistem je skup elemenata koji deluju uzajamno radi postizanja cilja neostvarljivog bilo kojim elementom posebno.*

Međutim, bez obzira na to što ovde imamo u vidu prvenstveno tehnički sistem, definicija, u kibernetском<sup>2</sup> smislu, važi za bilo koji sistem.

Pojam *regulacija*<sup>3</sup> (lat. *regulatio*) označava podešavanje, uskladivanje sa: propisima, zakonima, zadatim vrednostima.

Pojam *automatika*<sup>4</sup> (grčki: *automatikos=koji se kreće sam od sebe*) označava naučno-tehničku disciplinu koja proučava sisteme za regulisanje i upravljanje tehnološkim procesima.

Reč *upravljanje* (engl.: *control*) je slovenskog porekla (ruski: *управление*). Ona u suštini označava relaciju nadređenosti i podređenosti elemenata jednog sistema. Nadređeni (upravljački) deo deluje na podređene (upravljane) delove obezbeđujući da sistem u celini ostvari svoju funkciju. Prema tome,

<sup>1</sup> M. Vujaklija, Leksikon stranih reči i izraza, str. 849., Prosveta, Beograd, 1980.

<sup>2</sup> Kibernetika (grčki: kybernao=upravljam, vladam, krmanim). Prema definiciji osnivača tehničke kibernetike, Vinera, *kibernetika je nauka o upravljanju tehničkim sistemima i živim organizmima*

<sup>3</sup> Ibid, str. 785; <sup>4</sup>Ibid., str. 90.

sistem automatskog upravljanja (SAU) je tehničko-tehnološki sistem koji deluje nezavisno od čoveka radi ostvarivanja ciljeva koje je pred njim postavio inženjer-konstruktör;

sistem automatske regulacije (SAR) je tehničko-tehnološki sistem, čiji je zadatak održavanje (stabilizacija) ili podešavanje (regulacija) izabranih veličina tehnološkog procesa bez učešća čoveka.

U našoj stručnoj literaturi, pogotovu u svakodnevnoj praksi, veoma često se koristi termin *automatska kontrola* (engl.: *automatic control*), odnosno *kontroler* (engl.: *controller*) kao zamena za *automatsko upravljanje*, odnosno, *upravljački podsistem* sistema automatskog upravljanja.

Treba, takođe, podvući razliku između *SAU* i *SAR*. Prvi pojam je širi. SAU u mnogim slučajevima sadrži (ali ne mora) jedan ili više SAR, pored sistema automatske kontrole (nadgledanja) procesa. SAR imaju jednu bitnu osobinu na osnovu koje funkcionišu: u njima je založen *princip povratne sprege* (engl.: *feedback*, rus.: *обратная связь*). Ovaj princip upravljanja na bazi upoređivanja postavljenih ciljeva i ostvarenih rezultata nije isključivo čovekov izum. Princip povratne sprege je i prirodni fenomen. Termin *povratna sprega* je blizak terminu *adaptacija* (lat.: *adaptatio*) odnosno *prilagođavanje* (rus.: *приспособление*). Poznato je da se živa bića prilagođavaju, adaptiraju, uslovima sredine. Darwinova teorija evolucije u svojoj osnovi ima princip adaptacije čiji je osnovni element povratna sprega. Ali, povratna sprega nije vezana samo za živu prirodu i tehniku. Ona je osnova na kojoj funkcioniše društvo, i svaki čovek pojedinačno kao svesno biće, a mnoge čovekove vitalne funkcije se održavaju zahvaljujući delovanju bioloških regulatora: temperature, pritiska, srčanog ritma, otvora zenice oka i dr. Prema tome, pojam *povratna sprega* ima široko-kibernetsko značenje. Iako sistemi automatskog upravljanja mogu biti i bez povratne sprge, u literaturi i praksi se, obično, pod pojmom *automatsko upravljanje* podrazumeva sistem s povratnom spregom. U ovom kursu biće posvećena pažnja sistemima automatskog upravljanja i regulacije, dakle automatici zasnovanoj na principu delovanja s povratnom spregom, prvenstveno s tehničkog aspekta.

Pojam *automatika* je širi od pojma *automatsko upravljanje* kako smo ga mi definisali. Mnogi tehnološki procesi se uspešno upravljuju bez primene principa povratne sprege. Upravljački sistemi koji se tamo primenjuju su, najčešće, programabilni sekvencijalni automati koji po unapred zadatom redosledu, uz odgovarajuće provere logičkog tipa, sukcesivno (sekvencijalno) obavljaju komande. Ovakav oblik automatizacije tehnoloških procesa je veoma rasprostranjen, naročito s ekspanzijom mikroprocesora i mikroračunara, i uspešno se primenjuje u procesima gde spoljašnji uticaji na proces ne postoje ili nisu značajni, odnosno ako princip upravljanja s povratnom spregom nije tehnički izvodljiv, a poremećaji se mogu unapred predvideti i kompenzovati. Na primer, u procesu tačkastog varenja limova nije moguće ostvariti povratnu spregu. Međutim, proces je dobro izučen i automatizovan primenom odgovarajućeg automata. Danas, na primer, roboti obavljaju procese zavarivanja u automobil skoj industriji.

## Glava 1.: Uvod

---

Borba za što veću produktivnost, visoki kvalitet i nisku cenu proizvoda je dominantni faktor za uvodenje automatike u sve industrijske grane, a težnja za kvalitetnijim životom je uzročnik njene široke primene u svim delatnostima. Osim toga, u mnogim slučajevima primena automatike je neizbežna, jer treba obaviti zadatke u sredinama opasnim po ljudsko zdravlje i život kao što su: hemijski i topotno agresivne sredine, nuklearna postrojenja, kosmička istraživanja. Jedan segment te automatike čine SAU i SAR, tj. sistemi s povratnom spregom čiji se jedan manji, osnovni deo obrađuje u ovoj knjizi.

### 1.2 Istorijski razvoj SAU

Po svemu sudeći prva primena automatske regulacije, u tehničkom smislu, ostvarena je na problemu regulacije protoka žita u vodenicama-potočarama. Neki autori [1] za početak uzimaju Drebellov (Drebbel) inkubator (1624.), drugi, pak, početke vezuju za Higensov (Huygens) regulator sata s klatnom (1675.), odnosno za regulator nivoa tečnosti s plovkom Polzunova (1765.) [2]. Međutim, za početak nauke o automatskoj regulaciji smatra se ipak početak primene Vatovog (Watt) centrifugalnog regulatora (1728.) za stabilizaciju rada parne mašine, koji je teorijski obradio Maksvel (Maxwell) (1868.). Osnovni problem sistema automatske regulacije (upravljanja) kao dinamičkih sistema s povratnom spregom je problem stabilnosti. Matematički gledano, to je problem stabilnosti diferencijalnih jednačina koje opisuju dinamiku sistema. U XIX veku ovaj problem je zaokupljaо pažnju mnogih naučnika. Trojica od njih su postala poznata i priznata u ovoj oblasti: Hurvic (Hurwitz), Raus (Routh) i Ljapunov. Prva dvojica su nezavisno (1895. i 1877., respektivno) razradili algebarske metode za ocenu stabilnosti linearnih diferencijalnih jednačina, dok je Ljapunov (1892.) dao genijalni prilaz za ocenu stabilnosti nelinearnih sistema. Kao što to obično biva, nauka je daleko ispred prakse, pa je teorija stabilnosti Ljapunova bila zaboravljena i ponovo "otkrivena" pola veka kasnije. Početkom XX veka teorija automatske regulacije se formira kao opšta disciplina s nizom podoblasti: regulacija električnih mašina, regulacija motora i parnih postrojenja, i sl.

1927. god. Blek (Black) konstruiše elektronski pojačavač s povratnom spregom, a Buš (Bush) - diferencijalni analizator. 1932. god. Nikvist (Nyquist), američki naučnik švedskog porekla, objavljuje kriterijum stabilnosti pojačavača s povratnom spregom, koji postaje opšti prilaz za izučavanje stabilnosti linearnih sistema s povratnom spregom. Ruski naučnik Mihajlov (1938.) objavljuje svoj frekvencijski prilaz analizi stabilnosti SAR. 1942. god. Viner (Wiener) daje teoriju optimalne filtracije. Bode (1946.) uvodi logaritamske amplitudno-frekvencijske karakteristike pojednostavljujući, za inženjersku primenu, Nikvistov kriterijum. Zatim, Teodorčik, u Rusiji, i Ivens (Evans) u Americi (1948.) razvijaju metodu analize SAR prateći kretanje korena karakteristične jednačine sistema pri promeni pojačanja ili nekog drugog parametra.

U ovom periodu počinje i razvoj teorije nelinearnih sistema. S obzirom da nije postojala (a i danas ne postoji) opšta matematička teorija nelinearnih sistema, pomak je napravljen sužavanjem klase nelinearnih sistema najinte-

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

resantnijih za širu praktičnu primenu. Dekompozicijom nelinearnog sistema na dinamički linearni i statički nelinearni podsistem, najpre Goljdfarb, u Rusiji, zatim Kohenberger (Kochenberger), u Americi, i Tastin (Tustin), u Engleskoj (1950.), koristeći ovu dekompoziciju, uvode metodu harmonijske linearizacije za analizu oscilatornih procesa u nelinearnim sistemima, a zatim, Ajzerman, u Rusiji, odnosno Kalman, u Americi, pokušavaju da reše problem stabilnosti nelinearnih sistema statičkom odnosno diferencijalnom linearizacijom nelinearnog elementa čija se karakteristika nalazi u I i III kvadrantu. Ova dva poslednja prilaza, iako nisu urodila potpunim uspehom, odigrala su važnu ulogu u daljim istraživanjima. Naime, koristeći navedenu dekompoziciju i tip nelinearnosti kao i teoriju stabilnosti Ljapunova, ruski naučnici Lurje (Лурье) i Postnjikov (1944.) uvode apsolutnu stabilnost nelinearnih sistema, koju detaljnije formuliše Ajzerman, a izvanredno finalizira rumunski naučnik Popov (1959.) u obliku frekvencijskog kriterijuma stabilnosti.

Veliki značaj za razvoj nelinearnih sistema ima i metoda faznog prostora (fazne ravni) koju je uveo francuz Poenckare (1881.) a detaljno razvio Andronov (1930.-1940.) u Rusiji. Ova metoda, iako ima ograničenja, odigrala je značajnu ulogu u razvoju optimalnih SAU i sistema upravljanja promenljive strukture (SUPS). Za razvoj teorije optimalnih sistema su najzaslužniji Pontrjagin, u Rusiji, (*Princip maksimuma*, 1956.) i Belman, u Americi, (*dinamičko programiranje*, 1957.) kao i Kalman (1960.). Teorija SUPS je gotovo u potpunosti razvijena u Rusiji u periodu od 1957.-1970. god. Njen osnivač je Jemeljanov (Емельянов), a značajne rezultate je postigao ruski naučnik Utkin.

Drugi značajan pravac u teoriji SAU i SAR je teorija impulsnih i digitalnih SAU. Hurovic (Hurewicz, 1947.), u Americi, uvodi ovu klasu sistema, a Cipkin (Цыпкин), u Rusiji, i Džuri (Jury), u Americi, kao i dr. formiraju ovu klasu sistema, koja dobija sve više na značaju pronalaskom mikroprocesora (Hoff, 1969.).

Razvoj SAU je usko povezan s razvojem računarske tehnike, koja je i ponikla u okviru automatike. Naime, počev od pomenutog diferencijalnog analizatora iz 1927. god., u narednim decenijama, sve do 80-tih godina XX veka, značajnu ulogu u razvoju automatike odigli su analogni računari, zasnovani na elektronskim operacionim pojačavačima i integratorima kao osnovnim elementima. Digitalni računari na početku svog razvoja, 50-tih godina XX veka, su bili suviše glomazni i skupi, ali su igrali značajnu ulogu u razvoju nauke uopšte, a posebno automatike. Međutim, pojавa i nagli razvoj mikroprocesora odigli su neslućenu ulogu u razvoju svih proizvodnih snaga, a naročito automatike.

Mnogi naučnici su, neposredno ili posredno, zaslužni za razvoj automatike i nije moguće u jednom kraćem osvrtu pomenuti svakog od njih. Završavajući ovaj odeljak, uputno je ukazati i na doprinos jugoslovenskih naučnika u ovoj oblasti. U prvom redu treba istaći poštovanje i divljenje profesoru Dušanu Mitroviću (†1962.) kao osnivaču poznate beogradske (jugoslovenske) škole automatike i autoru u svetu priznate Mitrovićeve algebarske metode stabilnosti. Mitrovićevi učenici i saradnici (Rajko Tomović, Miodrag Rakić, Dragoslav

Šiljak, Petar Kokotović, Milić Stojić dali su nemerljiv doprinos razvoju naše automatike. Šiljak i Kokotović, kao naturalizovani Amerikanci, su značajno doprineli teoriji nelinearnih i velikih sistema. Teorija osetljivosti je razvijena u okviru beogradske škole automatike (Tomović, Kokotović, Vukobratović). Naša škola automatike je poznata i priznata i u oblasti robotike, čiji je rodonacelnik profesor Miomir Vukobratović. Razvoju automatike, posebno teoriji SUPS, značajan doprinos je dala i profesor Branislava Peruničić-Draženović s Elektrotehničkog fakulteta u Sarajevu, inače beogradski đak. Danas u našoj zemlji u području automatike radi veliki broj naučnika i istraživača. Mora proći neophodno vreme (*istorijska distanca*) da bi se objektivno ocenili doprinosi svakog pojedinca u ovoj oblasti nauke i tehnike.

### 1.3 Klasifikacija SAU

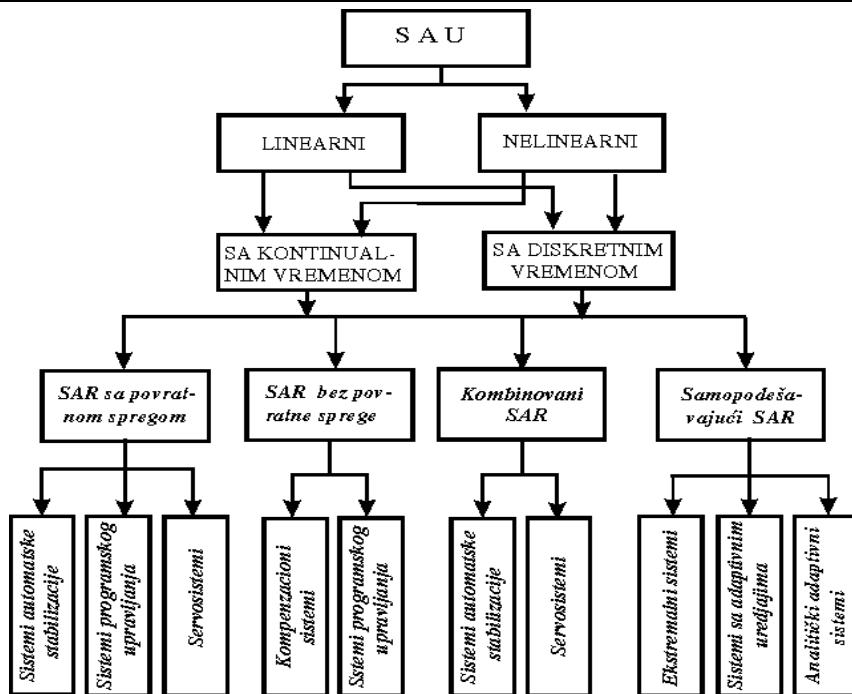
U ovom odeljku ćemo se pozabaviti klasifikacijom SAU, na osnovu prikaza na sl. 1.1, i definicijom onog dela sistema koji će biti predmet izučavanja na ovom kursu. SAU se mogu klasifikovati po različitim kriterijumima: principu delovanja, karakteru signala, matematičkom modelu, vrsti energije, itd.

Prema obliku matematičkog modela možemo ih podeliti, najpre, na *lineарне* i *nelineарне*. Prvi se opisuju linearnim, a drugi - nelinearnim diferencijalnim i/ili algebarskim jednačinama; na *sisteme sa skoncentrisanim* ili s *raspodeljenim parametrima* (prvi se opisuju običnim, a drugi - parcijalnim diferencijalnim jednačinama); na *determinističke*, kod kojih se parametri ne menjaju u vremenu i *stohastičke*, s vremenski promenljivim parametrima. Moguće su i kombinacije kao na primer: *nelinearni stohastički sistemi s raspodeljenim parametrima*. Prema karakteru signala svrstavamo ih u *kontinualne* i *diskretne*, uz moguću kombinaciju: *kontinualno-diskretni*. Diskretizacija se može izvesti po vremenu, po amplitudi ili kombinovano: po vremenu i amplitudi. U tom slučaju govorimo o: *impulsnim, relejnim ili digitalnim sistemima upravljanja*, respektivno. Tako, na primer, sistem može biti nelinearan (ili linearan), vremenski kontinualan (ili vremenski diskretan). Bilo koji od napred navedenih sistema možemo svrstati u jednu od četiri klase: *sistemi s povratnom spregom, sistemi bez povratne sprege, kombinovani sistemi i samopodešavajući sistemi*. Međutim, i samopodešavajući sistemi su s povratnom spregom ili bez nje.

Svaka klasa sistema može se podeliti na grupe. Tako, na primer, sistemi s povratnom spregom se dele na: *sisteme automatske stabilizacije, sisteme programske regulacije i servosisteme*.

U sistemima automatske stabilizacije referentni ulazni signal je konstantan. Kod sistema programskog upravljanja on je unapred poznata funkcija vremena, dok je kod servosistema - unapred nepoznata funkcija vremena.

SAU koji rade bez povratne sprege funkcionišu kao kompenzacioni sistemi koji minimalizuju uticaj poremećaja, ili kao programski sistemi kod kojih je unapred uračunato dejstvo poremećaja (na primer, kao kod sistema za tačkasto zavarivanje).



Po vrsti korišćene energije SAU se mogu podeliti na: *električne, hidraulične, pneumatske i kombinovane (elektrihidrauličke, elektropneumatske i sl.)*.

U zavisnosti od broja regulisanih veličina sistemi se dele na: *monovarijabilne i multivarijabilne*. Kod monovarijabilnih sistema se reguliše (upravlja) samo jedna veličina, dok kod multivarijabilnih - dve ili više veličina. Multivarijabilni sistemi mogu biti *raspregnuti* (svaki ulaz u sistem deluje samo na svoj izlaz) ili *spregnuti* (kada postoje unakrsne sprege tako da jedan ulaz ima uticaja na više izlaza ili na sve izlaze).

Na kraju istaknimo da navedena klasifikacija nije potpuna, jer se ova grana nauke i tehnike, kao i druge, neprekidno razvija. Pojedine klase sistema su dobine svoje potklase. Na primer, jedna klasa relejnih sistema pod nazivom *sistemi promenljive strukture* se izdvojila i postala važan pravac u rešavanju mnogih praktičnih regulacionih problema. Isto tako *optimalni sistemi* zauzimaju istaknuto mesto u teoriji i praksi SAU, zatim *robustni sistemi* itd. Korišćenje računara, njegove mogućnosti logičkog zaključivanja i imitacije ljudskog intelekta, uslovilo je razvoj inteligenčnih ili *ekspertnih sistema, fuzzy sistema* itd.

## 1.4 Prosta analogna regulaciona kontura

Pod prostom regulacionom konturom podrazumevamo jednokonturni SAU sa povratnom spregom, sl. 1.1, čiji su osnovni funkcionalni elementi predstavljeni blokovima (pravougaonim), a signali - strelicama. Ovde prvenstveno imamo u vidu sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom (sistemi sa skalarним

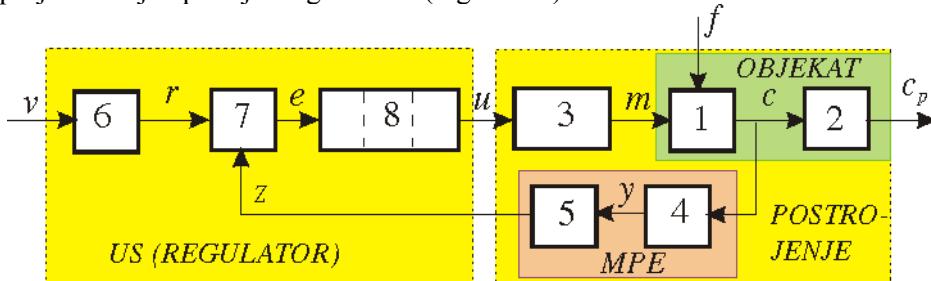
## Glava 1.: Uvod

---

upravljanjem). U složenim, multivarijabilnim sistemima (sistemima sa vektorskim upravljanjem), pojam proste regulacione konture se može uopštiti, što bi samo neznatno izmenilo sl. 1.2.

Na sl. 1.2 se, najpre, uočavaju komponente, označene belim kvadratima ili pravougaoncima i brojevima. Iako je, na prvi pogled, označavanje redosleda komponenata bez određenog pravila i sistema, odmah ćemo uočiti da postoji sistem koji je sasvim "prirodan". Naime, brojem 1 označen je osnovni element svakog SAU - *objekat upravljanja (regulacije)*. Sa njim počinje i na njemu se završava analiza i sinteza sistema upravljanja. Objekat upravljanja je najvažniji deo sistema, jer su sve ostale komponente na određeni način uslovljene objektom. Kada govorimo o objektu upravljanja (regulacije), treba imati u vidu da on može biti jednostavan ali i veoma kompleksan. U jednostavnim slučajevima, veličina koja se na objektu želi upravljati (regulisati), a koju nazivamo *upravljana (regulisana) promenljiva*  $c(t)$ , je istovremeno i *izlazna promenljiva* sistema, jer se može neposredno meriti, odnosno detektovati. U složenijim slučajevima, izlazna promenljiva sistema se ne meri neposredno, ali se zna da je ona, pomoću *izlaznog prilagodnog elementa* (2), poznatom funkcionalnom zavisnošću povezana s upravljanom promenljivom objekta. Zbog toga se blok 1 i blok 2 na sl. 1.1 mogu zajedno nazvati *proširenim objektom upravljanja*. Na ulaze objekta upravljanja deluju dve promenljive veličine:  $m(t)$  i  $f(t)$ -*manipulativna promenljiva* i *poremećaj*, respektivno. Kao što je poznato, zadatak upravljanja je: *ostvariti željeno kretanje objekta*  $c(t)$  bez obzira na veličinu poremećaja  $f(t)$ . To se, u jednostavnim slučajevima, ili u slučajevima kada to druge okolnosti ne dozvoljavaju (cena, pouzdanost, tehnička neizvodljivost), može ostvarivati ručnim upravljanjem. Naravno, u kibernetском smislu, jedinstvo objekta upravljanja (tehnike) i čoveka-operatera (živog bića) čini, takođe, sistem upravljanja sa povratnom spregom. Operater nastoji da, posmatrajući ponašanje objekta, oličeno u veličini i karakteru promene upravljane veličine, menja manipulativnu promenljivu  $m(t)$  tako da obezbedi minimalno moguće odstupanje upravljane promenljive od neke unapred zadate vrednosti u datom trenutku vremena. Kao primer takvog *biotehničkog sistema* može poslužiti sistem vozač-automobil ili pilot-avion. Međutim, mi se nećemo baviti takvim sistemima, već samo tehničkim sistemima automatskog upravljanja. Zbog toga je, često, neophodno objektu pridodati: *izvršni organ-aktuator* (3) koji obezbeđuje kompatibilnost objekta sa sistemom upravljanja. Osim toga, u cilju dobijanja informacije o upravljanoj veličini, mora postojati odgovarajući *merni element-senzor* (4) koji detektuje upravljanu promenljivu objekta. Kao senzori se koriste različite naprave koje transformišu upravljanu promenljivu, kao fizičku veličinu, koja oličava stanje objekta, u pogodan za dalju primenu signal  $y(t)$ , najčešće električni. S obzirom da tako dobijen signal često nije pogodan za dalju primenu, zbog kompatibilnosti sa ostalim komponentama, kao i zbog unifikacije, senzoru se pridodaje *pretvarački element* (5), koji signal senzora  $y(t)$  prevodi u standardni oblik strujnog signala (0-20 mA ili 4-20 mA), odnosno u naponski signal (0-5 V ili 0-10 V). Senzor i pretvarač predstavljaju, najčešće, jedinstvenu funkcionalnu i konstruktivnu celinu koju nazivamo

merno-prevaračkim elementom ili davačem. Objekat se obično kompletira zajedno sa aktuatorom i davačem i za inženjera automatike predstavlja objekat u širem smislu ili postrojenje (engleski: plant) odnosno proces. Inženjer automatike, u najboljem slučaju, ima pred sobom gotovo postrojenje (proces), a njegov zadatak se svodi na izbor upravljačkog sistema (US) (regulatora). Međutim, nisu retki slučajevi da inženjer automatike učestvuje i u izboru ili konstrukciji merno-prevaračkih elemenata i aktuatora, odnosno u kompletiranju postrojenja. Bez obzira na rečeno, krajnji cilj inženjera automatike je projektovanje upravljačkog sistema (regulatora).



Sl. 1.2. Prosta regulaciona kontura:

**Komponente:** 1- objekat u užem smislu; 2-izlazni prilagodni element; 3-izvršni organ-aktuator; 4-merni element-senzor; 5-prevarački element; 6-ulazni prilagodni element; 7 - komparator (detektor signala greške); 8-pojačavač sa elementima za obradu signala.

**Signali:**  $v$ -ulazni komandni signal;  $r$ -referentni signal;  $e$ -signal greške;  $u$ -signal upravljanja;  $m$ - manipulativna promenljiva;  $c$ -upravljana promenljiva;  $c_p$ -posredno upravljana promenljiva;  $y$ -mera upravljane promenljive;  $z$ -signal povratne sprege;  $f$ -poremećaj.

Jedna od komponenti regulatora u širem smislu je *ulazni prilagodni element* (6) koji *komandni signal*  $v(t)$  transformiše u *referentni ulazni signal* (zadatu vrednost)  $r(t)$ . Potreba za ovakvom komponentom se javlja iz dva razloga: (i) komandni signal je druge fizičke prirode i nekompatibilan je sa signalom povratne sprege, sa kojim se upoređuje; (ii) mora se, takođe, prevesti u standardni strujni ili naponski signal. *Referentni ulazni signal*  $r(t)$  i *signal povratne sprege*  $z(t)$  se upoređuju u *komparatoru-detektoru signala greške* (7). On na svom izlazu generiše *signal greške*  $e(t)$  kao razliku referentnog ulaznog signala i signala povratne sprege. Signal greške je mera odstupanja signala povratne sprege po veličini i znaku (fazi) u odnosu na zadatu vrednost upravljane promenljive - referentni signal. Signal greške, najčešće, po nivou ili po snazi nije dovoljan da pobudjuje aktuator. Zbog toga se mora pojačati. Osim toga, zbog problema stabilnosti sistema, obezbeđenja statičke i dinamičke tačnosti, kao i radi prilagođenja aktuatoru po vrsti signala, signal greške se mora na odgovarajući način transformisati. Zbog toga je *pojačavač sa elementima za obradu signala* (8) na blok-šemi proste regulacione konture označen pravougaonikom sa više sekacija, čija se struktura ne može unapred odrediti. U sastav ovog bloka mogu biti *kompenzatori, modulatori i demodulatori*. Osim

## Glava 1.: **Uvod**

toga, stabilizacija sistema se često efektno postiže uvođenjem lokalnih povratnih sprega, što izlazi iz okvira proste regulacione konture.

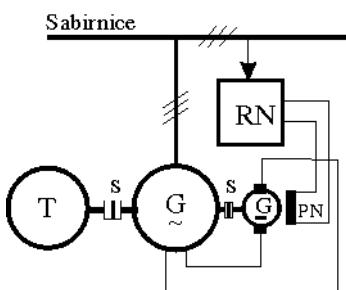
### 1.5 Primeri SAU

U cilju bar delimičnog upoznavanja s klasom problema, čije će proučavanje biti predmet ove knjige, u ovom odeljku dajemo primere SAR i SAU za rešavanje konkretnih problema. Najpre ćemo navesti primere objekata čija upotreba zahteva primenu automatske regulacije.

**1.5.1 Stabilizatori napona.** Za napajanje potrošača električne energije jednosmernom ili naizmeničnom strujom, pogotovo elektronskih uređaja i sistema, potrebno je održavati napon napajanja u određenim granicama. To se čini na tri nivoa: (i) u elektranama, regulacijom napona generatora (prvenstveno zbog sprezanja generatora na istu mrežu), (ii) u proizvodnim pogonima, primenom stabilizatora mrežnog napona, (iii) u elektronskim uređajima, pomoću stabilizatora jednosmernog napona.

Regulacija napona generatora naizmenične struje (alternatora) u elektranama ostvaruje se promenom jačine magnetnog fluksa (pobude) koji daje jednosmerna struja u namotajima pobude. Jačina struje se određuje veličinom napona na krajevima generatora jednosmerne struje (budilice) ili drugog regulisanog izvora napajanja jednosmerne struje (tiristorski regulisani ispravljač). Na sl. 1.3 prikazana je principska blok-šema ovog sistema.

Napon na sabirnicama se meri i upoređuje s referentnom vrednošću napona u regulatoru napona (RN). RN menja pobudu budilice, a ova pobudu alternatora, tako da na sabirnicama ostane stabilan napon nezavisno od veličine električnog opterećenja. Međutim, s obzirom na to da se informacija o naponu uzima sa sabirnica, praktično s krajeva generatora, zbog dužine vodova električne mreže, uticaja opterećenja nezavisnih potrošača, napon u elektrodistributivnoj mreži tj. kod krajnjih potrošača varira.



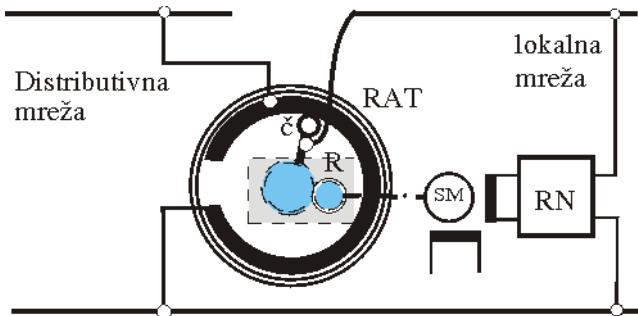
Sl. 1.3. Šema regulacije napona:

T-turbina, G~ - alternator, G - budilica, PN-pobudni namotaj budilice, RN- regulator napona, S - mehanička spojница.

upravlja iz elektronskog regulatora napona na potrošaču sa zadatom vrednošću, i na bazi njihove razlike koriguje položaj četkice (Č) RAT, minimalizujući ovu razliku.

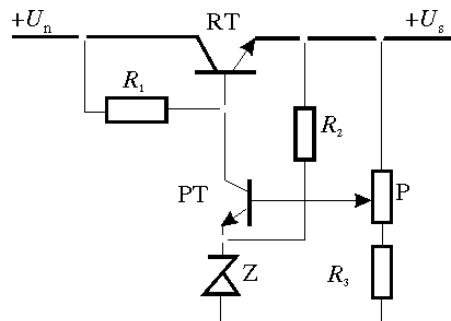
U našim električnim mrežama ta varijacija može biti  $\pm 10\%$  pa i više. Zbog toga se u industriji, za napajanje osetljivih potrošača, koriste stabilizatori napona. Jedan od, do sada, najčešće korišćenih je servostabilizator mrežnog napona, čija je principska blok-šema prikazana na sl. 1.4.

Električna energija se dovodi u potrošač preko regulacionog autotransformatora (RAT) koji je pozicioniran servomotorom (SM) preko mehaničkog, zupčastog reduktora (R). Servomotor se napona (RN), koji upoređuje stvarnu vrednost napona na potrošaču sa zadatom vrednošću, i na bazi njihove razlike koriguje položaj četkice (Č) RAT, minimalizujući ovu razliku.



Sl. 1.4. Stabilizator mrežnog napona elektromehaničkog tipa (servostabilizator). RAT - regulacioni autotransformator, č -ugljena četkica (rolnica), R - mehanički reduktor sa zupčanicima, SM - servomotor, RN - regulator napona.

I pored stabilizacije napona u elektranama i industrijskim pogonima, mnogi elektronski sistemi i uređaji zahtevaju stabilizaciju i jednosmernog napona napajanja, što se, najčešće, izvodi kao sastavni deo samih uređaja ili sistema. Ti lokalni stabilizatori su danas obično integrirani mikroelektronski sklopovi, kada se radi o manjim snagama. Za veće snage se kombinuju različita rešenja. Osnovni princip regulacije jednosmernog napona, u poluprovodničkoj tehnici, prikazan je na sl. 1.5. Zadata vrednost izlaznog napona se dobija pomoću Zener diode  $Z$ , a mera izlaznog, stabilisanog napona pomoću razdelnika napona, koga čine otpornik  $R_3$  i potenciometar  $P$ . Ta dva napona se upoređuju na spoju baza-emiter pojačavačkog tranzistora (PT) koji, sa svoje strane, menja napon na bazi



Sl. 1.5. Stabilizator jednosmernog napona s rednim tranzistorom (RT).

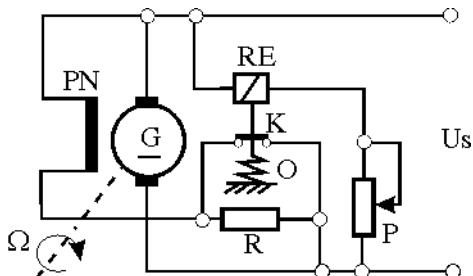
rednog tranzistora (RT) menjajući pri tome veličinu pada napona na njemu, tako da izlazni (stabilisani) napon bude jednak naponu reference (naponu na  $Z$ ) umnoženom recipročnom vrednošću koeficijenta prenosa razdelnika napna  $P \cdot R_3$ .

Ostajući u domenu stabilizacije napona, navećemo još dva primera: regulator napona kod motornih vozila i impulsni stabilizator jednosmernog napona s integrisanim kolom NE555.

### 1.5.2 Regulator napona kod motornih vozila.

Tu postoji dva rešenja. Prvo, starije konstrukcije, je ostvareno generatorom jednosmerne struje (diname), a drugo-generatorom trofaznog naizmeničnog napona (alternatorom) s dodatnim poluprovodničkim ispravljačem. U osnovi, prilazi su slični kao u gore datom primeru regulacije napona alternatora. Međutim, rešenja su krajnje jednostavna s obzirom na namenu i cenu koštanjaa. Obradićemo, ukratko, samo regulaciju napona generatora jednosmerne struje (sl. 1.6). Rotor samopobudnog generatora se obrće motorom promenljivom brzinom,  $\Omega = \text{var}$ . Veličina izlaznog

## Glava 1.: Uvod



Sl. 1.6. Regulacija napona generatora jednosmerne struje.

napon,  $U_s$ , zavisi kako od te brzine, tako i od velicine električnog opterećenja (struje potrošnje). Pobudni namotaj generatora (PN) je preko kontakta K releja (RE), odnosno otpornika R, priključen na izlazne krajeve generatora. Na taj izlaz je vezan i namotaj releja RE, preko potenciometra P kojim se može podešavati nivo izlaznog napona  $U_s$ . On se može podešavati i zatezanjem opruge (O) pomoću vijka (na slici nije prikazan), što se često u praksi i koristi. Po pokretanju generatora, napon na njegovom izlazu raste, zbog samopobude i direktno priključenog PN na izlaz. Kada napon dostigne prag okidanja RE, ono reaguje, i u kolo PN uključuje otpor R. Usled toga pobudna struja i izlazni napon opadaju. Posle odgovarajućeg smanjenja izlaznog napona, RE se deaktivira i kratko spaja R, napon počinje da raste itd. Na taj način, izlazni napon će oscilovati oko zadate vrednosti. Amplituda tih oscilacija i frekvencija zavisiće od parametara sistema, odnosno od podešenosti regulatora.

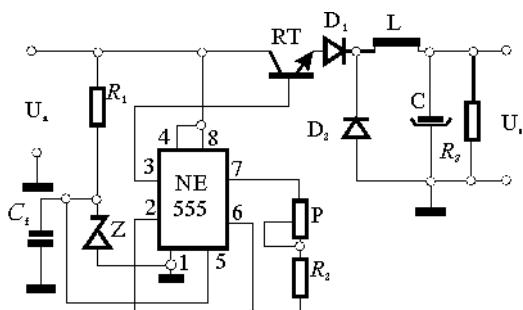
**1.5.3 Impulsni stabilizator jednosmernog napona.** Za razliku od stabilizatora jednosmernog napona prikazanog na sl. 1.5, gde redni tranzistor radi u kontinualnom režimu, kod impulsnih stabilizatora redni tranzistor radi u prekidačkom režimu.

Na sl. 1.7 prikazano jedno od mnogih rešenja. Integrisano kolo NE 555, na osnovu referentnog napona (zadate vrednosti) generisanog Zener diodom (Z) i napona na njegovim pinovima 2 i 6, dovodi redni tranzistor u provodno ili neprovodno stanje. Ako je taj napon manji od napona  $U_z$ , RT je provodan, a u suprotnom je neprovodan. Na taj način, na ulaz LC filtra javlja se povorka impulsa. LC filter s diodom D2 vrši usrednjavanje izlaznog napona. Odstupanje izlaznog napona od zadate vrednosti se podešava potencijometrom P.

Za razliku od prva tri primera, gde se regulacioni uticaj menja kontinualno, u zadnja dva prima-

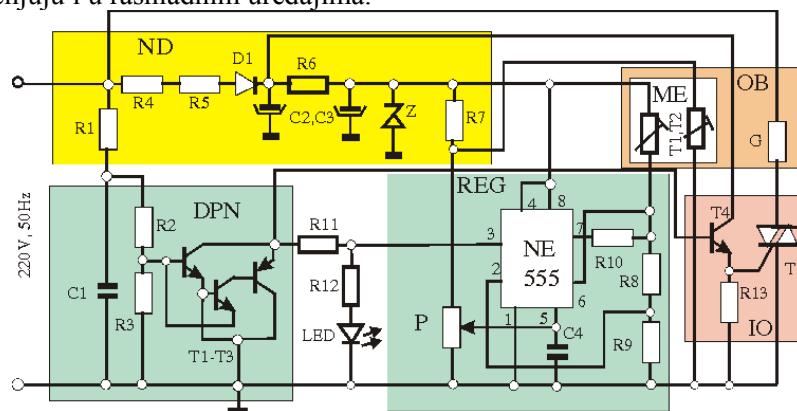
ra imamo diskontinualno reagovanje regulatora. U prvom slučaju možemo s puno argumenata da govorimo o linearnim, a u drugom - o nelinearnim sistemima.

Navećemo još nekoliko primera nelinearnih sistema.



Sl. 1.7. Impulsni stabilizator jednosmernog napona.

**1.5.4 Sistemi za regulaciju temperature** u pećnicama, bojlerima i prostorijama koriste, uglavnom, kapilarne regulatore temperature. Njihova konstrukcija je u osnovi sledeća: Merni element temperature je sud punjen gasom, čija se zapremina menja usled promene temperature. Taj sud je, putem bakarne cevčice spojen s mehom. Meh se pri porastu temperature širi. On je mehanički spojen s električnim kontaktom. Po dostizanju određene temperature, meh stvara potrebnu silu da raskine električni kontakt i prekine dovod električne energije u grejač. Kada temperatura opadne ispod zadate vrednosti (koja se podešava vijkom za regulaciju sile opruge) kontakt se ponovo zatvara i dovodi električnu energiju u grejač. Kapilarni regulatori (termostati) se, takođe, primenjuju i u rashladnim uređajima.



Sl. 1.8. Termoregulator.

ND-napojni deo; DPN - detektor prolaska kroz nulu; REG - regulator; IO - izvršni organ; OB - objekat; ME -merni element; G-grejač.

Za regulaciju temperature mogu se koristiti i druga, čisto elektronska rešenja. Jedno od njih dato je na sl. 1.8. Ovo je savremeno, beskontaktno rešenje regulatora temperature, gde se kao izvršni organ koristi trijak. On ima ulogu prekidača. Može se uključivati (isključivati) samo kada napon mreže prolazi kroz nulu, što obezbeđuje detektor prolaska kroz nulu (DPN). Temperatura se meri pomoću mernog elementa (ME) koji ima dva NTC otpornika, smeštena u dvema suprotnim granama mernog mosta, čiji je sastavni deo i integrисано коло 555 које је уједно и regulator. Potenciometrom P se postavlja ниво задате вредности температуре. При нижој вредности температуре од задате, тријак (Tr) је у проводном стању и пропушта поворку синусоидалних импулса на grejač (G). Када температура достigne задату вредност, тријак постаје непроводан, у grejač se ne dovodi energija, па температура опада, usled delovanja спољашње температуре.

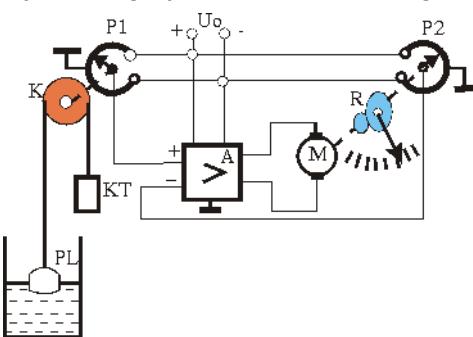
U prethodnim primerima prikazana su različita rešenja SAR za stabilizaciju napona i temperature. Slična rešenja se mogu realizovati za regulaciju (stabilizaciju) bilo koje druge fizičke veličine: pritiska, protoka, brzine obrtanja itd. U mnogim slučajevima potrebno je obezbediti praćenje promene neke fizičke veličine. Takvi sistemi automatskog upravljanja nazivaju se *prateći sistemi* ili *servosistemi*.

**1.5.5 Sistem za distancioni prenos ugaonog pomeraja.** Kao primer servosistema za prenos ugaonog pomeraja na daljinu navećemo jedan sistem korišćen ranije za merenje i registraciju nivoa tečnosti u reni-bunarima za vodosnabdevanje gradova. Bunari se obično nalaze pored reka, udaljeni od centra za vodosnabdevanje, koji treba u svakom trenutku da ima informaciju o količini vode u svakom bunaru. Jedno od klasičnih rešenja je primena pozicionog servosistema s potenciometrima, sl. 1.9.

Kada se menja nivo tečnosti u bunaru, koturača (K) se obrće i pomera klizač potenciometra P1. Oba potenciometra (P1 i P2) se napajaju istim naponom simetričnim u odnosu na uzemljenje. S klizača oba potenciometra dovode se naponski signali, proporcionalni položajima klizača potenciometara, na ulaz diferencijalnog pojačavača (A). Ako postoji naponska razlika na ulazu pojačavača, na njegovom izlazu pojaviće se napon, proporcionalan toj razlici. Zbog toga će se motor (M) pokretati sve dotle dok se pozicija klizača P2 ne izjednači sa pozicijom klizača P1. Naponska razlika na ulazu pojačavača se karakteriše veličinom i znakom, koji utiče na smer obrtanja motora. Drugim rečima, klizač P2 u svemu prati (sledi) klizač P1, a ovaj nivo tečnosti.

Ovakav sistem se može primenjivati i za druge namene, npr. za pozicioniranje satelitske ili radarske antene. Ako se pretpostavi da se klizač P1 pomera šablonom, a motor, preko reduktora, pomera nož na alatnoj mašini, tada imamo kopirnu alatnu mašinu, mašinu za graviranje i sl. Umesto potenciometara mogu se koristiti drugi davači pozicije: selsini, rizolveri, enkoderi i dr. Međutim, suština delovanja ostaje ista i svodi se na delovanje *negativne povratne sprege*.

Na nekoliko prethodnih primera mogao se uočiti značaj SAU s povratnom spregom u tehničkoj primeni. Primeri su bili dovoljno prosti i široko primenjivani u praksi. Sličnih prostih i složenijih primera ima veoma mnogo. U daljem izlaganju navodimo i druge. Međutim, nama nije cilj da se bavimo svakim primerom ponaosob. Naš zadatak je da izučimo metodologiju za razumevanje, analizu i projektovanje bilo kog sistema iz ove klase. To znači da treba izučiti osnovne elemente za izgradnju sistema, njihov princip rada, osobine, matematičke modele, funkcije u sistemu. Na osnovu toga treba formirati opšti matematički model sistema u vidu sistema diferencijalnih i algebarskih jednačina. Na bazi matematičkog modela, primenjujući razvijene metode za analizu, izučavaju se osobine sistema.



Sl. 1.9. Prateći pozicioni servosistem:  
PL-plovak, KT-kontrateg; K-koturača; P1, P2-predajni i prijemni potenciometar; A-pojačavač; M-motor jednosmerne struje; R-reduktor.

Postupak sinteze (projektovanja) kreće se delimično drugim pravcem i, u konačnosti, opet se svodi na problem analize. U postupku sinteze pojedini elementi sistema su poznati, drugi se biraju na osnovu kataloga ili se konstruišu.

### *Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1*

Ključ sinteze je izbor *algoritma upravljanja (zakona upravljanja)*, izbor parametara usvojenog zakona upravljanja i njegova realizacija. Na kraju, postupak sinteze se završava proverom osobina sistema, postupkom analize koja uključuje simulacione metode.

Ovaj kraći osvrt imao je za cilj da ukaže na razgranatost, slojevitost, složenost i obimnost teorije i prakse SAR i SAU. Na jednom uobičajenom univerzitetskom kursu nemoguće je i necelishodno je izučavati sve klase sistema. Ova knjiga je vezana za program predmeta pod nazivom *Teorija automatskog upravljanja-1* koji je ograničen na izučavanje vremenski kontinualnih linearnih, determinističkih sistema automatske regulacije. Knjiga predstavlja uvod u klasičnu teoriju SAR, neophodan za dalje izučavanje SAU, praćenje periodične literature ali i za rešavanje praktičnih problema analize postojećih industrijskih regulacionih sistema i uređaja, u procesu održavanja i projektovanja novih sistema i uređaja u razvojno-istraživačkim laboratorijama.

### LITERATURA

- [1] Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A.: **Feedback Control of Dynamical Systems**, Addison-Wesley Publishing Co., 1986.
- [2] Воронов, А. А.: **Теория автоматического управления**, “Высшая школа”, Москва, 1986.

<b>Glava 2. MATEMATIČKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA</b>	15
<b>2.1 Uvod</b>	15
<b>2.2 Funkcija prenosa</b>	17
<b>2.3 Elektromehaničke analogije</b>	18
<b>2.4 Funkcija prenosa linearnih električnih kola</b>	22
<b>2.5 Međusobne sprege elemenata i podsistema u sistemu</b>	26
<b>2.5.1 Redna (serijska) sprega</b>	27
<b>2.5.2 Paralelna sprega</b>	27
<b>2.5.3 Međusobna veza elemenata u sistem s povratnom spregom</b>	
<b>Karakteristične funkcije sistema s povratnom spregom</b>	28
<b>2.6 Algebra struktturnih blok-šema i grafa toka signala</b>	30
<b>2.7 Primena MATLAB-a u analizi SAU</b>	36
<b>2.7.1 Startovanje MATLAB-a</b>	36
<b>2.7.2 Definicija prenosa u MATLAB-u</b>	36
<b>2.7.3 MATLAB i algebra struktturnih blok-šema</b>	37
<b>Literatura</b>	38
<b>Pitanja za samopроверу</b>	39
<b>Zadaci za vežbu</b>	40

## Glava 2.

# MATEMATIKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA

### 2.1 Uvod

Naučni prilaz u izučavanju osobina elemenata i sistema zasniva se na korišćenju matematičkih (apstraktnih) modela kojima se određuju kvantitativne i kvalitativne sprege elemenata i podistema u dinamičkom sistemu. *Matematički model je skup diferencijalnih i algebarskih jednačina koje s većim ili manjim stepenom aproksimacije opisuju ponašanje sistema.* Stepen aproksimacije prvenstveno zavisi od namene modela. Matematički model se dobija na osnovu sagledavanja i izučavanja fizičkih procesa koji se odvijaju u posmatranom elementu/sistemu, ili na osnovu eksperimentalnih podataka, odnosno kombinacijom ova dva pristupa. Primena prvog načina je sadržaj oblasti koja se naziva *matematičko modelovanje*, dok je drugi način zadatok posebne naučne discipline - *identifikacije procesa*. Mi ćemo, dalje, ne ulazeći duboko u naučne prilaze matematičkog modelovanja i identifikacije, na osnovu već nama poznatih fizičkih zakona i opisa rada pojedinih elementa i sistema, nalaziti matematičke modele nekih, najčešće primenjivanih, elemenata i izgraditi filozofiju dobijanja matematičkog modela sistema na osnovu modela elemenata. U osnovi takvog modelovanja sistema usvojen je osnovni princip *da ne postoji uticaj narednih elemenata (u signalnom smislu) na prethodne elemente*. Pored čisto matematičkih modela, koji, obično, na prvi pogled ne odslikavaju sve međusobne veze elemenata niti same elemente sistema, u tehnici automatske regulacije je odomaćeno predstavljanje elemenata i sistema i grafičkim prikazima: *blok-dijagramima (-šemama)* ili *signalnim grafovima*.

Neka je dat neki element opisan matematičkim modelom u obliku

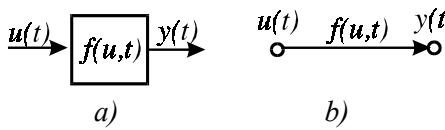
$$y = f(u, t), \quad (2.1)$$

pri čemu, fizički gledano, na taj element postoji spoljašnje delovanje (uticaj)  $u(t)$  od strane nekog prethodnog elementa/sistema, koji nazivamo *ulaznim signalom*. Delovanje ulaznog signala dovodi do odvijanja nekog fizičkog pro-

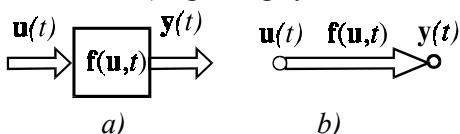
cesa u elementu/sistemu, koji se manifestuje kao neka fizička veličina  $y(t)$  koja utiče na naredni element/sistem, a koju nazivamo *izlaznim signalom*. Prema tome, matematički model odslikava funkcionalnu zavisnost između ulaznog i izlaznog signala u eksplisitnom ili implicitnom obliku. Grafički prikaz modela (2.1) u obliku blok-dijagrama dat je na sl. 2.1a, a u obliku grafa toka signala na sl. 2.1b.

Sa slike se vidi osnovna razlika ovih grafičkih prikaza. Kod blok-dijagrama signali se označavaju strelicama, a kod grafa toka signala - kružićima (*čvorovi*). Funkcionalna zavisnost se kod prvog prikaza predstavlja pravougaonikom, a kod drugog - linjskim segmentom sa strelicom. U literaturi je prisutnija prva notacija, jer se istorijski ranije pojavila i odomaćila. Prikaz grafom je jednostavniji (ekonomičniji za crtanje) i u praksi je pokazao izvesne prednosti pri analizi složenih sistema. Mi ćemo koristiti jedan i/ili drugi način.

Model (2.1) i njegovi grafički prikazi, sl. 2.1, ukazuju na elemente/sisteme s jednim ulazom i jednim izlazom (*skalarni slučaj*). U slučaju da element ili sis-



Sl. 2.1. Grafički prikaz elementa/sistema s jednim ulazom i jednim izlazom (skalarni slučaj): a) blok-dijagram; b) signalni graf.



Sl. 2.2. Grafički prikaz elementa/sistema s više ulaza i više izlaza (vektorski slučaj): a) blok-dijagram; b) graf toka signala.

stanovišta dalje upotrebe modela, kad god je to moguće, treba primenjivati linearne modele, jer je tada analiza sistema mnogo jednostavnija. Takvi modeli se najčešće primenjuju kod sistema koji rade s malim promenama oko ravnotežnog stanja, što implicira odsustvo suštinskih nelinearnosti. Do takvog modela se dolazi postupkom linearizacije.

Funkcionalna zavisnost  $\mathbf{f}(\mathbf{u},t)$  je oblik kraćeg simboličkog zapisivanja. U stvarnosti izlazni signal ne zavisi samo od ulaznog signala, već i od nekih drugih, unutrašnjih, sopstvenih veličina elementa/sistema, koje nazivamo *parametrima*. Na primer, ako imamo strujno kolo s redno vezanim  $R$ ,  $L$  i  $C$  elementima, prepostavljajući da je dovedeni napon na kolo  $u(t)$  ulazni signal, a napon na induktivnom kalemu  $u_L(t)$  - izlazni signal,  $R$ ,  $L$  i  $C$  su parametri tog sistema. Oni mogu biti konstantni, nezavisni od vremena, ili se mogu menjati u vremenu.

tem poseduje više ulaznih i više izlaznih signala (*vektorski slučaj*) tada se matematički model zapisuje u obliku<sup>1</sup>

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u},t), \quad (2.2)$$

a grafički prikazi dobijaju oblike kao na sl. 2.2.

Ovde su:  $\mathbf{u}(t)$  - vektor ulaznih veličina (signala),  $\mathbf{y}(t)$  - vektor izlaznih veličina (signala), a  $\mathbf{f}(\mathbf{u},t)$  - je vektor-funkcija.

Matematičke modele svrstavamo u dve osnovne grupe: *linearne i nelinearne*, što zavisi od toga da li je  $\mathbf{f}(\mathbf{u},t)$  nelinearna ili nelinearna funkcija. Sa

<sup>1</sup> U literaturi se najčešće skaliari označavaju italic slovima, vektori - malim bold slovima, a matrice - velikim bold slovima, što ćemo u daljem tekstu koristiti.

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

U prvom slučaju imamo *stacionaran*, a u drugom - *nestacionaran sistem*. Simboličko zapisivanje matematičkog modela nestacionarnog sistema bilo bi oblika

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), \mathbf{a}(t), t), \quad (2.3)$$

gde je  $\mathbf{a}$  - vektor parametara.

Ostajući kod datog primera, izlazni signal - napon na kalemu - možemo izraziti i u funkciji ne samo ulaznog signala i parametara, već i struje kroz kolo i napona na kondenzatoru, tj.

$$u_L = f(u, R, i_L, u_C). \quad (2.4)$$

U (2.4) veličine  $i_L$  i  $u_C$  nisu parametri, već unutrašnje promenljive sistema koje nazivamo *koordinatama stanja sistema*. Koordinate stanja imaju značajnu ulogu u savremenom načinu matematičkog modeliranja sistema. Kada se radi o mehaničkim sistemima, broj koordinata stanja je jednak broju stepena slobode. U opštem slučaju, kod sistema bilo koje fizičke prirode, broj koordinata stanja je jednak broju elemenata u sistemu koji mogu da akumuliraju energiju, odnosno da "pamte". U prethodnom primeru električnog kola imamo dva elementa koji akumuliraju energiju. To su kalem i kondenzator. Dobijanje modela sistema u prostoru stanja biće predmet razmatranja u kursu TAU-2.

## 2.2 Funkcija prenosa

Kada se radi o linearim sistemima s jednim ulazom i jednim izlazom, u klasičnoj teoriji SAU matematički modeli elemenata/sistema se prikazuju ne u vremenskom već u kompleksnom domenu. Prelaz iz vremenskog u kompleksni domen se ostvaruje primenom integralnih transformacija na relacije koje opisuju element/sistem u vremenskom domenu. U teoriji SAU najčešće se koristi Laplasova transformacija. Kod linearih multivarijabilnih sistema češće se koristi vremenski domen ali postoje razvijene metode analize i sinteze i u kompleksnom domenu, pa se i u ovom slučaju koristi operatorska notacija. S obzirom na duboke tragove koje je ostavila klasična teorija SAU, čak i u teoriji nelinearnih sistema se koristi kompleksni domen za linearni deo sistema, dok se nelinearni elementi predstavljaju u vremenskom domenu ili simbolično u kompleksnom domenu. Tako na primer, relacija (2.1) u kompleksnom domenu ima simbolički zapis

$$Y(s) = F(U(s)), \quad (2.5)$$

gde je  $s = \sigma + j\omega$  - kompleksna promenljiva.

U opštem slučaju ako je linearni element/sistem s jednim ulazom i jednim izlazom opisan diferencijalnom jednačinom oblika

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u + b_0 u,$$

tada se primenom Laplasove transformacije, za nulte početne uslove, data diferencijalna jednačina prevodi u algebarsku jednačinu,

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) = \left( \sum_{j=0}^m b_j s^j \right) U(s), \quad (2.6)$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2.7)$$

koji se naziva *funkcijom prenosa* (kratko: *prenosom*) *elementa/sistema*.

Funkcija prenosa elementa/sistema se strogo definiše na sledeći način:

*Funkcija prenosa (prenos) je odnos (količnik) kompleksnih likova (Laplasovih transformacija) signala na izlazu i ulazu sistema/elementa, pri nultim početnim uslovima.*

Kada se radi o multivarijabilnom linearном sistemu, tada, u opštem slučaju, svaki izlaz je povezan sa svakim ulazom diferencijalnom jednačinom oblika (2.6). Stoga je funkcija prenosa od  $i$ -tog ulaza do  $j$ -tog izlaza oblika (2.7), tj.

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_j(s)}{U_i(s)} = \frac{B_j(s)}{A_i(s)}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}. \quad (2.8)$$

Uvodeći vektor ulaznih signala  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r]^T$  i vektor izlaznih signala  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$ , matematički model multivarijabilnog linearogn sistema se može napisati u obliku

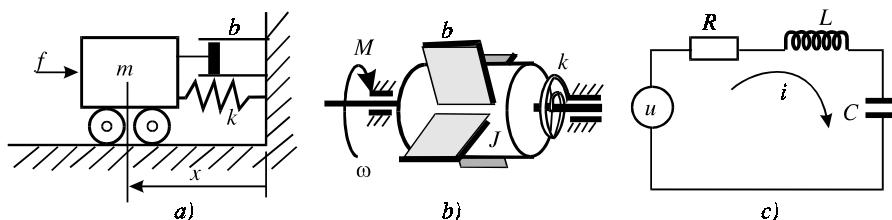
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \quad (2.9)$$

gde je  $\mathbf{G}(s)$  -  $n \times m$  matrica funkcija prenosa, čiji su elementi funkcije prenosa oblika (2.8), a  $\mathbf{U}(s)$  i  $\mathbf{Y}(s)$  su kompleksni likovi vektora ulaza i vektora izlaza.

Prilazi u dobijanju matematičkih modela su različiti. Inženjeri automatike s elektrotehničkim obrazovanjem, s obzirom na razvijenost metoda izučavanja električnih kola koje veoma dobro poznaju, sisteme druge fizičke prirode (mehaničke, topotne, hidraulične, pneumatske) postupkom analogija prevode u ekvivalentne električne sisteme.

### 2.3 Elektromehaničke analogije

Analogije se zasnivaju na istom obliku matematičkih modela mehaničkih i električnih linearnih sistema. U cilju definisanja tih analogija posmatraćemo tri dinamička sistema: dva mehanička (sa translacionim i s rotacionim kretanjem) i jedan električni, koji su prikazani na sl. 2.3a,b,c, respektivno.



Sl. 2.3. *Tri različita dinamička sistema: a) mehanički translacioni, b) mehanički rotacioni; c) električni.*

U mehaničkim sistemima na slici 2.3, sa  $b$  je označen koeficijent viskoznog trenja, koji se kod translacionih sistema ostvaruje kretanjem klipa u cilindru s

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

---

nekim fluidom, pri čemu postoji mogućnost prelaska fluida s jedne na drugu stranu klipa; kod sistema s rotacionim kretanjem viskozno trenje se ostvaruje, na primer, krilcima, kako je na slici i prikazano;  $k$  - je koeficijent krutosti opruge<sup>2</sup> (torzione krutosti opruge, kod rotacionog sistema). Viskozno trenje u ležištima, odnosno točkovima, se zanemaruje ili pripisuje naznačenim elementima viskoznog trenja. Zanemarujemo efekte suvog (Kulonovog) trenja. Ukoliko se ono ne može zanemariti, mehanički sistemi će se opisivati nelinearnim matematičkim modelom. Sa  $m$ , odnosno  $J$  označene su inercije mehaničkih sistema olicene masom ( $m$ ), kod translacionog, i momentom inercije ( $J$ ), kod rotacionog mehaničkog sistema, respektivno.

Matematički modeli koji opisuju dinamičko ponašanje datih mehaničkih sistema mogu se dobiti primenom Njutnovih zakona mehanike. Polazeći od osnovnog zakona dinamičke ravnoteže, po kome je *suma sila akcije uvek jednaka sumi sila reakcije*, za translacioni i rotacioni sistem možemo napisati:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f, \quad (2.10)$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta = M, \quad (2.11)$$

gde su sile akcije: sila  $f(t)$ , odnosno moment  $M(t)$ , a sile reakcije: sila inercije kao prizvod mase i ubrzanja kod translacionog sistema, odnosno proizvod momenta inercije i ugaonog ubrzanja kod rotacionog sistema; sila trenja, kao proizvod brzine (translacione, odnosno rotacione) i koeficijenta viskoznog trenja; sila opruge (po Hukovom zakonu) kao proizvod koeficijenta krutosti i veličine njene deformacije (translacionog pomeraja  $x$ , odnosno rotacionog ugaonog pomeraja  $\theta$ ).

Izvršićemo izvesne modifikacije jednačina (2.10) i (2.11), uvodeći kao promenljive ne pomeraje (translacioni, odnosno rotacioni), već brzine (linijsku, odnosno ugaonu). Tada one postaju:

$$m\dot{v} + bv + k \int_0^t v dt = f, \quad (2.12)$$

$$J\dot{\omega} + B\omega + k \int_0^t \omega dt = M. \quad (2.13)$$

S druge strane, jednačina dinamičke ravnoteže električnog linearног kola na sl. 2.3c se dobija na osnovu Kirhofovog zakona:

$$Li + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt = u. \quad (2.14)$$

Uočava se potpuna identičnost oblika jednačina koje opisuju dinamiku tri različita sistema, na osnovu kojih se i izvode elektromehaničke analogije: *sila*, kod translacionog mehaničkog sistema, *moment* (*spreg*), kod rotacionog mehaničkog sistema, i *napon*, kod električnog sistema, su analogne veličine; *brzine* (translaciona ili ugaona) i *struja* su analogne veličine; *koeficijent trenja* i *otpornost* su analogne veličine, a recipročna vrednost *koeficijenta krutosti* (*tj.*

---

<sup>2</sup> Recipročna vrednost koeficijenta krutosti  $k$  je koeficijent elastičnosti opruge  $c$ , tj.  $c=1/k$ .

koeficijent elasticnosti) opruge je analogna veličina kapacitivnosti kod električnih kola. U tabeli 2.1 su sistematizovane ove analogije, uz odgovarajuće šematske oznake elemenata i navođenja mernih jedinica za merenje parametara i promenljivih sva tri sistema.

Elektromehaničke analogije

Tabela 2.1

Električni Sistemi	Mehanički sistemi	
	Translacioni	Rotacioni
Napon [V], $u(t) \rightarrow U(s)$	sila [N], $f(t) \rightarrow F(s)$ brzina [m/s], $v(t) \rightarrow V(s)$ $v(t) = dx(t)/dt$ $x(t)$ -pomeraj centra mase [m].	Moment [Nm], $M(t) \rightarrow M(s)$ ugaona brzina [ $s^{-1}$ ], $\omega(t) \rightarrow \Omega(s)$ ; $\omega = d\theta(t)/dt$ , $\theta(t)$ - ugaoni pomeraj tela, u radijanima.
Struja [A], $i(t) \rightarrow I(s)$		
Induktivnost [H], $L$ , $u(t) = Ldi(t)/dt$ $U(s) = LsI(s)$	Masa [kg], $m$ , $f(t) = mdv/dt = md^2x(t)/dt^2$ $F(s) = msV(s) = ms^2X(s)$ 	Moment inercije [kgm^2], $J$ , $M(t) = Jd\omega(t)/dt = Jd^2\theta(t)/dt^2$ $M(s) = Js\Omega(s) = Js\Theta^2(s)$ 
Otpornost [ $\Omega$ ], $R$ , $u(t) = R(i(t))$ $U(s) = RI(s)$	Koeficijent viskoznog trenja [Ns/m], $b$ , $f(t) = bv(t) = bdx(t)/dt$ $F(s) = bV(s) = bsX(s)$ 	Koeficijent viskoznog trenja [Nms/rad], $b$ , $M(t) = b\omega(t) = bd\theta(t)/dt$ $M(s) = b\Omega(s) = b\Theta(s)$ 
Kapacitivnost [F], $C$ , $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ $U(s) = \frac{1}{sC} I(s)$	Koeficijent krutosti [N/m] $k$ , $f(t) = k \int_0^t v(t) dt = kx(t)$ $F(s) = \frac{k}{s} V(s) = kX(s)$ 	Koeficijent torzionalne krutosti [Nm/rad], $k$ , $m(t) = k \int_0^t \omega(t) dt = k\theta(t)$ $M(s) = \frac{k}{s} \Omega(s) = k\Theta(s)$ 

Pored analogija parametara i promenljivih, moguće je uvođenje analogija i između nekih integralnih pokazatelia, kao što su impedanse, frekvencijske karakteristike i sl. Primjenjujući Laplasovu transformaciju na sve tri dinamičke

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

jednačine (2.31)-(2.32) dobija se:

$$(ms + b + \frac{k}{s})V(s) = F(s),$$

$$(Js + b + \frac{k}{s})\Omega(s) = M(s),$$

$$(Ls + R + \frac{1}{sC})I(s) = U(s).$$

Formalno se može uvesti Omov zakon i za mehaničke sisteme, odnosno definisati impedanse mehaničkih sistema:

$$Z_m^t(s) = sm + b + \frac{k}{s}, \quad (2.15)$$

za mehanički translacioni sistem, odnosno

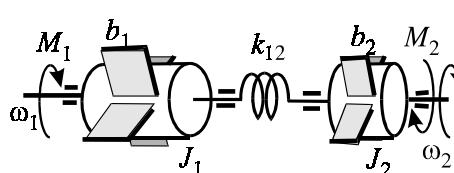
$$Z_m^r(s) = sJ + b + \frac{k}{s}, \quad (2.16)$$

za mehanički rotacioni sistem.

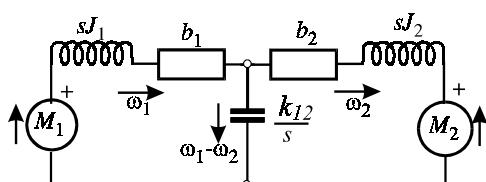
U praktičnoj primeni datih analogija ide se i dalje, formiranjem ekvivalentnih električnih šema mehaničkih sistema. Formiranje ekvivalentnih šema je relativno prosto, ako se usvoje određena pravila. Naime, nije moguća prosta zamena mehaničkih elemenata odgovarajućim analogijama, zadržavajući pri tome mehaničke veze elemenata u ulozi električnih veza. Jedini pravi pristup je korišćenje brzinsko-strujnih analogija:

*Mehanički elementi koji se kreću istom brzinom u analognoj električnoj šemi su vezani redno.*

**Primer 2.1.** U cilju ilustracije ovog osnovnog pravila, razmotrimo mehanički rotacioni sistem sa sl. 2.4 i konstruišimo njegovu ekvivalentnu električnu šemu.



Sl. 2.4. Šematski prikaz mehaničkog sistema s dve mase.



Sl. 2.5. Analogna električna šema mehaničkog sistema sa sl. 2.4.

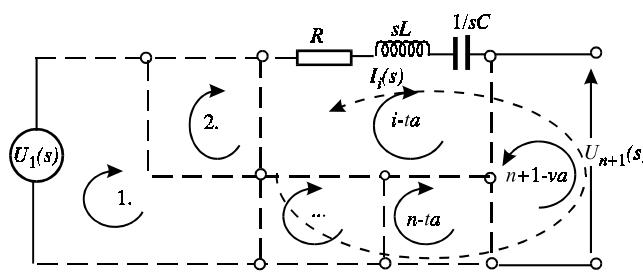
Na osnovu datog mehaničkog sistema uočavamo da prva obrtna masa, okarakterisana momentom inercije  $J_1$ , ima brzinu obrtanja  $\omega_1$ . Istu brzinu obrtanja ima i element koji predstavlja viskozno trenje  $b_1$ , pa su ta dva elementa u električnom smislu redno vezana. Takođe elementi  $J_2$  i  $b_2$  imaju istu brzinu obrtanja  $\omega_2$ , pa su i oni međusobno vezani na red. Element koji označava elastičnu spregu između dve obrtne mase, okarakterisan koeficijentom krutosti  $k_{12}$ , podvrgnut je razlici brzina kretanja prve i druge obrtne mase,  $\omega_1 - \omega_2$ . Sada se lako može nacrtati ekvivalentna električna šema, sl. 2.5, mehaničkog sistema sa sl. 2.4.

Sada se, formalno, sve mehaničke

veličine, u sistemu na sl. 2.4, mogu nalaziti iz analogne električne šeme, sa sl. 2.5, primenjujući poznate zakone i metode elektrotehnike: Kirhofove zakone, metodu napona čvorova, metodu konturnih struja, Teveninovu teoremu i dr. Pri tome možemo određivati različite veličine: struju (brzinu) ili napon (silu) pojedinih elemenata, ulaznu, izlaznu ili prenosnu impedansu kao i druge integralne pokazatelje, o čemu će biti reči kasnije. Za inženjere automatike je najvažnija **funkcija prenosa**. Kako postupkom elektromehaničkih analogija možemo svesti bilo koji mehanički ili elektromehanički sistem na ekvivalentni električni, dovoljno je da objasnimo jedan opšti postupak određivanja funkcije prenosa električnih linearnih mreža.

## 2.4 Funkcija prenosa linearnih električnih mreža

Neka je data neka složena linearna električna mreža, sl. 2.6, gde su, radi pojednostavljenja crtanja, grane predstavljene isprekidanim linijskim segmentima. Te grane, u opštem slučaju, se sastoje iz redne veze otpornika, kondenzatora i kalema, okarakterisanih parametrima  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , respektivno, kao što je to na sl. 2.6 prikazano za jednu od grana. U toj složenoj električnoj mreži mogu postojati veći broj izvora napona/struja. S obzirom da je posmatrana mreža linearна, princip superpozicije važi. U tom slučaju, kao što je poznato, nalaze se uticaji izvora pojedinačno, privremeno eliminisući sve izvore osim jednog. Eliminacija izvora se ostvaruje kratkospajanjem naponskih ili raskidom mreže na mestu strujnih izvora. Posle nalaženja uticaja svakog izvora pojedinačno na element od interesa, ukupni uticaj se dobija algebarskim sumiranjem svih uticaja pojedinačno. Zbog toga ćemo, dalje, prepostavljati da u našoj složenoj električnoj mreži postoji samo jedan naponski izvor  $U_1(s)$ , kako je to na sl. 2.6 i prikazano. Koristićemo metodu konturnih struja i kompleksni domen za dobijanje matematičkog modela date mreže. Kompleksna impedansa, kao što je poznato, za rednu vezu  $R$ ,  $L$  i  $C$  elemenata je



Sl. 2.6. Složena električna mreža; isprekidane linije zamenjuju neku rednu kombinaciju  $R$ ,  $L$  i  $C$  elemenata.

Mi želimo odrediti odnos između napona na krajevima neke grane ( $U_{n+1}(s)$ ) ili struje kroz neku granu ( $I_i(s)$ ) i izvora napona  $U_1(s)$ .

Na osnovu metode konturnih struja može se dobiti matrična relacija

$$\mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s) = \mathbf{U}(s), \quad (2.17)$$

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

Ona se, formalno, može dobiti na osnovu impedanse za naizmeničnu struju

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

zamenjujući u njoj  $j\omega$  sa  $s$ .

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

---

gde su:  $\mathbf{Z}(s)$  - matrica impedansi dimenzija  $n \times n$ , na čijoj se glavnoj dijagonali nalaze sopstvene impedanse kontura mreže,  $Z_{ii}(s)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , a ostali elementi matrice su uzajamne impedanse kontura  $Z_{ij}(s)$ ,  $i, j = \overline{1, n}; i \neq j$ ; sopstvene impedanse su uvek pozitivne, dok uzajamne imaju znak minus kada su konturne struje, kontura čiju uzajamnu impedansu posmatramo, suprotnog smera;

$$\mathbf{I}(s) = [I_1(s), I_2(s), \dots, I_n(s)]^T - n \text{- dimenzionalni vektor konturnih struja};$$

$$\mathbf{U}(s) = [U_1(s), 0, \dots, 0]^T - n \text{- dimenzionalni vektor napona}.$$

Na osnovu (2.17), koristeći matrični račun, lako se nalazi struja bilo koje konture po formuli

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s)\mathbf{U}(s) = \frac{\text{adj } \mathbf{Z}(s)}{\det \mathbf{Z}(s)} \mathbf{U}(s). \quad (2.18)$$

Imajući u vidu način dobijanja inverzne matrice  $\mathbf{Z}^{-1}(s)$  i činjenicu da vektor napona sadrži samo jedan nenulti element i to na prvoj poziciji, izraz za nalaženje konturnih struja postaje

$$I_k(s) = \frac{D_{1k}(s)}{D_1(s)} U_1(s); \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.19)$$

gde su:

$$D_1(s) = \det \mathbf{Z}(s), \quad (2.20)$$

a  $D_{1k}(s)$  je determinanta matrice koja se dobija iz matrice  $\mathbf{Z}(s)$  eliminacijom prve vrste i  $k$ -te kolone.

Sada, kada poznajemo konturne struje, možemo odrediti napon na krajevima bilo koje grane. Formiramo dodatnu,  $n+1$ -vu, konturu (sl. 2.6) koja se formalno "zatvara" traženim naponom  $U_{n+1}(s)$ . Put ove konture je proizvoljan. Na sl. 2.6 prikazana su dva puta (jedan je označen isprekidanim strelicom). U opštem slučaju dodatna kontura može imati uzajamne impedanse sa svim ostalim konturama. Napon na krajevima ove otvorene konture, po Kirhofovom zakonu, se dobija kao suma padova napona duž te konture. S obzirom na to da je ova kontura otvorena ( $I_{n+1}(s)=0$ ), padovi napona se dobijaju kao proizvod uzajamnih impedansi  $n+1$ -ve izabrane konture i drugih kontura i njihove konturne struje, tj.

$$U_{n+1}(s) = Z_{n+1,1}(s)I_1(s) + Z_{n+1,2}(s)I_2(s) + \dots + Z_{n+1,n}(s)I_n(s). \quad (2.21)$$

Pri tome treba tako izabratи put (konturu) da najveći broj uzajamnih impedansi  $Z_{n+1,k}(s)$  bude jednak nuli, na primer, kao što je na sl. 2.6 označeno strelicom s punom linijom.

Zamenjujući u (2.21) izraze za konturne struje (2.19), uzimajući u obzir zajedničke faktore:  $U_1(s)$  i  $D(s)$ , dobija se

$$U_{n+1}(s) = \frac{U_1(s)}{D_1(s)} [Z_{n+1,1}(s)D_{11}(s) + Z_{n+1,2}(s)D_{12}(s) + \dots + Z_{n+1,n}(s)D_{1n}(s)].$$

Imajući u vidu način dobijanja determinanti  $D_{1k}(s)$ , lako se zaključuje da je izraz

u srednjoj zagradi determinanta matrice  $\mathbf{Z}_{n+1}(s)$ , koja se dobija na taj način, što se u matrici impedansi  $\mathbf{Z}(s)$  prva vrsta zameni elementima uzajamnih impedansi  $n+1$ -ve i ostalih kontura. Označavajući tu determinantu sa  $D_{n+1}(s)$ , dobijamo:

$$U_{n+1}(s) = \frac{\det \mathbf{Z}_{n+1}(s)}{\det \mathbf{Z}(s)} U_1(s) = \frac{D_{n+1}(s)}{D_1(s)} U_1(s). \quad (2.22)$$

Deljenjem leve i desne strane sa  $U_1(s)$  dobija se izraz za funkciju prenosa date električne mreže, kada su ulazni i izlazni signali naponi, u obliku

$$W(s) = \frac{U_{n+1}(s)}{U_1(s)} = \frac{D_{n+1}(s)}{D_1(s)}. \quad (2.23)$$

U slučaju da se izlaznim signalom smatra neka ( $k$ -ta) konturna struja, a ulaznim - napon  $U_1(s)$ , tada je, na osnovu (2.19):

$$G(s) = \frac{I_k(s)}{U_1(s)} = \frac{D_{1k}(s)}{D_1(s)}. \quad (2.24)$$

Izraz (2.23) je češće u upotrebi kod čisto električnih mreža, dok se (2.24) koristi kod analoga mehaničkih sistema, jer se, obično, izlazom mehaničkog sistema smatra brzina kretanja neke mase, kao analogna veličina struji.

**Primer 2.2:** Dati postupak određivanja funkcije prenosa ilustrovaćemo na primeru mreže sa sl. 2.5. Odredimo funkciju prenosa  $\Omega_2(s)/M_1(s)$  za  $M_2(s)=0$ .

Kako je  $M_2(s)$  naponski izvor, eliminacija se ostvaruje kratkospajanjem njegovih krajeva. U ovom sistemu imamo dve konture. Matrica impedansi date mreže je data sa (2.25), njena determinanta  $D_1(s)$  sa (2.26), a kofaktor  $D_{12}(s)$  sa (2.27).

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sJ_1 + b_1 + \frac{k_{12}}{s} & -\frac{k_{12}}{s} \\ -\frac{k_{12}}{s} & sJ_2 + b_2 + \frac{k_{12}}{s} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$D_1(s) = \det \mathbf{Z}(s) = (sJ_1 + b_1 + \frac{k_{12}}{s})(sJ_2 + b_2 + \frac{k_{12}}{s}) - \frac{k_{12}^2}{s^2} = \\ \frac{1}{s} \left[ s^3 J_1 J_2 + s^2 (b_1 J_2 + b_2 J_1) + s(b_1 b_2 + k_{12}(J_1 + J_2)) + k_{12}(b_1 + b_2) \right] = \frac{D(s)}{s}, \quad (2.26)$$

$$D_{12}(s) = \frac{k_{12}}{s}. \quad (2.27)$$

Tražena funkcija prenosa je

$$G_{M_1}(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_1(s)} = \frac{D_{12}(s)}{D_1(s)} = \frac{k_{12}}{D(s)}, \quad (2.28)$$

Na sličan način možemo odrediti i druge veličine u posmatranoj mreži. Na primer, funkciju prenosa  $\Omega_2(s)/M_2(s)$ , prepostavljajući da je  $M_1(s)=0$ . Prostom permutacijom oznaka kontura (druga kontura postaje prva s izvorom  $M_2(s)$  umesto  $M_1(s)$ ), postupak se svodi na prethodni. Tako se dobija

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

---

$$G_{M_2}(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_2(s)} = \frac{D_{22}(s)}{D_1(s)} = -\frac{s^2 J_1 + sb_1 + k_{12}}{D(s)}.$$

Kao rezultat superpozicije imali bi:

$$\Omega_2(s) = G_{M_1}(s)M_1(s) + G_{M_2}(s)M_2(s) = \frac{1}{D(s)}[k_{12}M_1(s) - (s^2 J_1 + sb_1 + k_{12})M_2(s)] \quad (2.29)$$

Ako je, pak, potrebno odrediti napon (moment) na krajevima "kondenzatora" (opruge)  $k_{12}/s$  usled delovanja samo napona (momenta)  $M_1(s)$ , možemo postupiti na dva načina: formirati proizvod impedanse te grane i razlike konturnih struja [ $\Omega_2(s)$ -  $\Omega_1(s)$ ], odnosno primeniti napred dati opšti postupak, što ćemo i učiniti.

Formirajući dodatnu 3. otvorenu konturu na krajevima "kondenzatora"  $k_{12}$  i birajući put te konture preko tog kondenzatora, izraz za matricu impedansi  $Z_{n+1}(s)$  biće:

$$Z_{n+1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_{12}}{s} & -\frac{k_{12}}{s} \\ -\frac{k_{12}}{s} & sJ_2 + b_2 + \frac{k_{12}}{s} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

jer  $n+1$ -va otvorena kontura sada ima uzajamne impedanse kako s prvom tako i s drugom konturom.

$$\det Z_{n+1}(s) = k_{12}J_2 + sk_{12}b_2.$$

Sada je funkcija prenosa  $M_{k_{12}}(s)/M_1(s)|_{M_2(s)=0} = W(s)$ :

$$W(s) = \frac{k_{12}(b_2s + 1)}{D(s)}. \quad (2.31)$$

U prethodnom izlaganju smo pokazali postupak matematičkog modelovanja dinamičkih sistema (mehaničkih, električnih i elektromehaničkih) koristeći klasičan prilaz koji bi se mogao nazvati *koncepcija ulaz-izlaz*, odnosno *koncepcija funkcije prenosa*. Drugi prilaz, kao što je napred rečeno, se naziva *koncepcija prostora stanja sistema*. Ovaj prilaz je značajniji za *savremenu teoriju dinamičkih sistema* i biće predmet izučavanja u predmetu TAU-2. Postoje metode za prelazak iz jedne koncepcije u drugu, što će, takođe, biti sadržaj tog kursa.

Do matematičkog modela mehaničkog sistema možemo doći primenom Njutnovih zakona i Dalamberovog principa. Tako za sistem sa sl. 2.4 ravnoteža sila koje deluju na obrtnu masu  $J_1$  se iskazuje relacijom

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + b\omega_1 + k_{12}(\theta_1 - \theta_2) = M_1 \Rightarrow J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = M_1 - b\omega_1 - k_{12}(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.32)$$

a za drugu obrtnu masu ravnoteža sila je

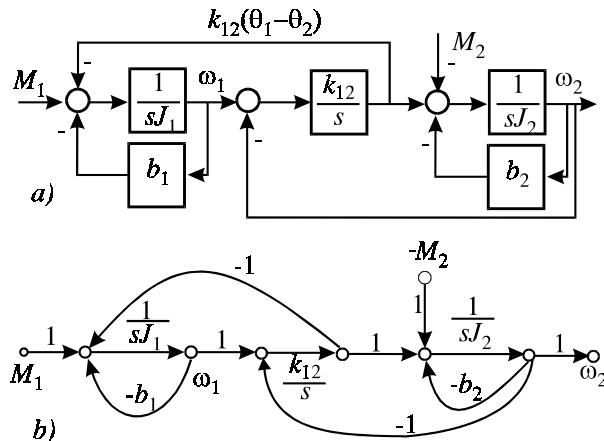
$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + b\omega_2 - k_{12}(\theta_1 - \theta_2) = -M_1 \Rightarrow J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -M_1 - b\omega_1 + k_{12}(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.33)$$

Ako na (2.32) i (2.33) primenimo Laplasovu transformaciju pri nultim početnim uslovima i tako dobijene relacije rešimo po  $\omega_1(s)$  i  $\omega_2(s)$  dobićemo izraze:

$$\begin{aligned}\omega_1(s) &= \frac{1}{sJ_1} \{M_1(s) - b_1\omega_1(s) - k_{12}[\theta_1(s) - \theta_2(s)]\}, \\ \omega_2(s) &= \frac{1}{sJ_2} \{-M_2(s) - b_2\omega_2(s) + k_{12}[\theta_1(s) - \theta_2(s)]\}, \\ \theta_1(s) - \theta_2(s) &= \frac{1}{s} [\omega_1(s) - \omega_2(s)].\end{aligned}\quad (2.34)$$

Na osnovu (2.34) na sl. 2.7 konstruisan je strukturni blok-dijagram i graf toka signala datog mehaničkog sistema sa slike 2.4.

Kao što se vidi, sistem se sastoji iz više elemenata sa složenim međusobnim vezama. Pored grafičkih oznaka elemenata, uvedene su i oznaće algebarskog sumiranja signala u vidu kružića s "ulaznim" strelicama i jednom "izlaznom" strelicom. Izlazni signal sumatora, predstavljen "izlaznom" strelicom, jednak je algebarskoj sumi signala predstavljenih "ulaznim" strelicama s odgovarajućim, na njima navedenim znakom, uz napomenu da se znak "+" obично ne piše. Kod grafa operacija sumiranja se odvija u čvorovima (kružićima) na sličan način.



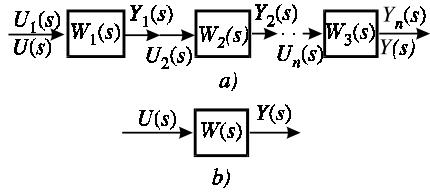
Sl. 2.7. Struktura blok-šema i graf toka signala mehaničkog rotacionog sistema s dve mase.

Iz ovog, relativno prostog, primera uočava se složenost međusobnih sprega elemenata. Zbog toga je neophodno da definišemo načine sprezanja elemenata automatike i podistema u sistem u cilju nalaženja ekvivalentnih funkcija prenosa sistema na osnovu prenosa sastavnih elemenata.

## 2.5. Međusobne sprege elemenata i podistema u sistemu

Svaki složeni sistem upravljanja sastoji se iz podistema, a ovaj od osnovnih elemenata koji se međusobno mogu sprezati na tri načina:

- redno (serijski),
- paralelno,
- u sustav sa povratnom spregom.



Sl. 2.8. Redna (serijska) sprega elemenata.

### 2.5.1 Redna (serijska) sprega

Ostvaruje se tako što se, sukcesivno, izlaz prethodnog elementa vezuje na ulaz sledećeg elementa. Ulaz u sistem je ulaz u prvi, a izlaz - izlaz iz poslednjeg elementa, sl. 2.8.

Polazeći od napred date definicije funkcije prenosa i sl. 2. 4, može se na-

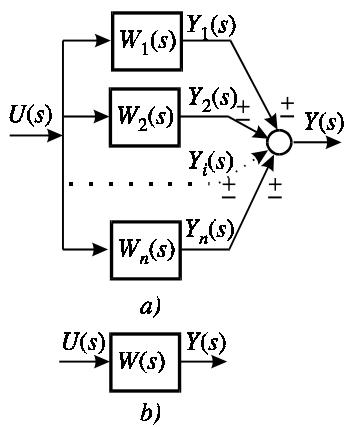
pisati:

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= W_i(s)U_{i(s)}, \quad i = \overline{1, n}; \quad U_i(s) = Y_{i-1}(s), \quad i = \overline{2, n}; \\ Y_n(s) &= \left[ \prod_{i=1}^n W_i(s) \right] U_1(s), \text{ ili} \\ W(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_n(s)}{U_1(s)} = \prod_{i=1}^n W_i(s). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Na osnovu (2.35) sledi:

*Prenos sistema dobijenog rednom (serijskom) vezom elemenata/podsistema jednaka je proizvodu prenosa tih elemenata/podsistema.*

**2.5.2. Paralelna sprega.** Paralelna sprega elemenata/podsistema u sistem je takva sprega u kojoj su ulazni signali svih elemenata isti, a njihovi izlazi se algebarski sumiraju.



Sl. 2.9. Paralelna sprega elemenata/podsistema.

Na sl. 2.9 dat je grafički prikaz paralelne sprege. Sa slike se vidi da je

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n Y_i(s), \quad i = \overline{1, n}.$$

S obzirom na to da je

$$Y_i(s) = W_i(s)U(s),$$

dobija se

$$Y(s) = \left[ \sum_{i=1}^n W_i(s) \right] U(s).$$

Iz ovog izraza nalazimo

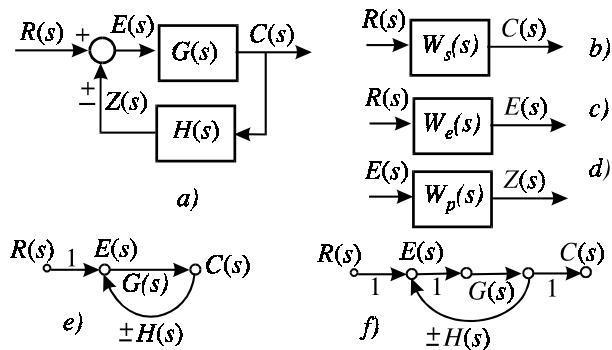
$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n W_i(s), \quad (2.36)$$

tj. :

*Ekvivalentni prenos sistema nastalog paralelnim vezivanjem elemenata/podsistema jednak je algebarskoj sumi prenosa tih elemenata/podsistema.*

### 2.5.3 Međusobna veza elemenata u sistem s povratnom spregom. Karakteristične funkcije sistema s povratnom spregom.

Sa stanovišta SAR, osnovni oblik sistema je sistem s povratnom spregom. Kod ovog tipa spregi, signali se s izlaza sistema vraćaju na njegov ulaz, algebarski se sumirajući s ulaznim signalom. Blok dijagram i graf toka signala sistema s povratnom spregom, sastavljenog samo od dva elementa, prikazan je na sl. 2.10a, e, respektivno. Kod ovog osnovnog sistema definišu se novi pojmovi, koji nisu bili prisutni u prethodnim vrstama sistema s rednom i paralelnom spregom. Najpre, ulazni signal u sistem se obično naziva *referentnim signalom* i označava sa  $r(t)$ , odnosno  $R(s)$ . Izlazni signal sistema postaje *upravljana (regulisana) promenljiva*  $c(t)$ , odnosno  $C(s)$ . Ona se, preko *elementa povratne spregе*  $H(s)$ , transformiše u *signal povratne spregе*  $z(t)$  ( $Z(s)$ ) i vraća na ulaz sistema. Signal povratne spregе se, u elementu za sumiranje (označen kružićem na blok-šemi<sup>3</sup>), algebarski sumira s referentnim ulaznim signalom. Kao rezultat se dobija signal  $E(s)=R(s)\pm Z(s)$ , koji nazivamo *signalom greške* ili *regulacionim odstupanjem*. U literaturi je za ovaj sumator odomaćen termin *detektor signala greške* ili kraće: *detektor greške*. Razlikujemo *sisteme s pozitivnom povratnom spregom*, kada signal povratne spregе ulazi u detektor greške sa znakom plus i *sisteme s negativnom povratnom spregom*, kada on dolazi sa znakom minus. Sistemi s negativnom povratnom spregom su najčešće u upotrebi iz razloga koji će kasnije biti poznati. Deo sistema koji se nalazi između detektora greške i izlaza (posmatran u smeru strelica) naziva se *direktna grana*, a deo od izlaza do detektora greške (u smeru strelica) - *povratna grana*.



Sl. 2.10. Veza elemenata u sistemu s povratnom spregom: a) osnovna struktura blok-šema; b) spregnuti prenos sistema; c) spregnuti prenos po grešci; d) povratni prenos sistema; e) graf toka signala sistema sa sl. 2.10a; f) njegova detaljnija varijanta.

U skladu s tim, razlikujemo prenos *direktne grane*  $G(s)$  i prenos *povratne grane*  $H(s)$ . Prenos povratne grane može biti jednak jedinici, kada se izlazni

<sup>3</sup> U ruskoj literaturi algebarski sumator se često označava kao na slici desno, pri čemu šrafirani isečak kruga označava da se signal koji u njega ulazi uzima sa negativnim predznakom.



## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

---

signal  $C(s)$  direktno vraća na detektor greške. Takav sistem se obično naziva *sistem s jediničnom povratnom spregom*. U literaturi se mogu sresti i pojmovi *sistem s krutom* ili *sistem s elastičnom povratnom spregom*. Prvi pojam se odnosi na sisteme čiji prenos povratne grane nije funkcija kompleksne promenljive.

Prenos dela sistema čiji je ulaz signal greške  $E(s)$  a izlaz  $Z(s)$ , tj. redna veza elemenata direktnе i povratne grane, naziva se *povratnim prenosom* i igra značajnu ulogu u teoriji SAR. Njega ćemo označavati sa  $W_p(s) = G(s)H(s)$ .

Prenos celokupnog sistema s povratnom spregom, čiji je ulaz referentni signal  $R(s)$  i izlaz upravljava promenljiva  $C(s)$ , naziva se *sregnutim prenosom sistema*,  $W_s(s)$ , a ako se izlazom smatra signal greške - *sregnuti prenos sistema u odnosu na signal greške* ili kraće: *prenos po grešci*,  $W_e(s)$ . Nakon ovih definicija naš neposredni zadatak je određivanje sregnutog prenosa i prenosa po grešci sistema. Na osnovu sl. 2.6 može se neposredno napisati:

$$E(s) = R(s) \pm Z(s), \quad (2.37)$$

$$C(s) = G(s)E(s), \quad (2.38)$$

$$Z(s) = H(s)C(s). \quad (2.39)$$

Zamenom (2.38) u (2.39) dobija se

$$Z(s) = G(s)H(s)E(s) \Rightarrow W_p(s) = \frac{Z(s)}{E(s)} = G(s)H(s), \quad (2.40)$$

dok se smenom  $Z(s)$  iz (2.40) u (2.37) i rešavanjem po  $E(s)$  dobija

$$E(s) = \frac{1}{1 \mp W_p(s)} R(s) \Rightarrow W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 \mp W_p(s)}, \quad (2.41)$$

a koristeći (2.38) i (2.41):

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 \mp W_p(s)} R(s) \Rightarrow W_s(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp W_p(s)}. \quad (2.42)$$

Na osnovu (2.41) i (2.42) može se uočiti, najpre, da su imenici u izrazima za funkcije prenosa sregnutog sistema po izlazu i po grešci isti: funkcija povratnog prenosa sistema odgovarajućeg znaka ("+" - za sisteme s negativnom, a "-" - za sisteme s pozitivnom povratnom spregom) uvećana za jedinicu. Nadalje ćemo, uglavnom, izučavati sisteme s negativnom povratnom spregom. Imenilac sregnutog prenosa igra važnu ulogu u teoriji sistema i nazvan je *karakterističnim polinomom*, koji ćemo označavati sa  $D(s)$ <sup>4</sup>:

$$D(s) = 1 + W_p(s) = 1 + G(s)H(s). \quad (2.43)$$

Kada se karakteristični polinom izjednači s nulom dobija se *karakteristična jed-*

---

<sup>4</sup> S obzirom na to da je funkcija prenosa  $W_p(s)$  odnos dva polinoma po s, tj. realna racionalna funkcija, naziv karakteristični polinom podrazumeva da je sregnuti prenos sistema sveden na odnos dva polinoma, odnosno da je izraz  $1+W_p(s)$  sveden na zajednički imenilac pa je onda zadržan samo brojilac.

načina sistema, tj. izraz

$$D(s) = 0, \text{ odnosno, } 1 + W_p(s) = 0 \quad (2.44)$$

je karakteristična jednačina sistema.

Takođe, treba uočiti da se u brojiocu funkcija spregnutog prenosa nalazi prenos *direktne grane*. U slučaju spregnutog prenosa sistema po regulisanoj promenljivoj, on je  $G(s)$ , dok je kod spregnutog prenosa po grešci direktni prenos ravan jedinici. Korisno je zapisati navedene konstatacije u obliku pravila:

$$\boxed{\text{SPREGNUTI PRENOS} = \frac{\text{PRENOS DIREKTNE GRANE}}{\text{KARAKTERISTIČNI POLINOM}}}$$

Dato pravilo važi ne samo za osnovni sistem kao na sl. 2.10, već za bilo koji složeni sistem, koji se primenom algebre strukturalnih blok-šema uvek može svesti na osnovnu strukturu.

Na kraju ovog dela izlaganja potrebno je ukazati na značaj sistema s negativnom povratnom spregom. Pretpostavimo da se u direktnoj grani sistema, sl. 2.10, nalazi pojačavač s velikim, promenljivim koeficijentom pojačanja ( $K \rightarrow \infty$ ), a u povratnoj grani - element s konačnim, nepromenljivim koeficijentom pojačanja  $\alpha = \text{const}$ . Prenos (pojačanje) ovog sistema je

$$p = \frac{K}{1 + \alpha K} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \alpha} \approx \frac{1}{\alpha},$$

odakle se zaključuje da osobine ovog sistema ne zavise od osobina direktne grane, već od osobina povratne grane, što se u praksi i koristi za stabilizaciju pojačanja pojačavača i, uopšte, sistema, odnosno za promenu njihovih osobina.

## 2.6 Algebra strukturalnih blok-šema i grafa toka signala

Pod algebrrom strukturalnih blok-šema ili grafa toka signala podrazumevaju se postupci transformacije složenog sistema s ciljem njegovog svođenja na osnovnu strukturu, odnosno nalaženja njegovih karakterističnih funkcija: *povratnog prenosa, spregnutih prenosa i karakterističnog polinoma/jednačine*.

U složenom sistemu postoje razgranate veze, veze koje se ukrštaju, veći broj sumatora ili detektora greške. U sistemima koje možemo nazivati monovarijabilnim (sa jednim ulazom i jednim izlazom), postoje neželjeni spoljašnji uticaji koje nazivamo *poremećajima*. Oni figurišu kao dodatni ulazni signali, utičući, po pravilu, negativno na tok regulacionog procesa i vrednost upravljane promenljive. Kod linearnih sistema, u kojima važi princip superpozicije, ukupno dejstvo svih ulaza na izlaz se dobija kao algebarska suma dejstava svakog ulaza pojedinačno. Zbog toga se, u suštini, ceo problem svodi na sistem s jednim ulazom i jednim izlazom. Kod linearnih multivarijabilnih sistema, isto tako, važi princip superpozicije, pa je moguće sprovoditi sličan postupak. Međutim, glomaznost takvog prilaza uslovio je razvoj metoda koje koriste matrični račun, što je i dovelo do formiranja posebne teorije *multivarijabilnih sistema*. Jasno je, da su sistemi s jednim ulazom i jednim izlazom parcijalni

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

slučaj multivarijabilnih sistema. S te tačke gledišta, reklo bi se da nije ni neophodno izučavati teoriju monovarijabilnih sistema. Ipak postoje bar dva razloga za suprotnu praksu: (i) istorijski razvoj TAU se odvijao postepeno; teorija monovarijabilnih sistema je najpre razvijena i preko nje su uvedeni mnogi pojmovi i prilazi analizi i sintezi, koji se mogu primenjivati i u teoriji multivarijabilnih sistema; (ii) primena teorije multivarijabilnih sistema na monovarijabilne sisteme može se pokazati glomaznom, manje produktivnom.

Svođenje složenog sistema na osnovnu strukturu vrši se primenom gore datih pravila dobijanja ekvivalentnog prenosa redno ili paralelno vezanih elemenata, odnosno elemenata vezanih u podsistem s povratnom spregom. Pri tome je, najpre, neophodno uočiti osnovni detektor greške, a sve transformacije izvoditi tako da se dobije osnovna struktura samo s tim detektorom greške. Obično se, na osnovu namene sistema i poznavanja principa funkcionisanja istog, lako se uočava osnovna povratna sprega i osnovni detektor greške.

Nalaženje funkcija povratnog ili spregnutih prenosa može se vršiti na osnovu sistema algebarskih jednačina, napisanih za pojedine podsisteme složenog sistema. Međutim, postupak transformacije strukturnih blok-šema se pokazao praktičnijim, jer je očigledniji i nosi manje opasnosti za eventualnu grešku. Problemi nastaju kod ukrštenih veza, ali se i oni razrešavaju primenom nekoliko pravila, koje navodimo u tabeli 2.1. U njoj su, radi kompletnosti, navedene i napred izučene sprege elemenata.

*Tabela 2.2*

Tip sprega	Polazna šema	Transformisana šema
1	2	3
<i>Redna sprega</i>		 $W_{ek}(s) = W_1(s)W_2(s)$
<i>Paralelna sprega</i>		 $W_{ek}(s) = W_1(s) \pm W_2(s)$
<i>Povratna sprega</i>		 $W_{ek}(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_2(s)}$
<i>Svođenje na sistem s jediničnom povratnom spregom</i>		

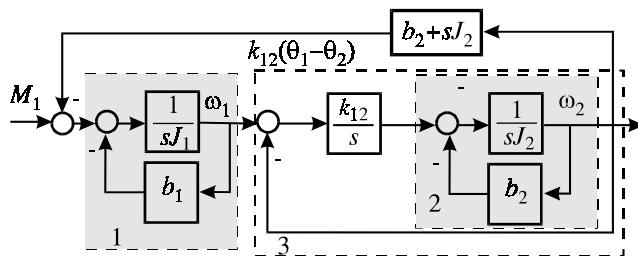
<i>Iznošenje bloka iz direktnе grane</i>		
<i>Premeštanje tačke odvajanja ispred bloka</i>		
<i>Premeštanje tačke odvajanja iza bloka</i>		
<i>Premeštanje sumatora ispred bloka</i>		
<i>Premeštanje sumatora iza bloka</i>		
<i>Premeštanje tačke odvajanja ispred sumatora</i>		
<i>Premeštanje tačke odvajanja iza sumatora</i>		
<i>Promena mesta sumatora</i>		

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

**Primer 2.3.** Odredimo funkciju prenosa  $\Omega_2(s)/M_1(s)$  sistema prikazanog blok - šemom na sl. 2.5a.

S obzirom na traženi prenos možemo odmah eliminisati poremećaj  $M_2(s)$ . Zatim, rastavljanjem prvog detektora greške na dva dela i premeštanjem tačke odvajanja povratne sprege s bloka  $k_{12}/s$  na izlaz sistema, uz dodavanje novog bloka  $(b_2 + sJ_2)$ , dobija se ekvivalentni strukturni blok-dijagram kao na sl. 2.11. Svodeći, najpre, podsisteme s povratnim spregama  $b_1$  i  $b_2$ , respektivno, na ekvivalentne spregnute prenose (na šemi su označeni brojevima 1 i 2), a zatim i podsistem s jediničnom spregom (označen brojem 3) na ekvivalentni spregnuti prenos, dobiće se običan, jednokonturni sistem, čija se funkcija prenosa lako određuje i iznosi:

$$W(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_1(s)} = \frac{k_{12}}{J_1 J_2 s^3 + (b_1 J_2 + b_2 J_1)s^2 + [k_{12}(J_2 + J_1) + b_1 b_2]s + k_{12}(b_1 + b_2)}.$$



Sl. 2.9. Transformisani blok-dijagram sa sl. 2.5a.

su neki pojmovi kod grafa toka signala koje treba poznavati i koristiti.

*Izvorom* grafa toka signala naziva se čvor iz koga isključivo polaze (izviru) grane.

*Ponorom* se naziva čvor grafa u kome se grane isključivo završavaju (poniru).

*Putanjom* se naziva lančanica u istom smeru orjentisanih grana između bilo koja dva čvora.

*Direktna putanja* je putanja duž koje se nijedna grana ne ponavlja.

*Zatvorena putanja* je putanja koja izvire i ponire u istom čvoru, duž koje se nijedna grana ne ponavlja.

*Sopstvena zatvorena putanja* je zatvorena putanja samo od jedne grane.

Grane/putanje se kvantifikuju *pojačanjem grana/putanja*. Pojačanje zatvorenih putanja naziva se *kružno pojačanje*. Pojačanje putanja se dobija proizvodom pojačanja grana sadržanih u datoj putanji.

Svaka promenljiva grafa, predstavljena čvorom, može se formalno učiniti izlaznom promenljivom, dodavanjem jedne grane jediničnog pojačanja i jednog čvora tipa ponora, u koji se ta grana završava. Moguće su transformacije grafa, slične kao kod strukturalnih blok-dijagrama, u cilju njegovog pojednostavljenja. Mi se ovde nećemo upuštati u detaljniju teoriju grafova (za ovaj kurs to nije neophodno) s kojom se zainteresovani mogu upoznati korišćenjem odgovarajuće literature. Za nas najvažniju ulogu igra tzv. *Mejsonovo pravilo* u određivanju funkcije prenosa između bilo kog izabranog izvora i bilo kog izabranog ponora. Mejsonova formula je:

To je bio relativno jednostavan primer. U složenijim slučajevima, kao što je napred rečeno, primena algebri grafa toka signala daje jednostavnija rešenja nego li algebra strukturalnih blok-šema. U tom cilju definisani

$$W(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{i=1}^m P_{di}(s) \Delta_i(s), \quad (2.45)$$

gde su:  $P_{di}(s)$  - pojačanje  $i$ -te direktne putanje;

$\Delta(s)$  - determinanta grafa koja se određuje po formuli

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j P_j + \sum_{i,j} P_i P_j - \sum_{i,j,k} P_i P_j P_k + \dots, \quad (2.46)$$

u kojoj su:  $P_j$  - kružno pojačanje  $i$ -te zatvorene konture, a  $\sum_j P_j$  - označava sumu kružnih pojačanja svih zatvorenih kontura u grafu;  $\sum_{i,j} P_i P_j$  - označava sumu proizvoda kružnih pojačanja od po dve zatvorene konture koje se međusobno ne dodiruju;  $\sum_{i,j,k} P_i P_j P_k$  - je suma proizvoda kružnih pojačanja od po tri zatvorene konture koje se međusobno ne dodiruju itd.;

$\Delta_i(s)$  se određuje na osnovu (2.46) isključujući kružna pojačanja onih zatvorenih kontura koje dodiruju  $i$ -tu direktnu putanju i naziva se *pridružena determinanta grafa*.

**Primer 2.4.** U cilju dodatnog razjašnjenja, primenićemo Mejsonovo pravilo na graf toka signala sa sl. 2.7. Odredimo prenos od izvora  $M_1$  do ponora  $\omega_2$ .

Iz grafa se vidi da postoji samo jedna direktna putanja čije je pojačanje

$$P_{d1} = \frac{1}{sJ_1} \frac{k_{12}}{s} \frac{1}{sJ_2} = \frac{k_{12}}{s^3 J_1 J_2}.$$

Graf ima četiri zatvorene konture čija su kružna pojačanja:

$$P_{z1} = -\frac{b_1}{sJ_1}; P_{z2} = -\frac{k_{12}}{s^2 J_1}; P_{z3} = -\frac{k_{12}}{s^2 J_2}; P_{z4} = \frac{b_2}{sJ_2}.$$

Od četiri zatvorene konture ne dodiruju se 1. i 3., 1. i 4., 2. i 4. Ovde treba obratiti pažnju da se između 3-ćeg i 4-tog čvora nalazi grana s jediničnim pojačanjem, pa se ta dva čvora mogu sjediniti i, reklo bi se, da se 1. i 3. zatvorenata kontura dodiruju. To se isto odnosi na 2. i 4. konturu. Pod dodirom kontura podrazumevamo slučaj kada konture imaju bar jednu zajedničku granu. U datom slučaju nemamo ni jednu kružnu putanju koja ne dodiruje direktni put, pa je  $\Delta_1 = 1$ .

Determinanta grafa je

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= 1 - \sum_{i=1}^4 P_{zi}(s) + P_{z1}P_{z3} + P_{z1}P_{z4} + P_{z2}P_{z4} \\ &= 1 + \frac{b_1}{sJ_1} + \frac{k_{12}}{sJ_1} + \frac{k_{12}}{sJ_2} + \frac{b_2}{sJ_2} + \frac{b_1 k_{12}}{s^3 J_1 J_2} + \frac{b_1 b_2}{s^2 J_1 J_2} + \frac{b_2 k_{12}}{s^3 J_1 J_2}. \end{aligned}$$

Tražena funkcija prenosa je

$$W(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_1(s)} = \frac{k_{12}/s^3 J_1 J_2}{1 + \frac{b_1}{sJ_1} + \frac{k_{12}}{s^2 J_1} + \frac{k_{12}}{s^2 J_2} + \frac{b_2}{sJ_2} + \frac{b_1 k_{12}}{s^3 J_1 J_2} + \frac{b_1 b_2}{s^2 J_1 J_2} + \frac{b_2 k_{12}}{s^3 J_1 J_2}}$$

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

$$= \frac{k_{12}}{J_1 J_2 s^3 + (b_1 J_2 + b_2 J_1) s^2 + [k_{12}(J_1 + J_2) + b_1 b_2] s + k_{12}(b_1 + b_2)}.$$

Primenom iste metodologije može se odrediti funkcija prenosa između bilo kojeg ulaznog i izlaznog signala. Na primer, ako želimo da odredimo prenos između poremećaja  $M_2(s)$  i izlaza  $\Omega_2(s)$ , postupili bi smo na sličan način. Međutim, s obzirom da smo već odredili karakteristični polinom - imenilac funkcije prenosa jednostavno treba odrediti samo njen brojilac. Na osnovu grafa toka signala imamo jednu direktnu putanju s pojačanjem  $1/sJ_2$  i dve zatvorene konture koje ju ne dodiruju, čija su kružna pojačanja  $b_1/sJ_1$  i  $k_{12}/s^2 J_1$ , i one se međusobno dodiruju. Prema tome, brojilac u izrazu za funkciju prenosa je

$$\frac{1}{sJ_2} \left( 1 + \frac{b_1}{sJ_1} + \frac{k_{12}}{s^2 J_1} \right) = \frac{s^2 J_1 + sb_1 + k_{12}}{s^3 J_1 J_2}.$$

Funkcija prenosa u odnosu na poremećaj  $M_2(s)$  biće:

$$W(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_2(s)} = \frac{-\frac{s^2 J_1 + sb_1 + k_{12}}{s^3 J_1 J_2}}{1 + \frac{b_1}{sJ_1} + \frac{k_{12}}{s^2 J_1} + \frac{k_{12}}{s^2 J_2} + \frac{b_2}{sJ_2} + \frac{b_1 k_{12}}{s^3 J_1 J_2} + \frac{b_1 b_2}{s^2 J_1 J_2} + \frac{b_2 k_{12}}{s^3 J_1 J_2}}$$

$$= -\frac{s^2 J_1 + sb_1 + k_{12}}{J_1 J_2 s^3 + (b_1 J_2 + b_2 J_1) s^2 + [k_{12}(J_2 + J_1) + b_1 b_2] s + k_{12}(b_1 + b_2)}.$$

Do istog rezultata došli bismo i na osnovu blok-dijagrama, određujući samo funkciju prenosa direktne grane i koristeći funkciju povratnog prenosa sistema, što ostavljamo čitaocu da to sam pokaže.

Pri izučavanju stabilnosti sistema, što ćemo kasnije pokazati, potrebno je poznavati samo karakteristični polinom, odnosno funkciju povratnog prenosa  $W_p(s)$ , pa nije neophodno tražiti spregnuti prenos i njegov imenilac kao karakteristični polinom. Dovoljno je samo odrediti funkciju povratnog prenosa sistema. Kod višekonturnih sistema, kao u prethodnom primeru, primenom grafa toka signala povratni prenos se može odrediti iz determinante grafa  $\Delta(s)$  u njegovom polaznom obliku, oduzimajući od njega jedinicu. Drugi način je da se raskine povratna sprega i da se po istoj metodologiji nalazi funkcija prenosa od tačke prekida do tačke prekida povratne sprege. Ostaje samo pitanje koju od mnogih povratnih sprega prekinuti? U slučaju kada je osnovna povratna sprega poznata dileme nema. Međutim, ako je slučaj kao u prethodnom primeru, kada se osnovna povratna sprega ne uočava, kako onda postupiti? Ovde treba imati u vidu sledeći iskaz:

*Raskidajući različite povratne sprege dolazi se do različitih funkcija povratnog prenosa, međutim, karakteristični polinom sistema  $1 + W_p(s)$  ostaje nepromenljiv.*

Preporučuje se čitaocima da se sami ubede u to na datom primeru, primeđujući algebru strukturnih blok-dijagrama ili grafa toka signala.

## 2.7 Primena MATLAB-a u analizi SAU

Savremeni studenti tehničkih nauka, a pogotovo inženjeri automatike, ne mogu se zamisliti bez savremenih sredstava za računanje - personalnih računara sa odgovarajućim softverom. Jedan od najčešće korišćenih softverskih paketa za analizu i sintezu SAU je programski paket MATLAB. Zbog zoga ćemo nadalje, kroz ovaj kurs, navoditi najosnovnije MATLAB funkcije orijentisane ka ovoj oblasti. Detaljnije o primeni MATLAB-a može se naći u literaturi navedenoj na kraju poglavlja.

### 2.7.1 Startovanje MATLAB-a

Prepostavlja se da je instaliran MATLAB i da je postavljena odgovarajuća ikona na desktop-u. Posle dvostrukog klika na MATLAB ikonu otvara se MATLAB komandni prozor. U njegovom File meniju izabere se New → M-File prozor u kome se kreira program za rešavanje zadatka. S obzirom da je ovaj kurs posvećen linearnim, vremenski kontinualnim, stacionarnim sistemima upravljanja (Engleski: Linear Time Invariant (LTI) systems) započaćemo sa definisanjem funkcije prenosa u MATLABU.

### 2.7.2 Definicija prenosa u MATLAB-u

Za definisanje funkcije prenosa najpre se mora saopštiti računaru format zapisivanja naredbom:

**s=tf('s');**

posle toga zapisuju se podaci o polinomima u brojiocu i imeniocu funkcije prenosa. Moguća su tri načina zapisivanja polinoma:

1. **Num=b<sub>m</sub>\*s<sup>m</sup>+b<sub>m-1</sub>\*s<sup>m-1</sup>...+b<sub>1</sub>\*s+b<sub>0</sub>; Den=a<sub>n</sub>\*s<sup>n</sup>+a<sub>n-1</sub>\*s<sup>n-1</sup>...+a<sub>1</sub>\*s+a<sub>0</sub>;**
2. **Num=(s+z<sub>1</sub>)\*(s+z<sub>2</sub>)\*...\*(s+z<sub>m</sub>); Den=(s+p<sub>1</sub>)\*(s+p<sub>2</sub>)\*...\*(s+p<sub>m</sub>);**
3. **Num=[b<sub>m</sub> b<sub>m-1</sub>...b<sub>1</sub> b<sub>0</sub>]; Den=[a<sub>n</sub> a<sub>n-1</sub>...a<sub>1</sub> a<sub>0</sub>];**

Nakon toga sledi zapis funkcije prenosa u obliku:

**G=Num/Den**

za prva dva navedena oblika zapisivanja ili

**G=tf(Num,Den)**

za treći oblik zapisivanja, kada su brojilac i imenilac funkcije prenosa predstavljeni vektorima, čiji su elementi koeficijenti polinoma iz prvog načina zapisivanja. Elementi se odvajaju blanko razmaknicom ili zarezom.

**Primer.** Napisaćemo program koji generiše funkciju prenosa  $G(s)=(2s+4)/(s^2+4s+3)$

```
s=tf('s');
Num=2*s+4;Den=s^2+4*s+3;
G=Num/Den
```

**s=tf('s');**  
**Num=2\*(s+2);Den=(s+1)\*(s+3);**  
**G=Num/Den**

**s=tf('s');**  
**Num=[2 4];Den=[1 4 3];**  
**G=tf(Num,Den);G**

Program se zapisuje u work space-u pod izabranim nazivom, naprimjer **atau\_1**. Zatim se u komandnom prozoru poziva program naredbom **atau\_1**. Odmah se dobija sledeći rezultat:

```
>> atau_1

Transfer function:
s + 2
-----
s^2 + 3 s + 5
```

Kao što se može zapaziti, sekvence naredbi se odvajaju tačka-zarezom. Ako se posle naredbe u komandnoj liniji ne stavi tačka-zarez, tada se automatski ispisuje rezultat koji daje ta naredba. U navedena dva oblika programa dobija se isti rezultat.

Ako želimo da nađemo polove i nule date funkcije prenosa, program bi proširili naredbama:

## Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema

**p=pole(G) i z=zero(G)**, te bi sada program izgledao ovako:

```
s=tf('s');
Num=s+2;Den=s^2+3*s+5;
G=Num/Den;
p=pole(G);p
z=zero(G);z
```

a rezultat, posle poziva u komandom prozoru, bio bi:

```
>> atau_1
p =
 -1.5 + 1.6583i
 -1.5 - 1.6583i
z =
 -2
```

Ako je funkcija prenosa data u nefaktorizovanom obluku, a želi se dobiti njen faktorizovani oblik, tj. njegovi polovi i nule, primenjuje s naredba **[z,p,k]=tf2zp(Num,Den)**

**Primer:**

```
s=tf('s');Num=[2 4];
Den=[1 4 3];
G=tf(Num,Den);
[z,p,k]=tf2zp(Num,Den)
```

```
>> atau_1
z =
 -2
p =
 -3
 -1
k =
 2
```

Faktorizacija polinoma se efektnije može izvršiti i naredbom:

```
syms s; factor(a_n*s^n+a_{n-1}*s^{n-1}+...a_1*s+a_0);
```

**Primer.** Izvršićemo faktorizaciju brojica i imenika u funkciji prenosa iz prethodnog primera koja je nastala rednom vezom **G** i **H**

```
syms s; N1=factor(2*s^2 + 12*s + 16)
D1=factor(s^3 + 9*s^2 + 23*s + 15)
```

```
>> clear
>> atau_2
N1 =
2*(s+4)*(s+2)
D1 =
(s+5)*(s+3)*(s+1)
```

Program je zapisan kao **atau\_2**. Posle poziva dobija se rezultat prikazan desno.

Ovde je upotrebljena naredba **syms s** koja definiše simboličnu promenljivu **s** umesto ranije naredbe **s=tf('s')**. Naredbom **clear** čiste se prethodni rezultati.

### 2.7.3 MATLAB i algebra strukturnih blok-šema

MATLAB omogućava da se izvode osnovne operacije algebre strukturnih blok-šema kao što su: redna veza, paralelna veza i veza u sistem s povratnom spregom.

Neka su data dva elementa automatike čije su funkcije prenosa:  $G(s)$  i  $H(s)$ .

Redna veza se definiše naredbom **series(G,H)**;

paralelna veza se definiše naredbom **parallel(G,H)**;

spregnuti prenos se definiše naredbom **feedback(G,H,sign)**, gde je **sign= -1** za sistem s negativnom, i **sign=1**, za pozitivnu povratnu spregu.

**Primer.** Neka je **G** kao u prethodnom primeru, a **H** je  $H(s)=(s+4)/(s+5)$ . Programi za rednu, paralelnu i sistem s negativnom povratnom spregom su date u sledećoj tabeli

Redna veza	Paralelna veza	S pregnut prenos
<b>s=tf('s');</b>	<b>s=tf('s');</b>	<b>s=tf('s');</b>
<b>Num1=2*s+4;</b>	<b>Num1=2*s+4;</b>	<b>Num1=2*s+4;</b>
<b>Den1=s^2+4*s+3;</b>	<b>Den1=s^2+4*s+3;</b>	<b>Den1=s^2+4*s+3;</b>
<b>G=tf(Num1/Den1);</b>	<b>G=tf(Num1/Den1);</b>	<b>G=tf(Num1/Den1);</b>
<b>Num2=s+4;Den2=s+5;</b>	<b>Num2=s+4;Den2=s+5;</b>	<b>Num2=s+4;Den2=s+5;</b>
<b>H=tf(Num2/Den2);</b>	<b>H=tf(Num2/Den2);</b>	<b>H=tf(Num2/Den2);</b>
<b>W=series(G,H)</b>	<b>W=parallel(G,H)</b>	<b>W=feedback(G,H,-1)</b>
<b>p=pole(W)</b>	<b>p=pole(W)</b>	<b>p=pole(W)</b>
<b>z=zero(W)</b>	<b>z=zero(W)</b>	<b>z=zero(W)</b>

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

>> clear	>> clear	>> clear
>> atau_1	>> atau_1	>> atau_1
Transfer function:	Transfer function:	Transfer function:
$2 s^2 + 12 s + 16$	$s^3 + 10 s^2 + 33 s + 32$	$2 s^2 + 14 s + 20$
-----	-----	-----
$s^3 + 9 s^2 + 23 s + 15$	$s^3 + 9 s^2 + 23 s + 15$	$s^3 + 11 s^2 + 35 s + 31$
p =	p =	p =
-5	-5	-6.0861
-3	-3	-3.428
-1	-1	-1.4859
z =	z =	z =
-4	-4.1573 + 1.3052i	-5
-2	-4.1573 - 1.3052i	-2
	-1.6854	

Kod paralelne veze dve nule prenosa  $W(s)$  su konjugovano-kompleksne. Kao što se vidi, MATLAB je uveo imaginarnu jedinicu 'i'. Prilikom zapisivanja kompleksnog broja, pri programiranju, mogu se ravnopravno koristiti dva oblika: kao što je navedeno u prethodnom primeru i primenom znaka za množenje, tj.  $-4.1573 - 1.3052*i$

### LITERATURA

- [1] Aseltine, J. A.: **Transform Method in Linear System Analysis**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
- [2] Воронов, А. А.: **Основы теории автоматического управления: автоматическое управление непрерывных линийных систем**, «Энергия», Москва, 1980.
- [3] Clarc, R. N.: **Introduction to Automatic Control Systems**, Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1962.
- [4] Gupta, S. C., Hasdorff, L.: **Fundamental of Automatic Control**, Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1970.
- [5] D'azzo, J. j., Houps, C. H.: **Linear Control Systems Analyzis and Design**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
- [6] Kuo, B. C.: **Automatic Control Systems**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [7] Netushil, A. V. (Ed.): **Theory of Automatic Control**, Mir Publisher, Moscow, 1978.
- [8] Stojić, M. R.: **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, "Nauka", Beograd, 1996.
- [9] Цыпкин, Я. З.: **Основы теории автоматических систем**, "Наука", Москва, 1977.
- [10] Milosavljević, Č.: **Osnovi automatike, I deo: Linearni vremenski kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, Univerzitet u Nišu, Elektronski Fakultet, 2002.
- [11] Milosavljević, Č.: **Osnovi automatike** (vremenski kontinualni SAU). **Metodička zbirka zadataka**, Elektronski fakultet u Nišu, 1995.
- [12] Ćalasan, L., Petkovska, M.: **MATLAB i dodatni moduli Control System Toolbox i SIMULINK**, "Mikro knjiga", Beograd, 1995.

### Pitanja za samoproveru

1. Po definiciji, funkcija prenosa je odnos \_\_\_\_\_ signala na \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_ sistema, pri \_\_\_\_\_.
2. Elektromehaničke analogije su izvedene na osnovu uporedne analize triju dinamičkih sistema i to: \_\_\_\_\_.
3. Prema pravilima elektromehaničkih analogija masa odnosno moment inercije mehaničkih sistema su analogni \_\_\_\_\_ električnih sistema, trenje mehaničkih sistema je analogno \_\_\_\_\_ električnih sistema, a koeficijent elastičnosti mehaničkih sistema je analogan \_\_\_\_\_ kod električnih sistema.
4. Sila odnosno moment sile u mehaničkom sistemau su ekvivalentni \_\_\_\_\_ u ekvivalentnom električnom sistemu; brzina kretanja elementa mehaničkog sistema je ekvivalentna \_\_\_\_\_ kod ekvivalentnog električnog sistema.
5. Ekvivalentne električne šeme mehaničkih sistema dobijaju se primenom osnovnog principa: mehanički elementi koji se kreću \_\_\_\_\_ brzinom u ekvivalentnoj električnoj šemi vezani su \_\_\_\_\_.
6. Ako dva elementa mehaničkog sistema imaju različitu brzinu kretanja, u ekvivalentnoj električnoj šemi oni se moraju nalaziti u granama.
7. Funkcija prenosa složene linearne električne mreže koja ima na ulazu samo jedan izvor napona, kada je izlazni signal napon na krajevima  $n+1$  otvorene konture dobija se kao odnos determinanti \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
8. Funkcija prenosa složene linearne električne mreže koja ima na ulazu samo jedan izvor napona, kada je izlazni signal struja u nekoj konturi dobija se kao odnos determinanti \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
9. Determinanta  $D_{n+j}(s)$  dobija se na osnovu determinante  $D_l(s)$  na taj način što se u matrici  $Z(s)$  elementi prve vrste zamene \_\_\_\_\_ impedansama \_\_\_\_\_ i ostalih kontura.
10. Elementi automatike, definisani funkcijama prenosa, u sistemu automatskog upravljanja mogu se, po definiciji vezivati na tri načina: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
11. Funkcija prenosa sistema koji se sastoji od \_\_\_\_\_ vezanih elemenata automatike dobija se kao proizvod funkcija prenosa elemenata.
12. Funkcija prenosa sistema koji se sastoji od \_\_\_\_\_ vezanih elemenata automatike dobija se kao suma funkcija prenosa elemenata.
13. Sistem automatskog upravljanja sa negativnom povratnom spregom ima u direktnoj grani element čiji je prenos  $G(s)$ , a u povratnoj grani element s prenosom  $H(s)$ . Spregnuti prenos sistema određen je relacijom \_\_\_\_\_, povrtni prenos relacijom \_\_\_\_\_, a spregnuti prenos po signalu greške sistema - relacijom \_\_\_\_\_.

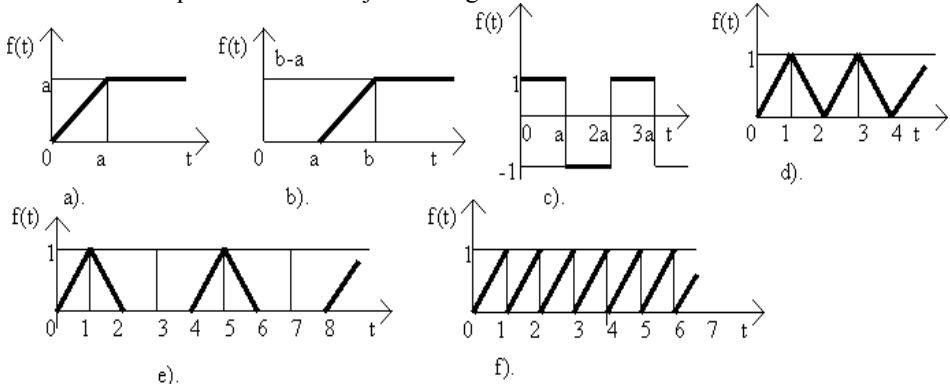
14. Krakteristične funkcije prenosa sistema sa povratnom spregom su:

---

15. Višekonturni sistem automatskog upravljanja ima različite funkcije prenosa, što zavisi od mesta prekida povratne sprege. Međutim, karakteristični polinom sistema \_\_\_\_\_ od mesta prekida povratne sprege.

### Zadaci za vežbu

1. Odrediti kompleksni lik funkcije zadate grafički



2. Naći original kompleksnog lika

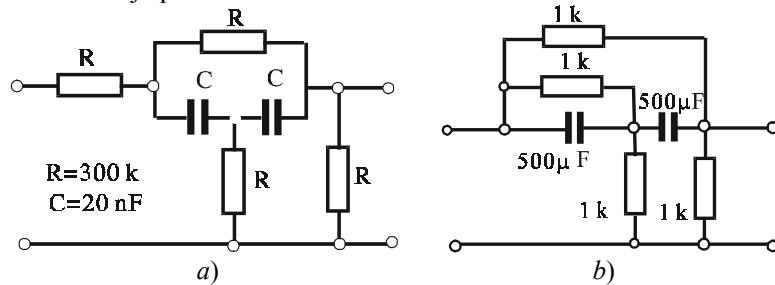
$$a) \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}; b) \frac{1}{(s^2-6s+13)(s^2-6s+10)}; c) \frac{e^{-s}}{s(s-1)};$$

$$d) \frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}; e) \frac{e^{-s}}{s^2-1} + \frac{se^{-2s}}{s^2-4}; f) \frac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^2}.$$

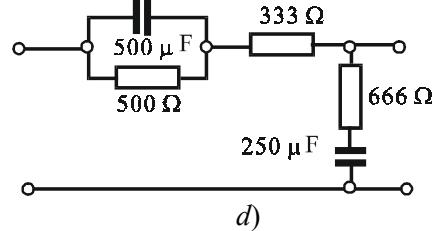
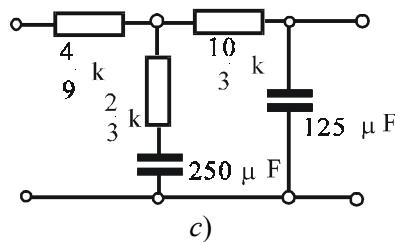
3. Naći rešenje diferencijalne jednačine

- a).  $y''+y=t^3+6t$ ,  $y'(0)=y(0)=0$       b).  $y''+y=\sin 2t$ ,  $y'(0)=y(0)=0$   
 c).  $y''+y=\cos t$ ,  $y'(0)=y(0)=0$       d).  $y''+y=\cos t+\sin 2t$ ,  $y'(0)=y(0)=0$   
 e).  $y''-4y=4e^{2t}$ ,  $y'(0)=y(0)=0$       f).  $ty''+(2t+2)y'+(t+2)y=0$ ,  $y'(0)=-1$ ,  $y(0)=1$   
 g).  $ty''+y'=0$ ,  $y'(0)=1$ ,  $y(0)=0$       h).  $y''+y=e^{-t}+\sin t+2$ , nulti početni uslovi

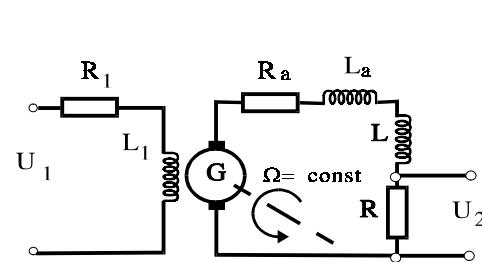
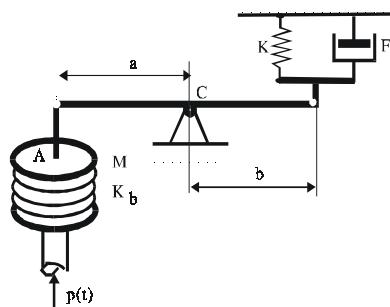
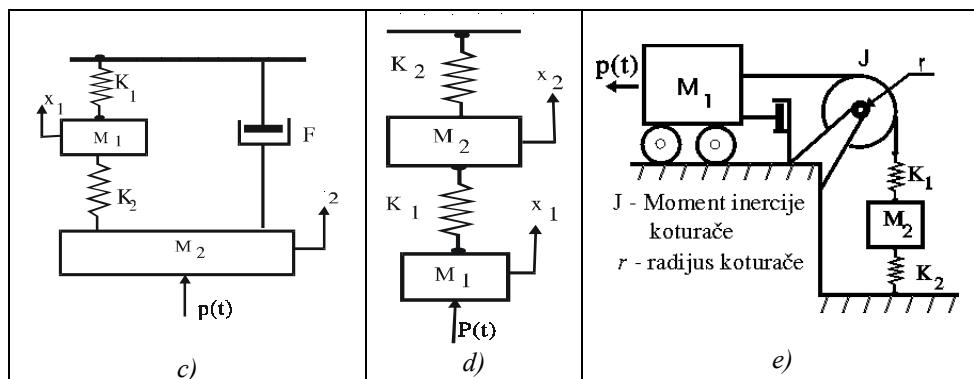
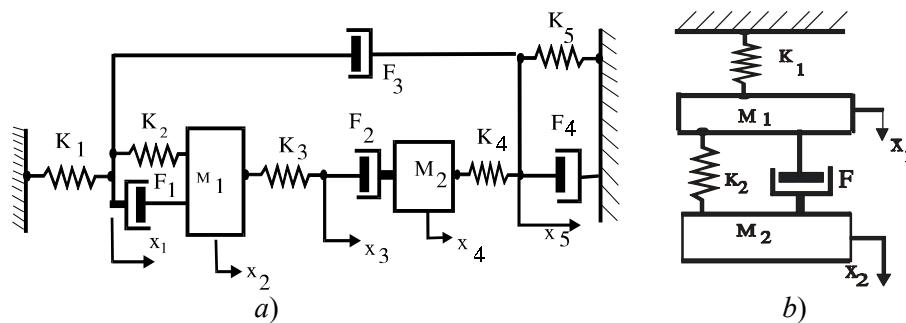
4. Odrediti funkciju prenosa električne mreže



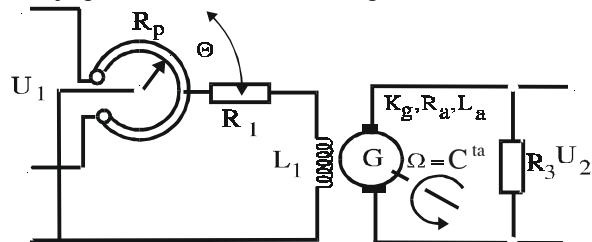
Glava 2.: Matematički modeli elemenata i sistema



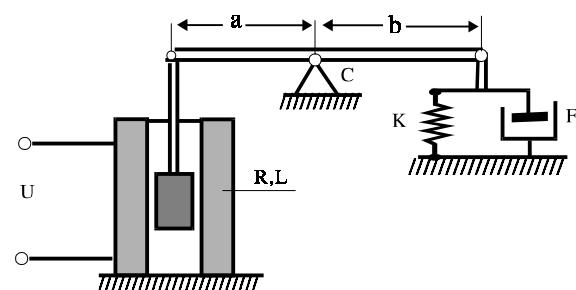
5. Nacrtati ekvivalentnu električnu šemu mehaničkog sistema:



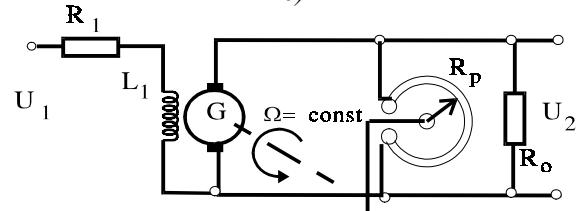
6. Odrediti funkciju prenosa elektromehaničkog sistema:



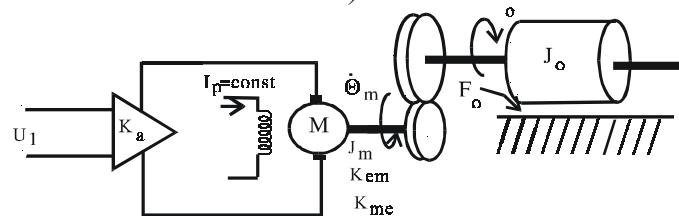
a)



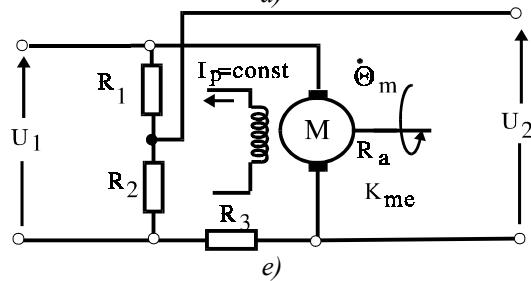
b)



c)



d)



e)

<b>Glava 3. ODZIVI ELEMENATA I SISTEMA</b>	43
<b>3.1 Uvod</b>	43
<b>3.2 Određivanje odziva na osnovu funkcije prenosa</b>	44
3.2.1 Normalni impulsni odziv sistema	45
3.2.2 Normalni odskočni odziv sistema	46
3.2.3 Normalni odziv sistema na bilo koju pobudni signal	47
3.2.4 Normalni frekvencijski odziv sistema	47
3.2.4.1 Načini predstavljanja frekvencijskih karakteristika	48
3.2.4.1.1 Bodeovi dijagrami elemenata i sistema	49
<b>3.3 Osnovni elementi linernih sistema i njihovi odzivi</b>	50
3.3.1 Pojačavački (proporcionalni) element	51
3.3.2 Integracioni element	51
3.3.3 Diferencijalni element prvog reda	51
3.3.4 Inercijalni (aperiodični) element prvog reda	52
3.3.5 Predikcioni element prvog reda	53
3.3.6 Oscilatorni element drugog reda	54
3.3.7 Ppredikcioni element drugog reda	60
3.3.8 Element transportnog (čistog) kašnjenja	60
3.3.9 Nestabilni i neminimalno fazni elementi	60
3.3.10 Konstrukcija Bodeovih dijagrama sistema	61
<b>3.7 Procesi u linearnim SAU</b>	63
<b>3.5 Primena MATLAB-a za određivanje odziva</b>	65
3.5.1 Inverzna Laplasova transformacija	65
3.5.2 Impulsni i odskočni odziv sistema	66
3.5.3 Odziv sistema na bilo koju pobudnu funkciju	67
3.5.4 Primena MTLAB-a za crtanje AFFK (Nikvistove krive)	68
3.5.5 Primena MATLAB-a u konstrukciji Bodeovih dijagrama	68
<b>Literatura</b>	70
<b>Pitanja za samopроверу</b>	70
Zadaci za vežbu	72

# **Glava 3.**

## **ODZIVI ELEMENATA I SISTEMA**

### **3.1 Uvod**

Pod dejstvom pobude nastaje odvijanje procesa (fizičkih i/ili hemijskih) u elementu/sistemu. Taj proces nazvaćemo *kretanjem*. Kretanje može nastati usled delovanja nenultih početnih uslova (na račun akumulirane energije u elementima sistema), pod uticajem priloženih spoljašnjih sila (pobudnih signala) ili usled istovremenog delovanja nenultih početnih uslova i spoljašnjih sila. Kada se kretanje odvija samo na račun nenultih početnih uslova (unutrašnje energije), tada kažemo da se element/sistem *autonomno kreće*, odnosno da u njemu postoji *slobodno kretanje*. Ako se element/sistem kreće samo usled delovanja spoljašnjih sila, tada govorimo o *prinudnom kretanju*. Kasnije ćemo videti da se svako kretanje pod dejstvom spoljašnjih sila sastoji iz *slobodnog* i *prinudnog kretanja*. Uspostavljanjem prinudnog kretanja sistem ulazi u *stacionarno stanje*. Prelazak iz jednog u drugo stacionarno stanje, usled promene pobude, naziva se *prelaznim procesom*.

Elementi/sistemi nalaze se u različitim realnim sredinama i podvrgnuti su delovanju različitih spoljašnjih uticaja. Napadne tačke pobudnih signala su različite, ali je njihov broj ograničen. Međutim, spoljašnji uticaji su, uglavnom, stohastičke veličine, tj. mogu imati proizvoljnu vrednost i oblik. Za određivanje reakcije sistema u takvim uslovima potrebno je primenjivati *teoriju stohastičkih sistema*. Ipak, u praksi se mnogi sistemi mogu tretirati kao sistemi koji rade u determinističkim uslovima, tj. da njihovi pobudni signali pripadaju klasi funkcija determinističkog tipa. Na ovom kursu smatraćemo da naši elementi/sistemi rade u takvim uslovima. Međutim, i broj pobudnih signala determinističkog tipa, koji mogu delovati na realne sisteme, je ogroman, praktično beskonačan, što usložnjava analizu i sintezu sistema, kao i njihovo međusobno kvalitativno i kvantitativno upoređivanje. U cilju unifikacije, po-

godno je ograničiti broj mogućih pobudnih signala pomoću kojih se vrši kvalitativno i kvantitativno ispitivanje različitih sistema. Izbor takvih "univerzalnih" signala ne može biti proizvoljan. Izabrani signali, koje ćemo dalje nazivati *tipičnim*, moraju imati nekoliko važnih osobina: (i) da su matematički jednostavni, (ii) da se sistem, podvrgnut delovanju takvih signala, nalazi u stanju povišenih zahteva na statičke i dinamičke karakteristike, i (iii) da se realni signali koji deluju na sistem mogu aproksimirati skupom tipičnih signala. Postavljene zahteve u pogledu ispitivanja dinamičkih osobina sistema u potpunosti zadoviljavaju sledeći signali:

- Dirakov impulsni signal*  $\delta(t)$ ;
- Hevisajdov odskočni signal*  $h(t)$ ;
- prostoperiodični (harmonijski) signal*.

Pomoću svakog od ovih signala moguća je aproksimacija bilo kog drugog. Spomenimo samo Furijeovu harmonijsku analizu. Osim toga, prva dva signala, svojim naglim promenama, ističu dinamičke osobine sistema u prelaznim režimima, dok harmonijski signal potencira dinamičke osobine sistema u tzv. *dinamičkim stacionarnim stanjima*.

Pored navedenih signala, za ispitivanje dinamičkih osobina elemenata/sistema, koriste se i tipični pobudni signali za ispitivanje statičkih osobina sistema, prvenstveno u pogledu tačnosti u stacionarnom stanju. Za takve tipične signale, obično se biraju:

- Hevisajdov odskočni signal*  $h(t)$ ;
- nagibni signal, odnosno signal konstantne brzine*,  $v(t)$ ;
- parabolični signal, odnosno signal konsantnog ubrzanja*,  $a(t)$ .

Za ispitivanje statičke tačnosti sistema mogu se primenjivati i drugi signali iz klase *sporopromenljivih signala*. To su takvi signali čija brzina promene amplitude mora biti za red veličine manja od brzine reagovanja sistema.

Proces koji se javlja na izlazu elementa/sistema usled delovanja ulaznog signala nazivamo *odzivom elementa/sistema*. Prema tome,

*odziv elementa ili sistema je njegova reakcija, posmatrana na izlazu, pri delovanju pobudnog signala na ulazu.*

U nastavku ćemo, najpre, definisati relacije za određivanje odziva apstraktног sistema, predstavljenog funkcijom prenosa, a zatim definisati osnovne tipove elemenata linearnih sistema i odrediti njihove odzive.

### 3.2 Određivanje odziva na osnovu funkcije prenosa

Neka je element/sistem opisan matematičkim modelom u obliku funkcije prenosa  $G(s)$  i neka je poznat pobudni signal  $u(t)$ . Na osnovu definicije funkcije prenosa,

$$W(s) = \frac{C(s)}{U(s)},$$

neposredno proističe:

$$C(s) = W(s)U(s), \quad (3.1)$$

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

---

što predstavlja odziv sistema u kompleksnom domenu. Međutim, nas najčešće interesuje odziv sistema u vremenskom domenu. On se određuje prevođenjem prethodne relacije u vremenski domen, primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)U(s)\}. \quad (3.2)$$

Znajući funkciju prenosa i kompleksni lik pobudnog signala, koristeći metode za dobijanje inverzne Laplasove transformacije (rastavljanje na proste razlomke, Hevisajdov razvitak, korišćenje tabele) dolazi se do izraza za vremenski odziv sistema. S obzirom na to da je funkcija prenosa definisana za nulte početne uslove, na osnovu (3.2) dobija se odziv sistema u kome, do trenutka delovanja pobudnog signala ( $u(t)$ ), nije bilo akumulirane energije u elementima sistema. U onim slučajevima kada treba uračunati i nenulte početne uslove, najpre se na osnovu (3.1), napisanom u obliku:

$$C(s) = \frac{N(s)}{P(s)}U(s) \Rightarrow C(s)P(s) = N(s)U(s) \quad (3.3)$$

formira diferencijalna jednačina, zamenjujući  $s = d/dt$ , koja se, zatim, rešava kao diferencijalna jednačina s nenultim početnim uslovima, primenom operatorskog računa (Laplasove transformacije).

Odzive sistema pri nultim početnim uslovima nazivaćemo, u daljem tekstu, *normalnim odzivima*.

**3.2.1 Normalni impulsni odziv sistema.** Pobuda sistema je Dirakova funkcija  $\delta(t)$ , čija je matematička definicija:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (3.4)$$

iz koje se vidi, da ona deluje samo u trenutku  $t=0$ , s beskonačnom amplitudom. Površina (integral) koju zahvata kriva tog signala jednaka je jedinici. Ovaj signal možemo shvatiti kao granični slučaj jediničnog pravougaonog impulsnog signala vremena trajanja od 1 s i jedinične amplitude, kada se ona povećava, a vreme trajanja smanjuje, zadržavajući pri tom istu površinu zahvaćenu signalom. Kompleksni lik Dirakovog signala je jednak jedinici, što se može lako pokazati primenom definicionog obrasca Laplasove transformacije<sup>1</sup>:

$$\delta(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt. \quad (3.5)$$

Podintegralna veličina je proizvod dveju vremenskih funkcija od kojih prva,  $\delta(t)$ , ima vrednost različitu od nule samo pri  $t=0$ , kada je druga,  $e^{-st}$ , jednaka jedinici. Zbog toga se (3.5) svodi na

$$\delta(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup> U daljem tekstu koristićemo jednostranu Laplasovu transformaciju, jer je sva istorija sistema sadržana u početnim uslovima, ako je sistem kauzalan, pa je trenutak  $t=0$  rezervisan za početak delovanja spoljašnje pobude.

Sa ovom napomenom, kompleksni lik impulsnog odziva sistema (3.1) postaje

$$C(s) = W(s)\delta(s) = W(s), \quad (3.7)$$

tj. kompleksni lik impulsnog odziva sistema je identičan njegovoj funkciji prenosa. Važi i obrnuto: impulsni odziv sistema je jednak originalu njegove funkcije prenosa:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}. \quad (3.8)$$

U cilju razlikovanja ovog odziva od drugih, njemu se, obično, dodeljuje posebna oznaka  $c(t) = w(t)$  i poseban naziv *težinska funkcija*, čiji značaj će biti istaknut pri određivanju odziva sistema na bilo koji pobudni signal.

Na osnovu (3.7) i (3.8) jasno je da se, pobuđivanjem elementa/sistema Dirakovim impulsom i snimanjem njegovog odziva, može doći do izraza za matematički model elementa/sistema, odnosno može se ostvariti identifikacija. Osnovna teškoća u praktičnoj realizaciji takvog prilaza je nemogućnost tačnog generisanja Dirakovog signala.

**3.2.2 Normalni odskočni odziv sistema.** Kao pobudni signal koristi se Hevisajdov jedinični odskočni signal

$$h(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}; \quad H(s) = \frac{1}{s}. \quad (3.9)$$

Kompleksni lik odziva sistema je

$$C(s) = W(s) \frac{1}{s}. \quad (3.10)$$

Imajući u vidu osobine Laplasove transformacije, definiciju funkcije prenosa i težinske funkcije, odziv sistema u vremenskom domenu biće:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t w(\tau)d\tau, \text{ tj.} \quad (3.11)$$

odskočni odziv elementa/sistema jednak je integralu njegovog impulsnog odziva. Važi i obrnuto: impulsni odziv elementa/sistema jednak je diferencijalu njegovog odskočnog odziva.

Izraz (3.11) može se dobiti i na bazi konvolucionog integrala. Naime, poznato je da se original nekog kompleksnog lika, nastalog proizvodom dveju kompleksnih funkcija, dobija konvolucionim integralom njihovih originala. U prethodnom slučaju imamo proizvod dveju kompleksnih funkcija  $G(s)$  i  $H(s)=1/s$ , čiji su originali  $w(t)$  i  $h(t)=1(t)$ , respektivno. Na taj način, original je

$$c(t) = \int_0^t w(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t w(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (3.12)$$

Uzimajući u obzir da je  $h(\tau)=1$ , poslednji izraz se svodi na (3.11).

Normalni odskočni odziv sistema, u cilju razlikovanja od drugih, obično se označava posebnom oznakom, na primer,  $j(t)$ , što ćemo nadalje koristiti. On se uspešno koristi za identifikaciju sistema.

### 3.2.3 Normalni odziv sistema na bilo koju pobudnu signal

Koristeći konvolucioni integral oblika (3.12) može se odrediti normalni odziv elementa/sistema na bilo koju pobudnu funkciju  $u(t)$ :

$$c(t) = \int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (3.13)$$

što ćemo iskoristiti za određivanje odziva sistema na harmonijsku pobudu

$$u(t) = V_1 \sin(\omega t). \quad (3.14)$$

**3.2.4 Normalni frekvencijski odziv sistema.** Pobuda je signal oblika (3.14) koja se može napisati, primenom Ojlerovog obrasca, u obliku eksponencijalne funkcije:

$$u(t) = V_1 e^{j\omega t}, \quad (3.15)$$

podrazumevajući da se od nje uzima samo imaginarni deo. Tada se odziv sistema, primenom konvolucionog integrala, dobija u obliku:

$$c(t) = \int_0^\infty w(\tau) V_1 e^{j\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (3.16)$$

Prepostavimo da su amplituda i frekvencija pobudnog signala konstantne u toku prelaznog procesa, tj. da sistem ulazi u stacionarno stanje s nepromenljivom amplitudom i frekvencijom pobudnog signala. To znači da se sistem nalazi u prinudnom režimu kretanja. On se karakteriše harmonijskim izlaznim signalom iste frekvencije, faznim pomakom u odnosu na pobudni signal i, u opštem slučaju, različitom amplitudom. Stoga se izlazni signal može predstaviti u obliku

$$c(t) = V_2 e^{j(\omega t - \varphi)} = V_2 e^{j\omega t} e^{-j\varphi}. \quad (3.17)$$

Zamenjujući (3.17) u (3.16) dobijamo, posle izvlačenja ispod znaka integrala veličina koje ne zavise od  $\tau$ , i uzimanja u obzir da se sistem nalazi u stacionarnom stanju, tj da je proteklo dovoljno dugo vremena od trenutka delovanja pobude (praktično je gornja granica integraljenja jednaka  $\infty$ ):

$$V_2 e^{j\omega t} e^{-j\varphi} = V_1 e^{j\omega t} \int_0^\infty w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.18)$$

Analizirajući (3.18), primećujemo da integral u njemu ima oblik definicionog obrasca Laplasove transformacije nad originalom  $w(t)$ , koja u ovom slučaju predstavlja težinsku funkciju sistema, s tom razlikom, što u eksponencijalnoj funkciji, umesto kompleksne promenljive  $s=\sigma+j\omega$ , stoji samo  $j\omega$ . Zbog toga se integral u prethodnom izrazu može predstaviti kompleksnom funkcijom  $W(j\omega)$  koja se formalno može dobiti zamenom  $s=j\omega$  u funkciji prenosa sistema  $W(s)$ .

Na osnovu prethodno rečenog, poslednji izraz postaje:

$$\frac{V_2}{V_1} e^{-j\varphi} = W(j\omega). \quad (3.19)$$

U ovom izrazu, na levoj i desnoj strani, imamo dve kompleksne funkcije koje čine jednakost. Jednakost kompleksnih funkcija postoji samo onda kada su njihovi moduli i argumenti isti. Moduo leve strane je odnos amplituda signala

na izlazu i ulazu elementa/sistema, a argument je fazni pomak  $\varphi$ . Zapisujući kompleksnu funkciju  $W(j\omega)$  u eksponencijalnom obliku  $|W(j\omega)|e^{j\arg W(j\omega)}$ , poslednji izraz se može napisati u vidu dve jednakosti:

$$\frac{V_2}{V_1} = |W(j\omega)|, \quad (3.20a)$$

$$\varphi = \arg W(j\omega). \quad (3.20b)$$

Iz (3.20) se vidi da su, kako odnos amplituda tako i fazni pomak funkcije kružne frekvencije,  $\omega = 2\pi f$ , pobudnog signala. Ako je amplituda ulaznog signala jednaka jedinici, sledi da će amplituda izlaznog signala biti  $|W(j\omega)|$ . Funkcija  $W(j\omega)$  igra važnu ulogu u identifikaciji, analizi i sintezi sistema i naziva se *frekvencijska funkcija prenosa sistema* ili *kompleksni koeficijent pojačanja*. Njen moduo predstavljen grafički u funkciji frekvencije, u Dekartovom koordinatnom sistemu, naziva se *amplitudno-frekvencijska karakteristika (AFK)*, a njen argument - *fazno-frekvencijska karakteristika (FFK)*. Ako se, pak, frekvencijska funkcija prenosa predstavi grafički u polarnom koordinatnom sistemu (moduo-argument, s frekvencijom kao parametrom) dobija se *amplitudno-fazno-frekvencijska karakteristika (AFFK) sistema*, koja se, obično, skraćeno naziva *amplitudno-fazna karakteristika*. Amplitudno-fazna karakteristika konstruisana za funkciju povratnog prenosa sistema naziva se *Nikvistova kriva*, o čemu će više biti reči pri izučavanju stabilnosti sistema.

**3.2.4.1 Načini predstavljanja frekvencijskih karakteristika.** Već smo napomenuli da se frekvencijske karakteristike mogu grafički predstavljati na različite načine: u polarnom ili u Dekartovom koordinatnom sistemu. Kako na osnovu kompleksnog koeficijenta pojačanja  $W(j\omega)$ , primenom matematičkih pravila za crtanje grafika funkcija kompleksne promenljive, konstrukcija AFFK ne predstavlja naročiti problem, nećemo se na tome zadržavati<sup>2</sup>. Ukazaćemo na neke specifične načine predstavljanja AFK i FFK. S obzirom na to da se frekvencija u realnim uslovima može menjati u veoma širokom opsegu od 0 do  $\infty$ , linearna razmara po frekvencijskoj osi nije pogodna, pa se pribegava korišćenju logaritamske. Najčešće i dijapazon odnosa amplituda, odnosno moduo frekvencijske funkcije prenosa, može biti veliki, pa se i po toj osi uvodi logaritamska razmara. Kako se u telekomunikacijama, gde frekvencijske karakteristike igraju dominantnu ulogu, odnos amplituda obično izražava decibelima (dB), i u automatici je usvojen isti koncept. Podsetimo da je decibelski odnos amplituda definisan relacijom

$$L(\omega) = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = 20 \log |W(j\omega)| \text{ [dB].} \quad (3.21)$$

---

<sup>2</sup> Kvalitativnoj konstrukciji amplitudno-faznih karakteristika posvetićemo pažnju pri izučavanju osnovnih elemenata automatike i stabilnosti sistema.

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

---

U klasičnoj analizi i sintezi sistema upravljanja, jedan pogodan oblik predstavljanja AFK u logaritamskoj razmeri, konstruisanjem ne tačnih već asimptotskih dijagrama, predložen je od strane američkog naučnika Bodea.

#### 3.2.4.1.1 Bodeovi dijagrami elemenata i sistema

Osnovna pogodnost Bodeovih dijagrama se odnosi na AFK, dok se FFK konstruišu u polulogaritamskoj razmeri. Neka je dat sistem definisan funkcijom prenosa  $W(s)$ , odnosno frekvencijskom funkcijom prenosa  $W(j\omega)$ . U opštem slučaju, funkcija prenosa se može napisati u dva različita oblika:

$$W(s) = \frac{N(s)}{P(s)} e^{-s\tau} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} e^{-s\tau}, \quad m \leq n; \quad (3.22)$$

$$W(s) = K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + sT_j) \prod_{k=j+1}^{m-p} (1 + 2\xi_k T_k s + s^2 T_k^2)}{s^r \prod_{i=r+1}^q (1 + sT_i) \prod_{v=q+1+r}^{n-q-r} (1 + 2\xi_v T_v s + s^2 T_v^2)} e^{-s\tau}, \quad m \leq n; \quad (3.23)$$

gde  $\tau$  označava transportno kašnjenje koje može postojati u sistemu.

U ovom odeljku koristićemo oblik (3.23) zapisivanja funkcije prenosa. Na osnovu njega, definisaćemo neke pojmove i oznake od koristi za dalju analizu i sintezu sistema. Najpre, faktor pojačanja  $K$ , u izrazu za funkciju prenosa, naziva se *Bodeovo pojačanje*. Dobija se kako iz izraza (3.22), tako i iz (3.23) kao  $W(0)$ , tj.  $K = b_0/a_0$ . Eksponent  $r$  u (3.23) naziva se *stepenom astatizma sistema* o čijem značaju ćemo govoriti kasnije.

Matematički izrazi za konstrukciju Bodeovih dijagrama su:

- za amplitudno-frekvencijsku karakteristiku (3.21),
- za fazno-frekvencijsku karakteristiku (3.20b).

Primenjujući (3.21) na (3.23), uzimajući u obzir da je moduo proizvoda jednak proizvodu modula, te da je logaritam proizvoda jednak sumi logaritama faktora, matematički izraz za Bodeov dijagram možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} L(\omega) = & 20 \log K + r 20 \log \left| \frac{1}{\omega} \right| + \sum_{i=r+1}^q 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T_i} \right| + \\ & \sum_{v=q+r+1}^n 20 \log \left| \frac{1}{(1 + 2\xi_v T_v j\omega - \omega^2 T_v^2)} \right| + \sum_{j=1}^p 20 \log |(1 + j\omega T_j)| + \\ & \sum_{k=p+1}^m 20 \log |(1 + 2\xi_k T_k j\omega - \omega^2 T_k^2)| + 20 \log |e^{-j\omega\tau}|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Na osnovu (3.24) se vidi da se dijagram konstruiše kao suma određenog broja sabiraka, pri čemu su neki od njih jednotipni. Tako, na primer, vidimo da se drugi sabirak u (3.24) sastoji od sume  $r$  istih sabiraka; treći sabirak se sastoji

iz sume  $q$  jednotipnih sabiraka, itd., do poslednjeg sabirka koji potiče od čistog kašnjenja u sistemu. Ako znamo da konstruišemo logaritamske dijagrame svakog od sabiraka u (3.24), ukupni logaritamski dijagram sistema dobićemo kao algebarsku sumu vrednosti dijagrama sabiraka na određenoj frekvenciji. U cilju pojednostavljenja konstrukcije, uvešćemo kategoriju *osnovnih elemenata linearog sistema automatskog upravljanja*, odrediti njihove odzive i grafičku prezentaciju istih, a zatim ćemo, na kraju, pokazati kako se na osnovu poznavanja Bodeovih dijagrama osnovnih elemenata konstruišu Bodeovi dijagrami sistema.

### 3.3 Osnovni elementi linearnih sistema i njihovi odzivi

Na osnovu (3.23) mogu se uočiti sedam tipova osnovnih linearnih elemenata sistema automatskog upravljanja, kojima dodajemo još jedan - čist diferencijalni element. To su:

- *proporcionalni (pojačavački) element*, funkcije prenosa  $K$ ;
- *integracioni element*, funkcije prenosa  $s^{-1}$ ;
- *diferencijalni element*, funkcije prenosa  $s$ ;
- *inercijalni (aperiodični) element prvog reda*, funkcije prenosa  $(1 + sT)^{-1}$ ;
- *predikcioni (proporcionalno-diferencijalni) element prvog reda*, funkcije prenosa  $(1 + sT)$ ;
- *oscilatorni element drugog reda*, funkcije prenosa  $(1 + 2\zeta Ts + s^2 T^2)^{-1}$ ;
- *predikcioni element drugog reda*, funkcije prenosa  $(1 + 2\zeta Ts + s^2 T^2)$ ;
- *element transportnog (čistog) kašnjenja*, funkcije prenosa  $e^{-s\tau}$ .

Svaki stabilan, linearni *minimalno-fazni* sistem<sup>3</sup> se može komponovati, odnosno dekomponovati pomoću ovih elemenata. Zbog toga je važno poznavati njihove fizičke modele, karakteristične odzive i karakteristike, čemu ćemo u daljem tekstu posvetiti potrebnu pažnju.

Sistem može posedovati i *nestabilne i neminimalno-fazne elemente*. To su elementi koji imaju polove ili nule u desnoj poluravni, respektivno. Takvi elementi su sa sledećim funkcijama prenosa:

$$(1 - sT)^{-1}; (1 - sT); (s^2 T^2 - 2\zeta Ts + 1)^{-1}; s^2 T^2 - 2\zeta Ts + 1,$$

a karakteriše ih i to da im je AFK ista kao kod odgovarajućih (sličnih) minimalno-faznih elemenata, dok im je fazni pomak veći.

Ovde treba učiniti sledeće napomene:

1. U literaturi postoje različite definicije neminimalno-faznosti. Po jednima je to slučaj kada element/sistem ima polove ili nule s pozitivnim realnim delom [1, 8]. Mi ćemo, ipak, razlikovati nestabilne elemente od neminimalno-faznih elemenata. Prvi su oni elementi koji imaju polove, a drugi - nule s pozitivnim realnim delom.

---

<sup>3</sup> Minimalno-fazni elementi/sistemi biće definisani u nastavku ovog odeljka.

## Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

---

2. Element (čistog) transportnog kašnjenja se, takođe, može ubrojati u neminimalno-fazne elemente, jer mu faza neprestano raste s frekvencijom.

3. U napred dатој dekompoziciji funkcije prenosa ne egzistira čist diferencijalni element prвог reda, funkcije prenosa  $W(s)=s$  zbog prisustva integracionih elemenata koji su fizički realni, dok je čist diferencijalni element fizički neostvariv.

### 3.3.1 Pojačavački (proporcionalni) element

To je element koji prenosi ulazni signal na izlaz neizmenjen po obliku, s proporcionalnim uvećanjem/smanjenjem po veličini. Za  $K>1$  imamo pojačan, za  $0<K<1$  - oslabljen, a za  $K=1$  - nepromenjen signal. Za  $K<0$  proporcionalni element vrši i faznu inverziju ulaznog signala za  $180^0$ . Tipični fizički predstavnici su: poluga - u mehanici, razdelnik napona i transformator - u elektrotehnici, elektronski pojačavač - u elektronici.

Impulsni i odskočni odziv su, respektivno,  $w(t)=K\delta(t)$  i  $j(t)=Kh(t)$ , a Bodeov dijagram je prava linija paralelna  $\omega$ -osi, na rastojanju  $L(\omega)=20\log K$  od nje. AFFK postaje tačka na realnoj osi na rastojanju  $K$  od koordinatnog početka. AFK je prava linija paralelna  $\omega$  - osi, a FFK se poklapa s  $\omega$  - osom.

**3.3.2 Integracioni element** na svom izlazu generiše signal proporcionalan integralu signala dovedenog na ulaz. Prenos mu je  $W(s)=s^{-1}=1/s$ . Impulsni i odskočni odzivi su dati na sl. 3.1a,b. Frekvenčska funkcija prenosa mu je  $W(j\omega)=-j\omega^{-1}$ , a grafički prikazi njegovih AFFK i AFK prikazani su na sl. 3.1c,d, respektivno. Na amplitudno-faznoj karakteristici je strelicom i oznakom  $\omega$  označen smer porasta kružne frekvencije od 0 do  $\infty$ . Konstrukciji Bodeovih dijagrama posvetićemo posebnu pažnju. Jasno je da je

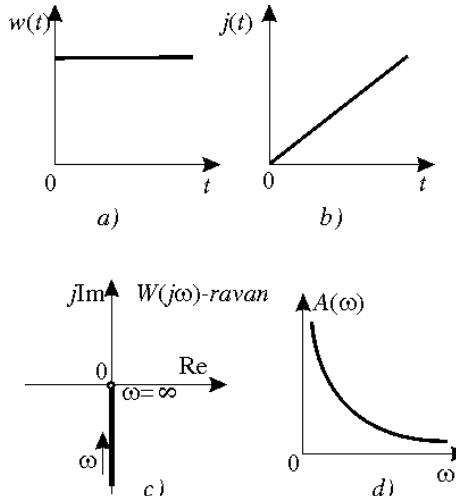
$$L(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.25)$$

U koordinatnom sistemu s ordinatom u dB i apscisom u logaritamskoj razmeri (sl. 3.2a), dijagram slabljenja  $L(\omega)$  ima oblik prave linije, koja seče apscisu u tački  $\omega=1$   $s^{-1}$ , s nagibom od -20 dB/dekadi. To znači da za desetostruku promenu frekvencije amplituda opadne za 20 dB.

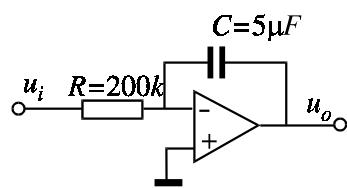
FFK (sl. 3.2b) je prava paralelna apscisi, jer integracioni element unosi konstantni fazni pomak od  $-\pi/2$  radijana.

Tipičan predstavnik integracionog elementa je integrator s operacionim pojačavačem, sl. 3.3. Integracioni element se javlja uvek kada umesto brzine koristimo poziciju kao izlaznu veličinu.

**3.3.3 Diferencijalni element prвog reda**,  $W(s)=s$ , ima logaritamski dijagram slabljenja i FFK integracionog elementa preslikanih "u ogledalu" u odnosu na  $\omega$ -osu. Tipični predstavnici su tahogeneratori jednosmerne ili naizmenične struje. Može se realizovati i s operacionim pojačavačima, ali zbog jakog uticaja šumova takva realizacija se u praksi ne primenjuje.



Sl. 3.1. Karakteristike integracionog elementa: a) impulsni odziv, b) odskočni odziv, c) AFFK, d) AFK.

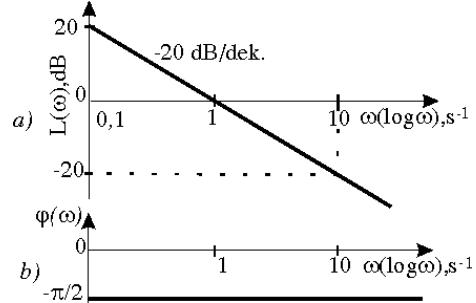


Sl. 3.3. Tipičan predstavnik integracionog elementa.

a AFFK i AFK su prikazane na sl.3.4c,d. Logaritamski dijagram slabljenja se dobija iz relacije

$$L(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (3.27)$$

Međutim, obično se ne konstruiše tačna karakteristika, zadavajući vrednosti  $\omega$  i računajući  $L(\omega)$  prema (3.27), već asymptotska, koja se dobija na sledeći način. U oblasti malih frekvencija  $\omega < 1/T$  sledi da je  $\omega^2 T^2 \ll 1$  i  $\omega^2 T^2$  može se zanemariti u odnosu na jedinicu, pa je  $L(\omega)=0$ . U oblasti velikih frekvencija  $\omega > 1/T$ , je  $\omega^2 T^2 \gg 1$  i jedinica se može zanemariti u odnosu na  $\omega^2 T^2$ . Tada logaritamska karakteristika postaje  $L(\omega) = -20 \log \omega T$ . Ako se izvrši zamena  $\Omega = \omega T$ , tada ovaj deo karakteristike podseća na karakteristiku integracionog elementa, što znači da je to prava linija s nagibom od  $-20 \text{ dB/dek}$ . Navedene dve prave linije: *niskofrekvenčska i visokofrekvenčska asymptota* se sekut u tački  $\omega = 1/T$ , koja se naziva *prelomna frekvencija*, sl. 3.5. Stvarna karakteristika se može nacrtati na osnovu polazne relacije (3.27).



Sl. 3.2. Logaritamski dijagram slabljenja (a) i faze (b) integracionog elementa.

**3.3.4 Inercijalni (aperiodični) element prvog reda** dat je funkcijom prenosa  $(1 + sT)^{-1}$ . Impulsni i odskočni odziv su, respektivno:

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + sT} \right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (3.26)$$

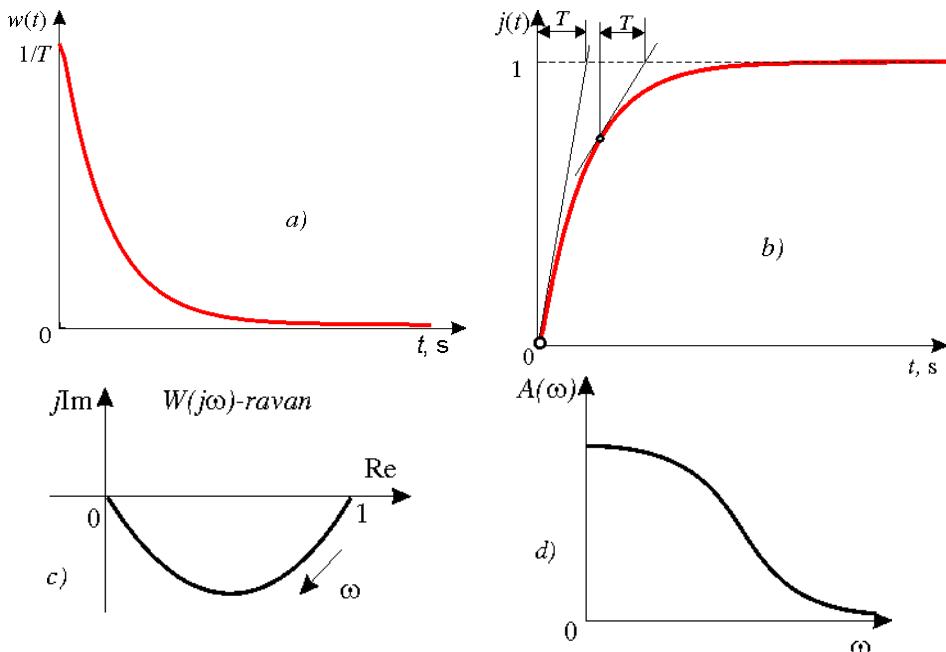
$$j(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + sT} \frac{1}{s} \right\} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

i prikazani su na sl. 3.4a,b.

Frekvencijska funkcija prenosa je

$$W(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1},$$

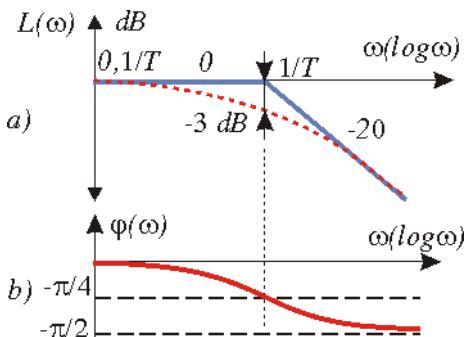
### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema



Sl. 3.4. Odzivi aperiodičnog elementa prvog reda: a) impulsni, b) odskočni, c) AFFK, d) AFK. Tangenta povučena u bilo kojoj tački na krivoj odskočnog odziva definiše vremensku konstantu  $T$ , kao što je na slici (b) prikazano.

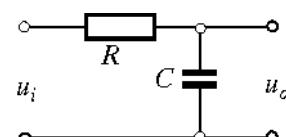
Najveće odstupanje asimptotskog od stvarnog dijagrama je na *prelomnoj frekvenciji*,  $\omega=1/T$ , i iznosi -3 dB, pa se u praksi često zanemaruje, a po potrebi se unose odgovarajuće korekcije. Fazni dijagram se dobija na osnovu relacije

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(\omega T), \quad (3.28)$$



Sl. 3.5. Logaritamski dijagram slabljenja (a) i faze (b) aperiodičnog elementa prvog reda.

i, za razliku od amplitudskog, obično se konstruiše tačan dijagram, sl. 3.5b. Tipičan električni predstavnik inercijalnog elementa je  $RC$  - kolo, prikazano na sl. 3.6.

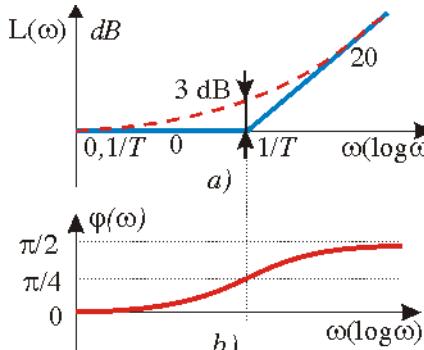


Sl. 3.6. Tipičan električni predstavnik inercijalnog elementa.

**3.3.5 Predikcioni element prvog reda** ima funkciju prenosa  $W(s) = (1 + sT)$ , koja je recipročna vrednost prenosa inercijalnog elementa prvog reda. Ovaj element, za razliku od prethodnih, ne može se fizički realizovati. Uveden je samo radi pojednostavljenja konstrukcije Bodeovih

dijagrama složenih sistema. Njegovi logaritamski dijagrami slabljenja i faze su "slika u ogledalu", u odnosu na  $\omega$  - osu, prethodnog elementa, sl. 3.7.

### 3.3.6 Oscilatorni element drugog reda



Sl. 3.7. Logaritamski dijagrami  
slabljenja (a) i faze (b) predikcionog  
elementa prvog reda.

ima funkciju prenosa

$$W(s) = \frac{1}{s^2 T^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (3.29)$$

ili

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad \omega_n = \frac{1}{T}. \quad (3.30)$$

U funkciji prenosa ovog elementa figure sledeći parametri:

- vremenska konstanta  $T$ , s;
- - koeficijent relativnog prigušenja  $\zeta$   
(bezdimenzionala veličina);

- sopstvena neprigušena prirodna frekvencija oscilovanja  $\omega_n$ , s<sup>-1</sup>.

Određićemo, najpre, odskočni odziv ovog elementa, jer je karakterističan za SAU i, s toga, veoma važan, a, zatim, i njegov impulsni odziv. Na osnovu definicije odskočnog odziva i (3.30), možemo napisati:

$$j(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \right\}. \quad (3.31)$$

Za određivanje inverzne Laplasove transformacije koristićemo *Hevisajdov razvitetak*, koji se obično daje formulom:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_1(s)}{s F_2(s)} \right\} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{s_k F_2(s_k)} e^{s_k t}, \quad (3.32)$$

gde su:  $s_k$  - koreni jednačine  $F_2(s)=0$ , a  $n$  - stepen polinoma  $F_2(s)$ . Na taj način imamo:

$$F_1(s) = \omega_n^2; \quad F_2(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2;$$

$$F_2(s) = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2};$$

$$F_2'(s) = 2(s + \zeta\omega_n); \quad F_2'(s_1) = j2\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2};$$

$$F_2'(s_2) = -j2\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}; \quad F_1(0) = F_2(0) = \omega_n^2;$$

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

---

$$\begin{aligned}
j(t) &= 1 + \frac{\omega_n^2}{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(j2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + \\
&\quad \frac{\omega_n^2}{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(-j2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} \\
j(t) &= 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \frac{e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}}{(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})} - \frac{e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}}{(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})} \right] = \\
1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} &\left[ \frac{-\zeta \left( e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} - e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} \right)}{2j} - \right. \\
&\left. \frac{\sqrt{1-\zeta^2} \left( e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} + e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} \right)}{2} \right] = \\
1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} &\left[ -\zeta \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \right] \Rightarrow \\
j(t) &= 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \psi); \quad \psi = \arccos(-\zeta). \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Na sl. 3.8 prikazan je grafik odskočnog odziva oscilatornog elementa drugog reda, prema (3.33), za različite faktore relativnog prigušenja i  $\omega_n=10 \text{ s}^{-1}$ .

Sa slike se vidi da za  $\zeta=0$  imamo neprigušene oscilacije. Tada oscilatori element postaje *konzervativni element drugog reda*. Za  $\zeta=1$  oscilatori element drugog reda se sastoji iz redne veze dva identična aperiodična elementa prvog reda i tada je on, ustvari, *aperiodični element drugog reda*.

Diferencirajući (3.33) po vremenu, dobija se izraz za impulsni odziv oscilatornog elementa drugog reda:

$$w(t) = \frac{dj(t)}{dt} = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (3.34)$$

Na sl. 3.9 prikazan je impulsni odziv za različite vrednosti  $\zeta$  i  $\omega_n=10 \text{ s}^{-1}$ .

Izjednačavajući impulsni odziv s nulom, rešavajući dobijenu relaciju po  $t$  dobijaju se vremenski trenuci ekstremalnih vrednosti odskočnog odziva. Za nas je najinteresantniji prvi maksimum koji nastaje u vremenskom trenutku

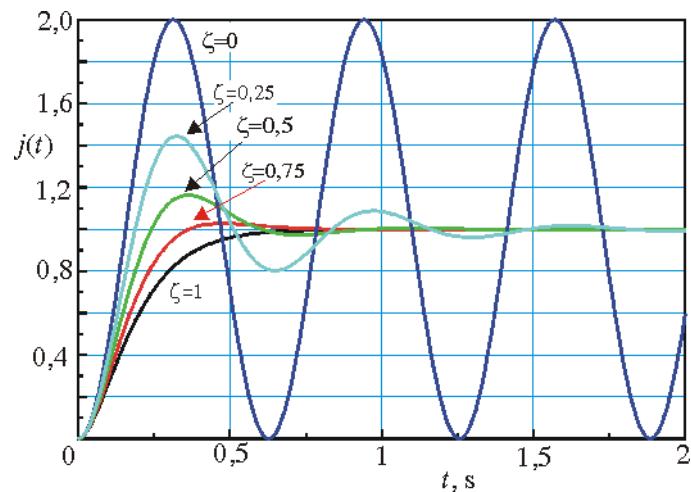
$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (3.35)$$


---

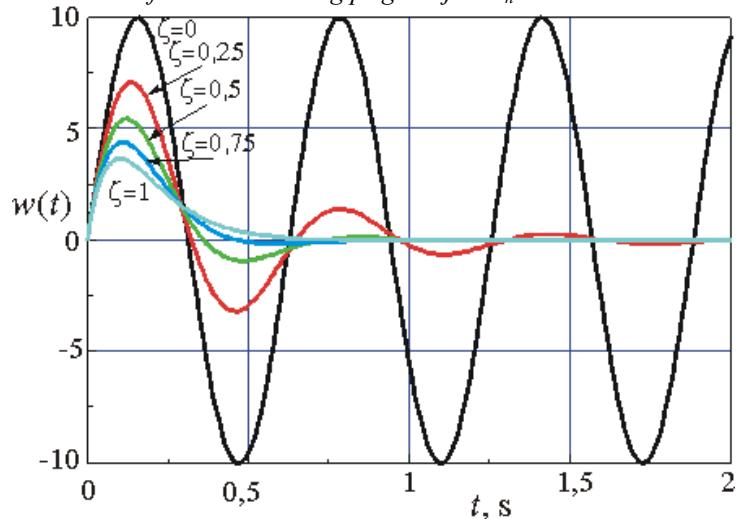
a čija je vrednost, posle zamene (3.35) u (3.33):

$$j(t_1) = 1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}. \quad (3.36)$$

Veličina premašenja (preskoka) u odnosu na jedinični ulazni signal je

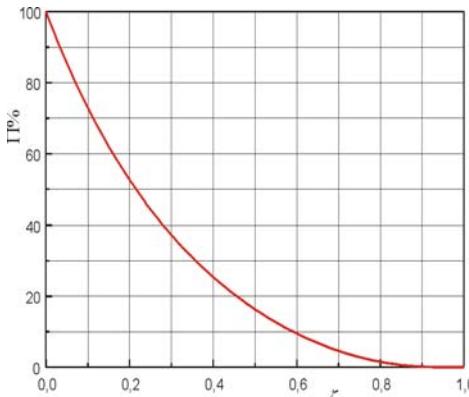


Sl. 3.8. Odskočni odziv osculatornog elementa drugog reda za različite vrednosti faktora relativnog prigušenja i  $\omega_n=10 \text{ s}^{-1}$ .



Sl. 3.9. Impulsni odziv osculatornog elementa drugog reda za različite faktore relativnog prigušenja.

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema



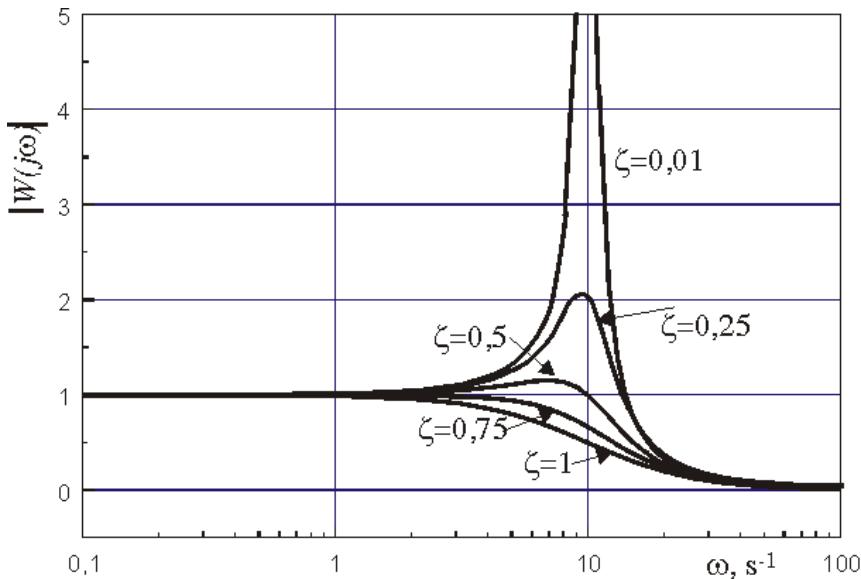
Sl. 3.10. Zavisnost preskoka , $\Pi\%$ , od faktora relativnog prigušenja  $\zeta$ .

Ona je interesantna sa stanovišta filterskih osobina sistema i mogućnosti egzistencije rezonantnih pojava. Na sl. 3.11 dat je grafički prikaz AFK za različite faktore  $\zeta$ . Na dijagramu se jasno uočava rezonantni skok na sopstvenoj frekvenciji oscilovanja sistema i odsustvo rezonantnih osobina za  $\zeta > 0,7$ .

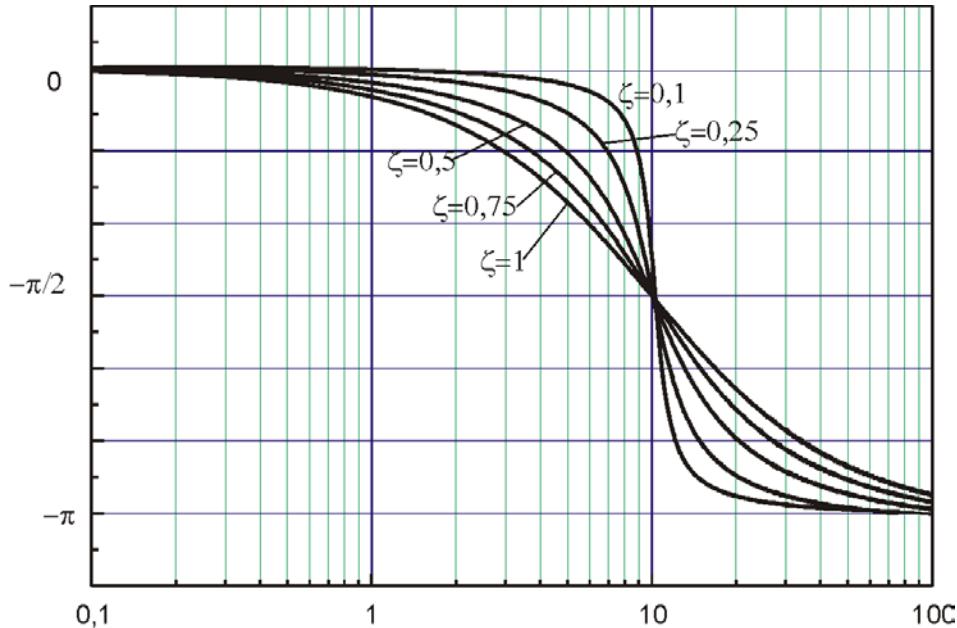
FFK je određena izrazom

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = -\arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}. \quad (3.39)$$

Na sl. 3.12 dat je grafički prikaz ove relacije za različito  $\zeta$ .



Sl. 3.11. AFK oscilatornog elementa drugog reda za različite faktore relativnog prigušenja  $\zeta$ .



Sl. 3.12. Fazno-frekvencijski dijagram oscilatornog elementa drugog reda za različite faktore relativnog prigušenja  $\zeta$ .

Iz FFK se vidi da postoji prevojna tačka na sopstvenoj frekvenciji  $\omega_n$ , koja je u datom primeru  $10 \text{ s}^{-1}$ .

Bodeov logaritamski, asimptotski dijagram slabljenja se dobija iz izraza (3.38):

$$L(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}} = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}.$$

Za male frekvencije,  $\omega < \frac{1}{T}$ , izraz ispod korena se može aproksimirati jedinicom, pa je  $L(\omega)=0$ , što znači da se niskofrekvencijska asimptota poklapa s  $\omega$ -osom. Za velike frekvencije,  $\omega > \frac{1}{T}$ , koren se može aproksimirati s  $\omega^2 T^2$ , pa je  $L(\omega)=-40\log\omega T$ . To znači, da je visokofrekvencijska asimptota pod nagibom od  $-40 \text{ dB/dekadi}$ . Na sl. 3.13 prikazan je Bodeov (asimptotski) dijagram za oscilatorni element drugog reda. Stvarni dijagram se razlikuje utoliko više ukoliko je faktor relativnog prigušenja bliže nuli. Na sl. 3.14 dati su stvarni logaritamski dijagrami slabljenja i asimptotski dijagram radi ilustracije veličine odstupanja asimptotskih od stvarnih dijagrama. Praktično gledano, odstupanja nisu velika za  $0,5 < \zeta < 1$  pa nisu potrebne korekcije.

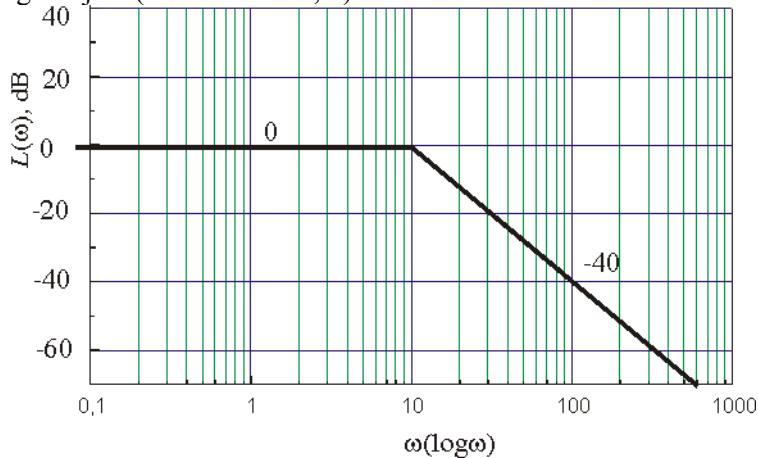
### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

AFK oscilatornog elementa se konstruiše na osnovu izraza (3.38) i (3.39) u polarnom ili u Dekartovom koordinatnom sistemu ( $\text{Re}W(j\omega)$ ,  $\text{Im}(W(j\omega))$ ), rastavljajući  $W(j\omega)$  na realni i imaginarni deo. Tako se dobija:

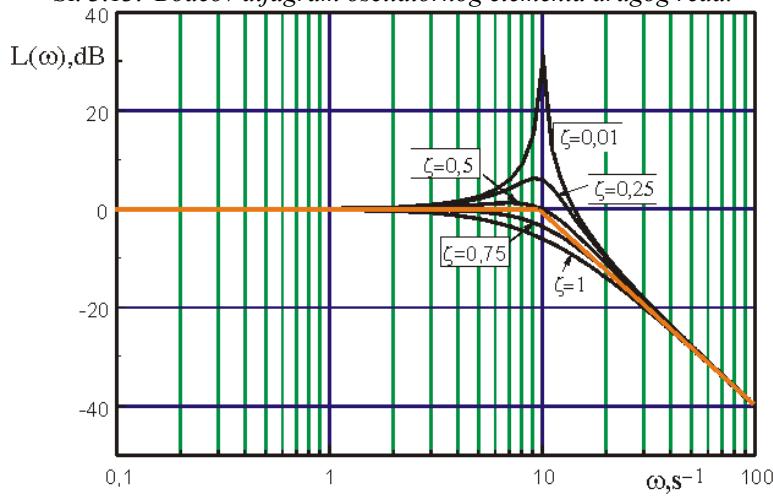
$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 T^2}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2} - j \frac{2\zeta T \omega}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}.$$

Zadavajući vrednosti za  $\omega$  može se konstruisati AFFK. Ona je za razmatrani slučaj data na sl. 3.15. Iz nje se vidi da ona zahvata dva kvadranta: IV i III, da veličina amplitude zavisi od faktora  $\zeta$ , te da se faza menja od 0 do  $-\pi$ .

Tipični predstavnik oscilatornog elementa drugog reda u elektrotehnici je redna veza kalema ( $L$ ), kondenzatora ( $C$ ), i otpornika  $R$ , a u mehanici sistem koji se sastoji iz tela mase  $m$ , opruge koeficijenta krutosti  $k$  i prigušivača viskoznog trenja  $b$  (kao na sl. 2.3a,b ).



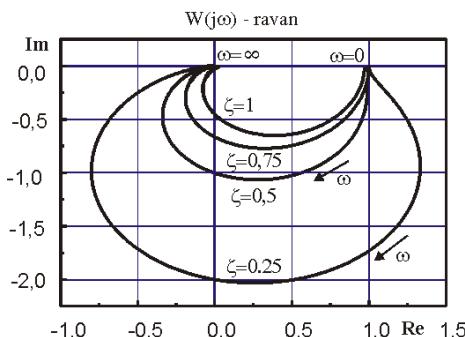
Sl. 3.13. Bodeov dijagram oscilatornog elementa drugog reda.



Sl. 3.14. Stvarni logaritamski dijagrami oscilatornog elementa drugog reda za različito  $\zeta$  i Bodeov asimptotski dijagram.

### 3.3.7 Predikcioni element drugog reda

Prenos ovog elementa je  $W(s) = s^2 T^2 + 2\zeta Ts + 1$ . AFK i FFK su "slika u ogledalu", u odnosu na  $\omega$ -osu, odgovarajućih karakteristika oscilatornog elementa drugog reda. I ovaj element se ne može praktično realizovati.



Sl. 3.15. Amplitudno-fazne karakteristike oscilatornog elementa drugog reda za različito  $\zeta$  i  $\omega_n = 10 \text{ s}^{-1}$ .

**3.3.8 Element transportnog (čistog) kašnjenja** prenosi neizobličene signale s ulaza na izlaz, nakon nekog vremena čistog kašnjenja. Brojni su primeri elemenata koji se mogu identifikovati funkcijom prenosa  $e^{st}$ . Tu, najpre, treba istaći transportnu traku za prenos materijala; zatim liniju za kašnjenje u TV tehnici, magnetofon, računar; topotne procese i procese prenosa mase koji se mogu približno identifikovati kao redna veza inercijalnog elementa i elementa transportnog kašnjenja.

Impulsni/odskočni odziv ovog elementa su Dirakova/Hevisajdova funkcija zakašnjeni za vreme  $\tau$ , tj. pomerene po osi vremena za iznos  $\tau$ . Fazno frekvenčna karakteristika je

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau,$$

što znači da se fazni pomak neprekidno linearno povećava s porastom frekvenčije. Kako je amplituda izlaznog signala ista kao amplituda ulaznog, amplitudno-fazna karakteristika ovog elementa je krug jediničnog radijusa. Bodeov dijagram ovog elementa se poklapa s  $\omega$ -osom.

### 3.3.9 Nestabilni i neminimalno fazni elementi

Kao što je ranije rečeno, nestabilni i neminimalno fazni elementi imaju iste AFK kao i njihovi stabilni i minimalno fazni ekvivalenti. Jedino im se razlikuje FFK, pa samim tim razlikuje im se i AFFK. Navećemo primer nestabilnog elementa - analoga inercijalnom elementu, čiji je prenos  $W(s) = (1 - sT)^{-1}$ .

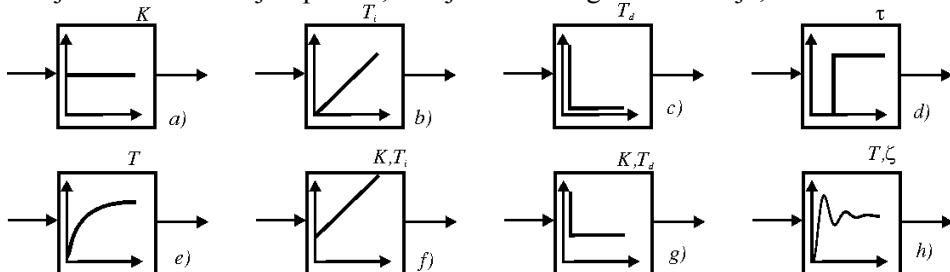
Njegova AFK je kao na sl. 3.4d, Bodeov dijagram slabljenja je kao na sl. 3.5a, FFK kao na sl. 3.7b, a AFFK kao slika "u ogledalu", u odnosu na realnu osu, karakteristike na sl. 3.4c.

Za ostale nestabilne ili neminimalno-fazne elemente čitaoci mogu sami konstruisati odgovarajuće karakteristike.

Može se steći utisak da je suviše pažnje poklonjeno navedenim osnovnim elementima automatike i njihovim karakteristikama. Pored toga, što su to elementi pomoću kojih se sistem može komponovati, odnosno na koje se on može dekomponovati, ističemo da se u tehničkoj literaturi, koja je pod uticajem nemačke škole automatike, u struktturnim blok-šemama sistema ne navode funkcije prenosa, već odskočni odzivi sastavnih elemenata. Zbog toga ćemo na-

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

vesti grafičke oznake najčešće susretanih elemenata i nekih njihovih kombinacija važnih za teoriju i praksu, o kojima će biti govora kasnije, sl. 3.16.



Sl. 3.16. Označavanje proporcionalnog (a), integralnog (b), diferencijalnog (c), elementa transportnog kašnjenja (d), inercijalnog elementa prvog reda (e), proporcionalno-integralnog (f), proporcionalno-diferencijalnog (predikcionog) (g) i osculatornog elementa drugog reda (h), po nemačkim standardima.

#### 3.3.1 Konstrukcija Bodeovih dijagrama sistema

Vratimo se, sada, konstrukciji Bodeovih asimptotskih dijagrama slabljenja i faze sistema sastavljenih od više osnovnih elemenata. Ovde postoje dva prilaza. Prvi je da se, posle dekomponovanja sistema na osnovne elemente i konstrukcije asimptotskih dijagrama svakog od njih, izvrši sumiranje ordinata sastavnih elemenata na istim frekvencijama. Ovom prilazu nisu potrebna dodatna pojašnjenja. Preporučuje se čitaocima da to sami urade. Drugi prilaz je praktičniji i biće detaljnije obrazložen.

Najpre se uočava tip sistema. Postoje dva tipa: *statički* i *astatički*. Prvi, za razliku od drugog, ne sadrži integracione elemente. Zatim se izračunaju *prelome frekvencije*, na osnovu datih vremenskih konstanti sastavnih elemenata. Prvo se konstruiše tzv. *niskofrekvenčska asimptota* čiji nagib zavisi od tipa sistema i iznosi  $r=20 \text{ dB/dek}$ , gde  $r$  označava stepen astatizma. Za statički sistem ( $r=0$ ) to je prava paralelna  $\omega$ -osi, na rastojanju  $20\log K \text{ dB}$  od nje. Za konstrukciju niskofrekvenčske asimptote astatičkih sistema ( $r \neq 0$ ), pored nagiba, potrebno je poznavati i jednu tačku na  $\omega$ -osi, koju nalazimo na sledeći način: niskofrekvenčski deo sistema se može napisati u obliku redne veze pojačavačkog (s Bodeovim pojačanjem sistema) i integracionih elemenata, tj.  $K / s^r$ , ili

$$L(\omega) = 20 \log K - r20 \log \omega.$$

Presek ove prave s  $\omega$ -osom se dobija iz relacije

$$L(\omega) = 0 \Rightarrow 20 \log K - 20 \log \omega^r = 0,$$

odakle sledi apscisa tačke preseka niskofrekvenčske asimptote:

$$\omega = \sqrt[r]{K}. \quad (3.40)$$

Za  $r=1$  (sistem astatizma prvog reda) je  $\omega = K$ , za sistem astatizma drugog reda je  $\omega = \sqrt{K}$  itd.

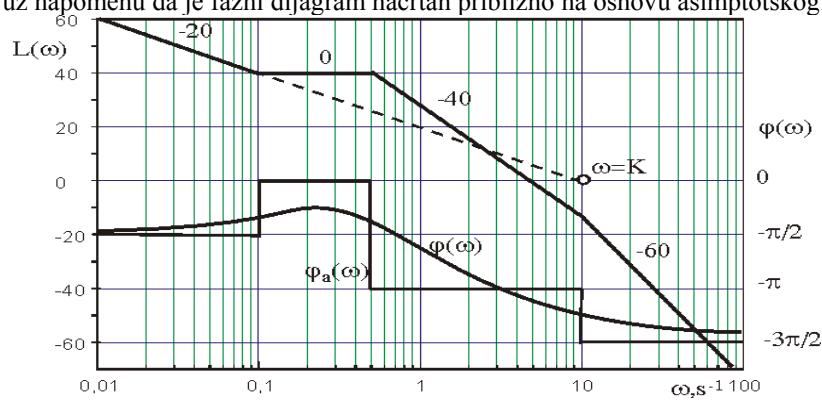
Posle konstrukcije niskofrekvenčne asimptote, koja se, najpre, ovlaš nacrtava isprekidanom linijom, uočava se sledeći, po redosledu prelomne frekvencije, element i njegov tip. Ako je taj element inercijalni element prvog reda, od njegove prelomne frekvencije, do prelomne frekvencije narednog po redosledu elementa, asimptota dijagrama slabljenja ima nagib od  $-20 \text{ dB/dek}$ , kod statičkih sistema, odnosno  $-(r+1)20 \text{ dB/dek}$ , kod sistema astatizma  $r$ -tog reda. Nasuprot ovome, ako je naredni po redosledu element predikcioni element prvog reda, asimptota ima nagib od  $+20 \text{ dB/dek}$ , odnosno  $(1-r)20 \text{ dB/dek}$ , respektivno. Naravno, ako je umesto inercijalnog/predikcionog elementa prvog reda sledeći po redosledu oscilatorni/predikcioni element drugog reda, onda su asimptote pod nagibom  $-40 \text{ dB/dek}$  ( $+20 \text{ dB/dek}$ ), odnosno  $-(r+2)20 \text{ dB/dek}$  /  $(2-r)20 \text{ dB/dek}$ , respektivno, itd. Fazni dijagram se najčešće konstruiše tačno na osnovu matematičke relacije ili približno, koristeći asimptotski fazni dijagram. Asimptotski fazni dijagram se dobija spajanjem faznih asimptota vertikalnim dužima, na prelomnim frekvencijama. Fazne asimptote su duži između susednih prelomnih frekvencija, paralelne  $\omega$ -osi, na rastojanju od nje za  $N\pi/40$  radijana, gde je  $N$  -nagib logaritamskog dijagrama slabljenja izražen u dB. Izloženu materiju ilustrovaćemo na jednom primeru.

**Primer 3.1.**  $W(s) = \frac{10(1+10s)}{s(1+0,1s)(4s^2 + 2s + 1)}$ . Sistem je astatički ( $r=1$ )

Bodeovim pojačanjem  $K=10$ . Sastoje se od pojačavačkog ( $K=10$ ), integracionog, inercijalnog ( $T_{in}=0,1 \text{ s}$ ), predikcionog ( $T_d=10 \text{ s}$ ), i oscilatornog elementa drugog reda ( $T=2 \text{ s}$ ,  $\zeta=0,5$ ). Njihove prelomne frekvencije su respektivno:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_d} = 0,1 \text{ s}^{-1}; \omega_2 = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ s}^{-1}; \omega_3 = \frac{1}{T_{in}} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

Kako sistem ima astatizam prvog reda, niskofrekvenčna asimptota je pod nagibom od  $-20 \text{ dB/dek}$ . i seče  $\omega$ -osu za  $\omega=K=10 \text{ s}^{-1}$ . Posle prve prelomne frekvencije deluje predikcioni element, posle druge - oscilatorni element drugog reda, a posle treće - i inercijalni element prvog reda. Na sl. 3.17 prikazani su Bodeovi dijagrami slabljenja i faze, uz napomenu da je fazni dijagram nacrtan približno na osnovu asimptotskog.



Sl. 3.17. Bodeovi dijagrami za sistem iz primera 3.1.

### 3.4 Procesi u linearnim SAU

Ovo poglavlje smo započeli izučavanjem kretanja linearnih sistema pod dejstvom pobudnih signala. Nazovimo to kretanje *procesom*. Pri tome smo najveću pažnju posvetili tipičnim normalnim odzivima sistema. Usput smo, pored priznudnog kretanja, definisali i autonomno (slobodno) kretanje sistema, koje se, bez spoljašnje pobude, odvija na račun nenultih početnih uslova.

Pre nego što pristupimo daljoj analizi procesa u linearnom sistemu, razmotrimo jedan prost primer sistema prvog reda.

**Primer 3.2.** Neka je dat sistem prvog reda opisan diferencijalnom jednačinom

$$\dot{x} = -ax + u, \quad c = x,$$

na koga u trenutku  $t=0$  deluje Hevisajdov jedinični odskočni signal  $u(t) = h(t)$ , pri čemu je sistem imao nenulte početne uslove  $x(0) \neq 0$ . Trba naći odziv sistema.

Primenimo Laplasovu transformaciju na datu diferencijalnu jednačinu radi rešenja postavljenog zadatka.

$$sX(s) - x(0) = -aX(s) + U(s), \quad U(s) = \frac{1}{s};$$

Rešavajući po  $X(s)$  dobija se:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+a} + \frac{1}{(s+a)s}.$$

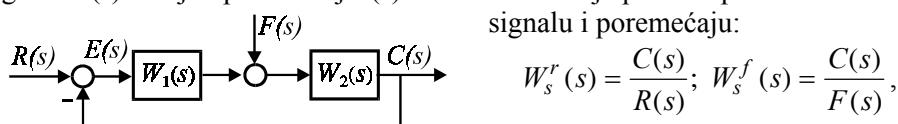
Primjenjujući inverznu Laplasovu transformaciju dobija se odziv sistema u vremenskom domenu:

$$c(t) = x(t) = x(0)e^{-at} + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})h(t).$$

U ovom primeru, u odzivu sistema, uočavamo tri komponente: prvu, uslovljenu nenultim početnim uslovima ( $x(0)e^{-at}$ ); drugu, koja isključivo zavisi od ulaznog pobudnog signala ( $(1/a)h(t)$ ), i treću koja zavisi od pobudnog signala i težinske funkcije ( $(1/a)e^{-at}h(t)$ ). Nazovimo ove komponente procesa: *slobodnim*, *prinudnim* i *prelaznim procesom*, respektivno. I u opštem slučaju, kod bilo kog sistema, kada jednovremeno deluju nulti početni uslovi i spoljašnja pobuda, istovremeno postoje sve tri komponente procesa. Ukoliko su početni uslovi nulti imaćemo samo dve komponente procesa: *prelazni proces* i *prinudni proces*. Isto tako, možemo uočiti da se komponenta prinudnog procesa dobija kao rešenje algebarske jednaine, nastale iz diferencijalne jednačine u kojoj su svi diferencijali anulirani.

Neka je data osnovna struktura sistema, sl. 3.18, u kojoj pored referentnog signala  $R(s)$  deluje i poremećaj  $F(s)$ . Neka su funkcije prenosa po referentnom

signalu i poremećaju:



$$W_s^r(s) = \frac{C(s)}{R(s)}; \quad W_s^f(s) = \frac{C(s)}{F(s)},$$

respektivno.

Sl. 3.18. Osnovna struktura SAU.

Kao što je ranije rečeno, odziv sistema na bilo koju pobudnu funkciju, pri nultim početnim uslovima, definiše se konvolucionim integralom. U ovom slučaju, prema sl. 3.18, odziv sistema je

$$c(t) = \int_0^t w_s^r(t-\tau)r(\tau)d\tau + \int_0^t w_s^f(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (3.41)$$

koga ćemo nazvati opštim procesom u sistemu.

Prinudni proces nastaje kada protekne dovoljno dugo vremena od trenutka pobude, tako da prelazni procesi u sistemu izčeznu (imamo u vidu samo stabilne sisteme). Radi definicije prinudnog procesa, možemo prepostaviti da je za takav proces pobudni signal delovao u trenutku  $t = -\infty$ . Tada imamo

$$c(t) = \int_{-\infty}^t w_s^r(\lambda)r(t-\lambda)d\lambda + \int_{-\infty}^t w_s^f(\lambda)f(t-\lambda)d\lambda \quad (3.42)$$

Uvodeći smenu  $t - \lambda = \tau$  dolazi se do relacije za prinudni proces:

$$c_\infty(t) = \int_0^\infty w_s^r(t-\tau)r(\tau)d\tau + \int_0^\infty w_s^f(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (3.43)$$

Prelazni proces se dobija kao razlika između opšteg procesa (3.41) i prinudnog procesa (3.43):

$$c_p(t) = - \int_t^\infty w_s^r(\tau)r(t-\tau)d\tau - \int_t^\infty w_s^f(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad (3.44)$$

gde su  $w_s^r(t)$ ,  $w_s^f(t)$  - odgovarajuće težinske funkcije sistema.

Komponente *prelaznog* i *slobodnog* procesa sistema imaju značajnu ulogu u definisanju stabilnosti SAU što ćemo pokazati u narednom poglavljju.

**Primer 3.3.** Za prethodni primer imamo

$$c(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} h(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} h(t-\tau)d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}).$$

Prinudni proces je

$$c_\infty(t) = \int_0^\infty e^{-a\tau} h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{a}.$$

Prelazni proces je

$$c_p(t) = - \int_t^\infty e^{-a\tau} h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_t^\infty = -\frac{1}{a} e^{-at}.$$

**Napomena:** Težinska funkcija u ovom primeru je  $w(t) = e^{-at}$ . Osim toga korišćena je poznata relacija (3.13):

$$\int_0^t w(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

### 3.5 Primena MATLAB-a za određivanje odziva

Za određivanje odziva sistema može se koristiti kako vremenski tako i kompleksni s- domen. U ovoj glavi je korišćen isključivo kompleksni domen pomoću koga se, primenom Laplasove transformacije, problem iz vremenskog domena (rešavanja diferencijalnih jednačina) prevodio u domen rešavanja algebarskih jednačina, a primenom inverzne Laplasove transformacije, rezultat prevodio u vremenski domen. Primenom MATLAB-a moguće je nalaziti rešenja kako u vremenskom tako i u kompleksnom domenu.

#### 3.5.1 Inverzna Laplasova transformacija

Najpre treba naznačiti da se uvode dve znakovne promenljive:  $s$  i  $t$  naredbom oblika **syms s t;** zatim se definiše funkcija prenosa sistema ( $W$ ) čiji odziv tražimo. Najzad naredbom: **ilaplace(W)** dobija se odziv sistema definisanog prenosom  $W$ .

**Primer.** Odrediti impulsni odziv sistema ( $W(s)=(3s+2)/(s^2+3s+2)$ ).

```
syms s t; W=(3*s+2)/(s^2+3*s+2); w=ilaplace(W)
w =
4*exp(-2*t)-exp(-t)
```

**Primer.** Odrediti odskočni odziv sistema iz prethodnog zadatka

```
syms s t; W=(3*s+2)/(s^3+3*s^2+2*s); j=ilaplace(W)
```

```
j =
1-2*exp(-2*t)+exp(-t)
```

**Primer**

```
>> syms s t; W = (3*s^2 + 4*s + 5) / (s^3 + 12*s^2 + 44*s + 48); w = ilaplace(W)
w =
-37/4*exp(-4*t)+9/8*exp(-2*t)+89/8*exp(-6*t)
```

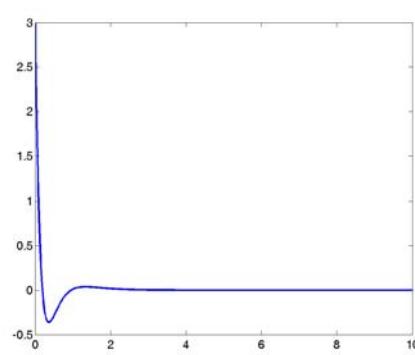
MATLAB može da da grafički prikaz odziva u vremenskom domenu. Naredba je oblika:

**t=tp:r:tk; ft= izraz; plot(t,ft);**

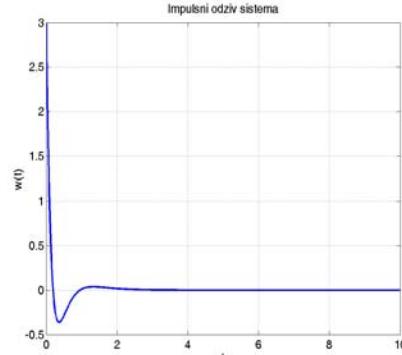
Ovde je tp -početno vreme, r - vremenski raster u kojima se računava odziv, tk - konačno vreme računanja odziva.

**Primer.** Prikazati grafik odziva sistema iz prethodnog zadatka

```
t=0:0.01:10;w=-37/4*exp(-4*t)+9/8*exp(-2*t)+89/8*exp(-6*t);plot(t,w)
```



Sl. 3.19



Sl.3.20

Ako želimo da nacrtamo mrežu i obeležimo koordinatne ose i naslov slike, tada možemo vršiti korekciju u meniju same slike ili treba program dopuniti tako da on postaje

```
t=0:0.01:10;w=-37/4*exp(-4*t)+9/8*exp(-2*t)+89/8*exp(-6*t);plot(t,w);
grid;xlabel('t');ylabel('w(t)');title('Impulsni odziv sistema')
```

U tom slučaju slika je kao na grafiku gore, desno.

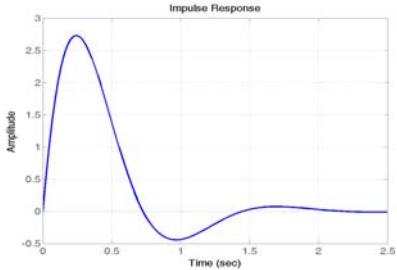
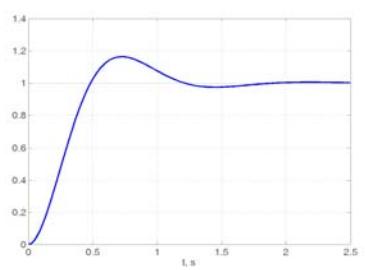
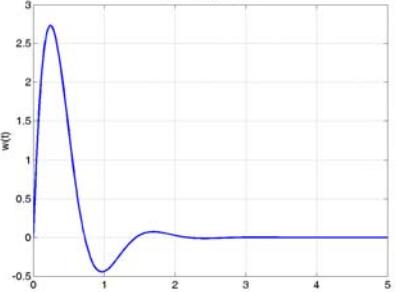
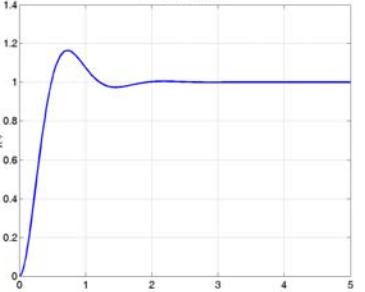
Često je ipak potrebno promeniti veličinu slova u labelama. To se može lako učiniti na osnovu menija na samoj slici odziva u MATLAB-u.

### 3.5.2 Impulsni i odskočni odziv sistema

Impulsni, odskočni i odziv sistema na bilo koju funkciju može se jednostavno dobiti na osnovu funkcije prenosa ne vršeći inverznu Laplasovu transformaciju. U tom slučaju se samo dobija grafik odziva a ne i njegov odziv u matematičkom obliku.

**Primer.** Primenom MATLAB-a nacrtati impulsni i odskočni odziv oscilatornog elementa koeficijenta relativnog prigušenja 0,5 i prirodne frekvencije oscilovanja  $5 \text{ s}^{-1}$ .

Funkcija prenosa je  $W(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ . Napišimo program na sledeći način:

Impulsni odziv	Odskočni odziv
<pre>s=tf('s');zeta=0.5;wn=5;Num=25; Den=s^2+2*zeta*wn*s+wn^2; W=Num/Den;impulse(W)</pre>	<pre>s=tf('s');zeta=0.5;wn=5;Num=25; Den=s^2+2*zeta*wn*s+wn^2; W=Num/Den;step(W)</pre>
	
Sl.3.21	Sl. 3.22
ili na sledeći način: <pre>s=tf('s');zeta=0.5;wn=5;Num=25; Den=s^2+2*zeta*wn*s+wn^2; W=Num/Den;step(W);t=0:0.01:5; w=impulse(W,t);plot(t,w)</pre>	ili na sledeći način: <pre>s=tf('s');zeta=0.5;wn=5;Num=25; Den=s^2+2*zeta*wn*s+wn^2; W=Num/Den;step(W);t=0:0.01:5; w=step(W,t);plot(t,w)</pre>
	
Sl. 3.23	Sl. 3.24

## Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

U prvom slučaju MATLAB je sam postavio vremensku granicu, kada se prema nekom kriterijumu proces već ustalio. U drugom slučaju mi smo sami izabrali vreme za koje želimo da posmatramo odziv.

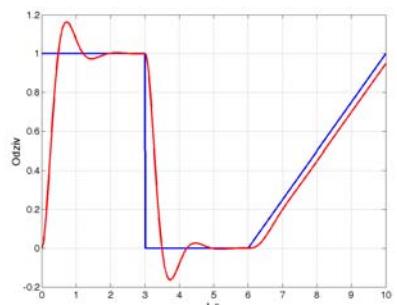
### 3.5.3 Odziv sistema na bilo koju pobudnu funkciju

Odziv na bilo koju funkciju dobija se naredbom u formi:  $y=lsim(W,u,t)$  gde je  $u$  - vektor ulaza sistema definisan u vremenskim trenucima vektorom  $t$ .

**Primer.** Odrediti odziv elementa iz prethodnog zadatka na složeni pobudni signal prikazan na slici 3.25 plavom bojom (pravougaoni impuls sa nagibnim signalom).

Najpre treba definisati vektor vremenskog signala i u istim trenucima vremena vektor pobudnog signala. Za složene pobudne signale mora se napraviti odgovarajući program za njihovo generisanje. Program za ovaj slučaj je sledeći:

```
s=tf('s');zeta=0.5;wn=5;Num=25;
Den=s^2+2*zeta*wn*s+wn^2;
W=Num/Den;step(W);t=0:0.01:10;
for i=1:length(t) u(i)=1;
    if (t(i)>3)&(t(i)<=6) u(i)=0;
end
    if (t(i)>6 )&(t(i)<=10) h(i)=1;
        u(i)=(t(i)-6*h(i))/4;
    end
end;
y=lsim(W,u,t)
plot(t,u,'b'); hold on;
plot(t,y,'r');hold off;
```



Sl. 3.25

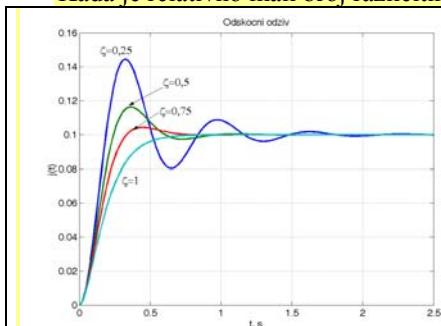
Kao rezultat dobija se odziv sistema prikazan crvenom bojom. Kao što se može primetiti označe 'b' i 'r' u naredbama plot označavaju boju grafika ('blue' i 'red'), a naredba **hold on** ima zadatak da sačuva grafik signala  $u$ , da bi na istom grafiku dobili i signal odziva  $y$ .

**Napomena:** Prikazani grafik je dorađivan u njegovom **edit** meniju. Osim toga, slika je eksportovana ne po difolto: **file export \*.emf**, već kao : **file export \*.tif**.

Grafici eksportovani u **\*.emf** formatu manje su čitljivi u dokumentu

**Primer:** Dat je oscilatorni element drugog reda  $W(s)=1/(s^2T^2+2\zeta Ts+1)$  sa  $T=0,1$  s. Primenom MATLAB-a nacrtati familiju odskočnih odziva za:  $\zeta=0,25; 0,5; 0,707$  i  $1$ .

Kada je relativno mali broj različitih varijanti odziva program bi bio sledeći:



Sl. 3.26. Familija odskočnih odziva oscilatornog elementa drugog reda za različite vrednosti  $\zeta$ .

```
T=0.1;
z1=0.25;N1=[0,T];D1=[T^2,2*z1*T,1];
z2=0.5;N2=[0,T];D2=[T^2,2*z2*T,1];
z3=0.707;N3=[0,T];D3=[T^2,2*z3*T,1];
z4=1;N4=[0,T];D4=[T^2,2*z4*T,1];
t=linspace(0,2.5,251);
[Y1,X1,t]=step(N1,D1,t);
[Y2,X2,t]=step(N2,D2,t);
[Y3,X3,t]=step(N3,D3,t);
[Y4,X4,t]=step(N4,D4,t);
plot(t,[Y1,Y2,Y3,Y4])
```

Naredbom  $t=linspace(0,2.5,251)$  definiše se vremenski interval od 0 do 2,5 s u 251

## Glava 3.: Odzivi elemenata i sistema

diskretnih ekvidistantnih tačaka, dok se naredbom: `plot(t,[Y1,Y2,Y3,Y4])` crta se vektor  $\mathbf{Y}=[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$  u funkciji vremena  $t$ . Rezultat se vidi na sl. 3.26.

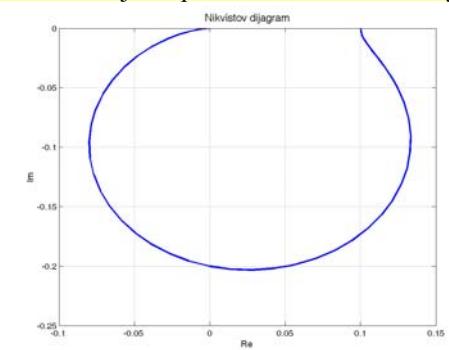
### 3.5.4 Primena MATLAB-a za crtanje AFFK (Nikvistove krive)

Za crtanje amplitudno-fazno-frekvencijske karakteristike (AFFK) MATLAB naredba je: `nyquist(Num,Den);`  
Za oscilatorni element iz prethodnog odeljka program bi bio sledeći:

```
T=0.1;zeta=0.25;Num=[0,0.1];
Den=[T^2,2*zeta*T,1];
nyquist(Num,Den)
```

Izvršenjem naredbe dobija se Nikvistova kriva, prikazana na sl. 3.27.

**Napomena 3.1:** MATLAB daje AFFK i za negativne frekvencije. Na slici 3.27 data je karakteristika samo za pozitivne frekvencije.



Sl. 3.27. Amplitudno-fazna-frekvencijska karakteristika oscilatornog elementa drugog reda dobijena pomoću MATLAB-a.

**Napomena 3.2:** Nikvistova kriva se može dobiti samo za pozitivne frekvencije ako se koriste sledeće naredbe:

`[A,F]=nyquist(Num,Den); plot(A,F)`

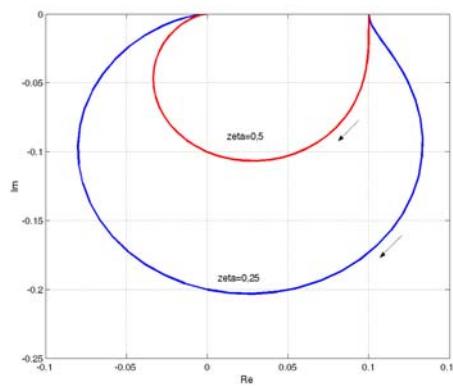
Par  $[A,F]$  predstavlja vektore numeričkih podataka o amplitudi ( $A$ ) i fazi ( $F$ ) Nikvistove krive.

Ako se želi da se na istom grafiku prikažu Nikvistove krive za različite parametre sistema set naredbi je, na primer za dve vrednosti parametra  $\zeta$ :  $\zeta_1=0.25$  i  $\zeta_2=0.5$ ;

$T=0.1$  s; Program je sledeći:

```
T=0.1;z1=0.25;z2=0.5;
N1=[0,T];D1=[T^2,2*z1*T,1];
N2=[0,T];D2=[T^2,2*z2*T,1];
[A1,F1]=nyquist(N1,D1);
[A2,F2]=nyquist(N2,D2);
plot(A1,F1,A2,F2)
```

Kao rezultat dobija se crtež kao na sl. 3.28.



Sl. 3.28. Familija Nikvistovih krivih dobijena primenom MATLAB-a.

### 3.5.5 Primena MATLAB-a u konstrukciji Bodeovih dijagrama

Za konstrukciju (crtanje) Bodeovih dijagrama savremeni inženjeri koriste personalni računar i programski paket MATLAB - Control System Toolbox. U mat-fajlu najpre treba uneti podatke o funkciji prenosa čije dijagrame želimo da nacrtamo. Funkcija prenosa se definije pomoću vektora parametara brojioča (Num) funkcije prenosa i vektora njenog imenioca (Den). Ovi vektori predstavljaju koeficijente polinoma u

brojiocu (imeniocu) poređani počev od koeficijenta najvišeg stepena promenljive  $s$ . Pri tome mora da se upisuje vrednost koeficijenta 0 ako neki stepen promenljive  $s$  odsustvuje u izrazu za brojoc (imenioc). Prenos je, dakle, potrebno imati u nefaktorizovanom obliku. Ako je model dat u faktorizovanom obliku, on se najpre naredbom

**[Num, Den]=zp2tf(Z,p,k)**

prevodi u nefaktorizovan oblik. Zatim se naredbom

**bode(Num,Den)**

dobijaju Bodeovi dijagrami.

Za primer 3.1, funkciju prenosa treba napisati u obliku

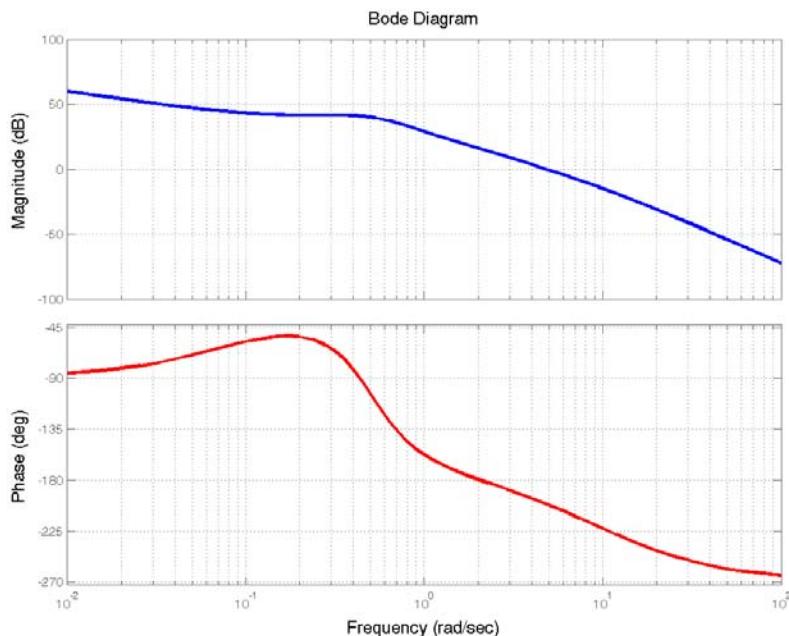
$$W(s) = \frac{10s + 100}{0.4s^4 + 4.2s^3 + 2.1s^2 + s}.$$

Sada je

**Num=[100,10];Den=[0.4,4.2,2.1,1,0];  
bode(Num,Den)**

Posle izvršenja naredbe dobijaju se Bodeovi dijagrami kao na sl. 3.29.

Treba napomenuti da MATLAB daje tačne, a ne asimptotske dijagrame. Međutim, može se uočiti da postoji veliki stepen slaganja između dijagrama na sl. 3.17 i 3.29.



Sl. 3.29. Bodeovi dijagrami dobijeni primenom MATLAB-a.

## LITERATURA

- [1] Воронов, А. А.: **Основы теории автоматического управления: автоматическое управление непрерывных линейных систем**, «Энергия», Москва, 1980.
- [2] Clarc, R. N.: **Introduction to Automatic Control Systems**, Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1962.
- [3] Гольдфарб, Л. С.: **Конспект лекции по курсу теории автоматического управления**, МЭИ, Москва, 1962.
- [4] Gupta, S. C., Hasdorff, L.: **Fundamental of Automatic Control**, Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1970.
- [5] D'azzo, J. j., Houps, C. H.: **Linear Control Systems Analyzis and Design**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
- [6] Kuo, B. C.: **Automatic Control Systems**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [7] Netushil, A. V. (Ed.): **Theory of Automatic Control**, Mir Publisher, Moscow, 1978.
- [8] Stojić, M. R.: **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, Nauka, Beograd, 1996.
- [9] Цыпкин, Я. З.: **Основы теории автоматических систем**, Наука, Москва, 1977.
- [10] Milosavljević, Č.: **Osnovi automatike, I deo: Linearni vremenski kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, Univerzitet u Nišu-Elektronski Fakultet, 2002.
- [11] Milosavljević, Č.: **Osnovi automatike** (vremenski kontinualni SAU). **Metodička zbirka zadataka**, Elektronski fakultet u Nišu, 1995.
- [12] Ćalasan, L., Petkovska, M.: **MATLAB i dodatni moduli Control System Toolbox i SIMULINK**, Mikro knjiga, Beograd, 1995.
- [13] Karris, T. S.: **Circuit Analysis II with MATLAB Application**, Orchard Publications, 2003.

## Pitanja za samopроверu

1. *Po definiciji, odziv elementa (sistema) je njegova \_\_\_\_\_ posmatrana na \_\_\_\_\_ na signal doveden na \_\_\_\_\_ tog elementa (sistema).*
2. *Kretanje sistema može nastati usled \_\_\_\_\_ početnih uslova, ili usled delovanja spoljašnjih \_\_\_\_\_.*
3. *Ako se kretanje sistema odvija samo na račun početnih uslova tada kažemo da je sistem \_\_\_\_\_.*
4. *Kretanje sistema samo zbog delovanja spoljašnjih sila nazivamo \_\_\_\_\_ sistema.*
5. *Ustaljeno (stacionarno) kretanje nastaje kada \_\_\_\_\_ proces izčeze.*

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema

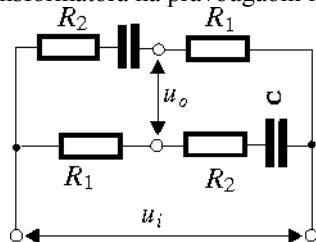
---

6. Tipični testirajući signali su: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
7. Normalni odziv sistema je odziv na neku pobudnu funkciju pri \_\_\_\_\_ početnim uslovima.
8. Impulsni odziv sistema je odziv na \_\_\_\_\_ pobudnu funkciju, a dobija se kao inverzna Laplasova transformacija \_\_\_\_\_ elementa (sistema).
9. Impulsni odziv sistema igra \_\_\_\_\_ ulogu u određivanju odziva sistema na bilo koju pobudnu funkciju i naziva se \_\_\_\_\_.
10. Odskočni odziv sistema je jednak \_\_\_\_\_ njegovog \_\_\_\_\_ odziva.
11. Impulsni odziv se može dobiti i kao \_\_\_\_\_ njegovog odskočnog odziva.
12. Frekvenčni odziv sistema je odziv sistema u \_\_\_\_\_ stanju na \_\_\_\_\_ pobudnu funkciju.
13. Frekvenčni odziv sistema se karakteriše dvema frekvenčnim karakteristikama i to: \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
14. Frekvenčna funkcija prenosa se može dobiti na taj način što se u funkciji prenosa sistema kompleksna promenljiva zameni sa \_\_\_\_\_.
15. Frekvenčna funkcija prenosa se može grafički predstaviti na više načina i to: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
16. Bodeovi dijagrami su specifičan oblik \_\_\_\_\_ -frekvenčnih i \_\_\_\_\_ -frekvenčnih \_\_\_\_\_ sistema.
17. Bodeovo pojašćanje sistema dobija se na osnovu funkcije \_\_\_\_\_ prenosa sistema tako što se u njoj kompleksna promenljiva zameni \_\_\_\_\_.
18. Stepen astatizma sistema predstavlja broj \_\_\_\_\_ u funkciji povratnog prenosa sistema.
19. Svaki sistem upravljanja se može dekomponovati na \_\_\_\_\_ vezu osnovnih elemenata automatike.
20. Osnovni elementi automatike su: bezinercijalni, \_\_\_\_\_.
21. Pod neminimalno-faznim elementima podrazumevaju se elementi koji imaju \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_ u \_\_\_\_\_ poluravnim s-ravni, kao i element \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) kašnjenja.
22. Odziv oscilatornog elementa drugog reda dominantno zavisi od \_\_\_\_\_ sistema.
23. Kada oscilatori element drugog reda ima  $\zeta=1$ , on se može dekomponovati na \_\_\_\_\_ rednu vezu dva \_\_\_\_\_ elementa prvog reda.

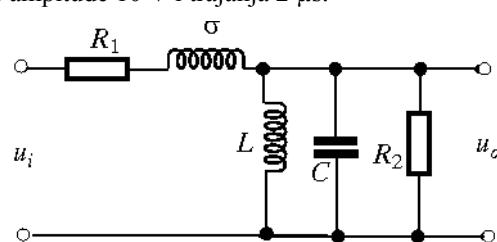
24. Dva osnovna elementa automatike se ne mogu fizički realizovati. Ti elementi su: \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_. Oni su uvedeni radi lakše konstrukcije \_\_\_\_\_ dijagraama.
25. Kod fizički ostvarivih sistema, relacija između stepena polinoma u brojiocu ( $m$ ) i stepena polinoma u imeniocu ( $n$ ) funkcije prenosa sistema je oblika \_\_\_\_\_.
26. Osnovni predstavnici osnovnih elemenata automatike su: bezinercijalnog - pojačavač; inercijalnog prvog reda - \_\_\_\_\_; oscilatornog drugog reda - \_\_\_\_\_; integracionog - \_\_\_\_\_; čistog (transportnog) kašnjenja - \_\_\_\_\_.
27. Vremenska konstanta inercijalnog elementa prvog reda može se odrediti kao vreme pri kome tangenta povučena u \_\_\_\_\_ na krivu odskočnog odziva preseca liniju \_\_\_\_\_.
28. Sistem je drugog reda i astatizma drugog reda. Ako je ovaj sistem obuhvaćen jediničnom negativnom povratnom spregom, njegov odskočni odziv imaće \_\_\_\_\_ karakter.
29. Sistem se sastoji iz redne veze bezinercijalnog elementa pojačanja  $K$ , i inercijalnog elementa prvog reda. Ako je taj sistem obuhvaćen jediničnom pozitivnom povratnom spregom on se može identifikovati kao redna veza pojačavačkog elementa pojačanja \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_ elementa.
30. Sistem je astatizma  $r \geq 1$ . Niskofrekvenčna asymptota Bodeovog dijagrama slabljenja sistema preseca apscisnu osu u tački  $\omega = _____$ .

### Zadaci za vežbu

1. Odredite frekvencijsku funkciju prenosa i normalni odskočni odziv četvoropola prikazanog na sl. 3.30.
2. Impulsni transformator, čija je ekvivalentna šema data na sl. 3.31, ima sledeće parametre:  $L=5$  mH,  $\sigma=40$   $\mu$ H,  $C=50$  pF,  $R_1=200$   $\Omega$ ,  $R_2=2$  k $\Omega$ . Odrediti odziv transformatora na pravougaoni impuls amplitude 10 V i trajanja 2  $\mu$ s.



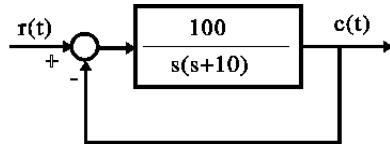
Sl. 3.30



Sl. 3.31

3. Odrediti signal greške u prelaznom i u ustaljenom stanju, kao i izlazni signal sistema sa sl. 3.32, ako na njegov ulaz deluje signal  $r(t) = h(t)\sin 10t$

### Glava 3.:Odzivi elemenata i sistema



Sl.. 3.32

4. Funkcija povratnog prenosa SAU sa jediničnom povratnom spregom je

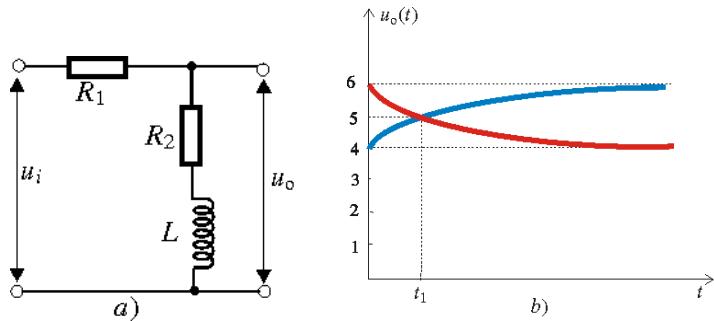
$$W_p(s) = \frac{24}{s(1 + 0,666\dots s)}.$$

Odrediti signal greške sistema ako na njegov ulaz deluje:

- a) odskočni signal  $r(t) = ah(t)$ ,  $a = \text{const}$ ,
- b) nagibni signal  $r(t) = bth(t)$ ,  $b = \text{const}$ .

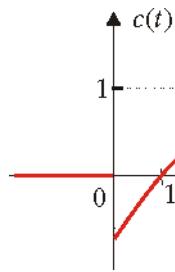
Kakav se zaključak može izvući iz rezultata?

5. Odskočni signal veličine 10 V doveden je u trenutku  $t=0$  na ulaz RL kola (sl. 3.33a). Odziv na dovedeni signal je u obliku jedne od krivih na sl. 4b. Odredite  $t_1$  i vrednost otpornika  $R_2$ , ako je  $R_1 = 500 \Omega$ ,  $L=2,764 \text{ H}$ .

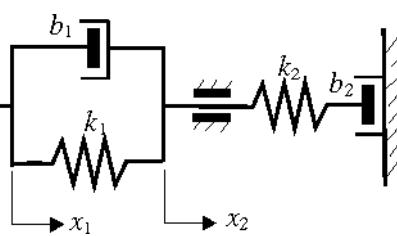


Sl. 3.33

6.  $c(t)$ , sl. 3.34, je signal snimljen na izlazu SAU kada se na njegov ulaz dovede jedinična odskočna funkcija  $h(t)$ . Odredite funkciju prenosa sistema.



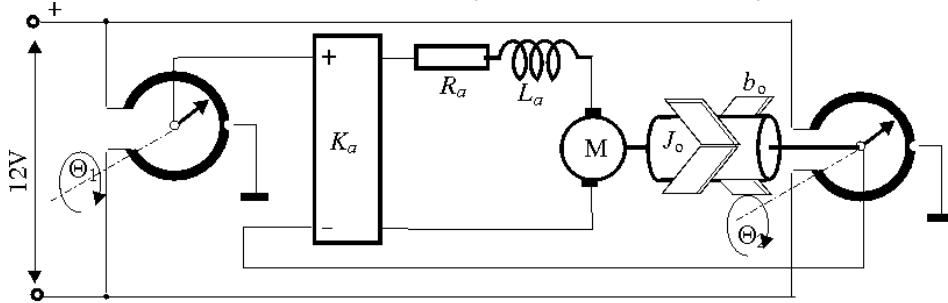
Sl. 3.34



Sl. 3.35

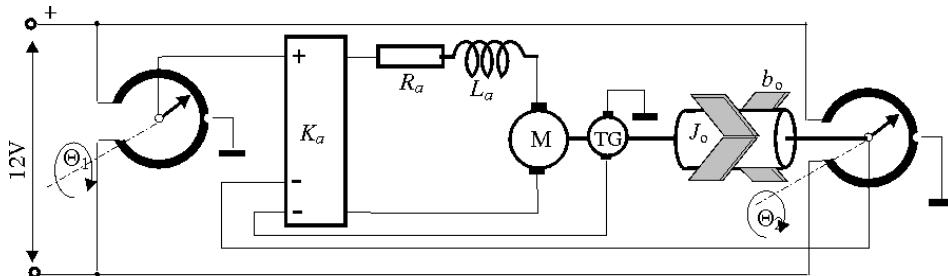
7. Odrediti normalni impulsni odziv mehaničkog sistema datog na sl. 3.35.  $x_1$  - ulaz,  $x_2$  - izlaz. Parametri sistema su:  $F_1/K_1 = 0,5 \text{ s}$ ,  $F_2/K_2 = 0,1 \text{ s}$ ,  $K_2/K_1 = 4$ .

8. Odrediti normalni impulsni odziv sistema datog na sl. 3.36 ako su parametri sistema: koristan ugao obrtanja potenciometra  $\Theta = 344^0$ ,  $K_a = 7 \text{ V/V}$ ,  $R_a = 1 \Omega$ ,  $L_a = 0 \text{ H}$ ,  $K_{em} = 0,02 \text{ Nm/A}$ ,  $K_{me} = 0,02 \text{ Vs/rad}$ ,  $J_m + J_o = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$ ,  $F_m + F_o = 10^{-9} \text{ Nms}$ .



Sl. 3.36

9. Kod sistema prikazanog na sl. 3.36 uvedena je tahometarska povratna sprega za stabilizaciju sistema. Šema takvog sistema data je na sl. 3.37. Parametri sistema su isti kao u prethodnom zadatku. Konstanta tahogeneratorske je  $K_{tg} = 0,04 \text{ Vs/rad}$ . Odrediti normalni impulsni odziv sistema. Kakav zaključak se može izvesti upoređivanjem ovog i prethodnog sistema?



Sl. 3.37

10. Za sistem u zadatu 3.36. nacrtati:

- amplitudno-faznu-frekvencijsku karakteristiku povratnog prenosa sistema;
- Bodeove dijagrame otvorenog sistema; c) amplitudno-frekvencijsku karakteristiku zatvorenog sistema; d) fazno-frekvencijsku karakteristiku zatvorenog sistema.

11. Za sistem u zadatu 3.37. nacrtati:

- amplitudno-faznu-frekvencijsku karakteristiku povratnog prenosa sistema;
- Bodeove dijagrame otvorenog sistema; c) amplitudno-frekvencijsku karakteristiku zatvorenog sistema; d) fazno-frekvencijsku karakteristiku zatvorenog sistema.

<b>Glava 4. STABILNOST LINEARNIH SAU</b>	75
<b>4.1 Pojam stabilnosti</b>	75
<b>4.2 Stabilnost linearnih SAU</b>	76
<b>4.2.1 Potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti linearnih SAU</b>	76
<b>4.2.2 Algebarski kriterijumi stabilnosti</b>	79
4.2.2.1 Hurvicov kriterijum stabilnosti	79
4.2.2.2 Rausov kriterijum stabilnosti	82
4.2.2.3 Haritonovljev kriterijum robustne stabilnosti	86
<b>4.2.3 Frekvencijski kriterijumi stabilnosti</b>	88
4.2.3.1 Košijeva teorema argumenta	88
4.2.3.2 Mihajlovlev kriterijum stabilnosti	90
4.2.3.3 Nikvistov kriterijum stabilnosti	92
4.2.3.3.1 Postupak skiciranja Nikvistove krive	94
4.2.3.3.2 Cipkinovo pravilo prelaza	96
4.2.3.3.3 Stabilnost sistema s transportnim kašnjenjem	97
4.2.3.3.4 Pretek faze i pretek pojačanja sistema	100
4.2.3.4 Bodeov kriterijum stabilnosti	101
<b>4.3 Primena MATLAB-a u analizi stabilnosti sistema</b>	103
<b>4.3.1 Određivanje korena karakteristične jednačine</b>	103
<b>4.3.2 Ispitivanje stabilnosti po Nikvistu</b>	104
<b>4.3.3 Ispitivanje stabilnosti po Bodeu</b>	104
<b>4.3.4 Određivanje preteka faze i preteka pojačanja</b>	105
<b>Literatura</b>	106
<b>Pitanja za samopроверu</b>	107
<b>Zadaci za vežbu</b>	109

## Glava 4.

# STABILNOST LINEARNIH SAU

### 4.1 Pojam stabilnosti

Zbog kružnog toka signala u petlji povratne sprege, SAU mogu biti doveđeni, pri određenim uslovima, u režim samooscilovanja ili nekontrolisanog povećanja upravljane veličine (signala greške), kao i drugih promenljivih veličina. Tada kažemo da je sistem nestabilan. S obzirom na to da svaki sistem poseduje neka ograničenja, na primer, energetske prirode, i kod sistema koje trećiramo kao linearne, "nekontrolisano povećanje" težiće nekoj graničnoj vrednosti. Ipak takvi sistemi nisu prihvatljivi iz dva razloga: (i) osnovni zadatak sistema - svođenje regulacionog odstupanja, po apsolutnoj vrednosti, na najmanju moguću vrednost (poželjno na nulu) - nije ostvaren; (ii) u sistemu mogu nastati havarije za čiju sanaciju je, često, potrebno uložiti znatna sredstva, a one mogu biti i uzročnici nenadoknadivih gubitaka - ljudskih žrtava. Stoga se problemu stabilnosti SAU mora posvetiti najveća moguća pažnja kao centralnom problemu teorije i prakse SAU.

Stabilnost (nestabilnost) je unutrašnja (sopstvena) osobina sistema. Ona se manifestuje samo pri kretanju sistema izazvanom kratkotrajnim ili stalnim delovanjem spoljašnjih sila. Stoga se mogu dati dve definicije stabilnosti sistema: *stabilnost stanja ravnoteže* (stabilnost autonomnih sistema) i *stabilnost pri delovanju ograničene po apsolutnoj vrednosti pobude* (stabilnost neautonomnih sistema):

1. SAU je stabilan ako se po izvođenju iz ravnotežnog stanja, bez uticaja spoljašnjih sila vraća u to ravnotežno stanje ili u njegovu blisku okolinu.
2. SAU je stabilan ako na ograničeni ulazni ima ograničen izlazni signal.

U literaturi na engleskom jeziku druga definicija stabilnosti se skraćeno naziva *BIBO stability* (*Boundary Input - Boundari Output*). Nazovimo ovaj tip stabilnosti *KUKI stabilnost* (*Konačan Ulaz - Konačan Izlaz*).

U prvom slučaju imamo u vidu autonomi sistem na koji je u nekom vremenskom trenutku delovala kratkotrajna pobuda (na primer, Dirakov impuls ili neki drugi vremenski ograničen signal, na primer, pravougaoni impuls). Posle prestanka delovanja pobude, sistem će se kretati pod dejstvom u sebi akumulirane energije (potencijalne i/ili kinetičke, električne i/ili magnetne). Ako se trenutak prestanka delovanja pobudnog signala usvoji za nulti trenutak posmatranja, tada se dalje kretanje sistema odvija autonomno (slobodno) bez delovanja spoljnih sila. Matematički gledano, kretanje se odvija na račun dejstva nenultih početnih uslova.

U drugom slučaju sistem je neautonoman, jer je podvrgnut delovanju spoljašnjih sila (drugih sistema). Usled toga on se kreće. Trenutak dovođenja pobude se može poistovetiti s delovanjem kratkotrajnog impulsa kao u prethodnom slučaju. Usled toga će u sistemu nastati dva tipa kretanja: *prelazni proces*, po osobinama sličan kretanju na račun nenultih početnih uslova, kao kod autonomnog sistema, koje smo nazvali *slobodno kretanje*, i kretanje usled stalno prisutnog pobudnog signala - *prinudno kretanje*. Postavlja se pitanje koje od ova dva kretanja definiše stabilnost? Odgovor se sam nameće iz prethodnog izlaganja i iz naziva drugog tipa kretanja. Prinudno kretanje diktiraju spoljašnje sile i one ne mogu biti odgovorne za unutrašnje osobine posmatranog sistema. Prema tome, jedino slobodna komponenta kretanja definiše osobine sistema u pogledu stabilnosti.

Međutim, problem nije jednostavan. Kod linearnih sistema osobina stabilnosti (nestabilnosti) ne zavisi od veličine ulaznog signala niti od dužine njegovog delovanja. Kod nelinearnih sistema, u opštem slučaju, osobine stabilnosti (nestabilnosti) zavise i od nivoa ulaznog signala. Sistem stabilan za neki ograničeni ulazni signal, može postati nestabilan za drugi ograničeni signal.

Za linearne SAU obe definicije su jednakovale, dok je za nelinearne prva definicija prihvatljivija. Na osnovu nje je ruski naučnik Ljapunov razvio moćnu teoriju stabilnosti, koja se može primeniti kako za linearne tako i za nelinearne sisteme. U udžbeničkoj literaturi se tradicionalno Ljapunovljeva teorija stabilnosti vezuje, uglavnom, za nelinearne sisteme. Zbog toga će ona biti izložena u kursu TAU-2.

Najpre ćemo, koristeći definiciju KUKI stabilnosti i Cipkinov prilaz [1], utvrditi potrebne i dovoljne uslove stabilnosti linearnih sistema s jednim ulazom i jednim izlazom, na osnovu poznavanja karakteristične jednačine sistema. Zatim ćemo obraditi najznačajnije kriterijume stabilnosti linearnih SAU.

## 4.2 Stabilnost linearnih SAU

### 4.2.1 Potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti linearnih SAU

Neka je dat linearan SAU, opisan funkcijom spregnutog prenosa  $W_s(s)$  ili odgovarajućom težinskom funkcijom  $w_s(t)$ . Neka je posmatrani sistem podvrgnut delovanju nekog ograničenog ulaznog signala, oblika

$$|r(t)| \leq R_o < \infty \text{ za } \forall t, \quad (4.1)$$

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

---

što implicira da je i

$$|r(t - \tau)| \leq R < \infty \text{ za } \forall t \geq \tau. \quad (4.2)$$

ograničen signal.

Koristeći konvolucioni integral, odziv sistema biće

$$c(t) = \int_0^t w_s(\tau) r(t - \tau) d\tau. \quad (4.3)$$

Ocenimo  $|c(t)|$ , na osnovu poznate relacije:

$$|c(t)| \leq \int_0^t |w_s(\tau)| |r(t - \tau)| d\tau, \quad (4.4)$$

koristeći prethodne izraze i puštajući da gornja granica integrala  $\rightarrow \infty$ , što nejednakost (4.4) pojačava, dobija se:

$$|c(t)| \leq R_o \int_0^\infty |w_s(\tau)| d\tau. \quad (4.5)$$

Jasno je da će odziv sistema biti ograničen ako je, pri ograničenom ulazu, ograničen integral u (4.5), tj. ako je ispunjen uslov

$$\int_0^\infty |w_s(\tau)| d\tau < \infty, \quad (4.6)$$

Na osnovu (4.6) zaključujemo:

**Apsolutna integrabilnost težinske funkcije je dovoljan uslov stabilnosti SAU.**

Pokažimo, polazeći od suprotnog, da je (4.6) istovremeno i potreban uslov stabilnosti. Neka težinska funkcija sistema nije absolutno integrabilna, tj.

$$\int_0^\infty |w_s(\tau)| d\tau = \infty, \quad (4.7)$$

i neka na sistem, pri fiksiranom  $t=t_o$  deluje ograničen ulazni signal oblika

$$r(t_o - \tau) = \operatorname{sgn} w_s(t). \quad (4.8)$$

Tada je na osnovu (4.3)

$$c(t_o) = \int_0^{t_o} w_s(\tau) \operatorname{sgn} w_s(\tau) d\tau = \int_0^{t_o} |w_s(\tau)| d\tau. \quad (4.9)$$

Vreme  $t_o$  može biti bilo koje, pa i  $\infty$ , što čini (4.9), na osnovu (4.7), neogničenim. Na taj način pokazano je da (4.6) nije samo dovoljan već i potreban uslov stabilnosti sistema. Na osnovu izloženog, sledi definicija stabilnosti linearnih sistema:

**Potreban i dovoljan uslov stabilnosti linearnog sistema je absolutna integrabilnost njegove težinske funkcije.**

Obratimo se sada prvoj definiciji stabilnosti sistema. Prelazni proces u sistemu je definisan relacijom (3.44):

$$c_p(t) = - \int_0^\infty w_s(\tau) r(t - \tau) d\tau. \quad (4.10)$$

Ocenjujući kao u prethodnom izlaganju, za ograničeni ulazni signal, absolutnu vrednost izlaza sistema

$$|c_p(t)| \leq R_o \int_0^\infty |w_s(\tau)| d\tau, \quad (4.11)$$

zaključujemo da će, ako je težinska funkcija sistema absolutno integrabilna, s

porastom vremena,  $t \rightarrow \infty$ , (4.11) težiti nuli. Na osnovu toga može se dati sledeća definicija stabilnosti linearnih sistema:

*Potreban i dovoljan uslov stabilnosti linearnih sistema s jednim ulazom i jednim izlazom je da prelazni proces u sistemu tokom vremena izčezava.*

Dobijeni uslovi nisu pogodni za praktičnu primenu, jer zahtevaju određivanje težinske funkcije i proveru njene apsolutne integrabilnosti, pa se zbog toga moraju potražiti drugi načini ispitivanja stabilnosti.

U cilju dobijanja drugih uslova stabilnosti, obratimo se definiciji funkcije prenosa sistema na osnovu težinske funkcije:

$$W_s(s) = \int_0^{\infty} w_s(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (4.12)$$

Posmatrajmo, kao i ranije, nejednakost:

$$|W_s(s)| \leq \int_0^{\infty} |w_s(\tau)| |e^{-s\tau}| d\tau, \quad (4.13)$$

za vrednosti kompleksne promenljive u desnoj poluravni  $s$ -ravni, uključujući i imaginarnu osu. Za tu oblast važi

$$|e^{-s\tau}| \leq 1, \quad (4.14)$$

pa je (4.13)

$$|W_s(s)| \leq \int_0^{\infty} |w_s(\tau)| d\tau. \quad (4.15)$$

S obzirom na to da je potreban i dovoljan uslov da sistem bude stabilan apsolutna integrabilnost njegove težinske funkcije, mora biti ispunjen i uslov da je  $|W_s(s)|$  u bilo kojoj tački desne poluravni  $s$ -ravni, uključujući i imaginarnu osu, ograničena funkcija. Taj uslov biće ispunjen ako i samo ako spregnuti prenos sistema nema polove u desnoj poluravni  $s$ -ravni niti na imaginarnoj osi. Prema tome:

*SAU biće stabilan ako i samo ako njegov spregnuti prenos ima sve polove u levoj poluravni  $s$ -ravni.*

Ranije smo pokazali da su polovi spregnutog prenosa istovremeno i nule karakterističnog polinoma (karakteristične jednačine) sistema. Stoga se poslednja definicija stabilnosti može konačno iskazati na sledeći način:

*Potreban i dovoljan uslov stabilnosti linearog SAU je da svi korenji njegove karakteristične jednačine,  $D(s) = 1 + W_p(s) = 0$ , leže u levoj poluravni  $s$ -ravni, tj. da imaju negativne realne delove, odnosno da su levi.*

Do istog rezultata može se doći i putem određivanja impulsnog odziva sistema (težinske funkcije) koristeći razvoj funkcije spregnutog prenosa u parcijalne razlomke ili Hevisajdov razvitetak. Kao rezultat dobiće se suma eksponencijalnih članova oblika  $A_k e^{s_k t}$ , gde su  $s_k$  - polovi spregnutog prenosa, a  $A_k$  - su kostantni koeficijenti. Očigledno je da će apsolutna integrabilnost težinske funkcije biti ostvarena ako impulsni odziv teži nuli. To će biti ostvareno samo ako svaka njegova komponenta teži nuli, odnosno kada polovi spregnutog prenosa imaju negativne realne delove, tj. kada su oni levi.

## Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

Na osnovu izloženog zaključujemo da je za ocenu stabilnosti dovoljno utvrditi raspored korena karakteristične jednačine sistema. Ako su svi koreni levi - sistem je stabilan. Postojanje makar i jednog desnog korena govori o nestabilnosti sistema.

U prethodnom izlaganju imaginarnu osu  $s$ -ravni smo pridružili desnoj poluravni. Ta osa se može posmatrati kao granica između stabilne - leve i nestabilne - desne poluravnih. Zbog toga je potrebno posebno definisati problem stabilnosti i u ovakvim slučajevima.

*Ako su svi koreni karakteristične jednačine sistema levi, osim jednog koji se nalazi na granici stabilnosti, u ishodištu  $s$ -ravni, tada kažemo da se sistem nalazi na aperiodičnoj granici stabilnosti.*

*Ako su svi koreni karakteristične jednačine sistema levi, osim jednog para imaginarnih, tada je sistem na oscilatornoj granici stabilnosti.*

Date definicije su polazna osnova za utvrđivanje stabilnosti linearnih sistema. Time je problem ocene stabilnosti definisan, ali nije i rešen. Naime, za utvrđivanje stabilnosti potrebno je odrediti položaj korena karakteristične jednačine u  $s$ -ravni. Karakteristična jednačina sistema je algebarska jednačina u opštem slučaju  $n$ -tog reda. Mi znamo da nalazimo korene jednačina prvog, drugog, pa i trećeg reda i neke specijalne tipove bikvadratnih jednačina. Prema tome, u opštem slučaju, stabilnost se ne može praktično proveriti putem analitickog rešavanja karakteristične jednačine sistema. Ovaj problem je zaokupljao naučnike u XIX i XX veku. Predložen je veći broj metoda za ocenu stabilnosti sistema bez rešavanja njegove karakteristične jednačine. Te metode se nazivaju *kriterijumi stabilnosti*. Oni se klasifikuju u dve grupe: *algebarske* i *grafo-analitičke (frekvencijske)*.

U praktičnoj primeni najčešće se primenjuju *Hurvicolov* i *Rausov algebarski kriterijumi stabilnosti*, kao i grafoanalitički, frekvencijski kriterijumi stabilnosti *Nikvista, Mihajlova* i *Bodea*.

### 4.2.2 Algebarski kriterijumi stabilnosti

#### 4.2.2.1 Hurvicov kriterijum stabilnosti (1894).

Hurvicolov kriterijum stabilnosti se zasniva na formiranju odgovarajuće Hurvicove matrice, na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma sistema i ispitivanja pozitivnosti dijagonalnih determinanti te matrice. Neka je dat karakteristični polinom sistema u obliku

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (4.16)$$

na osnovu koga treba utvrditi stabilnost sistema. Najpre treba ustanoviti da li dati polinom zadovoljava *potrebne uslove stabilnosti*. Oni se definišu sledećim iskazom:

*Karakteristični polinom (4.16) može imati sve leve korene samo ako su svi koeficijenti različiti od nule i istog znaka.*

*Pozitivnost svih koeficijenata karakterističnog polinoma garantuje da će svi realni koreni biti levi.*

Ovi iskazi se mogu relativno lako dokazati koristeći Vijetova pravila po kojima se polinom može predstaviti kao  $a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)$ , gde su  $s_i$ - njegovi korenji.

Ako su svi oni levi, njihovi realni delovi su negativni. Kada su svi koeficijenti karakterističnog polinoma realni, kompleksni korenji se javljaju u konjugovano-kompleksnim parovima. Kao rezultat naznačenog proizvoda dobiće se svi pozitivni koeficijenti karakterističnog polinoma ako su svi korenji levi, što je sasvim očigledno ako su korenji realni i negativni.

Ako su potrebni uslovi stabilnosti zadovoljeni, pristupa se utvrđivanju dovoljnih uslova, formiranjem Hurvicove,  $n \times n$ , matrice sledećeg oblika:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Način formiranja Hurvicove matrice je očigledan. Formira se tako što se po glavnoj dijagonali smeštaju koeficijenti karakterističnog polinoma po opadajućim indeksima, počev od koeficijenta uz  $s^{n-1}$  ( $a_{n-1}$ ) i završavajući s koeficijentom uz  $s^0$  ( $a_0$ ). Kolone Hurvicove matrice se sastoje iz koeficijenata s rastućim indeksima odozgo nadole. Vrste matrice se formiraju naizmenično (od svakog drugog koeficijenta) s opadajućim indeksima sleva nadesno. S obzirom da je Hurvicova matrica dimenzija  $n \times n$ , njeni elementi postaju nule kada nema koeficijenata polinoma s naznačenim indeksima.

Po formiranju matrice, za utvrđivanje dovoljnih uslova stabilnosti interesantne su samo dijagonalne determinante Hurvicove matrice, uokvirene u matrici (4.17): prvog, drugog, trećeg,...,  $n-1$  reda:

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-4} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \Delta_4; \dots$$

Dakle, potrebno je izračunati ukupno  $n-2$  determinante.

*Dovoljan uslov stabilnosti je da su sve dijagonalne determinante Hurvicove matrice pozitivne.*

*Sistem je na aperiodičnoj granici stabilnosti kada je  $a_0=0$ , a na oscilatornoj granici stabilnosti ako je  $\Delta_{n-1} = 0$ .*

*Ukoliko je bilo koja druga determinanta jednaka nuli, to ukazuje na nestabilnost sistema.*

Broj determinanti koje treba izračunati za utvrđivanje stabilnosti sistema reda  $n \geq 5$  može se skratiti na polovinu koristeći kriterijum stabilnosti Lenara-Šipara (1914.) koji su utvrdili da pozitivnost parnih determinanti Hurvicove

## Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

matrice automatski povlači i pozitivnost njenih neparnih determinanti, i obrnuto. Prema tome, broj determinanti koje treba sračunati svodi se na  $(n - 2)/2$ . Ali, svejedno, kod sistema visokog reda, računanje postaje glo-mazno. To se, naravno, može pojednostaviti primenom odgovarajućih algoritama i digitalnog računara, tako da se danas ovo ne može smatrati ozbiljnim nedostatkom Hurvicovog kriterijuma. Njegov osnovni nedostatak je nemogućnost jednostavne analize uticaja parametara na stabilnost sistema, a naročito nemogućnost određivanja stepena stabilnosti sistema, ako je on stabilan, i broja desnih korena karakterističnog polinoma, ako je sistem nestabilan. Iako ovaj kriterijum ima svojih nedostataka, on je ostavio duboke tragove u teoriji SAU. Tako, na primer, pod *Hurvicovim polinomom* u literaturi se podrazumeva polinom čiji su svi koreni levi.

Navećemo nekoliko primera radi ilustracije primene Hurvicovog kriterijuma stabilnosti i uočavanja osobina sistema nižeg reda.

**Primer 4.1.** Lako se proverava da polinomi prvog i drugog reda koji ispunjavaju potrebne uslove stabilnosti istovremeno zadovoljavaju i dovoljne uslove, tj.

*Sistemi I i II reda s koeficijentima karakterističnog polinoma istog znaka su uvek stabilni.*

**Primer 4.2.** Sistem trećeg reda ima karakterističnu jednačinu

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0.$$

Neka su potrebni uslovi stabilnosti:  $a_i > 0, i = \overline{0,3}$  ispunjeni. Tada Hurvicova matrica ima oblik

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

pa je dovoljno ispitati uslov  $\Delta_2 > 0$ , tj.

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \Rightarrow a_1a_2 > a_0a_3 \Rightarrow a_0 < \frac{a_1a_2}{a_3}.$$

*Sistem trećeg reda je stabilan ako je u karakterističnom polinomu proizvod unutrašnjih koeficijenata veći od proizvoda spoljašnjih koeficijenata.*

**Primer 4.3.** Direktni prenos sistema s jediničnom negativnom povratnom spregom je

$$W(s) = K[\prod_{i=1}^3(1+sT_i)]^{-1}.$$

Utvrđiti uslove stabilnosti sistema koristeći Hurvicov kriterijum stabilnosti i odrediti minimalno pojačanje  $K$  u funkciji vremenskih konstanti sistema  $T_i$ .

Sistem je trećeg reda.  $W_p(s) = W(s)$ . Karakteristična jednačina sistema je

$$\prod_{i=1}^3(1+sT_i) + K = 0 \Rightarrow \frac{T_1T_2T_3 s^3}{a_3} + \frac{(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)s^2}{a_2} + \frac{(T_1 + T_2 + T_3)s}{a_1} + K + 1 = 0$$

Na osnovu prethodnog zadatka nalazimo uslov

$$K < \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 + T_2 + T_3) - 1 \Rightarrow K < \left( 1 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} \right) \left( 1 + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} \right) - 1.$$

Kao što se vidi, pojačanje sistema zavisi ne od apsolutne veličine vremenskih konstanti, već od njihovih odnosa. Minimalna vrednost pojačanja se dobija kada su sve tri vremenske konstante iste i iznosi  $K_{\min} = K_{kr} = 8$ , kada je sistem na granici stabilnosti. Kritično pojačanje će biti utoliko veće ukoliko su odnosi vremenskih konstanti veći.

#### 4.2.2.2 Rausov kriterijum stabilnosti (1877.)

Rausov kriterijum je opštiji od Hurvicovog kriterijuma. Hurvicov kriterijom stabilnosti se može izvesti iz Rausovog kriterijuma [5]. Osnovna prednost nad Hurvicovim kriterijumom je mogućnost određivanja broja desnih korena karakterističnog polinoma, ako je on nestabilan. Ovaj podatak je veoma važan kod utvrđivanja stabilnosti višekonturnih sistema primenom Nikvistovog kriterijuma stabilnosti, što ćemo videti kasnije.

Rausov kriterijum se zasniva na formiranju odgovarajuće tabele - *Rausove tabele* - na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma. U udžbeničkoj literaturi postoje različiti prilazi formiranju Rausove tabele. Prikazaćemo prilaz iz [2,5].

Neka je dat karakteristični polinom sistema (4.16). Formirajmo Rausovu tabelu tako što ćemo prve dve vrste dobiti međusobnom zamenom mesta prve dve vrste Hurvicove tabele. Ostale njene vrste se formiraju na osnovu dve vrste koje im prethode na način prikazan relacijama (4.18). Posle primene ove procedure dobija se Rausova tabela (primer je dat za karakteristični polinom 6-tog reda).

U zaglavljtu tabele je napisan karakteristični polinom. S leve strane tabele, levo od vertikalne crte, je ispisana kolona sa stepenima kompleksne promenljive  $s$ , od  $s^6$  do  $s^0$  koja nam ukazuju na to koliko vrsta ima Rausova tabela (ima  $n+1$  vrstu).

	$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$		
$s^6$	$a_6$	$a_4$	$a_2$
$s^5$	$a_5$	$a_3$	$a_1$
$s^4$	$A_1$	$A_2$	$a_0$
$s^3$	$B_1$	$B_2$	
$s^2$	$C_1$	$a_0$	
$s^1$	$D_1$		
$s^0$	$a_0$		

$$A_1 = \frac{a_4 a_5 - a_3 a_6}{a_5}; A_2 = \frac{a_2 a_5 - a_1 a_6}{a_5}, A_3 = \frac{a_0 a_5 - 0 \cdot a_6}{a_5} = a_0,$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_3 - A_2 a_5}{A_1}; B_2 = \frac{a_1 A_1 - a_0 a_5}{A_1}; B_3 = 0; C_1 = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1};$$

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

$$C_2 = \frac{a_0 B_1 - 0 \cdot A_1}{B_1} = a_0; D_1 = \frac{C_1 B_2 - a_0 B_1}{C_1}; D_1 = \frac{a_0 D_1 - 0 \cdot C_1}{D_1}.$$

Po formiranju tabele, za zaključivanje o stabilnosti sistema važna je samo prva kolona Rausove tabele - *Rausova kolona*, uokvirena u tabeli (4.18). Bez obzira na red sistema, postupak formiranja Rausove tabele ide ukazanim redosledom. Na datom primeru se uočava da se elementi Rausove kolone dobijaju na osnovu koeficijenata karakteristične jednačine i Hurvicovih determinanti. Treći član Rausove kolone je Hurvicova determinanta drugog reda  $\Delta_2$  podeљena koeficijentom  $a_5 = \Delta_1$ , tj.:  $\Delta_2 / \Delta_1$ . Četvrti član je odnos  $\Delta_3 / \Delta_2$ , peti  $\Delta_4 / \Delta_3$ , šesti:  $\Delta_5 / \Delta_4$ , sedmi:  $\Delta_6 / \Delta_5$ . Ako je ispunjen potreban uslov stabilnosti ( $\forall a_i > 0$ ) i dovoljan uslov stabilnosti po Hurvicu ( $\forall \Delta_i > 0$ ) onda će svi članovi Rausove kolone biti pozitivni. Stoga kriterijum Rausa glasi:

*Dovoljan uslov stabilnosti sistema je da su svi članovi Rausove kolone istog znaka.*

*Ako članovi Rausove kolone nisu istog znaka, sistem je nestabilan, a broj promena znaka u Rausovoj koloni jednak je broju desnih korena karakterističnog polinoma.*

Pri sastavljanju Rausove tabele, u cilju pojednostavljenja postupka računanja, dozvoljeno je, pri formiranju vrsti, sve članove vrste koja se formira množiti istim pozitivnim brojem. Obično se množenje vrši apsolutnom vrednošću člana Rausove kolone koji prethodi vrsti koja se formira, jer se po datoj proceduri svi članovi posmatrane vrste dobijaju deljenjem s tim članom.

Može se dogoditi da je član Rausove kolone koji prethodi vrsti koja se formira jednak nuli, što dovodi do deljenja s nulom. U tom slučaju se taj član zamjenjuje opštim brojem i formiranje Rausove tabele se nastavlja s njim. Po formiranju Rausove kolone, pusti se da taj opšti broj teži nuli i dobijaju granične vrednosti njenih članova. S obzirom da su u Rausovoj koloni bitni znaci, postupak utvrđivanja stabilnosti ili broja desnih korena se sprovodi kako je napred definisano.

S obzirom da se pretposlednji član Rausove kolone dobija deljenjem Hurvicove determinante  $\Delta_{n-1}$  s determinatom  $\Delta_{n-2}$ , ako je  $\Delta_{n-1} = 0$  (sistem je po Hurvicu na oscilatornoj granici stabilnosti) onda će i pretposlednji član Rausove kolone biti jednak nuli. Prema tome:

*Ako je član Rausove kolone koji odgovara vrsti  $s^1$  (pretposlednji član) jednak nuli, sistem se po Rausu nalazi na oscilatornoj granici stabilnosti. Frekvencija samooscilovanja sistema se tada određuje iz izraza*

$$\omega = \sqrt{\frac{a_0}{R_{s^2}}}, \quad (4.19)$$

*gde je  $R_{s^2}$  - vrednost člana Rausove kolone koji odgovara vrsti  $s^2$ , a  $a_0$  - slobodni koeficijent karakterističnog polinoma.*

**Primer 4.4.** Karakteristični polinom sistema je

$$D(s) = 5s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + K.$$

Ispitati uslove stabilnosti sistema u odnosu na parametar  $K$ .

	$5s^5+4s^4+3s^3+2s^2+s+K$		
$s^5$	5	3	1
$s^4$	4	2	$K$
$s^3$	2	$4-5K$	Posle množenja sa 2
$s^2$	$20K-12$	$K$	Posle množenja sa 4
$s^1$	$(4-5K)-\frac{2K}{20K-12}$		
$s^0$	$K$		

Na osnovu formirane Rausove tablice, posmatrajući Rausovu kolonu zaključujemo:

Sistem će biti na aperiodičnoj granici stabilnosti za  $K=0$ , a na oscilatornoj granici stabilnosti ako su ispunjeni uslovi:

$$4-5K - \frac{2K}{20K-12} = 0 \Rightarrow 50K^2 - 69K + 24 = 0$$

$$K > 0,$$

$$20K - 12 > 0.$$

S obzirom na to da prva relacija nema realnih rešenja, sistem ne može biti na oscilatornoj granici stabilnosti.

Sistem će biti stabilan ako su istovremeno ispunjeni sledeći uslovi:

$$20K - 12 > 0 \Rightarrow K > \frac{3}{5},$$

$$4-5K - \frac{2K}{20K-12} > 0,$$

$$K > 0.$$

Kako ovaj sistem nejednačina nema zajednička rešenja posmatrani sistem nije stabilan za sva realna pojačanja  $K$ .

**Primer 4.5.** Karakteristični polinom sistema je

$$D(s) = s^4 + 0,5s^3 + 2s^2 + s + 10.$$

Ispitati stabilnost sistema.

	$s^4 + 0,5s^3 + 2s^2 + s + 10$	2	10
$s^4$	1	2	10
$s^3$	0,5	1	
$s^2$	$1 - 2 \cdot 0,5 = e \rightarrow 0$	10	
$s^1$	0,5		
	$e - 5 \rightarrow -\infty$		
$s^0$	$e$		
	10		

Ovde se, u toku formiranja Rausove tabele, u Rausovoj koloni javlja nulti član, koji je zamjenjen opštim brojem  $e$  i nastavljeno formiranje tabele. Nakon njenog formiranja pušteno je da  $e \rightarrow 0$ .

U Rausovoj koloni postoje dve promene znaka od 0 do  $-\infty$  i od  $-\infty$  do +10. Prema tome, sistem je nestabilan i njegova karakteristična jednačina ima dva desna korena.

## Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

$s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + 8$	
$s^4$	1 6 8
$s^3$	3 12
$s^2$	2 8
$s^1$	$e \rightarrow 0$
$s^0$	8

**Primer 4.6.** Karakteristični polinom sistema je

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + 8.$$

Ispitati stabilnost sistema.

Na osnovu Rausove tabele zaključujemo da je sistem na oscilatornoj granici stabilnosti. Frekvencija samooscilovanja je, na osnovu (4.19):

$$\omega = \sqrt{8/2} = 2 \text{ s}^{-1}.$$

Zaista, koren ovog polinoma su:  $-1, -2 \text{ i } \pm j2$ .

U ovom, kao i u prethodnom primeru, pri formiranju Rausove kolone pojavio se član nulte vrednosti, koji je zamenjen opštim brojem  $e$  i, prema preporuci, nastavljeno dalje formiranje Rausove tablice s tim opštim brojem. Prisustvo nule u Rausovoj koloni nije znak nestabilnosti sistema. Nestabilnost postoji samo ako postoji promena znaka članova Rausove kolone.

Može se dogoditi da pri formiranju Rausove tablice svi članovi jedne vrste budu jednaki nuli te dalje formiranje Rausove tabele dovodi do neodređenosti tipa 0/0. To ukazuje na postojanje parnih faktora u polinomu. Proces formiranja Rausove tabele se mora završiti u cilju konačne ocene stabilnosti. On se nastavlja tako što se na osnovu članova vrste koja prethodi nultoj vrsti formira pomoćni bikvadratni polinom stepena  $k$  koji odgovara indeksu  $s^k$  za označavanje vrsta u Rausovoj tabeli, a čiji su koeficijenti članovi te vrste. Na primer, vrsta koja prethodi nultoj vrsti ima indeks  $s^4$  a njeni članovi su  $b_1, b_2$  i  $b_3$ , s leva na desno. Tada je pomoćni polinom  $b_1s^4 + b_2s^2 + b_3$ . Diferenciranjem ovog polinoma po  $s$  dobija se polinom nižeg reda čiji koeficijenti zamenjuju članove posmatrane nulte vrste. Proces sastavljanja Rausove tabele se nastavlja na uobičajeni način. Ovo ćemo ilustrovati sledećim primerom.

**Primer 4.7.** Dat je karakteristični polinom

$$s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 8s + 4.$$

Ispitati stabilnost datog sistema.

S obzirom da su potrebni uslovi stabilnosti zadovoljeni, formiraćemo Rausovu tabelu (tabela R1)

$s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 8s + 4$	
$s^6$	1 5 8 4
$s^5$	2 8 8
$s^4$	1 4 4
$s^3$	0 0

Tabela R1

S obzirom na to da je vrsta  $s^3$  postala nulta vrsta, formiramo pomoćni polinom

$$s^4 + 4s^2 + 4$$

čijim diferenciranjem dobijamo

$$4s^3 + 8s.$$

Zato je vrsta  $s^3$  u Rausovoj tabeli:

$$\begin{matrix} & 4 \\ & 8 \end{matrix}$$

Međutim, ponovo smo dobili sve članove vrste  $s^1$  jednake nuli. Pomoćni polinom je sada  $2s^2 + 4$ , te je član vrste  $s^1$  umesto 0 broj 4.

Sada, konačno, Rausova tabela postaje (Tabela R3)

i proces se dalje nastavlja (tabela R2)				
$s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 8s + 4$				
$s^6$	1	5	8	4
$s^5$	2	8	8	
$s^4$	1	4	4	
$s^3$	4	8		
$s^2$	2	4		
$s^1$	0			

Tabela R2

$s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 8s + 4$				
$s^6$	1	5	8	4
$s^5$	2	8	8	
$s^4$	1	4	4	
$s^3$	4	8		
$s^2$	2	4		
$s^1$	4			
$s^0$	4			

Tabela R3.

Rausova tabela, R3, je sada kompletirana. Svi članovi Rausove kolone su istog znaka i sistem nije nestabilan, tj. nema nijedan desni koren. Međutim, s obzirom na proces formiranja sistem je na oscilatornoj granici stabilnosti i ima korene na  $j\omega$  osi i to dva para korena  $u \pm j\sqrt{2}$ . Takav sistem je praktično nestabilan.

Napomenimo da se u ovom primeru, kao i u prethodnom, kada je član Rausove kolone naspram  $s^1$  jednak nuli, proces formiranja može nastaviti zamenom s opštim brojem  $e$ , umesto po poslednjoj proceduri. Tada će u tabeli R3 taj član biti jednak nuli, što jasno ukazuje da je sistem na oscilatornoj granici stabilnosti. Zaista, na osnovu (4.19) je  $\omega = \sqrt{4/2} = \sqrt{2} \text{ s}^{-1}$ . Dati polinom se može razložiti na faktore:  $(s^2 + 2)^2(s^2 + 2s + 1)$  što jasno ukazuje na postojanje parnih faktora.

#### 4.2.2.3 Haritonovljev kriterijum robustne stabilnosti (1978.)

Prethodni algebarski kriterijumi stabilnosti (Hurvicov i Rausov) imaju jedan osnovni nedostatak - nemogućnost ocene stabilnosti kada se veći broj parametara sistema menja u unapred poznatim granicama. Iako smo, u prethodno datim zadacima, ocenjivali stabilnost pri promeni jednog ili više parametara (pojačanja i vremenskih konstanti), u suštini, posmatrali smo neke krajnje, granične vrednosti, pretpostavljajući da su one fiksirane. U realnim sistemima svi parametri, sadržani u koeficijentima karakteristične jednačine, mogu se menjati pod uticajem okoline (temperature, vlažnosti, pritiska, starenja). Osim toga, kataloški nominalni podaci za neki objekat (motor, na primer) su statističke veličine. Apsolutno se ne mogu naći dva sistema, proizvedena u istoj seriji, da imaju potpuno iste sve parametre. Zbog toga se može postaviti umereno pitanje: da li će sistem, projektovan s nominalnim kataloškim parametrima, biti stabilan u svim uslovima statističkog rasipanja parametara i njihove promene usled uticaja okoline i starenja. Reklo bi se, na prvi pogled, da je ovaj zadatak trivijalan, da je potrebno uzeti samo krajnje - "najgore slučajeve" - i na osnovu njih utvrditi stabilnost. Ako je sistem stabilan za te "najgore slučajeve" on će biti stabilan i za sve ostale. Ali, problem se, zapravo, sastoji u tome što izbor najgorih slučajeva nije trivijalan, a ispitivanje stabilnosti pri svim mogućim kombinacijama parametara je praktično nemoguće. Ovakav problem je prvi put

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

istako Zubov (1959.). Ruski naučnik Haritonov je predložio (1978.) veoma interesantno rešenje, koje, u početku, nije bilo prihvaćeno za publikovanje u jednom značajnom časopisu, pa je objavljeno u manje poznatom časopisu [8]. Nešto kasnije Haritonovljev prilaz postaje veoma poznat i priznat za ocenu robustne stabilnosti sistema. Haritonov je pokazao da se odgovarajućim izborom samo četiri granična karakteristična polinoma može oceniti stabilnost sistema pri svim mogućim promenama parametara sistema. Mi ćemo ovde, ne zalažeći u matematičke dokaze, dati postavku Haritonovljevog kriterijuma stabilnosti i navesti krajnji rezultat.

Neka je dat karakteristični polinom sistema (4.16), koga možemo, bez uticaja na njegove korene, preindeksacijom zapisati u obliku

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = \sum_{k=0}^n a_k s^{n-k}, \quad a_0 \neq 0, \quad (4.20)$$

i neka parametri polinoma imaju bilo koju vrednost u granicama

$$a_k \in [\underline{a}_k, \bar{a}_k], \quad k = \overline{0, n}, \quad (4.21)$$

gde oznake  $\underline{a}_k, \bar{a}_k$  - označavaju donju i gornju granicu  $k$ -tog koeficijenta karakterističnog polinoma.

Zadatak je odrediti uslove pri kojima će svi koreni svih polinoma datih sa (4.20) i (4.21) biti levi. Ovaj zadatak se rešava korišćenjem Haritonovljeve teoreme:

*Potreban i dovoljan uslov da sistem dat sa (4. 20) i (4. 21) ima sve leve korene je da četiri polinoma iz tog skupa, određena sledećim skupovima koeficijenata*

$$D_1(s): a_{n-2k}, a_{n-2k-1} = \begin{cases} \bar{a}_{n-2k}, \bar{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ parno,} \\ \underline{a}_{n-2k}, \underline{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$D_2(s): a_{n-2k}, a_{n-2k-1} = \begin{cases} \bar{a}_{n-2k}, \underline{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ parno,} \\ \underline{a}_{n-2k}, \bar{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$D_3(s): a_{n-2k}, a_{n-2k-1} = \begin{cases} \underline{a}_{n-2k}, \underline{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ parno,} \\ \bar{a}_{n-2k}, \bar{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$D_4(s): a_{n-2k}, a_{n-2k-1} = \begin{cases} \underline{a}_{n-2k}, \bar{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ parno,} \\ \bar{a}_{n-2k}, \underline{a}_{n-2k-1}, & \text{za } k \text{ neparno,} \end{cases}$$

*imaju sve leve korene.*

**Primer 4.8.** Dat je karakteristični polinom sistema

$$D(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3.$$

Ako se njegovi koeficijenti mogu menjati u granicama:

$$a_0 \in [2, 4], a_1 \in [5, 6], a_2 \in [1, 2], a_3 \in [5, 10],$$

ispitati stabilnost takvog sistema.

Sastavimo sledeću tabelu:

$k$	parno 0	neparno 1	$a_0, a_1, a_2, a_3$
$D_1(s): a_{3-2k}, a_{3-2k-1}$	$\bar{a}_3, \bar{a}_2$	$a_1, a_0$	2, 5, 2, 10
$D_2(s): a_{3-2k}, a_{3-2k-1}$	$\bar{a}_3, a_2$	$a_1, \bar{a}_0$	4, 5, 1, 10
$D_3(s): a_{3-2k}, a_{3-2k-1}$	$a_3, a_2$	$\bar{a}_1, \bar{a}_0$	4, 6, 1, 5
$D_4(s): a_{3-2k}, a_{3-2k-1}$	$a_3, \bar{a}_2$	$\bar{a}_1, a_0$	2, 6, 2, 5

Od navedena četiri polinoma samo je četvrti Hurvicov, pa sistem nije stabilan pri bilo kojoj kombinaciji parametara iz datih intervala.

#### 4.2.3 Frekvencijski kriterijumi stabilnosti

##### 4.2.3.1 Košijeva teorema argumenta

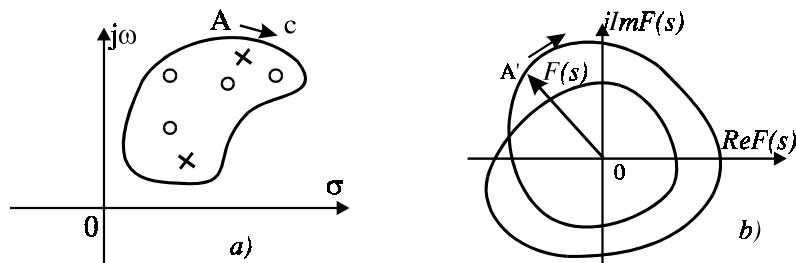
Osnovu frekvencijskih, grafoanalitičkih kriterijuma stabilnosti čini jedna teorema iz teorije funkcija kompleksne promenljive - *Košijeva teorema argumenta*. Ona se odnosi na oblast komfornih preslikavanja iz ravni kompleksne promenljive  $s = \sigma + j\omega$  u ravan funkcije kompleksne promenljive

$$F(s) = \operatorname{Re} F(s) + j \operatorname{Im} F(s). \quad (4.22)$$

Po Košijevu teoremi argumenta, kada se neka zatvorena kontura, recimo  $c$ , sl. 4.1a, u  $s$ -ravni, koja obuhvata  $N$ -nula i  $P$ -polova funkcije  $F(s)$ , a na samoj konturi nema ni nula niti polova  $F(s)$ , obide u izabranom smeru jedanput, tada će vrh vektora  $F(s)$  u  $F(s)$ -ravni, oko koordinatnog početka, opisati zatvorenu krivu, takvu da je promena argumenta funkcije  $F(s)$ :

$$\Delta \arg_c F(s) = (N - P)2\pi, \quad (4.23)$$

tj. vektor  $F(s)$  će napraviti  $(N-P)$  obrtaja oko koordinatnog početka, sl. 4.1b.



Sl. 4.1. Ilustracija Košijeve teoreme argumenta.

Kontura  $c$  u  $s$ -ravni (a) obuhvata  $N=4$  nula (označene kružićima) i  $P=2$  pola (označena krstićima). Kontura  $c$  se obilazi u smeru strelice, počevši od tačke  $A$ . U  $F(s)$ -ravni (b) vektor  $F(s)$ , čiji vrh polazi iz tačke  $A'$ , opisuje, u smeru strelice, zatvorenu krivu, čineći ukupan ugao od  $(N-P)2\pi=4\pi$ .

Razmotrimo dva posebna oblika kontura u  $s$ -ravni: jednu, koja obuhvata celu desnu, i drugu, koja obuhvata celu levu poluravan  $s$ -ravni, sl. 4.2a i b, respektivno. Neka se te konture obilaze u smeru strelica: desna u smeru kazaljke

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

na satu, a leva - u suprotnom, tj. pozitivnom smeru. Konture su podeljene na tri dela:  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$ , respektivno.

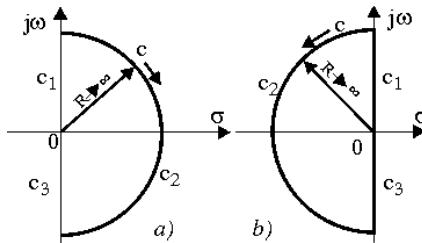
Neka je dat karakteristični polinom sistema  $D(s)$ . Neka on ima, u opštem slučaju,  $z$  nula u levoj i  $m$  nula u desnoj poluravni,  $z+m=n$ . Razmotrimo promenu argumenta  $D(s)$  kada se ove konture obilaze u izabranim smerovima i obratimo pažnju na činjenicu da  $D(s)$  nema polove.

Jasno je da je ukupna promena argumenta funkcije  $D(s)$  duž konture  $c$ , kada se ona jedanput obide u izabranom smeru, jednaka sumi promena argumenta duž izabranih delova konture:  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$ , tj.

$$\Delta \arg_c D(s) = \Delta \arg_{c_1} D(s) + \Delta \arg_{c_2} D(s) + \Delta \arg_{c_3} D(s). \quad (4.24)$$

Uzimajući u obzir specifičnost izabranih kontura, prethodna relacija se može napisati u obliku:

$$\Delta \arg_c D(s) = \Delta \arg_{\substack{D(j\omega) \\ 0 \leq \omega < \infty}} D(s) + \Delta \arg_{\substack{c_2 \\ -\infty < \omega \leq 0}} D(s) + \Delta \arg_{\substack{D(j\omega) \\ -\infty < \omega \leq 0}} D(s). \quad (4.25)$$



Sl. 4.2. Konture u  $s$ -ravni koje obuhvataju celu desnu (a) ili celu levu (b) poluravan, koje se obilaze u izabranim smerovima: a) u smeru kazaljke na satu (negativan smer) b) u smeru suprotnom od kazaljke na satu (pozitivan smer).

Dalje, kada se radi o  $D(s)$  s realnim koeficijentima, promena argumenta duž pozitivnog dela  $j\omega$ -ose je jednaka promeni argumenta duž njenog negativnog dela, pri kretanju u istom smeru. Osim toga, ponašanje polinoma  $D(s)$  duž polukruga beskonačnog radijusa, kada je  $s = R \cdot e^{j\theta}$ , može se zameniti ponašanjem njegovog člana s najvećim stepenom. Stoga se prethodna relacija može napisati u obliku

$$\Delta \arg_c D(s) = 2\Delta \arg_{\substack{D(j\omega) \\ 0 \leq \omega < \infty}} D(s) + \Delta \arg_{c_2} D(R^n e^{jn\theta}). \quad (4.26)$$

Primenimo sada ovu relaciju na konture u desnoj i levoj poluravni  $s$ -ravni.

a) **Desna poluravan**. S obzirom na to da u desnoj poluravni ima  $m$  nula  $D(s)$ , a nema polova, a osim toga je ukupna promena argumenta duž polukruga beskonačnog radijusa (odsečak  $c_2$ )  $n\pi$ , može se napisati:

$$\Delta \arg_c D(s) = 2\Delta \arg_{\substack{D(j\omega) \\ 0 \leq \omega < \infty}} D(s) + n\pi = m2\pi \quad (4.27)$$

ili

$$\Delta \arg_{\substack{D(j\omega) \\ 0 \leq \omega < \infty}} D(s) = -(n - 2m)\frac{\pi}{2}. \quad (4.28)$$

Uzimajući u obzir da je  $z + m = n \Rightarrow m = n - z$ , poslednja relacija se može napisati i u obliku

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} D(j\omega) = (n - 2z) \frac{\pi}{2}. \quad (4.29)$$

*b) Kontura u levoj poluravni.* Na isti način se dobija

$$\Delta \arg_c D(s) = 2\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} D(j\omega) + n\pi = z2\pi, \quad (4.30)$$

ili

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} D(j\omega) = -(n - 2z) \frac{\pi}{2}. \quad (4.31)$$

Uzimajući u obzir da je  $z + m = n \Rightarrow z = n - m$ , sledi

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} D(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}. \quad (4.32)$$

Relacije (4.29) i (4.32) su po obliku iste, jedino u izrazu za desnu poluravan učestvuju nule polinoma  $D(s)$  iz leve poluravni i obrnuto.

Iskoristićemo ove rezultate za dokazivanje Mihajlovljevog i Nikvistovog kriterijuma stabilnosti.

#### 4.2.3.2 Mihajlov kriterijum stabilnosti (1938.)

Koristeći konturu  $c$  koja obuhvata celu levu poluravan i karakteristični polinom sistema  $D(s)$ , utvrđimo uslove stabilnosti sistema s datim karakterističnim polinomom. Ako je sistem stabilan, svi korenji  $D(s)$  moraju biti u levoj poluravni, pa je  $m=0$ . Stoga relacija (4.32) postaje

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} D(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (4.33)$$

U skladu s Košijevom teoremom argumenta, može se reći da će vektor  $D(j\omega)$ - vektor Mihajlova imati promenu argumenta  $n(\pi/2)$ , pri promeni frekvencije od 0 do  $\infty$ . Vrh vektora Mihajlova opisivaće neku krivu, koju nazivamo *krivom (hodografom) Mihajlova*. Kriva Mihajlova se može konstruisati jednostavno na sledeći način: u karakteristični polinom  $D(s)$  zameni se  $s=j\omega$ , i dobijeni izraz rastavi na realni i imaginarni deo:

$$D(s)|_{s=j\omega} = D(j\omega) = \operatorname{Re} D(j\omega) + j \operatorname{Im} D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (4.34)$$

Zadajući vrednosti za  $\omega$  od 0 do  $\infty$ , konstruiše se kriva Mihajlova.

Rezultat (4.33) ukazuje da, kod stabilnog sistema, kriva Mihajlova mora proći kroz onoliko kvadrantata koliki je stepen polinoma  $D(s)$ . Međutim, s obzirom na to da se (4.33) odnosi na promenu argumenta vektora Mihajlova oko koordinatnog početka  $D(j\omega)$  - ravni, hodograf Mihajlova ne sme prolaziti kroz koordinatni početak te ravni i mora sukcesivno proći kroz  $n$ -kvadrantata. Razmatrajući prethodne algebarske kriterijume stabilnosti, zaključili smo da je potreban uslov stabilnosti da su svi koeficijenti karakteristične jednačine istog znaka (npr., pozitivni) i različiti od nule. Prema tome, za  $\omega=0$  hodograf

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

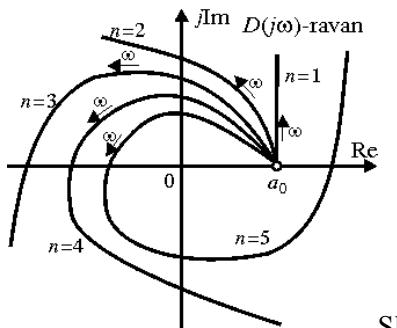
Mihajlova polaziće s pozitivnog dela realne ose iz tačke  $a_0$ . Sada se može precizno formulisati kriterijum stabilnosti Mihajlova:

*SAU biće stabilan ako i samo ako hodograf Mihajlova  $D(j\omega)$ , polazeći, pri  $\omega=0$ , s pozitivnog dela realne ose, iz tačke  $a_0$ , s porastom frekvencije od 0 do  $\infty$ , sukcesivno, u pozitivnom smjeru (suprotnom od kretanja kazaljke na satu) prolazi kroz onoliki broj kvadrantata koliki je stepen karakterističnog polinoma sistema.*

Hodograf Mihajlova stabilnih sistema se završava, težeći beskonačnosti, u kvadrantu određenom stepenom karakteristične jednačine. Prema tome, hodografi Mihajlova za stabilne sisteme prvog do petog reda su kao na sl. 4.3.

Na osnovu dosadašnjeg izlaganja jasno je da će sistem, po Mihajlovu, biti na oscilatornoj granici stabilnosti ako, za  $a_0 \neq 0$ , hodograf Mihajlova prolazi kroz koordinatni početak  $D(j\omega)$  - ravni. Tada je:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = 0$$



Sl.

4.3. Izgled hodografa Mihajlova za stabilne sisteme od 1. - 5. reda.

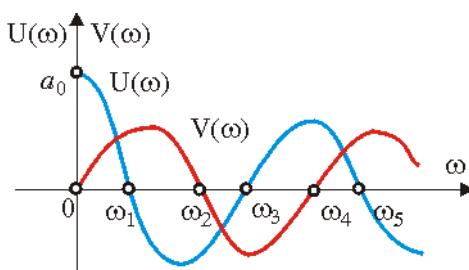
ili:

$$\begin{cases} U(\omega) = 0, \\ V(\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Ovo je sistem od dve simultane algebarske jednačine koje imaju zajednička rešenja za po dve nepoznate veličine od kojih je jedna frekvencija  $\omega$ .

**Primer 4.9.** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{(s+a)}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + 1}$ . Odrediti parametar  $a$  tako da sistem bude na oscilatornoj granici stabilnosti.

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + a + 1. \text{ Relacije (4.35) postaju:}$$



$$U(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + a + 1 = 0,$$

$$V(\omega) = -2\omega^3 + 4\omega = 0.$$

Rešavajući ovaj sistem jednačina dobijaju se:

$$\omega = \omega_{gr} = \sqrt{2} \text{ s}^{-1}, a = a_{gr} = 3.$$

Rešenje  $\omega = 0$  nije uzeto u obzir, jer je tada sistem na aperiodičnoj granici stabilnosti.

Sl. 4.4. Grafići  $U(\omega)$  i  $V(\omega)$  za stabilan sistem.

Sukcesivnost prolazaka hodografa Mihajlova za stabilne sisteme kroz  $n$  kvadrantata implicira, s obzirom da za  $\omega=0$  on polazi s pozitivnog dela realne ose, da će se frekvencije preseka hodografa s koordinatnim osama, realnom i imaginarnom, sukcesivno smenjivati, odnosno da će se koreni  $U(\omega)=0$  i  $V(\omega)=0$ , po  $\omega$ , sukcesivno smenjivati, sl. 4.4. Stoga se kriterijum stabilnosti Mihajlova može iskazati i na sledeći način:

*Karakteristični polinom sistema imaće sve leve nule ako i samo ako se nule polinoma  $V(\omega)$  i  $U(\omega)$  sukcesivno smenjuju, pri čemu prva u nizu je nula polinoma  $V(\omega)$ , a ukupan broj realnih nenegativnih nula jednak je stepenu karakterističnog polinoma.*

**Primer 4.10.** Utvrditi stabilnost sistema iz prethodnog zadatka ako je parametar  $a=2$ .

$$V(\omega) = -2\omega^3 + 4\omega = 0, \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_3 = \sqrt{2} \text{ s}^{-1},$$

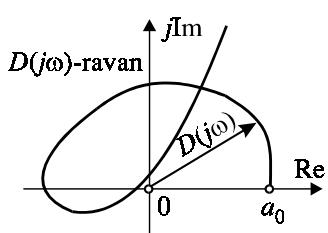
$$U(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 = 0, \Rightarrow \omega_2 = 1 \text{ s}^{-1}, \omega_4 = \sqrt{3} \text{ s}^{-1}.$$

Vidi se da imamo četiri realne frekvencije koje se sukcesivno smenjuju, pa je posmatrani sistem stabilan, jer kriva Mihajlova prolazi kroz sva četiri kvadranta.

Preporučujemo čitaocima da ispitaju stabilnost datog sistema za  $a=4$ .

Na bazi kriterijuma Mihajlova, koristeći relaciju (4.32), može s utvrditi i broj desnih korena. Rešavajući (4.32) u odnosu na broj desnih korena  $m$ , dobija se:

$$m = \frac{n}{2} - \frac{\Delta \arg D(j\omega)}{\pi}. \quad (4.36)$$



Sl. 4.5. Hodograf Mihajlova za primer 4.11.

#### Primer 4.11.

Na sl. 4.5 prikazan je hodograf Mihajlova za sistem petog reda. Ispitati stabilnost tog sistema. Ako je sistem nestabilan utvrditi broj desnih korena karakterističnog polinoma.

Iz hodografa se vidi da vektor  $D(j\omega)$  napravi ukupan ugao od  $\pi/2$ , pri promeni frekvencije od 0 do  $\infty$ . Stoga je sistem nestabilan, a na osnovu (4.36), za  $n=5$  je  $m=2$ . Prema tome, karakteristični polinom ima dva desna korena.

#### 4.2.3.3 Nikvistov kriterijum stabilnosti (1932.)

Nikvistov kriterijum stabilnosti, sa stanovišta praktične, inženjerske prime-ne, je nabolji kriterijum iz dva razloga: (i) ne zahteva prethodno poznавање matematičkog modela sistema, već samo eksperimentalno snimljenu AFFK otvorenog sistema (Nikvistovu krivu)<sup>1</sup>; (ii) o stabilnosti spregnutog prenosa može se suditi pre zatvaranja petlje povratne sprege, samo na osnovu povratnog prenosa; (iii) omogućava lako ispitivanje stabilnosti sistema s transportnim

<sup>1</sup> Treba ukazati da se Nikvistova kriva može snimiti eksperimentalno samo za sisteme sa stabilnim povratnim prenosom.

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

kašnjenjem; (iv) jednostavno određivanje stepena stabilnosti sistema, odnosno njegove robustnosti.

U cilju izvođenja Nikvistovog kriterijuma, pođimo od funkcije povratnog prenosa

$$W_p(s) = \frac{N(s)}{P(s)}. \quad (4.37)$$

Prepostavimo opšti slučaj da je povratni prenos sistema nestabilan i ima  $p$  desnih polova. Taj broj desnih polova Cipkin [1] je nazvao *indeksom nestabilnosti sistema*. Uočimo, takođe, da je sistem  $n$ -tog reda. Ukažimo i na činjenicu fizičke ostvarljivosti sistema: *broj nula funkcije povratnog prenosa sistema je maksimalno jednak broju polova ( $m \leq n$ )*. Istaknimo da nije važan raspored nula funkcije povratnog prenosa. One mogu biti i desne.

Formirajmo kompleksnu funkciju  $F(s)$  na sledeći način

$$F(s) = 1 + W_p(s) = 1 + \frac{N(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + N(s)}{P(s)} = \frac{D(s)}{P(s)}. \quad (4.38)$$

Kao što se vidi, brojilac  $F(s)$  je karakteristični polinom spregnutog prenosa sistema, a imenilac - karakteristični polinom povratnog prenosa, čiji broj desnih korena znamo - jednak je indeksu nestabilnosti sistema  $p$ .

Primenimo Košijevu teoremu argumenta na funkciju  $F(s)$ , koristeći konturu koja obuhvata celu desnu poluravan - *Nikvistovu konturu*, sl. 4.2a. Istaknimo sledeći zahtev: *odrediti uslove pri kojima će karakteristični polinom  $D(s)$  imati sve leve korene*. Promena argumenta  $F(s)$  se može izraziti na sledeći način:

$$\Delta \arg_c F(s) = \Delta \arg_c D(s) - \Delta \arg_c P(s). \quad (4.39)$$

ili

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg P(j\omega), \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (4.40)$$

Koristeći relaciju (4.28) i zahtev da  $D(s)$  nema nule u desnoj poluravni ( $m=0$ ), i činjenicu da  $P(s)$  ima  $p$  nula u desnoj poluravni, možemo napisati:

$$\Delta \arg F(j\omega) = -n \frac{\pi}{2} - [-(n-2p)] \frac{\pi}{2} = -\frac{p}{2} 2\pi. \quad (4.40)$$

Iz ove relacije se vidi da  $D(s)$  neće imati desne polove ako vektor  $F(j\omega)$  u  $F(j\omega)$ -ravni, pri promeni frekvencije od 0 do  $\infty$ , zarotira oko koordinatnog početka ( $p/2$ ) puta u smeru suprotnom od smera obilaženja konture (zbog znaka '-' u (4.40)). S obzirom da smo konturu u desnoj poluravni obilazili u smeru kazaljke na satu, tada (4.40) traži da se rotacija za  $p/2$  puta ostvari u suprotnom smeru kazaljke na satu.

S obzirom na (4.38) ugao rotacije vektora  $F(j\omega)$  u  $F(j\omega)$ -ravni je isto što i ugao rotacije vektora  $W_p(j\omega)$  oko tačke  $-1, j0$ , koja se naziva *kritična tačka*.

Sada se Nikvistov kriterijum stabilnosti može formulisati na sledeći način:

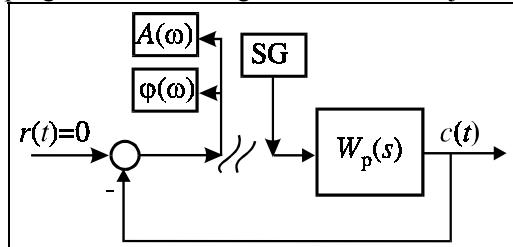
*Ako povratni prenos sistema ima indeks nestabilnosti  $p$ , spregnuti prenos biće stabilan ako i samo ako Nikvistova kriva  $W_p(j\omega)$ , u  $W_p(j\omega)$ -ravni, pri promeni frekvencije od 0 do  $\infty$ , obuhvata kritičnu tačku  $(-1, j0)$  ( $p/2$ ) puta u suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu.*

Na osnovu ovoga izvlačimo veoma važan zaključak: *primenom negativne povratne sprege možemo stabilisati nestabilne sisteme (objekte)*. Na primer, avioni i raketne su nestabilni objekti ali se, primenom povratne sprege, posredstvom sistema upravljanja i pilota ili automatskog pilota, uspešno stabišu i upravljaju.

Na osnovu datog opštег kriterijuma stabilnosti lako se dolazi do uslova stabilnosti spregnutog sistema kada je njegov povratni prenos stabilan ( $p=0$ ).

*Ako je povratni prenos sistema stabilan, spregnuti prenos biće stabilan ako i samo ako Nikvistova kriva  $W_p(j\omega)$ , u  $W_p(j\omega)$ -ravni, pri promeni frekvencije od 0 do  $\infty$ , ne obuhvata ni jedanput kritičnu tačku (-1, j0).*

Ovaj slučaj je u praksi najčešći. Zbog toga se ponovo osvrnimo na mogućnost eksperimentalnog određivanja stabilnosti spregnutog prenosa sistema. Posmatrajmo spregnuti autonomni sistem, sl. 4.6, kome smo raskinuli povratnu spregu iza detektor-a greške. Za snimanje Nikvistove krive potrebno je posedo-



Sl. 4.6. *Način eksperimentalnog snimanja Nikvistove krive; SG-signal generator,  $\phi(\omega)$ - fazometar,  $A(\omega)$  - merač amplitude.*

vati signal generator, fazometar i voltmeter (kada se radi o sistemu s električnim detektorom signala greške). Fiksirajući amplitudu, a menjajući frekvenciju sinusoidalnog signala generatora, mereći faznu razliku između ulaznog i izlaznog signala i amplitudu izlaznog signala, može se lako eksperimentalno snimiti Nikvist-

ova kriva. Na osnovu nje i upravo navedene definicije stabilnosti, može se unapred utvrditi da li će dati sistem, po zatvaranju povratne sprege ostati stabilan. Nažalost, Nikvistova kriva se ne može eksperimentalno snimiti za nestabilne objekte.

#### 4.2.3.3.1 Postupak skiciranja Nikvistove krive

Za ocenu stabilnosti, na osnovu Nikvistovog kriterijuma, nije uvek potrebna tačna konstrukcija Nikvistove krive. Često je dovoljno nju samo skicirati, određujući joj tok, karakteristične tačke preseka s koordinatnim osama i njene asymptotske osobine pri malim i velikim frekvencijama. Osim toga, povratni prenos može imati određeni stepen astatizma i/ili biti na oscilatornoj granici stabilnosti. U tom slučaju, polovi povratnog prenosa se nalaze na prethodno definisanoj Nikvistovoj konturi, pa uslovi Košijeve teoreme argumenta (da na konturi nema singulariteta) nisu ispunjeni. Rešenje ovog problema je predložio Cipkin. *Kontura Nikvista-Cipkina* za slučaj ukazanih singulariteta prikazana je na sl. 4.7, u dve od više mogućih varijanti. U prvoj varijanti (sl. 4.7a) polovi povratnog prenosa su isključeni iz desne poluravnini kružićima beskonačno malog radijusa, a u drugom slučaju (sl. 4.7b) - oni su uključeni u desnu poluravan. Delovi konture Nikvista-Cipkina, predstavljeni malim polukružićima, se preslikavaju iz  $s$ - u  $W_p(s)$ - ravan tako što se u funkciji povratnog

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

prenosa kompleksna promenljiva  $s$  zamenjuje sa  $s = re^{j\theta}$ ,  $r \rightarrow 0$ , a  $\theta$  se menja u odgovarajućim granicama, zavisno od mesta i orientacije. Ilustrujmo to na jednom primeru.

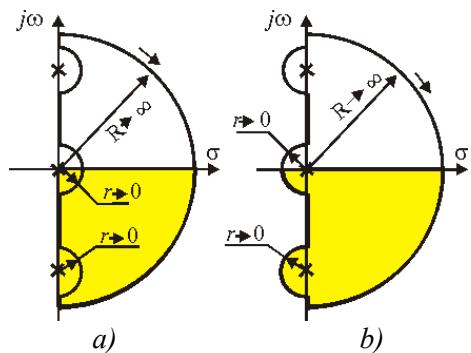
**Primer 4.12.** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+10)(s-1)}$ . Ispitati uslove stabilnosti spregnutog sistema u odnosu na pojačanje  $K$ .

$$\text{Prepišimo, najpre, funkciju prenosa u oblik } W_p(s) = \frac{0,1K(s+1)}{s(0,1s+1)(s-1)}.$$

Zamenjujući  $s=j\omega$ , možemo napisati:

$$\begin{aligned} W_p^n(j\omega) &= \frac{W_p(j\omega)}{0,1K} = -\frac{1+j\omega}{j\omega(1+0,1j\omega)(1-j\omega)} = \frac{|1+j\omega|}{\omega|(1+0,1j\omega)|(1-j\omega)|} e^{j\varphi(\omega)} \\ &= \frac{1}{\omega|(1+0,1j\omega)|} e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \\ \varphi(\omega) &= -\pi - \frac{\pi}{2} + \arctg\omega - \arctg 0,1\omega + \arctg\omega = -3\frac{\pi}{2} + 2\arctg\omega - \arctg 0,1\omega. \end{aligned}$$

Za  $\omega \rightarrow 0$ ,  $A(\omega) \rightarrow \infty$ , pri čemu je  $\varphi(0) = -3\pi/2$ , pa je pozitivni deo imaginarnе ose desna asymptota. Za  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $A(\omega) \rightarrow 0$ , a  $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi$ . Stoga je negativni deo realne ose asymptota normirane Nikvistove krive. Međutim, treba ispitati da li je to donja ili gornja asymptota. Potražimo da li Nikvistova kriva ima preseke s koordinatnim osama. Radi toga frekvencijsku funkciju prenosa  $W_p(j\omega)$  rastavimo na realni i imaginarni deo. Posle racionalizacije dobija se:



$$W_p(j\omega) = \frac{-0,1\omega^3 - 1,9\omega + j(1 - 0,8\omega^2)}{\omega |(1 + 0,1\omega^2)^2 + 0,81\omega^2|}$$

Sl. 4.7. Konture Nikvista-Cipkina za sisteme koji imaju singulariteti na imaginarnoj osi: a) singulariteti s imaginarnе ose se izključuju iz desne poluravnini, b) - oni se uključuju u desnu poluravan. Pretvodno date definicije odnose se samo za nešrafirani deo kontura Nikvista-Cipkina.

Izjednačavajući realni i imaginarni deo s nulom zaključuje se da nema preseka s imaginarnom osom, a postoji samo jedan presek s realnom osom za pozitivnu frekvenciju  $\omega = +\sqrt{1/0,8} = 1,118\text{s}^{-1}$ . Pri tome je realni deo

$$\text{Re } W_p(j\omega) = \left. \frac{-0,1\omega^2 - 1,9}{(1 + 0,1\omega^2)^2 + 0,81\omega^2} \right|_{\omega=1,118} = -0,8889.$$

Prema tome, negativni deo realne ose je gornja asymptota Nikvistove krive.

Na sl. 4.8 prikazan je izgled normirane Nikvistove krive za promenu frekvencije od  $0^+$  do  $\infty$ . Za definitivan zaključak o stabilnosti spregnutog prenosa potrebno je izvršiti

preslikavanje malog polukružića (tačnije - četvrtkružića) s konture Nikvista-Cipkina, sl. 4.7a, koji se nalazi u koordinatnom početku  $s$ -ravni, u ravan  $W_p(s)$ . On se (četvrtkružić) matematički definiše relacijom

$$s = re^{j\theta}, r \rightarrow 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Stoga je

$$W_p(s) = \lim_{r \rightarrow 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2} \frac{1 + re^{j\theta}}{re^{j\theta}(1 + 0,1re^{j\theta})(re^{j\theta} - 1)} = \begin{cases} -\infty e^{-j\theta} & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \infty e^{j(\pi-\theta)} & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}.$$

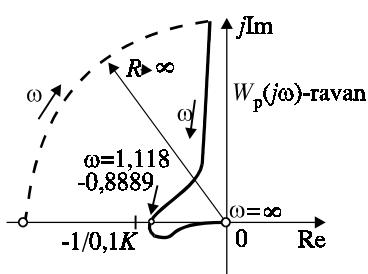
Prema tome, polukružić se preslikava u kružni segment beskonačnog radijusa, prikazanog na sl. 4.8 isprekidanim linijom.

Kako je indeks nestabilnosti sistema  $p=1$ , stabilnost sistema zavisiće od toga gde se nalazi kritična tačka  $(-\frac{1}{0,1K}, j0)$ . Ako se ona nalazi na delu levo od realnog preseka

Nikvistove krive i negativnog dela realne ose, sistem će biti nestabilan, jer nije ispunjen uslov stabilnosti. Ako se ta kritična tačka nalazi desno od tog preseka i levo od koordinatnog početka, sistem će biti stabilan, jer Nikvistova kriva obuhvata tu kritičnu tačku polovinu puta, u suprotnom smeru kazaljke na satu. Zaključujemo da će spregnuti sistem biti stabilan ako je ispunjen uslov

$$-\frac{10}{K} > -0,8889 \Rightarrow K > \frac{10}{0,8889} = 11,25.$$

U složenijim primerima, kada Nikvistova kriva veći broj puta preseca koordinatne ose, određivanje broja obuhvata kritične tačke postaje komplikovano.



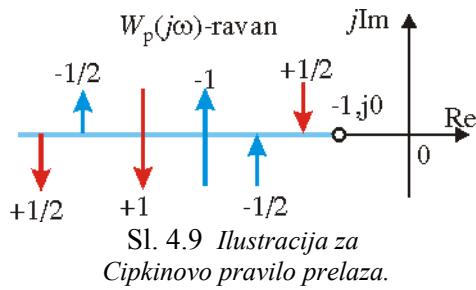
Sl. 4.8. Kvalitativni oblik Nikvistove krive za primer 4.12.

Efektno rešenje tog problema dao je Cipkin, analizirajući migraciju korena karakteristične jednačine iz stabilne u nestabilnu oblast i obrnuto. Na osnovu te analize predložio je jednu prostu metodu za utvrđivanje stabilnosti sistema na osnovu Nikvistove krive. Ovaj prilaz je u literaturi [2, 11] dobio naziv *Cipkinovo pravilo prelaza*. Bez ulazeњa u detalje, daćemo konačnu verziju ovog pravila.

#### 4.2.3.3.2 Cipkinovo pravilo prelaza

Označimo prelaze (preseke) Nikvistove krive preko realne ose, levo od kritične tačke, strelicama u smeru porasta frekvencije  $\omega$ . Dodelimo strelicama usmerenim naviše težinski faktor -1, a strelicama usmerenim naniže težinski faktor +1. Ako Nikvistova kriva polazi ili se završava na ukazanom delu realne ose, tada imamo odgovarajuće polupreseke s težinama  $-1/2$  i  $+1/2$ , respektivno. Rečeno je ilustrovano na sl. 4.9. Sada možemo precizno formulisati Cipkinovo pravilo prelaza:

*Ako povratni prenos sistema ima indeks nestabilnosti  $p$ , spregnuti prenos biće stabilan ako i samo ako je algebarska suma prelaza jednaka polovini indeksa nestabilnosti.*

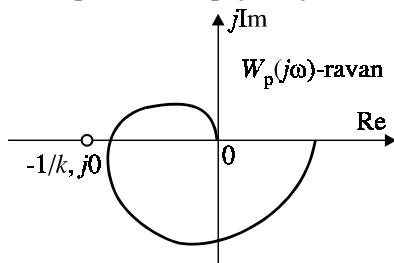


s realnom osom i koordinatnog početka. Uslovi Cipkinovog pravila prelaza su zadovoljeni u drugom slučaju, jer je algebarska suma prelaza jednaka  $1/2$ , a indeks nestabilnosti je  $p=1$ .

Prema izgledu Nikvistove krive, sistemi upravljanja se mogu klasifikovati na *apsolutno stabilne, uslovno stabilne i nestabilne*.

*Apsolutno stabilni sistemi su sistemi koji ostaju stabilni pri neograničenom smanjenju pojačanja. Uslovno stabilni sistemi su oni sistemi koji su stabilni za određeni interval promene pojačanja.*

Definicija apsolutne stabilnosti se ovde odnosi samo na linearne sisteme. Kod nelinearnih sistema pojam apsolutne stabilnosti ima sasvim drugo značenje. Na sl. 4.10 i 4.11 su ilustrovani slučajevi apsolutno stabilnog i uslovno stabilnog sistema, respektivno, prema izgledu Nikvistove krive. Napomenimo da sistem iz primera 4.12 nije apsolutno stabilan. Međutim, za njega se može reći da je stabilan pri velikim pojačanjima. Postoji interesantna klasa sistema stabilna pri velikim pojačanjima.



Sl. 4.10 *Apsolutno stabilan linearni sistem ostaje stabilan pri neograničenom smanjenju pojačanja.*

**Primer 4.13.** Proveriti, primenom Cipkinovog pravila prelaza, stabilnost sistema iz primera 4.12.

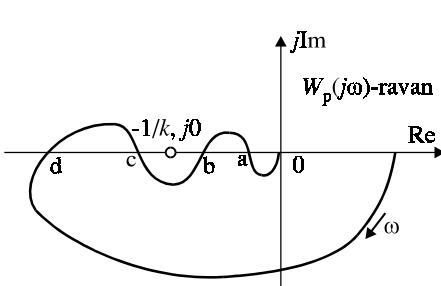
Na osnovu date Nikvistove krive, sl. 4.8, zavisno od veličine koeficijenta pojačanja  $K$ , levo od kritične tačke,  $-1/0,1K$ , može biti: (i) samo jedan negativan poluprelaz (ako je kritična tačka kao na sl. 4.8) ili (ii) jedan negativan poluprelaz i jedan pozitivan prelaz, ako se kritična tačka nalazi između preseka

s realnom osom i koordinatnog početka.

Uslovi Cipkinovog pravila prelaza su zadovoljeni u drugom slučaju, jer je algebarska suma prelaza jednaka  $1/2$ , a indeks nestabilnosti je  $p=1$ .

Prema izgledu Nikvistove krive, sistemi upravljanja se mogu klasifikovati na *apsolutno stabilne, uslovno stabilne i nestabilne*.

*Apsolutno stabilni sistemi su sistemi koji ostaju stabilni pri neograničenom smanjenju pojačanja. Uslovno stabilni sistemi su oni sistemi koji su stabilni za određeni interval promene pojačanja.*



Sl. 4.11. *Uslovno stabilan sistem s promenom pojačanja menja osobine stabilnosti.*

#### 4.2.3.2.3 Stabilnost sistema s transportnim kašnjenjem

Nikvistov kriterijum stabilnosti ima izuzetan značaj za analizu stabilnosti linearnih sistema s transportnim kašnjenjem, što nije moguće ostvariti primenom algebarskih kriterijuma stabilnosti. Nasuprot tome, frekvenčni kriteriji

jumi stabilnosti Mihajlova, Nikvista i Bodea (kao jednog prilaza u primeni Nikvistovog kriterijuma) mogu se primenjivati. Pretpostavimo da u funkciji povratnog prenosa postoji transportno kašnjenje, tj. neka je

$$W_{p\tau}(s) = \frac{N(s)}{P(s)} e^{-s\tau}, \quad (4.41)$$

gde je  $\tau$  - transportno kašnjenje.

Karakteristični polinom sistema biće

$$D(s) = P(s) + N(s)e^{-s\tau}. \quad (4.42)$$

Za primenu kriterijuma stabilnosti Mihajlova potrebno je zameniti  $s=j\omega$  i konstruisati hodograf Mihajlova. Konstrukcija tog hodografa je prilično složena. Međutim, Nikvistov kriterijum stabilnosti se može jednostavno primeniti i u ovom slučaju, gotovo bez ikakvog usložnjavanja u odnosu na sistem bez transportnog kašnjenja, jer ono utiče samo na promenu faze Nikvistove krive.

Ocenimo uticaj transportnog kašnjenja na uslove stabilnosti. Radi toga razmotrimo dva sistema koji se samo razlikuju u tome što jedan od njih ima, a drugi nema transportno kašnjenje. Moduli amplitudno-faznih karakteristika ovih sistema, pri istim frekvencijama, biće isti. Međutim, njihove faze za iste frekvencije biće različite, s tim što će fazno kašnjenje sistema s transportnim kašnjenjem biti veće. To, u najvećem broju slučajeva, dovodi do proširivanja amplitudno-fazne karakteristike u blizini kritične tačke, sl. 4.12, a samim tim i do povećanja oscilatornosti ili do gubitka stabilnosti sistema.

Lako se može odrediti granična vrednost transportnog kašnjenja  $\tau_{gr}$  koje sistem dovodi na oscilatornu granicu stabilnosti. U tom slučaju važi sledeća relacija

$$|W_p(j\omega)| e^{j\varphi_\tau(\omega)} = -1. \quad (4.43)$$

Ova relacija se može napisati u ekvivalentnom obliku

$$|W_{p\tau}(j\omega)| = 1, \quad (4.44)$$

$$\varphi_\tau(\omega) = -\pi(2k+1), k = 0, 1, 2, \dots$$

Iz prve se nalazi vrednost kritične frekvencije  $\omega = \omega_{kr}$ . U drugoj relaciji će figurisati fazni ugao sistema bez transportnog kašnjenja i fazni ugao koji unosi transportno kašnjenje, tj.

$$\varphi_\tau(\omega_{kr}) = \varphi(\omega_{kr}) - \omega_{kr}\tau = -\pi(2k+1), k = 0, 1, \dots \quad (4.45)$$

Odavde se nalazi kritična vrednost transportnog kašnjenja

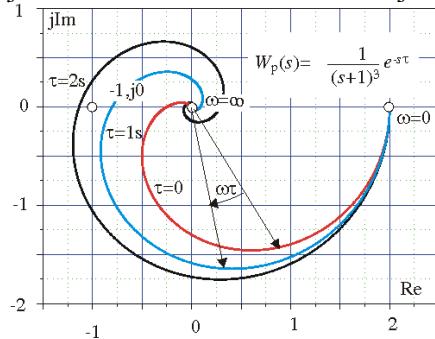
$$\tau_{kr} = \frac{(2k+1)\pi + \varphi(\omega_{kr})}{\omega_{kr}}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.46)$$

Minimalna vrednost  $\tau_{kr}$  se dobija za  $k=0$ .

Razmatrajući samo sisteme s transportnim kašnjenjem stabilne u otvorenoj povratnoj spredi, možemo zaključiti da će spregnuti sistem biti nestabilan ako je transportno kašnjenje veće od  $\tau_{kr}$ , tj.

$$\tau > \tau_{kr} = \frac{\pi + \varphi(\omega_{kr})}{\omega_{kr}}. \quad (4.47)$$

Kriterijum Nikvista može se uspešno primenjivati i na sisteme s iracionalnim elementima kakvi se javljaju kod sistema s raspodeljenim parametrima (topljeni procesi, procesi prenosa masa) koji se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Takvi elementi imaju funkcije prenosa oblika [1]:



Sl. 4.12. Nikvistova kriva sistema bez ( $\tau=0$ ) i s transportnim kašnjenjem ( $\tau \neq 0$ )

$$\frac{K}{\sqrt{s}}, \quad \frac{K}{1 + \sqrt{s}T}, \quad e^{-\sqrt{s}\tau}. \quad (4.48)$$

**Primer 4.14.** Povratni prenos sistema s jediničnom negativnom povratnom spregom je  $W_p(s) = \frac{Ke^{-s\tau}}{s(1+sT)}$ . Odrediti uslove stabilnosti sistema u odnosu na transportno kašnjenje  $\tau$ .

$$\begin{aligned} |W_p(j\omega_{kr})| &= \left| \frac{Ke^{-j\omega_{kr}\tau}}{j\omega_{kr}(1+j\omega_{kr}T)} \right| = 1 \Rightarrow \frac{K}{\omega_{kr} \sqrt{1+\omega_{kr}^2 T^2}} = 1 \Rightarrow \\ \omega_{kr} &= \frac{1}{T\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}. \\ \varphi(\omega_{kr}) &= -\frac{\pi}{2} - \omega_{kr}\tau_{kr} - \arctg \omega_{kr}T \Rightarrow \\ \tau_{kr} &= \frac{\pi - \frac{\pi}{2} - \arctg \omega_{kr}T}{\omega_{kr}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{T\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}}{\frac{1}{T\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4K^2 T^2} - 1}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

U složenijim slučajevima  $\tau_{kr}$  se određuje grafičkim putem tako što se konstruiše krug jediničnog radijusa s centrom u koordinatnom početku  $W_p(j\omega)$  - ravni. Kritična učestanost i kritična faza se određuju na osnovu preseka Nikvistove krive i jediničnog kruga, a  $\tau_{kr}$  iz dopunskog ugla do  $-\pi$ , tako što se ovaj dopunski ugao podeli kritičnom frekvencijom. Ovaj postupak je isti kao postupak određivanja preteka faze, čija definicija i način određivanja neposredno slede.

Može se dogoditi da Nikvistova kriva i jedinični krug imaju više preseka. To znači da će postojati više kritičnih vrednosti transportnog kašnjenja pri kojima Nikvistova kriva prolazi kroz kritičnu tačku. U ovom slučaju za kritičnu vrednost transportnog kašnjenja mora se usvojiti minimalno vreme kašnjenja.

#### 4.2.3.3.4 Pretek faze i pretek pojačanja sistema

Istaknimo, još jedanput, prednost Nikvistovog kriterijuma stabilnosti u određivanju stepena stabilnosti sistema, putem određivanja *preteka (rezerve) faze i preteka (rezerve) pojačanja* (ruski: *запас по фазе и запас по амплитуде*; engleski: *phase and amplitude margins*) i na mogućnost korišćenja Nikvistovih dijagrama za projektovanje sistema, odnosno za određivanje optimalnih parametara podešenja industrijskih regulatora. O ovome biće reči kasnije u poglavljiju koje se odnosi na projektovanje sistema. Ovde ćemo obraditi pretek faze i pretek pojačanja.

Neka je povratni prenos sistema stabilan i neka Nikvistova kriva ima izgled kao na sl. 4.13. Umesno je postaviti sledeća dva pitanja:

- 1) *za koliko treba promeniti fazu sistema, ne menjajući mu pojačanje pa da sistem dođe na oscilatornu granicu stabilnosti?*
- 2) *za koliko treba promeniti pojačanje u sistemu, ne menjajući mu fazu pa da sistem dođe na oscilatornu granicu stabilnosti?*

Odgovor na prvo pitanje je već dat u delu razmatranja stabilnosti sistema s transportnim kašnjenjem. S obzirom na značaj preteka faze sistema, ovom pitanju posvetićemo dodatnu pažnju. Sistem je na oscilatornoj granici stabilnosti kada Nikvistova kriva prolazi kroz kritičnu tačku  $-1, j0$ . To znači da je moduo frekvencijske funkcije prenosa ravan jedinici, a njena faza  $-\pi$ . Konstruišimo krug jediničnog radiusa s centrom u koordinatnom početku  $W_p(j\omega)$  - ravni, sl. 4.13. On će preseći AFFK. Frekvenciju u presečnoj tački označimo s  $\omega_p$ , i nazovimo je *presečnom frekvencijom pojačanja*, jer je, pri toj frekvenciji,  $|W_p(j\omega_p)|=1$ . Ako kroz tu tačku, iz koordinatnog početka, povučemo pravac, on će, u odnosu na pozitivan deo realne ose, određivati fazni ugao AFFK za  $\omega_p$ , tj.

$$\phi(\omega_p) = \arg W_p(j\omega_p) \Big|_{|W_p(j\omega_p)|=1}. \quad (4.49)$$

Jasno je da će sistem doći na granicu stabilnosti samo promenom faze, ako se ona pomeri (zakasni) za iznos ugla između pomenutog pravca i negativnog dela realne ose. Označimo taj ugao s  $\phi_{pf}$ . Tada je

$$\begin{aligned} \phi(\omega_p) - \phi_{pf} &= -\pi \Rightarrow \\ \phi_{pf} &= \pi + \phi(\omega_p). \end{aligned} \quad (4.50)$$

što je u saglasnosti s relacijom (4.47) za sistem s transportnim kašnjenjem.

Posmatrajmo, sada, drugi zahtev: promeniti amplitudu, bez promene faze, tako da sistem dođe na oscilatornu granicu stabilnosti.

Sl. 4.13. Definicija preteka faze i preteka pojačanja.

Označimo frekvenciju pri kojoj AFFK seče negativni deo realne ose s  $\omega_\pi$  i

nazovimo je *presečnom frekvencijom faze*, jer je<sup>2</sup>

$$\phi(\omega_\pi) = \arg W_p(j\omega_\pi) = -\pi. \quad (4.51)$$

Označimo

$$|W_p(j\omega_\pi)| = d. \quad (4.52)$$

Sa slike 4.13 je očigledno da je potrebno povećati pojačanje povratnog prenosa za  $(1/d)$  puta, bez promene faze, pa da sistem dođe na oscilatornu granicu stabilnosti. Ovaj odnos se i naziva pretkom pojačanja, tj.

$$A = \frac{1}{d} = \left| \frac{1}{W_p(j\omega_\pi)} \right|_{\arg W_p(j\omega_\pi) = -\pi} \quad (4.53)$$

#### 4.2.3.4 Bodeov kriterijum stabilnosti

U poglavlju 2 prikazan je način konstrukcije Bodeovih dijagrama slabljenja i faze, tačnih i asimptotskih. Obratimo pažnju na to da su Bodeovi dijagrami, za funkciju povratnog prenosa sistema, samo druga interpretacija Nikvistovog dijagrama. Stoga se Nikvistov kriterijum stabilnosti i Cipkinovo pravilo prelaza mogu primeniti korišćenjem Bodeovih dijagrama. Ovo ima posebnu važnost, jer se Bodeovi dijagrami jednostavnije konstruišu od Nikvistove krive.

Razmotrimo, najpre, sistem stabilan u otvorenoj povratnoj spredi. Neka su Bodeovi dijagrami slabljenja i faze tog sistema kao na sl. 4.14a. Odredimo na tim dijagramima presečnu frekvenciju pojačanja  $\omega_p$  i presečnu frekvenciju faze  $\omega_\pi$ . S obzirom na definiciju presečne frekvencije pojačanja

$$|W_p(j\omega_\pi)| = 1,$$

ona se, na Bodeovom dijagramu slabljenja, nalazi na  $\omega$ -osi, u tački preseka dijagrama slabljenja s tom osom, jer je

$$L(\omega_p) = 20 \log |W_p(j\omega_p)| = 0.$$

Presečna frekvencije faze se dobija iz uslova da je faza jednak  $-\pi$ , odnosno

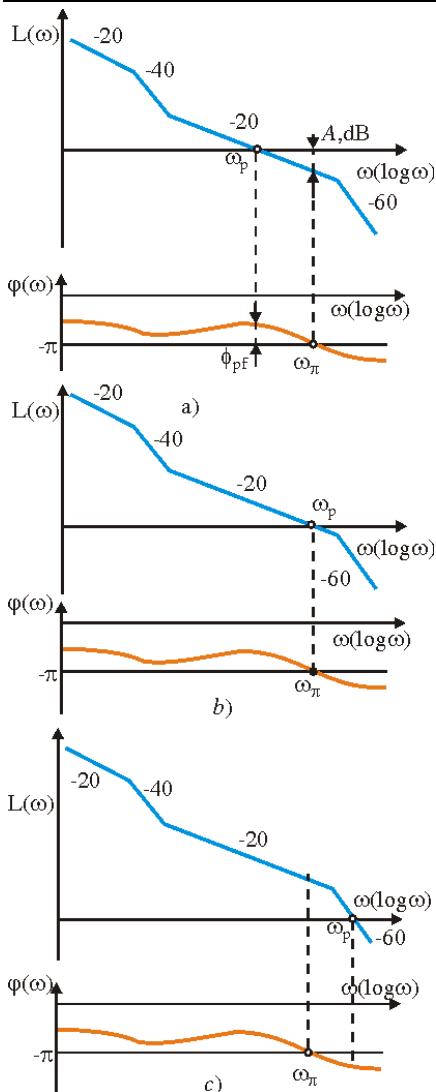
$$\phi(\omega_\pi) = -\pi,$$

a to je apsisa tačke preseka faznog dijagrama s linijom  $-\pi$ .

Posmatrajmo, sada, uporedo Nikvistov dijagram, sl. 4.14, s definisanim pretekom faze i pojačanja kod sistema stabilnih u otvorenoj povratnoj spredi, i Bodeove dijagrame, sl. 4.14a. Sa sl. 4.13 zaključujemo da će spregnuti prenos sistema biti stabilan (kada je povratni prenos stabilan) ako, idući u smeru povećanja frekvencije od 0 do  $\infty$ , prvo nastupa presečna frekvencija pojačanja pa zatim presečna frekvencija faze. Kod sistema na oscilatornoj granici stabilnosti ove frekvencije se poklapaju, sl. 4.14b, a kod nestabilnih sistema najpre nastupa presečna frekvencija faze, zatim presečna frekvencija pojačanja, sl. 4.14c, pa zatim presečna frekvencija faze.

---

<sup>2</sup> Ovde imamo u vidu da realni sistem upravljanja ima uvek inercijalno kašnjenje, te je fazni ugao negativan.



Sl. 4.14. Određivanje stabilnosti na osnovu Bodeovih dijagrama:  
 a) stabilan, b) na oscilatornoj granici stabilnosti, c) nestabilan sistem.

Za konačnu definiciju stabilnosti potrebno je preslikati i negativni deo realne ose, levo od kritične tačke. Očigledno je da se taj deo u Bodeovom dijagramu preslikava u oblast(i) gde je logaritamski dijagram slabljenja iznad  $\omega$ -ose. Posle ovih naznaka, može se, konačno, formulisati opšti kriterijum stabilnosti sistema zasnovan na Bodeovim dijagramima i Cipkinovom pravilu prelaza.

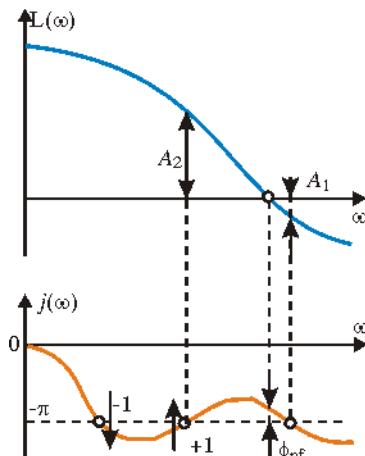
Ovde je iskorišćen isti sistem, kod koga je samo vršena promena pojačanja. Sistem od stabilnog (a) postaje oscilatoran (b) ili nestabilan (c), što je karakteristika apsolutno stabilnih linearnih sistema.

U složenijim slučajevima može biti veći broj presečnih frekvencija faze, što je karakteristika uslovno stabilnih sistema. Nikvistov dijagram takvog sistema prikazali smo ranije, videti sl. 4.11. Osim toga, povratni prenos može biti nestabilan, definisan indeksom nestabilnosti  $p$ . Za ocenu stabilnosti takvih sistema može se primeniti Cipkinovo pravilo prelaza [15]. U tu svrhu moramo na Bodeovim dijagramima definisati odgovarajuće prelaze i njihove težinske faktore, saglasno ranije definisanim prelazima Nikvistove krive na negativnom delu realne ose, levo od kritične tačke. Ti preseci se događaju kad god je fazni ugao AFFK otvorenog sistema  $-(2k+1)\pi$ . Prema tome, prelaz Bodeove fazno-frekvencijske karakteristike kroz nivoje  $-(2k+1)\pi$ ,  $k=0,1,\dots$ , odozgo naniže ostvariće jedan negativan prelaz (-1), a odozdo naviše - jedan pozitivan prelaz (+1). Ukoliko FFK karakteristika polazi ili se završava na ukazanim neparnim nivoima, onda imamo poluprelaze odgovarajućih težina  $(-1/2)$  ili  $(+1/2)$ , respektivno.

Ako povratni prenos ima indeks nestabilnosti  $p$ , njegov spregnuti prenos biće stabilan ako i samo ako je algebarska suma prelaza fazno-

## Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

frekvenčiske karakteristike preko nivoa  $-(2k+1)\pi$ , u opsegu frekvencija gde je Bodeov dijagram slabljenja pozitivan, jednaka  $p/2$ .



Sl. 4.15. Bodeovi dijagrami uz primer 4.15.

**Primer 4.15.** Stabilan povratni prenos sistema ima Bodeove dijagrame kao na sl. 4.15. Odrediti stabilnost njegovog spregnutog prenosa.

Na opsegu frekvencija, gde je  $L(\omega) > 0$  postoje jedan negativan i jedan pozitivan poluprelaz. Pošto je njihova algebarska suma jednaka nuli i povratni prenos ima indeks nestabilnosti  $p=0$ , dati sistem po zatvaranju povratne sprege ostaće stabilan.

Sa sl. 4.15 se vidi da je ovo primer uslovno stabilnog sistema. Smanjenjem Bodeovog pojačanja za  $A_2$  dB, sistem će doći na oscilatornu granicu stabilnosti, a isto tako i povećanjem pojačanja za  $A_1$  dB. Ovde je pretek faze jedinstven, dok imamo dva preteka pojačanja.

Ukažimo opet na činjenicu da je Bodeov kriterijum stabilnosti samo jedna interpretacija

Nikvistovog kriterijuma, pa se uspešno može koristiti i za ocenu stabilnosti sistema s transportnim kašnjenjem i neminimalno faznih sistema.

## 4.3 Primena MATLAB-a u analizi stabilnosti sistema

### 4.3.1 Određivanje korena karakteristične jednačine

Za nalaženje brojnih vrednosti korena algebarske jednačine  $n$ -tog reda može se koristiti programski paket MATLAB. Najpre treba zadati vektor koeficijenata polinoma:

$$p = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0];$$

zatim naredbom

`roots(p)`

dobiju se koreni polinoma.

**Primer 4.16.** Neka je karakteristični polinom sistema kao u primeru 4.7, tj.

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 8s + 4$$

Tada imamo:

`p=[1,2,5,8,8,4]; roots(p)`

`ans =`

```
0.0000 + 1.4142i
0.0000 - 1.4142i
-0.0000 + 1.4142i
-0.0000 - 1.4142i
-1.0000 + 0.0000i
-1.0000 - 0.0000i
```

#### Napomena:

Kao što se vidi, imamo dva para čisto imaginarnih konjugovanih korena i dva realna korena. Sistem koji bi imao ovu karakteristični polinom bio bi nestabilan iako nema ni jedan desni koren, jer ima dva para korena na oscilatornoj granici stabilnosti

### 4.3.2 Ispitivanje stabilnosti po Nikvistu

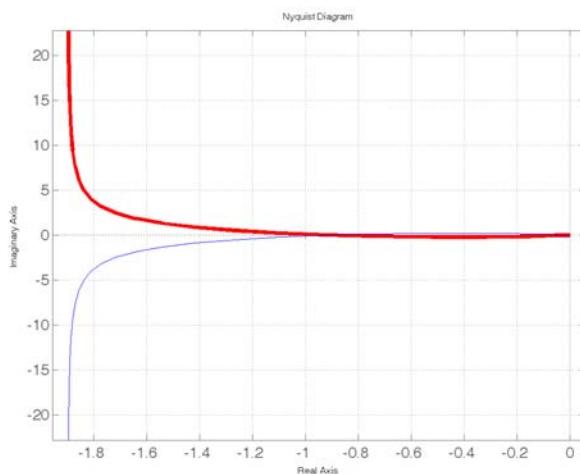
U prethodnoj glavi smo dali način korišćenja MATLAB-a za crtanje Nikvistovog dijagrama i Bodeovih dijagrama. Ovde ćemo navesti dva primera za ocenu stabilnosti primenom MATLAB-a.

**Primer 4.17.** Primenom MATLAB-a nacrtati normiranu Nikvistovu krivu za sistem iz primera 4.12.

Na sl. 4.16 data je Nikvistova kriva dobijena pomoću MATLAB-a na osnovu naredbi:

**Num=[1,1];Den=[0.1,0.9,-1,0]; nyquist(Num,Den)**

MATLAB daje Nikvistovu krivu i za negativne frekvencije. Za pozitivne frekvencije, Nikvistovu krivu smo namerno istakli. Kao što se vidi, ovde nije ostvareno preslikavanje polukruga u koordinatnom početku, na osnovu konture Nikvista-Cipkina.



Sl. 4.16. Nikvistova kriva za primer 4.17.

Za ocenu stabilnosti sistema potrebno je vršiti dodatnu analizu.

Imajući u vidu analizu u primeru 4.12, možemo zaključiti da je normalizovan sistem nestabilan, jer Nikvistova kriva obuhvata kritičnu tačku  $-1+j0$  u smeru kretanja kazaljke na satu pola puta. Unošenjem većeg pojačanja u povratni prenos sistema sistem će postati stabilan. Međutim, tada će ovaj sistem imati mali pretek faze i biće sklon samooskulacijama. Kao što je ranije zaključeno sistem će postati stabilan za  $K>11,25$ .

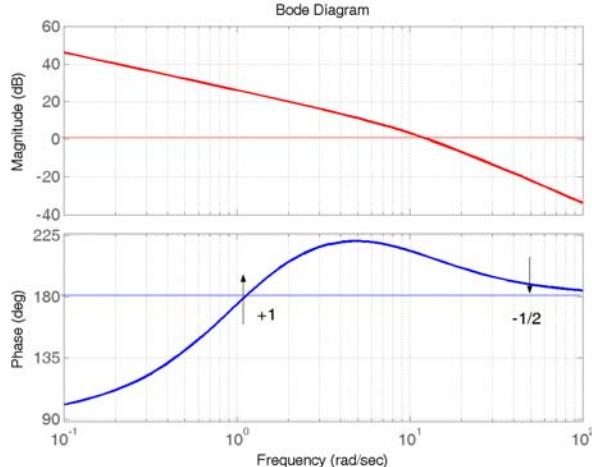
### 4.3.3 Ispitivanje stabilnosti po Bodeu

**Primer 4.18.** Za sistem iz prethodnog zadatka primenom MATLAB-a nacrtati Bodeove dijagrame i komentarisati stabilnost sistema ako je  $K=20$ .

**Num=[20,20];Den=[0.1,0.9,-1,0]; bode(Num,Den)**

Kao rezultat dobija se grafik kao na sl. 4.17.

Pošto je povratni prenos sistema nestabilan ( $p=1$ ), spregnuti prenos biće stabilan ako je suma prelaza u oblasti kada je dijagram slabljenja pozitivan bude jednak  $p/2$ . Na dijagramu faze su naznačeni prelazi preko nivoa  $180^\circ$  i može se zaključiti (mada ne i sa velikim stepenom pouzdanosti!) da je spregnuti sistem stabilan.



Sl. 4.17. Bodeovi dijagrami za primer 4.18.

#### 4.3.4 Određivanje preteka faze i preteka pojačanja

Pomoću naredbi MATLAB-a mogu se odrediti i pretek faze i pretek pojačanja kao i presečne frekvencije faze i pojačanja. Naredba je oblika:

**[d,fipf,wpi,wp]=margin(Num,Den)**

Na primer, za zadatak 4.17 dobijamo:

**Num=[1,1];Den=[0.1,0.9,-1,0]; bode(Num,Den)**

**[d,fipf,wpi,wp]=margin(Num,Den)**

Warning: The closed-loop system is unstable.

> In C:\MATLABR12\toolbox\control\control\@lti\margin.p at line 88

In C:\MATLABR12\toolbox\control\control\margin.m at line 92

```
d =
1.1255
fipf =
-5.9711
wpi =
1.1185
wp =
0.9950
```

**Napomena:** d je pretek pojačanja, fipf je pretek faze, wpi je presečna frekvencija pojačanja, a wp je presečna frekvencija faze.

Jasno je da ako je pretek faze negativan, odnosno ako je pretek pojačanja manji od jedinice, sistem je nestabilan.

Dok za primer 4.18 imamo:

**Num=[20,20];Den=[0.1,0.9,-1,0]; bode(Num,Den)**

**[d,fipf,wpi,wp]=margin(Num,Den)**

```
d =
0.0563
fipf =
29.5177
wpi =
1.1185
wp =
12.4962
```

## LITERATURA

- [1] Цыпкин, Я. З.: **Основы теории автоматических систем**, Наука, Москва, 1977.
- [2] Stojić, M. R.: **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, Nauka, Beograd, 1996.
- [3] Gupta, S. C., Hasdorff,L.: **Fundamental of Automatic Control**, Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1970.
- [4] Демидович, Б. П.: **Лекции по математической теории устойчивости**, Изд. физико-математическо литературы , Москва, 1967.
- [5] Kuo, B. C.: **Automatic Control Systems**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1982
- [6] Netushil, A. V. (Ed.): **Theory of Automatic Control**, Mir Publisher, Moscow, 1978.
- [7] Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A: **Feedback Control of Dynamic Systems**, Addison-Wesley Publishing com., 1986.
- [8] Харитонов, В. Л.: *Об одном обобщении критерия устойчивости*, **Изв. АН КазССР**, Серия физико-математическая , 1976., No 1, стр. 53-57.
- [9] Харитонов, В. Л.: *Об асимптотическо устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений* , **Дифференциальные уравнения** , 1978, XIV, No 1, 2086-2088
- [10] Бесекерски В. А., Попов, Е. П.: **Теори систем автоматического управлени** , Наука, Москва, 1972.
- [11] Воронов, А. А.: **Теория автоматического управления**, «Высшая школа» , Москва, 1986.
- [12] Гноенский Л, С. и др.: **Математическая теория управляемых систем**, Наука, Москва, 1969.
- [13] Солодовников, В. В. (ред.): **Основы теории и элементы систем автоматического регулирования**, Машиностроение, Москва, 1985.
- [14] Чемоданов, Б. К.: **Математические основы теории автоматического регулирования** , «Высшая школа», Москва, 1971.
- [15] Milosavljević, Č.: *O primeni Bodeove frekventne metode u ispitivanju stabilnosti zatvorenog sistema kada je otvoreni sistem nestabilan*, **Automatika 5-6**, (1985), str. 267-271.
- [16] Ćalasan, L., Petkovska, M.: **MATLAB i dodatni moduli Control System Toolbox i Simulink**, Mikro knjiga, Beograd, 1995.

### Pitanja za samoproveru

1. Potreban i dovoljan uslov stabilnosti linearog sistema automatskog upravljanja je absolutna \_\_\_\_\_ funkcije ili da se svi koreni jednačine nalaze u \_\_\_\_\_.
2. Potreban uslov stabilnosti SAU je da \_\_\_\_\_ polinom ima sve koeficijente \_\_\_\_\_.
3. Karakteristični polinomi prvog i drugog reda imaju sve pozitivne koeficijente. Takvi sistemi su uvek \_\_\_\_\_.
4. Karakteristični polinom sistema trećeg reda ima sve koeficijente pozitivne. Takav sistem biće stabilan ako je \_\_\_\_\_.
5. Za utvrđivanje stabilnosti linearnih sistema koriste se \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_. Oni se mogu svrstati u dve grupe i to: kriterijumi: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. Prvoj grupi pripadaju \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. Drugoj grupi pripadaju: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
6. Kriterijumi stabilnosti iz druge grupe zasnivaju se na \_\_\_\_\_ iz teorije funkcije kompleksne promenljive.
7. Sistem upravljanja biće po Hurvicu stabilan ako su sve \_\_\_\_\_.
8. Sistem je po Hurvicu na oscilatornoj granici stabilnosti ako je \_\_\_\_\_ determinata \_\_\_\_\_.
9. Polinom se naziva Hurvicovim ako su svi njegovi koreni \_\_\_\_\_.
10. Rausova tabela ima \_\_\_\_\_ vrsta. Prve dve vrste se formiraju na osnovu \_\_\_\_\_.
11. Ostale vrste Rausove tabele se formiraju na osnovu dveju \_\_\_\_\_ koje posmatranoj vrsti.
12. Rausova kolona je \_\_\_\_\_ kolona u Rausovoj tabeli.
13. Po Rausu, sistem je stabilan ako su svi članovi Rausove kolone \_\_\_\_\_.
14. Po Rausu, sistem je na oscilatornoj granici stabilnosti ako je \_\_\_\_\_ Rausove kolone jednak \_\_\_\_\_. Tada će sistem oscilovati kružnom frekvencijom \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
15. Prilikom formiranja Rausove tabele dozvoljeno je množenje svih članova iste vrste \_\_\_\_\_.
16. Teorema argumenta se može matematički izraziti relacijom \_\_\_\_\_, gde su  $N$  i  $P$  - \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_ funkcije prenosa sistema obuhvaćeni zatvorenom \_\_\_\_\_ u \_\_\_\_\_ ravni.
17. Teorema argumenta ne dozvoljava da se na \_\_\_\_\_ nalaze ni \_\_\_\_\_ niti \_\_\_\_\_ funkcije prenosa.

1. Nikvistova kontura je \_\_\_\_\_ beskonačnog \_\_\_\_\_ koja obuhvata celu \_\_\_\_\_ poluravan.
2. Kontura Mihajlova je \_\_\_\_\_ beskonačnog \_\_\_\_\_ koja obuhvata celu \_\_\_\_\_ poluravan.
3. Kontura Nikvista-Cipkina se razlikuje od Nikvistove konture samo time što zaobilazi \_\_\_\_\_ na \_\_\_\_\_ - osi.
4. Sistem upravljanja ima slobodni član u karakterističnoj jednačini jednak nuli. Svi koreni karakterističnog polinoma su levi osim jednog. Za takav sistem kažemo da je na \_\_\_\_\_ granici stabilnosti.
5. Sistem upravljanja ima dva konjugovana pola na imaginarnoj osi, a svi ostali polovi su levi. Za takav sistem kažemo da se nalazi na \_\_\_\_\_ stabilnosti.
6. Ako se pri istim uslovima kao u prethodnom pitanju postoji dva para konjugovanih polova na imaginarnoj osi, takav sistem je \_\_\_\_\_.
7. Prema kriterijumu stabilnosti Mihajlova, sistem će biti stabilan ako \_\_\_\_\_ polazeći iz tačke \_\_\_\_\_ na realnoj osi sukcesivno \_\_\_\_\_ - koliki je stepen \_\_\_\_\_.
8. Pomoću kriterijuma stabilnosti Mihajlova može se utvrditi broj desnih korena karakterističnog polinoma primenom izraza \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
9. Prema kriterijumu Mihajlova, sistem je na oscilatornoj granici stabilnosti ako \_\_\_\_\_ prolazi kroz \_\_\_\_\_  $D(j\omega)$ -ravni. Matematički se taj uslov može izraziti relacijama \_\_\_\_\_.
10. Indeks nestabilnosti sistema predstavlja broj \_\_\_\_\_ polova funkcije \_\_\_\_\_ prenosa sistema.
11. Kritična tačka kod primene Nikvistovog kriterijuma ima koordinate \_\_\_\_\_, a ako je povratni prenos normiiran tada je kritična tačka \_\_\_\_\_.
12. Sistem automatskog upravljanja stabilan bez povratne sprege ostaje stabilan i po zatvaranju povratne sprege ako Nikvistova kriva \_\_\_\_\_.
13. Povratni prenos sistema ima indeks nestabilnosti  $p$ . Spregnuti prenos sistema biće stabilan ako Nikvistova kriva, pri promeni frekvencije od \_\_\_\_\_.
14. Presečna frekvencija pojačanja na nikvistovom dijagramu definisana je izrazom \_\_\_\_\_.
15. Presečna frekvencija faze na Nikvistovom dijagramu definisana je izrazom \_\_\_\_\_.
16. Pretek faze ukazuje na to koliko je sistem daleko od \_\_\_\_\_. Matematički se može izraziti na sledeći način: \_\_\_\_\_.

#### Glava 4.: Stabilnost linearnih SAU

- 
17. *Obično se smatra da dobro projektovan sistem treba da ima pretek faze oko \_\_\_\_\_.*
  18. *Pretek pojačanja se matematički definiše kao \_\_\_\_\_, pri čemu je \_\_\_\_\_.*
  19. *Kod stabilnih sistema bez povratne sprege i stabilnih sa zatvorenom povratnom spregom, presečna frekvencija pojačanja je \_\_\_\_\_ od presečne frekfencije faze.*
  20. *Kod sistema sa transportnim kašnjenjem stabilnost se može jedino uspešno ispitivati primenom \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_ kriterijuma.*
  21. *Prema Bodeovom kriterijumu, ako je povratni prenos stabilan, spregnuti prenos biće stabilan ako \_\_\_\_\_.*
  22. *Pretek faze na Bodeovim dijagramima se očitava na \_\_\_\_\_ karakteristici, pri frekvenciji pri kojoj amplitudski dijagram \_\_\_\_\_.*
  23. *Pretek pojačanja na Bodeovom dijagramu slabljenja je vrednost slabljenja na frekvenciji pri kojoj fazna karakteristika preseca \_\_\_\_\_.*
  24. *Apsolutno stabilnim linearnim sistemom smatramo onaj sistem koji ostaje stabilan pri \_\_\_\_\_ pojačanja.*

## Zadaci za vežbu

1. Funkcija prenosa direktnе grane SAU sa jediničnom povratnom spregom je  

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s+c)(s+d)}$$
. Primenom Hurvicovog kriterijuma stabilnosti utvrditi uslove stabilnosti sistema u odnosu na pojačanje  $K$ . Brojni podaci su dati u tabeli 1.

Табела 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	2	1	4	5	6	0.5	0.2	0.1
b	4	5	3	8	4	2	0.5	2
c	6	3	2	2	3	3	1.5	4
d	3	2	1	3	5	7	2	0.5

2. Funkcija prenosa direktnе grane SAU sa jediničnom povratnom spregom je  

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+b)(s+c)(s+d)}$$
. Primenom Rausovog kriterijuma stabilnosti odrediti uslove stabilnosti u odnosu na pojačanje  $K$ . Brojni podaci su dati u tabeli 1.

3. Funkcija prenosa direktnе grane SAU sa jediničnom povratnom spregom je

- $$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s+c)(s+d)}$$
. Odrediti kritičnu vrednost koeficijenta pojačanja povratnog prenosa sistema primenom kriterijuma stabilnosti Mihajlova i uslove stabilnosti u odnosu na pojačanje  $K$ . Brojni podaci su dati u tabeli 1.

4. Funkcija povratnog prenosa sistema s jediničnom povratnom spregom je

- $$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s-c)(s+d)}$$
. Primenom Nikvistovog kriterijuma stabilnosti ispitati uslove stabilnosti sistema u odnosu na pojačanje  $K$ . Brojni podaci su dati u tabeli 1.

5. Povratni prenos sistema je  $G(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+b)(s^2+cs+d)}$ . Primenom Bodeovih

dijagrama slabljenja i faze ispitati uslove stabilnosti spregnutog prenosa sistema u odnosu na koeficijent pojačanja  $K$ . Brojni podaci su dati u tabeli 1.

<b>Glava 5. OCENA KVALITETA LINEARNIH SAU</b>	111
<b>5.1 Metode za ocenu kvaliteta SAU</b>	111
<b>5.2 Ocena ponašanja sistema u ustaljenom stanju -konstante greške</b>	113
<b>5.2.1 Generalisane konstante greške</b>	113
<b>5.2.2 Konstante greške za tipične referentne ulaze</b>	115
<b>5.2.3 Konstante greške i spregnuti prenos sistema</b>	119
<b>5.3 Ocena ponašanja sistema u dinamičkim ustaljenim režimima</b>	120
<b>5.3.1 AFFK-e i ocena ponašanja sistema</b>	120
5.3.1.1 Zavisnost $\zeta$ i $\phi_{pf}$ u sistemu drugog reda bez konačnih nula	121
5.3.1.2 Ocena ponašanja sistema na osnovu amplitudno-frekvencijske karakteristike spregnutog prenosa	122
5.3.1.3 Pokazatelj oscilatornosti i rezonantna frekvencija	122
5.3.1.4 Propusni opseg	123
5.3.1.5 Selektivnost	124
5.3.1.6 Zavisnost između preteka faze i pokazatelja oscilatornosti	124
5.3.1.7 Uticaj fazno-frekvencijske karakteristike na ponašanje sistema	126
<b>5.4 Ocena ponašanja sistema u prelaznim režimima</b>	126
<b>5.4.1 Parametri odskočnog odziva sistema</b>	127
<b>5.4.2 Uticaj konačne nule na karakteristike sistema drugog reda s konjugovano kompleksnim polovima</b>	129
<b>5.4.3 Uticaj konačne nule na odziv sistema drugog reda s realnim polovima</b>	130
<b>5.4.4 Uticaj realnog pola u sistemu trećeg reda s parom kompleksnih polova</b>	131
<b>5.4.5 Polovi i nule čiji se uticaj može zanemariti</b>	132
<b>5.5 Metoda geometrijskog mesta korena (GMK) Ivensa-Teodorčika</b>	132
<b>5.5.1 Uvod</b>	132
<b>5.5.2 Polazne osnove metode GMK</b>	133
<b>5.5.3 Pravila za konstrukciju GMK</b>	135
<b>5.5.4 Približno određivanje nula polinoma pomoću GMK</b>	144
<b>5.5.5 Presek GMK s <math>\zeta</math> - pravom</b>	145
<b>5.5.6 Konstrukcija GMK pri promeni drugih parametara</b>	146
<b>5.5.7 GMK sistema s transportnim kašnjenjem</b>	148
<b>5.5.8 Primena MATLAB-a za konstrukciju GMK</b>	151
<b>5.6 Mitrovićeva metoda</b>	154
<b>5.7 Integralni kriterijumi kvaliteta sistema</b>	157
<b>5.7.1 Izbor integralnog kriterijuma kvaliteta</b>	158
<b>5.7.2 Integralni kvadratni kriterijumi kvaliteta</b>	159
<b>5.8 Osetljivost</b>	165
<b>5.8.1 Strukturni metod modela osetljivosti sistema</b>	167
<b>5.9 Robustnost sistema</b>	170
<b>5.10 Invarijantnost</b>	171
<b>Literatura</b>	172
<b>Pitanja za samopроверу</b>	173
<b>Zadaci za vežbu</b>	176

## **Glava 5.**

# **OCENA KVALITETA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**

### **5.1 Metode za ocenu kvaliteta SAU**

SAU su namenjeni za stabilizaciju, regulaciju ili praćenje nekih veličina. Osnovni zahtevi koji se postavljaju na SAU su: da regulaciono odstupanje (signal greške) bude minimalno moguće, pri svim regularnim uslovima u kojima se on može naći i da, u neregularnim situacijama, ostvari sopstvenu i eventualnu zaštitu drugih sistema koji su s njim u neposrednoj vezi, na primer, uređaja iz kojih se SAU napaja energijom, radnih mehanizama koje pokreće, i sl. S obzirom da je ulazak sistema u zaštitne režime povezan s nelinearnim efektima, ovde se nećemo zadržavati na toj problematici, pretpostavljajući da sistem radi uvek u regularnim, propisanim uslovima. Pošto na SAU i u tim uslovima deluju kako spoljašnji poremećaji (opterećenja) tako i unutrašnji poremećaji (promena parametara), ocena kvaliteta mora uključivati analizu ponašanja sistema pri svim promenama referentnih ulaza i poremećaja. Zahvaljujući principu superpozicije, kod linearnih SAU moguće je na jedinstven način prići problemu ocene kvaliteta ponašanja pri istovremenom delovanju svih spoljašnjih uticaja. Delovanje unutrašnjih (parametarskih) poremećaja može učiniti problem ocene ponašanja sistema veoma složenim, ako je dinamika promene parametara brža ili istog reda veličine s dinamikom sistema. Tada imamo nestacionaran sistem čija je analiza složena. Mi ćemo, dalje, smatrati da je dinamika promene parametara mnogo sporija od dinamike sistema i da se može koristiti metoda "zamrzavanja" parametara.

Pošto je SAU izložen raznovrsnim spoljašnjim poremećajima, za jedinstven prilaz oceni ponašanja različitih sistema u različitim uslovima pribegava se izboru tipičnih, reprezentativnih, uticaja - *testirajućih signala*. Izbor testirajućih signala mora se zasnovati na tome da se oni mogu lako generisati, da dovode sistem u otežane uslove rada, da su matematičke relacije koje opisuju odzive sistema na takve signale što jednostavnije, i, najzad, da su testirajući signali

bliski realno delujućim uticajima na sistem ili da se realni uticaji mogu sintetizovati pomoću testirajućih signala.

Tako, na primer, sistemi stabilizacije rade u uslovima konstantnih, nepromenljivih referentnih signala, koji se, postupkom linearne transformacije, mogu svesti na nulu. Stoga je za ocenu ponašanja takvih sistema, sa stanovišta delovanja poremećaja po zadatoj vrednosti, logično pretpostaviti poremećaje impulsnog tipa i posmatrati impulsni odziv sistema. S druge strane, opterećenje kod takvih sistema može biti najneugodnije ako je periodično, oblika pravougaonih, sinusoidalnih ili drugog tipa impulsa. Pri tome, iluzorno je očekivati da će sistem uspevati da eliminiše takve poremećaje čija je frekvencija visoka u poređenju s brzinom reagovanja sistema, a frekvencijski spektar poremećaja je u oblasti propusnog opsega sistema.

U SAR referentni ulazni signali se, obično, menjaju skokovito - tipa su odskočnih funkcija. Kod pratećih sistema oni su, u opštem slučaju, nepoznate funkcije vremena. Međutim, za utvrđivanje kvaliteta takvih sistema najčešće se primenjuju testirajući signali u obliku odskočnih funkcija, pravougaonih, trougaonih, paraboličnih ili sinusoidalnih signala. Poremećaji kod njih su slični kao i kod sistema stabilizacije. I ovde, kao i ranije, ne može se očekivati od sistema da će moći, s velikom tačnošću, da prati bilo koji periodični ulazni signal čija frekvencija prevazilazi brzinu reagovanja sistema.

Na osnovu ove analize možemo da zaključimo da se kao tipični testirajući signali koriste pojedinačni signali: *impulsni, odskočni, nagibni i parabolični*, koji definišu ponašanje sistema u prelaznim režimima i u stacionarnom (ustaljenom) stanju; ili periodični signali sinusoidalnog karaktera koji karakterišu dinamička stacionarna stanja. Za ocenu osobina sistema, u poslednjem slučaju, pogodnija je primena frekvencijske analize. Prema tome, zavisno od tipa ulaznih signala, ocena ponašanja sistema se može vršiti u vremenskom ili frekvencijskom području. Stoga se i metode ocene klasificuju na *vremenske i frekvencijske*. Vremenske metode, sa svoje strane, ocenjuju bilo prelazne režime (dinamiku) bilo ustaljena stanja (stacionarne režime). Frekvencijske metode se vezuju za dinamička ustaljena stanja sistema, ali se na osnovu njih mogu približno ocenjivati i prelazni režimi u vremenskom domenu.

Sve metode za ocenu ponašanja sistema imaju smisla samo ako je SAU stabilan, jer nestabilni sistemi ne mogu da odgovore osnovnoj nameni - svođenju regulacionog odstupanja u konačnom vremenu na zadati nivo. Ali i kada je sistem stabilan i svodi regulaciono odstupanje za zadato vreme na zadati nivo, nije svejedno kakav je tok regulacionog procesa u pogledu njegovog oblika, a posebno u pogledu utroška energije ili reagenasa u toku procesa regulacije. Stoga jednu važnu klasu kriterijuma za ocenu kvaliteta ponašanja sistema čine *integralne metode ocene kvaliteta ponašanja sistema*.

S praktične tačke gledišta veoma je važno ne samo da sistem bude stabilan, već i da ima odgovarajući stepen stabilnosti. Stoga *metode ocene stepena stabilnosti sistema* moraju biti zastupljene u teoriji i praksi SAU. Promena parametara sistema nameće, sa svoje strane, ocenu njihovog uticaja na ključne osobine sistema: stabilnost, stepen stabilnosti, vreme trajanja prelaznog procesa,

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

tačnost i sl. Takav prilaz se ostvaruje preko *ocene robustnosti sistema*. Ispitivanje uticaja promene parametara na ponašanje sistema se može vršiti i primenom *metoda teorije osetljivosti*.

Istaknimo, još jednom, da svaki od navedenih načina ocene ponašanja sistema ima smisla samo ako je sistem stabilan, odnosno ako ima zadati stepen stabilnosti. Ipak, u praksi sinteze SAU, s obzirom da je jedan broj elemenata unapred poznat, a drugi se biraju na osnovu funkcionalnih zahteva i zahteva u pogledu željene statičke tačnosti, najčešće se prvo koriste metode za ocenu ponašanja sistema u stacionarnom stanju. One se baziraju na oceni veličine regulacionog odstupanja sistema u ustaljenom stanju, pri delovanju sporopromenljivih referentnih signala ili poremećaja, odnosno pri delovanju tipičnih signala: *odskočnog, nagibnog ili paraboličnog*.

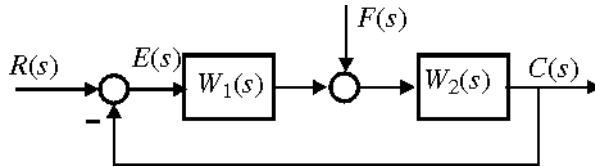
### 5. 2 Ocena ponašanja sistema u ustaljenom stanju. Konstante greške

Već je rečeno, da je jedna od metoda za ocenu kvaliteta sistema vezana za određivanje vrednosti signala greške u ustaljenom stanju. Ustaljeno stanje nastaje kada ne postoje promene posmatrane veličine u vremenu pri delovanju tipičnih referentnih signala: odskočnog, nagibnog ili paraboličnog, odnosno referentnog signala tipa sporopromenljive funkcije, čija je dinamička promena mnogo sporija od dinamike sistema, tako da on može ući u ustaljeno stanje. U teoriji SAU postoje dva prilaza za ocenu ovog stanja. Prvi je vezan za tipične ulazne signale, a drugi - za bilo koji sporopromenljivi signal. Razmotrićemo oba načina, polazeći od opštijeg.

#### 5.2.1 Generalisane konstante greške

Razmotrimo običan SAU, prikazan na sl. 5.1. On ima dva ulaza: referentni, na kojem deluje zadata vrednost  $R(s)$  (referentni signal), i ulaz na kome deluje poremećaj  $-F(s)$ . U opštem slučaju, može biti veći broj poremećaja, s različitim napadnim tačkama - ulazima u sistem. Oni se mogu, postupkom algebre strukturnih blok-šema (ili grafa toka signala) svesti na jedan isti ulaz (često i na referentni ulaz) ili se njihova delovanja analiziraju posebno, a ukupan uticaj se nalazi primenom principa superpozicije. S tog stanovišta, dovoljno je razmatrati samo jedan parcijalni poremećaj, što ćemo dalje koristiti. Štaviše, sa stanovišta matematičke teorije linearnih sistema, ako posmatramo signal greške kao izlaznu veličinu sistema, svejedno je da li posmatramo odziv sistema pri delovanju referentnog ulaza ili poremećaja. Dobar sistem, kako u jednom tako i u drugom slučaju, mora imati, u ustaljenom stanju, grešku manju od unapred zadate vrednosti. Zato ćemo, nadalje, posmatrati vrednost signala greške usled delovanja referentnog ulaza, a na specifičnosti usled delovanja poremećaja ukazaćemo posebno.

U drugm poglavljiju odredili smo funkciju spregnutog prenosa sistema po signalu greške, pri delovanju referentnog ulaza  $R(s)$ , u obliku



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s)}. \quad (5.1)$$

Iako je ova relacija važeća, bez obzira na to da li je sistem s krutom, elastičnom, jediničnom ili nejediničnom negativnom povratnom spregom, dalja izlaga

Sl. 5.1. Običan SAU s referentnim ulazom  $R(s)$  poremećajem  $F(s)$ .

nja imaju pun fizički smisao samo za sisteme s jediničnom negativnom povratnom spregom. Za sisteme s nejediničnom povratnom spregom prilaz ocenjivanju tačnosti treba modifikovati.

S obzirom na to da posmatramo statičko stacionarno (ustaljeno) stanje, nakon završetka prelaznih procesa u sistemu, može se pretpostaviti da  $t \rightarrow \infty$ . Na osnovu druge granične teoreme Laplasove transformacije važi da  $s \rightarrow 0$ . Stoga se funkcija spregnutog prenosa po grešci (5.1) može razviti u Tajlorov red, u okolini  $s=0$ . Na taj način se dobija:

$$\frac{1}{1 + W_p(s)} = \left[ \frac{1}{1 + W_p(s)} \right]_{s=0} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{i!} \frac{d^i}{ds^i} \left[ \frac{1}{1 + W_p(s)} \right] \right]_{s=0} s^i = \quad (5.2)$$

$$C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \dots$$

Veličine  $C_i$ ,  $i=0,1,2,\dots$ , nazivaju se *koeficijenti greške* ili *generalisane konstante greške*. Prve tri generalisane konstante greške određuju se po sledećim formulama:

$$C_0 = \left[ \frac{1}{1 + W_p(s)} \right]_{s=0}; C_1 = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{1 + W_p(s)} \right]_{s=0}; C_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{1}{1 + W_p(s)} \right]_{s=0}$$

U najvećem broju slučajeva funkcija prenosa po signalu greške je razložljena-racionalna funkcija po promenljivoj  $s$ , oblika

$$W_e(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad (5.3)$$

te se, razvoj u stepeni red može ostvariti deljenjem brojioca imeniocem, svrstavanjem članova brojioca i imenica po rastućim stepenima, kako je u (5.3) naznačeno.

Na osnovu (5.1) i (5.2) može se napisati:

$$E(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s) + C_3 s^3 R(s) + \dots \quad (5.4)$$

Prelazeći u vremenski domen, imajući u vidu da množenje kompleksnom promenljivom  $s$  predstavlja diferenciranje u vremenskom domenu, dobija se

$$e(t) = C_0 r(t) + C_1 \frac{d}{dt} r(t) + C_2 \frac{d^2}{dt^2} r(t) + C_3 \frac{d^3}{dt^3} r(t) + \dots \quad (5.5)$$

Ovaj izraz važi za dovoljno veliko  $t$ , teorijski za  $t \rightarrow \infty$ , kada se prelazni procesi u sistemu završe i nastupi stacionarno stanje. Razmotrimo njegovu primenu u slučaju delovanja tipičnih signala, uz napomenu da se na osnovu (5.4), primenom granične teoreme Laplasove transformacije može napisati i sledeći ekvivalentni izraz:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} C_0 sR(s) + \lim_{s \rightarrow 0} C_1 s^2 R(s) + \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow 0} C_2 s^3 R(s) + \dots \quad (5.6)$$

Odredimo najpre generalisane konstante greške sistema u zavisnosti od stepena astatizma sistema, a zatim veličinu greške sistema zavisno od tipa signala koji deluje na referentnom ulazu i definisati konstante greške sistema po klasičnoj definiciji.

Neka je funkcija povratnog prenosa sistema data u obliku

$$W_p(s) = \frac{W(s)}{s^r}; \quad W(0) = K, \quad K - \text{Bodeovo pojačanje sistema.}$$

Lako je pokazati da je  $C_0 = \frac{1}{1+K} \neq 0$  samo za  $r=0$ .

Konstanta  $C_1$  po definiciji je

$$C_1 = \frac{d}{ds} \frac{s^r}{s^r + W(s)} \Big|_{s=0} = \frac{rs^{r-1}[s^r + W(s)] - s^r[rs^{r-1} + W'(s)]}{[s^r + W(s)]^2} \Big|_{s=0} = \\ \frac{rs^{r-1}W(s) - s^rW'(s)}{[s^r + W(s)]^2} \Big|_{s=0}.$$

Ako je sistem astatizma nultog reda ( $r=0$ ):  $C_1 = -\frac{W'(0)}{[1+K]^2}$ . Za sistem astatiz-

ma prvog reda ( $r=1$ )  $C_1 = \frac{1}{K}$ , dok je za sistem astatizma  $r > 1$ ,  $C_1 = 0$ .

Na sličan način se dobija da za astatizam drugog reda  $C_2 = \frac{1}{K}$ ; za astatizam  $r > 2$ , ova konstanta greške je jednaka nuli, dok za astatizme  $r < 2$  ima neku vrednost koja nam nije od bitnog značaja za dalju analizu.

### 5.2.2 Konstante greške za tipične referentne ulaze

Neka na ulaz sistema deluju tipični signali: *odskočni, nagibni i parabolični*, definisani izrazima:

a) odskočni  $r(t) = r_0 h(t), r_0 = \text{const.}, \Rightarrow R(s) = r_0 / s$ ;

b) nagibni  $r(t) = v t h(t), v = \text{const.}, \Rightarrow R(s) = v_0 / s^2$ ;

c) parabolični  $r(t) = 0,5 a t^2 h(t), a = \text{const.}, \Rightarrow R(s) = a / s^3$ ;

gde je  $h(t)$  - Hevisajdova funkcija.

**A) Za odskočni ulazni signal** postoji samo prvi član u (5.5), a ostali su jednaki nuli, jer je, u ustaljenom stanju, diferencijal  $r_0 h(t)$  jednak nuli. Zbog toga je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} C_o s \frac{r_0}{s} = \frac{r_0}{1 + W_p(0)} = \frac{1}{1 + K_p} r_0, \quad (5.7)$$

gde je

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} W_p(s), \quad (5.8)$$

*konstanta položaja SAU.*

Na osnovu (5.8) može se zaključiti da će konstanta položaja imati konačnu vrednost, jednaku Bodeovom pojačanju, za statičke sisteme. Astaticki sistemi imaće beskonačno veliku konstantu položaja. Prema tome,

*statički sistemi imaju konačnu vrednost greške u ustaljenom stanju, pri delovanju odskočnih signala na referentnom ulazu, dok je kod astatickih sistema ona jednaka nuli.*

**B) Za nagibni ulazni signal** iz (5.5), sledi da je potrebno posmatrati samo prva dva člana, jer ostali postaju nule, zbog postojanja samo prvog izvoda nagibne funkcije. Stoga je, na osnovu (5.6)

$$e(\infty) = C_o \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{v}{s^2} + C_1 \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{v}{s^2} \quad (5.9)$$

Ako je sistem statički, greška sistema biće beskonačna, jer će prvi član na desnoj strani prethodnog izraza biti beskonačan. Za sistem astatizma prvog reda, veličina  $C_0=0$ , dok je  $C_1=1/K$ . Uvodeći definiciju da je  $K = \lim_{s \rightarrow 0} s W_p(s) = K_v$ ,

greska sistema imaće konačnu vrednost obrnuto proporcionalnu Bodeovom pojačanju. Prema tome, veličina greske sistema u ustaljenom stanju se određuje izrazom

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s W_p(s)} v = \frac{v}{K_v}; K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s W_p(s), \quad (5.10)$$

gde je  $K_v$  - konstanta brzine. Ona je za statičke sisteme jednaka nuli, za sisteme astatizma prvog reda je brojno jednaka Bodeovom pojačanju, a za sisteme astatizma drugog i višeg reda je beskonačna. Prema tome,

*statički sistemi ne mogu pratiti nagibne signale, sistemi astatizma prvog reda prate ih s konačnom greskom, a sistemi astatizma drugog i višeg reda - bez statičke greske.*

**C) Za parabolični ulazni signal** značajna su samo prva tri sabirka u (5.5), jer ovaj signal ima samo prva tri izvoda različita od nule

$$e(\infty) = C_o \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{a}{s^3} + C_1 \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{a}{s^3} + C_2 \lim_{s \rightarrow 0} s^3 \frac{a}{s^3}. \quad (5.11)$$

Ako je sistem statički odnosno astatizma prvog reda, prva odnosno druga komponenta signala greske u (5.11), u ustaljenom stanju, biće beskonačno velike pa će takav biti i signal greske, bez obzira na vrednost treće komponente. Kod sistema astatizma drugog reda, prvi i drugi član postaju jednaki nuli, tako da signal greske u stacionarnom stanju postaje

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

$$e(\infty) = C_2 \lim_{s \rightarrow 0} s^3 \frac{a}{s^3} = \frac{a}{K_a}; K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W_p(s). \quad (5.12)$$

Veličina  $K_a$  se naziva *konstanta ubrzanja sistema*. Kod statičkih sistema i sistema astatizma prvog reda ona je jednaka nuli, kod sistema astatizma drugog reda je brojno jednaka Bodeovom pojačanju, dok je za sisteme astatizma trećeg i višeg reda ona beskonačna. Zaključujemo:

*statički sistemi i sistemi astatizma prvog reda ne mogu da prate parabolične ulazne signale, sistemi astatizma drugog reda prate ih s konačnom statičkom greškom, a sistemi astatizma trećeg i višeg reda - bez statičke greške.*

Međutim, stabilnost sistema astatizma višeg reda (većeg od dva) se teško ostvaruje, što je osnovno ograničenje u ostvarivanju visokotačnih linearnih SAU.

Izrazi (5.7), (5.10) i (5.12) mogu se jednostavno dobiti i na osnovu (5.1), napisanom u obliku

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)} R(s),$$

uz korišćenje druge granične Laplasove teoreme ( $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ ) i

Laplasovih transformacija tipičnih ulaznih signala, što ostavljamo čitaocima da sami to pokažu.

Greške sistema u ustaljenom stanju, pri delovanju navedenih tipičnih signala, imaju i jasan fizički smisao za pozicione servosisteme elektromehaničkog tipa. Konstanta položaja definiše grešku takvog sistema u stacionarnom stanju, kada se zadata ugaona pozicija skokovito menja. Konstanta brzine definiše grešku ugaonog pozicioniranja kada se zadata pozicija menja konstantnom brzinom, a konstanta ubrzanja - kada se pozicija menja konstantnim ubrzanjem.

U prethodnom izlaganju su razmatrana regulaciona odstupanja pri delovanju sporopromenljivih ili tipičnih signala na referentnom ulazu sistema. S obzirom da je SAU podvrgnut i delovanju poremećaja, ukažimo i na mogućnosti ocene greške sistema u stacionarnom stanju pri delovanju samo poremećaja. Sa sl. 5.1 funkcija spregnutog prenosa po signalu greške u odnosu na poremećaj je

$$\frac{E_f(s)}{F(s)} = -\frac{W_2(s)}{1 + W_p(s)}, \quad (5.13)$$

i razlikuje se od (5.1), osim po znaku, još i postojanjem funkcije prenosa  $W_2(s)$  u brojiocu. Kada bi poremećaj delovao iza elementa  $W_2(s)$ , zaključci u pogledu njegovog uticaja na veličinu regulacionog odstupanja bi bili identični kao u prethodnom slučaju, s razlikom samo u znaku. Iz ovoga zaključujemo da astatizam, koji se nalazi ispred mesta delovanja poremećaja ima pozitivan uticaj na veličinu greške sistema izazvane tim poremećajem. Prema tome, ako je astatizam sistema sadržan u  $W_1(s)$ , a ne u  $W_2(s)$ , zavisno od stepena astatizma i tipa poremećaja, greška sistema izazvana poremećajem se ocenjuje na ranije opisani način.

**Primer 5.2.1.** Za sistem na sl. 5.1, sa:  $W_1(s) = \frac{K(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)}{s^r(sT + 1)}$ ,

$W_2(s) = \frac{1}{(sT_3 + 1)}$ , odrediti generalisane konstante greške, konstante greške pri delovanju tipičnih signala i veličinu signala greške u stacionarnom stanju, kada na ulaz sistema deluje referentni signal  $r(t) = [1 + t + 0,5t^2]h(t)$ , poremećaj je  $f(t) = h(t)$ , a parametri sistema su:  $K=10$ ,  $T_1=0,2$  s,  $T_2=0,5$  s,  $T=1$  s,  $T_3=0,5$  s, stepen astatizma je  $r=1$ .

$$\text{Povratni prenos sistema je } W_p(s) = \frac{K[s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2) + 1]}{s^r[s^2 T T_3 + s(T + T_3) + 1]}.$$

Funkcija spregnutog prenosa po signalu greške je

$$W_e(s) = \frac{s[s^2 T T_3 + s(T + T_3) + 1]}{s[s^2 T T_3 + s(T + T_3) + 1] + [s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2) + 1]} = \frac{s + s^2(T + T_3) + s^3 T T_3}{K + sK(T_1 + T_2) + Ks^2 T_1 T_2 + s + s^2(T + T_3) + s^3 T T_3} = \frac{s + 1,5s^2 + 0,1s^3}{10 + 8s + 2,5s^2 + 0,5s^3}.$$

Sistem je trećeg reda i stabilan je, pa ima smisla tražiti grešku u stacionarnom stanju.

Deljenjem brojčića imeniocem dobija se:

$$\begin{aligned} & (s + 1,5s^2 + 0,1s^3) : (10 + 8s + 2,5s^2 + 0,5s^3) = 0,1s + 0,07s^2 + \dots \\ & \underline{-(s + 0,8s^2 + 0,25s^3 + 0,05s^4)} \\ & \quad 0,7s^2 - 0,15s^3 - 0,05s^4 \end{aligned}$$

Nema smisla tražiti dalje konstante greške, jer zadati ulaz ima samo prvi i drugi diffencijal.

Generalisane konstante greške su:  $C_0=0$ ;  $C_1=0,1$ ;  $C_2=0,07$ .

Greška sistema u ustaljenom stanju, usled delovanja referentnog signala je:

$$e(t \rightarrow \infty) = 0,1 \frac{d}{dt} r(t) + 0,07 \frac{d^2}{dt^2} r(t) = 0,17 + 0,1t|_{t \rightarrow \infty}.$$

Konstanta položaja sistema je beskonačno velika, konstanta brzine je

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K[s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2) + 1]}{s[s^2 T T_3 + s(T + T_3) + 1]} = K = 10,$$

dok je konstanta ubrzanja jednaka nuli.

S obzirom da se ulazni signal  $r(t)$  sastoji iz tri komponente, može se odrediti greška za svaku od njih, a zatim ukupnu grešku dobiti sumiranjem. Dobiće se rezultat kao i primenom generalisanih konstanti greške za ustaljeno stanje.

Greška sistema usled delovanja poremećaja  $f(t) = h(t)$  na naznačenom mestu jednaka je nuli, jer ispred poremećaja postoji integracioni element (astatizam). Zaista, operatorski izraz za grešku sistema usled poremećaja je

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

$$E_p(s) = \frac{\frac{1}{(sT_3 + 1)}}{1 + \frac{K(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)}{s(sT + 1)} \frac{1}{(sT_3 + 1)}} F(s) = \\ \frac{s(sT + 1)}{K + sK(T_1 + T_2) + Ks^2 T_1 T_2 + s + s^2(T + T_3) + s^3 T T_3} \frac{1}{s}.$$

Na osnovu granične teoreme Laplasa sledi da će greška usled poremećaja konstantne vrednosti biti jednaka nuli.

### 5.2.3 Konstante greške i spregnuti prenos sistema

Ako je poznata funkcija spregnutog prenosa sistema s jediničnom povratnom spregom, njegov povratni prenos se lako nalazi na osnovu relacije

$$W_p(s) = \frac{W_s(s)}{1 - W_s(s)} \quad (5.14)$$

i određivanje konstanti greške se svodi na prethodni slučaj. Međutim, moguće je odrediti konstante greške i na osnovu poznavanja polova i nula funkcije spregnutog prenosa ne vršeći transformaciju (5.14). Neka je spregnuti prenos dat u obliku:

$$W_s(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (5.15)$$

Pošto je sistem s jediničnom povratnom spregom, signal greške se može dobiti iz relacije

$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - W_s(s)] R(s) = \\ \left[ 1 - \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right] = \left[ \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i) - K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right] R(s). \quad (5.16)$$

Ako na ulaz dovedemo odskočni signal i primenimo graničnu teoremu Laplasa, dobijemo

$$e(\infty) = \left[ \frac{\prod_{i=1}^n p_i - K \prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i} \right] = \frac{1}{1 + K_p} \Rightarrow K_p = \frac{K \prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i - K \prod_{j=1}^m z_j}. \quad (5.17)$$

Konstanta brzine i ubrzanja se mogu izračunati po sledećim formulama:

$$\frac{1}{K_v} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j}, \quad (5.18)$$

$$\frac{2}{K_a} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{K_v^2}. \quad (5.19)$$

U ovim relacijama se prepostavlja da je sistem minimalno-fazni i stabilan. Ako sistem nema konačnih nula, proizvod nula dobija vrednost 1.

### 5.3 Ocena ponašanja sistema u dinamičkim ustaljenim režimima

Dinamički ustaljeni režimi nastaju po završetku prelaznih procesa u stabilnim SAU pobuđivanim periodičnim signalima. Tada se sve koordinate stanja sistema i izlazne promenljive menjaju periodično. Neposredno posle dovođenja periodične pobude nastaje prelazni režim, u kome istovremeno egzistiraju dva procesa: *prelazni* i *prinudni*. Tokom vremena prelazni procesi isčezavaju i u sistemu nastupa dinamičko ustaljeno stanje. Ono se može analizirati u vremenskom ili u frekvencijskom domenu. Analiza u vremenskom domenu je složenija. Zbog toga se koristi frekvencijska analiza, uvedena u cilju pojednostavljenja ocene ponašanja sistema ne samo u dinamičkim ustaljenim stanjima, već i u prelaznim režimima. Nakon izučavanja parametara koji karakterišu ponašanje sistema u frekvencijskom i u vremenskom domenu, biće ukazano i na međusobne korelacije parametara ovih domena.

U trećoj glavi uveden je pojam frekvencijskog odziva sistema, koji se karakteriše frekvencijskom funkcijom prenosa ili kompleksnim koeficijentom pojačanja, na osnovu koga su definisane: *amplitudno-fazno-frekvencijska* (AFFK), *amplitudno-frekvencijska* (AFK) i *fazno-frekvencijska* (FFK) karakteristike. U njoj su izučene različite mogućnosti grafičkog predstavljanja tih karakteristika. Dalje ćemo, za svaki od oblika grafičke prezentacije, ukazati na mogućnosti definicije parametara koji karakterišu ponašanje sistema u prelaznim režimima i u ustaljenom stanju.

#### 5.3.1 AFFK i ocena ponašanja sistema

Razmatraćemo sistem drugog reda bez povratne sprege, njegovu AFFK, koja u tom slučaju postaje Nikvistova kriva, i na osnovu nje definisati parametre koji karakterišu ponašanje sistema po zatvaranju povratne sprege.

U poglavlju o stabilnosti sistema, izučavajući Nikvistov kriterijum stabilnosti, upoznali smo se s dva parametra koji karakterišu ponašanje spregnutog sistema: *pretekom faze* i *pretekom pojačanja* (videti: str. 100). Oni ukazuju na stepen stabilnosti sistema. Pretek faze je značniji za ocenu ponašanja sistema. Sistem s malim pretekom faze je suviše oscilatoran i ima dugo vreme smirenja, dok sistem sa suviše velikim pretekom faze (blizak  $\pi/2$ ) je aperiodičan i ima sporo delovanje. Za sistem drugog reda, funkcije povratnog prenosa

$$W_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad (5.20)$$

spregnuti prenos je

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

$$W_s(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (5.21)$$

Pokazaćemo da je optimalan pretek faze blizu  $\pi/3$ , kada sistem najbrže dolazi u stacionarno stanje. Iz teorije optimalnih sistema [14] poznato je da sistem drugog reda (5.21) optimalan po brzini ima koeficijent relativnog prigušenja  $\zeta = \sqrt{2}/2$ . Pretek faze je po definiciji

$$\phi_{pf} = \pi + \arg W_p(j\omega_p); \quad |W_p(j\omega_p)| = 1.$$

Iz (5.20) nalazimo:

$$|W_p(j\omega_p)| = \left| \frac{\omega_n^2}{j\omega_p(j\omega_p + 2\zeta\omega_n)} \right| = \frac{\omega_n^2}{\omega_p \sqrt{\omega_p^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} = \frac{\left( \frac{\omega_n}{\omega_p} \right)^2}{\sqrt{1 + 4\zeta^2 \left( \frac{\omega_n}{\omega_p} \right)^2}} = 1,$$

odakle se dobija

$$\left( \frac{\omega_n}{\omega_p} \right)^2 = 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}. \quad (5.22)$$

Sada je

$$\arg W_p(j\omega_p) = \arg \frac{\omega_n^2}{j\omega_p(j\omega_p + 2\zeta\omega_n)} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2\zeta} \left( \frac{\omega_p}{\omega_n} \right).$$

Pretek faze je

$$\phi_{pf} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2\zeta} \left| \frac{1}{\omega_n / \omega_p} \right|. \quad (5.23)$$

$$\text{Za } \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ je } \frac{\omega_n}{\omega_p} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \text{ pa je } \phi_{pf} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = 65,53^\circ.$$

Obično se, u praksi, dozvoljava veći stepen oscilatornosti, odnosno manji koeficijent relativnog prigušenja, tako da se pretek faze smanjuje. Dobra orijentacija za praksu je pretek faze od oko  $\pi/4$ , a pokazaćemo da se može uspostaviti i približna linearna zavisnost između  $\zeta$  i  $\phi_{pf}$  za manje preteke faze od ove vrednosti.

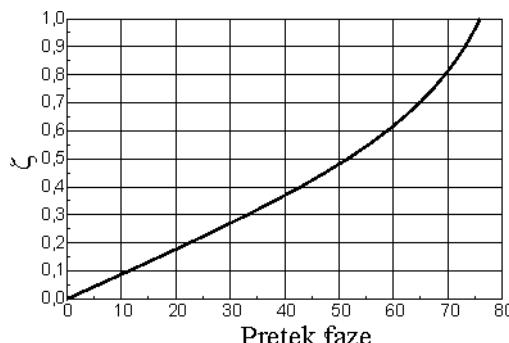
### 5.3.1.1 Zavisnost $\zeta$ i $\phi_{pf}$ u sistemu drugog reda bez konačnih nula

Na osnovu (5.23) i (5.22), za posmatrani sistem drugog reda, može se konstruisati grafička zavisnost (Sl. 5.2) između koeficijenta relativnog prigušenja i preteka faze na osnovu izraza

$$\phi_{pf} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}. \quad (5.24)$$

Na grafiku se može uočiti da u opsegu preteka faze do  $40^\circ$  postoji linearna zavisnost  $\zeta$  i  $\phi_{pf}$ . Ona se može izraziti relacijom

$$\zeta = \frac{1}{2} \phi_{pf}, \phi_{pf} [rad] ; 0 \leq \phi_{pf} \leq 40^\circ. \quad (5.25)$$



Sl. 5.2. Zavisnost koeficijenta relativnog prigušenja  $\zeta$  od veličine preteka faze sistema drugog reda bez konačnih nula.

Štaviše, ova relacija se može približno koristiti i za procenu koeficijenta relativnog prigušenja i za veće preteke faze, do negde  $60^\circ$ . Osim toga, treba napomenuti da je relacija (5.25) određena za sistem čiji je povratni prenos drugog reda bez konačnih nula i astatizma prvog reda. Dati odnosi se mogu približno koristiti i za sisteme višeg reda s izraženim dominantnim polovima, okarakterisanim koeficijentom relativnog prigušenja  $\zeta$ .

### 5.3.1.2 Ocena ponašanja sistema na osnovu amplitudno-frekvencijske karakteristike spregnutog prenosa

Druga metoda za ocenu ponašanja sistema u vremenskom domenu, na osnovu frekvencijskih karakteristika, zasniva se na poznavanju parametara amplitudno-frekvencijske i fazno frekvencijske karakteristike spregnutog prenosa sistema. Pri tome relacije određene tačno za sistem drugog reda (5.21), važiće približno i za sisteme višeg reda s izraženim dominantnim polovima. Amplitudno-frekvencijska karakteristika sistema (5.21) je data sa

$$|W_s(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega^2}} \quad (5.26)$$

ili

$$|W_s(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}}. \quad (5.27)$$

Njen tipičan izgled u funkciji relativne frekvencije  $v = \omega/\omega_n$  i  $\zeta$  prikazan je na sl. 5.3.

### 5.3.1.3 Pokazatelj oscilatornosti i rezonantna frekvencija

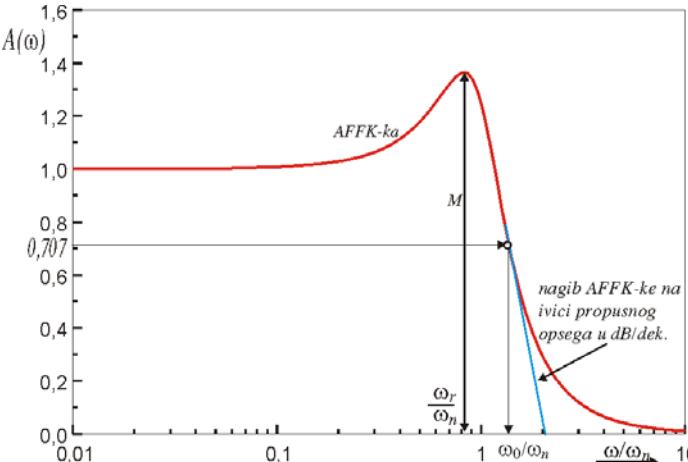
Na osnovu (5.27) može se odrediti maksimalna vrednost amplitudno-frekvencijske karakteristike  $M$  (pokazatelj oscilatornosti) i frekvencija  $v_r$  na kojoj on nastaje (rezonantna frekvencija). Zatražimo minimalnu vrednost imenioca u tom izrazu. Diferencirajući izraza pod korenom po  $v$  nalazimo:

$$\frac{d}{dv} [(1 - v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2] = \frac{d}{dv} [v^4 - 2(1 - 2\zeta^2)v^2 + 1] = 4v(v^2 - (1 - 2\zeta^2)).$$

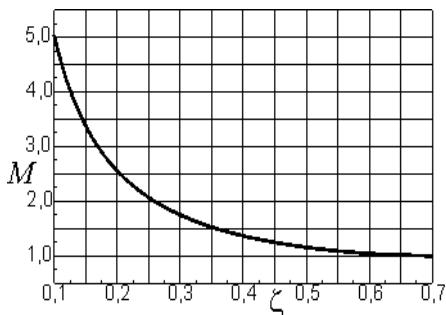
## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

Izjednačavanjem ovog izraza s nulom dobija se

$$v_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (5.28)$$



Sl. 5.3. Amplitudno-frekvencijska karakteristika sistema drugog reda bez konačnih nula i karakteristični parametri na njoj. Karakteristika je nacrtana za  $\zeta=0,4$ .



Sl. 5.4. Zavisnost pokazatelja oscilatornosti  $M$  od koefficijenta relativnog prigušenja  $\zeta$

Za  $\zeta=0$ , maksimum će biti pri relativnoj frekvenciji  $v=1$ . Iz ovoga se zapaža da se s porastom  $\zeta$  maksimum amplitudno-frekvencijske karakteristike pomera uлево.

Pored rezonantne frekvencije  $\omega_r=v_r\omega_n$  i rezonantnog vrha  $M$ , kao parametri koji karakterišu dinamičko ponašanje sistema koriste se i *propusni opseg* i *selektivnost*.

**5.3.1.4 Propusni opseg**  $\omega_0$ . To je ona frekvencija, iza rezonantnog vrha, na kojoj amplituda opadne za 3 dB od vrednosti pri nultoj frekvenciji. Propusni opseg karakteriše brzinu delovanja sistema. Sistem s širim propusnim opsegom je brži. Za analizirani sistem drugog reda može se naći analitička zavisnost propusnog opsega i parametara  $\zeta$  i  $\omega_n$ . Na osnovu definicije propusnog opsega imamo:

Pri tome je vrednost rezonantnog vrha

$$M = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5.29)$$

Iz (5.29) se vidi da je rezonantni vrh isključivo funkcija koefficijenta relativnog prigušenja sistema, sl. 5.4. Osim toga, maksimumi se javljaju samo za

$$\zeta \leq \sqrt{2}/2.$$

Za  $\zeta = \sqrt{2}/2$  nastupa granični slučaj kada je  $M=1$  i maksimalna vrednost se javlja pri nultoj relativnoj frekvenciji.

$$|W_s(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - v_0^2]^2 + 4\zeta^2 v_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rešavajući ovu relaciju po relativnoj frekvenciji propusnog opsega  $v_0$  dobija se

$$v_0 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}. \quad (5.30)$$

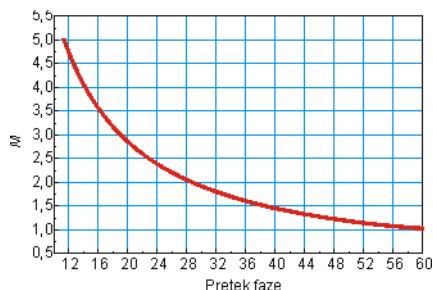
**5.3.1.5 Selektivnost.** Važna osobina sistema je i sposobnost potiskivanja neželjenih signala (poremećaja) neposredno iza propusnog opsega. Ta karakteristika se naziva *selektivnost*. Ona se definiše stepenom nagiba amplitudnofrekvenčne karakteristike na ivici propusnog opsega i, obično se izražava negativnim nagibom u dB/dekadi.

#### 5.3.1.6 Zavisnost između preteka faze i pokazatelja oscilatornosti

S obzirom na to da  $\phi_{pf}$  i  $M$  zavise isključivo od  $\zeta$ , može se uspostaviti i odgovarajuća korelacija između  $\phi_{pf}$  i  $M$ . Ona je za razmatrani sistem prikazana na sl. 5.5.

Eksplicitna analitička zavisnost između minimalne vrednosti preteka faze i pokazatelja oscilatornosti može se odrediti i na drugi način. U tom cilju pokazaćemo, najpre, jednu metodu procene stepena oscilatornosti sistema na osnovu Nikvistove krive.

Razmotrimo Nikvistovu krivu sistema (5.20) i odredimo veličinu rezonantnog vrha iz te karakteristike. Ako napišemo izraz za amplitudno-frekvenčnu karakteristiku spregnutog sistema (5.21) u sledećem obliku



Sl. 5.5. Zavisnost pokazatelja oscilatornosti  $M$  od preteka faze  $\phi_{pf}$ .

Kvadrirajući ovaj izraz dobija se

$$M^2 - 2M^2R + M^2R^2 + M^2I^2 - R^2 - I^2 = 0.$$

Sređivanjem i delenjem sa  $(M^2 - 1)$  dobija se izraz

$$R^2 + I^2 - 2\frac{M^2}{M^2 - 1}R + \frac{M^2}{M^2 - 1} = 0. \quad (5.33)$$

U koordinatnom sistemu amplitudno-fazne karakteristike (u  $W_p(j\omega)$ -ravni) ovo je jednačina kruga s centrom na realnoj osi, na udaljenosti

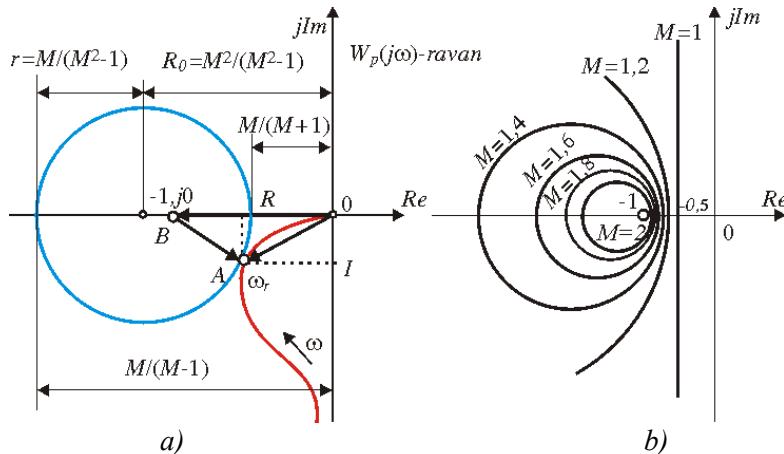
$$|W_s(j\omega_r)| = \frac{|W_p(j\omega_r)|}{|1 + W_p(j\omega_r)|} = M, \quad (5.31)$$

zaključujemo da je brojilac ovog izraza jednak duži OA, sl. 5.6, dok je imenilac jednak odsečku BA.

Na osnovu sl. 5.6 može se napisati

$$\frac{OA}{BA} = \frac{\sqrt{R^2 + I^2}}{\sqrt{(1 - R)^2 + I^2}} = M. \quad (5.32)$$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU



Sl. 5.6. Grafičko određivanje pokazatelje oscilatornosti (a) i izgled M-krugova.

$$R_0 = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \quad (5.34)$$

od koordinatnog početka, i s poluprečnikom

$$r = \frac{M}{M^2 - 1}. \quad (5.35)$$

Ovi krugovi presecaće negativni deo realne ose u tačkama

$$-(R_0 \pm r) = \frac{M^2}{M^2 - 1} \pm \frac{M}{M^2 - 1} = \left[ -\frac{M}{M-1}, -\frac{M}{M+1} \right]. \quad (5.36)$$

Na sl. 5.6b prikazani su *M-krugovi*. Sistem će imati onaj pokazatelj oscilatornosti  $M$  čiji *M-krug* tangira Nikvistova kriva.

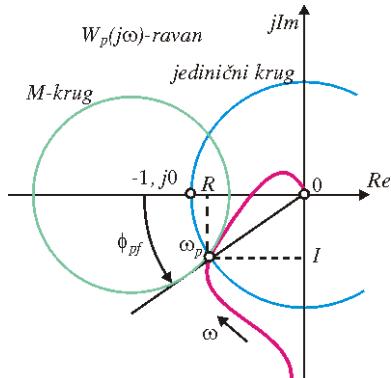
Sada možemo pristupiti određivanju analitičke zavisnosti minimalnog preteka faze i pokazatelja oscilatornosti. S obzirom na to da sistem ima pokazatelj oscilatornosti čiji *M-krug* tangira Nikvistova kriva, najmanji mogući pretek faze biće u slučaju kada ona tangira isti pri presečnoj učestanosti pojačanja  $\omega_p$ , sl. 5.7. Nalazeći presek odgovarajućeg *M-kruga* i kruga jediničnog radijusa s centrom u koordinatnom početku, nalazimo tačku presečne frekvencije pojačanja, a na osnovu nje pretek faze.

Jednačina *M-kruga* je data sa (5.33), a jedinični krug ima jednačinu

$$R^2 + I^2 = 1.$$

Zamenjujući ovu relaciju u (5.33) nalazimo apscisu preseka

$$R = 1 - \frac{1}{2M^2}. \quad (5.37)$$



Sl. 5.7. Određivanje minimalnog preteka faze u funkciji pokazatelja oscilatornosti.

Iz trougla, čija je hipotenuza jednaka jedinici, a nalegra kateta vrednosti izraza (5.37) nalazi se minimalni pretek faze za dati M-krug:

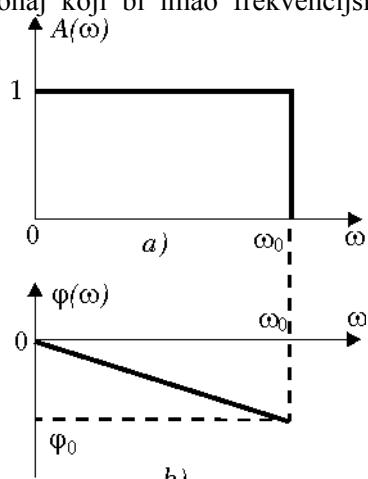
$$\phi_{pf \min} = \arccos\left(1 - \frac{1}{2M^2}\right). \quad (5.38)$$

Na taj način je uspostavljena korelacija između frekvencijskog i vremenskog domena za posmatrani sistem drugog reda. Ove relacije približno će važiti i za sisteme višeg reda pod napred navedenim uslovima.

### 5.3.1.7 Uticaj fazno-frekvencijske karakteristike na ponašanje sistema.

#### Vremensko kašnjenje

Sa stanovišta prenosa i vernošći reprodukcije signala, idealan sistem bi bio onaj koji bi imao frekvencijsku funkciju spregnutog prenosa nezavisnu od frekvencije u frekvencijskom opsegu od interesa. S obzirom na to da sistemi upravljanja prenose niskofrekvencijske signale, idealan sistem bi imao amplitudno-frekvencijsku karakteristiku kao na sl. 5.8a. Pri tome, oblik signala na izlazu sistema biće potpuno isti kao na ulazu, ako u sistemu ne postoje inercijalna kašnjenja već samo transportno kašnjenje. To znači da bi idealan sistem imao fazno-frekvencijsku karakteristiku elementa transportnog kašnjenja. Ta karakteristika je linearna funkcija frekvencije i može biti definisana samo za propusni opseg, a prikazana je na sl.5.8b. S toga, kod realnih sistema, nagib fazno-frekvencijske karakteristike definiše vremensko kašnjenje sistema u prenosu



Sl. 5.8. Amplitudno-frekvencijska i fazno-frekvencijska karakteristika idealnog sistema.

informacije:  $T_k(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ , što za idealni sistem daje  $T_k = -\frac{\Phi_0}{\omega_0}$ .

## 5.4 Ocena ponašanja sistema u prelaznim režimima

U prethodnom odeljku smo ocenjivali ponašanje sistema na osnovu dinamičkih ustaljenih režima (frekvencijski domen) i uspostavljali korelaciju između parametara koji karakterišu frekvencijski domen i parametara sistema kao osculatornog elementa drugog reda. Ranije, u trećem poglavljju, kada smo izučavali odzive osculatornog elementa drugog reda, uočili smo da karakter

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

prelaznog procesa zavisi isključivo od koeficijenta relativnog prigušenja  $\zeta$ . S toga i pokazatelji frekvencijskog domena, pretek faze  $\phi_{pf}$  i pokazatelj oscilatornosti  $M$ , su funkcije  $\zeta$ .

U sistemima višeg reda nije moguće tačno okarakterisati ponašanje sistema samo koeficijentom relativnog prigušenja para polova najbližih imaginarnoj osi. Na karakter prelaznog procesa utiču i druge kritične frekvencije (polovi i nule), utoliko više ukoliko su one bliže dominantnim polovima. Osim toga, nije svejedno da li su te kritične frekvencije realne ili kompleksne. Stoga je potrebno, za ocenu ponašanja sistema, definisati i druge parametre koji karakterišu odziv sistema u vremenskom području. Pri tome se mogu koristiti kako odskočni tako i impulsni odziv. S obzirom na to da je odskočni odziv pogodniji s praktične tačke gledišta, definisacemo tipične parametre koji karakterišu sistem putem odskočnog odziva.

### 5.4.1 Parametri odskočnog odziva sistema

Na sl. 5.9. dat je tipičan odskočni odziv SAU. Na njemu su prikazani parametri koji karakterišu ponašanje sistema u vremenskom domenu i često se specificiraju kao tehnički zahtevi za projektovanje sistema.

**Vreme kašnjenja** ( $T_k$ ) predstavlja vreme potrebno da odskočni odziv dostigne polovinu svoje ustaljene vrednosti.

Ovim parametrom se želi ukazati na potrebno vreme da sistem upravljanja na svom izlazu ima primetan signal.

**Vreme uspona** ( $T_u$ ) je vreme potrebno da odskočni odziv sistema poraste od 10% do 90% svoje ustaljene vrednosti.

Ovaj parametar definiše kako brzinu reagovanja sistema, tako i stepen izobličenja. S obzirom da je na ulaz doveden odskočni signal, sa strmom prednjom ivicom, idealan sistem bi imao vreme uspona jednako nuli. Kod realnog sistema, poželjno je da to vreme bude što je moguće manje u cilju smanjenja izobličenja. Međutim, skarćenje tog vremena može da ide na uštrb drugim parametrima. Vreme uspona može se definisati i kao recipročna vrednost diferencijala odskočnog odziva za  $t=T_k$ . Osim toga, za sisteme s preskokom manjim od 10%, empirijski je utvrđeno da važi relacija

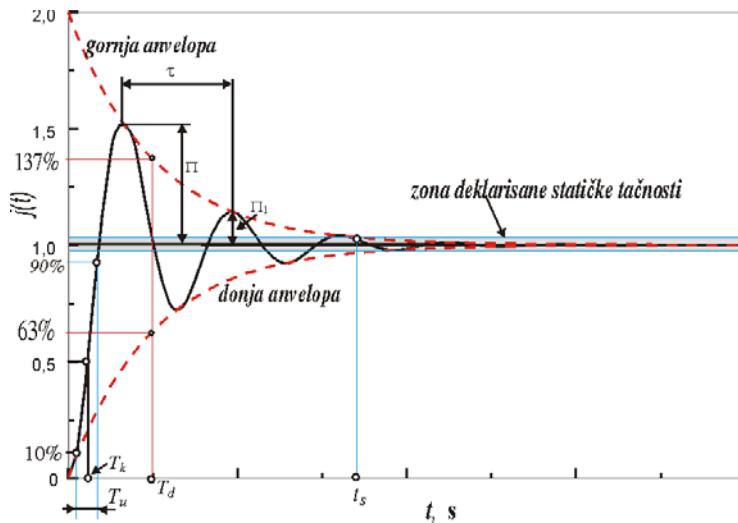
$$T_u \omega_0 = 2 - 2,5.$$

**Preskok** ( $\Pi$ ) je razlika između vrednosti prvog maksimuma u odzivu i vrednosti odziva sistema u ustaljenom stanju.

On se obično daje u %. Shodno ranije razmotrenom ponašanju sistema drugog reda, preskok je neposredno povezan s koeficijentom relativnog prigušenja  $\zeta$  (videti sl. 3.10, str. 57). S obzirom na to da od  $\zeta$  zavise pretek faze i pokazatelj oscilatornosti  $M$ , jasno je da preskok karakteriše stepen stabilnosti sistema. Sistemi s velikim preskocima su blizu granice stabilnosti. U praksi se, obično, dozvoljava preskok reda 20-30%. Sistem drugog reda (5.21) optimalan po brzini ima preskok od 4,7%. U nekim slučajevima nesme se dozvoliti pojava preskoka (na primer, u sistemima pozicioniranja robota).

**Vreme smirenja** ( $t_s$ ) je vreme potrebno da odziv sistem dođe u zonu deklarisane staticke tačnosti i da iz nje ne izlazi.

Mnogi autori ovo vreme vezuju za zonu staticke tačnosti od  $\pm 2\%$  ili, češće,  $\pm 5\%$ . Definicija koju smo dali u potpunosti definiše vreme smirenja. Proizvođač sistema deklariše staticku tačnost svog uređaja. Ona može biti iz klase tačnosti  $0,1\%$ . Stoga vreme smirenja mora biti definisano u skladu s tom tačnošću.



Sl. 5.9 Tipični odskočni odziv SAU i definicija njegovih parametara.

**Perioda oscilovanja** ( $\tau$ ) je vremenski interval između dva susedna maksimuma (minimuma) odskočnog odziva.

Ona karakteriše frekvenciju samooscilacija, a samim tim i brzinu sistema.

**Dominantna vremenska konstanta** ( $T_d$ ) predstavlja vreme potrebno da donja anvelopa odziva poraste na vrednost  $63\%$  od ustaljene vrednosti odziva, dnosno da gornja anvelopa opadne na vrednost od  $137\%$  od vrednosti ustaljenog stanja odziva.

Ona, takođe, govori o brzini reagovanja sistema. Sistem se, sa stanovišta uspostavljanja stacionarnog stanja, može posmatrati kao inercijalni element prvog reda s vremenskom konstantom  $T_d$ , čiji je odskočni odziv

$$1 - e^{-t/T_d}.$$

Postavljajući zahtev da taj odskočni odziv naraste na vrednost  $1 - e^{-1}$ , što je  $63\%$  vrednosti ustaljenog stanja, dolazi se do zaključka da se to postiže za vreme  $t = T_d$ .

U sistemu drugog reda, anvelopa odskočnog odziva određena je relacijom

$$1 - e^{-\sigma t} = 1 - e^{-\zeta \omega_n t}.$$

Zbog toga se, u sistemima višeg reda,  $T_d$  može proceniti na osnovu položaja dominantnih polova izrazom

$$T_d \leq \frac{1}{\xi \omega_n}. \quad (5.39)$$

Neki autori uvode i *stepen prigušenja* kao parametar, definisan kao odnos razlike prvog i drugog preskoka s prvim preskokom, tj.

$$\psi = \frac{\Pi - \Pi_1}{\Pi}.$$

Kod sistema višeg reda, prelazni proces se određuje svim korenima karakteristične jednačine, kao i nulama funkcije prenosa, pa ovaj pokazatelj, kao i koeficijent relativnog prigušenja  $\zeta$ , treba koristiti uz nužan oprez.

Zbog toga je potrebno dobro poznavati raspodelu korena karakteristične jednačine u *s-ravni*. Najbolja metoda za izučavanje kretanja korena karakteristične jednačine, kada se neki parametar (obično pojačanje) menja, je metoda Ivensa-Todorčika ili *metoda geometrijskog mesta korena* (GMK)(videti poglavlje 5.5).

Pre nego što izučimo tu metodu, ocenićemo ponašanje sistema drugog reda u prisustvu konačne nule, kao i sistema trećeg reda s jednim realnim i dva konjugovano-kompleksna pola.

#### 5.4.2 Uticaj konačne nule na karakteristike sistema drugog reda s konjugovano kompleksnim polovima

Neka je dat sistem drugog reda

$$W_s(s) = \frac{sT_1 + 1}{s^2 T^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{(s+z)\omega_n^2}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, z = \frac{1}{T_1} > 0; \omega_n = \frac{1}{T} > 0. \quad (5.40)$$

Potrebno je izučiti uticaj konačne nule  $z$  na ponašanje sistema, u prvom redu njen uticaj na vremenske karakteristike. U tom cilju iskoristićemo već poznati impulsni i odskočni odziv oscilatornog elementa drugog reda (videti poglavlje 3, str. 54-56). Rastavljujući (5.40) na dva sabirka, za odskočni odziv sistema može se napisati:

$$j_z(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} = \frac{1}{z} w(t) + j(t) \quad (5.41)$$

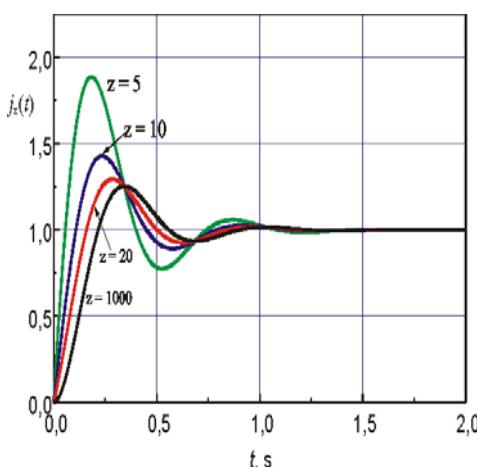
gde su:  $w(t)$  i  $j(t)$  - normalni impulsni i odskočni odzivi oscilatornog elementa drugog reda.

Analizirajući (5.41) vidi se da se normalni odziv, u ovom slučaju, sastoji iz dve komponente: normalnog odziva oscilatornog elementa drugog reda, čiji karakter zavisi od koeficijenta relativnog prigušenja  $\zeta$ , i normalnog impulsnog odziva tog istog elementa umanjenog  $z$  puta. Na osnovu ovoga se, najpre, može zaključiti da je uticaj konačne nule utoliko manji ukoliko je ona što levlje u *s-ravni*. Dalje, s obzirom na to da je impulsni odziv jednak diferencijalu odskočnog odziva, veličina odskočnog odziva sistema s konačnom nulom u trenucima ekstremalnih vrednosti odskočnog odziva oscilatornog elementa neće se menjati. Međutim, frontovima (prednjem i zadnjem) u odskočnom odzivu oscilatornog elementa, zbog uticaja diferencijalnog elementa, dodavaće se (odnosno oduzimati) odgovarajuće vrednosti impulsnog odziva oscilatornog

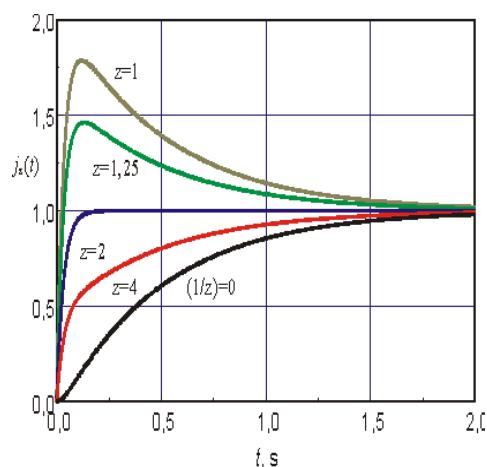
elementa. Zbog toga će ekstremumi odskočnog odziva sistema s konačnom nulom nastupati ranije i biti izraženiji utoliko više ukoliko je realna nula bliža koordinatnom početku. To je ilustrovano na sl. 5.10. S te slike jasno se uočava da se svi odzivi presecaju u tačkama ekstremuma odskočnog odziva sistema bez konačnih nula. Izraz za odskočni odziv dobija se u obliku

$$j_z(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \theta) \right]; \theta = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\left( \frac{\omega_n}{z} - \zeta \right)}$$

iz koga se analizom može doći do zaključka da je preskok obrnuto сразмерan kako veličini modula konačne nule tako i faktoru relativnog prigušenja.



Sl. 5.10. Odskočni odzivi sistema drugog reda s konačnom nulom za različite vrednosti konačne nule  $z$  i  $\zeta=0,4$ .



Sl. 5.11. Odskočni odzivi sistema drugog reda s konačnom nulom ( $z$ ) i realnim polovima: -2 i -30.

### 5.4.3 Uticaj konačne nule na odziv sistema drugog reda s realnim polovima

Iako, generalno govoreći, konačne nule unose dozu nestabilnosti u sistem, njihovo prisustvo može imati veoma blagotvorno dejstvo na dinamičko ponašanje sistema drugog reda s realnim polovima. U slučajevima kada je sistem suviše spor, prisustvo konačne nule povećava brzinu reagovanja sistema. To je ilustrovano na sl. 5.11 za sistem drugog reda s realnim polovima (-2 i -30), gde su prikazani odskočni odzivi za različite vrednosti konačne nule. Treba istaći da se neke metode projektovanja sistema upravljanja zasnivaju na unošenju konačne nule (konačnih nula) u sistem u cilju eliminacije uticaja neželjenih polova, koji usporavaju dinamiku sistema (videti odeljak sinteze sistema postupkom skraćivanja i metodu kaskadne kompenzacije, gl. 6., str. 197, 208-211).

#### 5.4.4 Uticaj realnog pola u sistemu trećeg reda s parom kompleksnih polova

Interesantan je i uticaj realnog pola u sistemu trećeg reda s parom konjugovano-kompleksnih polova. Neka je dat sistem

$$W_s(s) = \frac{1}{(sT_1 + 1)(s^2 T^2 + 2\zeta Ts + 1)} = \frac{p\omega_n^2}{(s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, p = \frac{1}{T_1} > 0;$$

Ako funkciju prenosa rastavimo na dva razlomka

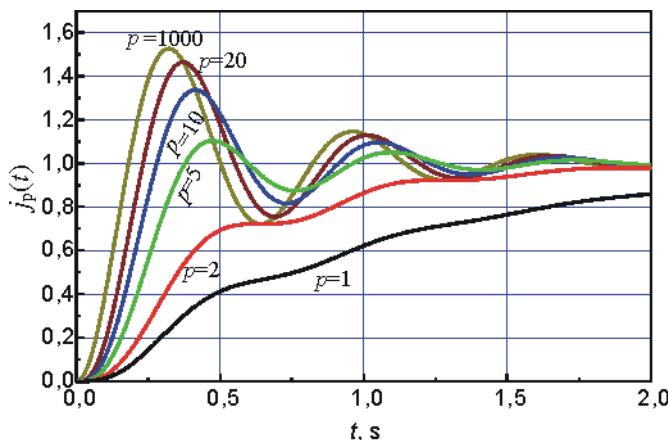
$$W_s(s) = \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{A}{s + p}$$

dobija se:

$$B = -A = \frac{p\omega_n^2}{p(2\zeta\omega_n - p) - \omega_n^2}; C = (2\zeta\omega_n - p)B.$$

Sada se funkcija prenosa može napisati u obliku

$$W_s(s) = \frac{p\omega_n^2}{p(2\zeta\omega_n - p) - \omega_n^2} \left[ \frac{s + (2\zeta\omega_n - p)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{1}{s + p} \right].$$



Sl. 5.12. Uticaj realnog pola ( $p$ ) u sistemu trećeg reda sa dva kompleksna pola:  $\zeta=0,2$ ;  $\omega_n=10$ .

Analizom ovog izraza može se uočiti da će odskočni odziv biti sastavljen iz tri komponente: odziva inercijalnog elementa prvog reda s polom -  $p$ , i odziva oscilatornog elementa drugog reda s konačnom nulom  $z = 2\zeta\omega_n - p$ . Stacionarno stanje je ravno jedinici. Odziv inercijalnog člana se karakteriše eksponentom  $e^{-pt}$  i imaće utoliko značajniji uticaj na odskočni odziv ukoliko je  $p$  manje. Za veliko  $p \rightarrow \infty$  inercijalni element daje brz odziv, njegov prelazni proces brzo isčezava i ne dominira, jer je, tada, koeficijent pojačanja mali. Tada će dominantan uticaj na prelazni proces imati oscilatorni element s konačnom nulom. Međutim, vrednost konačne nule, takođe, zavisi od pola  $p$ . Može se reći

da vrednost pola bliska  $2\zeta\omega_n$  ima stabilijuće dejstvo, odnosno popravlja dinamičke karakteristike sistema. Vrednosti daleko veće (pet i više puta od ukazane) imaju mali uticaj na dinamičko ponašanje sistema, okarakterisano sistemom drugog reda s kompleksnim polovima, dok vrednost realnog pola manja za dva i više puta od njih bitno usporavaju sistem.

#### 5.4.5 Polovi i nule čiji se uticaj može zanemariti

U prethodnom izlaganju smo uočili da se uticaj realnih stabilnih nula i polova, koji se nalaze levo i daleko od dominantnih polova sistema, može zanemariti za ocenu karaktera prelaznog procesa. Ova konstatacija može se proširiti i na konjugovano - kompleksne polove i nule koji su znatno levije od dominantnih polova.

Ako su stabini pol i nula sistema jednaki ili bliski (čine *dipol*) njihovi uticaji na ponašanje sistema se međusobno kompenzuju. Zbog toga se takvi polovi i nule mogu zanemariti (skratiti). Na osnovu ovoga principa zasniva se metoda skraćivanja u projektovanju sistema. *Treba istaći da se ne sme zanemarivati uticaj dipola u desnoj poluravni, odnosno da nije dozvoljeno njihovo skraćivanje.* O tome će biti više reči u odeljku o robustnosti pri sintezi sistema.

### 5.5 Metoda geometrijskog mesta korena (GMK) Metoda Ivensa-Teodorčika

#### 5.5.1 Uvod

U prethodnim odeljcima ovog poglavlja pokazano je da je moguće ostvariti dovoljnu dobru procenu ponašanja sistema, ako se znaju dominantni polovi funkcije spregnutog prenosa i relativni položaj ostalih polova i nula sistema u odnosu na te dominante polove. Istaknimo, još jednom, da se *pod dominantnim polovima podrazumevaju dva konjugovano-kompleksna pola najbliže imaginarnoj osi*. Za potpunu ocenu ponašanja sistema u vremenskom domenu potrebno je poznavanje polova i nula funkcije spregnutog prenosa sistema. Pri tome uvek imamo u vidu stabilan sistem, jer nema smisla procenjivati ponašanje nestabilnog sistema.

U realnom sistemu, usled promene parametara, menjaju se koreni karakteristične jednačine, a samim tim i osobine sistema. S druge strane, pri projektovanju se uvek nastoji da se izaberu neki parametri čijom se varijacijom (podesavanjem) vrši optimalizacija ponašanja sistema. I u fizički realizovanom sistemu takvi elementi za podešavanje skoro uvek postoje. Ti promenljivi ili podešljivi parametri izazivaju migraciju korena karakteristične jednačine sistema. Skokovita izmena parametara dovodi do skokovite promene, dok kontinualna - do kontinualne promene korena karakteristične jednačine. Pri tome, možemo reći da koreni karakteristične jednačine u *s-ravni* opisuju neke kontinualne krive koje nazvamo *geometriskim mestom korena* (engl. *root locus*, ruski: *корневые годографы*). Dakle,

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

geometrijsko mesto korena su kontinualne krive u s-ravni po kojima se kreću koreni karakteristične jednačine pri kontinualnoj promeni nekog parametra sistema, najčešće pojačanja povratnog prenosa.

Na ideju da se konstruiše GMK prvi je došao ruski naučnik Teodorčik. On je postavio osnove metode GMK. Međutim, metodu je za praktičnu primenu do detalja razradio američki naučnik Ivens (Evans), mada su za razvoj metode zaslužni i drugi autori, na primer, Bendrikov i Uderman u Rusiji. Ivens je konstruisao i specijalnu napravu za lakšu konstrukciju GMK - *Spirul*. Ta naprava omogućava lako sumiranje uglova i množenje brojeva. Međutim, u jednostavnijim slučajevima, koristeći razrađena pravila, može se bez upotrebe bilo kakve naprave skicirati GMK. Za složenije slučajeve mogu se koristiti razvijeni programski paketi za personalne računare koji automatski iscrtavaju GMK.

### 5.5.2 Polazne osnove metode GMK

Polazne osnove metode GMK su krajnje jednostavne. Karakteristična jednačina sistema s povratnom spregom je data poznatom relacijom

$$1 + W_p(s) = 0, \quad (5.42)$$

pri čemu se, kod primene algebarskih kriterijuma stabilnosti i kriterijuma stabilnosti Mihajlova, zbog toga što je  $W_p(s)$  razlomak, podrazumeva da je relacija (5.42) svedena na algebarsku jednačinu. Kod primene Nikvistovog kriterijuma stabilnosti koristi se  $W_p(j\omega)$ , dok se u metodi GMK koristi  $W_p(s)$  u celini. Stoga se može reći da metoda GMK pruža više informacija o ponašanju sistema u odnosu na druge metode.

Zapišimo relaciju (5.42) u obliku

$$W_p(s) = -1. \quad (5.43)$$

Na njenoj levoj strani je funkcija kompleksne promenljive, a na desnoj je broj -1, koji se, takođe, može predstaviti u kompleksnom obliku  $e^{\pm j(2k+1)\pi}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Sada je

$$W_p(s) = e^{\pm j(2k+1)\pi}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

Poznato je da su dva kompleksna broja jednakaka ako im se istovremeno podudaraju moduli i argumenti (faze). Zato se (5.44) može zapisati u obliku dveju simultanih relacija (5.45a) i (5.46b), koje ćemo često nazivati *amplitudskim i faznim kriterijumom*, respektivno,

$$|W_p(s)| = 1, \quad (5.45a)$$

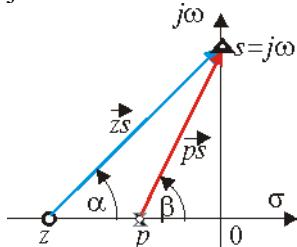
$$\arg W_p(s) = \pm(2k+1)\pi; k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.45b)$$

na osnovu kojih se mogu iskazati dve ekvivalentne definicije GMK:

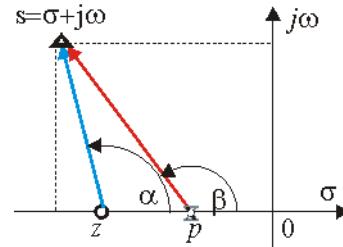
GMK je skup krivih u s-ravni, po kojima se kreću koreni karakteristične jednačine sistema, pri kontinualnoj promeni nekog parametra, obično pojačanja, takvih da je u svakoj njihovoј tački: (i) moduo funkcije povratnog

prenosa sistema jednak jedinici, odnosno, (ii) argument funkcije povratnog prenosa sistema jednak  $\pm(2k+1)\pi$ .

Relacije (5.45) su polazne osnove za generisanje niza pravila koja olakšavaju konstrukciju GMK.



Sl. 5.13. Određivanje argumenta i modula frekvencijske funkcije prenosa i



Sl. 5.14. Određivanje argumenta i modula funkcije prenosa.

Pre nego što predemo na izučavanje tih pravila, potrebno je da objasnimo pojmove *modula* i *argumenta funkcije povratnog prenosa sistema* iako se oni, u osnovi, ne razlikuju od definicije modula i faze frekvencijske funkcije prenosa.

Kod frekvencijske funkcije prenosa, moduo i faza, geometrijski posmatrano, definišu se na način prikazan na sl. 5.13, gde je dat sistem frekvencijske funkcije prenosa  $W(j\omega) = (z + j\omega) / (p + j\omega)$ , dobijene iz funkcije prenosa

$W(s) = \frac{s+z}{s+p}$ , za  $s=j\omega$ . Argument frekvencijske funkcije prenosa je jednak razlici argumenata brojioца i imenioca. Sa slike se vidi da je  $\arg W(j\omega) = \arctg \frac{\omega}{z} - \arctg \frac{\omega}{p} = \alpha - \beta$ . Moduo frekvencijske funkcije prenosa je jednak

odnosu dužine vektora povučenih iz nule i pola u posmatranu tačku  $(0, j\omega)$ , tj.  $|W(j\omega)| = |z + j\omega| / |p + j\omega| = |\vec{zj\omega}| / |\vec{pj\omega}|$ . Na potpuno adekvatan način se nalaze argument i moduo funkcije prenosa u bilo kojoj tački *s-ravni*, sl. 5.14, kao razlika argumenta vektora povučenog iz nule i argumenta vektora povučenog iz pola u posmatranu tačku *s*, dok je moduo jednak količniku modula ovih vektora.

Ako povratni prenos ima više nula i polova, tada se argument u nekoj tački *s<sub>1</sub>* u *s-ravni* dobija kao

$$\arg W(s_1) = \sum_{i=1}^m \arg |\vec{z_i s_1}| - \sum_{j=1}^n \arg |\vec{p_j s_1}|, \text{ tj.} \quad (5.46)$$

argument funkcije prenosa u nekoj tački *s<sub>1</sub>* u *s-ravni* jednak je algebarskoj sumi argumenata vektora povučenih iz svih kritičnih frekvencija (polova i nula sistema) u posmatranu tačku, smatrujući da su uglovi iz nula pozitivni, a iz polova -negativni.

Moduo takve funkcije prenosa, u tački *s<sub>1</sub>*, dobija se po formuli

$$|W(s_1)| = \frac{\prod_{i=1}^m |\vec{z_i s_1}|}{\prod_{j=1}^n |\vec{p_j s_1}|}, \text{ tj.} \quad (5.47)$$

moduo funkcije prenosa u nekoj tački  $s_1$  u  $s$ -ravni jednak je količniku proizvoda modula vektora povučenih iz svih nula i proizvoda modula vektora povučenih iz svih polova u posmatranu tačku.

**Primer 5.5.1.** Na jednom elementarnom primeru, demonstriraćemo polazne osnove metode GMK. Neka je povratni prenos sistema

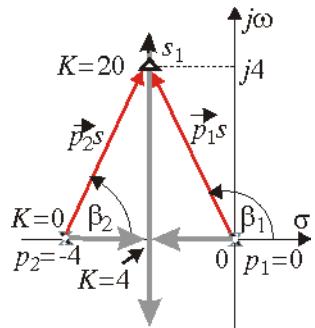
$$W_p(s) = \frac{K}{s(s+4)}.$$

Potrebno je analitički konstruisati GMK i proveriti ispunjenje relacija (5.45) i (5.46).

Sistem je drugog reda. Koreni karakteristične jednačine su  $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{\frac{K}{4}-1}$ .

Na sl. 5.15, za  $0 \leq K < \infty$ , dat je izgled GMK. S obzirom na geometriju (jednakokraki trougao), vektori povučeni iz polova  $p_1$  i  $p_2$  u bilo koju tačku koja se nalazi na konjugovano-kompleksnim granama GMK, na primer  $s_1 = -2 + j4$ , biće po modulu jednaki.

Pojačanje u tim tačkama je



Sl. 5.15. GMK sistema drugog reda.

$$|W_p(s_1)| = 1 \Rightarrow \frac{K}{|p_1 s|^2} = 1 \Rightarrow K = |p_1 s|^2.$$

Za dato  $s_1$  je

$$|p_1 s| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

pa je  $K=20$ . Neposrednom zamenom u formulu za izačunavanje korena utvrđuje se identitet, što potvrđuje ispravnost (5.45). Isto tako, na primer, za  $K=4$ , koreni su realni i jednaki:  $s_{1,2}=-2$ . U toj tački je opet moduo povratnog prenosa jednak jedinici, i.td.

Argument funkcije povratnog prenosa u bilo kojoj tački na GMK je sa slike

$$\arg W_p(s_1) = -(\beta_1 + \beta_2) = -180^\circ,$$

jer vektori iz polova obrazuju jednakokraki trougao, pa je suma ovih uglova uvek  $180^\circ$ . Lako se proverava ispunjenje faznog kriterijuma i za bilo koju tačku na delu realne ose  $[-4, 0]$  koja pripada GMK, jer je u tom slučaju  $\beta_1=180^\circ$ , a  $\beta_2=0$ .

### 5.5.3 Pravila za konstrukciju GMK

Koristeći polazne osnove metode GMK i način određivanja modula i argumenta funkcije povratnog prenosa, mogu se definisati 12 pravila koja omogućavaju jednostavnu konstrukciju GMK. Na osnovu prethodnih napomena, jasno je da povratni prenos sistema mora biti sveden na oblik

$$W_p(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}. \quad (5.48)$$

Ovde su:  $z_i$  - nule,  $p_j$  - polovi, dok je  $K$ - pojačanje funkcije povratnog prenosa.<sup>1</sup> Kod realnih, fizički ostvarljivih sistema je  $m \leq n$ . Osim toga, treba takođe ukazati da relacija (5.46) važi kako za sisteme s pozitivnom (znak + u izrazu), tako i za sisteme s negativnom (znak “-” u izrazu) povratnom spregom. Dalje ćemo se baviti samo sistemima s negativnom povratnom spregom i koristiti fazni kriterijum u obliku

$$\arg W_p(s) = -(2k+1)\pi; k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.49)$$

Neka se pojačanje  $K$  u sistemu (5.48) menja kontinualno u intervalu  $[0, \infty]$ .

Definišimo, najpre, očigledna pravila, a zatim i ona kompleksnija.

**1. Broj grana GMK** jednak je stepenu karakteristične jednačine sistema. S obzirom na uslov fizičke ostvarljivosti, tj.  $m \leq n$ , stepen karakteristične jednačine jednak je broju polova funkcije povratnog prenosa sistema.

**2. Kompleksne grane GMK** su simetrične u odnosu na realnu osu za sisteme čija karakteristična jednačina ima realne koeficijente

Ova dva pravila su očigledna. Usled kontinualne promene pojačanja (ili nekog drugog parametra) svaki koren karakteristične jednačine, a ima ih ukupno  $n$ , iscrtavaće svoju trajektoriju. Ako karakteristična jednačina ima sve realne koeficijente, njena rešenja, ako su kompleksna, moraju biti u konjugovano-kompleksnim parovima, što obezbeđuje simetričnost u odnosu na realnu osu.

**3. Za  $K=0$  GMK se nalazi u polovima funkcije povratnog prenosa ili, drugačije rečeno, GMK izvire (polazi) iz polova funkcije povratnog prenosa.**

Zaista, ako karakterističnu jednačinu sistema napišemo u obliku

$$1 + W_p(s) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0 \Rightarrow \\ \prod_{j=1}^n (s - p_j) + K \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0, \quad (5.50)$$

očigledno je da će se, za  $K=0$ , karakteristična jednačina svesti na

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) = 0,$$

čija su rešenja polovi  $p_j$  funkcije povratnog prenosa sistema.

---

<sup>1</sup> Ovo pojačanje se razlikuje od Bodeovog pojačanja.

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

**4. Za  $K=\infty$  GMK se nalazi u nulama funkcije povratnog prenosa ili, drugačije rečeno, GMK se završava (ponire) u nulama funkcije povratnog prenosa.**

Na isti način, ako  $K \rightarrow \infty$ , deleći levu i desnu stranu (5.50) sa  $K$  dolazimo do izraza

$$\prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0,$$

što znači da koren karakteristične jednačine tada postaju nule funkcije povratnog prenosa.

S obzirom na činjenicu da je broj nula manji ili najviše jednak broju polova funkcije povratnog prenosa, u slučajevima kada je  $m < n$ ,  $m$  grana GMK se završava u  $m$  realnih (*konačnih*) nula, dok se  $n-m$  grana završava u *beskonačnim* (nerealnim) *nulama*. Za određivanje položaja tih  $n-m$  grana iskoristićemo pojavu relaciju (5.42) koju ćemo zapisati u obliku [11]

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -\frac{1}{K}; K \rightarrow \infty,$$

koja se može transformisati u oblik

$$\frac{s^m - (\sum_{i=1}^m z_i)s^{m-1} + \dots}{s^n - (\sum_{j=1}^n p_j)s^{n-1} + \dots} = -\frac{1}{K}.$$

Deleći brojilac imenocem i zadržavajući, za  $|s| \rightarrow \infty$ , samo prva dva člana, dobija se

$$s^{m-n} \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j + \dots}{s} \right] \approx -\frac{1}{K} \Rightarrow s \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j + \dots}{s} \right]^{\frac{1}{m-n}} \approx \left[ -\frac{1}{K} \right]^{\frac{1}{m-n}}$$

Primenjujući na levu stranu ovog izraza formulu Njutnovog binoma i uzimajući u obzir  $|s| \rightarrow \infty$ , dobija se:

$$s \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j}{s(m-n)} \right] \approx \left( -\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{m-n}},$$

odakle se nalazi

$$s = \frac{\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j}{m-n} + \left( -\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{m-n}} \Rightarrow s = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} + K^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{2k+1}{n-m} \pi}.$$

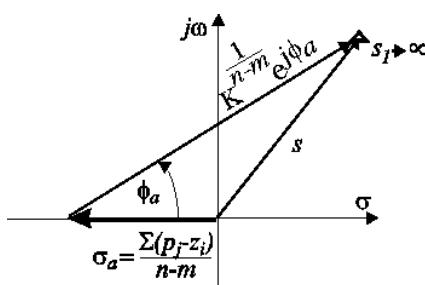
Iz ovog izraza uočava se da je kompleksna promenljiva  $s$  (za  $|s| \rightarrow \infty$ ) zbir dva vektora. Prvi se poklapa s realnom osom i određen je sa

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}, \quad (5.51)$$

dok drugi,

$$K^{\frac{1}{n-m}} e^{j\frac{2k+1}{n-m}\pi},$$

ima nagib u odnosu na pozitivan deo realne ose jednak  $\frac{2k+1}{n-m}\pi$  i moduo koji teži beskonačnosti kada  $K \rightarrow \infty$ . Ovo je ilustrovano na sl. 5.16. Na osnovu ovoga se definiše sledeće pravilo:



Sl. 5.16. Ilustracija asymptotskih osobina GMK.

**5. Asimptotske osobine.** Grane GMK koje se završavaju u nulama u beskonačnosti teže asymptotski ka njima. Sve  $n-m$  asymptote se sekaju u jednoj tački na realnoj osi (u zvezdištu asymptota) čija je apscisa određena izrazom (5.51). Uglovi asymptota se određuju po formuli

$$\phi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi; k = 0, 1, \dots, n-m \quad (5.52)$$

ili po formuli

$$\phi_a = \pm \frac{2k+1}{n-m}\pi; k = 0, 1, \dots, \frac{n-m}{2}. \quad (5.52a)$$

**6. GMK na realnoj osi** nalazi se levo od neparnog broja kritičnih frekvencija, odnosno delovi realne ose koji se nalaze levo od neparnog broja polova i nula su istovremeno i delovi GMK.

Ovo pravilo proizilazi neposredno iz faznog kriterijuma. Na realnoj osi fazni uglovi nula i polova imaju vrednost 0, za kritične frekvencije levo od posmatrane tačke, odnosno  $\pm\pi$  za kritične frekvencije desno od nje. Fazni kriterijum zahteva da ukupan zbir uglova bude neparan broj puta po  $-\pi$ , odnosno da je na realnoj osi koja pripada GMK, desno od posmatrane tačke neparan broj kritičnih frekvencija.

**7. Presek GMK s realnom osom** određuje se na osnovu faznog kriterijuma i nalazi se između dveju susednih istorodnih kritičnih frekvencija (polova ili nula), na delu realne ose koji pripada GMK.

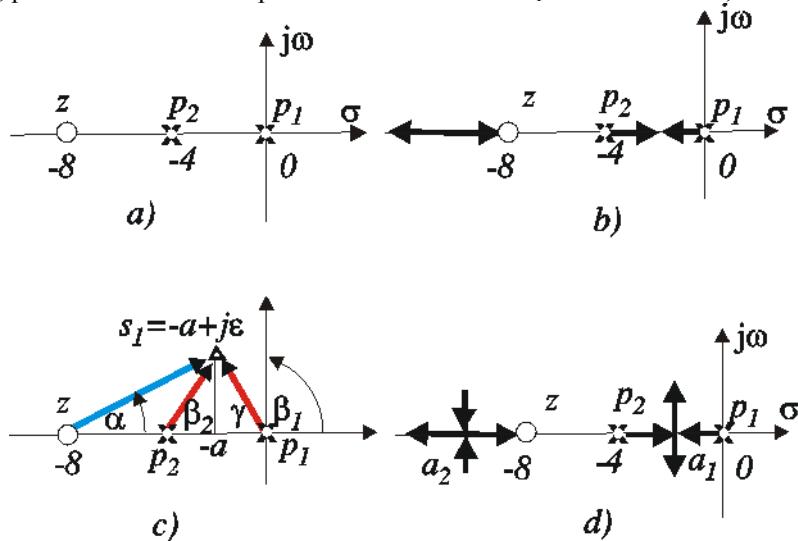
U praksi se presek GMK određuje na dva načina. Prvi neposredno proističe iz datog pravila. Radi njegove ilustracije, razmotrimo sledeći primer.

**Primer 5.5.2.** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = K \frac{(s+8)}{s(s+4)}$ . Odrediti delove

realne ose koji pripadaju GMK i njegove preseke s realnom osom.

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

Na sl. 5.17a prikazane su kritične frekvencije povratnog prenosa polovi su u koordinatnom početku i -4; nula u -8.<sup>2</sup> Sistem ima dva pola i jednu konačnu nulu. Na osnovu 5. pravila, delovi realne ose između dva pola i levo od konačne nule pripadaju GMK. Zaključujemo da će nula u beskonačnosti biti na negativnom delu realne ose u  $-\infty$ . S obzirom na to da GMK, za  $K=0$ , izvire iz polova, a za  $K=\infty$  ponire u nulama, strelicama su naznačeni smerovi porasta  $K$ , sl. 5.17b. Na osnovu 7. pravila, u ovom slučaju, postojeće dva mesta preseka: između dva pola i između dve nule. Razmotrimo, najpre, presek na delu između polova. Izaberimo tačku  $s_1$  na tom intervalu, na vertikal-



Sl. 5.17. Postupci crtanja GMK: a) raspored kritičnih frekvencija povratnog prenosa; b) GMK na realnoj osi; c) objašnjenje dobijanja preseka GMK s realnom osom; d) GMK u okolini preseka s realnom osom.

nom rastojanju  $\epsilon \rightarrow 0$  od realne ose (praktično na njoj) i konstruišimo vektore iz svih kritičnih frekvencija. Zatražimo da u posmatranoj tački bude zadovoljen fazni kriterijum. Na osnovu geometrije sa sl. 5.17c, i faznog kriterijuma sledi

$$\arg W_p(s_1 = -a + j\epsilon) = \alpha - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha - [(180^\circ - \gamma) + \beta_2] = \arctg \frac{\epsilon}{|z| - a} - \left[ \left( 180^\circ - \arctg \frac{\epsilon}{a} \right) + \arctg \frac{\epsilon}{|p_2| - a} \right] = -180^\circ.$$

S obzirom na to da su naznačeni uglovi mali, arctg-si se mogu zameniti svojim argumentima. Posle sređivanja i skraćivanja sa  $\epsilon$ , dobija se:

$$\frac{1}{|z| - a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{|p_2| - a} = 0.$$

U ovoj relaciji nepoznata veličina je samo  $a$  - apscisa presečne tačke. Za dati primer je

$$\frac{1}{8 - a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{4 - a} = 0 \Rightarrow a^2 - 16a + 32 = 0 \Rightarrow a_1 = 2,343, a_2 = 13,657.$$

<sup>2</sup> Usvojeno je da se polovi označavaju krstićima a nule - kružićima, a druge tačke u  $s$ -ravni na neki drugi način, na primer trougolićima.

Može se uočiti da smo istovremeno dobili i mesto preseka između dve nule. Na sl. 5.17d naznačen je tok GMK u blizini preseka s realnom osom.

Ostavicećemo za kasnije potpunu konstrukciju GMK. Ukažimo da se ne mora uvek ceo redosled određivanja preseka GMK s realnom osom sprovesti u potpunosti, kao što je ovde prikazan. Treba uočiti da je doprinos nula (polova) levo od posmatrane tačke pozitivan (negativan), a desno od posmatrane tačke negativan (pozitivan). Pretpostavimo da imamo  $q$  nula levo od posmatrane tačke  $a$  i  $m-q$  desno od nje, odnosno  $r$  polova desno od te tačke i  $n-r$  levo od nje. Tada se jednačina za određivanje mesta preseka može napisati u opštem obliku

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{|z_i| - a} + \sum_{j=1}^r \frac{1}{a - |p_j|} - \left( \sum_{i=q+1}^m \frac{1}{a - |z_i|} + \sum_{j=r+1}^n \frac{1}{|p_j| - a} \right) = 0. \quad (5.53)$$

U praksi se koristi još jedan, elegantniji način određivanja mesta preseka GMK s realnom osom [12]. On je posebno koristan kada postoje i kompleksne kritične frekvencije.

Posmatrajmo prost primer iz zadatka 5.5.2. Uočimo GMK na realnoj osi i raspodelu pojačanja samo duž tog dela GMK. U polovima povratnog prenosa je  $K=0$  i ono raste ka mestu susreta korena (preseka GMK i realne ose), kada dostiže maksimalnu vrednost. Isto tako, na delovima realne ose koji pripadaju GMK i nalaze se između dve nule dolazi do spajanja GMK, do pojave višestrukih korena. Na tom mestu je, na duži između dve nule, minimalna vrednost pojačanja  $K$ , jer ono raste s leve i desne strane pri stremljenju GMK ka nulama. S obzirom da povratni prenos nema prekida, osim u polovima, i pri kontinualnoj promeni  $K$  se kontinualno menja, a pojačanje ima ekstremalnu vrednost u tački razdvajanja (spajanja) korena, odnosno u tački preseka GMK s realnom osom, može se, na bazi osnovne relacije (5.42), napisati

$$K \frac{N(s)}{P(s)} = -1 \Rightarrow K = -\frac{P(s)}{N(s)} = f(s).$$

Diferencirajući  $f(s)$  po  $s$  i izjednačavajući diferencijal s nulom nalazimo vrednost  $s$  pri kojoj  $K$  ima ekstremume, tj.

$$\frac{d}{ds} \left( -\frac{P(s)}{N(s)} \right) = 0 \Rightarrow P(s) \frac{d}{ds} |N(s)| - N(s) \frac{d}{ds} |P(s)| = 0 \Rightarrow |s(K_{\max,\min})| = a.$$

Lako se uočava da će se dobiti isti rezultat ako se primeni formula

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{W_p(s)}{K} \right) = 0 \Rightarrow s(K_{\max,\min}) = a. \quad (5.54)$$

**Primer 5.5.3.** Primenimo ovaj način na prethodni primer.

$$\frac{d}{ds} \left( -\frac{K}{W_p(s)} \right) = \frac{d}{ds} \left( -\frac{s(s+4)}{s+8} \right) = 0; \Rightarrow s^2 + 16s + 32 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -8 \pm 4\sqrt{2}$$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

Dobija se isti rezultat. Jedino treba obratiti pažnju na to da se prethodnim postupkom dobija apsolutna vrednost za  $a$ , dok se u ovom slučaju dobijaju koreni karakteristične jednačine pri kojima  $K$  ima ekstremalne vrednosti.

Treba obratiti pažnju i na činjenicu, da je jednačina za određivanje mesta preseka algebarska jednačina istog stepena kao i karakteristična jednačina sistema. Zbog toga se ona, za sisteme višeg reda, mora rešavati metodom iteracije, na osnovu poznate približne početne vrednosti njenog korena.

**8. Uglovi izlaska (ulaska) GMK iz kompleksnih polova (u kompleksne nule)** određuju se na osnovu faznog kriterijuma, izborom tačke  $s_k$  koja se, po pretpostavci, nalazi na GMK beskonačno blizu posmatranog pola  $p_k$  (nule  $z_k$ ) i određivanjem algebarske sume argumenata vektora povučenih iz svih kritičnih frekvencija u posmatranu tačku, uključujući i posmatrani pol (nulu), po formuli

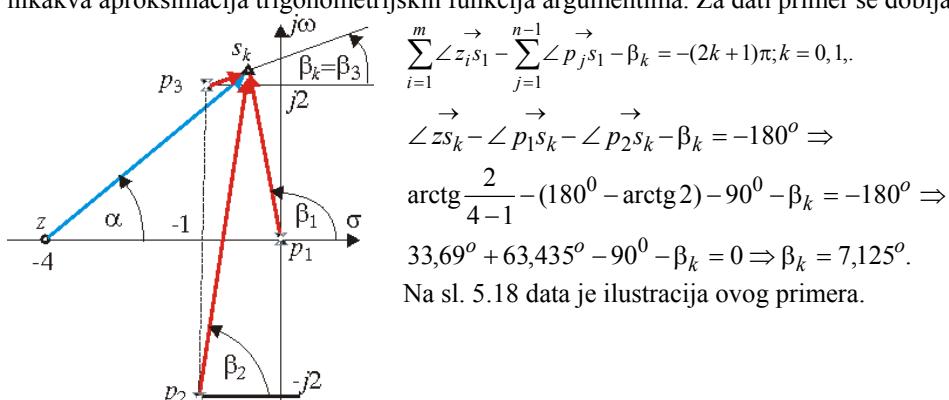
$$\sum_{i=1}^m \angle z_i s_1 - \sum_{j=1}^{n-1} \angle p_j s_1 - \beta_k = -(2k+1)\pi; k = 0, 1, \dots, \quad (5.55)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{m-1} \angle z_i s_1 + \alpha_k - \sum_{j=1}^n \angle p_j s_1 = -(2k+1)\pi; k = 0, 1, \dots \right), \quad (5.56)$$

gde su  $\beta_k$  ( $\alpha_k$ )- traženi ugao izlaska (ulaska) GMK iz posmatranog pola  $p_k$  (nule  $z_k$ ).

**Primer 5.5.4** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{(s+4)}{s(s^2+2s+5)}$ . Odrediti ugao izlaska GMK iz kompleksnih polova.

Zbog simetrije u odnosu na realnu osu, dovoljno je naći samo ugao izlaska GMK iz jednog od konjugovano-kompleksnih polova, npr., iz  $s_3 = -1 + j2$ . Uglovi vektora iz nule i polova u tačku  $s_3$ , beskonačno blizu posmatranog pola, nalaze se na sličan način kao i kod određivanja preseka GMK s realnom osom, s tom razlikom što se ne vrši nikakva aproksimacija trigonometrijskih funkcija argumentima. Za dati primer se dobija



Sl. 5.18. Ilustracija načina određivanja ugla izlazka iz kompleksnog pola.

**9. Određivanje pojačanja duž grana GMK.** Pojačanje  $K(s_k)$ , u nekoj tački  $s_k$  koja pripada GMK, određuje se na osnovu amplitudskog kriterijuma (5.45) kao količnik proizvoda dužina vektora povučenih iz polova i proizvoda dužina vektora povučenih iz nula u posmatranu tačku, tj.

$$K(s_k) = \prod_{j=1}^n |\vec{p_j s_k}| / \prod_{i=1}^m |\vec{z_i s_k}|. \quad (5.57)$$

Dužine (moduli) vektora se računaju iz odgovarajućih trouglova ili se mere, a tada je neophodno da razmere po osama budu iste.

**10. Divergencija grana GMK.** Ako je  $(n-m) \geq 2$  i neke grane GMK krenu ulevo, druge grane GMK će obavezno krenuti udesno tako da algebarska suma realnih delova korena karakteristične jednačine ostane konstantna.

Ovo pravilo se zasniva na Vietovim pravilima iz algebре. Poznato je da je suma korena algebarske jednačine  $n$ -tog stepena jednaka koeficijentu uz promenljivu  $s^{n-1}$  sa suprotnim znakom. U prepostavljenom slučaju je karakteristična jednačina

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K \prod_{i=1}^{n-v} (s - z_i) = 0, v \geq 2,$$

odakle sledi da će član uz  $s^{n-1}$  biti nezavisan od pojačanja  $K$ , tj konstantan. Prema tome, suma korena karakteristične jednačine je nepromenljiva. S obzirom na to da se kompleksni korenji javljaju u konjugovano-kompleksnim parovima, delovanje imaginarnih delova korena se međusobno kompenzuje. S toga, ako neke grane krenu ulevo, menjajući sumu korena za neki iznos, druge grane moraju poći udesno za isti iznos da ne bi došlo do promene sume korena.

**Primer 5.5.5.** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{K}{s^2(s+2)^2}$ . Skicirati izgled GMK.

S obzirom na data pravila, ne može se očekivati da delovi realne ose, osim pozicija s naznačenim polovima, pripadaju GMK. Sistem ima četiri pola, a nema ni jednu nulu. Prema tome, sve četiri grane se završavaju u nulama u beskonačnosti, težeći svojim asimptotama kojih ima ukupno četiri. Zvezdište asimptota je, na osnovu (5.51), u -1, a uglovi asimptota su:

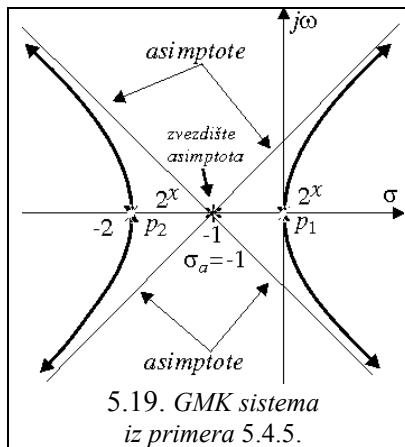
$$\phi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} \Big|_{k=0,1,2,3} = \left\{ \frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4} \right\}. \text{<sup>3</sup>}$$

S obzirom na 10. pravilo, suma realnih delova korena karakteristične jednačine, za bilo koje  $K$  je jednaka -4. Zato možemo napisati

$$2\sigma_1 + 2\sigma_2 = -4 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{1}{2}(4 + 2\sigma_1),$$

<sup>3</sup> ili  $\pm(\pi/4); \pm 3(\pi/4)$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU



gde su  $\sigma_1, \sigma_2$  realni delovi konjugovano-kompleksnih grana GMK, pri čemu je  $\sigma_1$  realni deo korena iz grana koje polaze iz polova u koordinatnom početku. Prepostavimo da te grane idu udesno, tj. da je  $\sigma_1 > 0$  i da se kontinualno menja. Očigledno je da će  $\sigma_2$  uvek biti manje od početne vrednosti  $-2$  i da će se, takođe, kontinualno menjati. Na osnovu ovog, zaključujemo da će izgled GMK biti kao na sl. 5.19.

**11. Presek GMK s imaginarnom osom** nalazi se primenom nekog od kriterijuma stabilnosti (Mihajlova, Rausa, Hurvica) određivanjem vrednosti kritičnog pojačanja  $K=K_{kr}$  i kritične frekvencije  $\omega=\omega_{kr}$  za koje sistem dolazi na granicu stabilnosti.

Ovo pravilo ne zahteva dodatna objašnjenja ako se poznaju navedeni kriterijumi stabilnosti. Ono se, u prvom redu, bazira na primeni kriterijuma stabilnosti Mihajlova za određivanje granice stabilnosti sistema. Način primene ovog pravila je sličan primeni 12. pravila, koje sledi.

**12. Konstrukcija konjugovano-kompleksnih grana GMK** može se ostvariti na osnovu 11. pravila, translirajući imaginarnu osu i tražeći preseke GMK s pomerenim imaginarnim osama.

Ovo pravilo proistiće iz činjenice da su GMK sledeća dva sistema

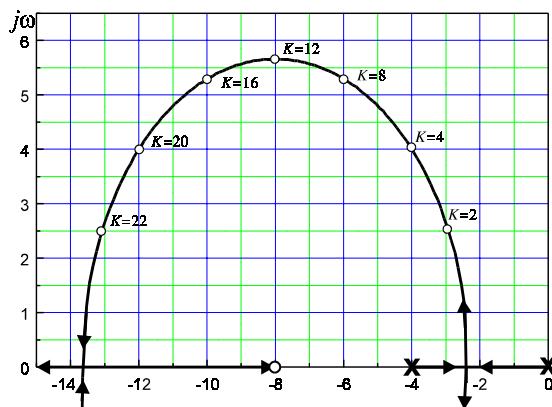
$$W_{p1}(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad W_{p2}(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m |s - (z_i + b)|}{\prod_{j=1}^n |s - (p_j + b)|}$$

ista, jedino se menja položaj imaginarne ose i relativan raspored korena u odnosu na imaginarnu osu, koja se pomera levo ili desno za iznos bilo kog realnog broja  $b$ .

**Primer 5.5.6.** Primenu metode Teodorčika-Bendrikova za konstrukciju konjugovano-kompleksnih grana GMK prikazaćemo na sistemu iz primera 5.5.2. Karakteristična jednačina polaznog sistema je:  $s^2 + (4 + K)s + 8K = 0$ , a "pomerenog":

$$(s + b)^2 + 4K(s + b) + 8K = 0.$$

Posle zamene  $s=j\omega$ , razvijanja pomerene jednačine i njenog rastavljanja na realni i imaginarni deo, dobijaju se dve simultane jednačine



Sl. 5.20. GMK sistema iz primera 5.4.2 i 5.4.5.

$$(2b + 4 + K)\omega = 0,$$

$$\omega^2 - b^2 - (4 + K)(b + 2) = 0.$$

Rešavajući ove jednačine po  $K$  i  $\omega$  dobijaju se rešenja:

$$K = -(4 + 2b),$$

$$\omega = 0,$$

$$\omega = \sqrt{-b^2 - 16b - 32}.$$

Ostajući u domenu negativne povratne sprege ( $K > 0$ ), na osnovu prve relacije,  $b$  ne može biti pozitivno i veće od 2. Iz treće relacije se dobija, za  $\omega = 0$ , vrednost za  $b$  iz jednačine

$$b^2 + 16b + 32 = 0, \Rightarrow b_1 = -2,343, b_2 = -13,657,$$

što je relacija za određivanje mesta preseka GMK s realnom osom u zadatku 5.5.2. Prema tome, treba uzimati vrednosti za  $b$  u intervalu

$$b_2 \leq b \leq b_1.$$

Zadajući vrednosti za  $b$  u tom intervalu mogu se konstruisati konjugovano-kompleksne grane GMK, sl. 5.20.

#### 5.5.4 Približno određivanje nula polinoma pomoću GMK

Metoda GMK može se efektno koristiti i za ocenu karaktera (realni, kompleksni) korena algebarske jednačine kao i za njihovo približno određivanje. Metoda je pogodna za polinome do petog reda.

Neka je dat polinom

$$D(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1,$$

koji može biti karakteristični polinom mnogih sistema različitih po obliku funkcije povratnog prenosa, na primer:

$$W_{p1}(s) = \frac{K}{s(s^{n-1} + a_n s^{n-2} + \dots + a_2)}, \text{ za } K = a_1;$$

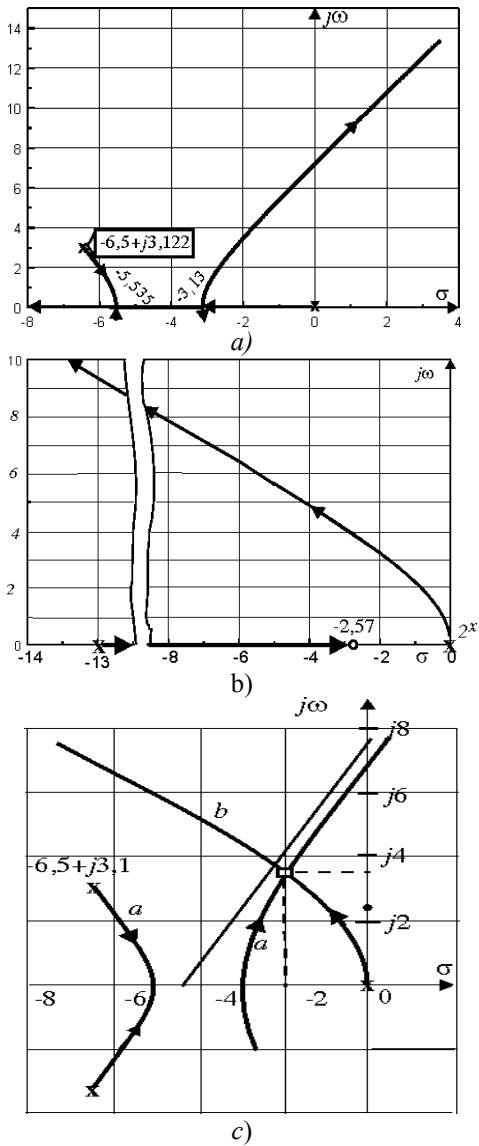
$$W_{p2}(s) = \frac{K(s+z)}{s^2(s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_3)}; \text{ za } K = a_2, z = \frac{a_1}{a_2}, \text{ itd.}$$

Nule posmatranog polinoma su koreni karakterističnih jednačina izvedenih iz karakterističnih polinoma datih sistema.

Ako konstruišemo GMK za ova dva sistema na istom grafiku, njihove presečne tačke biće koreni datog polinoma. Na taj način može se lako ustanoviti karakter korena i njihova približna vrednost. Tačna vrednost može se dobiti iteracionim postupkom, polazeći od nađene približne vrednosti.

**Primer 5.5.7.** Odrediti karakter i približne vrednosti korena polinoma

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU



Sl. 5.21. Skice GMK za različite funkcije povratnog prenosa koje se mogu generisati polinomom: a) za prenos pod (a); b) za prenos pod (b) i c) nalaženje preseka kompleksnih grana.

a drugi se određuje deljenjem polaznog polinoma s ovim faktorom. Na taj način se dobija rešenje za realni pol: -9. Stvarni koreni polinoma su:  $-9; -2 \pm j\sqrt{12}$ .

**5.5.5 Presek GMK s  $\zeta$ -pravom.** Za rešavanje nekih zadataka pri projektovanju sistema neophodno je odrediti koordinate tačke preseka konjugovano-kompleksnih grana GMK i prave sa zadatim koeficijentom relativnog prigušenja  $\zeta$  ( $\zeta$ -pravom) i pojačanje u toj tački, koje se određuje na osnovu

$$s^3 + 13s^2 + 52s + 144$$

Dati polinom je karakteristični polinom bilo kog od sistema s povratnom spregom čiji je povratni prenos:

$$a) W_{p1}(s) = \frac{K(=144)}{s(s^2 + 13s + 52)}$$

$$b) W_{p2}(s) = \frac{K(=52)(s + 2,769)}{s^2(s + 13)}$$

$$c) W_{p3}(s) = \frac{K(=13)(s^2 + 4s + 11,077)}{s^3}$$

$$d) W_{p4}(s) = \frac{K(=13)s(s + 4)}{s^3 + 144}$$

$$e) W_{p5}(s) = \frac{K(=13)(s^2 + 11,077)}{s(s^2 + 52)}$$

Za svaki od navedenih sistema GMK lako se skicira. Za procenu karaktera korena i određivanje približne vrednosti potrebno je nacrtati GMK bilo koja dva od navedenih pet sistema. Na sl. 5.21a i b dati su GMK sistema pod a) i b), respektivno,

$$W_{p1}(s) = \frac{K}{s(s^2 + 13s + 52)} ;$$

$$W_{p2}(s) = \frac{K(s + 2,57)}{s^2(s + 13)} ,$$

dok su na sl. 5.21c nacrtani zajedno oba GMK (bez realnih grana). Kao što se vidi iz datih GMK, posmatrani polinom ima jednu realnu nulu u intervalu vrednosti od -13 do -2,57, gde se grane GMK za oba sistema preklapaju. Polinom ima i dva konjugovano-kompleksna korena u preseku kompleksnih grana GMK oba sistema, sl. 5.21c. Oni imaju približnu vrednost  $s = -2 \pm j3,4$ , što znači da jedan faktor polinoma iznosi  $s^2 + 4s + 13$ ,

9. pravila. Za određivanje koordinata tačke preseka može se primeniti 12. pravilo za konstrukciju GMK.

Posle njegove primene, kada se dobiju dve simultane jednačine po  $\omega$  i  $K$ , u funkciji parametra  $b$ , može se preporučiti sledeći postupak: za  $b=b_\zeta$  odnos  $\omega_\zeta/b_\zeta = \operatorname{tg}(\arccos(-\zeta)) = q$ . Eliminacijom jednog od parametara ( $\omega$  ili  $b$ ), sistem se svodi na dve jednačine s dve nepoznate koji se rešava analitičkim ili grafoanalitičkim putem.

**Primer 5.5.8.** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{K}{(s+2)(s+5)(s+6)}$ . Odrediti  $\omega_n$  i  $K$  sistema za  $\zeta=0,5$  i za te parametre oceniti ponašanje spregnutog sistema u vremenskom domenu.

Formirajmo, na opisani način, pomerenu karakterističnu jednačinu i nađimo relacije za presek GMK sistema s transliranom imaginarnom osom:

$$[s + (2 - b)][s + (5 - b)][s + (6 - b)] + K = 0.$$

Posle naznačenih množenja, zamene  $s=j\omega$ , razdvajanja realnog i imaginarnog dela, dobijaju se dve simultane jednačine:

$$\omega^2 = 3b^2 + 26b + 52,$$

$$K = (13 - 3b)\omega^2 + b^3 - 13b^2 + 52b.$$

$$\arccos(-\zeta) = 120^\circ; \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\omega_\zeta}{b_\zeta} = -\sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{\omega_\zeta}{b_\zeta}\right)^2 = 3.$$

Deleći prvu od simultanih jednačina sa  $b^2 = b_\zeta^2$  i zamene  $\left(\frac{\omega_\zeta}{b_\zeta}\right)^2 = 3$ , iz prve relacije

se dobija kvadratna jednačina po  $b_\zeta$

$$\frac{52}{b_\zeta^2} + \frac{26}{b_\zeta} = 0,$$

čije je realno rešenje  $b_\zeta = -2$ . Stoga je  $\omega_\zeta = \sqrt{12}$ . Zamenom u drugu simultanu jednačinu dobija se  $K_\zeta = 84$ . Prema tome, tačka preseka ima koordinate  $s = -2 + j\sqrt{12} \Rightarrow \omega_{n\xi} = 4 \text{ s}^{-1}$ . Treći koren karakteristične jednačine lako se nalazi i iznosi -9.

Spregnuti prenos sistema je  $W_s(s) = \frac{84}{(s+9)(s^2 + 4s + 16)}$ . Sistem nema konačne

nule, a realan pol (-9) je znatno levije od realnog dela dominantnih polova (-2), prema tome, sistem će se ponašati približno kao sistem drugog reda sa  $\zeta=0,5$ , a ustaljena vrednost za jediničnu odskočnu pobudu biće 0,583.

### 5.5.6 konstrukcija GMK pri promeni drugih parametara

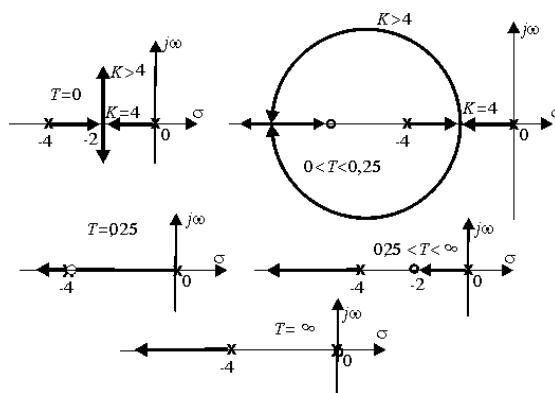
Osim pojačanja funkcije povratnog prenosa, u sistemu se mogu menjati i drugi parametri, npr. vremenske konstante. S toga je potrebno, primenom meto-

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

de GMK, izučiti i njihov uticaj na ponašanje sistema. U osnovi, postupak je isti kao prethodni. Konstruiše se familija GMK za različite diskretne vrednosti promenljivog parametra i promenu pojačanja od 0 do  $\infty$ , ili se sistem transformiše tako da drugi parametar preuzima ulogu pojačanja, menjajući se kontinualno od 0 do  $\infty$ , a pojačanje polaznog sistema uzima diskretne vrednosti. Oba prilaza pokazaćemo na jednom prostom primeru.

**Primer 5.5.9.** Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{K(sT+1)}{s(s+4)}$ . Izučiti ponašanje sistema u funkciji promene pojačanja  $K$  i vremenske konstante  $T$ .

Primena prvog načina, kada se  $K$  menja kontinualno, a  $T$  diskretno, dovodi do familije GMK prikazanih na sl. 5.22.



Sl. 5.22. GMK sistema iz primera 5.5.9 u funkciji pojačanja  $K$ , za različite vrednosti parametra  $T$ .

Za primenu drugog načina potrebno je, najpre, napisati karakterističnu jednačinu sistema

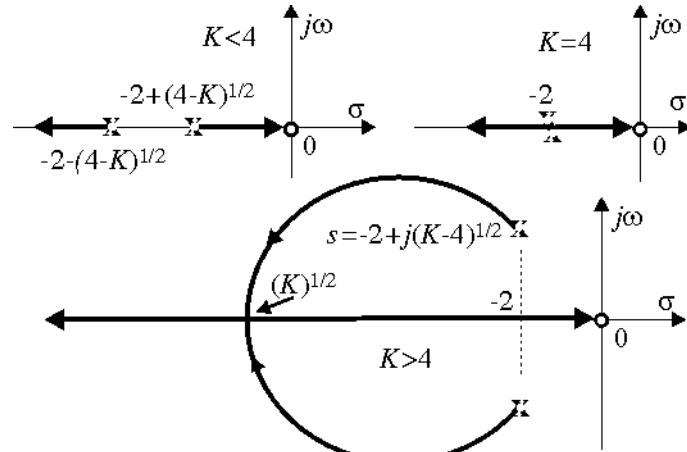
$$s^2 + 4s + KsT + K = 0.$$

Formirajući funkciju povratnog prenosa novog sistema koji daje ovu karakterističnu jednačinu, a da vremenska konstanta bude u funkciji parametra koji se kontinualno menja, dobija se:

$$W_{p1}(s) = \frac{K_1 s}{s^2 + 4s + K},$$

gde je  $K_1 = KT$ - pojačanje nove funkcije povratnog prenosa koje se menja od 0 do  $\infty$ . Sada se za različite vrednosti  $K$  konstruišu GMK, što je prikazano na sl. 5.23.

Kao što se vidi iz ovih slika, u prvom i u drugom slučaju, na osnovu GMK može se suditi o ponašanju sistema u vremenskom domenu pri promeni oba parametra. Uočava se da porast parametra  $T$  ima efekte smanjenja oscilatornosti sistema, jer nula spregnutog prenosa sistema ostaje ista ( $z=-8$ ), dok oba pola funkcije spregnutog prenosa teže ka realnim stabilnim vrednostima. Jedan teži ka  $-\infty$ , a drugi ka 0, te se njegov uticaj kompenzuje uticajem nule i sistem poprima osobine aperiodičnog elementa prvog reda s vrlo malom inercijom.



Sl. 5.23. GMK sistema iz primera 5.5. 9 u funkciji promene pojačanja  $K_1=KT$ , za različite vrednosti  $K$  kao parametra.

### 5.5.7 GMK sistema s transportnim kašnjenjem

Na sistem s transportnim kašnjenjem, opisan funkcijom povratnog prenosa

$$W_p(s) = K \bar{W}_p(s) e^{-s\tau},$$

metoda GMK može se primeniti u potpunosti, pošto osnovne postavke metode važe i u ovom slučaju. Međutim, njena primena je složena i nedovoljno praktična, jer applitudni i fazni kriterijum postaju:

$$\begin{aligned} |Ke^{-s\tau} \bar{W}_p(s)| &= |Ke^{-(\sigma+j\omega)\tau} \bar{W}_p(s)| = Ke^{-\sigma\tau} |\bar{W}_p(s)| = 1, \\ \arg W_p(s) &= \omega\tau + \arg \bar{W}_p(s) = -(2k+1)\pi, k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.58)$$

Na osnovu ove dve relacije mogu se generisati slična pravila koja olakšavaju konstrukciju GMK.

Istaknimo činjenicu da razvojem  $e^{-sT}$  u beskonačni stepeni red, karakteristična jednačina dobija beskonačan broj korenova, a time i grana, što čini nemogućim konstrukciju GMK.

Osim striktne primene polaznih osnova i pravila na originalni sistem s transportnim kašnjenjem, u praksi se koriste i aproksimacije transportnog kašnjenja racionalnim funkcijama prenosa. Poznate su dve aproksimacije: Padeova aproksimacija i aproksimacija serijskom vezom  $n$  inercijalnih elemenata.

Kod Padeove aproksimacije, element transportnog kašnjenja se zamenjuje funkcijom prenosa oblika

$$e^{-s} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i s^i / \sum_{j=0}^{k-1} a_j s^j. \quad (5.59)$$

Koeficijenti u njoj se određuju iz uslova da greška aproksimacije bude manja od unapred zadate. Razvijanjem u red leve i desne strane (primenom Tajlorovog razvoja za  $e^{-s\tau}$  i Maklorenovog razvoja za funkciju prenosa (beskonačno deljenje)) i upoređivanjem koeficijenata uz iste stepene promenljivih leve i

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

desne strane, određuju se vrednosti nepoznatih koeficijenata. U Padeovoj aproksimaciji određuju se samo tri parametra, tako da se dobija

$$e^{-s} = \frac{1 - (s/2)}{1 + (s/2)}. \quad (5.60)$$

Time se u sistem unosi nula u desnoj poluravni. Sistem postaje neminimalnofazni. Na osnovu toga, zaključujemo da će on, pri većim pojačanjima, biti sigurno nestabilan.

Tačnost aproksimacije može se povećavati izborom većeg broja koeficijenata u funkciji prenosa.

Osim Padeove moguća je i aproksimacija oblika [4]

$$e^{-sT} \approx \frac{1}{[1 + (sT/n)]^n}, \quad (5.61)$$

pri čemu je njena tačnost utolikovo veća ukoliko je  $n$  veće. Za  $n \rightarrow \infty$  odziv date aproksimacije se poklapa s odzivom elementa transportnog kašnjenja.

Ipak, i s uvođenjem tačnijih aproksimacija, konstrukcija GMK postaje komplikovana za ručnu primenu. Zbog toga se, u složenijim slučajevima, preporučuje korišćenje računara i gotovih programskih paketa za konstrukciju GMK.

**Primer 5.5.10.** Sistem za regulaciju temperature može se identifikovati funkcijom povratnog prenosa

$$W_p(s) = K \frac{1}{(1 + 0,5s)} e^{-s}.$$

Konstruisati GMK i oceniti ponašanje sistema.

Konstruisaćemo osnovnu i jednu bočnu granu GMK. Na osnovu funkcije prenosa i polaznih osnova GMK ima se:

$$\begin{aligned} \frac{2K}{e^\sigma \sqrt{(2+\sigma)^2 + \omega^2}} &= 1 \Rightarrow K = \frac{e^\sigma \sqrt{(2+\sigma)^2 + \omega^2}}{2} \\ -\omega - \arctg \frac{\omega}{2+\sigma} &= -(2k+1)\pi \Rightarrow \omega + \arctg \frac{\omega}{2+\sigma} = (2k+1)\pi, k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Rešavajući drugu relaciju po  $\omega$  za dato  $\sigma$ ,  $k=0$ ,  $k=1$  i zamenjujući dobijeno  $\omega$  u prvu relaciju nalaze se vrednosti za pojačanje povratnog prenosa u različitim tačkama kompleksne ravni koje pripadaju GMK. U tabeli su date vrednosti samo za osnovnu kompleksnu granu.

$\sigma$	-1,5	-1	0	1	2	3	4	5
$\omega$	1,84	2,03	2,29	2,46	2,57	2,65	2,72	2,77
$K$	0,21	0,42	1,52	5,27	17,5	58,8	179	558

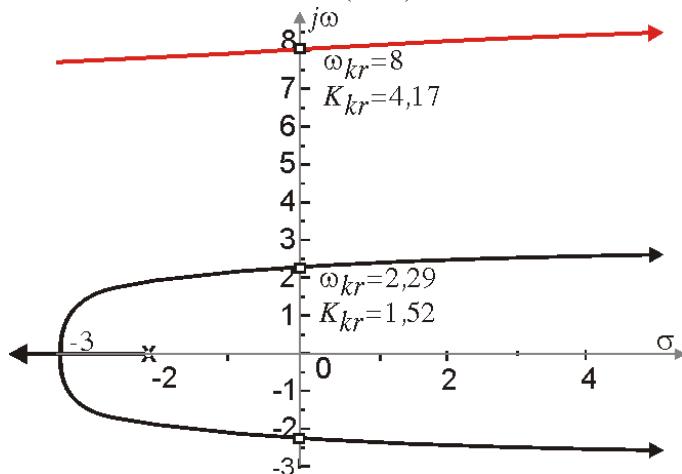
Realna osa levo od pola -2 pripada GMK.

Realni presek GMK s realnom osom je u tački -3, koja se dobija na osnovu poznatog pravila:

$$\frac{d}{ds} \frac{W_p(s)}{K} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \frac{e^{-s}}{(s+2)} = 0 \Rightarrow -e^{-s}(s+2) - e^{-s} = 0 \Rightarrow s_1 = -3.$$

Na sl. 5.24 prikazan je izgled jednog dela GMK ovog sistema.  
Primenimo Padeovu aproksimaciju elementa transportnog kašnjenja. Tada je funkcija povratnog prenosa sistema

$$W_p(s) = K \frac{(1 - (s/2))}{(1 + s)(1 + (s/2))} = -K_1 \frac{(s - 2)}{(s + 2)^2}, K_1 = 2K.$$



Sl. 5.24. GMK sistema  $W_p(s) = \frac{2Ke^{-s}}{s+2}$ .

Na slici je predstavljena osnovna i jedna od bočnih grana.

Sistem je neminimalno-fazni (ima nulu u desnoj poluravni,  $z=2$ ). Osim toga, pojačanje je negativno (pozitivna povratna sprega) i fazni kriterijum se menja i postaje  $\arg W_p(s) = 2k\pi, k = 0, 1, \dots$

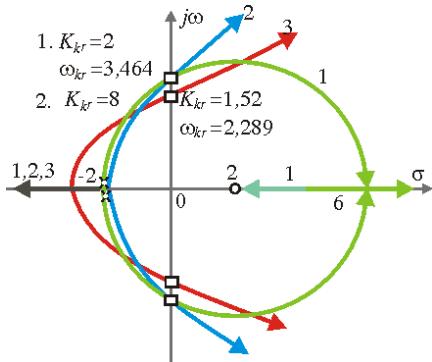
Zbog toga se neka od datih pravila za konstrukciju GMK menjaju. Više nisu delovi realne ose levo od neparnog broja kritičnih frekvencija istovremeno i delovi GMK, već suprotno, delovi realne ose levo od parnog broja kritičnih učestanosti su delovi GMK.

Na osnovu ovoga na sl. 5.25a konstruisano je GMK, iz koga se vidi da sistem postaje nestabilan za svako pojačanje  $K > 2$ . Stvarna vrednost pojačanja, pri kome sistem dolazi na granicu stabilnosti, određena na osnovu Nikvistovog kriterijuma stabilnosti, je  $K=1,52$ , dok je frekvencija samooscilovanja  $\omega=2,28895 \text{ s}^{-1}$  umesto  $\omega=3,464 \text{ s}^{-1}$  koliko je dobijeno primenom Padeove aproksimacije.

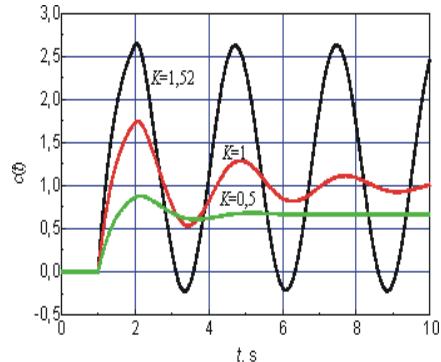
Na sl. 5.25b prikazani su odzivi datog sistema za različite vrednosti pojačanja. Uočava se da se rezultati, dobijeni primenom Nikvistovog kriterijuma i tačne konstrukcije GMK, slažu s rezultatima simulacije. Na osnovu toga se može preporučiti da se aproksimacije kašnjenja u metodi GMK primenjuje samo za grubu ocenu ponašanja sistema. Za takve sisteme najpouzdanije metode su frekvencijske metode Nikvista i Bodea, odnosno računarska simulacija.

Metoda GMK može se koristiti i za ocenu ponašanja nekih nelinearnih sistema.

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU



Sl. 5.25a. GMK sistema iz primera 5.4.10.1- Padeova aproksimacija; 2-aproksimacija inercijalnim elementom drugog reda; 3 - realna osnovna grana GMK.



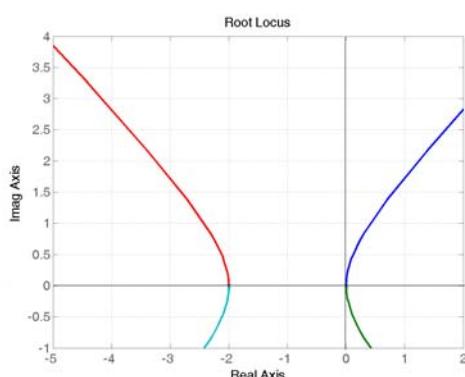
Sl. 5.25b. Vremenski odzivi sistema s transportnim kašnjenjem za različite vrednosti pojačanja.

### 5.5.8 Primena MATLAB-a za konstrukciju GMK

Programski paket MATLAB poseduje potprogram za konstrukciju (crtanje) geometrijskog mesta korena karakteristične jednačine sistema. Moguće su sledeće opcije:

`rlocus(Num,Den)`  
`rlocus(Num,Den,k)`  
`R=rlocus(Num,Den)`  
`[R,k]=rlocus(Num,Den)`

Prve dve opcije daju dijagram položaja korena u grafičkom prozoru koji se automatski otvara, dok druge dve opcije kao rezultat daju matricu R koja sadrži korene karakteristične jednačine. Svakom korenju karakteristične jednačine odgovara svoja kolona matrice R. Opcioni ulazni argument k je vektor pojačanja kojim se mogu zadati vrednosti pojačanja regulatora za koje treba odrediti korene karakteristične jednačine. Ako se ovaj ulazni argument izostavi, vrednosti k se zadaju automatski. Broj vrsta matrice R jednak je dužini vektora k.



Sl. 5.26. GMK za primer 5.5.11.

#### Primer 5.5.11

Pomoću MATLAB-a nacrtati GMK sistema iz primera 5.5.5:

$$W_p(s) = \frac{K}{s^2(s+2)^2}$$

`Num=[1];Den=[1,4,4,0,0];  
rlocus(Num,Den)`

Rezultat je dat na slici 5.26.

Napomena: **MATLAB** daje simetričnu sliku. Data slika kao i naredne dobijene su dodatnom obradom.

Kada je potrebno odrediti vrednosti pojačanja u pojedinim tačkama na samom geometrijskom mestu korena treba koristiti naredbu:

#### rlocfind

Funkcija koja omogućava interaktivno nalaženje pojačanja koje odgovara izabranoj tački na GMK. Za korišćenje ove komande, mora se prethodno nacrtati GMK. Pozivanje funkcije **rlocfind** prouzrokuje pojavu cursora u obliku krstića u grafičkom prozoru. Pomoću ovog cursora može se odabrati tačka sa dijagrama, odnosno koren karakteristične jednačine za koji treba odrediti pojačanje koje mu odgovara. Istovremeno se dobijaju i vrednosti svih korena karakteristične jednačine koji odgovaraju tom pojačanju.

Ova funkcija se može koristiti u dva oblika:

**[k,Koreni]=rlocfind(Num,Den)**

**[k,Koreni]=rlocfind(Num,Den,p)**

Opcioni ulazni parametar **p** je vektor korena karakteristične jednačine za koje treba naći odgovarajuće vrednosti pojačanja **k**, tako da svakom elementu **p** odgovara jedan element **k**. **Koreni** - je matrica korena karakteristične jednačine spregnutog prenosa koji odgovaraju elementima vektora pojačanja **k**. Svakom korenju odgovara jedna kolona matrice **Koreni**, dok svakom elementu vektora **p**, odnosno **k**, odgovara jedna vrsta matrice **Koreni**.

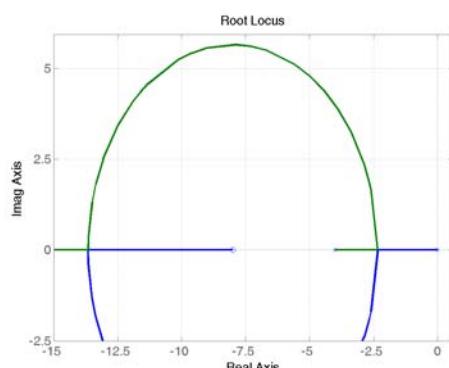
Sledeća funkcija

#### sgrid

omogućava iscrtavanje linija konstantnog faktora relativnog prigušenja i konstantne prirodne frekvencije u ravni kompleksne promenljive **s**.

#### sgrid(z,wn)

crta linije faktora prigušenja definisanih vektorom **z** i prirodnih frekvencija definisanih vektorom **wn**. Ukoliko ovi ulazni argumenti nisu zadati, njihove vrednosti se zadaju automatski



Sl.5.27. GMK za primer 5.5.12.

#### Primer 5.5.12

Pomoću MATLAB-a nacrtati GMK sistema iz primera 5.5.2

$$W_p(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+4)}$$

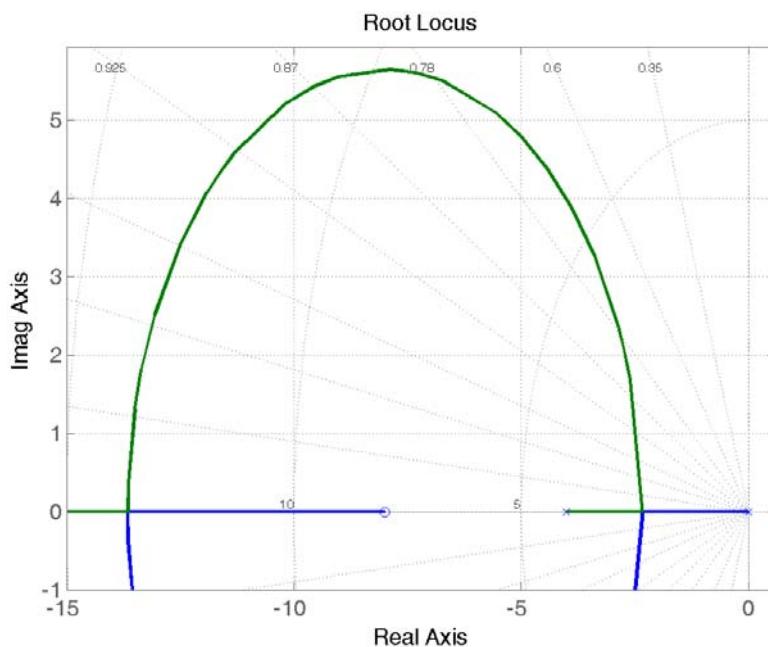
**Num=[1,8];Den=[1,4,0];**  
**rlocus(Num,Den)**

Rezultat je prikazan na slici 5.27.

Ako se sada posle dobijanja ovog grafika primeni naredba  
**sgrid**

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

dobiće se rezultat kao na sledećoj slici, gde je iscrtana mreža konstantnih koeficijenata relativnog prigušenja (zrakaste linije) i konstantnih prirodnih frekvencija oscilovanja (kružne linije)



Sl.5.28. GMK za primer 5.5.12 sa mrežom konstantnih  $\zeta$  i  $\omega_n$

Za određivanje pojačanja duž grana GMK i vrednosti korena pri tim pojačanjima, najpre treba nacrtati GMK, a zatim naredbom

`>> [k,Koren]=rlocfind(Num,Den)`

i prelaskom na već nacrtanu sliku u prozoru, pojaviće se pokretni koordinatni sistem. Postavljanjem ishodišta tog koordinatnog sistema u željenu tačku na GMK i jednim klikom, u prozoru MATLAB-a pojaviće se ispisani rezultat. Na primer, ako za primer sa sl. 5.28 primenimo ovu proceduru i pokretni koordinatni sistem postavimo u tačku preseka GMK s realnom osom koja je bliža imaginarnoj osi, dobiće se sledeći rezultat:

```
Select a point in the graphics window
selected_point =
-2.3347 + 0.0039i
k =
0.6863
Koren =
-2.3506
-2.3357
```

**Napomena:** Zbog nepreciznosti postavljanja presečne tačke pokretnog koordinatnog sistema nismo dobili iste korene u mestu preseka GMK s realnom osom. Kao što se vidi, cursor je bio postavljen u tački  $-2,3347+j,0039$ , a ne na realnoj osi.

## 5.6 Mitrovićeva metoda

U primeni metode Mihajlova za utvrđivanje kritične vrednosti pojačanja povratnog prenosa, pri kojoj je sistem na granici stabilnosti, mi smo preslikavali imaginarnu osu, svodeći problem na simultano rešavanje dve algebarske jednačine. Pri tome smo, istovremeno, određivali i frekvenciju samooscilovanja sistema. Taj prilaz se može uopštiti na problem određivanja bilo koja dva parametra sistema, takva da obezbede neki unapred zadati kvalitet. Na primer, može se postaviti i sledeći zadatak: *odrediti podesive parametre sistema tako da on ima vreme smirenja ne veće od unapred zadatog*. Brzinu reagovanja stabilnog sistema ograničava najsporija komponenta u odzivu, a ona je određena polom  $s = -\sigma$  najbližim imaginarnoj osi u  $s$ -ravni<sup>4</sup>. Prema tome, zahtevom da spektar polova spregnutog sistema bude levo od prave povučene kroz tačku  $-\sigma$ , paralelno  $j\omega$ -osi, sl. 5.29, obezbeđuje se trajanje prelaznog procesa ne veće od onog određenim tim polom. Zamenjujući u karakterističnoj jednačini sistema  $s = -\sigma + j\omega$ , razdvajajući realni i imaginarni deo i simultano ih izjednačavajući s nulom, mi, opet, za dato  $\sigma$  možemo odrediti kritično pojačanje i kritičnu frekvenciju ili ako osim pojačanja postoji još jedan podesiv parametar, možemo unapred zadati i željenu kritičnu frekvenciju. Ovaj prilaz smo već koristili u metodi Teodorčika za konstrukciju kompleksnih grana GMK.

Mitrović je ovu ideju uopštio i primenio za određivanje vrednosti bilo koja dva podesiva parametra sistema koji obezbeđuju da koren karakteristične jednačine ne budu van šrafiranog sektora na sl. 5.30. U tom slučaju kažemo da sistem ima unapred zadati stepen relativne stabilnosti. U literaturi je ova metoda poznata kao **Mitrovićeva algebarska metoda**. S obzirom da se njena praktična primena najčešće svodi na grafo-analitički postupak, svrstali smo je u grafo-analitičke metode. Pošto ona, za razliku od prethodnih metoda, omogućava izbor dva podesiva parametra u cilju obezbeđenja traženog kvaliteta sistema,

veoma je upotrebljiva za analizu i sintezu sistema.

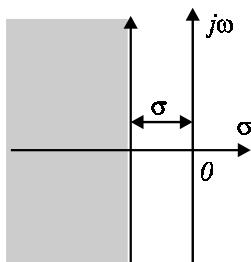
U daljem izlaganju, najpre ćemo dati osnovnu ideju Mitrovićeve metode i pokazati njenu primenu na jednom jednostavnom primeru sistema trećeg reda, a zatim ćemo, na jednom složenijem primeru sistema četvrtog reda, prikazati grafo-analitički prilaz u primeni date metode.

Neka je data karakteristična jednačina sistema

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (5.62)$$

Jednačina  $\zeta$ -prave je

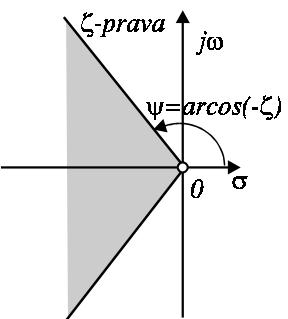
$$s = -\zeta \omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (5.63)$$



Sl. 5.29. Oblast korena s unapred zadatim vremenom smirenja.

<sup>4</sup> Ova konstatacija nije sasvim tačna. Vreme prelaznog procesa ne mora uvek biti definisano najsporijom komponentom prelaznog procesa [13]. Zbog toga je ovakav kriterijum kvaliteta ispravnije nazivati stepenom eksponencijalne stabilnosti sistema.

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU



Sl. 5.30. Oblast korena karakteristične jednačine sistema s unapred zadatim stepenom relativne stabilnosti.

**Primer 5.6.1.** Karakteristični polinom sistema trećeg reda je

$$D(s) = s^3 + a_2 s + a_1 s + 15.$$

Odrediti vrednosti parametara  $a_1$  i  $a_2$  tako da koreni karakteristične jednačine sistema budu određeni sa:  $\zeta=0,5$  i  $\omega_n=2$ .

Za sistem trećeg reda je

$$\phi_2(\zeta) = 2\zeta = 1; \phi_3(\zeta) = -[2\zeta\phi_2(\zeta) + \phi_1(\zeta)] = 1 - 4\zeta^2 = 0$$

pa (5.64) postaje

$$15 - 4a_2 + 8 = 0,$$

$$-a_1 + 2a_2 = 0.$$

Rešenje ovog sistema jednačina je:  $a_2 = 23/4$ ;  $a_1 = 23/2$ .

Za ove parametre sistem će imati dva korena karakteristične jednačine  $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ , dok se treći određuje deljenjem polaznog karakterističnog polinoma sa  $(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 2s + 4$ , što daje  $s_3 = -15/4$ .

**Napomena:** Ako dobijene simultane algebarske jednačine nemaju zajednička rešenja, tada se promenom samo dva parametra dati problem ne može rešiti.

U primeni Mitrovićeve metode na sisteme automatskog upravljanja mogu se pojaviti izvesne teškoće, koje su vezane za problem složenosti računanja. Naime, može se dogoditi da neka dva podesiva parametra  $\alpha$  i  $\beta$ , koje treba naći da bi sistem imao željene karakteristike u pogledu lokacije polova, određuju koeficijente karakteristične jednačine, tj.

$$a_i = a_i(\alpha, \beta), i = \overline{0, n}. \quad (5.66)$$

Tada se sistem jednačina (5.64) svodi na

$$\begin{aligned} a_0(\alpha, \beta) + a_2(\alpha, \beta)\omega_n^2\phi_1(\zeta) + a_3(\alpha, \beta)\omega_n^3\phi_2(\zeta) + \dots + a_n(\alpha, \beta)\omega_n^n\phi_{n-1}(\zeta) &= 0, \\ -a_1(\alpha, \beta) + a_2(\alpha, \beta)\omega_n\phi_2(\zeta) + a_3(\alpha, \beta)\omega_n^2\phi_2(\zeta) + \dots + a_n(\alpha, \beta)\omega_n^{n-1}\phi_n(\zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.66a)$$

Ove jednačine su, za dato  $\zeta$  i  $\omega_n$ , funkcije samo dva parametra:  $\alpha$  i  $\beta$ . Ako su (5.66) linearne funkcije  $\alpha$  i  $\beta$  (5.66a) će biti linearne jednačine i njihovo rešavanje po  $\alpha$  i  $\beta$  ne predstavlja naročiti problem. Kada su (5.66) nelinearne funkcije, tada se primenjuju računarski orientisane metode rešavanja nelinearnih algebarskih jednačina.

U cilju ilustracije mogućnosti Mitrovićeve metode razmotrićemo još jedan primer.

**Primer 5.6.2.** Sistem s jediničnom negativnom povratnom spregom ima povratni prenos  $W_p(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$ . Analizirati ponašanje sistema u funkciji podesivih parametara  $a$  i  $K$ , a zatim odrediti vrednosti tih parametara tako da sistem ima par dominantnih polova određenih sa:  $\zeta=0,5$  i  $\omega_n=1 \text{ s}^{-1}$ .

Karakteristični polinom sistema je

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (K+2)s + aK = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + a_1s + a_o.$$

Kao što se vidi, koeficijenti karakterističnog polinoma  $a_o$  i  $a_1$  su funkcije podesivih parametara ( $a$  i  $K$ ). Zapišimo (5.67), primenjeno na dati sistem, u obliku

$$a_o = -a_2\omega_n^2\phi_1(\zeta) - a_3\omega_n^3\phi_2(\zeta) - a_4\omega_n^4\phi_3(\zeta),$$

$$a_1 = a_2\omega_n\phi_2(\zeta) + a_3\omega_n^2\phi_3(\zeta) + a_4\omega_n^3\phi_4(\zeta),$$

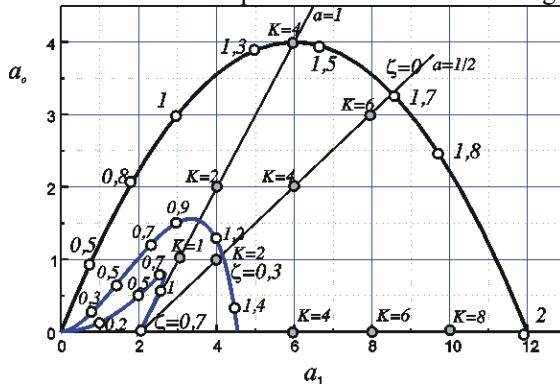
gde su, na osnovu (5.64):  $\phi_2(\zeta) = 2\zeta$ ,  $\phi_3(\zeta) = 1 - 4\zeta^2$ ,  $\phi_4(\zeta) = 4\zeta(2\zeta^2 - 1)$ , tako da se dobija

$$a_o = 4\omega_n^2 - 6\omega_n^3\zeta - \omega_n^4(1 - 4\zeta^2),$$

$$a_1 = 8\omega_n\zeta + 3\omega_n^2(1 - 4\zeta^2) + 4\omega_n^3\zeta(2\zeta^2 - 1).$$

U ravni  $a_o$ - $a_1$  konstruisaćemo krive  $a_o = f(a_1)$ , gde su  $\zeta$  i  $\omega_n$  promenljivi parametri, sl. 5.31.

Najpre, treba istaći da je interesantan samo prvi kvadrant, jer je tada sistem stabilan. Zatim možemo birati parametre u zavisnosti od toga kakav prelazni proces želimo.



Sl. 5.31. Grafici zavisnosti  $a_0=f(a_1)$  za različite vrednosti  $\zeta$  i  $\omega_n$ .

Naravno, za dobar prelazni proces dobro je da  $\zeta$  bude blizu vrednosti 0,7. Međutim, s obzirom na to da je sistem četvrtog reda mogli bi birati nešto manje  $\zeta$ , na primer  $\zeta=0,5$ , što je i traženo u zadatku. Na grafiku su nacrtane i dve prave linije koje se dobijaju iz relacija

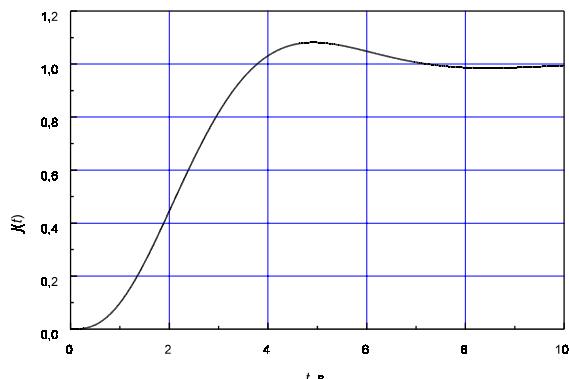
$$a_1 = K + 2,$$

$$a_o = aK,$$

za vrednosti  $a = 1$  i  $a = 0,5$ .

Birajući na liniji  $a=1$  pojačanje  $K=1$  zadovoljava se traženo  $\zeta=0,5$ .

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU



Sl. 5.32. Odskočni odziv sistema iz primera 5.6.2.

Prema tome, funkcija povratnog prenosa sistema koja će ispuniti tražene zahteve biće

$$W_p(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Na sl. 5.32 prikazan je odskočni odziv spregnutog sistema s izabranim parametrima

### 5.7 Integralni kriterijumi kvaliteta sistema

Za ocenu ponašanja sistema, kako u prelaznim režimima tako i u ustaljenom stanju, najmerodavniji je signal greške. U njemu se odslikavaju sve dinamičke i statičke osobine sistema, okarakterisane njegovom dinamičkom i statičkom tačnošću. U prethodnim odeljcima smo ocenjivali ponašanje sistema koristeći odskočni odziv (vremensko područje), frekvencijski odziv (frekvencijsko područje) ili spektar polova i nula sistema u  $s$  - ravni, koji direktno korespondira s vremenskim područjem. Znajući odskočni odziv sistema s jediničnom povratnom spregom, mi ujedno poznajemo i signal greške, jer se on od tog odskočnog odziva razlikuje samo za konstantnu ulaznu pobudu. Takav način ocene ponašanja sistema uvodi mnoge karakteristične veličine (vreme kašnjenja, vreme uspona, vreme smirenja, preskok, dominantnu vremensku konstantu, koeficijent relativnog prigušenja). On onemogućava jednostavno međusobno upoređenje sistema i usložnjava projektovanje. Zbog toga su istraživani drugi kriterijumi kvaliteta, koji bi sveobuhvatnije okarakterisali ponašanje sistema na osnovu poznavanja signala greške u vremenskom domenu. Takvi kriterijumi su *integralni kriterijumi kvaliteta*. Pomoću njih se ocenjuje kvalitet sistema na osnovu integrala neke funkcije signala greške. Na taj način, sistemi se mogu uporedivati ne po pojedinim karakterističnim veličinama, već integralno, samo na osnovu jednog jedinog kriterijuma - integrala oblika

$$J = \int_0^{\infty} f(e(t)) dt.$$

Pre nego što pristupimo neposrednom razmatranju mogućih integralnih kriterijuma, potrebno je ukazati na jednu važnu činjenicu: statički sistemi imaju konačnu grešku u ustaljenom stanju. Primena integralnih kriterijuma kvaliteta prethodno datog oblika, kod kojih je integrand funkcija od signala greške, a gornja granica integraljenja je beskonačna, nema smisla. Zbog toga se u praksi može postupiti na sledeća dva načina. Prvi je da se ocena ponašanja vrši u odnosu na dinamičku grešku sistema, nastalu usled delovanja Dirakove (impulsne) pobude, odnosno da se razmatra samo uticaj slobodne komponente

procesa. Drugi je da se posmatra greška sistema usled delovanja odskočne pobude uz oduzimanje veličine greške u ustaljenom stanju. Dalje ćemo smatrati da je sistem stabilan i da  $e(t) \rightarrow 0$  za  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.7.1 Izbor integralnog kriterijuma kvaliteta

Izbor integralnog kriterijuma kvaliteta nije jednostavan niti jednoznačan. Najprostiji integralni kriterijum kvaliteta je oblika

$$J_o = \int_0^\infty e(t) dt. \quad (5.67)$$

On određuje površinu koju zahvata kriva signala greške sa  $t$  osom. Međutim, ako je proces oscilatoran, površine s različitim strana  $t$ -ose imajuće suprotne znake, a one se algebarski sumiraju, pa suviše oscilatoran proces može imati daleko manji iznos integrala od nekog drugog pogodnijeg procesa, aperiodičnog ili monotonom tipa. Zbog toga se (5.67) može uspešno primenjivati samo za sisteme s monotoaperiodičnim odzivom. Kao veliku prednost ovog kriterijuma treba istaći jednostavnost dobijanja rešenja integrala  $J_o$  bez poznavanja signala greške u vremenskom domenu. Postoje dva prilaza. Prvi polazi od definicije kompleksnog lika signala greške

$$E(s) = \int_0^\infty e(t) e^{-st} dt. \quad (5.68)$$

Kao što se vidi, (5.67) i (5.68) postaju identični za  $s=0$ . Prema tome, vrednost integrala (5.67) jednak je kompleksnom liku signala greške za  $s=0$ , tj.

$$J_o = \int_0^\infty e(t) e^{-st} dt|_{s=0} = E(s)|_{s=0}.$$

Ukoliko se proces u sistemu opisuje modelom u obliku diferencijalne jednačine po signalu greške

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} e(t) = 0,$$

tada se, integraceći levu i desnu stranu ovog izraza i uzimajući u obzir stabilnost sistema (svi izvodi teže nuli), što implicira da je gornja granica svih integrala jednak nuli, dobija izraz oblika

$$a_o J_o + \sum_{i=1}^n a_i \left[ \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} e(t) \right]_{t=0} = 0, \Rightarrow J_o = \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n a_i \left[ \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} e(t) \right]_{t=0}.$$

Uočeni osnovni nedostatak prethodnog kriterijuma kvaliteta može se otkloniti primenom kriterijuma oblika

$$J_a = \int_0^\infty |e(t)| dt.$$

Međutim, zbog složenosti sračunavanja on se u praksi retko koristi.

Sledeći tipovi integralnog kriterijuma kvaliteta su oblika

$$J_k = \int_0^\infty t^k e(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.69)$$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

Pogodnost im je u mogućnosti uspostave direktnе veze s generalisanim konstantama greške sistema. Naime, polazeći od definicije kompleksnog lika signala greške (5.68) i vodeći razvoj funkcije  $e^{-st}$  u Taylorov red može se napisati

$$E(s) = \int_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s^k \frac{t^k}{k!} \right) e(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} J_k. \quad (5.70)$$

S druge strane, razlažući prenos po signalu greške u beskonačni red po  $s$ , kako je to urađeno u odeljku za određivanje greške sistema u stacionarnom stanju, pri delovanju sporopromenljivog signala na ulazu, dobija se

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} E(s) = C_o + C_1 s + \frac{1}{2} C_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C_k s^k. \quad (5.71)$$

Na osnovu dva poslednja izraza, smatrajući da je ulazni signal Dirakova funkcija, može se napisati jednakost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} J_k.$$

Oba beskonačna reda, (5.70) i (5.71), dobijena su uz preretpostavku da  $s \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Postavljajući, sukcesivno, tipične ulazne signale i izjednačavajući koeficijente pri istim stepenima nalaze se relacije

$$J_k = (-1)^k C_k; \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.72)$$

I ovaj tip integralnih kriterijuma kvaliteta nije dobio širu primenu u teoriji i praksi.

### 5.7.2 Integralni kvadratni kriterijumi kvaliteta

Ovi kriterijumi su našli najširu primenu u teoriji sistema. U najopštijem obliku mogu se izraziti relacijom

$$J_{2n} = \int_0^\infty \left( \sum_{i=0}^n \left( \tau_i \frac{d^n e(t)}{dt^n} \right)^2 \right) dt, \quad (5.73)$$

gde su  $\tau_i$  - konstantne veličine.

Minimalizacija ovog kriterijuma kvaliteta, u zavisnosti od veličine ponderišućih faktora  $\tau_i$ , uvodi odgovarajuća ograničenja na tok signala greške i njegovih izvoda. Tako, na primer, ako se usvoji kriterijum kvaliteta oblika

$$J_{22} = \int_0^\infty \left( e^2(t) + \left( \tau \frac{de(t)}{dt} \right)^2 \right) dt, \quad (5.74)$$

prepostavljajući da je sistem stabilan, a  $e(\infty)=0$ , i predstavljajući prethodnu relaciju na sledeći način

$$J_{22} = \int_0^\infty \left( e(t) + \tau \frac{de(t)}{dt} \right)^2 dt - 2\tau \int_0^\infty e(t) \frac{de(t)}{dt} dt = \int_0^\infty \left( e(t) + \tau \frac{de(t)}{dt} \right)^2 dt - \tau e^2(0),$$

te zahtevajući da ona ima minimum-minimorum, dolazi se do zaključka da se on postiže s podintegralnom veličinom jednakom nuli, tj. pri uslovu

$$\tau \frac{de(t)}{dt} + e(t) = 0,$$

i početnoj vrednosti  $e(0)$ . Tada signal greške ima karakter impulsnog odziva inercijalnog elementa prvog reda, tj.

$$e(t) = e_0 e^{-t/\tau}. \quad (5.75)$$

To je *ekstremala funkcionala* (5.74), koja je utoliko manja ukoliko je  $\tau$  manje. U graničnom slučaju,  $\tau \rightarrow 0$ , ekstremala se poklapa s koordinatnim osama. To je idealni slučaj koji se, naravno, ne može ostvariti u praksi.

Za praktičnu primenu integralnih kriterijuma kvaliteta, potrebno je poznavati analitičko rešenje integrala koji ih karakterišu. U tom cilju, razmotrimo izraz (5.74), koji se može napisati u obliku

$$J_{22} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + \tau^2 \int_0^{\infty} \left( \frac{de(t)}{dt} \right)^2 dt = J_{22}^a + \tau^2 J_{22}^b.$$

$J_{22}^a$  se često koristi kao samostalan integralni kriterijum kvaliteta, jer, nema nedostatke kriterijuma (5.67), ali, takođe, daje neadekvatnu ocenu kod suviše brzih i osculatornih procesa. Za analitičko rešenje  $J_{22}^a$  u literaturi se koristi *Parsevalova formula*, do koje se dolazi na osnovu Furijeove transformacije signala greške:

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.76)$$

Množeći obe strane (5.76) sa  $e(t)$ , integraleći ih u garnicama  $[0, \infty]$  i menjajući na desnoj strani redosled integraljenja, dobija se

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) \left[ \int_0^{\infty} e(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega.$$

Uzimajući u obzir da je na osnovu definicije Furijeove transformacije

$$\int_0^{\infty} e(t) e^{j\omega t} dt = E(-j\omega),$$

može se konačno zapisati Parsevalova formula u sledećem obliku

$$J_{22}^a = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega. \quad (5.77)$$

Podintegralna veličina u (5.77) je *spektralna gustina energije*, pa se poslednji izraz može odrediti kao površina koju zahvata kriva spektralne gustine energije  $|E(j\omega)|^2$  sa  $\omega$ -osom, podeljena sa  $2\pi$ .

Izraz (5.77) ima analitičko rešenje, koje se određuje na osnovu koeficijenata polinoma brojioca i imenioca funkcije prenosa po signalu greške. Neka je signal greške, pri delovanju odskočnog odziva, dat izrazom

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

$$E(s) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i / \sum_{j=0}^n a_j s^j, \quad (5.78)$$

tada se (5.77) izračunava po obrascu [15]

$$J_{22}^a = (-1)^n \frac{\Delta'_{n-1}}{2a_n \Delta_n}, \quad (5.79)$$

gde su:  $\Delta_n$  - Hurvicova determinanta polinoma u imenici (5.78), a  $\Delta'_{n-1}$  - je determinanta koja se dobija iz  $\Delta_n$  zamenom poslednje vrste vrstom:

$$b_o, 2b_o b_2 - b_1, \dots, 2b_o b_4 - 2b_1 b_3 + b_2, \dots, (-1)^{n-1} b_{n-1}.$$

(5.79) se može unapred sračunati, što se daje u brojnoj literaturi. Navećemo samo izraze za sisteme do trećeg reda [15]:

$n$	1	2	3
$J_{22}^a$	$\frac{b_o}{2a_o a_1}$	$\frac{b_1^2 a_o + b_o^2}{2a_o a_1 a_2}$	$\frac{b_2^2 a_o a_1 + (b_1^2 - 2b_o b_2)a_o a_3 + a_o^2 a_2^2 a_3^2}{2a_1 a_3 (a_1 a_2 - a_o a_3)}$

Rešenje za integral  $J_{22}^b$  može se naći na sličan način kao za  $J_{22}^a$ , s tom razlikom što će polinom u brojiocu (5.78) imati isti stepen kao imenilac, a slobodan član  $b_o=0$ , jer je podintegralna funkcija  $J_{22}^b$  kvadrat impulsnog odziva sistema koji se dobija diferenciranjem odskočnog odziva, odnosno množenjem kompleksnog lika odskočnog odziva promenljivom  $s$ .

Za analitičko rešavanje integrala oblika (5.73), veoma je pogodan jedan drugi postupak [14]. Zapišimo taj izraz u obliku

$$J_{2n} = \int_0^\infty V(t) dt, \quad (5.80)$$

gde je  $V(t)$  - podintegralna funkcija u (5.73) koja je u obliku nepotpune kvadratne forme signala greške i njegovih diferencijala, tj. u obliku kvadratne forme kanoničkih promenljivih sistema.  $V(t)$  se može zapisati u obliku

$$V = \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}, \quad (5.81)$$

gde je  $\mathbf{e}^T = [e, \dot{e}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}]$  - vektor kanoničkih promenljivih sistema u odnosu na signal greške, a  $\mathbf{Q}$  - je pozitivno definitna dijagonalna matrica

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & q_n \end{bmatrix}; q_i = \tau_i^2. \quad (5.82)$$

Neka, dalje, postoji druga kvadratna forma  $W(t) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$  takva da važi

$$\frac{dW(t)}{dt} = -V(t). \quad (5.83)$$

Tada (5.80) postaje

$$J_{2n} = - \int_0^{t=\infty} dW(t) = W|_0^\infty = W(0) - W(\infty). \quad (5.84)$$

S obzirom na pretpostavku da je sistem stabilan i da sve kanoničke koordinate signala greške teže nuli kada  $t \rightarrow \infty$ , onda je vrednost integrala (5.84),

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (5.86)$$

poznata ako je početno stanje vektora signala greške  $\mathbf{e}(0)$ . Ovde jedino ostaje da se odrede elementi matrice  $\mathbf{P}$ . Oni se mogu naći na osnovu diferencijalne jednačine sistema po signalu greške, zapisane u matrično-vektorskoj formi korišćenjem (5.78), tj. na osnovu relacija:

$$\frac{d}{dt}W(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}] = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (5.87)$$

Izvodeći naznačeno diferenciranje, posle zamene (5.80), ima se

$$\mathbf{e}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}] \mathbf{e} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e},$$

odakle se konačno dobija relacija za izračunavanje simetrične matrice  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \quad (5.88)$$

Relacija (5.88) je matrična algebarska jednačina Ljapunova. Način njene primene prikazaćemo na sledećem primeru.

**Primer 5.7.1.** Povratni prenos sistema s jediničnom povratnom spregom je  $W_p(s) = \frac{k}{s(1+sT)}$ . Naći vrednost integralnog kriterijuma kvaliteta oblika (5.74).

Funkcija spregnutog prenosa sistema u odnosu na signal greške je

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s)} = \frac{T s^2 + s}{T s^2 + s + k}.$$

Diferencijalna jednačina koja opisuje proces u ovom sistemu je

$$T \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} + ke = T \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt}.$$

Neka je pobudni signal Hevisajdov jedinični odskočni signal i neka su elementi u sistemu bez početne energije. Tada će se proces u sistemu opisivati modelom

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{de}{dt} + \omega_n^2 e = 0; \quad e(0) = 1; \quad e'(0) = 0; \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}, \quad \omega_n = \sqrt{k/T}$$

ili u vektorsko-matričnom obliku

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Primenjujući (5.88) možemo napisati

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \\ 1 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\tau^2 \end{bmatrix},$$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

$$\begin{bmatrix} -2\omega_n^2 p_{12} & p_{11} - \omega_n^2 p_{22} - 2\zeta\omega_n p_{12} \\ p_{11} - 2\zeta\omega_n p_{12} - \omega_n^2 p_{22} & 2p_{12} - 4\zeta\omega_n p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\tau^2 \end{bmatrix},$$

odakle se, upoređivanjem odgovarajućih članova matrica na levoj i desnoj strani, nalazi:

$$p_{12} = \frac{1}{2\omega_n^2}; \quad p_{22} = \frac{1}{2\zeta\omega_n} p_{12} + \frac{\tau^2}{4\zeta\omega_n} = \frac{1}{4\zeta\omega_n} \left( \frac{1}{\omega_n^2} + \tau^2 \right);$$

$$p_{11} = \omega_n^2 p_{22} + 2\zeta\omega_n p_{12} = \omega_n^2 \left( \frac{1}{4\zeta\omega_n} \left( \frac{1}{\omega_n^2} + \tau^2 \right) \right) + \frac{\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{4\zeta\omega_n} + \frac{\zeta}{\omega_n} + \frac{\omega_n}{4\zeta} \tau^2$$

Sada je

$$J_{22} = [e_1(0) \ e_2(0)] \begin{bmatrix} \frac{1}{4\zeta\omega_n} + \frac{\zeta}{\omega_n} + \frac{\omega_n}{4\zeta} \tau^2 & \frac{1}{2\zeta\omega_n^2} \\ \frac{1}{2\zeta\omega_n^2} & \frac{1}{4\zeta\omega_n} \left( \frac{1}{\omega_n^2} + \tau^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_2(0) \end{bmatrix}.$$

$$J_{22} = \frac{1}{4\zeta\omega_n} + \frac{\zeta}{\omega_n} + \frac{\omega_n}{4\zeta} \tau^2.$$

Kao parcijalni slučaj, za  $\tau=0$ , dobija se

$$J_{22}^a = \int_0^\infty e_1^2 dt = \frac{1}{4\zeta\omega_n} + \frac{\zeta}{\omega_n}.$$

Kada se dobije izraz za  $J$  može se vršiti njegova minimalizacija po bilo kom parametru ili za veći broj parametara od kojih on zavisi.

Tako, na primer, diferencirajući  $J_{22}^a(\zeta, \omega_n)$  po  $\zeta$  i izjednačavajući diferencijal s nulom, optimalna vrednost za  $\zeta$  postaje  $\zeta_{opt} = \sqrt{2}/2$ , što je dobro poznat rezultat. Pri tome, vrednost kriterijuma optimalnosti je  $J_{22}^a(\zeta_{opt}, \omega_n) = 3\sqrt{2}/4\omega_n$ .

Ukazana metodologija izračunavanja  $J_{2k}$  je opšta i izražava se algebarskom jednačinom Ljapunova (5.88). Štaviše, ukazani postupak se može unapred sprovesti za bilo koji red sistema i dobiti konačne relacije, ne tražeći elemente matrice  $\mathbf{P}$  svaki put. U literaturi [14] date su takve relacije za sistem  $n$ -tog reda čija je diferencijalna jednačina slobodnog kretanja oblika (5.86), matrica  $\mathbf{A}$  je data u kontrolabilnoj kanoničkoj (kompanjon) formi, njeni elementi su  $a_i, i = \overline{0, n}$ ; funkcija  $V(e)$  je data sa (5.83), (5.84), a elementi simetrične matrice  $\mathbf{P}$  se dobijaju po sledećim formulama:

$$p_{1,k} = \frac{q_1 a_{n-k}}{2a_n} + p_{k+1,n} \frac{a_n}{a_o};$$

$$p_{j,n-i} = \sum_{m=0}^l (-1)^m p_{j-m,n} \frac{a_{l-m}}{a_o} - (-1)^l \sum_{m=0}^{l-1} p_{n-m,n} \frac{a_{n-j+l-m}}{a_o};$$

$$q_{k,n} = \frac{\Delta_k}{\Delta} \frac{a_o}{2}; q_{k,n} = 0 \text{ za } k < 1 \text{ i } a_k = 0 \text{ za } k > n. \quad (5.89)$$

gde je  $\Delta$  - determinanta Hurvicove matrice, za karakterističnu jednačinu

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0,$$

napisana u obliku

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad (5.90)$$

a  $\Delta_k$  se dobija iz  $\Delta$  zamenom njegove  $k$ -te kolone kolonom

$$[(-1)^{k+1} q_1, (-1)^{k+2} q_2, \dots, (-1)^{k+n} q_n]^T. \quad (5.91)$$

**Primer 5.7.2.** Ove formule ilustrovaćemo na primeru sistema čije se slobodno kretanje opisuje diferencijalnom jednačinom trećeg reda, čija je karakteristična jednačina

$$\beta s^3 + s^2 + s + \alpha = 0 \Rightarrow a_0 = \beta; a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = \alpha,$$

a početne vrednosti promenljivih su:  $e_1(0) = 1; e_2(0) = 0; e_3(0) = 0$ .

Neka je podintegralna funkcija u kriterijumu kvaliteta data elementima matrice  $\mathbf{Q}$ :

$$q_1 = 1; q_2 = \tau^2; q_3 = \tau^4 / 4.$$

S obzirom da je matrica  $\mathbf{Q}$  simetrična, a početna vrednost vektora  $\mathbf{e}$  je  $\mathbf{e}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ , uzimajući u obzir relaciju (5.85), nalazimo da je  $J_{23} = p_{11}$ .

Na osnovu prve relacije u (5.89) dobija se

$$p_{11} = \frac{q_1 a_2}{2a_3} + p_{2,3} \frac{a_3}{a_0} = \frac{q_1 a_2}{2a_3} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{a_o}{2} = \frac{q_1 a_2}{2a_3} + \frac{q_1 a_2}{2a_3} + \frac{0 \ -q_3 \ a_1}{\begin{vmatrix} a_3 & -q_1 & 0 \\ a_1 & q_2 & a_3 \\ 0 & -q_3 & a_1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \frac{a_o}{2} \frac{a_3}{a_o} =$$

$$\frac{q_1 a_2}{2a_3} + \frac{a_3(a_1 q_2 + a_3 q_3) + q_1 a_1^2}{2(a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{0,25\tau^4\alpha^2 + \alpha\tau^2 + 1}{2(1-\alpha\beta)};$$

$$J_{23} = \frac{1}{2k} + \frac{0,25\tau^4\alpha^2 + \alpha\tau^2 + 1}{2(1-\alpha\beta)}.$$

Uz uslov da je dati sistem stabilan  $(1-\beta k)>0$ , posmatrani kriterijum ima konačnu vrednost, te se može optimalizovati po parametrima od kojih zavisi.

Ukoliko postoji minimum integralnog kriterijuma kvaliteta, on će, dakle, imati *ekstremalu*, tj. optimalni proces će biti opisan sa  $e_{opt}(t)$ . Za integralne kriterijume kvaliteta oblika  $J_{2n}$  može se tvrditi da, ako je za neke parametre izračunati integral blizak njegovoj minimalnoj vrednosti, stvarni proces će se veoma malo razlikovati od  $e_{opt}(t)$ .

U ovom integralnom kriterijumu kvaliteta osnovnu ulogu igraju ponderišući faktori, odnosno izbor elemenata matrice  $\mathbf{Q}$ . Pri povećanju ponderišućih faktora

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

uz diferencijale signala greške, prelazni proces se usporava. Sistem postaje previše spor. Zbog toga je, ako se želi brži proces regulacije, potrebno birati manje vrednosti ponderišućih faktora. Međutim, suviše male vrednosti mogu dovesti do povećanja preskoka. U svakom slučaju izbor ponderišućih faktora ne može biti proizvoljan. On se mora zasnovati na dobrom poznavanju procesa, na iskustvima drugih inženjera-istraživača, dobijenih proučavanjem literature, kao i na osnovu sopstvenog iskustva, ostvarenog u rešavanju većeg broja zadataka ovog tipa.

U savremenoj teoriji SAU, osim gore navedenih, veoma često se koristi kriterijum kvaliteta oblika

$$J_{2u} = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (5.92)$$

gde je  $\mathbf{R}$ - takođe realna simetrična matrica, a  $\mathbf{u}$  - je signal upravljanja.

U ovom kriterijumu kvaliteta, pored signala greške, važnu ulogu ima i veličina signala upravljanja. Time se od sistema zahteva i minimalizacija energije koja se troši na upravljanje. Izborom matrice  $\mathbf{R}$  utiče se na veličinu signala upravljanja.

Ako se signal upravljanja formira na osnovu signala greške primenom proporcionalnog regulatora  $\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{K}$  - konstantna matrica, ili proporcionalno-diferencijalnog regulatora, tada se ovaj kriterijum kvaliteta svodi na prethodni.

Interesantan prilaz u sintezi sistema primenom kriterijuma kvaliteta oblika (5.92) dao je američki naučnik Kalman, o čemu će biti detaljnije govora u TAU-2.

### 5.8 Osetljivost

U poglavljiju o stabilnosti istaknut je problem njene ocene ako se parametri sistema menjaju u poznatim granicama. Tamo je dat Haritonovljev kriterijum koji daje potrebne i dovoljne uslove stabilnosti takvih sistema. Međutim, problem promene parametara nije od interesa samo za ocenu stabilnosti sistema, iako je to najvažniji i prvi problem kome treba posvetiti pažnju u analizi i sintezi sistema. U toku proučavanja kriterijuma za ocenu ponašanja sistema u prelaznim režimima i stacionarnom stanju, pretpostavljali smo da raspolažemo nominalnim parametrima elemenata i sistema, ili smo proučavali ponašanje sistema pri promeni nekog parametra, kao što je pojačanje. Pri tome smo, uglavnom, imali na umu da je to podesiv parametar, a naš zadatak se svodio na izbor njegove optimalne vrednosti.

Komponente SAU, korišćene za njegovu konstrukciju, imaju svoje nominalne karakteristike, koje proizvođači navode u svojim katalozima, uz određene tolerancije. Svaka komponenta unosi u sistem svoj deo uticaja na njegove karakteristike: stabilnost, tačnost, brzinu odziva itd. Neke komponente imaju manji, druge veći uticaj, odnosno posmatrana osobina sistema je manje ili više osetljiva na promenu ovog ili onog parametra. Zbog toga je od posebnog značaja utvrđivanje metodologije izučavanja uticaja promene parametara na karakteristike sistema. Stepen promene izučavane osobine ili funkcije sistema u odnosu na promenu nekog parametra ili neke funkcije sastavne komponente

ocenjuje se kvantitativno *funkcijom osetljivosti* (ruski: *чувствительность*, engleski: *sensitivity*). Zato se ona mora najpre matematički definisati.

Nazovimo funkciju koja karakteriše kvalitet sistema *izlaznom funkcijom (veličinom)*, a parametar ili funkciju komponente čiju promenu na izlaznu funkciju želimo da izučimo - *ulaznom funkcijom (veličinom)*. Tada se *funkcija osetljivosti* može definisati kao količnik diferencijala izlazne i ulazne funkcije za male promene ulazne veličine oko nominalne vrednosti:

$$\sigma_{f_u}^{f_i} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial f_u} \right)^0, \quad (5.93)$$

gde su:  $\sigma_{f_u}^{f_i}$  - *funkcija osetljivosti*,  $f_i$  - *izlazna funkcija*, a  $f_u$  - *ulazna funkcija*.

Znak  $^0$  označava nalaženje izvoda za nominalne vrednosti funkcija ili parametara. Tako, na primer, koordinate stanja  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  su funkcije parametara sistema  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ . Tada se funkcija osetljivosti koordinata stanja u odnosu na parametre može odrediti kao

$$\sigma_{\alpha_j}^{x_i} = \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0. \quad (5.94)$$

Isto tako, varijacija nekog parametra komponente sistema dovodi do promene njegove funkcije prenosa  $W_\sigma(s)$ , a to može dovesti do promene ukupne funkcije prenosa (na primer, spregnutog prenosa sistema  $W_s(s)$ ). Tada je funkcija osetljivosti data sa

$$\sigma_{W_\sigma}^{W_s} = \left( \frac{\partial W_s(s)}{\partial W_\sigma(s)} \right)^0. \quad (5.95)$$

Nazovimo, dalje, sistem sa nominalnim vrednostima parametara *nominalni sistem*, sistem sa promenljivim (perturbovanim) parametrima - *perturbovani sistem*, a kretanja u njima *nominalnim* i *pertubovanim*, respektivno. Razlika ta dva kretanja naziva se *dopunskim kretanjem sistema*.

Neka se nominalni sistem opisuje sistemom nelinearnih diferencijalnih jednačina datih u normalnoj Košijevoj formi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \vec{\alpha}), \quad (5.96)$$

gde su:  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  -  $n$  dimenzionalni vektor stanja,  $\mathbf{f}$  - nelinearna vektor funkcija, a  $\vec{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$  - vektor parametara i neka je u nekom vremenskom trenutku došlo do varijacije (perturbacije) parametara. Prepostavljajući da ona nije dovela do promene oblika matematičkog modela (5.96), perturbovano kretanje sistema opisivaće se relacijom

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}). \quad (5.97)$$

Razlika (5.96) i (5.97) predstavlja *dopunsko kretanje sistema*

$$\Delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \quad (5.98)$$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

Ako su  $\mathbf{x}$  i  $\bar{\mathbf{x}}$  diferencijabilni po  $\bar{\alpha}$ , tada se poslednji izraz može razviti u Taylorov red po stepenima  $\Delta\bar{\alpha}$ , koji važi samo za dovoljno male promene, a zadržavajući samo linearne članove dobiće se

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{G}(\sigma_{\alpha_j}^{x_i})\Delta\bar{\alpha}, \quad (5.99)$$

gde je  $\mathbf{G}(\sigma_j^i)$  -  $n \times m$  matrica čije su vrste gradijenti koordinata stanja po parametrima sistema, tj.

$$\vec{\sigma}_j^i = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \right] = \left[ \sigma_{\alpha_1}^{x_i}, \sigma_{\alpha_2}^{x_i}, \dots, \sigma_{\alpha_m}^{x_i} \right], i = \overline{1, n} \quad (5.100)$$

Na taj način, znajući funkcije osetljivosti i varijacije parametara, možemo naći prvu aproksimaciju dopunskog kretanja.

S druge strane, diferencirajući jednačinu stanja (5.96) po vektoru parametara, dobiće se

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\alpha}} \right) = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \dot{\vec{\sigma}} = \mathbf{V}\vec{\sigma} + \mathbf{v}, \quad (5.101)$$

gde su:  $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]^T$  - vektor funkcija osetljivosti,  $\mathbf{V}$  je matrica čiji su elementi parcijalni izvodi  $\partial f_i / \partial x_k$ , a  $\mathbf{v}$  - je vektor čiji su elementi parcijalni izvodi  $\partial f_i / \partial \alpha_j$ .

Dobijen sistem jednačina (5.101) naziva se *sistem diferencijalnih jednačina osetljivosti*. Njihovo rešenje daje funkciju osetljivosti. Zbog složenosti, ovaj sistem se teško analitički rešava pa se pribegava modeliranju na računaru uz korišćenje strukturnih metoda dobijanja modela osetljivosti.

Neka je data funkcionalna zavisnost ulaznog  $r(t)$  i izlaznog  $c(t)$  signala sistema u operatorskom obliku

$$C(s) = W_s(s)R(s). \quad (5.102)$$

Odredimo kompleksni lik funkcije osetljivosti diferenciranjem (5.102) po parametru  $\alpha_\sigma$ :

$$\sigma_{\alpha_\sigma}^C(s) = \frac{\partial W_s(s)}{\partial \alpha_\sigma} R(s) = \frac{\partial W_s(s)}{\partial \alpha_\sigma} \frac{C(s)}{W_s(s)} = \frac{\partial \ln W_s(s)}{\partial W_s(s)} \frac{\partial W_\sigma(s)}{\partial \alpha_\sigma} C(s), \quad (5.103)$$

gde je  $W_\sigma(s)$  funkcija prenosa elementa čiji su parametri  $\alpha_\sigma$ .

### 5.8.1 Strukturni metod modela osetljivosti sistema

Ovaj metod koristi strukturne blok-dijagrame ili graf toka signala za određivanje funkcije osetljivosti sistema, koja se definiše na pogodniji način kao *količnik diferencijala prirodnih logaritama izlazne i ulazne funkcije* i naziva se prosto *osetljivost*, tj.

$$S_{W_\sigma}^W = \frac{d(\ln W(s))}{d(\ln W_\sigma(s))}, \quad (5.104)$$

što se može napisati i u obliku

$$S_{W_\sigma}^{W_s} = \frac{dW(s)/W(s)}{dW_\sigma(s)/W_\sigma(s)} = \frac{W_\sigma(s)}{W_s(s)} \frac{dW(s)}{dW_\sigma(s)} = \frac{W_\sigma(s)}{W(s)} \sigma_{W_\sigma}^W. \quad (5.105)$$

Istaknimo da je velikim slovom  $S$  (od engleske reči *Sensitivity*) označena logaritamska osetljivost, a malim slovom  $\sigma$ -obična funkcija osetljivosti.

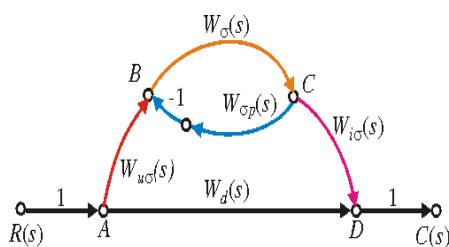
Za određivanje osetljivosti SAU, predstavljenog grafom toka signala, postupa se na sledeći način [15]. U grafu toka signala, sl. 5.33, izdvaja se grana ( $BC$ ) u kojoj se nalazi element  $W_\sigma(s)$ , čiji uticaj na ukupni (spregnuti) prenos sistema  $W_s(s)$  želimo da izučavamo. Neka je taj element obuhvaćen granom negativne povratne sprege ( $CB$ ), čiji ćemo prenos označiti sa  $W_{\sigma p}(s)$ . Dalje, označimo prenos grane od ulaza u sistem do podistema sa elementom  $W_\sigma(s)$  (grana  $AB$ ) sa  $W_{u\sigma}(s)$ , a od tog podistema do izlaza sistema (grana  $CD$ ) sa  $W_{i\sigma}(s)$ , kao i ukupni prenos paralelne (direktne grane  $(AD)$ ) sa  $W_d(s)$ . Funkcija spregnutog prenosa celog sistema je

$$W(s) = W_s(s) = W_d(s) + W_{u\sigma}(s) \frac{W_\sigma(s)}{1 + W_\sigma(s)W_{\sigma p}(s)} W_{i\sigma}(s). \quad (5.106)$$

Odredimo prvo funkciju osetljivosti na osnovu definicije (5.95)

$$\sigma_{W_d}^W = \frac{dW_s(s)}{dW_\sigma(s)} = \frac{W_{u\sigma}(s)W_{i\sigma}(s)}{[1 + W_\sigma(s)W_{\sigma p}(s)]^2}.$$

Zamenjujući ovu relaciju u formulu za osetljivost (5.105) dobija se



Sl. 5.33. Graf toka signala za određivanje osetljivosti.

$$S_{W_d}^{W_s} = \frac{W_{u\sigma}(s)W_{i\sigma}(s)}{[1 + W_\sigma(s)W_{\sigma p}(s)]^2} \frac{W_\sigma(s)}{W_s(s)}.$$

Medutim, iz izraza za funkciju spregnutog prenosa sistema sledi

$$\frac{W_{u\sigma}(s)W_\sigma(s)W_{i\sigma}(s)}{[1 + W_\sigma(s)W_{\sigma p}(s)]} = W_s(s) - W_d(s)$$

pa se konačno osetljivost posmatranog sistema dobija u obliku

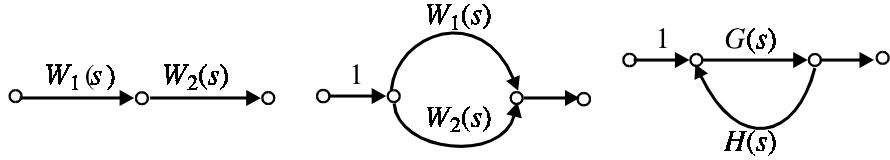
$$S_{W_d}^{W_s} = \left[ 1 - \frac{W_d(s)}{W_s(s)} \right] \frac{1}{[1 + W_\sigma(s)W_{\sigma p}(s)]}. \quad (5.107)$$

Ova formula je osnovna za određivanje osetljivosti sistema automatskog upravljanja. Za njenu primenu, potrebno je poznavati funkciju spregnutog prenosa sistema  $W_s(s)$ , prenos elementa čiji uticaj izučavamo  $W_\sigma(s)$ , prenos povratne grane koja obuhvata taj element  $W_{\sigma p}(s)$ , kao i prenos direktnе grane  $W_d(s)$ .

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

**Primer 5.8.1.** Odrediti osetljivost osnovnih sprega elemenata automatike: redne, paralelne i sistema sa povratnom spregom u odnosu na promene jednog od elemenata.

a) **Redna sprega.** Za rednu spregu su:  $W_d(s) = 0, W_s(s) = W_1(s)W_2(s), W_{\sigma p} = 0$



Sl. 5.34. Graf toka signala osnovnih sprega elemenata.

a  $W_\sigma(s)$  je  $W_1(s)$  ili  $W_2(s)$ . Stoga je

$$S_{W_d}^{W_s} = 1. \quad (5.108)$$

Osetljivost sistema sa redno vezanim elementima je jednaka jedinici.

b) **Paralelni sprega.** Pretpostavljajući da je jedan od elemenata promenljiv, na primer prvi, tada je  $W_\sigma(s) = W_1(s)$ ,  $W_d(s) = W_2(s)$ ,  $W_{\sigma p} = 0$ ,  $W_s(s) = W(s) = W_1(s) \pm W_2(s)$ . Osetljivost je

$$S_{W_1}^{W_s} = 1 - \frac{W_2(s)}{W_1(s) \pm W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{W_1(s) \pm W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{W(s)}. \quad (5.109)$$

Osetljivost sistema sa paralelno vezanim elementima je jednaka količniku funkcija prenosa promenljivog elementa i funkcije prenosa sistema.

c) **Spregnuti sistem.** Kod običnog sistema automatskog upravljanja nije svejedno koji element se menja.

c1) Pretpostavimo, najpre, da se menja element u direktnoj grani. Tada je

$$W_\sigma(s) = G(s), \quad W_s(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}; \quad stW_{\sigma p}(s) = H(s), \quad W_d(s) = 0.$$

Zbog toga je

$$S_G^{W_s} = \frac{1}{1 \pm W_p(s)} = \frac{1}{1 \pm G(s)H(s)} = \frac{W_s(s)}{G(s)}. \quad (5.110)$$

Osetljivost spregnutog sistema u odnosu na element direktne grane jednak je količniku spregnutog prenosa i prenosa direktne grane

Negativna povratna sprega, za razliku od pozitivne, smanjuje osetljivost spregnutog prenosa sistema u odnosu na element u direktnoj grani.

c2) Neka je sada promenljivi element u povratnoj grani. Tada je:

$$W_d(s) = G(s), \quad W_{\sigma p}(s) = G(s), \\ S_H^{W_s} = \frac{1 - \frac{G(s)[1 \pm G(s)H(s)]}{G(s)}}{1 \pm G(s)H(s)} = \frac{\mp G(s)H(s)}{1 \pm G(s)H(s)} = \mp W_s(s)H(s). \quad (5.111)$$

Osetljivost spregnutog prenosa u odnosu na element u povratnoj grani je jednak proizvodu funkcija spregnutog prenosa i prenosa povratne grane.

Negativna povratna sprega, za razliku od pozitivne, smanjuje osetljivost spregnutog prenosa sistema u odnosu na element u povratnoj grani.

Na osnovu (5.110) i (5.111) može se napisati

$$S_G^{W_s} - S_H^{W_s} = \frac{W_s(s)}{G(s)} \mp W_s(s)H(s) = W_s(s) \left[ \frac{1 \pm G(s)H(s)}{G(s)} \right] = 1.$$

*Razlika osetljivosti spregnutog prenosa sistema u odnosu na direktnu granu i u odnosu na povratnu granu jednaka je jedinici.*

Na isti način, mogu se nalaziti osetljivosti spregnutog sistema u odnosu na bilo koji element u složenoj strukturi. Mogu se ispitivati različite strukture sistema u pogledu osetljivosti i naći najpogodnija struktura, koja minimalizuje osetljivost sistema u odnosu na promenljivi element.

Na osnovu datog primera za osnovnu strukturu sistema može se zaključiti:

*Osetljivost spregnutog prenosa sistema biće jednaka nuli ako je element u povratnoj grani nepromenljiv a element u direktnoj grani ima beskonačno veliko pojačanje.*

Ovaj rezultat je ranije dobijen na osnovu elementarnih razmatranja.

## 5.9 Robustnost sistema

Robustnost je pojам uveden u teoriju i praksi SAU radi kvantitativnog utvrđivanja sposobnosti sistema da zadrži osobinu stabilnosti i pri značajnijim perturbacijama parametara i delovanju spoljašnjih poremećaja. Nasuprot tome, kao što smo videli, osetljivost sistema se utvrđuje za male perturbacije parametara. U tome leži osnovna razlika između ove dve osobine sistema, kao i u njihovom suprotnom značenju. Malo osetljiv sistem na parametarske perturbacije je robustan sistem i obrnuto. Međutim, zbog osnovne razlike u veličini perturbacija, za koje su ove dve osobine definisane, nije moguće kvantitativno izražavanje jedne osobine na osnovu poznavanja druge. Za utvrđivanje robustnosti sistema u odnosu na stabilnost, kada se radi o linearnim sistemima, mogu nam poslužiti kriterijumi stabilnosti. Kriterijumi stabilnosti Nikvista i Bodea, na osnovu definicije preteka faze i preteka pojačanja, omogućavaju ocenu robustnosti stabilnosti sistema. Međutim, ove dve osobine sistema definisane su tako što se pretpostavilo da se jedna veličina drži na konstantnoj vrednosti, dok se druga menja. U realnom sistemu, zbog parametarskih perturbacija, dolazi do istovremene promene kako faze tako i pojačanja, a samim tim i do istovremene promene preteka faze i pojačanja. Zbog toga je otežano jednostavno kvantitativno utvrđivanje robustnosti sistema na osnovu ovog prilaza.

Sa stanovišta ocene robustne stabilnosti linearnih sistema, najpogodnije je primeniti Haritonovljev koncept utvrđivanja stabilnosti sistema. Haritonovljeva metoda, na bazi poznavanja karakterističnog polinoma sistema i intervala promene njegovih koeficijenata, koristeći samo četiri zvezdična polinoma, daje odgovor na pitanje stabilnosti sistema, pri svim mogućim vrednostima parametara iz posmatranih intervala. Za primenu Haritonovljevog prilaza najpogodnije je posedovati model aditivnih perturbacija parametara modela sistema. Neka je slobodno kretanje sistema opisano nominalnim modelom u obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (5.112)$$

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

čiji karakteristični polinom,

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}], \quad (5.113)$$

ima sve leve korene. Usled perturbacije parametara, matrica stanja sistema dobija aditivnu komponentu  $\Delta\mathbf{A}$ , tako da se slobodno kretanje sistema opisuje jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}. \quad (5.114)$$

Sada je karakteristični polinom sistema

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}]. \quad (5.115)$$

Sistem će biti robustan ako i polinom (5.115), za sve moguće perturbacije iz zadatog opsega, zadovoljava uslove Haritonovljeve teoreme.

Osobina stabilnosti linearnih sistema ne zavisi od veličine ulaznog signala niti od veličine spoljašnjih poremećaja. Kod nelinearnih sistema, utvrđivanje robustnosti je mnogo složeniji problem, jer njihova stabilnost zavisi ne samo od parametara, već i od veličine spoljašnjih poremećaja. Za utvrđivanje robustnosti sistema sa parametarskim perturbacijama i sa spoljašnjim poremećajima, a čiji je model oblika

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (5.116)$$

gde je  $\mathbf{f}$  - vektor spoljašnjih poremećaja, primenjuju se razne metode, u prvom redu direktna metoda stabilnosti Ljapunova i druge, na njoj zasnovane, metode.

### 5.10 Invarijantnost

Invarijantnost je osobina sistema koja karakteriše njegovu absolutnu neosetljivost na parametarske perturbacije i/ili spoljašnje poremećaje. To je ideal kome treba težiti pri izboru tipa i strukture sistema automatskog upravljanja. Međutim, on se ne može absolutno dostići, već se može govoriti o delimičnoj invarijantnosti za određeni opseg parametarskih perturbacija ili spoljašnjih poremećaja.

Sa stanovišta osnovnog zadatka automatskog upravljanja, invarijatnim sistemom smatramo sistem čiji je signal greške jednak nuli pri svim referentnim ulazima i poremećajima. Prema tome, invarijantan sistem je onaj sistem čiji spregnuti prenos u odnosu na referentni ulazni signal jednak jedinici, tj.

$$W_s^r(s) = 1, \quad (5.117)$$

a spregnuti prenos u odnosu na spoljašnji poremećaj je jednak nuli, tj.

$$W_s^f(s) = 0. \quad (5.118)$$

U narednim poglavljima biće reči o izboru struktura sistema, kao što su: kombinovani sistemi, sistemi sa beskonačnim pojačanjem, sistemi sa unutrašnjom povratnom spregom kod kojih se teorijski može ostvariti invarijantnost.

## LITERATURA

- [1] Бесекерский , В. А., Попов, Е. П.: **Теория систем автоматического регулирования.** Наука, Москва, 1972.
- [2] Воронов, А. А.: **Основы теории автоматического управления: автоматическое регулирование непрерывных линейных систем,** Энергия, 1980.
- [3] Clarc, R. N.: **Introduction to Automatic Control Systems,** Jhon Wiley and Sons Inc, New York, 1962.
- [4] Kuo, B. C.: **Automatic Control Systems,** Prentice/Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ., 1982.
- [5] Нетушил, А. В. (ред.): **Теория автоматического управления,** Высшая школа, Москва, 1976.н, ,
- [6] Stojić, M. R.: **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja,** Naučna knjiga, Beograd, 1996
- [7] Gupta, S. C., Hasdorff, L: **Fundamental of Automatic Control,** Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1970.
- [8] Потач, В. Я: **Расчет настройки промышленных систем регулирования,** Госэнергоиздат, Москва, 1961.
- [9] Солодовников, В. В. (Ред.): **Основы теории и элементы систем автоматического регулирования,** Машиностроение, Москва, 1985.
- [10] Теодорчик, К. Ф., Бендриков, Г. А.: *Упрощенные методы аналитического построения траектории корней , Автоматика и телемеханика, 24, Но 2, 1963.*
- [11] Удерман, Е. Г.:**Метод корневого годографа в теории автоматического управления,** Госэнергоиздат, Москва, 1963.
- [12] Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A.: **Feedback Control of Dynamic Systems,** Addison-Wesley Publishing Co, 1986.
- [13] Воронов, А. А., :**Введение в динамику сложных управляемых систем,** Наука, Москва, 1985.
- [14] Фельдбаум, А. А. (Ред.): **Теоретические основы связи и управления,** Физматгиз, Москва, 1963.
- [15] Цыпкин, Я. З.: **Основы теории автоматических систем,** Наука, Москва, 1977.
- [16] Ćalasan, L., Petkovska, M.: **MATLAB i dodatni moduli Control System Toolbox i Simulink,** Mikro knjiga, Beograd, 1995.

### Pitanja za samopроверу

1. Ocenu kvaliteta ponašanja SAU može se vršiti u \_\_\_\_\_ stanju i u prelaznom \_\_\_\_\_.
2. Za ocenu ponašanja sistema u \_\_\_\_\_ stanju koriste \_\_\_\_\_.
3. Za ocenu ponašanja sistema u \_\_\_\_\_ stanju, kada na ulaz sistema deluje bilo koji sporopromenljivi signal, primenjuju se \_\_\_\_\_.
4. Konstanta položaja po klasičnoj definiciji je određena izrazom \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
5. Konstanta brzine po klasičnoj definiciji je određena izrazom \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
6. Konstanta ubrzanja po klasičnoj definiciji je određena izrazom \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
7. Greška sistema u ustaljenom stanju na odskočni signal određuje se po formuli \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
8. Greška sistema u ustaljenom stanju na nagibni signal određuje se po formuli \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
9. Greška sistema u ustaljenom stanju na parabolični signal određuje se po formuli \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
10. Generalisane konstante greške se najlakše određuju na osnovu spregnutog prenosa po signalu greške ako se izvrši \_\_\_\_\_ brojioca \_\_\_\_\_ funkcije prenosa po rastućim \_\_\_\_\_.
11. Za ocenu ponašanja sistema u dinamičkim režimima može se koristiti ili \_\_\_\_\_ domen.
12. Pretek faze sistema i koeficijent relativnog prigušenja za preteke faze do  $40^\circ$  može se približno okarakteristai relacijom \_\_\_\_\_.
13. Pokazatelj oscilatornosti se definiše kao maksimum \_\_\_\_\_, frekvencijske karakteristike sistema.
14. Rezonantna frekvencija je frekvencija pri maksimumu \_\_\_\_\_.
15. Propusni opseg sistema je definisan frekvencijom \_\_\_\_\_ posle rezonantnog vrha, kada pojačanje sistema opadne za \_\_\_\_\_.
16. Selektivnost se definiše kao \_\_\_\_\_ izražen u \_\_\_\_\_ amplitudno-frekvencijske karakteristike na ivici \_\_\_\_\_ opsega.
17. Propusni opseg karakteriše \_\_\_\_\_ reagovanja sistema, a selektivnost \_\_\_\_\_ osobine sistema na ivici propusnog opsega.
18. M-krugovi služe za ocenu stepena \_\_\_\_\_ sistema.

19. Vreme uspona je vreme potrebno da odakočni signal sistema naraste od 0,1 do \_\_\_\_\_ svoje vrednosti u \_\_\_\_\_ stanju.
  20. Vreme kašnjenja je vreme potrebno da odskočni signal sistema dostigne vrednost \_\_\_\_\_ svog ustaljenog stanja.
  21. Vreme smirenja je vreme potrebno da odskočni odziv \_\_\_\_\_ statičke tačnosti i da ih više ne napušta.
  22. Dominantna vremenska konstanta sistema se definiše kao vreme potrebno da donja anvelopa odskočnog odziva sistema naraste na vrednost \_\_\_\_\_ ustaljenog stanja.
  23. Veza između neprigušene frekvencije sistema, njegovog koeficijenta relativnog prigušenja i dominantne vremenske konstante definiše se relacijom \_\_\_\_\_.
  24. Preskok sistema je \_\_\_\_\_ između prvog \_\_\_\_\_ u odskočnom odzvu i vrednosti signala u ustaljenom stanju.
  25. Za dobar sistem se smatra onaj sistem koji nema veći preskok od \_\_\_\_\_, odnosno čiji je pretek faze oko \_\_\_\_\_.
  26. Uticaj polova i nula koji se nalaze mnogo levije u \_\_\_\_\_ poluravnim u odnosu na polove i nule koji su bliži imaginarnoj osi u s-ravni može se \_\_\_\_\_.
  27. Uticaj polova i nula koji čine \_\_\_\_\_ može se takođe zanemariti.
  28. Geometrijsko mesto korena (GMK) karakteristične jednačine predstavlja skup \_\_\_\_\_ u \_\_\_\_\_ po kojima se kreću \_\_\_\_\_ kada se menja \_\_\_\_\_ sistema ili neki drugi \_\_\_\_\_.
  29. Na osnovu karakteristične jednačine sistema dobijaju se dve relacije kao polazna osnova za konstrukciju GMK. To su \_\_\_\_\_ kriterijum i \_\_\_\_\_ kriterijum.
  30. Navedena dva kriterijuma se definišu relacijama \_\_\_\_\_.
  31. Za konstrukciju GMK koriste se \_\_\_\_\_ pravila, proistekla iz amplitudskog i faznog kriterijuma.
  32. Broj grana GMK jednak je \_\_\_\_\_.
  33. Grane GMK su simetrične u odnosu na \_\_\_\_\_.
  34. Delovi realne ose koji se nalaze \_\_\_\_\_ od \_\_\_\_\_ broja kritičnih frekvencija \_\_\_\_\_ GMK.
  35. Presek GMK sa realnom osom nalazi se uvek između dve \_\_\_\_\_ nule i dva \_\_\_\_\_, na delu realne ose koji \_\_\_\_\_ GMK.
  36. Presek GMK sa imaginarnom osom određuje se na osnovu \_\_\_\_\_, a najčešće na osnovu \_\_\_\_\_.
-

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

---

37. Grane GMK polaze iz \_\_\_\_\_, a završavaju se u \_\_\_\_\_ funkcije povratnog prenosa.
38. Ukoliko je broj nula funkcije povratnog prenosa manji od broja polova, jedan broj grana GMK će težiti ka \_\_\_\_\_.
39. Asimptote GMK se sekut u jednoj tački koja se nalazi na \_\_\_\_\_ koju nazivamo \_\_\_\_\_, a njena apscisa je određena relacijom \_\_\_\_\_.
40. Uglovi asimptota su definisani relacijom \_\_\_\_\_, gde su: \_\_\_\_\_.
41. Relativna stabilnost sistema se definiše sektorom u \_\_\_\_\_, okarakterisan \_\_\_\_\_, koja sa pozitivnom realnom osom zaklapa ugao \_\_\_\_\_.
42. Stepen eksponencijalne stabilnosti sistema se definiše pravom \_\_\_\_\_ imaginarnoj osi koja se nalazi u \_\_\_\_\_ poluravni s-ravni, pri čemu su svi polovi funkcija spregnutog prenosa sistema \_\_\_\_\_ od te prave.
43. Integralni kriterijumi kvaliteta se u najopštijem slučaju definišu relacijom \_\_\_\_\_.
44. U primeni su najčešće \_\_\_\_\_ integralni kriterijumi kvaliteta.
45. Funkcija osetljivosti sistema se definiše kao odnos \_\_\_\_\_ izlazne i ulazne promenljive sistema.
46. Osetljivost sistema se definiše kao odnos diferencijala \_\_\_\_\_ izlazne i ulazne promenljive.
47. Robustnost sistema se može definisati kao mera očuvanja \_\_\_\_\_ sistema pri promeni \_\_\_\_\_ sistema ili delovanju spoljašnjeg opterećenja.
48. Invarijantnost sistema je takva osobina sistema kada se njegove karakteristike \_\_\_\_\_ pri promeni \_\_\_\_\_ ili spoljašnjeg \_\_\_\_\_.

## Zadaci za vežbu

1. Spregnuti prenos sistema sa jedinčnom povratnom spregom je

$$W_s(s) = \frac{k(s+a)}{bs^3 + cs^2 + ds + e}.$$

odrediti grešku sistema u ustaljenom stanju ako na ulaz deluje signal  
 $r(t) = (f + gt)h(t)$ .

Parametri sistem su dati u tabeli 1.

Tabela 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	10	40	8	10	8	3	3	10	50
b	4	5	3	8	4	2	0.5	2	8
c	6	3	2	2	3	3	1.5	4	7
d	3	2	1	3	5	7	2	0.5	2
e	100	200	160	400	200	300	240	500	400
k	10	5	20	40	25	100	80	50	8
f	1	0,5	2	10	3	4	14	1,5	0,8
g	20	10	5	15	40	4	0.5	2	0,2

2. Funkcija povratnog prenosa sistema sa jediničnom povratnom spregom je

$$W_p(s) = \frac{k(s+a)}{s^2(1+bs)}. \text{ Odrediti grešku sistema kada na njegov ulaz deluje signal}$$

$$r(t) = f + gt + 0,5bt^2.$$

Parametri sistem su dati u tabeli 1.

3. Funkcija povratnog prenosa sistema sa jediničnom povratnom spregom je

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}.$$

Tabela 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	10	40	20	100	80	30	50	60	50
T <sub>1</sub>	0.04	0.05	0.03	0.08	0.04	0.02	0.05	0.02	0.08
T <sub>2</sub>	0.06	0.03	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.04	0.07
Θ <sub>1m</sub>	10°	20°	50°	5°	40°	60°	15°	25°	80°
T <sub>k</sub>	10 s	20 s	30 s	25 s	40 s	15 s	12 s	8 s	100 s

Na ulaz sistema deluje harmonijski signal amplitude Θ<sub>1m</sub> i periode T<sub>k</sub>. Odrediti amplitudu greške sistema.

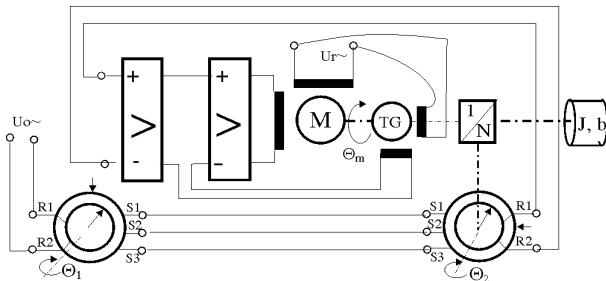
Parametri sistem su dati u tabeli 2.

4. Na sl. 5.35 data je principska električna šema selsinskog pozicionog servosistema. Parametri sistema su:

- konstanta selsina K<sub>s</sub>=1 V/rad;
- pojačanja pojačavača greške po poziciji 10 V/V;
- pojačanje pojačavača greške po brzini 5 V/V;

## Glava 5.: Ocena kvaliteta linearnih SAU

- pojačanje dvofaznog asinhronog servomotora  $0,5 \text{ rad/Vs}$ ;
- vremenska konstanta motora  $0,025 \text{ s}$ ;
- konstanta tahogeneratora  $1 \text{ V}/1000 \text{ min}^{-1}$ ;
- koeficijent viskoznog trenja motora i opterećenja se zanemaruje;
- prenosni odnos reduktora, izabran je iz uslova optimalnog prenosa po ubrzajuju, je  $N=15$ ;
- moment inercije opterećenja  $J = 0,01 \text{ kgm}^2$ ;



Sl. 5.35.

Odredite:

- a) strukturnu blok-šemu sistema ;
- b) funkcije prenosa elemenata sistema;
- c) stepen astatizma sistema;
- d) konstante greške sistema;
- e) greške sistema u ustaljenom stanju kada na ulaz deluju: 1) odskočni signal, 2) nagibni signal.
- f) odskočni odziv sistema i parametre odziva ako je zahtevana statička tačnost  $1\%$ ;
- g) grešku sistema kada na ulaz motora deluje poremećaj veličine  $0,5$ ;
- h) amplitudno-frekvencijsku karakteristiku sistema i njene karakteristične parametre: propusni opseg, pokazatelj oscilatornosti, selektivnost;

5. Pokazati ga GMK sistema čiji je povratni prenos  $W_p(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)}$  seče pozitivni deo imaginarne ose u  $s$ -ravni u tački  $\sqrt{ab}$ . Kolika je vrednost pojačanja sistema pri tome.

6. Povratni prenos sistema je  $W_p(s) = \frac{K}{s(s+P)(s^2+4s+16)}$ . Konstruisati GMK sistema za vrednosti parametra  $P=5, 4$  i  $3$  i objasniti uticaj tog parametra na ponašanje sistema.

7. Konstruisati GMK sistem čiji je povratni prenos  $W_p(s) = \frac{K(s^2+4s+5)}{(s-2)^2(s+2)^2}$ . Konstruisati gmk sistema i okarakterisati osobine sistema.

<b>Glava 6. SINTEZA LINEARNIH SAU</b>	179
<b>6.1 Uvod</b>	179
<b>6.2 Izbor strukture i zakona upravljanja SAU</b>	180
<b>6.2.1 Osnovna struktura SAU</b>	180
<b>6.2.2 Struktura s referentnim modelom</b>	180
<b>6.2.3 Struktura s prenosnom (Feed-Forward) kompenzacijom</b>	181
<b>6.2.4 Kombinovani sistem</b>	182
<b>6.2.5 Kombinovani sistem s prenosnom kompenzacijom</b>	182
<b>6.2.6 Problemi realizacije idealnih sistema</b>	182
<b>6.2.7 Zakoni upravljanja SAU</b>	185
<b>6.3 Sinteza kompenzatora proste regulacione konture</b>	187
<b>6.3.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode</b>	188
<b>6.3.2 Sinteza kompenzatora primenom metode GMK</b>	191
<b>6.3.2.1 Projektovanje diferencijalnog kompenzatora</b>	193
6.3.2.1.1 Standardni postupak	193
6.3.2.1.2 Metoda skraćivanja	197
6.3.2.2 Projektovanje integralnog kompenzatora	198
6.3.2.3 Sinteza integro-diferencijalnog kompenzatora	201
6.3.2.4 Primena MATLAB-a za projektovanje kompenzatora	201
6.3.2.4.1 Primena MATLAB-a za projektovanje diferencijalnih kompenzatora	201
6.3.2.4.1 Primena MATLAB-a za projektovanje integralnih kompenzatora	204
<b>6.4 Metoda kaskadne kompenzacije</b>	208
<b>6.4.1 Metoda tehničkog optimuma</b>	208
<b>6.4.2 Metoda kaskadne kompenzacije</b>	211
<b>6.4.3 Metoda simetričnog optimuma</b>	213
<b>6.4.4 Smitov prediktor</b>	214
<b>Literatura</b>	216
<b>Pitanja za samopроверу</b>	217
<b>Zadaci za vežbu</b>	220

## **Glava 6.**

### **SINTEZA LINEARNIH SAU**

#### **6.1 Uvod**

U ovoj glavi biće razmotren problem sinteze (projektovanja) linearnih SAU. To je krajnji cilj inženjera automatike - konstruktora novih uređaja i sistema. Procesu sinteze prethodi zadavanje tehničkih uslova (TU) koje inženjer automatike dobija od naručioca posla. Međutim, naručilac često nije dovoljno upoznat sa svim detaljima za definiciju performansi SAU. Zbog toga, on daje samo neke najbitnije zahteve potrebne za normalan rad njegove mašine ili procesa, kojim treba automatski upravljati. Inženjer automatike, na bazi takvih zahteva, definiše detaljne TU i usaglašava ih s naručiocem. Osnovu za definiciju TU čine preporuke iz pete glave: *Ocena kvaliteta linearnih SAU*. Kada se definišu TU, pristupa se izboru strukture SAU kojom će oni biti ostvareni. Nakon izbora strukture, pristupa se izboru komponenata sistema na osnovu kataloga. Ako se na tržištu ne mogu naći neke komponente, pristupa se projektovanju i izradi istih. Posle toga, formiraju se matematički modeli izabranih komponenata. Na osnovu njih i izabrane strukture sistema, formira se matematički model ukupnog SAU. Dobijeni model služi za analizu ispunjenja zadatih TU, u prvom redu stabilnosti sistema. Sistem, komponovan od standardnih elemenata, najčešće ne ispunjava postavljene TU u pogledu: stabilnosti, brzine reagovanja, tačnosti u ustaljenom stanju. Zbog toga se u sistem unosi kompenzator ili se vrši izbor parametara regulatora za korekciju (kompenzaciju) dinamičkih/statičkih karakteristika sistema. Nakon projektovanja kompenzatora, proveravaju se osobine sistema u pogledu stabilnosti i ispunjenja TU: analitičkim putem, simulacijom na računaru, izradom laboratorijske makete i industrijskog prototipa, probne partije (ako se radi o pripremi serijske proizvodnje), kada se vrši fino podešavanje sistema i konačan izbor parametara podešenja. Savremeni SAU koriste

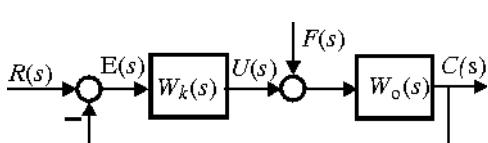
računarske uređaje za formiranje upravljačkih signala i nadgledanje celokupnog procesa regulacije. Pri tome, ako je upravljeni proces relativno spor u odnosu na brzinu rada mikrokontrolera, sinteza upravljačkog algoritma može se vršiti na osnovu tehnike projektovanja vremenski kontinualnih SAU, što će biti osnovni sadržaj narednih odeljaka ovog poglavlja. U suprotnim slučajevima moraju se koristiti metode projektovanja digitalnih sistema upravljanja što je posebna disciplina SAU. Primena digitalnih kompenzatora (regulatora) omogućava fleksibilnost u podešavanju sistema, promenu algoritama upravljanja softverski, bez korišćenja dodatnih fizičkih elemenata.

## 6.2 Izbor strukture i zakona upravljanja SAU

Izbor strukture i zakona upravljanja predstavlja prvi, veoma važan, korak u sintezi SAU. Izbor strukture pretpostavlja da inženjer poznaje najčešće primenjivane strukture, njihove osobine, probleme koje one mogu uspešno da rešavaju. Zbog toga ćemo, ukratko, izučiti najčešće korišćene strukture i njihove osobine, kao i najčešće primenjivane linearne zakone upravljanja.

### 6.2.1 Osnovna struktura SAU

Mnogi praktični problemi mogu se rešavati primenom osnovne (obične) strukture SAU koja se, sa stanovišta projektanta, posle izbora svih neophodnih komponenata u funkcionalnom smislu, svodi na sistem s povratnom spregom s dva bloka: *objekta u širem smislu ili postrojenja*, funkcije prenosa  $W_o(s)$  i *upravljačkog sistema ili regulatora (kompenzatora)*, s prenosom  $W_k(s)$ , sl. 6.1. Pri tome, dejstvo poremećaja  $F(s)$  je svedeno na ulaz objekta. Osnovni zadatak sistema je da upravljana promenljiva  $C(s)$  bude identična referentnom signalu  $R(s)$ , tj. da signal greške  $E(s)$  bude jednak nuli.



Sl. 6.1. Osnovna struktura SAU.

Polazeći od izraza za signal greške,

$$E(s) = \frac{R(s) - W_o(s)F(s)}{1 + W_k(s)W_o(s)}, \quad (6.1)$$

dolazi se do poznatog zaključka da će osnovni zadatak SAU biti ispunjen ako je

$$|W_k(s)| = \infty. \quad (6.2)$$

Takov sistem nije moguće ostvariti u celom frekvencijskom opsegu, pa se (6.2) smatra uslovom podešenja idealnog SAU. U praksi se teži delimičnom ostvarenju tog uslova u frekvencijskom opsegu, u kome deluje referentni ulazni signal i poremećaj.

### 6.2.2 Struktura s referentnim modelom

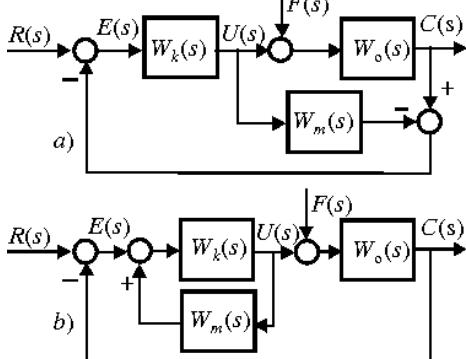
Postoje strukture koje obezbeđuju izbor beskonačnog koeficijenta pojačanja regulatora (tzv. *strukture visoke tačnosti*). Beskonačno veliko pojačanje kompenzatora može se postići ako se on obuhvati lokalnom pozitivnom povratnom spregom  $W_{pp}(s)$ , uz uslov da funkcija povratnog prenosa lokalne petlje pozitivna je u celom frekvencijskom opsegu.

tivne povratne sprege bude jedinična. To se može postići i sistemom s referentnim modelom, sl. 6.2a, koji se, transformacijom strukturne blok-šeme, svodi na ekvivalentni sistem s lokalnom pozitivnom povratnom spregom, sl. 6.2b. Sistemi s referentnim modelom su interesantna klasa SAU, koja se često koristi u praksi.

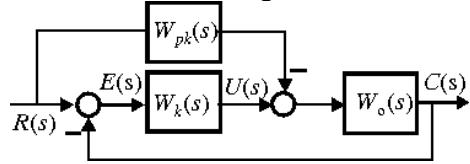
Beskonačni koeficijent pojačanja kompenzatora često se ostvaruje korišćenjem integralnog delovanja u regulatoru ili u samom objektu. Takav prilaz je, na primer, kada se koriste PI ili PID regulatori. Pri tome, beskonačno veliko pojačanje se ostvaruje u ustaljenom stanju i to samo za određene tipove ulaznih referentnih signala i poremećaja. Iz (6.1) može se zaključiti da se uslov kompenzacije, uvođenjem integralnog delovanja, može ostvariti samo ako je to delovanje u direktnoj grani, ispred mesta delovanja poremećaja.

Osim navedenih prilaza, sistem visoke klase tačnosti može se postići uvođenjem lokalnih stabilizacionih povratnih sprega koje obuhvataju potreban broj elemenata [5].

Beskonačno veliko pojačanje može se postići u nelinearnim sistemima upravljanja, što će biti predmet izučavanja u kursu TAU-2. Međutim, uvek treba imati na umu da se ne može ostvariti potpuna kompenzacija, jer se ne mogu uračunati sve moguće neidelanosti sistema, svi mogući realni poremećaji, niti mogući oblici referentnih ulaznih signala.



Sl. 6.2. Strukture sistema: a) s referentnim modelom, b) s lokalnom pozitivnom povratnom spregom.



Sl. 6.3. Struktura s prenosnom kompenzacijom.

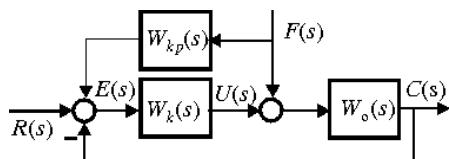
### 6.2.3 Struktura s prenosnom (feed-forward) kompenzacijom

Ako pojačanje kompenzatora nije beskonačno veliko, u osnovnoj strukturi sistema javiće se greška, koja je proporcionalna veličini referentnog ulaznog signala. Za svađenje greške na nulu, osim uvođenja beskonačnog pojačanja kompenzatora, moguć je i drugi prilaz - uvođenje *prenosne kompenzacije*, koja se definiše strukturalno prikazanom na sl. 6.3. U cilju pojednostavljenja izlaganja, pretpostavimo da poremećaj  $F(s)$  ne deluje. Tada se izraz za signal greške dobija u obliku

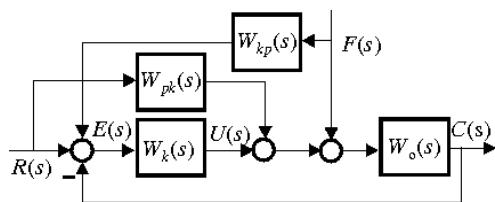
$$E(s) = \frac{1}{1 + W_k(s)W_o(s)} [1 - W_{pk}(s)W_o(s)] R(s). \quad (6.3)$$

Iz (6.3) očigledno je da će greška sistema biti identično jednaka nuli, ako se funkcija prenosa prenosnog kompenzatora izabere kao recipročna funkcija prenosa objekta. Međutim, ovde se može javiti problem fizičke ostvarljivosti.

#### 6.2.4 Kombinovani sistem



Sl. 6.4. Kombinovani sistem.



Sl. 6.5. Kombinovani sistem s prenosom kompenzacijom.

Ako je moguće neposredno ili posredno merenje poremećaja  $F(s)$  tada se, uvođenjem odgovarajućeg kompenzatora poremećaja, kao na sl. 6.4, može u potpunosti eliminisati uticaj tog poremećaja na signal greške sistema.

Zaista, greška usled poremećaja je

$$E_f(s) = \frac{W_{kp}(s) - W_o(s)}{1 + W_k(s)W_o(s)} F(s) \quad (6.4)$$

pa se uslov anuliranja greške svodi na zahtev da se funkcija prenosa kompenzatora poremećaja izabere kao funkcija prenosa objekta.

#### 6.2.5 Kombinovani sistem s prenosom kompenzacijom

Kombinacijom prethodne dve strukture, dobija se *kombinovani sistem s prenosom kompenzacijom*, sl. 6.5, kojim se mogu istovremeno kompenzovati kako poremećaj po zadatoj vrednosti, tako i poremećaj po opterećenju.

Uslovi potpune kompenzacije se svode na objedinjavanje prethodnih uslova parcijalne kompenzacije. Navedeni uslovi suočenja greške sistema na nulu nije moguće u praksi u potpunosti ostvariti. Zbog toga možemo govoriti samo o idealnim uslovima kompenzacije i o idealnim sistemima. Potrebno je ukazati na ograničenja koja onemogućavaju realizaciju takvih sistema.

#### 6.2.6 Problemi realizacije idealnih sistema

Izučavajući probleme stabilnosti, mogli smo uočiti da se oni pogoršavaju s povećanjem opšteg koeficijenta pojačanja funkcije povratnog prenosa kod većine sistema. Stoga se, za sintezu SAU s velikim koeficijentom pojačanja, mora voditi računa o izboru odgovarajućih struktura, stabilnih pri beskonačno velikom koeficijentu pojačanja [5].

Druge dva prilaza: prenosna kompenzacija i kombinovani sistem deluju, na prvi pogled, realističnije. Međutim, problem se svodi na problem mogućnosti fizičke realizacije kompenzatora. Zapravo, ako bi mogli da realizujemo bilo koju funkciju prenosa i da merimo bilo koji poremećaj, tada ne bi postojala potreba da koristimo povratnu spregu. Ceo problem regulacije sveo bi se na primenu osnovnog kompenzatora, čija bi funkcija prenosa bila recipročna vrednost funkcije prenosa objekta. Međutim, u praksi, gotovo svi fizički objekti se ponašaju kao niskopropusni filtri, odnosno imaju **relativni red** (razlika stepena imenioca i stepena brojioca u funkciji prenosa) veći od nule. Zbog toga nije moguće fizički realizovati kompenzatore (osnovni, prenosni), koji bi bili s negativnim relativnim redom, tj. da im brojilac ima veći stepen od imenioca. Oni bi imali osobinu prediktora, odnosno uređaja koji mogu da predviđaju šta će biti dovedeno na njihov ulaz.

Uslov potpune kompenzacije, čak i kada bi bio ostvariv, u nekim slučajevima može dovesti do gubitka robustnosti sistema. Naime, navedeni uslovi kompenzacije dovode do skraćivanja polova i nula objekta i kompenzatora. To, kao što će biti pokazano u kursu TAU-2, dovodi do gubitka potpune kontrolabilnosti i/ili opservabilnosti sistema. U klasičnoj teoriji SAU o tom problemu se nije vodilo računa, a metoda skraćivanja neželjenih kritičnih frekvencija objekta upravljanja je jedna od standardnih i često korišćenih metoda sinteze sistema, posebno u praksi regulacije elektromotornih pogona. U cilju bližeg pojašnjenja ovog problema ukazaćemo na Cipkinovu [3] definiciju robustnosti (ruski: *губоносность, робастность*) koja kaže *da je sistem robustan ako su pri malim varijacijama parametara elemenata sistema male i varijacije njegovog spregnutog prenosa*. Nađimo varijaciju funkcije spregnutog prenosa sistema u funkciji varijacije funkcije prenosa osnovnog kompenzatora sistema sa sl. 6.1, bez delovanja poremećaja. Spregnuti prenos je

$$W_s(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{W_k(s)W_o(s)}{1 + W_k(s)W_o(s)}, \quad (6.5)$$

pa je varijacija

$$\delta W_s(s) = \frac{\partial W_s(s)}{\partial W_k(s)} \delta W_k(s). \quad (6.6)$$

Izvod spregnutog prenosa po prenosu osnovnog kompenzatora je iz (6.5)

$$\frac{\partial W_s(s)}{\partial W_k(s)} = \frac{W_o(s)}{[1 + W_k(s)W_o(s)]^2},$$

pa je

$$\delta W_s(s) = \frac{W_o(s)}{[1 + W_k(s)W_o(s)]^2} \delta W_k(s). \quad (6.7)$$

Neka je funkcija prenosa kompenzatora određena iz (6.5), uz uslov postizanja zadate funkcije spregnutog prenosa, tj. iz uslova

$$W_{sz}(s) = \frac{W_k(s)W_o(s)}{1 + W_k(s)W_o(s)} \Rightarrow W_k(s) = \frac{W_{sz}(s)}{W_o[1 - W_{sz}(s)]}. \quad (6.8)$$

Tada (6.7) postaje

$$\delta W_s(s) = [1 - W_{sz}(s)]^2 W_o(s) \delta W_k(s). \quad (6.9)$$

S druge strane, funkcija prenosa objekta je oblika

$$W_o(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (6.10)$$

što zamenom u (6.8) daje

$$W_k(s) = \frac{Q(s)W_{sz}(s)}{P(s)[1 - W_{sz}(s)]}. \quad (6.11)$$

Iz (6.11) imamo

$$\begin{aligned}\delta W_k(s) &= \frac{\partial W_k(s)}{\partial Q(s)} \delta Q(s) + \frac{\partial W_k(s)}{\partial P(s)} \delta P(s) = \\ &= \frac{W_{sz}(s)}{P(s)[1 - W_{sz}(s)]} \delta Q(s) - \frac{Q(s)}{P^2(s)} \frac{W_{sz}(s)}{[1 - W_{sz}(s)]} \delta P(s).\end{aligned}\quad (6.12)$$

Zamenom u (6.9), posle sređivanja, dobija se

$$\delta W_s(s) = W_{sz}(s)[1 - W_{sz}(s)] \left\{ \frac{\delta Q(s)}{Q(s)} - \frac{\delta P(s)}{P(s)} \right\}. \quad (6.13)$$

Varijacija  $\delta W_s(s)$  karakteriše uticaj netačnosti u realizaciji funkcije prenosa kompenzatora  $W_k(s)$  pa, prema tome, i  $W_{sz}(s)$ . Ako su svi polovi i nule objekta  $W_o(s)$  levi, tada će i svi polovi varijacije (6.13) biti levi i ona će biti stabilna, a samim tim biće stabilna i zadata funkcija spregnutog prenosa pri malim odstupanjima parametara kompenzatora od zadatih ili optimalnih. Ako objekat ima desne polove i/ili nule, varijacija (6.13) biće nestabilna, a samim tim biće nestabilna i funkcija spregnutog prenosa sistema. To govori o nerobustnosti spregnutog sistema, jer ma koliko bila mala varijacija parametara ona će dovesti do nestabilnosti. Iz ovoga se izvlači zaključak da se ne sme dozvoliti skraćivanje desnih polova i nula nulama i polovima kompenzatora, jer, ma koja mala netačnost u realizaciji istih, dovodi do nestabilnosti sistema. Dakle,

*uslovi robustnosti zahtevaju da funkcija prenosa kompenzatora nesme sadržati nule i polove bliske desnim polovima i nulama funkcije prenosa objekta, tj. nije dozvoljeno skraćivanje desnih polova i nula objekta kompenzatorom.*

Iz izraza (6.13) može se zaključiti da će sistem biti robustan ako u njemu nema desnih polova. To se može postići samo ako zadata funkcija prenosa  $W_{sz}(s)$  ima desne nule polinoma  $P(s)$ , a funkcija  $1 - W_{sz}(s)$  ima desne nule polinoma  $Q(s)$ . Pri tome, naravno, funkcija prenosa  $W_{sz}(s)$  nesme imati desne polove.

Ukažimo još na jedan problem u fizičkoj realizaciji kompenzatora. Neka funkcija prenosa objekta, kao nepromenljivog dela sistema, poseduje transportno kašnjenje, tj. neka je

$$W_o(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-s\tau}. \quad (6.14)$$

Funkcija prenosa kompenzatora, za zadatu funkciju spregnutog prenosa bez transportnog kašnjenja, imaće oblik

$$W_k(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} e^{s\tau} \frac{W_{sz}(s)}{[1 - W_{sz}(s)]}. \quad (6.15)$$

Takva funkcija prenosa kompenzatora ne može se realizovati, jer bi posedovala predikciju. Zbog toga se zadata funkcija spregnutog prenosa mora zadavati u obliku

$$W_{sz}(s) = W_s(s) e^{-s\tau}. \quad (6.16)$$

Drugim rečima, transportno kašnjenje objekta ne može se eliminisati, ono će biti prisutno i u funkciji spregnutog prenosa sistema. Negativan uticaj transportnog kašnjenja na stabilnost sistema može se kompenzovati korišćenjem Smitovog prediktora [6], o kome će biti reči kasnije.

### 6.2.7 Zakoni upravljanja SAU

Pored izbora adekvatne strukture SAU, za rešavanje zadataka upravljanja, veoma je važan i izbor zakona upravljanja.

*Pod zakonom upravljanja se podrazumeva funkcionalna zavisnost između signala greške (regulacionog odstupanja)  $e(t)$  i signala upravljanja  $u(t)$  koji deluje na objekat u širem smislu (postrojenje)*

$$u(t) = f(e(t)).$$

Na sl. 6.1 predstavljena je osnovna struktura SAU iz koje se uočava da zakon upravljanja realizuje blok označen sa  $W_k(s)$ .

Zakoni upravljanja mogu biti *linearni* i *nelinearni*. U ovom kursu biće reči samo o linearним zakonima upravljanja.

Razvojem teorije i prakse SAU, došlo se do saznanja da se većina praktičnih problema može rešiti primenom tri osnovna zakona upravljanja ili njihovim kombinacijama. Ta tri osnovna zakona upravljanja su:

-*proporcionalni* (P):  $u(t) = K_{pr}e(t)$  ili  $U(s) = K_{pr}E(s)$ , gde je  $K_{pr}$  - pojačanje regulatora;

-*integralni* (I):  $u(t) = K_i \int_0^t e(t)dt = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt$  ili  $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} = \frac{1}{sT_i}$ , gde su  $K_i$ ,

$T_i$  - pojačanje i integralna vremenska konstanta regulatora, respektivno;

-*diferencijalni* (D):  $u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$  ili  $\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s$ , gde je  $K_d$  - pojačanje diferencijalnog regulatora.

Proporcionalni zakon upravljanja omogućava da se izborom pojačanja  $K_{pr}$  obezbedi potrebna dinamika prelaznog procesa i tačnost u ustaljenom stanju. Takvo upravljanje se primenjuje prvenstveno u sistemima čiji objekat poseduje astatizam ili kod sistema koji ne zahtevaju veliku statičku tačnost.

Integralni zakon upravljanja se primenjuje kada se želi postići velika statička tačnost, a objekat upravljanja ne poseduje astatizam. Pojačanjem  $K_i$  se podešava prelazni proces u sistemu. Treba istaći da uvođenje integralnog zakona upravljanja usporava sistem i može biti uzrok pojave velikih i dugotrajnih preskoka u odzivu.

Diferencijalni zakon upravljanja se nikad ne primenjuje samostalno, jer ne ma dejstvo u ustaljenom stanju. Zbog toga se on uvek koristi u kombinaciji s prethodna dva zakona upravljanja.

Kombinovani linearni zakoni upravljanja su:

-*proporcionalno-diferencijalni* (PD):

$$u(t) = K_{pr}e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \text{ ili } \frac{U(s)}{E(s)} = K_{pr} + sK_d;$$

-proporcionalno-integralni (PI):

$$u(t) = K_{pr}e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt = K_r(1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt) \text{ ili } \frac{U(s)}{E(s)} = K_r(1 + \frac{1}{sT_i});$$

-proporcionalno-integralno-diferencijalni (PID):

$$u(t) = K_r(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}) \text{ ili } \frac{U(s)}{E(s)} = K_r(1 + \frac{1}{sT_i} + K_d s).$$

Kombinovani linearni zakoni upravljanja omogućavaju optimalizaciju prelaznog procesa u sistemu. Tako PD zakon upravljanja može obezbediti brz proces regulacije bez preskoka, a primenjuje se obično u sistemima čiji objekat upravljanja poseduje astatizam (na primer u pozicioniranju robota). Ukoliko objekat ne poseduje astatizam, a želi se nulta greška u stacionarnom stanju, uz prihvatljivo brz prelazni proces, tada se primenjuje PID regulator.

Pored navedenih zakona upravljanja, koji su karakteristični za tzv. *industrijske linearne regulatore*, u praksi sinteze servosistema se koriste zakoni upravljanja *diferencijalnog*, *integralnog* i *integrodiferencijalnog* (*diferencijalno-integralnog*) tipa. Pri tome, oni se razlikuju od prethodnih po tome što njihovo delovanje nema odlike "čistih" diferencijala ili integrala signala greške, ili, bolje rečeno, to delovanje je vezano samo za određene opsege frekvencija. Takvi zakoni upravljanja obično se realizuju pasivnim četvoropolima, koji su dobili naziv *kompenzatori*.

*Kompenzator diferencijalnog tipa* opisuje se diferencijalnom jednačinom

$$\frac{du(t)}{dt} + b_d u(t) = \frac{de(t)}{dt} + a_d e(t); a_d, b_d > 0, a_d < b_d$$

ili funkcijom prenosa:  $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s + a_d}{s + b_d}$ .

*Kompenzator integralnog tipa* se opisuje diferencijalnom jednačinom

$$b_i \frac{du(t)}{dt} + a_i b_i u(t) = a_i \frac{de(t)}{dt} + a_i b_i e(t); a_i, b_i > 0, a_i < b_i$$

ili funkcijom prenosa:  $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a_i}{b_i} \frac{s + b_i}{s + a_i}$ .

Konačno, kompenzator integro-diferencijalnog (diferencijalno-integralnog) tipa opisuje diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (a_i + b_d) \frac{du(t)}{dt} + a_i b_d u(t) = \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + (a_d + b_i) \frac{de(t)}{dt} + a_d b_i e(t)$$

ili funkcijom prenosa  $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{(s + a_d)(s + b_i)}{(s + b_d)(s + a_i)}$ .

### 6.3 Sinteza kompenzatora proste regulacione konture

Nakon utvrđivanja TU, izbora strukture sistema, određivanja matematičkog modela objekta u širem smislu (sa aktuatorima i merno-pretvaračkim elementima) pristupa se sintezi elemenata sistema koji predstavljaju sastavni deo upravljačkog sistema (upravljački element po signalu greške (kompenzator ili regulator), upravljački element po zadatoj vrednosti (prenosni kompenzator) i upravljački element po opterećenju (kompenzator opterećenja)). U ovom odeljku razmatra se sinteza upravljačkog sistema proste (osnovne) regulacione konture po signalu greške. Radi kraćeg pisanja, ovaj tip upravljačkog sistema nazivaćemo, dalje, *redni kompenzator*.

U literaturi postoji izvesna konfuzija u terminologiji. Neki autori [2] takve kompenzatore nazivaju rednim ili kaskadnim, dok drugi [7] pod pojmom kaskadne kompenzacije podrazumevaju višekonturni hijerarhijski sistem regulacije, koji se, u suštini, može svesti na problem redne kompenzacije. Pored rednih kompenzatora, primenjuju se i *paralelni kompenzatori*, koji se nalaze u lokalnim povratnim spregama, čineći na taj način sistem višekonturnim. O takvom načinu kompenzacije biće reči kasnije, jer oni ne spadaju u domen proste regulacione konture.

Vrste kompenzatora po konstrukciji i po dinamičkim osobinama su brojne. Međutim, kao što je u prethodnom tekstu izloženo, u praksi se većina problema može rešiti primenom rednih kompenzatora *diferencijalnog*, *integralnog* i *integro-diferencijalnog tipa*. Problem sinteze se, tada, pojednostavljuje i svodi na izbor tipa i parametara kompenzatora primenom odgovarajućih algoritamskih postupaka. Ovaj način sinteze je karakterističan za projektovanje servosistema.

Drugi pravac sinteze SAU je vezan za primenu linearnih zakona upravljanja i standardnih industrijskih regulatora: P, I, PI, PD i PID tipa.

U ovom odeljku biće razmotren problem sinteze kompenzatora. U tu svrhu mogu se koristiti različite metode: Nikvistova, Bodeova, Mitrovićeva, GMK. U praksi projektovanja kompenzatora najveću primenu su našle Bodeova i metoda GMK, dok se za izbor tipa i parametara regulatora koristi Nikvistova ili Bodeova metoda.

TU za regulacione sisteme mogu se zadavati kako u frekvencijskom, tako i u vremenskom domenu. Kada se za sintezu kompenzatora primenjuje Bodeova metoda, tada TU moraju biti zadati u frekvencijskom domenu. Međutim, kada se koristi metoda GMK, tada se TU zadaju u vremenskom domenu. Kao što je poznato, u opštem slučaju ne postoji eksplicitna analitička zavisnost između frekvencijskog i vremenskog domena. Za prevođenje TU, iz jednog u drugi domen, koriste se približne relacije ili nomogrami. Nomogrami pružaju mogućnost približnog određivanja parametara sistema, polazeći od činjenice da se sistemi višeg reda ponašaju približno kao sistemi drugog (ili trećeg) reda, sa konačnom nulom ili bez mje. Najveći uticaj na ponašanje sistema višeg reda imaju tzv. *dominantni polovi* (*levi konjugovano-kompleksni polovi najbliži imaginarnoj osi*). Položaj dominantnih polova je određen vektorom čiji je

moduo jednak prirodoj neprigušenoj frekvenciji  $\omega_n$ , a fazni ugao  $\psi$  je određen koeficijentom relativnog prigušenja  $\zeta(\psi = \arccos(-\zeta))$ .

Treba napomenuti da se, primenom nekih metoda sinteze, ne dobijaju uvek jednoznačni rezultati, odnosno oni zavise od iskustva projektanta. Osim toga, zadati TU određuju samo donju ili gornju granicu vrednosti performansi sistema, dok projektant uvek teži ostvarivanju boljih rezultata od zahtevanih, ako to nije na uštrb ekonomičnosti rešenja. S druge strane, neke metode su grafoanalitičke ili empirijske. Dobijeni rezultati imaju određeni stepen tačnosti, dovoljan za inženjersku praksu. Primenom podesivih elemenata, uvek se može izvršiti podešavanje realizovanog sistema u cilju dobijanja optimalnih karakteristika.

### 6.3.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode

U ovoj metodi koriste se logaritamski dijagrami slabljenja (LDS) i faze. TU su izraženi u frekvencijskom domenu.

Etape projektovanja kaskadnih kompenzatora su sledeće:

1. Na osnovu poznatih funkcija prenosa izabranih elemenata sistema, bez kompenzatora, i zadatih TU konstruišu se asymptotski LDS funkcija povratnog prenosa polaznog (nekompenzovanog)  $L_n(\omega)$  i zahtevanog (kompenzovanog) sistema i  $L_z(\omega)$ .

Konstrukcija  $L_z(\omega)$  zavisi od datih TU i može se, u principu, jednostavno ostvariti, ako se ne vodi računa o obliku karakteristike  $L_n(\omega)$ . Međutim, tada se, po pravilu, dobija složeniji kompenzator. Zbog toga se preporučuje da se pri konstruisanju  $L_z(\omega)$  uzima u obzir oblik  $L_n(\omega)$ . Zato se, LDS uslovno deli na *niskofrekvenički, srednjefrekvenički i visokofrekvenički deo*.

*Niskofrekvenički deo*  $L_z(\omega)$  mora da obezbedi traženu statičku tačnost, što znači da je nagib ovog dela i njegov presek s  $\omega$ -osom određen vrstom i veličinom zadate konstante greške.

*Srednjefrekvenički deo* je veoma važan, jer određuje stabilnost i dinamičko ponašanje sistema. Praktično je utvrđeno da nagib željene karakteristike sistema, u okolini presečne frekvencije pojačanja, mora biti -20 dB/dek. Presečna frekvencija pojačanja, ako nije definisana tehničkim uslovima, preko propusnog opsega sistema, može se izračunati po formuli [8]

$$\omega_{pk} \geq \frac{b\pi}{t_s}, \quad (6.17)$$

gde je:  $t_s$  - zadato vreme smirenja sistema u odskočnom odzivu, dato u sekundama, a  $b$  - koeficijent čija vrednost zavisi od zadate veličine preskoka u odskočnom odzivu sistema, a koje se bira na osnovu sledeće tabele.

$\Pi\%$	15	20	25	30
$b$	1,7	2,2	3,0	4,0

Donja i gornja prelomna frekvencija srednjefrekveničkog dela  $L_z(\omega)$  određuje se na osnovu približnih relacija

$$\omega_g \approx (2 \div 4)\omega_{pk}, \quad \omega_d \approx \frac{\omega_{pk}}{\omega_g}. \quad (6.18)$$

Srednjefrekvencijski s niskofrekvencijskim delom se spaja asimptotama pod nagibom od -40 ili - 60 dB/dek.

*Visokofrekvencijski deo*  $L_z(\omega)$  usvaja se tako da ima isti oblik kao visokofrekvencijski deo  $L_n(\omega)$ , radi dobijanja što jednostavnijeg kompenzatora.

2. Oduzimanjem ordinata  $L_n(\omega)$  od  $L_z(\omega)$  pri istim frekvencijama, dobija se logaritamski dijagram slabljenja potrebnog kompenzatora  $L_k(\omega)$ .

Ova operacija proizilazi iz funkcije povratnog prenosa sistema s rednim kompenzatorom

$$W_{pz}(s) = W_{pn}(s)W_k(s) \Rightarrow L_z(\omega) = L_n(\omega) + L_k(\omega). \quad (6.19)$$

3. Na osnovu dobijenog  $L_k(\omega)$  određuje se njegova funkcija prenosa, a na osnovu nje - odgovarajući tip kompenzatora i vrši njegova sinteza.

### Primer 6.1.

Nekompenzovani sistem ima funkciju prenosa  $W_{pn}(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$ . Odrediti tip i parametre kompenzatora tako da kompenzovani sistem ima pretek faze između  $40^\circ$  i  $50^\circ$  i konstantu brzine  $K=20 \text{ s}^{-1}$ .

Iz funkcije prenosa se vidi da sistem ne zadovoljava drugi TU, jer je  $K_v=2$ .

LDS nekompenzovanog sistema,  $L_n(\omega)$ , određen sa

$$L_n(\omega) = 20 \log 2 - 20 \log \omega - 20 \log |1 + 0,5j\omega| - 20 \log |1 + 0,166j\omega|,$$

predstavljen je na sl. 6.6. Na osnovu njega određujemo presečnu frekvenciju pojačanja  $\omega_{pn}$ , koja iznosi  $2 \text{ s}^{-1}$ . Fazno-frekvencijska karakteristika je data izrazom

$$\phi_n(\omega) = -90^\circ - \operatorname{arctg}(0,5\omega) - \operatorname{arctg}(0,166\omega),$$

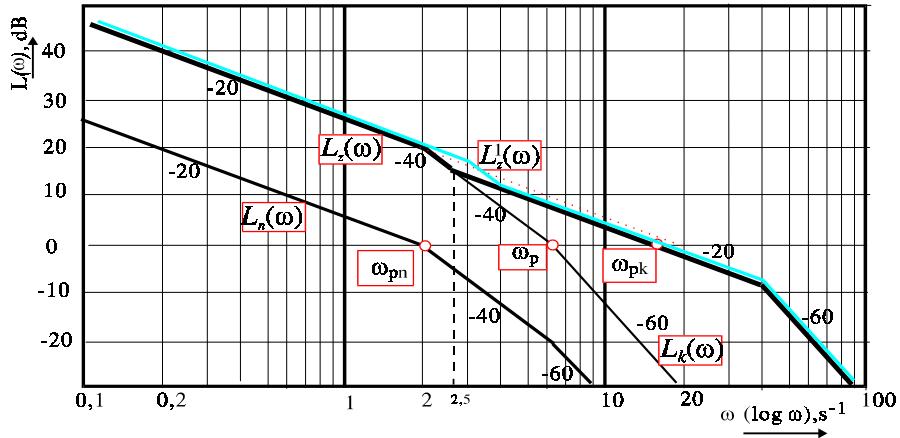
pa je pretek faze

$$\phi_{pf}^n = 180 + \phi_n(\omega_p^n) = 26,565^\circ,$$

što je manje od zahtevanog preteka faze.

Za ispunjenje drugog tehničkog zahteva,  $K_{VZ}=20 \text{ s}^{-1}$ , mora se uneti u sistem dodatno pojačanje  $k=10$ . Ovo rezultuje u paralelnom pomeranju LDS naviše za 20 dB. Presečna frekvencija pojačanja sada postaje  $\omega_p = 6,2 \text{ s}^{-1}$ . Tada je pretek faze negativan i iznosi  $\phi_{pf} = -28^\circ$ , pa je sistem nestabilan. To znači da se samo promenom pojačanja ne može obezbediti ispunjenje TU pa se mora primeniti kompenzator.

Potreban LDS kompenzovanog sistema dobija se na sledeći način: niskofrekvenčni deo je poznat, jer je polazni sistem potrebne klase, odnosno ima potreban astatičam, samo treba uvesti dodatno pojačanje od  $k=10$ ; visokofrekvencijski deo karakteristike će, takođe, zadržati isti oblik kao kod nekompenzovanog sistema; potrebno je samo odrediti srednjefrekvencijski deo.



Sl. 6.6. Konstrukcija LDS za primer 6.1.

$L_n(\omega)$  - LDS nekompenzovanog sistema,  $L_k(\omega)$  - LDS sistema kome je povećano pojačanje deset puta,  $L_z^1(\omega)$  - LDS kompenzovanog sistema (prva varijanta),  $L_z(\omega)$  - LDS kompenzovanog sistema (konačna varijanta),

Za konstrukciju srednjefrekvencijskog dela potrebno je, na osnovu (6.18), odrediti gornju i donju prelomnu frekvenciju. Na osnovu zadatog  $\phi_{pf}$  iz dijagrama na sl. 5.2 nalazimo  $\zeta = 0,37 - 0,48$ , a na osnovu  $\zeta$  iz dijagrama sa sl. 3.10 nalazimo  $\Pi\% = 20-30\%$ . Usvojimo vreme smirenja  $t_s = 0,64$  s. Tada je, prema (6.17),  $\omega_{pk} = 14,72$ ; usvajamo  $\omega_{pk} = 14,8 \text{ s}^{-1}$  pa su:

$$\omega_g = (2 \div 4) 14,8 = 29,6 \div 59,2 \text{ s}^{-1}, \omega_d = 219 / (29,6 \div 59,2) = 7,4 \div 3,67 \text{ s}^{-1}$$

Usvaja se  $\omega_d = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_g = 40 \text{ s}^{-1}$ .

Na osnovu ovih podataka i preporuka konstruisan je  $L_z(\omega)$  pa je funkcija povratnog prenosa kompenzovanog sistema

$$W_{pk}(s) = \frac{20 \left( \frac{s}{4} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{3} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right)^2}.$$

Funkcija prenosa kompenzatora je

$$G_k(s) = \frac{W_{pk}(s)}{W_{pn}(s)} = 10 \frac{\left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{4} + 1 \right) \left( \frac{s}{6} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{3} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right)^2}.$$

Dobijeni kompenzator predstavlja rednu vezu tri diferencijalna elementa.

Imajući u vidu da se data procedura zasniva na empirijskim preporukama, projektant, u cilju dobijanja jednostavnijih kompenzatora, može, u izvesnoj meri, da odstupi od relacije za izbor gornje i donje prelomne frekvencije srednjefrekvencijskog dela  $L_z(\omega)$ . Tako, na primer, ako se kao donja prelomna frekvencija izabere  $2,5 \text{ s}^{-1}$ , a gornja ostane ista, funkcija prenosa kompenzovanog sistema postaje

$$W_{pk}(s) = \frac{20\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\frac{2,5}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{40} + 1\right)^2}},$$

a funkcija prenosa kompenzatora

$$G_k(s) = \frac{W_{pk}(s)}{W_{pn}(s)} = 10 \frac{\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{6} + 1\right)}{\left(\frac{s}{40} + 1\right)^2},$$

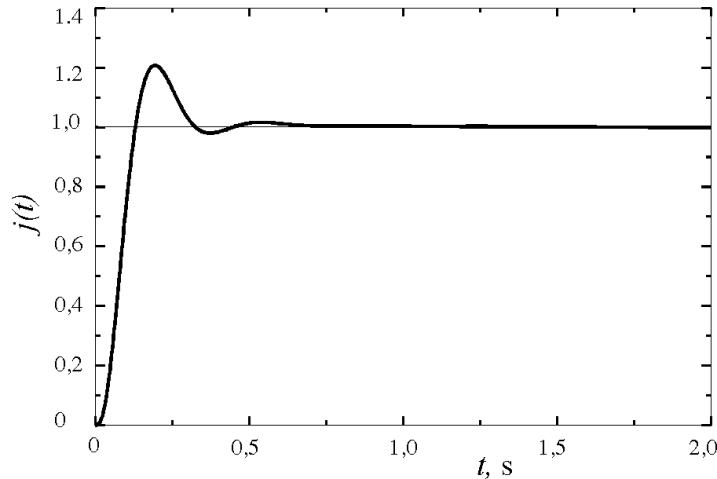
što predstavlja rednu vezu dva diferencijalna kompenzatora.

Pretek faze sistema lako se izračunava na presečnoj frekvenciji pojačanja

$$\phi_{pf} = 90 - \arctg(0,5\omega) - 2\arctg(0,025\omega) + \arctg(0,4\omega),$$

što iznosi  $47,5^0$  za  $\omega = \omega_{pk} = 14,8 s^{-1}$ .

Na sl. 6.7 prikazan je odskočni odziv kompenzovanog sistema, dobijen simulacijom na računaru. Iz odziva se vidi da sistem zadovoljava tražene uslove (preskok 20%; brzinska konstanta  $K_v=20 s^{-1}$  obezbeđuje nultu grešku u stacionarnom stanju na odskočni signal; koeficijent relativnog prigušenja je blizu 0,5, a vreme smirenja je blisko usvojenom).



Sl. 6.7. Odziv projektovanog sistema.

### 6.3.2 Sinteza kompenzatora primenom metode GMK

Za sintezu kompenzatora, na osnovu metode GMK, razvijeni su standardni postupci za izbor parametara diferencijalnog, integralnog i integro-diferencijalnog kompenzatora [2, 9]. Za primenu ove metode TU moraju biti izraženi u vremenskom domenu i neposredno su vezani za  $s$ -domen. Karakter prelaznog procesa kompenzovanog sistema određen je parom dominantnih polova, a njihov položaj u  $s$ -ravni može se okarakterisati polarnim koordinatama  $\omega_n$  i  $\psi(\zeta)$

(alternativno  $\zeta$  i  $T_d$ , gde je  $T_d$  dominantna vremenska konstanta,  $T_d \leq 1/\zeta\omega_n$ ). Ovi parametri tačno definišu karakter i brzinu odziva sistema drugoga reda i približno sistema višeg reda s izraženim dominantnim polovima. Oni definišu prelazni režim. Ustaljeno stanje sistema je okarakterisano greškom u stacionarnom stanju, odnosno odgovarajućom konstantom greške ( $K_p$ ,  $K_v$  ili  $K_a$ ). Prema tome, TU sadrže triplet  $\zeta, \omega_n, K_g$ , gde je  $K_g$  - zahtevana konstanta greške.

Proces projektovanja započinje ispitivanjem ispunjenosti TU. Najpre se proverava da li polazni, nekompenzovani sistem, zadat funkcijom povratnog prenosa  $W_p^n(s)$ , ispunjava zadate dinamičke TU:  $\zeta$  i  $\omega_n$ . Par  $(\zeta, \omega_n)$  definiše položaj dominantnog pola funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema u  $s$ -ravni. Shodno metodi GMK, tačke na granama GMK definišu polove spregnutog prenosa sistema za odgovarajuće pojačanje. Prema tome, sistem će ispuniti zadate dinamičke zahteve ako pol, definisan sa

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad (6.20)$$

pripada GMK sistema. Kao što je poznato, tačke na granama GMK ispunjavaju osnovni fazni kriterijum

$$\arg W_p(s) = (2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.21)$$

pa se kontrola ispunjenja dinamičkih zahteva svodi na proveru uslova

$$\phi^n(s_1) = \arg W_p(s_1) = -\pi? \quad (6.22)$$

Ako je ovaj uslov ispunjen, sistem će zadovoljiti TU u pogledu dinamike, s tim što se mora odrediti pojačanje GMK u tački  $s_1$  i ono podešiti u funkciji povratnog prenosa sistema. Ako uslov (6.22) nije ispunjen, potrebno je u sistem uneti diferencijalni kompenzator čija je funkcija prenosa

$$W_d(s) = \frac{s+a}{s+b}, \quad a < b. \quad (6.23)$$

Određivanje parametara diferencijalnog kompenzatora  $(a, b)$  se može ostvariti grafo-analitičkim ili analitičkim putem, što će biti razmatrano u daljem tekstu.

Kada su zadovoljeni zadati dinamički uslovi, pristupa se proveri ispunjenosti zadatih TU u pogledu staticke tačnosti. Ta provera se odvija proverom ispunjenosti relacije

$$K_g = \lim_{s \rightarrow 0} s^r W_p^n(s) \geq K_{gz} \quad (6.24)$$

gde eksponent  $r$  označava stepen astatizma sistema, a  $K_{gz}$  je tražena vrednost odgovarajuće konstante greške (položaja ( $r=0$ ), brzine ( $r=1$ ) ili ubrzanja ( $r=2$ )). Ako relacija (6.24) nije ispunjena, u sistem se mora uneti integralni kompenzator definisan funkcijom prenosa

$$W_i(s) = \frac{a}{b} \frac{s+b}{s+a}, \quad a < b, \quad (6.25)$$

i izabratи parametre  $a$  i  $b$  tako da se bitno ne poremete dinamičke osobine, a da se postigne zadata staticka tačnost.

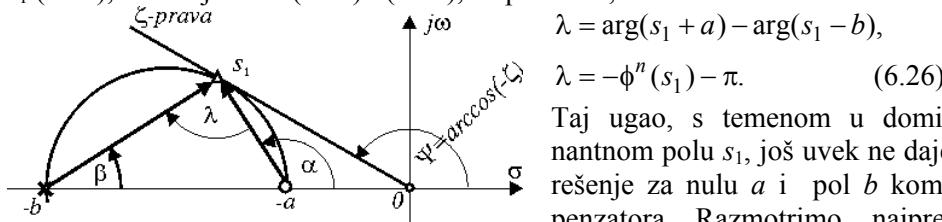
Proces projektovanja integralnog kompenzatora može, takođe, biti grafički ili analitički i biće prikazan kasnije.

Iz prethodnog izlaganja jasno je da se, kada polazni sistem ne zadovoljava dinamičke, a zadovoljava statičke zahteve, projektuje samo diferencijalni kompenzator. U suprotnom slučaju, projektuje se samo integralni kompenzator. Ako, pak, polazni sistem ne zadovoljava ni dinamičke niti statičke zahteve, tada se prvo projektuje diferencijalni, a zatim integralni kompenzator. Postupci projektovanja se opisuju u narednim paragrafima.

### 6.3.2.1 Projektovanje diferencijalnog kompenzatora

#### 6.3.2.1.1 Standardni postupak

Pošto je ustanovljeno da polazni, nekompenzovani sistem ne ispunjava TU u pogledu dinamičkih osobina, tj. relacija (6.22) nije zadovoljena, potrebno je u sistem uneti diferencijalni kompenzator (6.23). On doprinosi poboljšanju dinamičkih osobina sistema unošenjem pozitivnog faznog pomaka (izvesnu dozu predikcije) u sistem. Fazni ugao unet kompenzatorom u sistem, u zadatom polu  $s_1$  (6.20), određuje se iz (6.23) i (6.22), respektivno,



Sl. 6.8. Vektorski dijagram za  $\lambda=90^\circ$ .

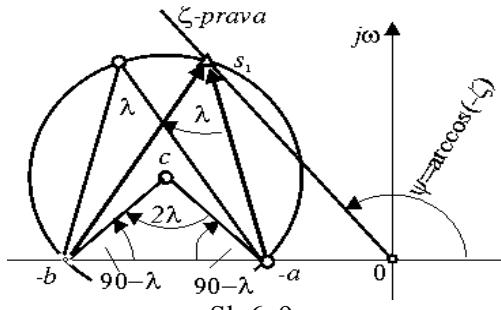
Taj ugao, s temenom u dominantnom polu  $s_1$ , još uvek ne daje rešenje za nulu  $a$  i pol  $b$  kompenzatora. Razmotrimo, najpre, parcijalni slučaj kada je taj ugao  $90^\circ$ . To se može prikazati grafički kao na sl. 6.8. Ako se oko trougla

$bas_1$  opiše krug, njegov centar će biti na  $\sigma$ -osi. Taj krug biće geometrijsko mesto tačaka, gde je fazni ugao  $\lambda=90^\circ$ . Bez obzira na to gde se nalazi dominantni pol  $s_1$  spregnutog sistema, uvek je moguće konstruisati krug s centrom na  $\sigma$ -osi koji prolazi kroz dominantni pol. Međutim, kada je potreban fazni ugao  $\lambda \neq 90^\circ$  centar kruga nije više na realnoj osi. Neka su, u tom slučaju nula i pol kompenzatora i dominantni pol s opisanim kružnim lukom kao na sl. 6.9. Na ovoj slici jasno se vidi kako može da se odredi centar kruga. Pri tome, ako je ugao  $\lambda < 90^\circ$ , centar kruga je iznad  $\sigma$ -ose, dok je za  $\lambda > 90^\circ$  centar je ispod  $\sigma$ -ose. Ali, još uvek nismo u situaciji da u potpunosti definišemo položaj nule i pola kompenzatora. Jednoznačnost se može postići ako se postavi uslov da posmatrani kružni luk tangira  $\zeta$ -prava. Tada se dobija situacija kao na sl. 6.10. Za određivanje nule kompenzatora potrebno je odrediti ugao  $\gamma$ . Iz konstrukcije se vidi, posle povlačenja tangente na krug u nuli  $a$ , da je

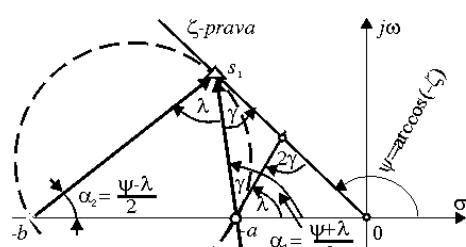
$$\psi = \lambda + 2\gamma,$$

odakle je

$$\gamma = \frac{1}{2}(\psi - \lambda) \quad (6.27)$$



Sl. 6.9. Vektorski dijagram konstantne faze.



Sl. 6.10. Određivanje pomoćnog ugla γ.

$$N = \text{INT}\left\{\left|\frac{\lambda}{\psi}\right| + 1\right\}, \quad \psi = \arccos(-\zeta), \quad (6.28)$$

gde  $\text{INT}\{\bullet\}$  označava celobrojnu vrednost izraza u zagradi.

Dalji postupak se svodi na povlačenje pravca pod uglom

$$\gamma = \frac{1}{2}(\psi - \lambda), \quad (6.29)$$

čiji presek sa  $\sigma$ -osom određuje nulu  $a$  kompenzatora. Zatim, povlačenjem, iz  $s_1$ , pravca pod uglom  $\gamma + \lambda$  u preseku sa  $\sigma$ -osom dobijamo pol  $b$  kompenzatora.

Opisani grafoanalitički postupak može se transformisati u potpuno analitički postupak i svesti na algoritam koji se može implementirati na računaru.

Za određivanje parametara kompenzatora analitičkim putem, napišimo jednačine pravih povučenih iz pola  $s_1$  u nulu  $a$  i pol  $b$ , respektivno,

$$\begin{aligned} \omega &= (\sigma \operatorname{tg} \alpha_1 + m_1, \\ \omega &= \sigma \operatorname{tg} \alpha_2 + m_2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Veličine uglova su date na sl. 6.10, dok se veličine  $m_1$  i  $m_2$  određuju iz uslova da te prave prolaze kroz zadati pol  $s_1$  čije koordinate,  $\sigma_1 = -\zeta \omega_n$  i  $\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , znamo iz TU, što daje

$$m_1 = \omega_1 - \sigma_1 \operatorname{tg} \alpha_1; \quad m_2 = \omega_1 - \sigma_1 \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (6.31)$$

Zamenom (6.31) u (6.30) dobijaju se jednačine pravih (6.30) u obliku:

Može se dogoditi da je potreban  $\lambda > \psi$ , tj. da je  $\gamma < 0$ , kada je potrebno da se pravac pod uglom  $\gamma$ , iz tačke  $s_1$ , povuče iznad  $\zeta$ -prave. Tada će nula  $a$  kompenzatora biti desna i dovešće do neminimalno-faznog sistema. Takvi sistemi se izbegavaju, jer će jedna grana GMK za velika pojačanja težiti toj nuli i sistem će postati nestabilan, a osim toga i odziv neminimalno-faznog sistema ima početni podbačaj. Zbog toga se u sistem, umesto jednog, unose dva ili više istih diferencijalnih kompenzatora. Broj potrebnih celija diferencijalnih kompenzatora,  $N$ , određuje se iz uslova da izraz (6.27) bude pozitivan. Stoga je

$$\begin{aligned}\omega &= (\sigma - \sigma_1) \operatorname{tg} \frac{\psi + \lambda}{2} + \omega_1, \\ \omega &= (\sigma - \sigma_1) \operatorname{tg} \frac{\psi - \lambda}{2} + \omega_1.\end{aligned}\quad (6.32)$$

Koordinate preseka ovih pravih s realnom osom ( $\omega=0$ ) daju tražene vrednosti za nulu i pol kompenzatora, respektivno:

$$a = \sigma_1 - \frac{\omega_1}{\operatorname{tg} \frac{\psi + \lambda}{2}}; b = \sigma_1 - \frac{\omega_1}{\operatorname{tg} \frac{\psi - \lambda}{2}}. \quad (6.33)$$

Ako se veličine  $\sigma_1, \omega_1, \psi$  i  $\lambda$ , određene na osnovu TU i parametara polaznog sistema:

$$\sigma_1 = -\zeta \omega_n, \quad \omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \psi = \arccos(-\zeta); \quad \lambda = \phi^n(s_1) - 180^\circ,$$

zamene u (6.33), konačno se dobija formula za analitički proračun parametara kompenzatora u eksplisitnom obliku [12]:

$$(a, b) = \omega_n \left[ \zeta + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ - \arccos(\zeta)}{2} \mp \frac{\Phi_n(s_1) + 180^\circ}{2N} \right)} \right], \quad (6.34)$$

gde se znak "-" u izrazu za  $\operatorname{tg}(\bullet)$  odnosi na nulu "a", a znak "+" na pol "b" kompenzatora.

Navedeni analitički postupak lako se implementira na digitalnom računaru prema sledećem algoritmu [13]:

1. Proverava se da li tačka  $s_1$  pripada GMK nekompenzovanog sistema na osnovu relacije (6.22).

Ako je ovaj uslov ispunjen, sistem ima potrebne dinamičke osobine. Ako, pak, on nije ispunjen, u sistem treba uneti jednostruki ili višestruki diferencijalni kompenzator, radi popravke njegovih dinamičkih osobina.

2. Izračunava se potreban pozitivan fazni ugao koji treba da unese diferencijalni kompenzator po formuli (6.26).

3. Broj celija kompenzatora određuje se po formuli (6.28).

4. Izračunavaju se nula (a) i pol (b) celije diferencijalnog kompenzatora po formuli (6.34).

5. Na osnovu relacija:

$$a = \frac{1}{R_1 C} \text{ i } b = a + \frac{1}{R_2 C}, \quad (6.35)$$

određuju se vrednosti otpornika i kondenzatora kojim se realizuje električni diferencijalni kompenzator. Pri tome se, obično, vrednost kondenzatora  $C$  zada je, a vrednosti otpornika  $R_1$  i  $R_2$  izračunavaju na osnovu  $a$  i  $b$ .

6. Određuje se pojačanje funkcije povratnog prenosa kompenzovanog sistema u zadatom dominantnom polu.

**Primer 6.2.** Funkcija povratnog prenosa sistema je  $\frac{16K}{s(s+2)(s+8)}$ . Od sistema se zahteva da ima faktor relativnog prigušenja para dominantnih polova funkcije spregnutog prenosa  $\zeta = 0,6$  i sopstvenu frekvenciju  $\omega_n = 5 \text{ s}^{-1}$ .

Na osnovu (6.20), zadati dominantni pol je  $s_1 = -3 + j4$ .

Na osnovu rasporeda kritičnih frekvencija i zadatog dominantnog pola  $s_1$ , kao na sl.6.12, nalazi se fazni ugao nekompenzovanog sistema u tom polu:

$$\phi_n(s_1) = \arctg(-\frac{4}{3}) - \arctg(\frac{4}{2-3}) - \arctg(\frac{4}{8-3}) = -269,565^\circ \neq 180^\circ,$$

Potreban je diferencijalni kompenzator.  $\lambda = -180^\circ - (-269,565^\circ) = 89,565^\circ$ .

$$\psi = \arccos(-0,6) = 126,8689^\circ, \quad N = \text{INT}\left\{\frac{89,565}{126,8689} + 1\right\} = 1.$$

$$(a, b) = 5 \left[ 0,6 + \frac{\sqrt{1-0,6^2}}{\operatorname{tg}(\frac{180^\circ - 53,13^\circ}{2} \mp \frac{-269,565^\circ + 180^\circ}{2 \cdot 1})} \right] = (1,684; 14,849),$$

$$a = 1,684; \quad b = 14,849.$$

$$K(s_1) = \frac{5\sqrt{(3-2)^2 + 4^2}}{\sqrt{(3-1,684)^2 + 4^2}} \sqrt{(8-3)^2 + 4^2} \sqrt{(14,849-3)^2 + 4^2} = 392.$$

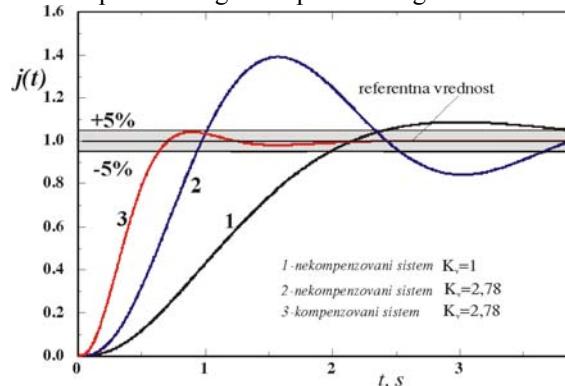
Funkcija povratnog prenosa kompenzovanog sistema je

$$W_{pk}(s) = \frac{392(s+1,684)}{s(s+2)(s+8)(s+14,849)}.$$

Na sl. 6.11 dat je odskočni odziv nekompenzovanog i kompenzovanog sistema.

MATLAB program za crtanje sl.6.11

```
>>s=tf('s');
H=1;
C=392*(s+1.684)/(s+14.849);
G1=1/(s*(s+2)*(s+8));
G=series(C,G1);
W=feedback(G,H,-1);
W1=feedback(16*G1,H,-1);
W2=feedback(16*2.78*G1,H,-1);
t=0:0.01:4;
x1=step(W,t);
x2=step(W1,t);
x3=step(W2,t);
plot(t,[x1,x2,x3])
```



Sl. 6.11. Odzivi sistema iz primera 6.2.

**Napomena:** Ako bi parametar  $\omega_n$  bio zadat sa manjom vrednošću nego li onaj koji nekompenzovani sistem poseduje, tada bi striktna primena navedenog postupka dovela do primene integralnog tipa kompenzatora, jer sistem treba usporiti!

**Primer 6.3.** Funkcija povratnog prenosa sistema je  $\frac{K}{s(s+2)(s+6)}$ . Izvršiti sintezu kompenzatora tako da spregnuti prenos kompenzovanog sistema ima dinamiku određenu parametrima  $\zeta = 0,6$  i  $\omega_n = 8 \text{ s}^{-1}$ .

Na osnovu (6.20) je  $s_1 = -4,8 + j6,4$ ,  $\psi = \arccos(-0,6) = 126,8689^\circ$ .

$\phi_n(s_1) = -319,8786^\circ \neq -180^\circ$ , potreban je diferencijalni kompenzator.  $\lambda = 139,8786^\circ$ ;  $N = \text{INT}\{(139,8786/126,8699) + 1\} = 2$ , potreban je dvostruki kompenzator.

$$(a; b) = 8 \left[ 0,6 + \frac{\sqrt{1 - 0,6^2}}{\operatorname{tg}(\frac{180^\circ - 53,13^\circ}{2} \mp \frac{-319,8786^\circ + 180^\circ}{2 \cdot 2})} \right] = (3,854; 16,604)$$

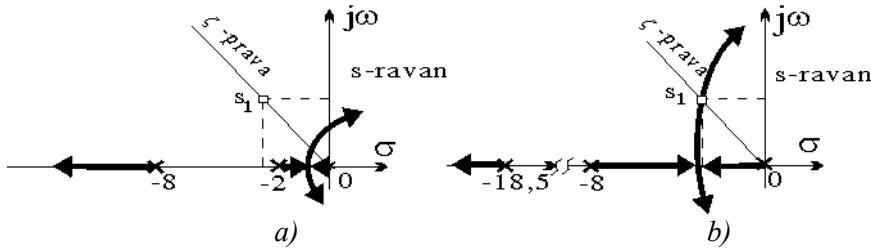
Funkcija prenosa kompenzatora je  $G_d(s) = \left( \frac{s + 3,854}{s + 16,604} \right)^2$ .

### 6.3.2.1.2 Metoda skraćivanja

Suština metode skraćivanja je u eliminaciji nepoželjnih i uvođenju novih kritičnih frekvencija funkcije povratnog prenosa sistema, tako da GMK sistema prođe kroz željeni dominantni pol funkcije spregnutog prenosa sistema. Eliminacija nepoželjnih polova ostvaruje se skraćivanjem. Taj postupak objasnićemo na jednom primeru, napominjući ponovo da se skraćivanje ne sme izvoditi u desnoj poluravni  $s$ -ravni.

#### Primer 6.4.

Projektovati kompenzator metodom skraćivanja prema uslovima iz primera 6.2. GMK nekompenzovanog sistema je prikazano na sl. 6.12a. Sa slike se vidi da sistem zadovoljava traženo  $\zeta$ , ali ima manje  $\omega_n$  od zahtevanog. Zbog toga je potrebno pomeriti kompleksne grane uлево, tako da GMK prođe kroz tačku  $s_1 = -3 + j4$ . U tom cilju smestićemo nulu kompenzatora u pol  $s = -2$ , tj. usvajamo  $a = 2$ . Time smo uticaj tog pola na dinamiku sistema eliminisali. Čak i u slučaju neidealnog skraćivanja dobija se dipol

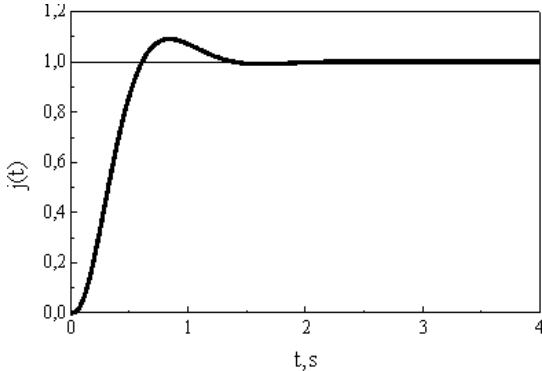


Sl. 6. 12. GMK uz primer 6.4: a) nekompenzovani, b) kompenzovani sistem.

čiji je uticaj mali na dinamiku sistema (kada je nepoželjni pol u desnoj poluravni on se ne sme skraćivati!). Pol kompenzatora treba tako izabrati da u tački  $s_1$  bude ispunjen fazni kriterijum:  $\arg W_p(s_1) = -180^\circ$ . Na osnovu tog uslova može se napisati:

$$\arg W_{pk}(s_1) = -\psi - \arctg \frac{4}{8-3} - \arctg \frac{4}{b-3} = -180^\circ, \text{ ili}$$

$$\tg(-126,8699^\circ - 38,6598^\circ + 180^\circ) = \frac{4}{b-3}.$$



Sl. 6.13. Odskočni odziv sistema s kompenzatorom dobijenim postupkom skraćivanja.

Rešavanjem po  $b$  dobija se  $b=18,5$ . Funkcija prenosa diferencijalnog kompenzatora je

$$G_d(s) = \frac{s+2}{s+18,5}.$$

$$K(s_1) = 5\sqrt{(8-3)^2 + 4^2}$$

$$\sqrt{(18,5-3)^2 + 4^2} = 512,5$$

$$W_p^k(s) = \frac{512,5}{s(s+8)(s+18,5)}.$$

GMK kompenzovanog sistema prikazano je na slici 6.12b, a odskočni odziv na sl. 6.13.

### 6.3.2.2 Projektovanje integralnog kompenzatora

Prepostavlja se, u ovom slučaju, da sistem ispunjava TU u pogledu dinamičkih osobina (stabilnosti, brzine odziva, i dr.) a da ne ispunjava TU u pogledu statičke tačnosti. To znači da sistem nema potrebnu veličinu odgovarajuće konstante greške. U cilju omogućavanja povećanja konstante greške sistema, njemu se pridodaje integralni kaskadni kompenzator, funkcije prenosa (6.25).

Unošenjem integralnog kompenzatora ne smeju se, u značajnoj meri, poremetiti dobre dinamičke osobine sistema, ali se mora obezbediti mogućnost povećanja pojačanja povratnog prenosa u njemu. To znači da integralni kompenzator mora posedovati mali fazni ugao i veliki odnos  $b/a$ . Ovaj uslov može biti ispunjen samo u području malih brojeva, tj. nula  $b$  i pol  $a$  kompenzatora moraju biti na negativnom delu realne ose, blizu koordinatnog početka  $s$ -ravni. Postupak projektovanja integralnog kompenzatora se zasniva na izvesnoj empiriji. Algoritam analitičkog projektovanja integralnog kompenzatora, izведен na osnovu odgovarajućeg grafo-analitičkog postupka [2, 9], je sledeći [13]:

1. Na osnovu polaznih TU u pogledu dinamike ( $\zeta, \omega_n$ ), određuje se položaj dominantnog pola ( $s_1 = -\sigma + j\omega$ ,  $\sigma = \zeta\omega_n$ ,  $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ) i nalazi pojačanje povratnog prenosa u toj tački i određuje odgovarajuća konstanta greške sistema. Ako je nađena konstanta greške veća od zahtevane ili jednaka njoj, tada nije potreban integralni kompenzator. U suprotnom slučaju, postupak projektovanja se nastavlja kao što sledi.

2. Određuje se ugao nagiba  $\zeta$ -prave u odnosu na pozitivni deo realne ose

$$\psi = \arccos(-\zeta) \quad (6.36)$$

i izračunava empirijski proračunski ugao

$$\alpha = \psi - (5 \div 10^\circ). \quad (6.37)$$

3. Određuje se nula kompenzatora

$$b = -\sigma - \frac{\omega}{\tan \alpha}.$$

4. Određuju se moduli vektora povučenih iz svih nula funkcije povratnog prenosa sistema (uključujući i nulu  $b$  kompenzatora) u dominantni pol  $s_1$

$$\vec{R}_z^i = |z_i s_1|, \quad i = 1, 2, \dots, m, m+1, \quad (6.38)$$

gde su  $z_i$  - nule funkcije povratnog prenosa sistema,  $m$  - broj nula povratnog prenosa nekompenzovanog sistema,  $z_{m+1}$  - nula integralnog kompenzatora.

5. Određuju se moduli vektora iz svih polova (uključujući i pol integralnog kompenzatora) funkcije povratnog prenosa u dominantni pol  $s_1$ . Međutim, s obzirom da pol integralnog kompenzatora nije poznat, on se privremeno smešta u koordinatnom početku  $s$ -ravni. Tražena rastojanja su:

$$\vec{R}_p^j = |p_j s_1|, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6.39)$$

gde su:  $p_j$  - polovi povratnog prenosa sistema,  $n$  - broj polova povratnog prenosa nekompenzovanog sistema,  $p_{n+1}$  - pol integralnog kompenzatora, smešten privremeno u koordinatnom početku  $s$ -ravni.

6. Određuje se koeficijent pojačanja funkcije povratnog prenosa kompenzovanog sistema u dominantnom polu  $s_1$  (s pretpostavljenim polom kompenzatora u koordinatnom početku), po formuli:

$$K_{s1} = \left( \omega_n \prod_{j=1}^n R_p^j \right) \left( \prod_{i=1}^{m+1} R_z^i \right)^{-1}. \quad (6.40)$$

6. Na osnovu zahtevane konstante greške sistema ( $K_{gz}$ ) i izračunatog koeficijenta pojačanja ( $K_{s1}$ ), nalazi se stvarno potreban pol kompenzatora

$$a = \left( K_{s1} \prod_{i=1}^{m+1} z_i \right) \left( K_{gz} \prod_{j=1}^n p_j \right)^{-1}, \quad (6.41)$$

8. Proverava se da li uneti integralni kompenzator nije značajno poremetio dinamičke osobine sistema. Ova provera se vrši na taj način što se nalazi fazni ugao kompenzovanog sistema u dominantnom polu  $s_1$ . Ako  $\arg W_{pk}(s_1)$  ne odstupa značajno od  $-180^\circ$  (može se tolerisati odstupanje reda  $\delta$  stepeni) tada je proračun parametara kompenzatora završen. U protivnom, potrebno je postupak ponoviti usvajanjem manjeg ugla  $\delta$  ( $=5-10$  stepeni) u drugom koraku algoritma.

9. Na osnovu funkcije prenosa kompenzatora, realizovanog u obliku pasivnog  $RC$  četvoropola, i nađenih parametara kompenzatora ( $a, b$ ), usvajajući vrednost jednog od pasivnih elemenata (najčešće vrednost kondenzatora), određuju se vrednosti sastavnih elemenata kompenzatora.

**Primer 6.5.** Funkcija povratnog prenosa sistema je  $\frac{K}{(s+2)(s+5)(s+6)}$ . Od sistema se zahteva da funkcija spregnutog prenosa ima par dominantnih polova određenih sa  $\zeta=0,5$  i da konstanta položaja sistema bude  $K_p = 5$ .

1. Na osnovu izgleda GMK na sl. 6.14, zaključuje se da sistem u pogledu dinamičkih osobina zadovoljava, jer  $\zeta$ -prava seče kompleksnu granu GMK, a nisu postavljeni određeni zahtevi u pogledu veličine  $\omega_n$ . Potrebno je, najpre, naći tačku preseka GMK sa  $\zeta$ - pravom, odrediti pojačanje funkcije povratnog prenosa u toj tački i proveriti da li to pojačanje obezbeđuje traženu konstantu greške. Za određivanje tačke preseka može se primeniti sledeća procedura:

Na osnovu Teodorčikove metode konstrukcije kompleksnih grana GMK imamo<sup>1</sup>:

$$\omega^2 = 3\sigma^2 - 26\sigma + 52,$$

$$K = (13 - 3\sigma)\omega^2 + \sigma^3 - 13\sigma^2 + 52\sigma.$$

S obzirom na  $\zeta=0,5$ ,  $\psi = \arccos(-\zeta) = 120^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} = \omega / \sigma$ , deleći prvu relaciju sa  $\sigma^2$ , zamenom  $(\omega/\sigma)^2 = 3$  i rešavanjem po  $\sigma$ , dobija se  $\sigma=2$  i  $\omega=\sqrt{12}$ .

Zamenom ovih vrednosti u drugu jednačinu dobija se  $K = 84$ . Na osnovu nađenih  $\sigma$  i  $\omega$ , nalazi se  $\omega_n = 4 \text{ s}^{-1}$ . Za izabranu dinamiku sistema konstanta položaja je

$$K_p = \frac{84}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 1,4 < 5 = K_{pz},$$

pa je potrebno projektovati integralni kompenzator.

$$2. \alpha = \psi - (5 \div 10^\circ) = 120^\circ - 8^\circ = 112^\circ.$$

3. Nula kompenzatora je

$$b = \sigma + \frac{\omega}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 + \frac{\sqrt{12}}{\operatorname{tg} 112^\circ} = 0,6.$$

4. Moduli vektora povučenih iz svih nula u tačku  $s_1 = -2 + j\sqrt{12}$  su:

$R_z^1 = \sqrt{(2-0,6)^2 + (\sqrt{12})^2} = 3,7363$  - za vektor iz nule kompenzatora, jer nema drugih konačnih nula.

5. Moduli vektora povučenih iz svih polova u tačku  $s_1$  su:

$$R_p^1 = \sqrt{(2-2)^2 + (\sqrt{12})^2} = 3,464 \text{ - iz pola } s = -2,$$

$$R_p^2 = \sqrt{(2-5)^2 + (\sqrt{12})^2} = 4,58257 \text{ - iz pola } s = -5,$$

$$R_p^3 = \sqrt{(2-6)^2 + (\sqrt{12})^2} = 5,29 \text{ - iz pola } s = -6,$$

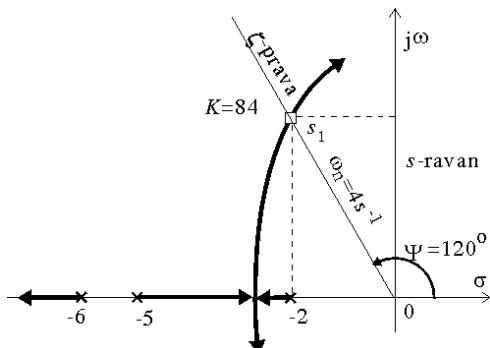
$$R_p^4 = \sqrt{(2-0)^2 + (\sqrt{12})^2} = \omega_n = 4 \text{ - iz prepostavljenog pola kompenzatora, smeštenog privremeno u koordinati početak.}$$

6. Pojačanje funkcije povratnog prenosa kompenzovanog sistema u tački  $s_1$  je:

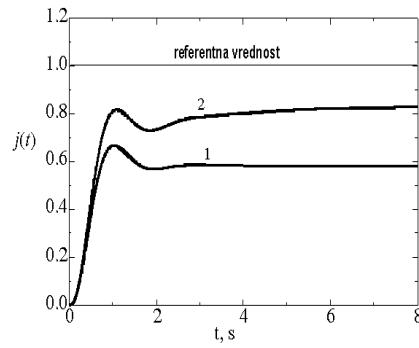
$$K_{s1} = \frac{3,464 \cdot 3,873 \cdot 5,29 \cdot 4}{3,7363} = 89,9$$

---

<sup>1</sup> Videti odeljak 5.5.5, na str. 145.



Sl. 6.14. GMK polaznog sistema iz primera 6.5.



Sl. 6.15. Odskočni odziv sistema bez (1) i s integralnim kompenzatorom (2).

6. Stvarno potreban pol kompenzatora je

$$a = \frac{K_{s1} b}{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot K_{pz}} = \frac{89,96 \cdot 0,6}{60 \cdot 5} = 0,18.$$

S obzirom da pol i nula kompenzatora čine dipol, on neće uticati na promenu položaja dominantnih polova sistema, tako da će njegova dinamika ostati određena tim polovima. Međutim, treba ukazati na činjenicu da je ipak uveden jedan dodatni realni pol koji će usporaviti sistem. Na sl. 6.15 dat je odskočni odziv sistema bez integralnog kompenzatora (1) i s njim (2).

### 6.3.2.3 Sinteza integro-diferencijalnog kompenzatora

Integro-diferencijalni (diferencijalno-integralni) kompenzator se primenjuje za korekciju dinamičkih i statickih karakteristika sistema. Njegovo sinteza svodi se na primenu prvo metode projektovanja diferencijalnog kompenzatora, radi obezbeđenja zahtevane dinamike sistema, a zatim, na primenu postupka projektovanja integralnog kompenzatora, radi obezbeđenja zahtevane tačnosti.

**Napomena:** Ako u polaznom sistemu postoje konjugovano-kompleksni polovi potrebno je obavezno proveriti da li neke druge grane GMK nisu preuzele dominantnu ulogu. Provera se može ostvariti simulacijom na računaru ili konstrukcijom GMK.

### 6.3.2.4 Primena MATLAB-a za projektovanje kompenzatora

Za projektovanje kompenzatora može se koristiti programski paket MATLAB. U nastavku će biti prikazane programske funkcije za sintezu diferencijalnog i integralnog kompenzatora razvijene na osnovu napred navedenog analitičkog postupka [12] i numeričkog algoritma [13], ovde prilagođenog MATLAB okruženju.

#### 6.3.2.4.1 Primena matlab-a za sintezu diferencijalnih kompenzatora

Formiranje programa za projektovanje diferencijalnog kompenzatora odvija se ovim redosledom:

U **M-file** MATLAB-a formira se potprogram, dat na sledećoj stranici, prostim prenošenjem, korišćenjem naredbi **copy** i **paste**. To je definicija nove korisničke funkcije. Ona se zapisuje u **work** fajlu pod izabranim od korisnika nazivom, na primer,

### Program za projektovanje diferencijalnog kompenzatora

```
%Program zasinteza diferencijalnog
%kompenzatora
function c=difcomp(Num,Den,zeta,wn);
s=tf('s');Gn=Num/Den;
qp=0;qz=0;hp=0;hz=0;m=0;n=0;
p=pole(Gn);n=length(p);
z=zero(Gn);m=length(z);sigma=-zeta*wn;
omega=wn*((1-zeta^2)^0.5);
s1=sigma+omega*i;
for j=1:n;qp(j)=s1;end; hp=qp'-p;
if m>0 for v=1:m; qz(v)=s1;end
hz=qz'-z;else hz=0;end
alfa=-sum(angle(hz));beta=sum(angle(hp));
fin=alfa+beta;lambd=-fin-pi;Fin=fin*180/pi;
kpn=1;kzn=1; ps=abs(hp);kpn=prod(ps);
if m>0 zs=abs(hz);kzn=prod(zs);
else kzn=1;end
Kn=kpn/kzn;
if abs(lambd)>0.035
psi=0;psi=acos(-zeta);
delta=0;delta=acos(zeta);
om=0;om=(1-zeta^2)^0.5;
N=ceil(abs(lambd/psi));
f1=(pi-delta)/2;f2=(fin+pi)/(2*N);
tga=tan(f1-f2);tgb=tan(f1+f2);
a=wn*(zeta+om/tga);b=wn*(zeta+om/tgb);
nc=0;mc=0;nc=n+N;mc=m+N;
C=(s+a)^N/(s+b)^N;G=(series(C,Gn));
pc=pole(G);zc=zero(G); hpc=0;qpc=0;
for k=1:nc;qpc(k)=s1;end
hpc=qpc'-pc;hze=0;u=mc;
for w=1:u;qzc(w)=s1;end
hze=qzc'-zc;zsl=abs(hze);
ps1=abs(hpc);kz=prod(zs1);
kp=prod(ps1);K=kp/kz;Gc=K*G;
ze=zero(G);pc=pole(G);
hze=0;qzc=0;hpc=0;qpc=0;
for o=1:nc;qpc(o)=s1;end
for f=1:mc; qzc(f)=s1;end
hzc=qzc'-zc;hpc=hpc-pc;
alfa1=sum(angle(hzc))*180/pi;
beta1=sum(angle(hpc))*180/pi;
fic=alfa1+beta1;
if lambda<0;
fprintf("\n");
disp('Dif. komp. nije potreban. Striktno
ispunjene');...
disp('datih tehnickih uslova zahteva primenu');...
disp('integralnog kompenzatora funkcije
prenosa Ci(s)=');
else
fprintf("\n");
disp('Diferencijalni kompenzator Cd(s)=' );
end
C
fprintf("\n");
disp('PARAMETRI KOMPENZOVANOG
SISTEMA');
disp('_____');
disp(' a b N K(s1)');
Fic);...
disp('_____');disp([a b
N K fic]);
disp('_____');
fprintf("\n");
disp('Povratni prenos kompenzovanog sistema
Gc(s)=' );
Gc
else
fprintf("\n");
disp('_____');
disp('Diferencijalni kompenzator nije
potreban');
disp('Fazni ugao nekompenz. sistema u S1 je
Fi(S1)=' );disp(Fin);
disp('Pojacanje nekompenz. sistema u je S1
K(S1)=' );disp(Kn);
end
```

#### difcomp.m

Argumenti ove funkcije su brojilac (**Num**) i imenilac (**Den**) funkcije prenosa nekompenzovanog sistema, napisani u MATLAB formatu, i tehnički zahtevi, tj. vrednosti parametara  $\zeta$  (**zeta**) i  $\omega_n$  (**wn**).

Pre svega treba definisati format zapisivanja funkcija prenosa (**s=tf('s')**). Tako da kompletan program ima sledeći izgled:

```
s=tf('s');
Num= Num=(s+z1)*(s+z2)*...*(s+zm)
Den= Den=(s+p1)*(s+p2)*...*(s+pn)
zeta= $\zeta$ ;wn= $\omega_n$ ;
difcomp(Num,Den,zeta,wn)
```

## Glava 6.: Sinteza linearnih SAU

$z_i, i=1, \dots, m$  su nule polinoma u brojiocu funkcije prenosa nekompenzovanog sistema;  $p_j, j=1, \dots, n$  su nule polinoma u imeniocu funkcije prenosa nekompenzovanog sistema.

**Napomena:** Pojačanje funkcije povratnog prenosa se smatra da je jednako 1.

Može se koristiti i format zapisivanja polinoma funkcije prenosa i u obliku

$\text{Num} = s^m + b_n s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0; \text{Den} = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0;$   
sa koeficijentima 1 ispred najvećeg stepena promenljive  $s$ .

Poslednja naredba: **difcomp(Num,Den,zeta,wn)** poziva podprogram zapisan u **M-file-u**.

Kao primere navaćemo rešavanje primera 6.2 i 6.3. datim programom.

### Primer 6.2 (MATLAB)

```
>> s=tf('s'); Num=1; Den=s*(s+2)*(s+8);
zeta=0.6; wn=5; difcomp(Num,Den,zeta,wn)
```

Diferencijalni kompenzator  $C_d(s) =$

Transfer function:

$$s + 1.6835$$

-----

$$s + 14.85$$

### PARAMETRI KOMPENZOV. SISTEMA

a	b	N	K(s1)	Fic
1.6835	14.85	1	392.06	-180

Povratni prenos kompenzovanog sistema  
 $G_c(s) =$

Transfer function:

$$392.1 s + 660$$

-----  
 $s^4 + 24.85 s^3 + 164.5 s^2 + 237.6 s$

### Primer 6.3 (MATLAB)

```
>> s=tf('s'); Num=1; Den=s*(s+2)*(s+6);
zeta=0.6; wn=8; difcomp(Num,Den,zeta,wn)
```

Diferencijalni kompenzator  $C_d(s) =$

Transfer function:

$$s^2 + 7.709s + 14.86$$

-----

$$s^2 + 33.21s + 275.7$$

### PARAMETRI KOMPENZOV. SISTEMA

a	b	N	K(s1)	Fic
3.8544	16.605	2	1567.7	-180

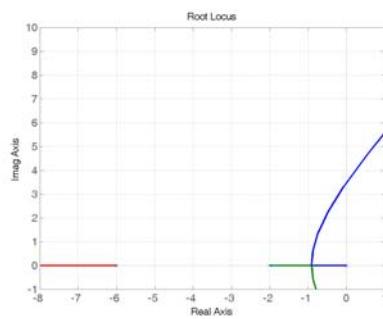
Povratni prenos kompenzovanog sistema  
 $G_c(s) =$

Transfer function:

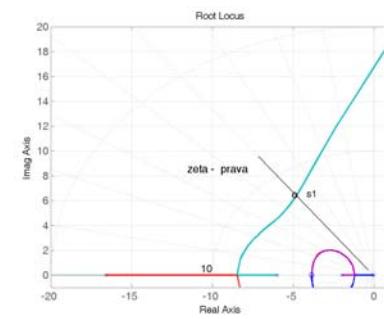
$$1568s^2 + 1.208e004s + 2.329e004$$

-----  
 $s^5 + 41.21s^4 + 553.4s^3 + 2604s^2 + 3309s$

Radi ilustracije procesa projektovanja, odnosno uočavanja uticaja projektovanog kompenzatora na GMK može se efektno koristiti MATLAB. Na sledećim slikama su prikazana GMK nekompenzovanog i kompenzovanog sistema za primer 6.3.



GMK nekompenzovanog sistema iz primera 6.3



GMK kompenzovanog sistema iz primera 6.3

Sledeći primer pokazuje slučaj kada nije potreban diferencijalni kompenzator već samo podešenje pojačanja.

**Primer 6.3a MATLAB.**

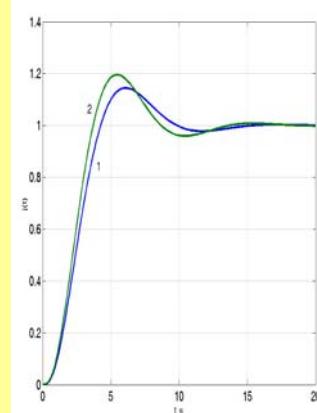
$$W_P(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}; \text{ TU : } \zeta = 0,5; \omega_n = 0,67.$$

```
>> s=tf('s');Num=1;Den=s*(s+1)*(s+2);
zeta=0.5;wn=0.67;
difcomp(Num,Den,zeta,wn)
```

**Diferencijalni kompenzator nije potreban**

Fin Kn  
**-180.3189 1.1813**

U ovom primeru nije potrebno primenjivati diferencijalni kompenzator jer nekompenzovani sistem ima potrebne dinamičke osobine. Naime, GMK prolazi veoma blizu zahtevanog dominantnog pola (odstupanje je za  $0,319^\circ$  od  $-180^\circ$ ). Potrebno je uneti u sistem samo dodatno pojačanje 1.1813. Na slici desno prikazan je odskočni odziv nekompenzovanog (1) i kompenzovanog (2) sistema.



1- sistem s pojačanjem 1

2 - sistem s pojačanjem 1.1813

**Napomena:** Može se dogoditi da su dati TU takvi da njihovo ispunjenje dovodi do smanjenja brzine sistema. Ako se primeni program za projektovanje diferencijalnog kompenzatora, jer dominantni pol ne pripada GMK, tada se kao rezultat dobija napomena da **diferencijalni kompenzator nije potreban već integralni kompenzator**. Taj slučaj prikazaćemo na sledećem primeru.

**Primer 6.5c**

```
>>s=tf('s');Num=1;Den=s*(s+4);
zeta=0.5;wn=1.41;
difcomp(Num,Den,zeta,wn)
```

Dif. komp. nije potreban. Striktno ispunjenje datih tehnickih uslova zahteva primenu integralnog kompenzatora funkcije prenosa

**Ci(s)=**

Transfer function:  
 $s + 2.152$

-----  
 $s + 0.924$

**PARAMETRI KOMPENZ. SISTEMA**

a	b	N	K(s1)	Fic
<b>2.1517</b>	<b>0.92399</b>	<b>1</b>	<b>3.2469</b>	<b>-180</b>

Povratni prenos kompenzovanog sistema

Gc(s)=  
Transfer function:  
 $3.247 s + 6.986$

-----  
 $s^3 + 4.924 s^2 + 3.696 s$

### 6.3.2.4.2 Primena matlab-a za sintezu integralnog kompenzatora

Kao i kod sinteze diferencijalnog kompenzatora, može se koristiti MATLAB za projektovanje integralnog kompenzatora. Na sledećoj stranici dat je odgovarajući program. Ovaj program treba uneti u **M-file** MATLAB-a i zapisati u **work** fajlu pod, na pr., nazivom **intcomp**. Atributi ove programske funkcije su: **Num,Den,zeta,wn,Kgz, M1,N,D,delta**. Dakle funkciju treba pozivati naredbom

**intcomp(Num,Den,zeta,wn,Kgz,M1,N,D,delta)**

Pre unošenja ove funkcijске naredbe treba najpre definisati prostor kompleksne promenljive odnosno funkcije prenosa naredbom **s=tf('s')**. Zatim treba uneti podatke za brojilac funkcije povratnog prenosa nekompenzovanog sistema, u formatu:

**Num=(s+z<sub>1</sub>)\*(s+z<sub>2</sub>)\*...\*(s+z<sub>m</sub>);**

i za imenilac funkcije prenosa, u formatu:

**Den=(s+p<sub>1</sub>)\*(s+p<sub>2</sub>)\*...\*(s+p<sub>n</sub>);**

**Napomena:** Pojačanje funkcije povratnog prenosa se smatra da je jednako 1. Može se koristiti i format zapisivanja polinoma funkcije prenosa i u obliku

**Num=s<sup>m</sup>+b<sub>n</sub>s<sup>m-1</sup>+...+b<sub>1</sub>s+b<sub>0</sub>; Den=s<sup>n</sup>+a<sub>n</sub>s<sup>n-1</sup>+...+a<sub>1</sub>s+a<sub>0</sub>;**

sa koeficijentima 1 ispred najvećeg stepena promenljive s.

Zatim brojne vrednosti za zadate tehničkim uslovima: koeficijet relativnog prigušenja (**zeta**), prirodnu neprigušenu frekvenciju oscilovanja (**wn**), konstantu greške (**K<sub>gz</sub>**), brojnu vrednost indeksa **M1**, koja može biti **-1**, ako se pouzdano zna da tačka, određena sa  $s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  (zeta=ζ; wn=ω<sub>n</sub>), pripada GMK, ili **M1=1** (+1) ako se ne zna tačno ω<sub>n</sub> ali se pouzdano zna da postoji presek GMK sa ζ-pravom, a treba odrediti koordinate tačke preseka (kao što je to bio slučaj u prethodnom primeru 6.5). Pri tome, **wn** u funkcijskoj naredbi treba zadati proizvoljno ali manje od očekivanog, koje se može proceniti iz GMK nekompenzovanog sistema. Mesto preseka se može odrediti primenom MATLAB-a i njegovog programa za konstrukciju GMK.

Zatim treba uneti vrednost brojilaca funkcije povratnog prenosa (**Num**) za  $s=0$  (**N**), kao i vrednost njenog imenioca (**Den**) za  $s=0$  (**D**), nakon odstranjivanja čistih integracionih elemenata u imeniocu funkcije povratnog prenosa.

Najzad, **delta** je vrednost empirijskog ugla od 5-10°, preveden u radijane, što iznosi 0.087 -0.174. Može se uneti u program fiksno **delta=0.139** što je približno 8°.

Način primene prikazaćemo na nekoliko primera, od kojih je prvi primer-prethodni zadatak (Primer 6.5). rešen ovde datim MATLAB programom.

#### Primer 6.5 MATLAB

$$\frac{K}{(s+2)(s+5)(s+6)}; \zeta=0,6; \omega_n \text{ nije dato}; K_{gz}=5.$$

Program je:

```
>> s=tf('s'); Num=1; Den=(s+2)*(s+5)*(s+6);
zeta=0.5; wn=1; Kgz=5; M1=1; N=1; D=2*5*6; delta=0;
intcomp(Num,Den,zeta,wn,Kgz,M1,N,D,delta)
```

MATLAB poziva datu programsku funkciju **intcomp** i daje sledeći rezultat

Dominantni pol sistema je  $S_1c=$

$$-2 + 3.4641i$$

Parametri sistema su:

a	b	Kc
0.17919	0.59789	89.909

Važno! Pojačanje funkcije povratnog prenosa se smatra da je jednako 1. Program, nakon izvršenja, daje vrednost pojačanja funkcije povratnog prenosa kompenzovanog sistema u dominantnom polu  $s_1$  (Kc).

### Program za projektovanje integralnog kompenzatora

```
%Program za sintezu Integralnog
%kompenzatora
function ic= intcomp(Num,Den,zeta,wn,Kgz,
M1,N,D,delta)
s=tf('s');
Gn=Num/Den;
m=0;n=0;
sigma=-zeta*wn;omega=wn*(1-zeta^2)^0.5;
s1=sigma+omega*i;p=pole(Gn);z=zero(Gn);
%Nalazenje faznog ugla u inicijalnom s1
n=length(p);m=length(z);
hp=0;qp=0;hz=0;qz=0;
if m>0 ; for v=1:m; qz(v)=s1; end
hz=qz'-z; alfa=-sum(angle(hz));
else
alfa=0;
end
for g=1:n;qp(g)=s1; end
hp=qp'-p; beta=sum(angle(hp));
fin=alfa+beta;lambda=-fin-pi;Fin=fin*180/pi;
%Nalazenje preseka zeta-prave i GMK
if M1>0
w=wn;
while abs(lambda)>0.035
w=w+0.1;
sigma=-zeta*w;omega=w*(1-zeta^2)^0.5;
s1=sigma+omega*i;
z=0;hp=0;qp=0;hz=0;qz=0;
if m>0 for v=1:m; qz(v)=s1; end
hz=qz'-z; alfa=-sum(angle(hz));
else;alfa=0;end
for j=1:n;qp(j)=s1; end
hp=qp'-p; beta=sum(angle(hp));
fin=alfa+beta;lambda=-fin-pi;
wn=w;
end
else
sigmac=-zeta*wn;
omegac=wn*(1-zeta^2)^0.5;
s1c=sigmac+omegac*i;
%Proracun konstante greske nekomp.sistema
if m>0;for w1=1:m;qz(w1)=s1c;end
hz=qz'-z;zs1=abs(hz);
kz=prod(zs1);
else; kz=1; end
for k=1:n;qp(k)=s1c;end
hp=qp'-p;ps1=abs(hp);
kp=prod(ps1);
K=kp/kz;Kgn=K*N/D;
%Nalazenje parametra b kompenzatora
if Kgn<Kgz;
psi=acos(-zeta);alfa1=psi-delta;b=0;
b=-sigmac+(omegac/tan(alfa1));
Odredjivanje pojacanja u dominantnom polu
Numc=Num*(s+b);
Denc=Den*s;Gnc=Numc/Denc;
pc=pole(Gnc);nc=length(pc);
ze=zero(Gnc);mc=length(zc);
if mc>0;for wc=1:mc;qzc(wc)=s1c;end
hzc=qzc'-zc;zs1c=abs(hzc); kzc=prod(zs1c);
else;kzc=1;end
for k=1:nc;qpc(k)=s1c;end
hpc=qpc'-pc;ps1c=abs(hpc);
kpc=prod(ps1c);
Kc=kpc/kzc;a=0;
%Odredjivanje parametra a kompenzatora
a=Kc*N*b/(Kgz*D);
C=(a/b)*(s+b)/(s+a);
%Provera odstupanja faznog kriterijuma
z=0;Denc1=D*(z+a);Numc1=N*(z+b);
Gc1=Numc1/Denc1Denc2=Den*(s+a);
Numc2=Num*(s+b); Gc2=Numc2/Denc2;
sigmac1=-zeta*wn;
omegac1=wn*(1-zeta^2)^0.5;
sc1=sigmac1+omegac1*i;
zc1=0;hep1=0;qcpl1=0;hc1=0;qcz1=0;
pc1=pole(Gc2);zc1=zero(Gc2);
nc1=length(pc1);mc1=length(zc1);
if mc1>0 for v=1:mc1; qc1(v)=sc1;end
hc1=qc1'-zc1;
alfac=-sum(angle(hc1));
else alfac=0; end
for j=1:nc1;qcpl1(j)=sc1; end
hpc1=qcpl1'-pc1;
betac=sum(angle(hep1));
ficc=alfac+betac;Finc=ficc*180/pi;
fprintf("\n");
disp('Dominantni pol sistema je S1c=');
disp(s1c);
fprintf("\n");
disp('Parametri sistema su:');
disp(' a b Kc');
disp([a,b,Kc]);
fprintf("\n");
disp(' Kgc Fic');disp([Kgc,Finc]);
disp('Prenos integralnog kompenzatora
Cic(s)=');
C
disp('Prenos kompenzovanog sistema Gc(s)=');
Gc2
else
fprintf("\n");
disp('Integralni kompenzator nije potreban');
end
```

## Glava 6.: Sinteza linearnih SAU

$$\begin{array}{cc} K_{gc} & F_{ic} \\ 5 & -185.69 \end{array}$$

Prenos integralnog kompenzatora  $Cic(s) =$

Transfer function:

$$0.2997 s + 0.1792$$

$$\frac{s + 0.1792}{s + 0.1792}$$

Prenos kompenzovanog sistema  $Gc(s) =$

Transfer function:

$$\frac{s + 0.5979}{s + 0.5979}$$

$$s^4 + 13.18 s^3 + 54.33 s^2 + 69.32 s + 10.75$$

**Napomena:** Program za projektovanje integralnog kompenzatora zahteva ili tačno poznavanje  $\omega_n$  koje definiše tačku  $s_1$  na geometrijskom mestu korena nekompenzovanog sistema ili zadavanje  $\omega_n$  sa nešto manjom ili čak značajno manjom vrednošću od procenjene vrednosti tačke  $\omega_n$  u preseku **zeta-prave** i GMK. Tada je  $M_1=1$ .

### Primer 6.5a MATLAB

U ovom primeru sistem ima astatizam prvog reda. Osim toga, potražićemo rešenja za dve vrednosti delta: 0.139 i 0.1, koji korespondiraju uglovima  $7,96^\circ$  i  $5,73^\circ$ , respektivno. U rezultatu će se jasno videti da se približno za isti takav ugao menja i fazni ugao od  $-180^\circ$  u posmatranom dominantnom polu.

```
>> s=tf('s');Num=1;Den=s*(s+1)*(s+2);
zeta=0.5;wn=0.67;Kgz=5;M1=-1;N=1;D=2*1;delta=0.139;
intcomp(Num,Den,zeta,wn,Kgz,M1,N,D,delta)
```

Dominantni pol sistema je  $S_{1c} =$   
 $-0.335 + 0.58024i$

Parametri sistema su:

$$\begin{array}{ccc} a & b & K_c \\ 0.011176 & 0.10015 & 1.1159 \\ K_{gc} & F_{ic} \\ 5 & -187.45 \end{array}$$

Prenos integralnog kompenzatora  $Cic(s) =$

Transfer function:

$$0.1116 s + 0.01118$$

$$\frac{s + 0.01118}{s + 0.01118}$$

Prenos kompenzovanog sistema  $Gc(s) =$

Transfer function:

$$\frac{s + 0.1001}{s + 0.1001}$$

$$s^4 + 3.011 s^3 + 2.034 s^2 + 0.02235 s$$

Dominantni pol sistema je  $S_{1c} =$   
 $-0.335 + 0.58024i$

Parametri sistema su:

$$\begin{array}{ccc} a & b & K_c \\ 0.0080527 & 0.073373 & 1.0975 \\ K_{gc} & F_{ic} \\ 5 & -185.45 \end{array}$$

Prenos integralnog kompenzatora  $Cic(s) =$

Transfer function:

$$0.1097 s + 0.008053$$

$$\frac{s + 0.008053}{s + 0.008053}$$

Prenos kompenzovanog sistema  $Gc(s) =$

Transfer function:

$$\frac{s + 0.07337}{s + 0.07337}$$

$$s^4 + 3.008 s^3 + 2.024 s^2 + 0.01611 s$$

### Primer 6.5b MATLAB

```
s=tf('s');Num=(s+1.684);Den=s*(s+2)*(s+8)*(s+14.849);
zeta=0.6;wn=5;Kgz=2.5;M1=-1;N=1.684;D=16*14.849;delta=0.139;
>>intcomp(Num,Den,zeta,wn,Kgz,M1,N,D,delta)
Integralni kompenzator nije potreban
```

Kombinacijom navedenih programskih paketa za diferencijalni i integralni kompenzator može se dobiti opšti program za projektovanje kompenzatora.

## 6.4 Metoda kaskadne kompenzacije

U inženjerskoj praksi, naročito u sistemima regulacije elektromotornih pogona i tehnoloških procesa, veoma često se primenjuje *metoda kaskadne kompenzacije*, u čijoj osnovi su založeni linearni zakoni upravljanja P, PD, PI i PID tipa. Ti zakoni upravljanja su implementirani u industrijske linearne regulatore u analognom ili u, sve prisutnjem, digitalnom izvođenju. Stoga ćemo se zadržati na osnovnim postavkama ove metode, koja je veoma bliska metodi projektovanja kompenzatora postupkom skraćivanja. Postoje dve varijante metode kaskadne kompenzacije, koje su poznate pod nazivima: *metoda tehničkog optimuma* i *metoda simetričnog optimuma*.

### 6.4.1 Metoda tehničkog optimuma

Neka je objekat upravljanja u širem smislu (proces, postrojenje) opisan funkcijom prenosa

$$W_o(s) = \frac{K_o}{\prod_{i=1}^n (1+sT_i)} e^{-s\tau_o}. \quad (6.42)$$

Kao što se vidi, proces, pored pojačavačkog elementa pojačanja  $K_o$ , sadrži  $n$  inercijalnih elemenata prvog reda, čije su vremenske konstante  $T_i$ , i element transportnog kašnjenja s kašnjenjem  $\tau_o$ . Obratimo pažnju da u funkciji prenosa objekta nema astatizma i nema konačnih nula. Sve vremenske konstante inercijalnih elemenata možemo klasifikovati na velike, srednje i male. Velike i srednje vremenske konstante definišu nisko- i srednje-frekvencijski deo amplitudnofrekvencijskih karakteristika, a male - visoko-frekvencijski deo. Prema tome, velike i srednje vremenske konstante definišu brzinu reagovanja sistema, a male imaju neznatan uticaj na ponašanje sistema. Mi želimo da sistem upravljamo tako da mu greška u ustaljenom stanju na odskočni ulazni signal bude jednaka nuli i da pri tome ima potrebnu brzinu delovanja. Tražena tačnost u ustaljenom stanju može se postići uvođenjem astatizma u sistem, a brzina regulacije može se obezbediti kompenzacijom uticaja velikih, a možda i srednjih vremenskih konstanti. Kompenzaciju ćemo ostvariti metodom skraćivanja, jer su, po pretpostavci, prisutni samo inercijalni elementi koji su stabilni. Prema tome, funkcija prenosa regulatora biće u obliku

$$W_r(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^k (1+sT_i)}{K_o s}, \quad (6.43)$$

gde je  $k$ -broj velikih i srednjih vremenskih konstanti koje podležu kompenzaciji (skraćivanju). Stoga će povratni prenos sistema biti

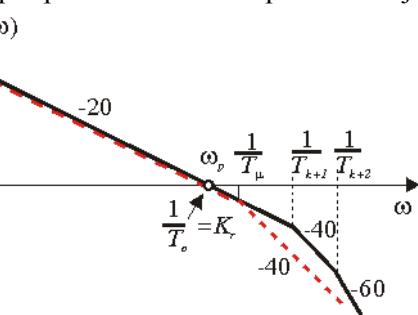
$$W_p(s) = \frac{K_r}{s e^{\tau s} \prod_{i=k+1}^n (1+sT_i)}, \quad (6.44)$$

jer je skraćivanjem eliminisano prvih  $k$  vremenskih konstanti.

Neka su struktura i parametri regulatora izabrani tako da je vremenska konstanta integralnog delovanja  $T_i = 1 / K_r$  veća od najveće vremenske konstante nekompenzovanog dela sistema (od najveće vremenske konstante iz kategorije malih). Tada je Bodeov dijagram posmatranog sistema kao na sl. 6.16. Osim toga, prepostavimo da transportno kašnjenje  $\tau_o$  nije dominantno. Izraz za fazno-frekvencijsku karakteristiku je

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau_o - \sum_{i=k+1}^n \arctg \omega T_i.$$

Poznato je da je fazni doprinos svakog inercijalnog elementa na njegovoj prelomnoj frekvenciji jednak  $-\pi/4$ . Prema tome, s obzirom na to da je presečna frekvencija pojačanja posmatranog sistema  $\omega_p = K_r$ , tada je doprinos inercijalnih elemenata, svakog ponaosob, u apsolutnom iznosu manji od  $\pi/4$  pa se  $\arctg(\cdot)$  može zameniti argumentom, te se poslednji izraz, za presečnu frekvenciju pojačanja  $\omega_p$  može napisati u obliku



Sl. 6.16. Bodeov dijagram sistema

jalnih elemenata, svakog ponaosob, u apsolutnom iznosu manji od  $\pi/4$  pa se  $\arctg(\cdot)$  može zameniti argumentom, te se poslednji izraz, za presečnu frekvenciju pojačanja  $\omega_p$  može napisati u obliku

$$\varphi(\omega_p) = -\frac{\pi}{2} - \omega_p \tau_o - \sum_{i=k+1}^n \omega_p T_i, \quad (6.45)$$

a pretek faze sistema biće

$$\phi_{pf} = \pi + \varphi(\omega_p) = \frac{\pi}{2} - (\tau_o + \sum_{i=k+1}^n T_i) \omega_p. \quad (6.46)$$

Iz poslednjeg izraza se vidi, da se ceo sistem može posmatrati kao sistem koji se sastoji iz tri elementa: integracionog, pojačavačkog s koeficijentom pojačanja  $K_r$ , i inercijalnog elementa čija je ekvivalentna vremenska konstanta

$$T_\mu = \tau_o + \sum_{i=k+1}^n T_i. \quad (6.47)$$

Bodeov dijagram za takav sistem prikazan je isprekidanim linijom na sl. 6.16.

Ova razmatranja nam daju za pravo da povratni prenos sistema s regulatorom možemo aproksimirati izrazom

$$W_p(s) = \frac{K_r}{s(1+sT_\mu)} = \frac{1}{sT_i(1+sT_\mu)}. \quad (6.48)$$

Stoga će spregnuti prenos sistema biti

$$W_s(s) = \frac{1}{s^2 T_i T_\mu + sT_i + 1}. \quad (6.49)$$

Na taj način dobili smo funkciju prenosa oscilatornog elementa drugog reda, s jednim podešivim parametrom  $T_i$ , kojim možemo uticati na brzinu reagovanja i

tok prelaznog procesa sistema i, u krajnjem slučaju, možemo optimalizovati sistem u pogledu brzine regulacije.

Kao što je ranije istaknuto (videti primer 5.7.1, str. 162), oscilatorni element drugog reda, čija je funkcija prenosa data u obliku

$$W_s(s) = \frac{1}{s^2 T^2 + 2\zeta Ts + 1}, \quad (6.50)$$

optimalnost po brzini postiže ako je  $\zeta = \sqrt{2}/2$ . Upoređujući (6.49) i (6.50) nalazimo za (6.49) da je

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T_\mu}}. \quad (6.51)$$

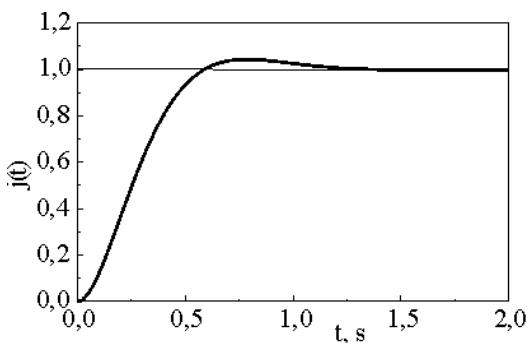
Prema tome, naš sistem biće optimalan po brzini, ako se integralna vremenska konstanta  $T_i$  izabere u skladu s relacijom

$$T_i = 2T_\mu. \quad (6.52)$$

Pri tome, vreme regulacije biće  $4,7T_\mu$ , preskok manji od 5%.

Ovaj način projektovanja dobio je naziv *metoda tehničkog optimuma*.

**Primer 6.6.** Projektovati regulator za sistem čiji objekat ima funkciju prenosa.



Sl. 6.17. Odskočni odziv projektovanog sistema.

$$W_o(s) = \frac{16K}{(s+2)(s+8)}.$$

Napišimo funkciju prenosa objekta u obliku

$$\frac{K}{(1+0,5s)(1+0,125s)}.$$

Ovde imamo samo dve vremenske konstante: 0,5 s i 0,125 s. Kompenzovaćemo veću vremensku konstantu, a manju ćemo smatrati nekompenzovanom, tj.  $T_\mu = 0,125$  s. Stoga će prenos kompenzatora (regulatora) biti

$$W_r(s) = \frac{1+0,5s}{KT_i s} = \frac{1+0,5s}{K2T_\mu s} = \frac{1+0,5s}{0,25Ks} = \frac{2}{K} + \frac{4}{Ks}.$$

Prema tome, potreban je PI regulator. Povratni prenos sistema je

$$W_p(s) = \frac{4}{s(s+0,125s)}.$$

Na sl. 6.17 dat je odskočni odziv projektovanog sistema, iz koga se vidi da su ispunjeni TU u skladu sa zahtevom date metode.

U prethodnom primeru pokazana je jednostavnost metode na primeru sistema drugog reda, gde je kompenzovana jedna velika vremenska konstanta.

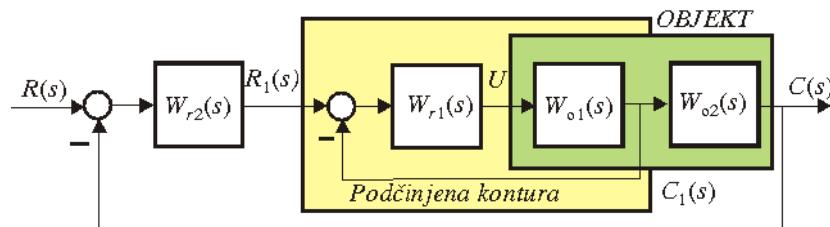
Po prilazu ovaj način je sličan ranije pokazanom postupku skraćivanja. Ako u sistemu već postoji astatizam i ako su sve, osim jedne, vremenske konstante

male, tada je potrebno primeniti samo P-regulator. Ako je, pak, potrebno kompenzovati i jednu vremensku konstantu, tada je potrebno primeniti diferencijalni kompenzator, pri čemu njegov pol  $b$  treba izabrati tako da uneta vremenska konstanta  $1/b$  pripadne kategoriji malih vremenskih konstanti ili primeniti PD regulator. U slučaju da sistem nema astatizam i da treba kompenzovati dve vremenske konstante tada treba primeniti PID regulator.

Dalje povećanje broja vremenskih konstanti koje treba kompenzovati nije moguće iz razloga nemogućnosti realizacije diferencijala drugog i višeg reda. Zbog toga se, za primenu opisane metode, primenjuje metoda kaskadne kompenzacije s nadređenim, odnosno podređenim konturama.

#### 6.4.2 Metoda kaskadne kompenzacije

Neka objekat poseduje tri vremenske konstante koje možemo svrstati u srednje i velike, a koje treba kompenzovati primenom regulatora. Osim toga, neka je objekat takav da, osim osnovnog (glavnog) izlaza koji se meri, postoji još jedan merljiv izlaz takav da razdvaja objekat upravljanja na dva dela, od kojih prvi ima dve velike (srednje) vremenske konstante, a drugi - jednu veliku (srednju) vremensku konstantu, ili obrnuto. Tada se, najpre, prema opisanom postupku, projektuje regulator za prvi, po redosledu kretanja signala, deo objekta. Zatim se objektom koji treba regulisati smatra već projektovani deo spregnutog podsistema, koji postaje podčinjeni podsistem, jer njemu regulator spoljašnje, nadredene konture daje referentni signal. Konfiguracija opisanog sistema prikazana je na sl. 6.18.



Sl. 6.18. Sistem s kaskadnom kompenzacijom.

Neka prvi deo objekta na sl. 6.18 ima dve vremenske konstante ( $T_1$  i  $T_2$ ) koje ocenjujemo kao velike i/ili srednje, tj.

$$W_{o1}(s) = \frac{K_{o1}}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_{\mu 1})}, \quad (6.53)$$

i neka je drugi deo objekta oblika

$$W_{o2}(s) = \frac{K_{o2}}{(1+sT_3)}. \quad (6.54)$$

Tada će regulator za podčinjenu konturu biti PID tipa, s funkcijom prenosa

$$W_{r1}(s) = \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{K_{o1}T_{i1}s} = \frac{s^2T_1T_2 + s(T_1 + T_2) + 1}{k_{o1}T_{i1}s} = \frac{T_1 + T_2}{K_{o1}T_{i1}} + \frac{1}{K_{o1}T_{i1}s} + \frac{T_1T_2s}{K_{o1}T_{i1}} = K_{pr} + \frac{1}{sT_i} + T_d s. \quad (6.55)$$

Vremensku konstantu integralnog delovanja  $T_{i1}$  biramo po metodi tehničkog optimuma, tj.  $T_{i1} = 2T_{\mu 1}$ , što daje funkciju spregnutog prenosa podčinjene konture

$$W_{s1}(s) = \frac{1}{s^2 2T_{\mu 1}^2 + 2T_{\mu 1}s + 1} = \frac{1}{2T_{\mu 1}s(sT_{\mu 1} + 1) + 1}. \quad (6.56)$$

Podčinjena kontura je sada oscilatorni element drugog reda s optimalnim koeficijentom relativnog prigušenja. Ta kontura ima dosta veliki stepen prigušenja i može se, s dovoljnom tačnošću, aproksimirati s dva inercijalna elementa s ukupnom vremenskom konstantom  $2T_{\mu 1}$ . Pretpostavimo da je ta ekvivalentna vremenska konstanta mnogo manja od vremenske konstante drugog dela objekta  $T_{o3}$  (moguće je i obrnuti slučaj). Sada se bira tip i parametri regulatora spoljašnje, nadređene konture. Prema pretpostavci, to će biti PI regulator koji će imati funkciju prenosa

$$W_{r2}(s) = \frac{1+sT_3}{K_{o2}T_{i2}s}. \quad (6.57)$$

Sada će povratni prenos sistema biti

$$W_p(s) = \frac{1}{sT_{i2}(s^2 2T_{\mu 1}^2 + 2T_{\mu 1}s + 1)}. \quad (6.58)$$

Birajući  $T_{i2}$  u skladu s tehničkim optimumom imaćemo

$$T_{i2} = 2(2T_{\mu 1}) = 4T_{\mu}, \quad (6.59)$$

što daje funkciju prenosa spregnutog sistema oblika

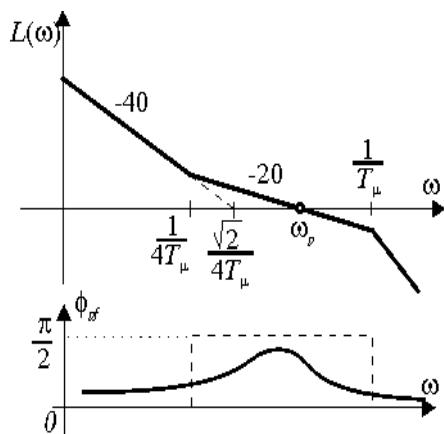
$$W_s(s) = \frac{1}{4sT_{\mu 1}(s^2 2T_{\mu 1}^2 + 2T_{\mu 1}s + 1) + 1}. \quad (6.60)$$

Opisani princip projektovanja se može primenjivati i za objekte koji se mogu dekomponovati na tri ili više podobjekta. Međutim, nije preporučljivo optimalizovati više od tri konture, jer se s povećanjem broja kontura proces regulacije suviše usporava. Kao što je rečeno, metoda je našla najveću primenu u regulaciji elektromotornih pogona, gde se javljaju najviše tri konture koje treba optimalizovati: kontura regulacije struje, kontura regulacije brzine i kontura regulacije pozicije. Pored toga, treba istaći da nije obavezno po svaku cenu birati odnos  $T_r/T_{\mu}=2$ . Taj odnos može se kretati od 1-4. Za manje odnose dobijaju se procesi regulacije s većim preskokom, dok se za veće odnose regulacioni proces usporava.

### 6.4.3 Metoda simetričnog optimuma

Metoda tehničkog optimuma, pored očigledne jednostavnosti i dobre kontrole dobijenih karakteristika, ima jedan nedostatak - sporost regulacionog procesa s porastom broja kontura i, samim tim, povećanje dinamičke greške. U slučaju kada je potrebno smanjenje dinamičke greške, primenjuje se druga metoda sinteze, koja je dobila naziv *metoda simetričnog optimuma*. U ovoj metodi teži se da funkcija povratnog prenosa konture s regulatorom poprimi oblik

$$W_p(s) = \frac{1+4T_\mu s}{4T_\mu s} \frac{1}{2T_\mu s(T_\mu s + 1)}. \quad (6.61)$$



Sl. 6.19. Bodeovi dijagrami za sistem projektovan simetričnim optimumom.

Bodeov dijagram takve konture ima izgled kao na sl. 6.19.

Kao što se vidi, dijagram preteka faze je simetričan u odnosu na presečnu frekvenciju pojačanja, zbog čega je metoda i dobila navedeni naziv. Iz Bodeovog dijagraama se vidi da, u oblasti srednjih i visokih frekvencija, metoda tehničkog i metoda simetričnog optimuma imaju iste osobine. Međutim, u oblasti nižih frekvencija simetrični optimum ima veće pojačanje, pa samim tim i veću dinamičku tačnost, ali i povećan preskok u procesu regulacije.

**Primer 6.7:** Izvršićemo sintezu sistema na osnovu metode simetričnog optimuma za regulaciju objekta iz prethodnog primera.

Prenos objekta je  $\frac{K}{(1+0,5s)(1+0,125s)}$ . Da bi smo dobili povratni prenos oblika

(6.61) izvršićemo, najpre, aproksimaciju datog objekta u oblasti srednjih frekvencija sa

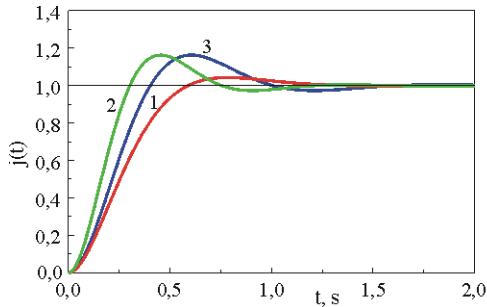
$$W_o(s) \approx \frac{K}{0,5s(1+0,125s)} = \frac{K}{4T_\mu s(1+T_\mu s)}. \quad (6.62)$$

Na osnovu (6.61) i (6.62) vidi se da je potrebno primeniti regulator funkcije prenosa

$$W_r(s) = \frac{1+4T_\mu s}{2T_\mu K_s}.$$

Na sl. 6.20 prikazan je odskočni odziv ovog sistema za izračunati u ovom primeru regulator (kriva 3). Na istoj slici je, radi upoređenja, prikazan odskočni odziv sistema iz prethodnog primera, gde je za isti objekat bio projektovan regulator metodom tehničkog optimuma (kriva 1). Sa slike se vidi da je sistem projektovan na simetrični optimum brži ali ima i veći preskok. Na toj slici je dat i odziv sistema sa regulatorom podešenim na tehnički optimum kome je pojačanje udvostručeno (kriva 2).

Možemo zaključiti da je ovaj prilaz uprošćavanja funkcije prenosa objekta, svodeći je na funkciju prenosa s astatizmom, doveo do veoma jednostavnog



Sl. 6.20. Odskočni odzivi sistema s tehničkim (1) i simetričnim optimumom: (3)-za nominalni regulator, (2) za regulator podešen na tehnički optimum s dvostruko većim pojačanjem.

projektovanja regulatora PI tipa.

U literaturi se preporučuje da se u zavisnosti od odnosa kompenzovane ( $T$ ) i nekompenzovane ( $T_\mu$ ) vremenske konstante primjenjuje jedan ili drugi postupak. Ako je  $T/T_\mu \leq 4$  treba primjenjivati tehnički optimum, a u suprotnom slučaju - simetrični optimum.

#### 6.4.4 Smitov prediktor

Pri razmatranju metode tehničkog optimuma u funkciji prenosa objekta bilo je prisutno transportno kašnjenje. Pretpostavljeno je da je to kašnjenje malo, reda malih vremenskih konstanti. Međutim, u praksi se mogu sresti objekti koji imaju značajna transportna kašnjenja, reda najvećih vremenskih konstanti objekta, pa čak i većih od najveće vremenske konstante objekta. U tom slučaju, prethodno opisane metode projektovanja sistema mogu se koristiti uz izvesne modifikacije. Naime, pretpostavimo da je objekat dat relacijom (6.42)

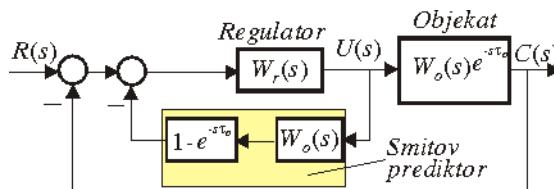
$$W_o(s) = \frac{K_o}{\prod_{i=1}^n (1+sT_i)} e^{-s\tau_o},$$

Privremeno apstrahujući transporntno kašnjenje, metodom tehničkog optimuma, pretpostavljajući da imamo samo dve velike ili srednje vremenske konstante, dobićemo funkciju povratnog prenosa sistema u obliku (6.48). Vraćajući sada transportno kašnjenje, povratni prenos sistema postaje

$$W_p(s) = \frac{1}{sT_i(1+sT_\mu)} e^{-s\tau_o}. \quad (6.63)$$

Karakteristična jednačina sistema biće

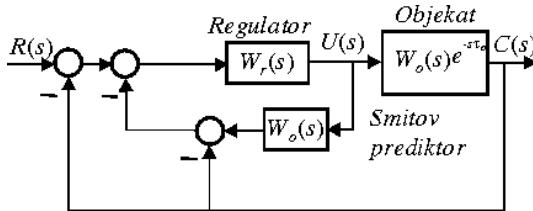
$$s^2 T_i T_\mu + sT_i + e^{-s\tau_o} = 0. \quad (6.64)$$



Sl. 6.21. Sistem sa Smitovim prediktorom  
literaturi dobio naziv Smitov prediktor.

Ona će, pri dovoljno velikim  $\tau_o$ , imati desne korene i sistem će postati nestabilan. Smit (Smith) [6] je došao na ideju da eliminiše transportno kašnjenje iz karakteristične jednačine, uvodeći kompenzator transportnog kašnjenjenja koji je u

## Glava 6.: Sinteza linearnih SAU



Sl. 6.22. Transformisana šema sa Smitovim prediktorom.

Sada je funkcija prenosa regulatora sa Smitovim prediktorom

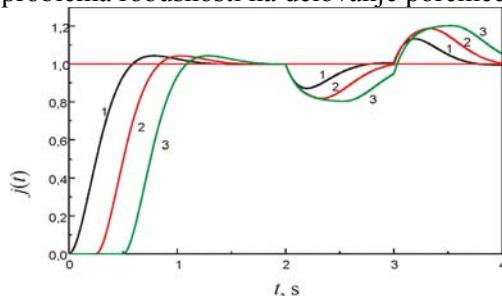
$$W_{re}(s) = \frac{W_r(s)}{1 + W_r(s)W_o(s)(1 - e^{-s\tau_o})}. \quad (6.65)$$

Spregnuti prenos sistema je

$$W_s(s) = \frac{W_r(s)W_o(s)}{1 + W_r(s)W_o(s)} e^{-s\tau_o}. \quad (6.66)$$

Iz ovog izraza se vidi, da u imeniku spregnutog prenosa nema transportnog kašnjenja pa, prema tome, ono ne utiče na stabilnost sistema. Sistem s transportnim kašnjenjem imaće po formi iste odzive kao i sistem bez kašnjenja, jedino će oni biti zakašnjeni za iznos transportnog kašnjenja. Na taj način, omogućava se primena ranije datih metoda i u slučaju objekata sa značajnim transportnim kašnjenjima.

Razmotrimo još neke osobine sistema sa Smitovim prediktorom. Rearanžirajmo strukturnu blok-šemu sa sl. 6.21 kao na sl. 6.22. Što se tiče referentnog ulaza ove dve strukture su identične. Međutim, lako se uočava da se osnovna povratna sprega u sistemu na sl. 6.22 anulira pa se sistem svodi na povratnu spregu samo preko modela objekta. To implicira da sistem sa Smitovim prediktorom ima jedan suštinski nedostatak - nije robustan na delovanje poremećaja na objektu. On veoma sporo eliminiše uticaj poremećaja. Zbog toga se osnovna šema Smitovog prediktora preporučuje za sisteme sa slabim premećajima. Postoje brojna istraživanja i modifikacije Smitovog prediktora u cilju ublaženja problema robustnosti na delovanje poremećaja.



Sl. 6.23. Odziv sistema iz primera 6.8 za različite vrednosti transportnog kašnjenja: 1-bez kašnjenja, 2-sa  $\tau_o=0,25$  s, 3-  $\tau_o=0,5$  s, pri delovanju opterećenja  $f(t) = -0,2h(t-2)+0,2h(t-3)$ .

Na sl. 6.21 prikazana je struktturna blok-šema sistema upravljanja sa Smitovim prediktorom. Sa slike se vidi da se Smitov prediktor sastoji iz modela objekta s transportnim kašnjnjem i bez transportnog kašnjnenja, koji se vezuju paralelno i obrazuju lokalnu povratnu spregu

Sada je funkcija prenosa regulatora sa Smitovim prediktorom

$$W_{re}(s) = \frac{W_r(s)}{1 + W_r(s)W_o(s)(1 - e^{-s\tau_o})}. \quad (6.65)$$

Spregnuti prenos sistema je

$$W_s(s) = \frac{W_r(s)W_o(s)}{1 + W_r(s)W_o(s)} e^{-s\tau_o}. \quad (6.66)$$

**Primer 6.8.** Neka objekat ima funkciju prenosa po upravljačkom ii po poremećajnom kanalu, respektivno:

$$W_{ou}(s) = \frac{1}{(1 + 0,5s)(1 + 0,125s)} e^{-s\tau_o},$$

$$W_{of}(s) = \frac{1}{(1 + 0,5s)};$$

$$\tau_o^1 = 0,25 \text{ s}; \tau_o^2 = 0,5 \text{ s}.$$

Projektovati za ovaj objekat regulator koristeći metodu tehničkog optimuma i Smitov prediktor.

Za dati objekat bez transportnog kašnjenja već je projektovan regulator koji je PI tipa, čiji je prenos

$$W_r(s) = 2 + \frac{4}{s},$$

a njegov odziv je dat na sl. 6.16. Simulacijom na računaru sistema sa Smitovim prediktorom i opterećenjem dobijeni su rezultati kao na sl. 6.23.

Uvodenjem Smitovog prediktora izašli smo iz domena proste regulacione konture i ušli u oblast paralelne kompenzacije.

## LITERATURA

- [1] Бесекерски В. А., Попов, Е. П.: **Теория систем автоматического управления**, «Наука», Москва, 1972.
- [2] Stojić, M. R.: **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, «Nauka», Beograd, 1996.
- [3] Цыпкин, Я. З.: **Основы теории автоматических систем**, «Наука», Москва, 1977.
- [4] Gupta, S. C., Hasdorff, L.: **Fundamental of Automatic Control**, Jhon Wiley and Sons Inc., New York, 1970.
- [5] Meerov, M. B.: **Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности**, «Наука», Москва, 1967.
- [6] Смит, О. Дж.: **Автоматическое регулирование**, «Физматгиз», Москва, 1962.
- [7] Чиликин, М. Г., Ключев, Б. И., Сандлер, А. С.: **Теория автоматизированного электропривода**, «Энергия», 1979.
- [8] Попков, Л. С.: **Следящие системы**, «Высшая школа», Москва 1963.
- [9] Дел Торо, В., Паркер, С. Р.: **Принципы проектирования систем автоматического управления**, «Машиностроение», Москва, 1963.
- [10] Арендт, В. Р., Сэвент, К. Дж.: **Практика следящих систем**, «Госэнергоиздат», Москва, 1962.
- [11] Gupta, S. C., Hasdorff, L.: **Fundamental of Automatic Control**, Jhon Wiley and Sons, Inc., New York, 1970.
- [12] Milosavljević, Č.: *Analitički postupak određivanja parametara za sintezu diferencijalnog kaskadnog kompenzatora*, ETAN' 80, Priština, str. III.59-65.
- [13] Milosavljević, Č.: *Projektovanje SAR pomoći računara: sinteza kaskadnih kompenzatora*, ETAN' 88, Sarajevo, str. VII.229-236.
- [14] Ротач, В.: **Расчет настройки промышленных автоматических систем регулирования**, Госэнергоиздат, Москва, 1961.

## Pitanja za samoproveru

1. Projektovanje sistema započinje izradom \_\_\_\_\_ zadatka i definisanjem \_\_\_\_\_ uslova.
  2. Najbitniji deo sistema je \_\_\_\_\_ upravljanja.
  3. Tehnički uslovi za projektovanje sistema mogu se zadavati u \_\_\_\_\_ ili u \_\_\_\_\_ domenu ili kombinovano.
  4. Projektovanje sistema počinje formiranjem \_\_\_\_\_ modela \_\_\_\_\_ upravljanja i izborom \_\_\_\_\_ sistema.
  5. U praksi se najčešće koriste sledeće upravljačke strukture: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
  6. Osnovna struktura sadrži dva bloka i to: \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
  7. Elementi sistema koji se mogu fizički realizovati imaju funkciju prenosa takvu da je stepen polinoma u brojoci \_\_\_\_\_ stepenu polinoma u imeniocu.
  8. Transportno kašnjenje se \_\_\_\_\_ eliminisati iz sistema.
  9. Pod zakonom upravljanja se podrazumeva funkcionalna veze između \_\_\_\_\_.
  10. Koriste se sledeći linearni zakoni upravljanja: proporcionalni, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
  11. Za korekciju karakteristika sistema koriste se \_\_\_\_\_.
  12. Za korekciju dinamičkih osobina sistema koristi se \_\_\_\_\_.
  13. Za korekciju statičkih osobina sistema koristi se \_\_\_\_\_.
  14. Za korekciju kako dinamičkih tako i statičkih osobina sistema koristi se \_\_\_\_\_.
  15. Funkcija prenosa diferencijalnog kompenzatora je oblika \_\_\_\_\_, a može se najjednostavnije realizovati kao pasivni četvoropol čija je šema prikazana na sledećoj slici:
  16. Funkcija prenosa integralnog kompenzatora je oblika \_\_\_\_\_, a može se najjednostavnije realizovati kao pasivni četvoropol čija je šema prikazana na sledećoj slici:

- 
17. Funkcija prenosa diferencijalno-integralnog kompenzatora je oblika \_\_\_\_\_, a može se najjednostavnije realizovati kao pasivni četvoropol čija je šema prikazana na slici.
18. Projektovanje diferencijalnog kompenzatora se zasniva na osnovnom zahtevu da \_\_\_\_\_ sistema prolazi kroz zadatu tačku u s-ravni koja predstavlja dominantni \_\_\_\_\_ funkcije \_\_\_\_\_ prenosa sistema.
19. Dominantni pol funkcije \_\_\_\_\_ prenosa sistema se zadaje koeficijentom relativnog prigušenja i prirodnom, neprigušenom frekvencijom oscilovanja izrazom  $s_1 = \dots$ .
20. Prava koja polazi iz ishodišta s-ravni i prolazi kroz dominantni pol  $s_1$  naziva se \_\_\_\_\_ i ona zaklapa sa pozitivnim delom realne ose ugao  $\Psi = \dots$ .
21. Fazni ugao sistema u dominantnom polu  $s_1 (\Phi(s_1))$  određuje se kao razlika sume uglova vektora povučenih iz \_\_\_\_\_ u dominantni pol i sume uglova vektora povučenih iz \_\_\_\_\_ u dominantni pol.
22. Diferencijalni kompenzator se koristi kada je fazni ugao \_\_\_\_\_ prenosa sistema u dominantnom polu \_\_\_\_\_.
23. Fazni ugao ( $\lambda$ ) koji treba da unese diferencijalni kompenzator određuje se iz uslova \_\_\_\_\_.
24. Broj čelija diferencijalnog kompenzatora ( $N$ ) određuje se po formuli \_\_\_\_\_.
25. Nula (a) i pol (b) diferencijalnog kompenzatora određuju se po formuli:  
 $(a,b) = \dots$
26. Pri projektovanju integralnog kompenzatora njegova nula (b) i pol (a) moraju biti u području \_\_\_\_\_ brojeva, jer je neophodno ostvariti što \_\_\_\_\_ odnos, a što \_\_\_\_\_ fazni pomak.
27. Nula (b) integralnog kompenzatora se dobija tako što se u odnosu na  $\zeta$ -pravu, iz tačke  $s_1$  povuče pravac pod uglom \_\_\_\_\_. Njegov presek s \_\_\_\_\_ daje nulu kompenzatora.
28. Pol (a) integralnog kompenzatora nalazi se između nule i koordinatnog početka ali se najpre privremeno smešta u \_\_\_\_\_.
29. Posle određivanja pojačanja sistema u dominantnom polu  $s_1$  sa polom kompenzatora privremeno smeštenim u \_\_\_\_\_, stvarni položaj pola se određuje po formuli \_\_\_\_\_.

## Glava 6.: Sinteza linearnih SAU

30. Osnovna ideja metode skraćivanja pri projektovanju diferencijalnog kompenzatora je da se eliminiše \_\_\_\_\_ unošenjem isto takve \_\_\_\_\_.
31. Pol diferencijalnog kompenzatora u metodi skraćivanja određuje se iz uslova da \_\_\_\_\_.
32. Projektovanje diferencijalno-integralnog kompenzatora svodi se na primenu dva postupka: postupka projektovanja \_\_\_\_\_ i postupka projektovanja \_\_\_\_\_.
33. U metodi tehničkog optimuma sve vremenske konstante sistema se dele na \_\_\_\_\_.
34. Osnovna ideja metode tehničkog optimuma je da se \_\_\_\_\_ vremenske konstante funkcije povratnog prenosa nekompenzovanog sistema kompenzuju, i da se uvođenjem \_\_\_\_\_ delovanja postigne visoka statička tačnost.
35. U metodi tehničkog optimuma srednje i male vremenske konstante se \_\_\_\_\_ i ceo sistem se svodi na sistem \_\_\_\_\_ reda.
36. U metodi tehničkog optimuma integralna vremenska konstanta ili Bodeovo pojačanje se određuju iz uslova da koeficijent relativnog prigušenja sistema ima optimalnu vrednost \_\_\_\_\_.
37. Po metodi kaskadne kompenzacije upravljeni objekat se dekomponuje na \_\_\_\_\_ vezu dva ili više podobjekata.
38. Projektovanje sistema u metodi kaskadne kompenzacije počinje projektovanjem regulatora za podobjekat \_\_\_\_\_ po redosledu prostiranja signala.
39. Nedostatak metode kaskadne kompenzacije je u povećanju \_\_\_\_\_ sistema sa \_\_\_\_\_ broja kontura.
40. Smitov prediktor se primenjuje za eliminaciju \_\_\_\_\_ iz karakteristične jednačine sistema.

## Zadaci za vežbu

Za navedene funkcije povratnog prenosa nekompenzovanih sistema i date tehničke uslove odredite tip i parametre kompenzatora.

1.  $W_p(s) = \frac{K(s+0,439)}{s(s+4)(s+0,186)}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 4,6s^{-1}$ ;  $Kv = 10s^{-1}$  . ;
2.  $W_p(s) = \frac{K}{s(s+4)}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 1,41s^{-1}$ ;  $Kv = 10s^{-1}$  .
3.  $W_p(s) = \frac{K}{s^2}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 2s^{-1}$ ;  $Kv = 10s^{-2}$  .
4.  $W_p(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)(s+8)}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 4s^{-1}$ ;  $Kv = 5s^{-1}$  .
5.  $W_p(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+6)}$ ; TU :  $\zeta = 0,6$ ;  $\omega_n = 8s^{-1}$ ;  $Kv = 50s^{-1}$  .
6.  $W_p(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$ ; TU :  $\zeta = 0,45$ ;  $\omega_n = 3,45s^{-1}$ ;  $Kv = 29s^{-1}$  .
7.  $W_p(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 3s^{-1}$ ;  $Kv = 8s^{-1}$  .
8.  $W_p(s) = \frac{K}{s(s-4)}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 4s^{-1}$ ;  $Kv = 10s^{-1}$  .
9.  $W_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ ; TU :  $\zeta = 0,5$ ;  $\omega_n = 0,67s^{-1}$ ;  $Kv = 5s^{-1}$  .
10.  $W_p(s) = \frac{K}{(s+1)^2(s+4)}$ ; TU :  $\zeta = 0,8$ ;  $\omega_n = 5s^{-1}$ ;  $Kp = 1$  .
11.  $W_p(s) = \frac{K}{(s+14)(s+20)(s+25)}$ ; TU :  $\zeta = 0,707$ ;  $\omega_n = 15s^{-1}$ ;  $Kv = 5s^{-1}$  .

Za sledeće funkcije prenosa upravljanog objekta projektovati metodom tehničkog optimuma regulator

12.  $W_o(s) = \frac{K}{(s+10)(s+20)(s+25)}$ ;
13.  $W_o(s) = \frac{K}{(s+10)(s+20)(s+25)} e^{-0.01s}$ ;
14.  $W_o(s) = W_1(s)W_2(s)$  .  

$$W_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+20)}$$
;  $W_2(s) = \frac{K}{(s+5)(s+40)(s+50)}$

**Glava 7. INŽENJERSKE METODE PODEŠAVANJA REGULATORA |221**

**7.1 Uvod**

**7.2 Podešavanje I- regulatora |222**

**7.3 Podešavanje P - regulatora |224**

**7.3.1 Objekat bez samoregulacije |224**

**7.3.2 Objekat sa samoregulacijom |225**

**7.4 Podešavanje PI - regulatora |226**

**7.4.1 Objekat bez samoregulacije |226**

**7.4.2 Objekat sa samoregulacijom |227**

**7.5 Približne metode podešavanja regulatora |228**

**7.5.1 Eksperimenti s otvorenom povratnom spregom |228**

**7.5.2 Eksperimenti sa zatvorenom povratnom spregom |230**

**Literatura |231**

## Glava 7.

# INŽENJERSKE METODE PODEŠAVANJA REGULATORA

### 7.1 Uvod

Prethodno opisane metode sinteze kompenzatora, regulatora, povratne sprege po izlazu, u cilju podešavanja spektra polova ili optimalizacije nekog kriterijuma kvaliteta, prepostavljale su da se u potpunosti poznaje matematički model objekta u širem smislu - postrojenja. U inženjerskoj praksi vrlo često se automatizacija procesa vrši "u hodu", korišćenjem standardnih industrijskih linearnih regulatora P, PI, PID tipa koji se, u cilju osavremenjivanja, ugrađuju u postojeće tehnološke procese. Pri tome, pred inženjerom automatičke postavlja se zadatak izbora optimalnih parametara podešenja regulatora. U industrijskim uslovima nije moguće sprovesti sva neophodna izučavanja ili kvalitetne eksperimente radi dobijanja detaljnog matematičkog modela procesa. Zbog toga se postavlja sledeće pitanje: *može li se i kako, pomoći relativno jednostavnih eksperimenata, koji se mogu izvesti na postrojenju, izvršiti približno optimalno podešenje parametara linearnih industrijskih regulatora P, PI i PID tipa?* Odgovor na ovo pitanje tražili su istraživači u području industrijske automatičke na samim počecima njenog razvoja. Osnovni doprinos toj problematici dali su američki istraživači Zigler i Nikols, kao i ruski istraživač Rotač [1]. U daljem izlaganju navećemo njihove prilaze. Oni se zasnivaju na pretpostavkama da objekti upravljanja (tehnološki procesi) pripadaju klasi *objekata regulacije s tipičnim dinamičkim karakteristikama*. Tipične dinamičke karakteristike objekata regulacije mogu biti zapisane u obliku:

$$W_o(s) = \frac{K_o}{1 + sT_o} e^{-s\tau_o}, \quad (7.1)$$

$$W_o(s) = \frac{K_o}{s} e^{-s\tau_o}. \quad (7.2)$$

Objekti tipa (7.1) pripadaju klasi *statičkih objekata* ili *objekata sa samoregulacijom*, dok objekti tipa (7.2) su objekti *astatičkog tipa* ili *objekti bez samoregulacije*. Ovi nazivi su posledica činjenice da je odskočni odziv prvog tipa objekta ograničena, a drugog - neograničena funkcija vremena (videti sl. 7.7, 7.8).

Za date tipove objekata, poznavajući njihove parametre ( $T_o$ ,  $\tau_o$ ,  $K_o$ ), primenom odgovarajućih postupaka sinteze, određuju se optimalni parametri podešenja linearnih industrijskih regulatora, čije su funkcije prenosa:

- za P-regulator:  $W_r(s) = K_r$ , (7.3)

- za I-regulator:  $W_r(s) = \frac{K_r}{s} = \frac{1}{sT_i}$ , (7.4)

- za PI-regulator:  $W_r(s) = K_r \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$ . (7.5)

Praksa je pokazala da se PID regulator ne može podešavati približnim metodama, pa se zbog toga on ne tretira u ovom odeljku. U narednim odeljcima 7.2-7.4 prepostavljamo da su poznati parametri modela (7.1, 7.2). U odeljku 7.5 biće razmatrani uprošćeni postupci dobijanja tih parametara.

## 7.2 Podešavanje I-regulatora

Ovaj regulator se ne primenjuje u regulaciji astatičkih objekata, jer dovodi do strukturno nestabilnih sistema. Prema tome, objekat regulacije je tipa (7.1), a regulator (7.4). Funkcija povratnog prenosa sistema je

$$W_p(s) = \frac{K_o K_r e^{-s\tau_o}}{s(1 + sT_o)}, \quad (7.6)$$

a frekvencijska funkcija povratnog prenosa je

$$W_p(j\omega) = \frac{K_o K_r e^{-j\omega\tau_o}}{j\omega(1 + j\omega T_o)}. \quad (7.7)$$

Uvodeći smenu  $\omega = \Omega / \tau_o$  dobija se

$$W_p(s) = \frac{Ke^{-j\Omega}}{j\Omega(1 + j\Omega \frac{T_o}{\tau_o})}; \quad K = K_o K_r \tau_o. \quad (7.8)$$

Postavimo tehničke uslove (TU) za kvalitet procesa regulacije ovog sistema drugog reda. S obzirom da postoji transportno kašnjenje, najpogodnije je primenjivati metode frekvencijskog domena, kao što su pokazatelj oscilatornosti  $M$  ili pretek faze  $\phi_{pf}$ . Primeničemo  $\phi_{pf}$  i rezultate iz poglavlja 4.2.3.3.4. Na osnovu definicije preteka faze sledi:

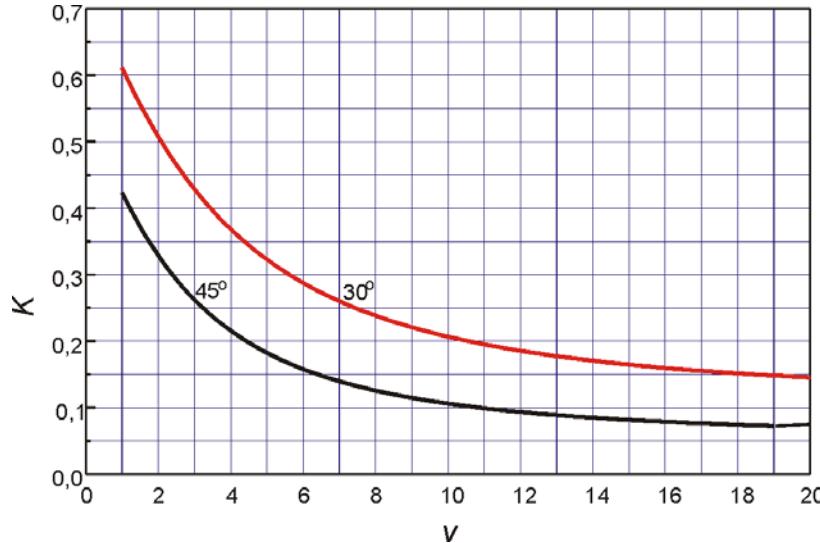
$$|W_p(j\Omega_p)| = 1 \Rightarrow K = \Omega_p \sqrt{1 + \Omega_p^2 v^2}; \quad v = \frac{T_o}{\tau_o}, \quad (7.9)$$

$$\phi_{pf} = -\frac{\pi}{2} - \Omega_p - \arctg(\Omega_p v). \quad (7.10)$$

Zadavši potreban pretek faze i odnos vremena inercijalnog i transportnog kašnjenja,  $v$ , na osnovu (7.10) nalazi se  $\Omega_p$ , a na osnovu (7.9) potrebno pojačanje povratnog prenosa  $K$ , koje će obezbititi zadati pretek faze. Na osnovu poznatog pojačanja i kašnjenja objekta, iz dobijenog  $K$  nalazi se pojačanje regulatora. S obzirom da je relacija (7.10) transcendentna, preporučuje se primena računara. Za vrednosti preteka faze  $30^\circ$  i  $45^\circ$  na sl. 7.1 dati su nomogrami za izbor pojačanja povratnog prenosa sistema u funkciji odnosa  $v$ . Prvi pretek faze obezbeđuje brži proces s većim stepenom oscilatornosti ( $\zeta$  reda 0,25) dok pretek faze od  $45^\circ$  daje  $\zeta$  reda 0,4. Na sl. 7.2 prikazani su odskočni odzivi sistema za navedene preteke faze, za dva različita odnosa  $v=1$  i  $v=5$ , a za  $\tau_o=1$  s.

Proces izbora podešenja regulatora je sledeći. Na osnovu uprošćenih metoda identifikacije odrede se parametri objekta:  $K_o$ ,  $T_o$  i  $\tau_o$ . Na osnovu odnosa  $v$  i izabrani pretek faze, iz nomograma, sl. 7.1, odredi se pojačanje  $K$ , a na osnovu njega pojačanje regulatora

$$K_r = \frac{K}{K_o \tau_o}. \quad (7.11)$$

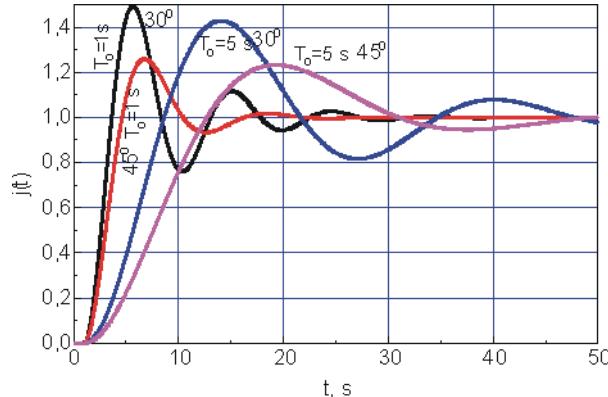


Sl. 7.1. Nomogrami za izbor pojačanja  $K$  I-regulatora u funkciji odnosa  $v = T_o / \tau_o$ , za preteke faze  $30^\circ$  i  $45^\circ$  i sistem sa statičkim objektom.

Kao primer na sl. 7.2 prikazan je rezultat simulacije sistema s pojačanjem odabranim iz nomograma za objekat okarakterisan sa:  $K_o=1$  i  $\tau_o=1$  s, za dve vremenske konstante objekta:  $T_o=1$  s i  $T_o=5$  s.

Iz rezultata simulacije se vidi da postoji dobra kontrola procesa sinteze. Sistem s pretekom faze  $30^\circ$  bolji je u smislu minimuma integrala kvadrata signala greške, ali ima značajne preskoke.

Ako se želi proces s manjim preskocima treba birati pojačanja s dijagrama za veće preteke faze. Sistem s pretekom faze od  $45^\circ$  može se smatrati najpodesnijim.



Sl. 7.2. Odskočni odziv sistema za  $\tau_o=1$  s i zadate preteke faze od  $30^\circ$  i  $45^\circ$ , za dve vrednosti vremenske konstante objekta:  $T_o=1$  s i  $T_o=5$  s i  $K_o=1$ .

### 7.3 Podešavanje P-regulatora

#### 7.3.1 Objekat bez samoregulacije

Povratni prenos sistema je

$$W_p(s) = \frac{K_r K_o e^{-s\tau_o}}{s}. \quad (7.12)$$

Frekvencijska funkcija povratnog prenosa, posle zamene  $\Omega = \omega\tau_o$ , je

$$W_p(j\Omega) = \frac{K_r K_o \tau_o e^{-j\Omega}}{j\Omega}. \quad (7.13)$$

Izraz za pretek faze je

$$\phi_{pf} = \frac{\pi}{2} - \Omega_p. \quad (7.14)$$

Pri tome, pojačanje sistema, za  $|W_p(j\omega_p)|=1$ , je

$$K = K_o K_r \tau_o = \Omega_p. \quad (7.15)$$

Za pretek faze od  $45^\circ$  je, iz (7.14),  $\Omega_p = \pi/4$ , pa je potrebno pojačanje P-regulatora

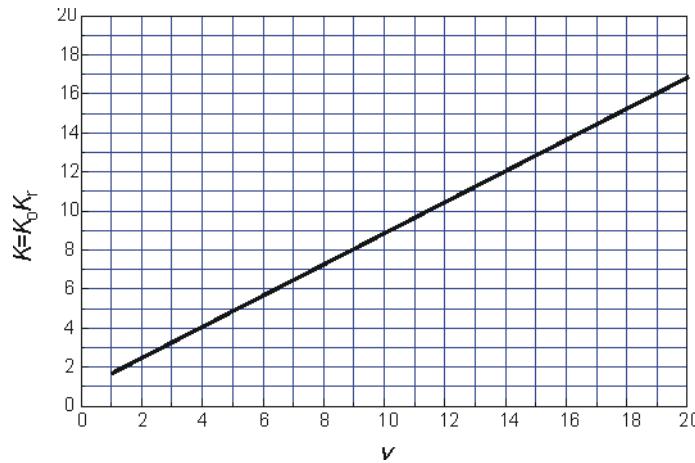
$$K_r = \frac{\pi}{4K_o \tau_o} = \frac{0,785}{K_o \tau_o}. \quad (7.16)$$

Na sl. 7.4 dat je primer odziva sistema za  $K_o=1$  i  $\tau_o=1$  s (kriva 1).

### 7.3.2 Objekat sa samoregulacijom

Frekvencijska funkcija povratnog prenosa sistema je, nakon uvođenja smene  $\Omega = \omega\tau_o$ ,

$$W_p(j\Omega) = \frac{K_o K_r e^{-j\Omega}}{1 + j\Omega v}; \quad v = \frac{T_o}{\tau_o}. \quad (7.17)$$



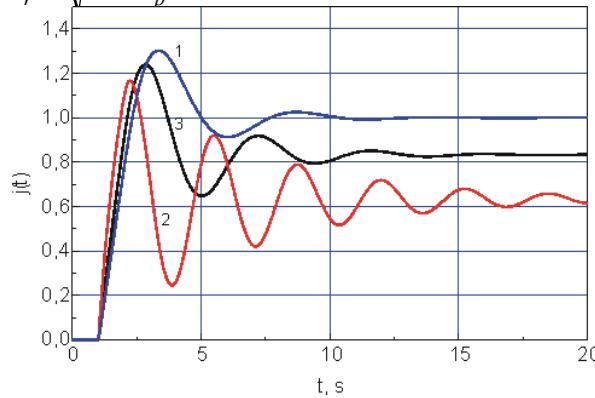
Sl. 7.3. Zavisnost koeficijenta pojačanja  $K = K_o K_r$  u funkciji odnosa  $v = T_o / \tau_o$  za staticki objekat P-regulatorom, za pretek faze od  $45^\circ$ .

Pretek faze je

$$\phi_{pf} = \pi - \Omega_p - \arctg(\Omega_p v), \quad (7.18)$$

za pojačanje

$$K = K_o K_r = \sqrt{1 + \Omega_p^2 v^2}. \quad (7.19)$$



Sl. 7.4. Odskočni odzivi sistema P-regulatorom: 1- objekat bez samoregulacije:  $K_o=1$ ,  $\tau_o=1$  s; 2, 3 - objekat sa samoregulacijom:  $K_o=1$ ,  $\tau_o=1$ , za  $T_o=1$  s i  $T_o=5$  s, respektivno.

Za zadati pretek faze se iz (7.18) nalazi  $\Omega_p$ , a za tu vrednost i poznati odnos  $v$ , iz (7.19) nalazi se pojačanje. S obzirom na to da je (7.18) transcendentna jednačina

treba je rešavati na računaru. Za pretek faze od  $45^\circ$ , na sl. 7.3 dat je nomogram za izbor pojačanja. Na osnovu nomograma, za poznati odnos  $v$  nalazi se vrednost  $K_r$ , a na osnovu nje potrebno pojačanje regulatora

$$K_r = \frac{K}{K_o} . \quad (7.20)$$

**Primer 7.1.** Kao primer, na sl. 7.4 prikazani su odskočni odzivi sistema za  $K_o=1$ ,  $\tau_o=1$  s, za  $T_i=1$  s (kriva 2) i  $T_i=5$  s (kriva 3). Iz datog primera se vidi, da sistem poseduje statičku grešku i da za mali odnos  $v$ , zbog toga što čisto transportno kašnjenje ima značajan uticaj, sistem ima izražene oscilatorne osobine

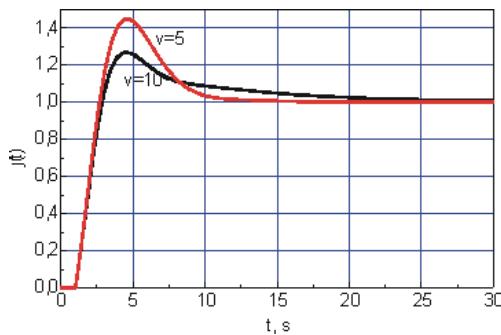
## 7.4 Podešavanje PI-regulatora

### 7.4.1 Objekat bez samoregulacije

Koristeći (7.1), (7.5) i odnos  $v$  kao ranije, frekvencijska funkcija povratnog prenosa dobija se u obliku

$$W_p(j\Omega) = \frac{K(1 + j\Omega v)}{j\Omega v} e^{-j\Omega\tau_o} . \quad (7.21)$$

Kao što se vidi, sistem je astatizma drugog reda. Nikvistova kriva će, pri malim frekvencijama, težiti negativnom delu realne ose s donje strane, ako je  $v > 1$ . Za  $v \leq 1$  sistem ne može biti stabilan. Pretek faze, kao element za ocenu kvaliteta ponašanja sistema, u ovom slučaju nije pouzdan kriterijum. Stoga je, za izbor parametara podešenja regulatora, najbolje primenjivati pokazatelj oscilatornosti  $M$  spregnutog prenosa sistema (videti odeljak 5.3.1.6). Primena metode zasnovane na  $M$ -krugovima daje sledeće relacije [1]:



Sl. 7.5. Odskočni odziv sistema astatičkim objektom ( $K_o=1$  s $^{-1}$ ,  $\tau_o=1$  s) i PI regulatorom:  
 $K_r=0,55$ ,  $T_i=5$  s i 10 s ( $v=5$  i  $v=10$ ).

### Primer 7.2.

Na sl. 7.5 prikazani su rezultati simulacije sistema čiji objekat ima jedinične parametre, za pojačanje regulatora određeno sa (7.22) i  $T_i=5$  i 10 s.

$$K_r = \frac{0,55}{K_o \tau_o} , \quad (7.22)$$

$$T_i = 5 \tau_o . \quad (7.23)$$

Njima se obezbeđuje vreme smirenja blisko optimalnom. Međutim, odziv sistema ima veliki preskok. U cilju smanjenja preskoka treba birati veće vrednosti za  $v$  u odnosu na (7.23), što, naravno, dovodi do povećanja vremena smirenja, ali sistem postaje bolji u odnosu na integral kvadrata signala greške.

#### **7.4.2 Objekat sa samoregulacijom**

Povratni prenos sistema, posle sličnih transformacija kao u prethodnim slučajevima, postaje

$$W_p(j\Omega) = \frac{K(1 + j\Omega v_r)}{j\Omega v_r} \frac{e^{-j\Omega}}{1 + j\Omega v_o}, \quad (7.24)$$

где  $\text{su: } K = K_o K_r, v_o = T_o / \tau_o, v_r = T_i / \tau_o$ .

Ovde se mogu primenjivati različiti prilazi. Jedan od njih [1] je da se za različite vrednosti parametara  $v_o$  i  $v_r$ , primenom pokazatelja oscilatornosti, putem  $M$ -krugova odrede zavisnosti  $K = f(v_o)$  i  $v_r = f(v_o)$ , koje se daju u vidu nomograma iz kojih se određuju optimalne vrednosti za  $K_r$  i  $T_i$ . Mi ćemo primeniti sledeći prilaz: integralnu vremensku konstantu regulatora izabraćemo tako da kompenzuje vremensku konstantu objekta, tj. primenićemo metodu skraćivanja. Tada povratni prenos postaje

$$W_p(j\Omega) = \frac{Ke^{-j\Omega}}{j\Omega}. \quad (7.25)$$

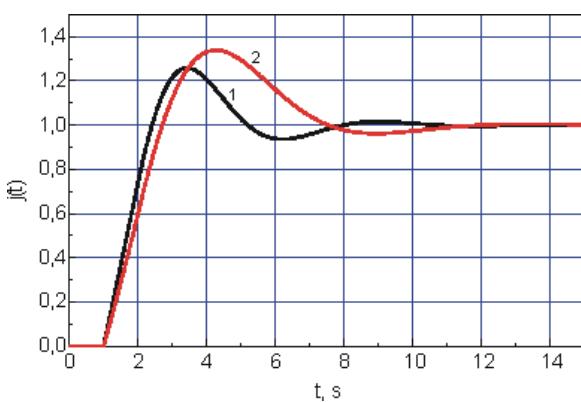
Pretek faze je:

$$\phi_{pf} = (\pi/2) - \Omega_p, \quad (7.26)$$

$$K/\Omega_p = 1. \quad (7.27)$$

Usvajajući pretek faze od  $\pi/4$  dobija se  $\Omega_p = \pi/4$ , što daje

$$K_r = \frac{\pi}{4} \frac{v_r}{K_o} = 0,785 \frac{v_r}{K_o} = \frac{0,785 T_o}{K_o \tau_o}. \quad (7.28)$$



Sl. 7.6. Odskočni odziv sistema: 1- podešen prema (7.29, 7.30) i 2- podešen prema [1] za statički objekat (7.31) s PI regulatorom.

Naknadna ispitivanja pokazuju da ovako podešen regulator obezbeđuje regulaciju blisku kriterijumu kvaliteta, određenom minimumom integrala od kvadrata signala greške. Nakon dodatnih podešavanja odredena je optimalna vrednost pojačanja

$$K_r = \frac{0,74 T_o}{K_o \tau_o} \quad (7.29)$$

pri

$$T_1 \equiv T \quad (7.30)$$

### **Primer 7.3** Dat je objekat

$$W_o(s) = \frac{10}{(1+4s)} e^{-s} \quad (7.31).$$

Odrediti parametre podešenja PI regulatora.

Na osnovu (7.29), za  $T_i = T_o = 4$  s, je  $K_r = \frac{0,74 \cdot 4}{10 \cdot 1} = 0,296$ . Za isti sistem, iz nomograma [1], str. 222, dobija se:  $K_o K_r = 2,2$ ;  $T_i / \tau_o = 2,2$ .

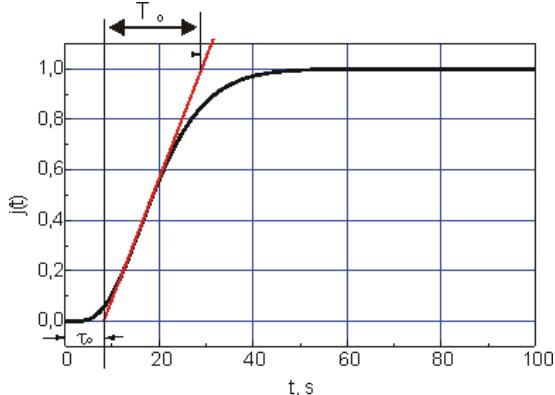
Na sl. 7.6 prikazani su uporedni rezultati iz kojih se vidi da je vreme smirenja približno isto, a da sistem podešen prema (7.29) i (7.30) ima manji preskok od sistema podešenog prema [1].

## 7.5 Približne metode podešavanja regulatora

U inženjerskoj praksi, kao što je ranije rečeno, često se ne poseduje model objekta (postrojenja). Zato se nameće potreba da se relativno jednostavnim eksperimentima, uz korišćenje raspoložive opreme, dobije za praksu upotrebljiv model objekta, na osnovu koga se mogu odrediti parametri približno optimalnog podešenja regulatora. Moguća su dva prlaza: (i) izvođenje eksperimenta u otvorenoj i (ii) izvođenje eksperimenta u zatvorenoj povratnoj spregi.

### 7.5.1 Eksperimenti s otvorenom povratnom spregom

Sistem je s regulatorom koji treba prevesti u P-regulator, tako što se integralna vremenska konstanta postavi na maksimalnu vrednost (kod PI regulatora), a diferencijalna vremenska konstanta na nulu (ako je u pitanju PID regulator). Na izlaz objekta (postrojenja) priključi se registrator (pisač) kojim se može snimiti odziv postrojenja. Raskida se povratna sprega na mestu dovođenja signala s objekta u detektor greške. Izabere se pojačanje P-regulatora tako da otvoreni sistem radi u režimu bliskom nominalnom. Zatim se, promenom komandnog signala, načini mala skokovita promena za poznati iznos. Smanjem izlaznog signala objekta dobija se odskočni signal. Tipični oblici odskočnog odziva su kao na sl. 7.7 i sl. 7.8. U prvom slučaju imamo statički objekat, a u drugom - astatički.



Sl. 7.7. Odskočni odziv statičkog objekta

$$W(s) = \frac{1}{(1 + 4s)^4}$$

Parametri se s grafika nalaze kao što je na slikama naznačeno, s tim što se pojačanje statičkog objekta dobija kao odnos vrednosti odskočnog odziva u ustaljenom stanju i veličine pobudnog signala, a pojačanje astatičkog objekta kao  $\text{tg}\alpha$ .

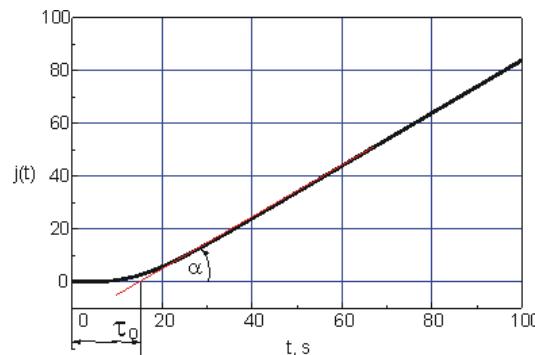
Tako, na primer, aproksimacije odziva na sl. 7.7 i sl. 7.8 su:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + 10s)} e^{-8s} \text{ - za statički objekat,}$$

$$W(s) = \frac{1.25}{s} e^{-15s} - \text{za astaticki objekat.}$$

Sada se mogu primenjivati prethodno izučene metode za određivanje približno optimalnih vrednosti parametara podešenja odgovarajućih regulatora.

Osim navedenog prilaza, u praksi se često koristi postupak [1] kojim se pobudjuju stabilne oscilacije u objektu.

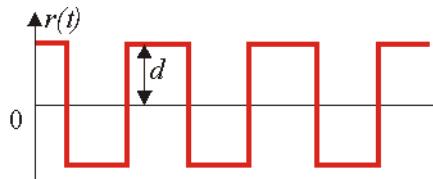


Sl. 7.8. Odskočni odziv astatickog objekta

$$W(s) = \frac{1}{s(1+4s)^3}.$$

Naime, iz prethodnog izlaganja može se uočiti da je za ponašanje sistema sa zatvorenom povratnom spregom najbitniji karakter amplitudno-fazne karakteristike povratnog prenosa u blizini presečne frekvencije faze. Polazeći od toga, za određivanje približnog podešenja regulatora, možemo se ograničiti na određivanje samo jedne tačke amplitudno-fazne karakteristike- njenog preseka s negativnim delom realne ose.

Pri tome, prepostavlja se da se u toj oblasti objekat ponaša kao tipični objekat bez samoregulacije (7.2), pa se može napisati:



$$\frac{K_o}{j\omega_\pi} e^{-j\omega_\pi \tau_o} = R \cdot e^{-j\pi}, \quad (7.32)$$

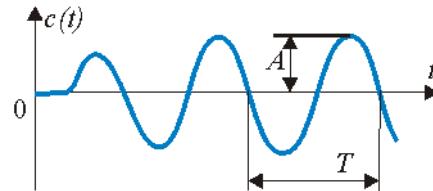
gde su:  $\omega_\pi$  - presečna frekvencija faze, a  $R$  - vrednost amplitudno fazne karakteristike za  $\omega_\pi$ .

Iz (7.32) sledi:

$$\tau_o = \frac{\pi}{2\omega_\pi}, \quad (7.33)$$

$$K_o = \omega_\pi R. \quad (7.34)$$

Prema tome, potrebno je organizovati eksperiment tako da se odrede  $\omega_\pi$  i  $R$ . On se izvodi na jednostavan način. Objekat se dovodi u nominalni režim rada. Zatim se skokovito pomera ulazna referenca za konstantni isnos  $d$ .



Sl. 7.9. Određivanje presečne frekvencije faze i modula amplitudno fazne karakteristike objekta.

Usled toga će, nakon nekog kašnjenja, početi da se menja izlaz objekta. U tom trenutku treba referencu postaviti na vrednost  $-d$ . Sačekavši da se izlaz objekta vrati u polazno stanje, izvodi se novi skok reference na  $+d$  itd. Kao rezultat takvog eksperimenta dobiće se grafici ulaznog (referentnog) signala i izlaznog signala objekta kao na sl. 7.9. Sa slike se vidi da su ulazni i izlazni signal u protivfazi, što je i svrha eksperimenta.

Na osnovu izlaznog signala određuje se presečna frekvencija faze

$$\omega_\pi = \frac{2\pi}{T}, \quad (7.35)$$

i amplituda izlaznog signala  $A$ . Za određivanje parametra  $R$  potrebno je naći odnos amplituda izlaznog i ulaznog signala. Kako je ulazni signal pravougaoni talas, amplituda prvog harmonika tog signala ima vrednost  $1,27d$ . Stoga je

$$R = \frac{A}{1,27d}. \quad (7.36)$$

Sada se može primeniti relacija (7.16) za podešavanje P-regulatora, što konačno, uzimanjem u obzir (7.33) i (7.34), daje:

$$K_r = \frac{0,637}{A}, \quad (7.37)$$

ili relacije (7.22) i (7.23) za podešavanje PI-regulatora, što daje:

$$K_r = \frac{0,4445}{A}, \quad (7.38)$$

$$T_i = 1,25T. \quad (7.39)$$

### 7.5.2 Eksperimenti sa zatvorenom povratnom spregom

U osnovi metode leži eksperimentalno određivanje presečne frekvencije faze i vrednosti amplitude amplitudno-fazne karakteristike povratnog prenosa sistema na toj frekvenciji. Metodu su predložili Zigler i Nikols i ona se sastoji u sledećem. Sistem je s regulatorom koji treba prevesti u P-regulator kako je prethodno opisano. Na izlaz objekta (postrojenja) priključi se registrator (pisač), kojim se može snimiti odziv postrojenja. Izabere se što manje pojačanje P-regulatora. Sistem se uključuje i posmatra njegov rad. Ako sistem radi stabilno, povećava se pojačanje P-regulatora za neki mali iznos i ponovo prati njegov izlaz. To se čini sve dole dok se u sistemu ne pojave stabilne oscilacije. Ove oscilacije nastaju zbog toga što je ispunjen Nikvistov uslov oscilovanja. Pretpostavljajući, i dalje, da se objekat u okolini presečne frekvencije faze poнаша kao astatički objekat, može se napisati:

$$K_r \frac{K_o}{j\omega} e^{-j\omega\tau_o} = -1 = e^{-j\pi}, \quad (7.40)$$

odakle, posle izjednačavanja modula i faza, sledi:

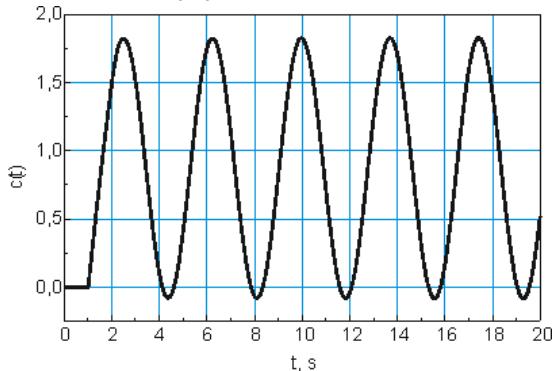
$$K_o = \frac{\omega_\pi}{K_{rkr}}, \quad (7.41)$$

$$\tau_o = \frac{\pi}{2\omega_\pi}, \quad (7.42)$$

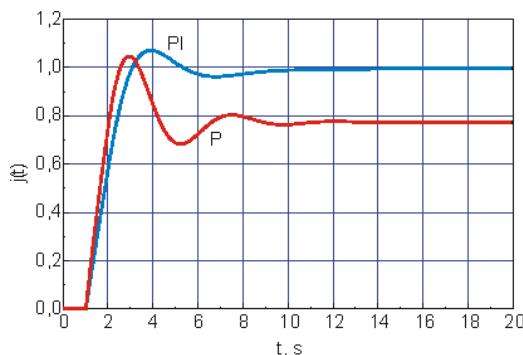
gde je  $\omega_\pi$  - presečna frekvencija faze, a  $K_{rkr}$  - pojačanje P-regulatora pri kome su nastupile stabilne oscilacije kružne frekvencije  $\omega_\pi$ .

Sada se, na osnovu (7.41) i (7.42) i formule (7.16), za P - regulator dobija

$$K_r = \frac{0,875}{K_o \tau_o} = \frac{0,875 K_{rkr} 2}{\pi} = 0,5 K_{rkr}. \quad (7.43)$$



Sl. 7.10. Samooscilacije sistema nastale za kritično pojačanje  $K_{rkr}=0,68$ .



Sl. 7.11. Odskočni odziv sistema približno optimalnim podešenjem za P i PI regulator.

#### Primer 7.4.

Na sl. 7.10 je dat eksperimentalno snimljen odziv sistema u režimu stabilnih samooscilacija pri pojačanju  $K_{rkr} = 0,68$ . S oscilograma se nalazi perioda oscilacija  $T_\pi = 3,8$  s. Na osnovu (7.44) potrebno pojačanje proporcionalnog regulatora je  $K_r = 0,34$ . Odziv sistema s tim pojačanjem prikazan je na sl. 7.11 (oznaka P). Za primenu PI regulatora pojačanje regulatora je  $0,35 \times 0,68 = 0,238$ , a integralna vremenska konstanta regulatora je  $T_i = 1,25 T_\pi = 1,25 \cdot 3,8 = 4,75$  s. Na sl. 7.11 (oznaka PI) prikazan je odziv sistema s PI regulatorom.

#### LITERATURA

- [1] Рогач, В. Я.: **Расчет настройки промышленных систем регулирования**, «Госэнергоиздат», Москва, 1961.
- [2] Stojić, M. R.: **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, »Nauka«, 1996, Beograd.
- [3] Matić, B.: **Projektovanje automatskih sistema za upravljanje tehnološkim procesima**, »Svetlost«, Sarajevo, 1982.

Za PI regulator se, na osnovu (7.22), (7.23), (7.41) i (7.42), dobija

$$K_r = 0,35 K_{rkr} \quad (7.44)$$

$$T_i = 5 \tau_o = \frac{5\pi}{2\omega_\pi} = \frac{5\pi T_\pi}{2 \cdot 2\pi} = 1,25 T_\pi, \quad (7.45)$$

gde je  $T_\pi$  - perioda oscilovanja sistema za kritično pojačanje  $K_{rkr}$ .

Posebna pogodnost ove metode je u tome što se ne mora poznavati tačna vrednost pojačanja P-regulatora. Dovoljno je samo smanjiti pojačanje na polovinu u odnosu na kritičnu vrednost kod sistema s P-regulatorom, odnosno smanjiti na 35% proporcionalno područje u odnosu na  $K_{rkr}$  kod PI regulatora i postaviti njegovu integralnu vremensku konstantu na vrednost  $T_i = 1,25 T_\pi$ .

<b>Glava 8. KOMPONENTE SAU</b>	233
<b>8.1 Objekti upravljanja</b>	233
<b>8.1.1 Generator jednosmerne struje</b>	234
<b>8.1.2 Motor jednosmerne struje (MJS)</b>	236
8.1.2.1 MJS upravljan strujom rotora	238
<b>8.1.3 Hidraulični multivarijabilni objekat</b>	239
<b>8.1.4 Termički objekat</b>	241
<b>8.2 Merni elementi - senzori</b>	242
<b>8.2.1 Elementi za detekciju pozicije</b>	242
<b>8.2.1.1 Potenciometri</b>	243
<b>8.2.1.2 Selsini</b>	245
8.2.1.2.1 Transformatorska sprega selsina	247
8.2.1.2.2 Diferencijalni selsin	251
8.2.1.2.3 Indikatorska sprega selsina	252
<b>8.2.1.3 Obrtni transformatori - rizolveri</b>	254
8.2.1.3.1 Dvopolni obrtni transformatori	254
6.2.1.3.2 Višepolni obrtni transformatori	258
8.2.1.3.3 Skotov transformator	258
<b>8.2.2 Elementi za merenje ugaone brzine</b>	259
<b>8.2.2.1 Tahogeneratori</b>	259
8.2.2.1.1 Tahogenerator jednosmerne struje	259
8.2.2.1.2 Asinhroni tahogenerator	260
8.2.2.1.3 Sinhroni tahogeneratori	261
8.2.2.1.4 Optoelektronski tahogeneratori	262
8.2.2.1.5 Tahometarski merni mostovi	262
<b>8.3 Pretvarački elementi</b>	264
<b>8.3.1 Strujni merni pretvarač</b>	264
<b>8.3.2 Naponski merni pretvarač</b>	264
<b>8.3.3 Modulatori</b>	265
8.3.3.1 Modulator sa snalognim prekidačem	265
8.3.3.2 Modulator sa bipolarnim tranzistorima	267
8.3.3.3 Širinsko-impulsni modulator	268
<b>8.3.4 Demodulatori</b>	272
8.3.4.1 Fazno-osetljivi diodni demodulator	272
<b>8.4 Pojačavači</b>	274
<b>8.4.1 Elektromasinski obrtni pojačavači</b>	275
8.4.1.1 Generator jednosmerne struje	275
8.4.1.2 Amplidin	276
8.4.1.3 Alternator	277
<b>8.4.2 Elektronski pojačavači</b>	277

8.4.2.1 Pojačavači sa elektronskim cevima	277
8.4.2.2 Pojačavači sa tranzistorima	274
8.4.2.2.1 Operacioni pojačavači	278
8.4.2.2.2 Tranzistorski pojačavači snage	281
<b>8.5 Izvršni organi</b>	282
<b>8.5.1 Dvofazni asinhroni servomotor</b>	282
<b>8.5.2 Servosistemi</b>	290
8.5.2.1 Mehanički reduktori	291
8.5.2.1.1 Reduktori s cilindričnim zupčanicima	294
8.5.2.1.2 Planetarni reduktor	294
8.5.2.1.3 Talasni reduktor	295
<b>8.6 Kompenzatori i regulatori</b>	296
<b>8.6.1 Kompenzatori</b>	297
8.6.1.1 Diferencijalni kompenzatori	297
8.6.1.2 Diferencijalni kompenzatora s aktivnim elemetima	298
8.6.1.3 Višestruki diferencijalni kompenzator	298
8.6.1.4 Transformator kao realni diferencijator	299
8.6.1.5 Realni diferencijator sa operacionim pojačavačima	299
<b>8.6.2 Integralni kompenzator</b>	300
8.6.2.1 Integralni kompenzator sa aktivnim elementima	301
<b>8.6.3 Integro-diferencijalni (diferencijalno-integralni) kompenzator</b>	301
<b>8.6.4 Regulatori</b>	303
<b>Literatura</b>	305
<b>Pitanja za samopроверу</b>	306
<b>Zadaci za vežbu</b>	309
<b>Prilog: Tabela Laplasove transformacije</b>	311

Registar pojmova

**313**

## **Glava 8.**

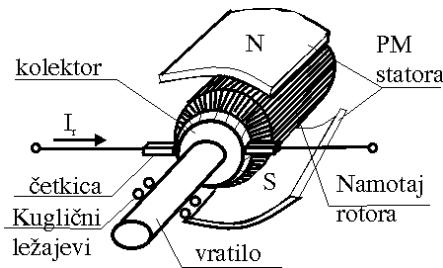
# **KOMPONENTE SAU**

U ovoj glavi opisane su komponente sistema automatskog upravljanja koje su u najširoj upotrebi u klasičnim sistemima. Cilj poglavlja je da se osim upoznavanja sa konstrukcijom, karakteristikama i namenom, prvenstvena pažnja posveti matematičkom modelovanju realnih komponenata i da se na osnovu njih komponuju principske i strukturne blok-šeme realnih sistema, a sve u cilju da matematička teorija sistema ne bude samostalni cilj. Iako ovo poglavlje predstavlja celinu za sebe, u nastavi se ova materija može izučavati u vidu primera za poglavlja: modelovanje dinamičkih sistema, odzivi elemenata i sistema, stabilnost sistema i projektovanje sistema.

### **8.1 Objekti upravljanja**

Nije potrebno mnogo znanja i mašte da bi se došlo do zaključka da je broj mogućih objekata upravljanja praktično neograničen. Polazeći od te činjenice, reklo bi se, da za svaki objekat treba imati poseban pristup. Međutim, na sreću, iako su, u osnovi, objekti različiti, oni se mogu po nekim svojim osobinama klasifikovati u konačan broj tipova. Naime, kada se radi o linearnim objektima elektro-mehaničkog tipa, svi oni poseduju izražene osobine filtera propusnika niskih frekvencija, tj. oni su niskopropusni filtri. Stoga se mogu aproksimirati matematičkim modelom nižeg reda: trećeg, drugog ili prvog reda, zavisno od zahtevane tačnosti aproksimacije i od toga koje se promenljive uzimaju kao ulaz, odnosno izlaz. Tako, na primer, mehanički sistem sa dve mase, razmatran u drugoj glavi ove knjige, kao reprezent mehaničkog dela elektromotornog pogona, koji uključuje obrtni deo elektromotora i radni mehanizam, je sistem prvog reda, ako se elastičnost međusobne sprege zanemari, bez obzira na to da li je ili nije zanemareno viskozno trenje, kada je ulazni signal aktivni moment a izlazni - brzina obrtanja. Ako je, pak, izlazni signal ugao obrtanja, tada je to sistem drugog reda. Međutim, u mnogim slučajevima elastičnost međusobne

sprege se ne može zanemariti, pa sistem postaje drugog, odnosno četvrtog reda. Kod toplovnih procesa, procesa prenosa mase, odnosno kod velikog broja tehnoloških procesa, dinamika objekta se, sa dovoljnom za praksu tačnošću, može aproksimirati sistemom prvog ili drugog reda sa transportnim kašnjenjem. Kao tipične funkcije prenosa objekata koriste se:



Sl. 8.1. Skica izgleda maštine jednosmerne struje (motora ili generatora).

Prve dve se odnose na objekte *statičkog* tipa ili *objekte sa samoregulacijom*, a druge dve - na objekte *astatičkog* tipa ili *objekte bez samoregulacije*. Ove relacije, pogotovo (8.2) i (8.4) se veoma često primenjuju u inženjerskoj praksi.

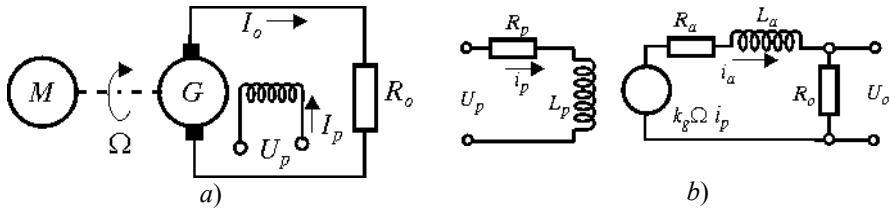
Sa stanovišta jednostavnosti ostvarivanja kvalitetnog upravljanja poželjno je, u prvom redu, da kašnjenja, kako transportna ( $\tau$ ) tako i inercijalna ( $T$ ), budu što manja i da su vremenski nepromenljive veličine. Osim toga, ako objekat nije linearan, poželjno je da se, u zavisnosti od radne tačke, njegovo pojačanje ne menja više od 1,5 puta [1].

### 8.1.1 Generator jednosmerne struje

U cilju prikaza nekih tipičnih primera objekata regulacije navodimo, najpre, generator jednosmerne struje, kao jednostavan primer elektromehaničkog sistema kojim se može lako upravljati. Iako se on danas retko koristi u novim konstrukcijama (nalazio je široku primenu, kao pojačavač snage, u sistemima za pobudivanje alternatora u elektranama, u elektromotornim pogonima u tzv. Vard-Leonardovoj grupi, kao izvor električne energije na mobilnim uređajima) pogodan je kao školski primer za uočavanje odnosa parametara, mogućnosti zanemarivanja nekih od njih u odnosu na druge, kao i dobijanja matematičkog modela objekta sa poremećajem. Na sl. 8.1 data je skica konstrukcije maštine jednosmerne struje, a na sl. 8.2 - principska električna šema generatora jednosmerne struje sa opterećenjem.

Motor bilo kog tipa (elektromotor, benzinski ili dizel motor, parna ili hidro turbina) obrće rotor generatora, u čijim se provodnicima, pod uticajem pobudnog polja, koje stvara pobudni namotaj usled proticanja pobudne struje  $I_p$ , indukuje elektromotorna sila (EMS), proporcionalna konstanti generatora  $k_g$ , brzini obrtanja  $\Omega$  i jačini pobudne struje, tj.

$$E_g = k_g \Omega i_p . \quad (8.5)$$



Sl. 8.2. Generator jednosmerne struje: a) principska šema; b) ekvivalentna šema.

Ta EMS se javlja na krajevima neopterećenog generatora, na četkicama. Kada se generator optereti potrošačem električne energije, za koji ćemo pretpostaviti da je omski, na priključima generatora, zbog pada napona na unutrašnjim otporima, doći će do smanjenja napona. U cilju detaljnijeg opisivanja dinamike i statike ovog objekta, nacrtajmo ekvivalentnu električnu šemu, sl. 8.2b. Na osnovu nje mogu se napisati sledeće očigledne relacije:

$$\begin{aligned}
 &\text{Diagram (a) shows: } I_a \rightarrow R_a(1+sT_a) \text{ and } U_p \rightarrow \frac{k}{1+sT_p} E_g \text{ (with } k = \frac{k_g \Omega_0}{R_p}, T_p = L_p/R_p, T_a = L_a/R_a\text{)} \\
 &\frac{di_p}{dt} = \frac{1}{L_p} u_p - \frac{1}{L_p} R_p i_p, \\
 &\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} k_g \Omega i_p - \frac{1}{L_a} (R_a + R_o) i_a, \quad (8.6) \\
 &u_o = R_o i_a.
 \end{aligned}$$

Sl. 8.3. Struktura blok-šema generatora napona jednosmerne struje.

Dati sistem jednačina stanja je nelinearan zbog proizvoda promenljivih  $\Omega$  i  $i_p$ . On se može učiniti linearnim stabilizacijom brzine obrtanja  $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$  ili linearizovati u okolini ravnotežnog stanja, za male promene  $\Omega$  i  $i_p$ . Pretpostavimo, najpre, da je obezbeđena stabilizacija brzine. Tada se, prelazeći u kompleksni domen, smatrajući pobudni napon ulaznim, napon na opterećenju izlaznim signalom, a struju opterećenja poremećajem, struktura blok-šema generatora kao objekta regulacije može prikazati kao na sl. 8.3.

Za generator jednosmerne struje mogu se dobiti i drugačiji blok dijagrami. Na prethodnom je namerno uloga poremećajne veličine dodeljena struji opterećenja. Međutim, ako se uzme u obzir da je ta struja srazmerna količniku napona na krajevima generatora i otpornosti opterećenja, odnosno ako se iz relacije (8.6) nađe funkcija prenosa  $U_o(s)/U_p(s)$  dobiće se

$$W(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}; \quad T_1 = T_p, \quad T_2 = \frac{T_a}{1 + \frac{R_o}{R_a}}, \quad K = \frac{kR_o}{R_o + R_a}, \quad (8.7)$$

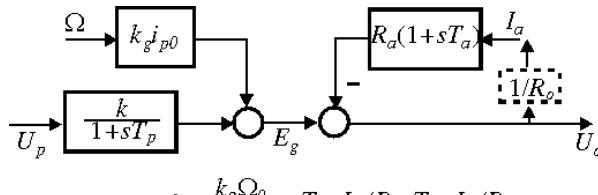
što daje drugu sliku o strukturi objekta regulacije.

Prirodno se nameće pitanje koja od ponuđenih struktura je pogodnija za dalju primenu? Odgovor na ovo pitanje zahteva dodatna pojašnjenja. U prvom slučaju, pri projektovanju regulatora napona, uzimajući struju opterećenja kao spoljašnji poremećaj, regulator bi pred sobom "video" u konturi objekat prvog reda sa konstantnim parametrima (prepostavljujući da se parametri samog

generatora ne menjaju) i promenljivim opterećenjem. U drugom slučaju regulator bi pred sobom imao objekat drugog reda sa promenljivim parametrima. Što se tiče senzora obe strukture su ravnoznačne. Analizirajući (8.7) u pogledu vremenskih konstanti, može se zaključiti da je  $T_2$  obično za red veličine manja od  $T_1$ , što nam daje za pravo da  $T_2$  možemo zanemariti u modelu (8.7), pa se posmatrani objekat svodi na sistem prvog reda sa promenljivim pojačanjem.

Razmotrimo i slučaj  $\Omega=\text{var}$ . Napon na krajevima neopterećenog generatora je funkcija brzine obrtanja i struje pobude, pa se ukupna promena napona, u okolini ravnotežnog stanja koje ćemo označiti indeksom  $0$ , može iskazati relacijom:

$$\delta e_g = \left( \frac{\partial e_g}{\partial \Omega} \right)_0 \delta \Omega + \left( \frac{\partial e_g}{\partial i_p} \right)_0 \delta i_p = k_g I_{po} \delta \Omega + k_g \Omega_0 \delta i_p. \quad (8.8)$$



Sl. 8.4.

Struktura generatora za promenljivu brzinu obrtanja.

$$\begin{aligned} \frac{di_p}{dt} &= \frac{1}{L_p} u_p - \frac{1}{L_p} R_p i_p, \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{L_a} k_g \Omega_0 i_p + \frac{1}{L_a} k_g i_{p0} \Omega - \frac{1}{L_a} (R_a + R_o) i_a, \\ u_o &= R_o i_a, \end{aligned} \quad (8.9)$$

Ako se izrazi (8.6) napišu za mala odstupanja od ravnotežnog stanja, iskoristi (8.8) i, radi jednostavnijeg pisanja, izostave označke  $\delta$ , tada se dobija linearizovani model generatora u obliku:

čija je struktura blok-šema prikazana na sl. 8.4.

Na ovoj blok-šemi postoji samo još jedan poremećaj, usled delovanja promenljive brzine obrtanja rotora generatora. Svi napred dati zaključci ostaju u važnosti.

### 8.1.2 Motor jednosmerne struje (MJS)

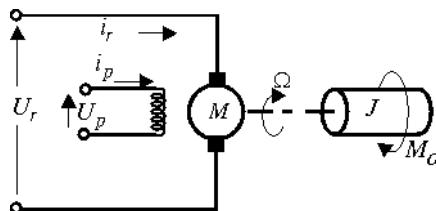
U tehnici automatske regulacije brzine obrtanja radnih mehanizama, u sistemima za pozicioniranje kod preciznih alatnih mašina, manipulatora i robota i na drugim mestima, široku primenu ima MJS sa nezavisnom pobudom, čija je jedna podklasa MJS sa permanentnim magnetima (engl.: *Permanent Magnet Direct Current Motor (PM DC Motor)*). Sam MJS se može naći u ulozi kako izvršnog organa-aktuatora tako i u ulozi objekta regulacije. U prvom slučaju njegova brzina (pozicija) se ne reguliše direktno. Bez obzira na ulogu, njegove statičke i dinamičke osobine ostaju iste. Pre nego što pređemo na njihovo izučavanje, ukažimo na činjenicu da se ovi motori uspešno, u novijim konstrukcijama, zamenuju drugim motorima: beskolektorskim motorima

## Glava 8.: Komponente SAU

jednosmerne struje (sa sličnim regulacionim osobinama kao i MJS), asinhronim motorima ili drugim tipovima motora. Bez obzira na ovu tendenciju MJS će još dugo biti prisutni u inženjerskoj praksi.

Principska električna šema napajanja MJS s pasivnim i aktivnim mehaničkim opterećenjem data je na sl. 8.5.

Smatraćemo da je mehaničko opterećenje svedeno na sistem s jednom masom, tj. da nema elastične sprege između rotora motora i mehaničkog opterećenja, da ne postoji viskozno trenje<sup>1</sup> i da deluje aktivni otporni moment  $M_0$ . Kao izlaznu veličinu posmatraćemo brzinu obrtanja vratila motora  $\Omega$ .



Sl. 8.5. Principijska električna šema motora jednosmerne struje sa nezavisnom pobudom i mehaničkim opterećenjem sa aktivnim otpornim momentom.

Za dati motor mogu se napisati tri diferencijalne jednačine: dve određuju dinamiku električnih kola: pobude i rotora, a treća - mehaničkog dela:

$$\frac{di_p}{dt} = -\frac{R_p}{L_p} i_p + \frac{1}{L_p} u_p,$$

$$\frac{di_r}{dt} = -\frac{R_r}{L_r} i_r - \frac{1}{L_r} k_e i_p \Omega + \frac{1}{L_r} u_r, \quad (8.10)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} k_m i_p i_r - \frac{1}{J} M_0,$$

gde su:  $i_p$ ,  $u_p$ ,  $R_p$ ,  $L_p$ - struja, napon, omska otpornost i induktivnost kola pobude;  $i_r$ ,  $u_r$ ,  $R_r$ ,  $L_r$ - struja, napon, omska otpornost i induktivnost kola rotora;  $k_e$ ,  $k_m$ - konstruktivne konstante motora po indukovanoj kontralektromotornoj sili i po elektromagnetskom momentu.

Iz (8.10) se vidi da je, pri istovremenom delovanju promenljivih napona na krajevima pobude i rotora motora, matematički model MJS nelinear. Takav model se može uspešno koristiti u rešavanju posebnih problema, na primer, optimalizacije. Za širu primenu u praksi ovaj model se linearizuje. Primenjuju se dva načina linearizacije: (i) stabilizacijom struje rotora, (ii) stabilizacijom struje pobude. U literaturi su ova dva načina dobili nazive: upravljanje pobudom odnosno upravljanje strujom rotora. Naravno, kod PM DC motora moguće je samo drugi način. Prvi način se rede koristi iz tri razloga:

1. takav način upravljanja ima povećano inercijalno kašnjenje zbog relativno velike vremenske konstante pobudnog kola;
2. nije ekonomično održavati struju rotora konstantnom, posebno kod motora većih snaga;
3. savremena tehnologija uspešno proizvodi PM DC motore i većih snaga.

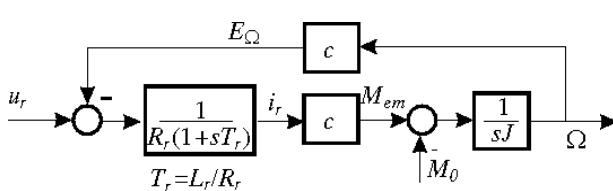
Zbog toga se nećemo zadržavati na modelu motora upravljanog pobudom. Studenti mogu sami izvesti taj model, odnosno konsultovati literaturu [2].

<sup>1</sup> Viskozno trenje samog motora veoma je malo pa se može zanemariti [3].

### 8.1.2.1 MJS upravljan strujom rotora

Kao što je u prethodnom izlaganju rečeno, motor ima obezbeđeno konstantno polje, jer se pobudna struja dobija iz strujnog izvora. Zbog toga u dinamičkom modelu (8.10) prva diferencijalna jednačina postaje algebarska i nije više od uticaja na dinamiku sistema koja se opisuje samo dvema diferencijalnim jednačinama:

$$\begin{aligned}\frac{di_r}{dt} &= -\frac{R_r}{L_r} i_r - \frac{1}{L_r} c\Omega + \frac{1}{L_r} u_r, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{J} ci_r - \frac{1}{J} M_0,\end{aligned}\quad (8.11)$$



Sl. 8.6. Strukturna blok-šema DC motora.

Za praksu je, osim brzine ili ugla obrtanja vratila motora, kao izlazna veličina interesantna i struja rotora. Zbog toga ćemo odrediti funkcije prenosa u odnosu na sve tri veličine. Na osnovu strukturne blok-šeme se lako dobija:

$$W_\Omega(s) = \frac{\Omega(s)}{U_r(s)} = \frac{1/c}{s^2 T_r T_m + s T_m + 1}, \quad (8.12)$$

$$W_{I_r}(s) = \frac{I_r(s)}{U_r(s)} = \frac{1/c}{(s^2 T_r T_m + s T_m + 1)s}, \quad (8.13)$$

$$W_{M_0}(s) = \frac{M_0(s)}{U_r(s)} = \frac{(T_m / R_r)s}{s^2 T_r T_m + s T_m + 1}, \quad (8.14)$$

gde je:  $T_m = R_r J / c^2$  [s] - (elektro)mehanička vremenska konstanta motora.

Interesantne su i funkcije prenosa :

$$W'_{\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_0(s)} = -\frac{R_r}{c^2} \frac{(1 + sT_r)}{s^2 T_r T_m + s T_m + 1}, \quad (8.15)$$

$$W'_{I_r}(s) = \frac{I_r(s)}{M_0(s)} = \frac{1/c}{s^2 T_r T_m + s T_m + 1}. \quad (8.16)$$

Date relacije pokazuju da je MJS kombinacija oscilatornog elementa drugog reda i drugih osnovnih elemenata (pojačavačkog, integracionog, diferencijalnog, predikcionog prvog reda), zavisno od toga koji se izlazno/ulazni odnos kompleksnih veličina posmatra. U cilju smanjenja oscilatornosti i optimalizacije

gde je sa  $c$  - označena konstanta motora<sup>2</sup>.

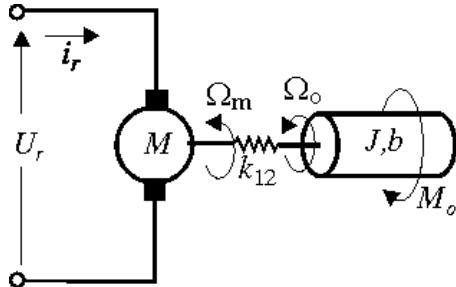
Na osnovu (8.11), prevodeći model u kompleksni domen, može se konstruisati strukturalna blok-šema MJS, sl. 8.6.

<sup>2</sup> Konstante motora po indukovanoj elektromotornoj sili i po momentu su, u važecem internacionalnom sistemu jedinica, brojno jednakе, a dimenziono razlike. Zbog toga ćemo ih označavati istim simbolom  $c$ .

## Glava 8.: Komponente SAU

motora po brzini delovanja, poželjno je da odnos vremenskih konstanti motora sa mehaničkim opterećenjem bude  $(T_m / T_e) \approx 2$ .

Dinamički model motora sa mehaničkim opterećenjem se značajno usložnjava kada se uračunaju elastičnost spreve između rotora motora i mehaničkog opterećenja i viskozno trenje.



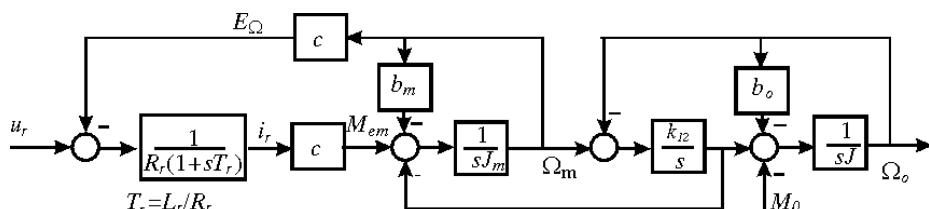
Sl. 8.7. DC motor sa mehaničkim opterećenjem i elastičnom spregom.

Na sl. 8.7 prikazana je principska šema takvog sistema, a na sl. 8.8 data je strukturalna blok-šema ovog objekta regulacije, na osnovu koje se može lako napisati sistem jednačina.

Ovim želimo da ukažemo na stepen složenosti problema regulacije naoko jednostavnog objekta.

Problem se može dodatno iskomplikovati ako se mehanički moment sa

vratila motora na opterećenje prenosi zupčastim reduktorom koji neminovno unosi nelinearnost tipa mrtve zone sa histerezisom. Osim toga, zanemarili smo uticaj statickog (Kulonovog) trenja koje je nelinearno. Ovakvi složeni problemi su prisutni u sistemima za tačno pozicioniranje kod numerički upravljenih alatnih mašina, kod manipulatora i robota. Oni su značajan ograničavajući faktor za širu primenu visokotačnih sistema, zbog visoke cene kvalitetnih rešenja. Postoje pokušaji da se ovaj problem reši.



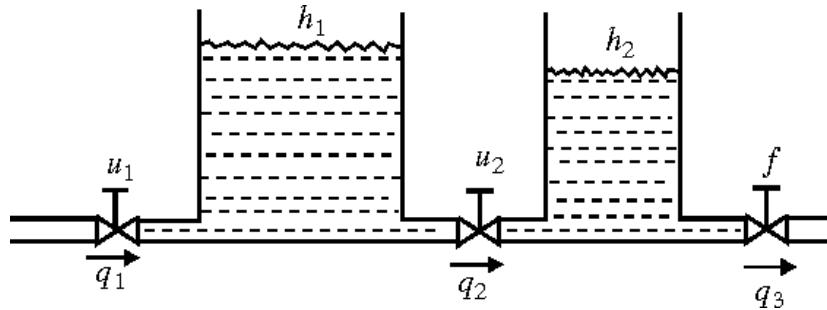
Sl. 8.8. Strukturalna blok-šema DC motora sa mehaničkim opterećenjem, elastičnom spregom i viskoznim trenjem

### 8.1.3 Hidraulični multivarijabilni objekat

Razmotrimo hidraulični sistem, šematski prikazan na sl. 8.9, kao objekat regulacije [4]. Neka su regulisane veličine nivoi tečnosti, \$h\_1\$ i \$h\_2\$, u sudovima, a upravljačke veličine otvoru prvog i drugog ventila, \$u\_1\$ i \$u\_2\$, dok je poremećaj otvor trećeg ventila, \$f\$.

Jednačine materijalnog balansa svakog suda su:

$$\begin{aligned} S_1 \frac{dh_1}{dt} &= q_1 - q_2, \\ S_2 \frac{dh_2}{dt} &= q_2 - q_3. \end{aligned} \tag{8.17}$$



Sl. 8.9. Hidraulični sistem.

gde su:  $S_1, S_2$  - površine osnova sudova koji su cilindri konstantne površine preseka. Protoci  $q_1, q_2, q_3$  su nelinearne funkcije otvora ventila i nivoa tečnosti, ali se mogu linearizovati za male promene, i izražavaju se sledećim relacijama:

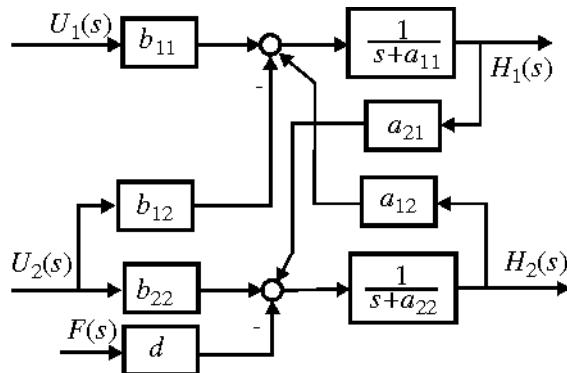
$$\begin{aligned} q_1 &= k_1 u_1 - k_2 h_1, \\ q_2 &= k_3 u_2 + k_4 h_1 - k_5 h_2, \\ q_3 &= k_6 f + k_7 h_2. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Zamenjujući (8.18) u (8.17) i svodeći sistem na Košijev normalni oblik, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + b_{11}u_1 - b_{12}u_2, \\ \frac{dh_2}{dt} &= a_{21}h_1 - a_{22}h_2 + b_{22}u_2 - df, \\ a_{11} &= \frac{k_2 + k_4}{S_1}, \quad a_{12} = \frac{k_5}{S_1}, \quad a_{21} = \frac{k_4}{S_2}, \quad a_{22} = \frac{k_3 - k_7}{S_2}, \\ b_{11} &= \frac{k_1}{S_1}, \quad b_{12} = \frac{k_3}{S_1}, \quad b_{22} = \frac{k_3}{S_2}, \quad d = \frac{k_6}{S_2}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Na sl. 8.10 data je strukturalna blok-šema ovog objekta. Na osnovu (8.19), kao i na osnovu strukturne blok-šeme, uočava se da je on multivarijabilan: ima dva ulaza i dva izlaza, uz delovanje poremećaja. Osim toga, objekat je spregnut, jer postoje unakrsne veze, tj. svako od upravljanja ima uticaj na oba izlaza.

Na sličan način, korišćenjem principa održanja materije i energije, odnosno materijalnog i energetskog balansa, odnosno koristeći odgovarajuće zakone fizike i hemije, mogu se dobiti matematički modeli svakog objekta regulacije, odnosno procesa (toplotnog, hemijsko-tehnološkog i dr.).



Sl. 8.10. Strukturalna blok-šema hidrauličnog sistema sa sl. 8.9.

### 8.1.4 Termički objekat

Termički procesi se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Međutim, za praktičnu primenu u regulacionoj tehnici mogu se izvršiti odgovarajuća uprošćavanja koja dovode do matematičkog modela objekta regulacije prvog reda sa transportnim kašnjenjem.

Prepostavimo da imamo peć u kojoj treba u datoj tački njenog unutrašnjeg prostora stabilisati ili regulisati temperaturu. U peć se, putem gorionika ili električnog grejača, dovodi potrebna količina toplice  $Q$ , kojom se može upravljati promenom električne snage koja se dovodi grejačima, odnosno promenom količine i sastava goriva i vazduha. S druge strane na temperaturu peći se može uticati i otvaranjem ventilacionih otvora. Osim toga, kao poremećaji se javljaju: promena kvaliteta goriva, uticaj spoljašnje promene temperature, unošenje i iznošenje predmeta iz pećnice, odnosno promena napona napojne mreže kod elektropeći. Dinamika procesa prenosa toplice zavisi i od toga koji je materijal prenosilac toplice: da li je to vazduh, voda ili neka druga materija, odnosno da li se proces odvija bez mešanja ili sa mešanjem, kada se radi o fluidnoj sredini.

Ako se sa  $\theta_p$  označi temperatura u željenoj tački, sa  $\theta_s$  - spoljašnja temperatura, sa  $C$  - topotna kapacitivnost peći, tada se proces prenosa toplice može aproksimirati relacijom

$$Q = g(\theta_{ps} - \theta_s) + C \frac{d\theta_{ps}}{dt}, \quad (8.20)$$

gde je  $g$  - topotna provodnost između peći i spoljašnje sredine, a  $\theta_{ps}$  - je srednja temperatura u peći.

Uticaj prenosa toplice kroz odgovarajuću sredinu se uračunava putem uvođenja transportnog kašnjenja  $\tau$ , koje zavisi od tipa prenosne sredine, od udaljenosti izvora toplice od kontrolne tačke, od toga da li se proces odvija sa ili bez mešanja. U praksi se najčešće parametri modela peći određuju eksperimentalno, a model ima oblik (8.2).

## 8.2 Merno-pretvarački elementi-senzori

Dobijanje kvalitetne informacije o rezultatima upravljanja - merenje upravljenih veličina objekta - je od izuzetne važnosti za ostvarivanje kvalitetnog SAU. Iako je, zbog kružnog toka signala u regulacionoj petlji, svaka komponenta važna, ipak merno-pretvaračkim komponentama pripada počasno mesto iz dva razloga:

- (i) upravljati se može nekom veličinom jedino ako postoji mogućnost njenog neposrednog ili posrednog merenja,
- (ii) tačnost SAU je, u prvom redu, određena tačnošću mernog elementa.

S toga se, od merno-pretvaračkog elementa zahteva:

- visoka osetljivost (rezolucija);
- linearnost u celom opsegu promene merene veličine od interesa za upravljanje;
- jednoznačnost detekcije merene veličine (odsustvo histerezisa);
- bezinercijalnost;
- nepromenljivost karakteristika, bez obzira na uslove ambijenta ili dužinu upotrebe u definisanim granicama.

Navedene (idealne) uslove u celini ne može da ispunи nijedan realni merno-pretvarački element. S toga se u praksi zadovoljavamo realnim karakteristikama koje, u relativnom odnosu prema datom objektu i zadatku, zadovoljavaju osnovne zahteve. Tako, na primer, ako je inercijalnost mernog elementa značajno manja (za red veličine) od inercijalnosti objekta, tada možemo smatrati da se proces merenja vrši praktično bez inercije. Isto tako, izvestan stepen nelinearnosti, u okviru zahtevane statičke tačnosti, ne predstavlja problem.

Mi se nećemo baviti ovim problemima, jer predstavljaju predmet izučavanja posebne naučne discipline - *metrologije*. Naš zadatak će biti da ukažemo na neka specifična rešenja merenja prvenstveno mehaničkih veličina (pozicije, brzine) električnim putem kao i na merenje nekih električnih veličina (napona, struje) koji se često koriste u tehnici automatskog upravljanja.

### 8.2.1 Elementi za detekciju pozicije

U sistemima za automatsko pozicioniranje ili navođenje (kopirne i alatne mašine,  $x$ - $y$  ploteri, koordinatni stolovi, manipulatori, radiolokacioni uredaji, satelitske antene i dr.) potrebno je imati kontinualnu informaciju o translacionom pomeraju ili ugaonoj poziciji pokretnog dela objekta upravljanja u odnosu na nepokretan deo. Merni elementi za ove namene nazivaju se *davači* ili *senzori pozicije*. Razlikovaćemo dva tipa senzora pozicije: *senzori linearног (translacionог)* i *senzori ugaоног (rotacionог) pomeraja*. Današnja tehnička rešenja nude veći broj tipova senzora pozicije koje možemo svrstati u dve grupe: *analogni* i *digitalni*. Pošto se u najvećem broju praktičnih realizacija kretanje odvija pod dejstvom motora sa rotacionim kretanjem, najveću pažnju posvetićemo senzorima za merenje ugaone pozicije. Najširu primenu su našli *potenciometri*, *selsini*, *obrtni transformatori (rizolverи)*, *enkoderi*. Enkoderi izlaze iz domena vremenski kontinualnih sistema i neće se ovde razmatrati.

**8.2.1.1 Potenciometri** su elektromehanički elementi za detekciju i transformaciju ugaonog (linearnog) pomeraja u ekvivalentni električni signal. Potenciometar opšte namene je elektronska komponenta koja je našla široku primenu u industrijskoj elektronici, radio i TV tehnici, gde, u osnovi, obavlja napred definisano funkciju. Međutim, potenciometri čija je namena za merenje pozicije u sistemima upravljanja razlikuju se od potenciometara opšte namene po konstrukciji, preciznosti i pouzdanosti. Od potenciometra za detekciju pozicije obično se zahteva sposobnost detekcije ne samo apsolutne vrednosti pozicije već i znaka, tj. smera kretanja. Stoga ovi potenciometri imaju četiri izvoda umesto tri kod potenciometara opšte namene<sup>3</sup>.

Mehanička konstrukcija potenciometara je najčešće sledeća: u cilindrično kućište, od izolacionog materijala (bakelit) s bočnim poklopцима koji nose kuglične ležajeve, smešta se, po unutrašnjem obodu kućišta, prsten-nosač potenciometra. Prsten-nosač se izrađuje od izolacionog materijala (mnogi proizvođači kao prsten - nosač koriste bakarnu, lakov izolovanu žicu  $\phi=2$  mm) i na njemu se, navojak do navojka, namota spirala tanke izolovane otporne žice ( $\phi=0,04$  -  $0,05$  mm). Po jednom od bočnih oboda se skida izolacija na spirali otporne žice. U kuglične ležajeve potenciometra postavlja se čelična osovina potenciometra (obično  $\phi=5$  mm). Na osovinu je, posredstvom izolacionog držača, učvršćen nosač klizača potenciometra koji se završava posrebrenim kontaktom koji klizi po obodu prstena potenciometra sa koga je skinuta izolacija. Nosač klizača mora imati odgovarajuće opružne osobine, radi ostvarivanja što boljeg kontakta, ali nesme ostvarivati ni suviše velike sile pritiska, jer bi to dovelo do povećanog habanja klizača ili otporne žice. Klizač potenciometra mora imati kontakt sa izvodom na kućištu potenciometra, što se ostvaruje preko kontaktnog prstena od provodnog materijala učvršćenog na izolacionoj podlozi.

Sam prsten od otporne žice ima tri izvoda: dva krajnja i jedan strogo na sredini. Sva četiri izvoda se vode na leme ušice, učvršćene na kućištu potenciometra. Obično se tri izvoda (jedan kraj potenciometra, klizač, drugi kraj potenciometra) smeštaju na jednoj, a četvrti (srednji kraj potenciometra) na suprotnoj strani kućišta.

Osim opisane konstrukcije tzv. jednoobrtnog potenciometra, izrađuju se i višeobrtni (helikoidni) potenciometri (za 3, 5, 10 obrtaja). Osnovna razlika je u tome što se, umesto na prstenastom nosaču, otporna žica mota na spiralnom, cilindričnom izolacionom nosaču i što je obezbeđeno da klizač potenciometra ostvaruje složeno kretanje - po helikoidi.

Moguće je da se umesto otporne žice koriste slojni (ugljenoslojni) potenciometri, kod kojih se, na keramičkoj podlozi, postupkom naparavanja, ostvara otporni sloj, po kome klizi klizač potenciometra. Iako ovi potenciometri imaju bolju rezoluciju, i nemaju diskontinuitet, oni nisu naišli na širu primenu u praksi automatske regulacije.

---

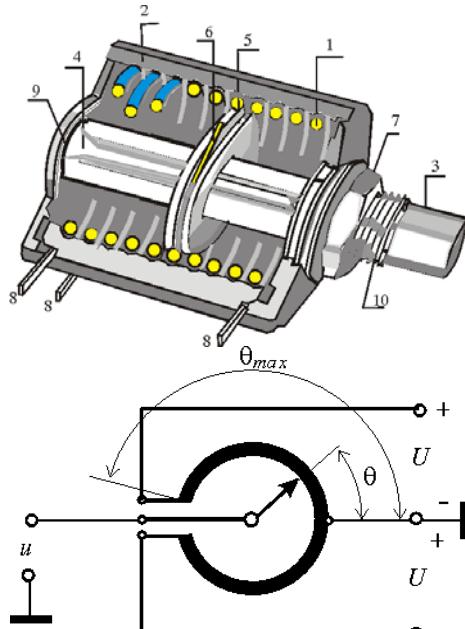
<sup>3</sup> Detekcija smera kretanja se može ostvarivati i kod običnih potenciometara ali to zahteva dodatne elemente.

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

Potenciometar odlikuje jednostavna konstrukcija, niska cena, jednostavnost korišćenja. Osnovni nedostaci su mu: postojanje kliznog kontakta, podložnost uticaju udara i vibracija, diskretnost izlaznog signala i ograničeni vek trajanja.

Na sl. 8.11 prikazana je konstrukcija 10-to obrtnog potenciometra.

Način detekcije ugaonog pomeraja i njegovo pretvaranje u ekvivalentni električni signal s detekcijom smera kretanja objasnićemo pomoću principske šeme na sl. 8.12.



Sl. 8.12. Principijska oznaka i šema veze potenciometra.

Sl. 8.11. Konstrukcija višeobrtog potenciometra.

1-spirala od izolacionog materijala na kojoj je namotana otporna žica, 2 - vodjica, 3 - čelična osovina, 4 - kontaktno pero, 5 - klizni blok, 6 - kontaktno pero, 7 - navrtna, 8 - priključni kontakti, 9 - kontaktni prsten, 10 - zavojnica.

Potenciometar se napaja iz izvora simetričnog stabilnog napona (jedno-smernog ili naizmeničnog)  $\pm U$ . Veličina napojnog napona se bira u zavisnosti od raspoloživog izvora i od dozvoljene snage disipacije potenciometra (dozvoljena gustina struje je različita za različite konstrukcije i kreće se od  $10 \text{ A/mm}^2$  za potenciometre sa plastičnim nosačem do  $30 \text{ A/mm}^2$  za potenciometre sa metalnim nosačem [5]).

Izlazni signal se uzima s klizača potenciometra u odnosu na srednju tačku izvora napajanja (u odnosu na uzemljenje).

Pretpostavljajući da izlaz potenciometra nije opterećen, napon na klizaču je proporcionalan veličini ugla  $\theta$ . Ako je linearna raspodela otpornosti, tada će ugaona raspodela potencijala po jedinici ugaonog pomeraja biti  $U/\theta_{\max}$ . Izlazni signal potenciometra je

$$u = \frac{U}{\theta_{\max}} \theta = k\theta. \quad (8.21)$$

Prema tome, potenciometar je bezinercijalni element čiji je koeficijent pojačanja

$$k = \frac{U}{\theta_{\max}} [\text{V/radijanu}]. \quad (8.22)$$

Iz ovog izraza se vidi da je osjetljivost potenciometra direktno srazmerna naponu napajanja. Stoga je poželjna primena većeg napona.

## Glava 8.: Komponente SAU

Maksimalni ugao obrtanja  $\theta_{\max}$  zavisi od konstrukcije potenciometra. Obično je "mrtvi" ugao mali, reda  $1-2^\circ$ , a ugao obrtanja se mehanički ne ograničava kod jednoobrtnih potenciometara.

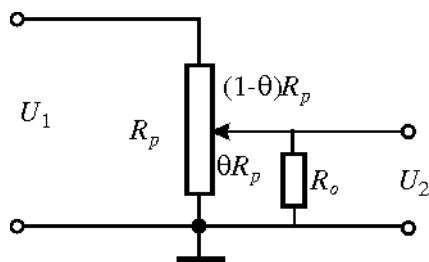
Znak izlaznog napona zavisi od položaja klizača u odnosu na srednji izvod.

Opterećeni potenciometar gubi linearost karakteristike, što se može jednostavno pokazati. Na sl. 8.13 prikazano je električno kolo potenciometra sa opterećenjem  $R_o$ . Prenos se može lako odrediti iz date šeme. On je:

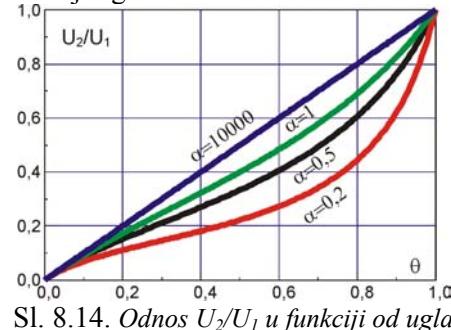
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\alpha\theta}{\alpha + \theta(1 - \theta)}, \quad \alpha = \frac{R_o}{R_p}. \quad (8.23)$$

Na sl. 8.14 dat je grafički prikaz relacije (8.23) iz koga se vidi da se linearost gubi ako je otpornost opterećenja konačna. U savremenim praktičnim primenama, uz korišćenje operacionih pojačavača, obezbeđuje se velika otpornost opterećenja potenciometra i linearost karakteristike.

Napred smo za napajanje potenciometra koristili izvor jednosmerne struje. Napajanje se može ostvariti i naizmeničnom strujom. Pri tome je potrebno obezbediti napone u protivfazi u cilju detekcije smera kretanja klizača potenciometra. Svi zaključci ostaju u važnosti osim što će izlazni signal biti naizmenični sa amplitudnom modulacijom u funkciji ugla  $\theta$ .



Sl. 8.13. Šema opterećenog potenciometra.



Sl. 8.14. Odnos  $U_2/U_1$  u funkciji od ugla potenciometra i odnosa  $\alpha$ .

**8.2.1.2 Selsini** [7,8], su male mašine naizmenične struje (mikromašine). Klasifikuju se po konstrukciji odnosno po nameni na: *kontaktne i beskontaktnе* odnosno *predajne, prijemne, diferencijalne i prateće*. Beskontaktni selsini su specijalne konstrukcije i ređe se koriste [7]. Zbog toga ćemo se zadržati samo na kontaktnim selsinima. Bez obzira na tip selsina, njegov stator je, po konstrukciji, sličan statoru trofazne mašine naizmenične struje - ima tri namotaja, smeštena u žlebovima (moguća je i konstrukcija kada se trofazni sistem namotaja smešta u rotoru), čije magnetne ose zaklapaju međusobno uglove od po  $120^\circ$ . Krajevi ovih namotaja, s jedne strane, se vezuju u zvezdu, a s druge - izvode na priključnice, na kućištu, i označavaju sa  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Rotor selsina, zavisno od tipa, ima različitu konstrukciju. Kod predajnog selsina je sa isturenim polovima i ima samo jedan namotaj, čiji su krajevi izvedeni na kontaktne prstenove ili na spiralne opruge. Prijemni selsin, u cilju smanjenja inercije, ima rotor cilindričnog oblika s žlebovima u kojima se smešta

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

monofazni namotaj, čiji se krajevi izvode na kontaktne prstenove (spiralne opruge). Prateći selsin se od predajnog selsina razlikuje samo dodatnim elementima za prigušivanje oscilacija, dok diferencijalni selsin ima trofazni namotaj i u rotoru. Krajevi rotora se takođe, preko četkica (ili spiralnih opruga) izvode na priključnice i označavaju sa  $R_1, R_2$ , odnosno  $R_1, R_2, R_3$ , kod diferencijalnog selsina. Na sl. 8.15 data je principijska električna šema predajnog (pratećeg) selsina, dok su na sl. 8.16 navedene često korištene označke.

Princip rada predajnog selsina je, ukratko, sledeći: na priključke rotora dovodi se stabilan naizmenični sinusoidalni napon industrijske (50 Hz) ili druge frekvencije (400 Hz). Usled toga kroz namotaj rotora protiče struja. Ona stvara pulsirajuće magnetno polje koje u svakom od namotaja statora indukuje elektromotornu silu (EMS) frekvencije napona napajanja rotora. Amplituda indukovanih EMS zavisiće od međusobnog položaja osa namotaja rotora i svakog od namotaja statora. Usvajajući za referentnu osu - osu namotaja statora

$S_2$ , i pretpostavljajući da je odnos broja zavojaka namotaja rotora i bilo kog namotaja statora jednak jedinici, indukovane EMS se mogu izraziti relacijama:

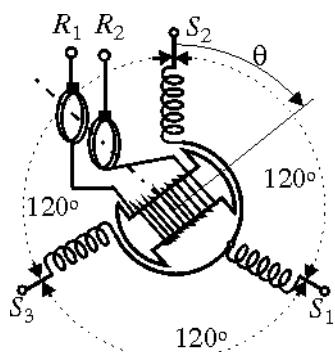
$$u_R = U_m \sin \omega t, \quad (8.24a)$$

$$u_{S_1} = U_m \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (8.24b)$$

$$u_{S_2} = U_m \cos \theta \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (8.24c)$$

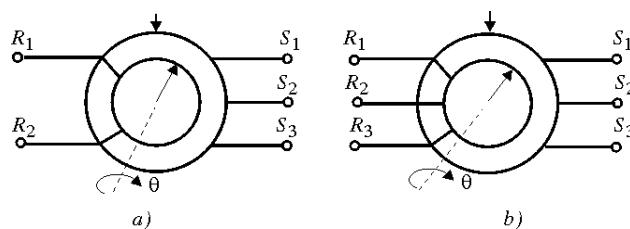
$$u_{S_3} = U_m \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \sin(\omega t + \varphi_3), \quad (8.24d)$$

gde su:  $\omega$  - kružna frekvencija, a  $U_m$  - amplituda napona napajanja rotora.



Sl. 8.15.  
Šematski prikaz selsina.

Uglovi  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  mogu biti nula ili  $\pi$ , što zavisi od međusobnog položaja namotaja rotora i odgovarajućeg namotaja statora.



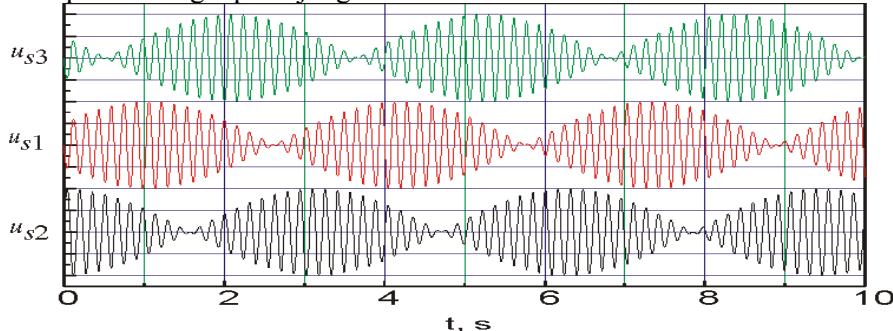
Sl. 8.16. Oznake selsina:  
a) predajni, prijemni ili prateći selsini; b) diferencijalni selsin.

Kao što se vidi, predajni selsin je transformisao ugaoni položaj rotora  $\theta$  u tri EMS koje čine trofazni sistem. U cilju dodatnog razjašnjenja, treba naglasiti da selsin amplitudno moduliše naizmenični signal osnovne frekvencije tako da anvelope tih modulisanih signala čine trofazni sistem napona. Ovo se najbolje može uočiti ako se posmatraju oscilogrami signala, sl. 8.17, na krajevima

## Glava 8.: Komponente SAU

namotaja statora, kada se rotor selsina obrće konstantnom brzinom, a njegov namotaj napaja odgovarajućom strujom.

Predajni selsin kao element sistema nikada se ne koristi samostalno već uvek u sprezi sa drugim selsinima: *prijemnim*, *pratećim* ili *diferencijalnim*, ostvarujući sprege za različite namene<sup>4</sup>. Osim toga, za kvalitetnu detekciju ugaone pozicije, frekvencija napajnog napona selsina mora biti bar 2 -3 puta veća od brzine promene ugla predajnog selsina.



Sl. 8.17. Signali na krajevima statora predajnog selsina. Frekvencija napajanja 40Hz, brzina obrtanja rotora selsina 1 rad/s.

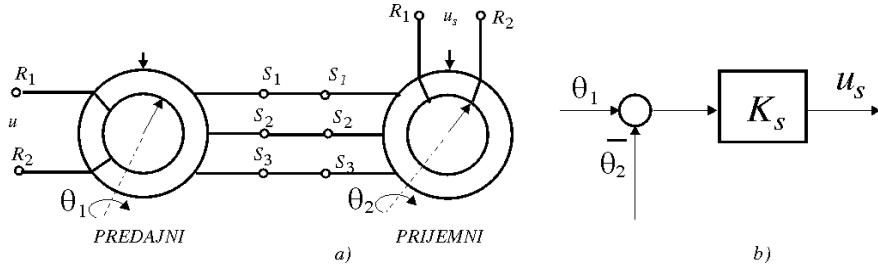
**8.2.1.2.1 Transformatorska sprega selsina.** Sprega predajnog i prijemnog selsina, ostvarena prema šemi na sl. 8.18a, naziva se *transformatorska sprega selsina*. Nemenjena je za detekciju ugaone razlike dvaju međusobno udaljenih i proizvoljno postavljenih vratila. Pokazaćemo da, uz izvesna ograničenja i uprošćavanja, ovaj sistem daje na svom izlazu električni signal proporcionalan razlici ugaonih pozicija  $\theta_1 - \theta_2$ . Na osnovu opisa rada predajnog selsina sledi da se stator prijemnog selsina napaja trofaznim sistemom naizmeničnih, amplitudno modulisanih napona. S obzirom na to da su i namotaji statora prijemnog selsina vezani u zvezdu, kroz njih će proticati naizmenične struje trofaznog sistema. One stvaraju svoja elektromagnetska polja koja kao rezultat daju magnetni fluks istog intenziteta koji ima magnetni fluks stvaran rotorom predajnog selsina i pravca pomerenog za isti ugao na suprotnu stranu od referentne ose. Ako se osa namotaja rotora prijemnog selsina poklapa s pravcem tog fluksa, u njemu će se indukovati maksimalna EMS, čija će vrednost biti jednaka naponu napajanja rotora predajnog selsina, kada je odnos broja navojaka namotaja statora i rotora 1:1, i zanemare rasipanja. Prema tome sledi

$$u_s = U_m \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin(\theta_1 - \theta_2 + \frac{\pi}{2}) \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.25)$$

Izraz (8.25) nije pogodan za praktičnu primenu, jer se iz njega ne može detektovati faza ugaone razlike za male promene ugla u okolini  $\theta_1 - \theta_2 = 0$ . Zbog toga se referentna pozicija rotora predajnog selsina pomera za  $\pi/2$ , što je na šemi 8.18 simbolički pokazano. Tada se prethodni izraz može napisati kao

<sup>4</sup> Umesto predajnog selsina, kao mikromašine, može se koristiti elektronski element koji u funkciji od zadatog ugla generiše sistem trofaznih napona. [15]

$$u_s = U_m \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.26)$$



Sl. 8.18. Transformatorska sprega selsina:  
a) električna šema; b) strukturalni blok-dijagram.

Izlazni signal transformatorske sprege selsina je naizmenični, amplitudno modulisani signal. Amplituda se menja po zakonu sinusa razlike ugaonih pozicija rotora predajnog i prijemnog selsina. Kao što se vidi iz poslednjeg izraza, promena znaka ugaone razlike pozicija se reflektuje direktno na znak izlaznog napona. Za male ugaone razlike, a transformatorska sprega selsina se koristi u servosistemima čiji je zadatak sinhronizacija dvaju vratila, možemo napisati za obvojnicu izlaznog signala transformatorske sprege selsina:

$$u_s = K_s (\theta_1 - \theta_2). \quad (8.27)$$

Drugim rečima, za datu ugaonu razliku izlazni napon selsina će biti naizmenični signal frekvencije napona izvora napajanja rotora predajnog selsina. Njegova amplituda će imati vrednost proporcionalnu razlici ugaonih pozicija. Zaključujemo da transformatorska sprega selsina predstavlja kombinaciju detektora signala greške i pojačavačkog elementa sa pojačanjem  $K_s$ , sl. 8.18b. Pojačanje selsina se može i eksperimentalno odrediti tako što se, najpre, transformatorska sprega selsina dovede u referentnu poziciju ( $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ). Zatim se izvođenjem ovog sistema iz referentne pozicije za neki mali ugao ( $\Delta\theta$ ), recimo za  $1^\circ$ , meri napon na izlazu  $\Delta u_s$ , konstanta pojačanja selsina je:

$$K_s \approx \frac{\Delta u_s}{\Delta\theta} [\text{V/rad}]. \quad (8.28)$$

S obzirom da je amplituda izlaznog signala transformatorske sprege selsina u funkciji razlike uglova predajnog i prijemnog selsina sinusoidalna funkcija, u granicama jednog punog obrtaja postojaće dva položaja ravnoteže (kada je izlazni napon jednak nuli). Prvi položaj ravnoteže je za  $\theta_1 - \theta_2 = 0$ , a drugi za  $\theta_1 - \theta_2 = 180^\circ$ . Prvi položaj ravnoteže je stabilan, a drugi - nestabilan. Naime, kada se transformatorska sprega koristi u servosistemu i on se nalazi u stabilnom položaju ravnoteže, svaki mali poremećaj ovog stanja ravnoteže, u bilo kom smeru, dovodi do kretanja sistema u pravcu smanjenja greške na nulu. U slučaju kada se sistem nalazi u nestabilnom stanju ravnoteže, bilo koji mali poremećaj izvodi sistem iz tog stanja ravnoteže na jednu ili drugu stranu, završavajući kretanje u stabilnom stanju ravnoteže. Zbog toga se nestabilno stanje ravnoteže naziva *lažna nula*. Lažna nula je ozbiljan problem o kome se mora voditi računa u praksi selsinskih servosistema.

## Glava 8.: Komponente SAU

Drugi problem je vezan za veličinu greške pozicioniranja. Naime, transformatorska sprega selsina, kao merni sistem, ima svoju statičku i dinamičku tačnost pa servosistem, u celini, ne može imati bolju tačnost. Greškom transformatorske sprege selsina se može nazvati napon na njenom izlazu kada se nalazi u položaju stabilne ravnoteže. Statička greška je uzrokovana nesinusoidalnošću raspodele indukcije između trofaznih i monofaznog namotaja statora i rotora, nesimetričnošću faznih namotaja statora i dr. Dinamička greška nastaje usled histerezisa u premagnećenju i može dostići značajnu vrednost pri velikim brzinama pozicioniranja.

Obično je zahtevana veličina dozvoljene greške pozicionih servosistema značajno manja od statičke greške same transformatorske sprege. S obzirom na to da je napon koji generiše transformatorska sprega, u položaju bliskom položaju ravnoteže, odnosno u okvirima svoje statičke greške, jednak nuli ili veoma mali, on ne utiče na kretanje izvršnog organa. Zbog toga, u pozicionim servosistemima, u kojima su osovine predajnog i prijemnog selsina neposredno spojene sa komandnim vratilom i vratilom aktuatora, respektivno, nije moguće postići veću tačnost. Međutim, ako se ove osovine spregnu preko reduktora, s prenosnim odnosom  $N$ , kojim se povećava njihov ugao obrtanja  $N$  puta u odnosu na komandno vratilo i vratilo aktuatora, onda se statička greška može smanjiti  $N$  puta. Zaista, pošto statička greška  $\Delta\theta$  transformatorske sprege selsina ostaje ista, može se napisati, posle uvođenja reduktora, očigledna relacija

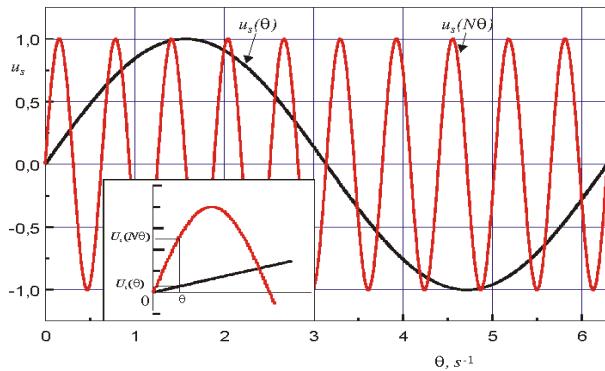
$$N(\theta_1 - \theta_2) \pm \Delta\theta = 0, \quad (8.29)$$

odakle sledi

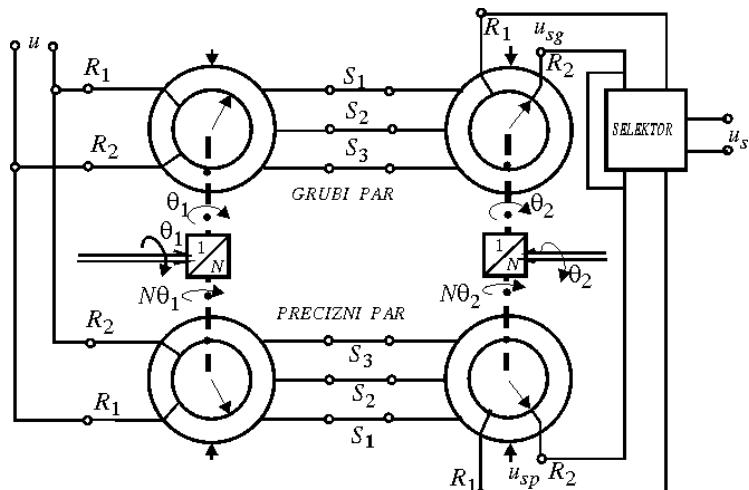
$$\theta_2 = \theta_1 \mp \frac{\Delta\theta}{N}. \quad (8.30)$$

Ovo se može objasniti i putem signala napona koji generiše selsinski par bez i sa reduktorom, sl. 8.19. Uočava se da, za istu malu promenu ugla komandne osovine, postoji daleko veća vrednost izlaznog napona na paru sa reduktorem, tj. došlo je do povećanja pojačanja približno  $N$  puta. Međutim, rešavanje problema povećanja osetljivosti dovodi do umnožavanja problema "lažnih nula". Kao što se sa sl. 8.19 vidi, broj mogućih lažnih nula se povećao takođe  $N$  puta. Zbog toga se ovakvo rešenje ne može primeniti bez uvođenja dodatnih elemenata za prevazilaženje problema lažnih nula. Jedno od rešenja je primena dve paralelne transformatorske sprege selsina. Jeden selsinski sistem je direktno mehanički vezan za komandno i izvršno vratilo i naziva se *grubi par selsina*, dok je drugi par selsina - *precizni par* - sa prethodnim mehanički spregnut putem reduktora prenosnog odnosa  $N$ . Grubi selsinski par razrešava problem višestrukih lažnih nula, a precizni povećava tačnost. Pri tome mora postojati i dodatni uređaj - *selektor (synchronizer)* - koji, u zavisnosti od veličine ugaone razlike, uključuje grubi ili precizni par selsina. Električna šema takvog dvokanalnog sistema sa selektrom se prikazana je na sl. 8.20.

Selektor se može realizovati na različite načine pomoću savremenih elektronskih kola. Najprostija realizacija je pomoću nelinearnih elemenata (dioda)

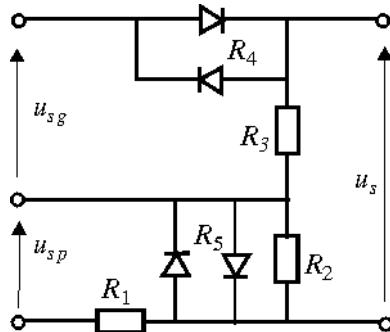


Sl. 8.19. Grafici promene amplitude izlaznog napona transformatorske spreme selsina bez ( $u_s(\theta)$ ) i sa reduktrom ( $u_s(N\theta)$ )



Sl. 8.20. Dvokanalna selsinska transformatorska sprega.

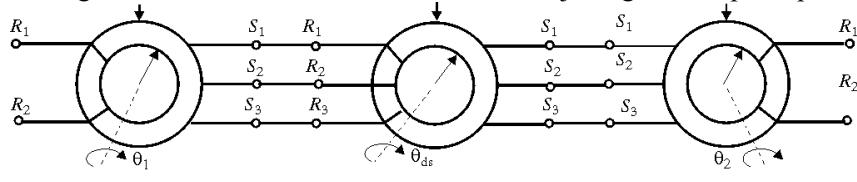
kao na sl. 8.21. Princip rada ovog selektora je sledeći [2]: poznato je da diode imaju veliku otpornost za male napone i malu za velike. Signal sa grubog para selsina dovodi se na razdelnik napona koga čine nelinearna otpornost  $R_4$  i linearni otpornik  $R_1$ . S toga je napon na  $R_1$  mali pri malim naponima grubog selsina i praktično jednak naponu grubog para selsina pri većim naponima. Nasuprot tome, na razdelnik napona, koga čine linearni otpornik  $R_3$  i paralelna veza linearног otpornika  $R_2$  i nelinearni otpornik  $R_5$  je situacija obrnuta: pri malim naponima preciznog selsinskog para, otpornost nelinearnog otpornika  $R_5$  je velika, i on praktično ne utiče, tako da je napon na  $R_2$  uslovljen samo razdelnikom napona  $R_2, R_3$ . Kako se izlazni napon selektora dobija kao suma signala sa otpornika  $R_3$  i  $R_2$ , taj napon će, pri većim ugaonim razlikama, biti blizak naponu grubog para, a pri manjim ugaonim razlikama - naponu preciznog selsinskog para. Izborom otpornika može se šema optimalizovati. Moguća su i druga rešenja selektora primenjujući savremene elektronske komponente: komparatore sa operacionim pojmačavačima i analogne poluprovodničke prekidače.



Sl. 8.21. Selektor sa diodama.

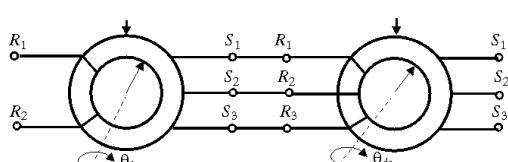
Osnovni zadatak ove sprege je da ostvari ugaoni pomeraj ravan sumi ili razlici ugaonih pomeraja dvaju vratila.

Pretpostavimo da je rotor predajnog selsina I okrenut za ugao  $\theta_1$  u smeru kazaljke na satu. Tada će rezultujući magnetni fluks u rotoru diferencijalnog selsina biti pomeren za ugao  $\theta_1$  u suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu. Isto važi i za rotor predajnog selsina II: ako se rotor predajnog selsina II pomri za ugao  $\theta_2$  u suprotnom smeru kazaljke na satu, rezultujući magnetni fluks u statoru diferencijalnog selsina će se pomeriti za ugao  $\theta_2$  u smeru kazaljke na satu. Ta dva rezultujuća fluksa u diferencijalnom selsinu delovaće uzajamno, stvarajući spreg koji će okrenuti rotor diferencijalnog selsina za ugao  $\theta_1 + \theta_2$ , odnosno  $\theta_1 - \theta_2$ , ako se rotori predajnih selsina okrenu u istom smeru, tako da se pravci magnetnih flukseva statora i rotora diferencijalnog selsina poklope.



Sl. 8.22. Električna veza diferencijalnog selsina kao prijemnika.

**Diferencijalni selsin kao davač** je šematski prikazan na sl. 8.23. Zadatak ove kombinacije je da generiše napon čija je veličina srazmerna sumi uglova dvaju udaljenih vratila. Na osnovu prethodnog izlaganja jasno je da će indukovani naponi u namotajima statora diferencijalnog selsina biti ne samo funkcija ugaonog položaja rotora diferencijalnog selsina već i rotora predajnog



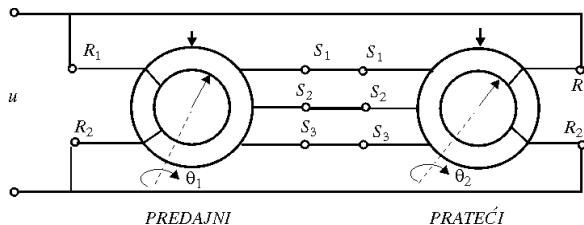
Sl. 8.23.  
Šema diferencijalnog selsina kao davača.

selsina sa čijim je statorom rotor diferencijalnog selsina električno povezan. Ako se ose odgovarajućih namotaja statora i rotora diferencijalnog selsina poklapaju, diferencijalni selsin samo prenosi napon statora predajnog selsina. Pri svakom drugom ugaonom položaju

rotora diferencijalnog selsina, veličina izlaznog napona je funkcija ugla rotora kako predajnog tako i diferencijalnog selsina.

**8.2.2.3 Indikatorska sprega selsina** služi za prenos ugla na daljinu pri malim mehaničkim opterećenjima. Šema indikatorske sprege prikazana je na sl. 8.24. Iz šeme se vidi, da se rotori oba selsina napajaju iz istog izvora naizmenične struje, i da su im istoimeni krajevi statora električno povezani.

Na osnovu prethodnih objašnjenja, jasno je da će ovaj sistem biti u ravnoteži kada su ugaone pozicije rotora predajnog i pratećeg selsina iste, tj. kada je  $\theta_1 = \theta_2$ . Ukoliko one nisu iste, indukovane EMS u istoimenim namotajima statora biće različite, što će izazvati proticanje struja kroz namotaje statora. To će dovesti do stvaranja magnetskih flukseva u jednom i drugom statoru selsina. Uzajamno delovanje flukseva statora i rotora svakog od selsina stvorice elektromagnetski moment koji će težiti da sistem dovede u ravnotežu. Kako je, obično, položaj rotora predajnog selsina diktiran spolja, rotor pratećeg selsina će uvek težiti da prati položaj rotora predajnog selsina. Zbog toga se ovakav sistem često naziva *i prateći selsinski sistem*. On se može primeniti i za diferencijalne selsine. Sličan princip se koristi za sinhronizaciju trofaznih klizno-kolutnih asinhronih pogonskih motora u sistemu tzv. električne osovine [3], kada motori imaju ne samo ulogu pogona, već i ulogu sinhro-sistema, jer se njihovi statori napajaju iz iste mreže, a krajevi namotaja rotora su im međusobno spojeni i odvedeni na otpornike upuštača.



Sl. 8.24. Indikatorska sprega selsina.

U cilju izučavanja dinamičkih osobina indikatorske sprege selsina potrebno je odrediti elektromagnetski moment koji razvija indikatorska sprega selsina. S obzirom da je selsin trofazna električna mašina, on se može izučavati na osnovu teorije uopštene mašine [3, 10]. Ta analiza dovodi do izraza za sinhronizacioni moment oblika

$$M_s = M_o(\theta) \sin \theta, \quad (8.31)$$

gde je  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ .

Karakter sinhronizacionog momenta prikazan je na sl. 8.25. On je najveći za ugaonu razliku od  $90^\circ$  dok u okolini ravnotežnog stanja naglo opada, gde se, za male ugaone razlike, sinhronizacioni moment može predstaviti linearnom zavisnošću

$$M_s = K_{sm}(\theta_1 - \theta_2). \quad (8.32)$$

## Glava 8.: Komponente SAU

Ovom aktivnom momentu se suprostavljaju otporni momenti: inercije, viskozog trenja i torzione krutosti. Uz zanemarivanje torzione krutosti, dinamika ovog sistema se opisuje diferencijalnom jednačinom

$$J \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = K_{sm}(\theta_1 - \theta_2) - b \frac{d\theta_2}{dt}. \quad (8.33)$$

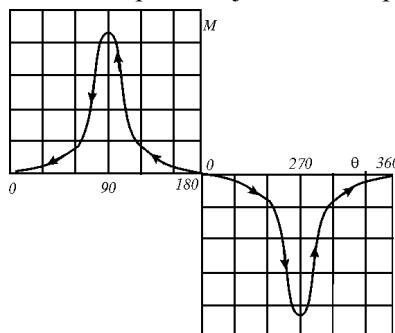
Razdvajajući promenljive, prelazeći u kompleksni domen, uz nulte početne uslove, može se napisati funkcija prenosa sistema u obliku

$$W(s) = \frac{\Theta_2(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}; \quad T = \sqrt{\frac{J}{K_{sm}}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{JK_{sm}}}. \quad (3.34)$$

Kao što se vidi, ovaj sistem je oscilatorni element drugog reda.

Obično je koeficijent viskoznog trenja vrlo mali i sistem ima jako izražene oscilatorne osobine, ako se koriste obični selsini.

U cilju smanjenja oscilatornosti mora se povećavati koeficijent relativnog prigušenja  $\zeta$ , što se postiže dodatnim elementima za povećanje viskoznog trenja (dogradnja vazdušnih prigušivača). Zbog toga se prateći selsin razlikuje po konstrukciji od prijemnog selsina. S obzirom da sinhronizacioni moment naglo opada u okolini ravnotežnog stanja, ovaj sistem ne može da ostvari visoku tačnost u prenosu ugla na daljinu.daljinu, pogotovo ako postoji značajnije mehaničko opterećenje na vratilu pratećeg selsina.



Sl. 8.25. Sinhronizacioni moment indikatorske sprege selsina [10].

veličine momenta trenja, netačnosti balansiranja rotora pratećeg selsina.U zavisnosti od veličine sopstvene greške selsini se dele na klase I, II, III sa dozvoljenim statičkim greškama od  $\pm 0,75^\circ$ ,  $\pm 1,5^\circ$  i  $\pm 2,5^\circ$ , respektivno.

Postoji konstrukcija selsin - motor koja omogućava povećanje aktivnog momenta i smanjenja greške ali ona nije našla širu primenu.

Zbog toga se sistem koristi samo za indikaciju, što mu je uslovilo i naziv *indikatorska sprege selsina*.

Osim toga, ako je ugaona razlika blizu  $180^\circ$ , kada je sinhronizacioni moment mali, sistem će biti u lažnom stanju ravnoteže - u *lažnoj nuli*. U cilju izbegavanja takve pozicije, mora se ograničavati brzina promene ugaone pozicije komandnog vratila  $\theta_1$ .

Veličina statičke greške indikatorske sprege selsina prvenstveno zavisi od

### 8.2.1.3 Obrtni transformatori-rizolveri [7]

Statička tačnost selsina, bez obzira na preciznost izrade i primenu dvokanalne šeme, ne može se dalje povećavati. Granična tačnost je  $\pm 10\text{-}20$  ugaonih minuta u dijapazonu do  $360^\circ$ . Bolja tačnost merenja razlike ugaonih pozicija dvaju vratila postiže se primenom obrtnih transformatora - rizolvera (engl.: *resolvers*; ruski: *новоротные трансформаторы*). Precizni dvopolni obrtni transformatori dostižu tačnost  $\pm 2\text{-}5$  ugaonih minuta, u krajnjem slučaju do  $\pm 1$  ugaoni minut. Dalje povećanje tačnosti postiže se primenom obrtnih transformatora sa električnom redukcijom. Princip električne redukcije se zasniva na tome što se za mali ugaoni pomeraj komandnog vratila njegov izlazni parametar (amplituda ili faza izlaznog napona) menjaju za jednu periodu, a za pomeraj vratila od  $360^\circ$  - broj perioda izlazne veličine je jednak koeficijentu prenosa električne redukcije.

**8.2.1.3.1 Dvopolni obrtni transformatori** su male indukcione mašine za transformaciju ugaonih pomeraja u naizmenični napon, s određenom funkcionalnom zavisnošću amplitude od ugla.

Po spoljašnjem obliku obrtni transformatori se gotovo ne razlikuju od selsina. Ne razlikuju im se bitno ni stator ni rotor od statora i rotora prijemnog selsina. Jedina razlika je u broju namotaja. Obično obrtni transformatori imaju po dva međusobno upravna namotaja na statoru i rotoru, smeštena u žlebovima. Krajevi statora se direktno izvode na priključne kleme, a krajevi rotora preko kontaktnih prstenova i četkica. Prstenovi i četkice se obično izrađuju od kontaktnog srebra. Kod nekih tipova obrtnih transformatora sa ograničenim uglom obrtanja, spoj sa rotorom se ostvaruje putem spiralnih opruga, kao kod instrumenata sa kretnim kalemom.

Osnovna odlika obrtnih transformatora je da se uzajamna indukcija između statora i rotora ostvara strogo po sinusoidalnom/kosinusoidalnom zakonu u funkciji ugla obrtanja rotora. To, uz obezbeđenje dodatnih uslova, omogućava da se i indukovana EMS u namotajima sekundara menja po istom zakonu.

U zavisnosti od oblika promene napona u sekundaru obrtnog transformatora, u funkciji ugla obrtanja, razlikujemo tri tipa obrtnih transformatora:

1. *sinusni obrtni transformator*,
2. *sinusno-kosinusni obrtni transformator*,
3. *linearni obrtni transformator*.

S obzirom da se pomoću sinusno-kosinusnog obrtnog transformatora mogu realizovati sva tri navedena tipa, dalje izlaganje će biti posvećeno njemu, uz ukazivanje na način dobijanja ostalih tipova. Kao posebna primena sinusno-kosinusnih transformatora je primena u konstrukciji pomerača faze.

**Sinusno-kosinusni obrtni transformator** ima u statoru i rotoru po dva nezavisna jednako motana namotaja čije su magnetne ose upravne jedna na drugu. To je šematski prikazano na sl. 8.26 i sl. 8.27.

Prepostavimo da smo na krajeve  $S1-S2$  namotaja statora S doveli stabilan naizmenični napon i posmatrajmo napon na krajevima  $A1-A2$  sekundarnog

## Glava 8.: Komponente SAU

namotaja  $A$ . Ako se ugao obrtanja  $\theta$  meri u odnosu na poprečnu osu namotaju  $S$ , tada se indukovana EMS u namotaju  $A$  nalazi po obrascu

$$\check{E}_A = \check{E}_{Am} \sin \theta, \quad (8.35)$$

gde je  $\check{E}_{Am}$  - maksimalna EMS indukovana u tom namotaju za  $\theta=\pi/2$ , tj. kada se ose namotaja  $S$  i  $A$  poklapaju. Maksimalna EMS zavisi od odnosa broja navojaka namotaja primara  $S$  i sekundara  $A$ , koga ćemo označiti sa  $k_m$ , tj.

$$\check{E}_{Am} = k_m \check{E}_S, \quad \check{E}_{Am} = E_m \sin \omega t. \quad (8.36)$$

Sada se indukovana EMS u namotaju  $A$  može napisati

$$\check{E}_A = \check{E}_{Am} \sin \theta = k_m \check{E}_S \sin \theta = k(\theta) \check{E}_S. \quad (8.37)$$

Pretpostavljajući da nema pada napona na sopstvenoj otpornosti namotaja  $S$ , može se napisati

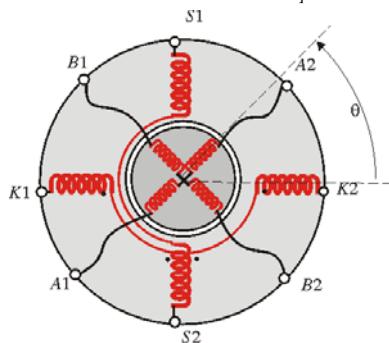
$$E_A = k(\theta) U_S. \quad (8.38)$$

Pri opterećenju sekundarnog namotaja, po njemu će proticati struja opterećenja  $I_A$ , određena naponom tog namotaja i ukupnom impedansom kola

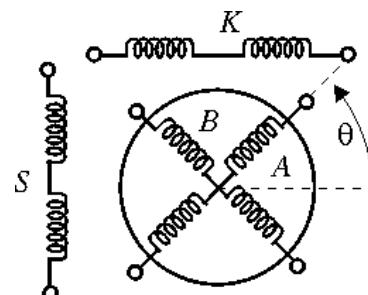
$$\check{I}_A = \frac{\check{E}_A}{Z_A + Z_{Ao}}. \quad (8.39)$$

Ta struja će stvarati magnetni fluks  $\Phi_A$ , koji je usmeren duž ose namotaja  $A$ , ali se može rastaviti na dve komponente: na komponentu duž ose namotaja  $S$  i na komponentu upravnu na osu namotaja  $S$ , tj. na *podužnu* i *poprečnu komponentu*,  $\Phi_{Ad}$  i  $\Phi_{Aq}$ , respektivno:

$$\check{\Phi}_{Ad} = \check{\Phi}_A \sin \theta, \quad \check{\Phi}_{Aq} = \check{\Phi}_A \cos \theta. \quad (8.40)$$



Sl. 8.26.



Sl. 8.27.

Šematski prikaz konstrukcije sinusno-kosinusnog obrtnog transformatora.

Označavanje obrtnog transformatora na električnim šemama.

Podužni fluks, kao kod transformatora, kompenzuje se porastom struje kroz namotaj  $S$ , tako da ukupni fluks duž podužne ose ostaje nepromenjen. On indukuje u namotaju  $A$  EMS praktično jednaku EMS neopterećenog namotaja.

Poprečni fluks se ničim ne kompenzuje. On je fluks samoindukcije za namotaj  $A$  i u njemu indukuje EMS koja se određuje na sledeći način

$$\check{E}_{AL} = -j \check{I}_A x_{Aq} = -j \check{I}_A \omega L_{Aq}, \quad (8.41)$$

što se, uzimanjem u obzir parametara namotaja, svodi na

$$\check{E}_{AL} = -\check{a}\check{E}_A \cos^2 \theta; \quad \check{a} = \frac{j\omega w_A^2 \lambda_m}{Z_A + Z_{Ao}}, \quad (8.42)$$

gde su:  $\omega$  - frekvencija napona napajanja,  $w_A$  - broj zavojaka namotaja A,  $\lambda_m$  - magnetna provodnost koja kod obrtnih transformatora ne zavisi od ugla  $\theta$ , jer imaju ravnomerni vazdušni procep.

EMS  $\check{E}_A$  namotaja A pri opterećenju može se odrediti kao suma EMS uzajamne indukcije i EMS samoindukcije,

$$\check{E}_A = \check{E}_{AM} + \check{E}_{AL} = \check{E}_S k_m \sin \theta - \check{a}\check{E}_A \cos^2 \theta, \quad (8.43)$$

odakle se dobija

$$\check{E}_A = \frac{k_m \check{E}_S \sin \theta}{1 + \check{a} \cos^2 \theta}. \quad (8.44)$$

Odavde se zaključuje da se sinusoidalnost indukovane EMS u namotaju A gubi sa opterećenjem. Ovo je izazvano poprečnim fluksom. Kada ne bi bilo poprečnog fluksa, onda bi EMS ovog namotaja bila sinusoidalna funkcija ugla  $\theta$ .

Na sličan način se može posmatrati i namotaj rotora B i indukovana EMS u njemu, bez opterećenja i sa opterećenjem. Ako su parametri namotaja A i B potpuno isti, onda će se EMS u namotaju B izražavati ne sinusnom, već kosinusnom funkcijom, tj.

$$\check{E}_B = \frac{k_m \check{E}_S \cos \theta}{1 + \check{b} \sin^2 \theta}, \quad (8.45)$$

gde se  $\check{b}$  određuje slično kao  $\check{a}$ , uz korišćenje parametara opterećenja namotaja B.

U cilju eliminacije efekata poprečnog fluksa na izobličenje signala, vrše se tzv. *simetrisanja* obrtnih transformatora. Pod simetrisanjem se podrazumeva podešavanje statorskih ili rotorskih otpornosti tako da se amplituda izlaznog signala obrtnog transformatora menja po strogo sinusoidalnom zakonu. Primeđuju se dva načina simetrisanja: *primarno simetrisanje* i *sekundarno simetrisanje*.

Kod sekundarnog simetrisanja namotaj B se optereti takvim balastnim opterećenjem, da poprečni fluks, koji stvara taj namotaj, poništava poprečni fluks stvaran namotajem A. Pri istim parametrima namotaja rotora, uslov sekundarnog simetrisanja je jednakost impedansi opterećenja namotaja A i B. Osobenost sekundarnog simetrisanja je da je ulazna impedansa obrtnog transformatora nezavisna od ugla obrtanja  $\theta$ , ali se izlazna impedansa menja, što u mnogim slučajevima nije poželjno.

Primarno simetrisanje svodi se na uključivanje u kolo namotaja K statora odgovarajuće impedanse. Uslov primarnog simetrisanja je potpuna jednakost impedansi kola statorskih namotaja. Pri istim parametrima namotaja S i K, i kada je izvor naponski, simetrisanje se svodi na kratkospajanje krajeva namotaja K.

## Glava 8.: Komponente SAU

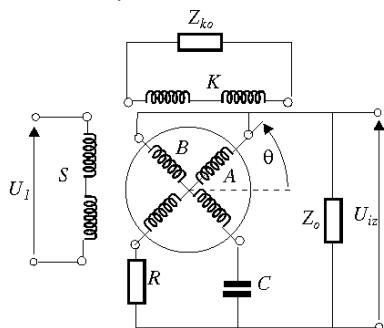
Osobenost ovog načina simetrisanja je nepromenljivost izlazne i promenljivost ulazne impedanse, što nije značajan nedostatak pri napajanju iz izvora napona.

U praksi se, kada je to izvodljivo, primenjuju oba načina simetrisanja.

**Linearni obrtni transformator.** Ako se namotaj statora S i namotaj rotora B vežu redno i napajaju iz izvora stabilnog naizmeničnog napona, tada se na krajevima namotaja A rotora dobija linearna zavisnost amplitude napona od ugaonog pomeraja u dovoljno širokom opsegu (do  $\pm 60^\circ$ ). Eliminacija uticaja poprečnog fluksa se izvodi primarnim simetrisanjem. Izlazni napon takvog transformatora je dat izrazom

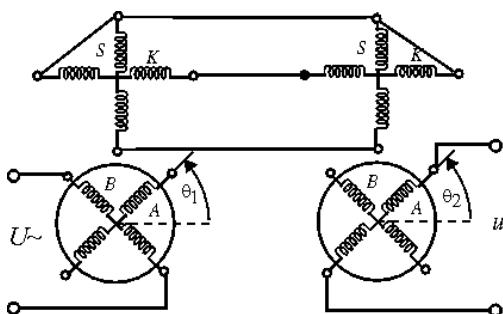
$$\check{E}_A = \frac{-\check{U}_1 k_m \sin \theta}{1 + k_m \cos \theta}. \quad (8.46)$$

Za  $k_m=0,5-0,6$  odstupanje funkcije  $\check{E}_A=f(\theta)$  od prave linije je beznačajno. Na primer, za  $k_m=0,54$ , u opsegu od  $-60$  do  $+60^\circ$ , odstupanje od linearnosti nije veće od 0,1%.



Sl. 8.28. Sinusno-kosinusni transformator kao pomerač faze.

Potrebitno je da parametri obrtnog transformatora, aktivna otpornost  $R$  i kapacitivnost  $C$  zadovoljavaju sledeće relacije:



Sl. 8.29. Transformatorska sprega obrtnih transformatora za merenje razlike ugaonih pozicija dvaju vratila u servosistemima.

**Obrtni transformator - pomerač faze.** Ako se sinusnokosinusni obrtni transformator poveže prema šemi na sl. 8.28 dobija se monofazni pomerač faze koji daje linearnu promenu faze izlaznog signala u funkciji ugla  $\theta$ .

Ovakav merni element se uspešno koristi za pozicione servosisteme sa digitalnim upravljanjem. U cilju postizanja nepromenljivosti amplitude izlaznog napona  $U_{iz}$ , i ostvarivanja linearne promene njegove faze od ugla obrtanja  $\theta$ , u opsegu od  $0$  do  $360^\circ$ ,

$$R_{iz} = X_{iz}, \quad (8.47)$$

$$R + R_{iz} = \frac{1}{\omega C} - X_{iz} \quad (8.48)$$

gde su:  $R_{iz}$ ,  $X_{iz}$ -aktivna i induktivna komponenta namotaja A i B transformatora, bez uračunavanja  $R$  i  $C$ .

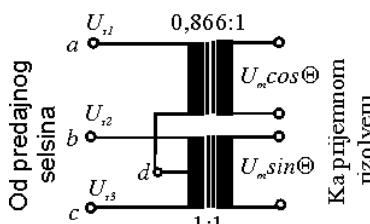
### Obrtni transformatori kao selsin - transformator.

Obrtni transformatori se mogu koristiti umesto selsina u transformatorskoj sprezi za merenje ugaone razlike pozicija dvaju vratila. Šema takve sprege je prikazana na sl. 8.29. Princip rada je isti kao kod transformatorske sprege selsina. Međutim, zbog toga što su obrtni transformatori elementi sa većom tačnošću, servosistemi sa obrtnim transformatorima su precizniji. Jedino zahtevaju pojačavače sa većim koeficijentom pojačanja, jer im je izlazna snaga manja od selsina.

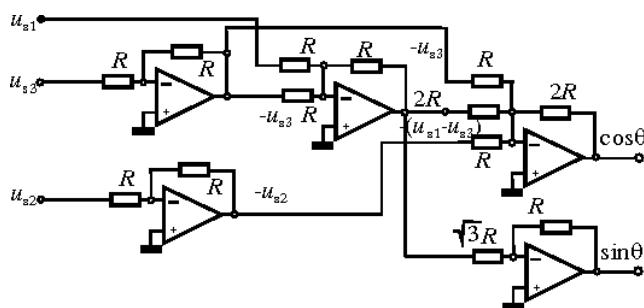
**8.2.3.2 Višepolni obrtni transformatori.** Primenuju se u dvokanalnim sistemima sinhronih sprege za precizne sisteme, a takođe i za druge namene pri malim ugaonim pomerajima. Postoji nekoliko različitih konstrukcija. Jedna od najjednostavnijih je *induktosin*. On se sastoji iz dva diska od izolacionog materijala (staklo) od kojih je jedan pokretan (rotor) a drugi nepokretan (stator). Rotor ima monofazni namotaj, a stator - dvofazni, izrađeni u vidu štampanih kola od srebra. Elektromagnetska sprega se ostvaruje preko vazdušnog procepa reda 0,1 mm. Greška induktosina je svega nekoliko ugaonih sekundi. Osnovni nedostatak im je mala veličina izlaznog napona i složenost tačne izrade.

### 8.2.1.3.3 Skotov transformator.

Za konverziju trofaznog signala iz predajnog selsina u dvofazni signal za napajanje rizolvera-prijemnika, i obrnuto, koristi se Skotov transformator. On se sastoji iz dva transformatora, sl. 8.30, od kojih jedan ima prenosni odnos  $\sqrt{3} / 2:1$ , a drugi - 1:1 s tim što u primaru ima srednji izvod. Princip rada je očigledan. Polazeći od relacija za predajni selsin (8.24 a-d) dobija se:



Sl. 8.30. Skotov transformator.



Sl. 8.31. Elektronska realizacija transformatora trofaznog u dvofazni signal.

$$u_{bc} = u_{s1} - u_{s3} = U_m \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) - U_m \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}U_m \sin \theta \quad (8.49)$$

$$u_{ad} = u_{s3} + \frac{1}{2}u_{bc} + u_{s2} = U_m \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}U_m \sin \theta + U_m \cos \theta = \frac{1}{2}U_m \cos \theta. \quad (8.50)$$

Pomoću ove šeme može se ostvariti pomerač faze sa selsinom.

Umesto Skotovog transformatora za realizaciju faznog pomerača sa selsinom transformatorom može se primeniti i šema sa operacionim pojačavačima kao na sl. 8.31, direktno realizujući prethodne relacije.

### 8.2.2 Elementi za merenje ugaone brzine

#### Tahogeneratori i tahometarski merni mostovi

U tehnici automatske regulacije često se reguliše (stabilije) ugaona brzina nekog radnog vratila proizvodnog mehanizma ili vratila samog pogonskog motora. Za merenje brzine obrtanja koriste se merni elementi koji se nazivaju *tahogeneratori* (od grčke reči *taho* - brzina). Za merenje brzine obrtanja rotora motora jednosmerne struje upravljanog strujom u rotoru ili dvofaznog asinhronog servomotora, umesto tahogeneratorsa, mogu se koristiti *tahometarski merni mostovi*. Pored ove - osnovne namene, tahogeneratori (tahometarski merni mostovi) se koriste i kao stabilizacioni elementi za formiranje lokalnih stabilizacionih povratnih sprega u pozicionim elektromehaničkim servosistemima, kada oni služe kao elementi za diferenciranje.

Od tahogeneratora, kao mernih elemenata, zahteva se: (i) linearnost statičke karakteristike, (ii) velika osjetljivost, (iii) promena znaka ili faze i simetričnost izlaznog signala pri promeni smjera obrtanja, (iv) minimalan napon pri nultoj brzini, (v) minimalna pulsacija izlaznog napona (za jednosmerne tahogeneratorate), (vi) minimalna izmena faze sa promenom brzine obrtanja u istom smjeru (za naizmenične tahogeneratorate); (vii) mali moment inercije rotora i mali otporni moment, (viii) stabilnost karakteristika pri svim uslovima ambijenta, (ix) mali gabariti i masa.

#### 8.2.2.1 Tahogeneratori.

Pod tahogeneratorom se, obično, podrazumeva mala električna mašina jednosmerne ili naizmenične struje koja generiše na izlazu napon (jednosmerni ili naizmenični) proporcionalan brzini obrtanja njegovog rotora. Mi ćemo ovaj pojam proširiti i na optoelektronsko-mehaničke i naprave koje generišu kontinualan signal proporcionalan brzini obrtanja njihovog rotacionog dela.

**8.2.2.1.1 Tahogenerator jednosmerne struje** je mali generator, obično sa stalnim magnetima u statoru, sa namotajima u rotoru čiji su krajevi izvedeni na lamele kolektora, po kojima klize četkice, mehanički učvršćene na statoru i od njega električno izolovane, za ostvarivanje električnog kontakta sa namotajima rotora. Motori jednosmerne struje za regulacione namene (servomotori) se često izrađuju sa ugrađenim tahogeneratorom u istom kućištu. Oznaka tahogeneratora jednosmerne struje koja se primjenjuje u električnim šemama je ista kao za generator jednosmerne struje, uz označavanje TG umesto G, sl. 8.32.

Izlazni napon tahogeneratora  $u_{TG}$  može se određivati na isti način kao kod generatora jednosmerne struje. Napon na krajevima neopterećenog generatora je jednak indukovanim EMS  $E_{TG}$ , dok je napon na krajevima opterećenog TG manji od  $E_{TG}$  za pad napona na unutrašnjoj otpornosti rotora i pada napona na

četkicama. Ako se zanemari pad napona na četkicama, tada je napon na krajevima opterećenog TG

$$u_{TG} = \frac{k_{TG}}{1 + (R_r / R_o)} \Omega; \quad (8.51)$$

$k_{TG}$ - je konstanta tahogeneratora u Vs/rad., koja zavisi od konstrukcije i jačine magnetnog polja statora.

U savremenim SAR se, obično, izlaz TG uvodi u sistem preko operacionog pojačavača sa vrlo velikom ulaznom impedansom. Zbog toga se može praktično smatrati da je tahogenerator neopterećen ( $R_o = \infty$ ) i njegov izlazni signal je

$$u_{TG} = k_{TG} \Omega. \quad (8.52)$$

Konstanta tahogeneratora jednosmerne struje se kreće od 3 do 100 mV/min<sup>-1</sup>. Na tačnost tahogeneratora utiču: otpornost četkica, reakcija rotora i dr.

Osnovni problem je pulsacija napona zbog neravnomernosti vazdušnog procepa

između rotora i statora, i zbog kolektora. Pulsacije zbog kolektora su izraženije. Mogu se značajno smanjiti primenom odgovarajućeg niskopropusnog filtra. Pored klasičnog tahogeneratora sa rotorom od feromagnetnog materijala i namotaja, konstruišu se i tahogeneratori s rotorom u obliku diska od izolacionog materijala sa štampanim provodnicima i štampanim kolektorom (tahogenerator sa štampanim rotatom). Ovakav tahogenerator ima malu inerciju, manje pulsacije, jer ne postoji neravnomernost procepa, a reakcija rotora je svedena na minimum.

Sl. 8.32. Oznaka tahogeneratorsa na električnim šemama.

**8.2.2.1.2 Asinhroni tahogenerator** je mašina naizmenične struje slične konstrukcije kao dvofazni asinhroni servomotor s rotorom u obliku čaše od aluminijuma (vidi sl. 8.57). Stator je složenog oblika. Izrađen je od gvozdenih limova sa dodatkom silicijuma. Ima spoljašnji cilindar, kao kod običnog asinhronog motora, po čijem su unutrašnjem obodu ravnomerno raspoređeni žlebovi, i centralni deo od istog materijala, koji služi za smanjenje magnetne otpornosti. U žlebovima statora se smeštaju dva nezavisna namotaja sa međusobno upravnim magnetnim osama. U međugvožđu statora, između spoljašnjeg cilindra i centralnog dela, postavlja se rotor u obliku metalne čaše. On je samo s jedne strane uležišten pomoću kugličnog ležaja na poklopcu. Rotorska čaša, za razliku od motora, u cilju smanjenja uticaja temperature kod visokotačnih tahogeneratora, se pravi od konstantana ili drugog materijala. Jedan od dva namotaja (pobudni) napaja se naizmeničnim, stabilisanim naponom odgovarajuće frekvencije. Sa drugog namotaja (izlaznog) se skida naizmenični signal, frekvencije napojnog napona, čija je amplituda proporcionalna brzini obrtanja. Na sl. 8.33 data je principska šema asinhronog tahogeneratora.

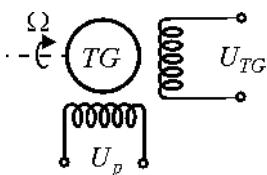
Princip rada asinhronog tahogeneratora se zasniva na Faradejevom zakonu i Fukovim strujama. U stanju mirovanja,  $\Omega=0$ , struja pobudnog namotaja stvara pulsirajuće magnetno polje koje preseca rotor i u njemu indukuje Fukove struje.

## Glava 8.: Komponente SAU

One stvaraju svoje polje, usmereno nasuprot pobudnom polju, i, kao kod svakog transformatora, to se kompenzuje porastom struje pobudnog namotaja i, samim tim, povećanjem pobudnog polja.

Teorijski, pri nepokretnom rotoru postoji samo magnetni fluks duž ose pobudnog namotaja. Zbog toga se u izlaznom namotaju, čija je osa pomerena za 90 električnih stepeni, ne indukuje nikakva EMS. Ipak, zbog neidealnosti (rasipnog fluksa, pomeraja različitog od 90 električnih stepeni, neravnomernosti procepa, iskošenja, parazitnih kapacitivnih sprega, i dr.) javlja se neka mala indukovana EMS i kada je  $\Omega=0$ , što nije poželjno. Ova EMS može dostići vrednost do 100 mV. Postoje konstruktivni načini za njeno smanjenje.

Pri obrtanju rotora ( $\Omega \neq 0$ ) njegovi elementarni provodnici presecaju pobudni magnetni fluks i u njima se, osim EMS transformacije, indukuje i EMS rotacije.



Sl. 8.33. Principska šema asinhronog tahogeneratora.

Usled njenog delovanja po rotoru protiču struje čije se konture, pri povećanoj otpornosti rotora, poklapaju s osom pobudnog fluksa. Ove struje stvaraju svoj magnetni fluks, upravan na pravac pobudnog fluksa. On u izlaznom namotaju indukuje EMS koja je proporcionalna brzini obrtanja:

$$\tilde{U}_{TG} = k_{TG} \Omega. \quad (8.53)$$

Konstanta asinhronog tahogeneratora je mnogo manja od konstante tahogeneratora jednosmerne struje. Ona je reda  $1 \text{ V}/1000 \text{ min}^{-1}$ .

**8.2.2.1.3 Sinhroni tahogeneratori.** Pored jednosmernih i asinhronih tahogeneratora, u primeni se mogu naći i sinhroni tahogeneratori. Oni su konstruktivno slični alternatorima. Rotor im je sa stalnim magnetima, a u statoru se nalazi namotaj. Osnovna prednost ove konstrukcije je odsustvo kliznih kontakata i četkica.

Pri obrtanju rotora, u namotaju statora se indukuje EMS. Njena amplituda je direktno srazmerna brzini obrtanja, tj.

$$E_{TG} = 4,44 f w_{TG} \Phi = \frac{4,44}{2\pi} p \Omega w_{TG} \Phi = k_{TG} \Omega, \quad (8.54)$$

gde su:  $\Omega$  - brzina obrtanja,  $\text{s}^{-1}$ ,  $p$  - broj pari polova,  $f$  - frekvencija, Hz,  $w_{TG}$  - broj zavojaka namotaja statora,  $p$  - broj pari polova,  $\Phi$  - fluks rotora, koji je konstantan.

Kod sinhronih tahogeneratora, pored napona, menja se i frekvencija proporcionalno brzini obrtanja, što u nizu primena nije poželjno, jer utiče na frekvenčna izobličenja izlazne karakteristike. Jedno od rešenja je da se izlaz tahogeneratora transformiše u jednosmerni signal i ispegla primenom odgovarajućeg filtra. To takođe unosi dodatnu inercijalnost. Pri tome je poželjno da sinhroni tahogenerator bude višefazni, jer su manje pulsacije ispravljenog napona. Kao izlazna veličina sinhronog tahogeneratora može se koristiti ne napon već frekvencija, što u nekim praktičnim rešenjima ima prednost.

Na osnovu dvofaznog sinhronog tahogeneratora (a uz primenu Skotovog transformatora i na osnovu trofaznog tahogeneratora) može se, odgovarajućim

transformacijom signala dobiti jednosmerni signal proporcionalan brzini obrtanja, bez primene dodatnih filtera. Naime, dvofazni sinhroni tahogenerator generiše dva kvadratura signala čija amplituda i frekvencija zavise od brzine obrtanja. Poznato je da dva kvadratura harmonijska signala formiraju Lisažuvu figuru u obliku kružnice čiji će poluprečnik biti srazmeran brzini obrtanja. Veličina tog poluprečnika je

$$r = k\omega = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} . \quad (8.55)$$

Prema tome, za dobijanje informacije o brzini potrebno je posedovati dva kvadratora i jedan korenator, što povećava složenost realizacije i cenu. Međutim, dobija se brza informacija o brzini u obliku jednosmernog signala.

**8.2.2.1.4 Optoelektronski tahogeneratori.** Za merenje brzine obrtanja u SAU koriste se i optoelektronske naprave koje ćemo nazivati takođe tahogeneratorima. Oni se sastoje iz neprozračnog diska s odgovarajućim brojem proreza po obodu ili blizu oboda, izvora svetlosti (LED dioda) i fotoosetljivog elementa (fototranzistora) koji su postavljeni na suprotnim stranama diska. Signali s fototranzistora vode se u kolo za uobičavanje impulsa (monostabilni multivibrator) koje na svom izlazu generiše pravougaoni impuls konstantne amplitude i vremena trajanja. Frekvencija ovih impulsa je direktno srazmerna brzini obrtanja. Srednja vrednost napona, koji se dobija propuštanjem povorke impulsa kroz niskopropusni filter, je direktno proporcionalna brzini obrtanja.

Postoje namenska integrisana kola za formiranje izlaznog signala proporcionalnog brzini obrtanja na osnovu impulsa sa optoelektronskog davača.

Na sličnom principu rade i neki sistemi sa elektromagnetskim davačima. Tada se disk, sa prorezima po obodu, izrađuje od feromagnetskog materijala.

Nedostatak ovakvih rešenja je neophodnost primene dodatnih filtera, što povećava inercijalnost, pulsacije izlaznog napona na niskim brzinama i ulazak u zasićenje pri većim brzinama.

#### 8.2.2.1.5 Tahometarski merni mostovi.

Za detekciju brzine obrtanja MJS sa stalnim magnetima (sa konstantnom, nezavisnom pobudom) i upravljanjem u rotoru, kao i za dvofazni asinhroni servomotor, umesto tahogeneratora mogu se koristiti tahometarski merni mostovi. Oni rade na principu ekstrakcije indukovane EMS u rotoru, koja se prirodno javlja u namotajima rotora kod jednosmernog motora, ili u namotajima statora kod dvofaznog asinhronog servomotora, pri obrtanju.

**Tahometarski merni most za motor jednosmerne struje** ima principsku električnu šemu kao na sl. 8.34. Za njegovu realizaciju potrebno je izabrati dva otpornika ( $R_2$  i  $R_3$ ) i jedan potenciometar  $R_1$ , kojim se vrši podešavanje ravnoteže mosta u stanju mirovanja motora,  $\Omega=0$ .

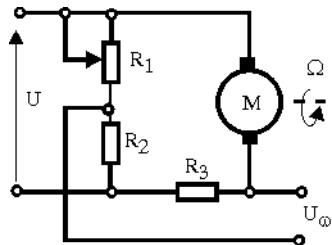
Na osnovu električne šeme, za  $\Omega \neq 0$ , u ustaljenom stanju, može se napisati sledeća očigledna relacija:

$$U_{\omega} = \left( \frac{UR_2}{R_1 + R_2} - \frac{(U - c\Omega)R_3}{R_r + R_3} \right) = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_r + R_3} \right)U + \frac{cR_3}{R_r + R_3}\Omega .$$

## Glava 8.: Komponente SAU

U stanju mirovanja  $\Omega=0^5$ , most se, pomoću potenciometra, podeši da je u ravnoteži ( $U_\omega=0$ ), pa je  $R_r R_2 = R_1 R_3$ . Konačno, izraz za napon na krajevima tahometarskog mernog mosta postaje

$$U_\omega = \frac{cR_3}{R_r + R_3} \Omega = k_T \Omega. \quad (8.56)$$



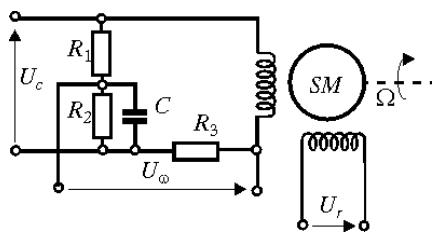
Sl. 8.34. Tahometarski merni most za motor jednosmerne struje.

Ovaj način dobijanja informacije o brzini obrtanja može se primenjivati kod sistema koji ne zahtevaju veliku preciznost, jer ima značajnu prednost po ceni koštanja u odnosu na rešenja sa drugim tipovima davača brzine obrtanja.

Na kraju, ukažimo i na još jednu mogućnost merenja brzine obrtanja motora jednosmerne struje. U savremenim sistemima često se koristi širinsko-impulsna modulacija kao metoda promene veličine upravljačkog signala. U tom slučaju, u toku pauze, kada se na motor ne dovodi napon iz izvora, može se direktno meriti indukovana EMS koja je proporcionalna brzini. Pri tome treba obezbediti odgovarajuće usrednjavanje.

**Tahometarski merni most za dvofazni asinhroni servomotor.** Slično kao u prethodnom slučaju, tahometarski merni most se može koristiti i za ekstrakciju indukovane EMS u namotaju statora dvofaznog asinhronog servomotora s rotorom u obliku čaše. Na osnovu principa rada asinhronog tahogeneratora, jasno je da će se u namotajima statora indukovati EMS koja je proporcionalna brzini obrtanja i naponu napajanja. Ako se referentna faza asinhronog motora napaja konstantnim naponom, tada će indukovana EMS u upravljačkom namotaju biti samo funkcija brzine obrtanja. Za njenu ekstrakciju se koristi šema kao na sl. 8.35.

Za razliku od mernog mosta za motor jednosmerne struje, ovde se mora koristiti i kapacitivnost  $C$  kojom se uravnotežava induktivna komponenta mosta - induktivnost upravljačkog namotaja. Pomoću potenciometra most se dovede u ravnotežu pri ukočenom motoru. I ovo



Sl. 8.35. Tahometarski merni most za dvofazni asinhroni servomotor.

<sup>5</sup> Za podešavanje tahometarskog mosta motor se mora zakočiti. U cilju osiguranja motora od struje kratkog spoja, motor treba napajati iz izvora konstantne struje.

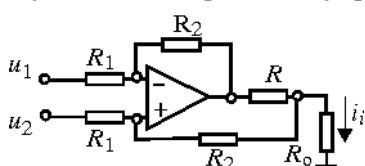
rešenje se može koristiti u sistemima gde se ne zahteva velika tačnost. Naročito se može preporučiti kao element za formiranje tahometarske povratne sprege u pozicionim servosistemima radi njihove stabilizacije, odnosno smanjenja stepena oscilatornosti.

### 8.3 Pretvarački elementi

U ovom delu naša pažnja biće, najpre, usmerena na komponente SAU čiji je osnovni zadatak da signale, dobijene iz mernog pretvarača, svedu na oblik standardnog strujnog ili naponskog signala. Takvi elementi se nazivaju *merni pretvarači*. Oni omogućavaju unifikaciju sprezanja senzora i drugih komponenata u sistemu. Zatim će biti razmotreni elementi koji signal jednog strujnog oblika (jednosmerni ili naizmenični), generisan nekim elementom SAU, transformiše u signal drugog strujnog oblika (naizmenični ili jednosmerni) u cilju međusobnog povezivanja strujno raznorodnih funkcionalnih elemenata. Takvi elementi se nazivaju *modulatori* ili *demodulatori*, respektivno. U oba slučaja pretvarački elementi moraju obezbediti potpuni prenos relevantne informacije koju sadrži signal doveden na njihov ulaz: proporcionalnost između ulaznih i izlaznih veličina, informacija o smeru promene ulazne veličine putem promene znaka jednosmernih, odnosno faze naizmeničnih signala.

#### 8.3.1 Strujni merni pretvarač

Često se primenjuje u industrijskim SAU. Osnovna uloga ovog pretvarača je da napredni signal, dobijen od senzora, transformiše u standardni strujni signal 0-20 (4-20) mA. Njegova odlika je da je manje osetljiv na promenu otpornosti linije. Na sl. 8.36 prikazana je principska šema strujnog pretvarača [13].



Sl. 8.36. Principska šema strujnog pretvarača.

Izlazna struja se određuje na osnovu izraza

$$I_i = \frac{U_1 - U_2}{R} \frac{R_2}{R_1}. \quad (8.57)$$

Maksimalna struja koja se može postići je

$$I_{\max} = \frac{U_z}{R + R_o}.$$

$U_z$  je napon zasićenja pojačavača, blizak napojnom naponu.

Poželjno je da senzorski otpornik struje,  $R$ , ima što manju vrednost.

Otpornost optrećenja se može menjati od  $0 - R_{\max}$ .  $R_{\max}$  se određuje iz prethodne relacije.

Ako je potrebno da izlazni signal bude napredni tada se umesto  $R_o$  koristi precizni otpornik sa koga se uzima napredni signal.

U dinamičkom smislu dati pretvarač je proporcionalni element.

#### 8.3.2 Napredni merni pretvarač

Isto tako, često je potrebno da se neki napredni signal transformiše u standardni napredni signal 0-5 V (0-10 V). To se može postići običnim linear-

nim pojačavačem na bazi operacionog pojačavača sa negativnom povratnom spregom u invertujućem ili neinvertujućem izvođenju. O operacionim pojačavačima biće reči kasnije (videti odeljak 8.4.2.2.1).

### 8.3.3 Modulatori

Modulator je pretvarač jednosmernog ili sporopromenljivog signala u naizmenični (impulsni) signal čija je amplituda (odnos impuls/pauza) proporcionalna veličini ulaznog signala. Pri tome se faza (znak) naizmeničnog (impulsnog) signala na izlazu modulatora menja za  $180^\circ$  (na suprotni) kad god se promeni znak ulaznog signala.

Osnovni tehnički zahtevi za modulatore su isti kao i za sve merno-pretvaračke elemente: linearnost, simetričnost, jednoznačnost i dr.

Brojna su rešenja modulatora koji se u praksi koriste. Ovde ćemo opisati samo tri najčešće korišćena rešenja u primeni kod SAU: *modulator sa analognim prekidačem*, *modulator sa tranzistorima* i *širinsko-impulsni modulator*.

#### 8.3.3.1 Modulator sa analognim prekidačem

Za transformaciju jednosmernog ili sporopromenljivog signala u ekvivalentni fazno osetljivi naizmenični signal, konstantne frekvencije i amplitude proporcionalne veličini ulaznog signala, može se primeniti kolo kao na sl. 8.38. Princip rada tog kola je sledeći: oscilator noseće frekvencije  $\omega_0$  sinhrono komutira analogni prekidač iz položaja (1) u položaj (2), tj., na primer, za vreme pozitivne poluperiode napona oscilatora on je u položaju (1), a za vreme negativne - u položaju (2). Na taj način, izlazni signal se komutira nosećom frekvencijom sa jednog na drugi priključak primara transformatora. Zbog toga će se u sekundaru transformatora indukovati napon čija je frekvencija jednaka frekvenciji oscilatora, a amplituda proporcionalna veličini ulaznog signala. Promena znaka ulaznog napona doveće do promene faze izlaznog signala za  $180^\circ$ . Na sl. 3.37a dati su ulazni signali:

$$u_u = \sin 10t, \quad u_u = 1 + \sin 10t \text{ i } u_u = 2 + \sin 10t,$$

respektivno, odozdo naviše, a na sl. 8.37 b,c i d izlazni signali modulatora za date ulaze, respektivno, kada je noseća frekvencija  $100 \text{ s}^{-1}$ . Iz izlaznih signala se vidi da se informacija u ulaznom signalu na izlazu modulatora nalazi u anvelopi (obvojnici) izlaznog signala.

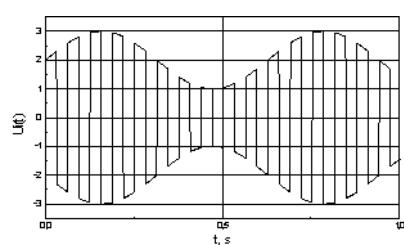
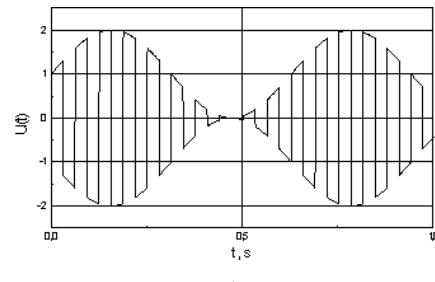
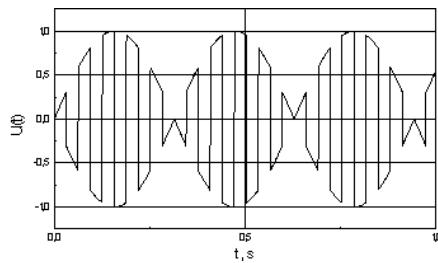
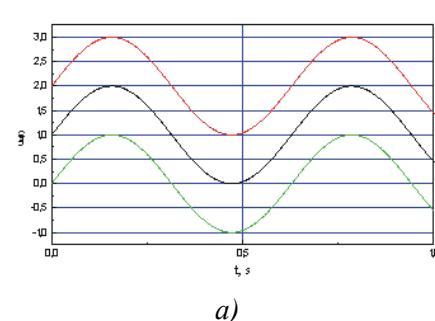
Rad ovakvog tipa modulatora se može poistovetiti sa množenjem dva signala: nosećeg i modulacionog,

$$u_i = u_u(t) \sin \omega_o t. \quad (8.58)$$

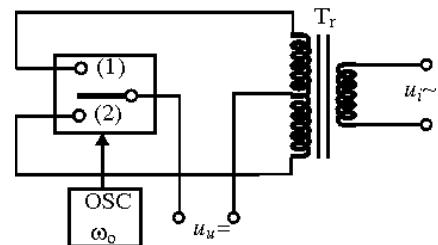
Sa ciljem detaljnije analize rada ovakvog modulatora razmotrićemo šemu na sl. 8.39a koja pojednostavljuje rad modulatora. Na sl. 8.39b prikazan je dijagram stanja prekidača u vremenu. Izlazni signal modulatora je

$$u_i = u_u(t)g(t), \quad (8.59)$$

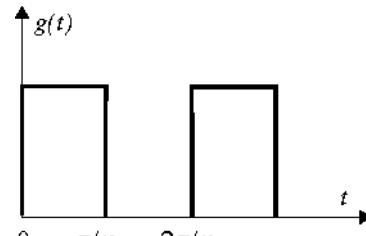
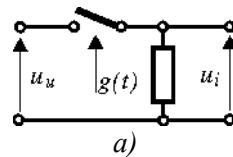
gde je  $g(t)$  periodičan signal, prikazan na sl. 8.39b. Primenom Furijeve transformacije on se može predstaviti redom oblika



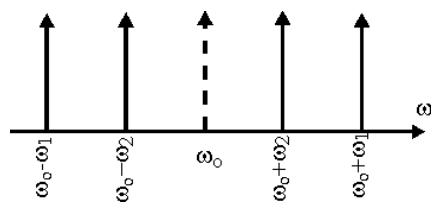
Sl. 8.37. Signalni na ulazu (a) i izlazu (b), (c) i (d) modulatora.



Sl. 8.38. Principska električna šema znakoosetljivog modulatora.



Sl. 8.39. Uprošćena šema modulatora (a) i dajagram rada prekidača (b).



Sl. 8.40.

Spektar signala na izlazu modulatora.

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin \omega_o t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_o t + \dots) \quad (8.60)$$

Neka je ulazni signal suma dva sinusoidalna signala različite frekvencije:  $\omega_1$  i  $\omega_2$ :

$$u_u = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t. \quad (8.61)$$

Izlazni signal biće:

$$\begin{aligned} u_i &= (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin \omega_o t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_o t + \dots) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sin \omega_1 t + \frac{1}{2} \sin \omega_2 t + \frac{2}{\pi} (\sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_o t + \sin \omega_2 t \cdot \sin \omega_o t) + \quad (8.62) \\ &\quad \frac{2}{3\pi} (\sin \omega_1 t \cdot \sin 3\omega_o t + \sin \omega_2 t \cdot \sin 3\omega_o t) + \dots \end{aligned}$$

Ako se proizvod sinus-a dvaju uglova izrazi kao sumu cosinus-a razlike i zbiru uglova dobija se:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{1}{2} \sin \omega_1 t + \frac{1}{2} \sin \omega_2 t + \frac{1}{\pi} [\sin(\omega_o - \omega_1)t - \sin(\omega_o + \omega_1)t] + \\ &\quad \frac{1}{\pi} [\sin(\omega_o - \omega_2)t - \sin(\omega_o + \omega_2)t] + \frac{1}{3\pi} [\sin(3\omega_o - \omega_1)t + \sin(3\omega_o + \omega_1)t] + \dots \quad (8.63) \end{aligned}$$

Kada se na izlazu iz modulatora primeni pojasni filter koji će eliminisati signale niskih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$  kao i signale viših frekvencija ( $\omega_1 \pm 3\omega_o$ ), ( $\omega_2 \pm 3\omega_o$ ), tada će se u izlaznom signalu pojaviti samo signali čija je frekvencija jednaka sumi i razlici frekvencija nosećeg signala i ulaznih signala. Drugim rečima, u spektru izlaznog signala postojale bi linije koje odgovaraju frekvencijama jednakim razlici i sumi navedenih frekvencija, koje su simetrično raspoređene oko linije noseće frekvencije, sl. 8.40. Noseća frekvencija kao i frekvencije ulaznih signala su ugušene. Zbog toga se ovaj princip amplitudne modulacije zove *princip s gušenjem noseće frekvencije*.

Jasno je da je neophodno da noseća frekvencija bude bar dvostruko veća od najveće frekvencije ulaznog signala. U suprotnom slučaju bi i linija spektra ulaznog signala ušla u propusni opseg filtra.

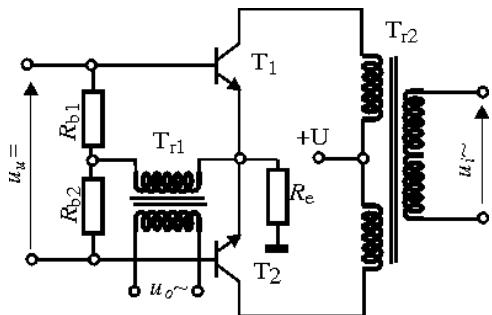
U praksi se koriste različita tehnička rešenja modulatora. Najprostije rešenje, primenjivano u klasičnim servosistemima i operacionim pojačavačima analognih računara, je identično šemi na sl. 8.39. Kao analogni prekidači korišćeni su precizni elektromehanički polarizovani releji, tzv. *čoperi* (engl.: *choper*). Danas se kao analogni prekidači koriste poluprovodničke komponente u CMOS tehnologiji, na primer, kolo CD 4016.

### 8.3.3.2 Modulator sa bipolarnim tranzistorima

Postoje i mnoga druga tehnička rešenja modulatora sa diodama ili tranzistorima. Na sl. 8.41 prikazano je jedno od često korišćenih. Odlika ovog rešenja je u tome što se, osim modulacije, ostvaruje i pojačanje modulisanih signala. Ukratko, rad ovog modulatora je sledeći: na baze tranzistora  $T_1$  i  $T_2$  dovodi se,

preko  $R_{b1}$  i  $R_{b2}$ , naizmenični napon noseće frekvencije iz transformatora  $T_{r1}$ . Kada je ulazni signal jednak nuli, kolektorske struje tranzistora su iste ali suprotnog smera. S toga se u sekundaru  $T_{r2}$  ne indukuje nikakav signal. Ako ulazni signal postoji, kolektorske struje tranzistora biće različite, pri čemu je veća ona kolektorska struja čija je baza na većem potencijalu. Tada će se u sekundaru  $T_{r2}$  indukovati EMS čija je amplituda srazmerna veličini ulaznog napona, frekvencija jednaka nosećoj frekvenciji, a faza zavisiti od polariteta ulaznog napona.

Bez obzira na tip modulatora, od posebnog interesa je kako opisivati njegovu dinamiku. Za praktičnu primenu modulator se identificiše proporcionalnim elementom, jer on, u cilju prilagođenja, vrši samo transformaciju signala iz jednog oblika u drugi, ne uvodeći druge dinamičke modifikacije signala.



Sl. 8.41. Modulator sa tranzistorima.

### 8.3.3.3 Širinsko-impulsni modulator

U savremenim SAU često se koristi princip širinsko-impulsne modulacije (ŠIM) (engl. Pulse Width Modulation (PWM)). Ovaj način modulacije je veoma popularan u energetskoj elektronici za pojačavače snage, jer obezbeđuje minimizaciju gubitaka, omogućavajući postizanje visokog stepena iskorišćenja pojačavača, čak i do 90%. Postoje više načina realizacije ŠIM, zavisno od tipa referentnog signala. U sistemima sa tiristorskim mrežno vođenim pojačavačima koriste se, obično, testerasti referentni signali, što dovodi do nelinearne statičke karakteristike modulatora. U cilju linearizacije tiristorskih pojačavača sa faznim upravljanjem kao referentni signal se koristi signal sastavljen iz delova kosinusoida. Sa razvojem tehnologije snažnih tranzistora: bipolarnih, MOSFET i IGBT, jedan tip ŠIM, u kome je referentni signal naizmenični napon trougaonog oblika, je zauzeo dominantno mesto u praksi. S obzirom na izuzetan značaj ovog tipa modulatora, dalje sledi njegov detaljniji opis.

Na sl. 8.42a prikazan je blok-dijagram ŠIM-a. To je, u osnovi, komparator sa idealnom relejnom karakteristikom. Upoređuju se dva signala: noseći,  $x_o$ , trougaonog oblika, i signal koji treba modulisati,  $x$ . Izlazni signal modulatora je

$$x_m = U_o \operatorname{sgn}(x - x_o), \quad (8.64)$$

$$\text{gde je } \operatorname{sgn}(e) = \begin{cases} +1 & \text{za } e > 0, \\ -1 & \text{za } e < 0. \end{cases}$$

Na sl. 8.42b prikazani su dijagrami rada modulatora za tri različite vrednosti ulaznog signala  $x(t)$ :  $x(t)=0$ ,  $x(t)=+x$ ,  $x(t)=-x$ , odozgo naniže, pri čemu je prepostavljeno da se ulazni signal ne menja u toku jedne periodе nosećeg trougaonog signala. Iz dijagraama se uočava da za  $|x| < A$ , izlazni signal

## Glava 8.: Komponente SAU

---

modulatora ima periodični karakter. Stoga se on može predstaviti Furijeovim redom

$$x_m = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (8.65)$$

gde su  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  - koeficijenti Furievog reda.

Ako je noseća frekvencija trougaonog signala dovoljno velika, a iza modulatora sledi element sa osobinama niskopropusnog filtra (to može biti, sam objekat upravljanja, na primer, motor jednosmerne struje) koji će prigušiti sve naizmenične signale, tada će dalji uticaj imati samo jednosmerna komponenta. Ona se određuje po formuli

$$x_{mo} = \frac{a_o}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (8.66)$$

U datom slučaju, na primer, za  $x(t)=+x$ , na osnovu sračunavanja površina pravougaonika, dobija se

$$x_{mo} = \frac{1}{T} U_o [t_1 - (t_2 + t_1) + (T - t_2)] \quad (8.67)$$

Uzimajući u obzir da je, sa slike,  $t_2 = \frac{T}{2} - t_1$ , ovaj izraz se svodi na

$$x_{mo} = \frac{4U_o}{T} t_1. \quad (8.68)$$

Vreme  $t_1$  se određuje iz jednakosti

$$\left(\frac{A}{T/4}\right)t = x(t) \Rightarrow t = t_1 = \frac{T}{4A}x. \quad (8.69)$$

Na isti način se dobija i za slučaj  $x(t)=-x$ .

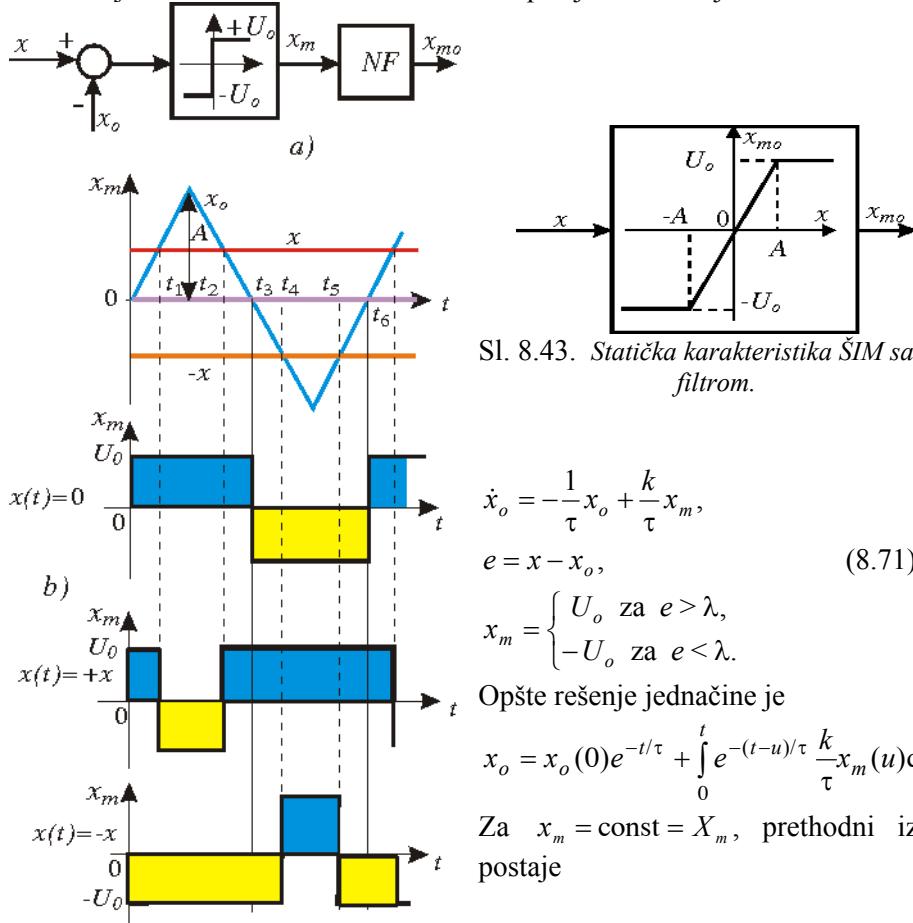
Kao što se vidi, bez obzira na veličinu ulaznog signala, u granicama  $|x| < A$ , izlazni signal je linearna funkcija ulaznog signala. Prema tome, ŠIM je linearni bezinercijalni element. Njegova statička karakteristika ima oblik karakteristike pojačavača sa zasićenjem, sl. 8.43.

Konačno se dobija

$$x_{mo} = \frac{U_o}{A} x. \quad (8.70)$$

ŠIM sa statičkom karakteristikom bliskom onoj na sl. 8.43 može se ostvariti i bez dodatnog generatora trougaonih signala, ako se umesto idealnog relejnog elementa koristi relejni element sa histerezisom, obuhvaćen negativnom povratnom spregom, preko inercijalnog elementa prvog reda [12], sl. 8.44. U ovom ŠIM-u se, kada je ulazni signal jednak nuli, stvaraju prinudne oscilacije simetričnog trougaonog oblika, koje na izlazu relejnog elementa generišu povorku trougaonih simetričnih impulsa čija je srednja vrednost jednak nula. Ako je ulazni signal različit od nule, doći će do pomeranja trougaonog signala naviše ili naniže, zavisno od znaka ulaznog signala. To će dovesti do generisanja povorke nesimetričnih pravougaonih impulsa čija će srednja vrednost biti različita od nule, odgovarajućeg znaka.

Neka je širina histerezisa  $\pm a$ . Sistem se opisuje sledećim jednačinama



$$\dot{x}_o = -\frac{1}{\tau}x_o + \frac{k}{\tau}x_m, \quad (8.71)$$

$$x_m = \begin{cases} U_o & \text{za } e > \lambda, \\ -U_o & \text{za } e < \lambda. \end{cases}$$

Opšte rešenje jednačine je

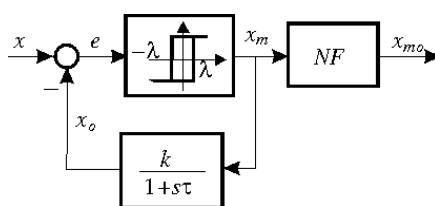
$$x_o = x_o(0)e^{-t/\tau} + \int_0^t e^{-(t-u)/\tau} \frac{k}{\tau} x_m(u) du.$$

Za  $x_m = \text{const} = X_m$ , prethodni izraz postaje

Sl. 8.42. Signalni ŠIM sa trougaonim nosećim talasom.

$$x_o(t) = x_o(0)e^{-t/\tau} + kX_m(1 - e^{-t/\tau}). \quad (8.72)$$

Posle linearizacije, razvojem u red eksponente, za malo  $t$ , dobija se



Sl. 8.44. Blok-šema ŠIM sa samooscilacijama.

$$x_o(t) = x_o(0)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + kX_m \frac{t}{\tau} = x_o(0) + [kX_m - x_o(0)] \frac{t}{\tau}. \quad (8.73)$$

## Glava 8.: Komponente SAU

Neka je u početnom trenutku  $e=+\lambda$ , kada na ulazu deluje  $x(t)=x$ . Tada je  $X_m=+U_o$  i  $x-x_o(0)=\lambda$ , tj.  $x_o(0)=x-\lambda$ . Zamenjujući u prethodni izraz dobija se

$$x - x_o(t) = \lambda - [kU_o - x + \lambda] \frac{t}{\tau}. \quad (8.74)$$

Izjednačavajući ovaj izraz sa  $-\lambda$ , dobijemo vreme trajanja pozitivnog impulsa na izlazu releja

$$T^+ = \frac{2\lambda\tau}{kU_o - x + \lambda}, \quad (8.75)$$

Na isti način, za  $e=-\lambda$ ,  $X_m=-U_o$ ,  $x_o(0)=x+\lambda$ , pa se dobija vreme trajanja negativnog impulsa

$$T^- = \frac{2\lambda\tau}{kU_o + x - \lambda}. \quad (8.76)$$

Zanemarujući  $\lambda$  u imenocu, jer je  $\lambda \ll kU_o$ , perioda oscilacija je

$$T = T^+ + T^- = \frac{4\lambda\tau}{k^2 U_o^2 - x^2}, \quad (8.77)$$

a srednja vrednost izlaznog signala je

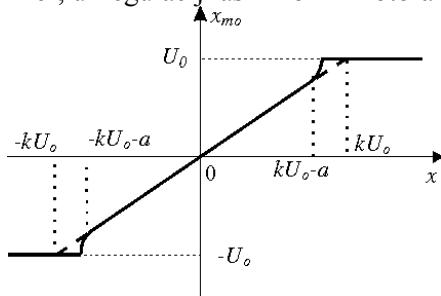
$$x_{mo}(t) = \frac{T^+ - T^-}{T} U_o = \frac{1}{k} x(t), \quad (8.78)$$

odakle se vidi da se i ovaj tip modulatora može aproksimirati linearnim pojačavačkim elementom, čije je pojačanje obrnuto proporcionalno pojačanju lokalne povratne sprege modulatora.

Statička karakteristika, kao u prethodnom slučaju, je karakteristika pojačavača sa zasićenjem. Ako se uzme u obzir i veličina  $\lambda$ , doći će do nelinearnih izobličenja na krajevima karakteristike, za ulazne signale  $|x| > kU_o - \lambda$ , sl. 8.45.

Frekvencija modulisanog talasa zavisi od veličine ulaznog signala. Ona opada sa porastom ulaznog signala i postaje jednaka nuli kada ulazni signal dostigne vrednost  $kU_o - \lambda$ .

Ovakav način ŠIM je prisutan u sistemima sa histerezisnom regulacijom, na primer, u regulaciji asinhronih motora za sintezu strujno regulisanih naponskih



Sl. 8.45. Statička karakteristika ŠIM sa sopstvenim oscilacijama.

invertora, kada je umesto inercijalnog elementa na sl. 8.44 sam objekat regulacije (namotaj motora). On je i niskofrekvenčni filter. ŠIM se mogu konstruisati i sa nosećim talasom sinusoidalnog tipa. Međutim, tada statička karakteristika postaje nelinearna, sa manjim koeficijentom pojačanja u okolini ravnotežnog stanja.

### 8.3.4 Demodulatori

Demodulatori su elementi koji transformišu naizmenične signale u ekvivalentne jednosmerne tako da se očuva informacija koju nosi naizmenični signal. S obzirom na to da se u automatici uglavnom koriste dva tipa modulatora: sa amplitudnom i sa širinsko impulsnom modulacijom, ovde će biti reči o demodulaciji ovih signala. Odmah treba napomenuti da u najvećem broju slučajeva nije potreban demodulator za širinsko-impulsno modulisane signale, jer, obično, sam element koji sledi iza ŠIM je niskopropusni filter koji, praktično, reaguje samo na niskofrekvenčni signal, prigušujući noseći talas visoke frekvencije. Zbog toga ćemo se zadržati samo na demodulatorima amplitudno modulisanih signala sa sinusoidalnim nosećim talasom. S obzirom na to da je informacija ulaznog naizmeničnog signala sadržana u amplitudi i fazi, demodulator mora biti fazno-osetljiv. Svaka promena faze ulaznog signala za  $\pi$  mora izazvati promenu znaka izlaznog jednosmernog signala. Osim toga, od demodulatora se zahteva da obezbedi linearost statičke karakteristike u opsegu promene ulaznih signala od praktičnog interesa, da ima malo inercijalno kašnjenje i malu talasnost izlaznog signala. Prvi zahtev se može lako ostvariti, dok su druga dva zahteva protivrečna. Zadovoljavajuće rešenje se može naći samo u oblasti primene viših frekvencija za prenos informacija.

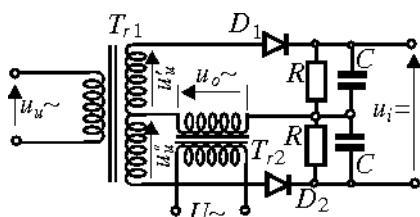
Kao demodulatori amplitudno-modulisanih signala koriste se pasivne ili aktivne komponente - diode ili tranzistori. Štaviše, napred navedene šeme modulatora mogu, uz neznatne izmene, postati demodulatori. U praksi servosistema najveću primenu su našli faznoosetljivi diodni ili tranzitorski demodulatori.

#### 8.3.4.1 Fazno-osetljivi diodni demodulator

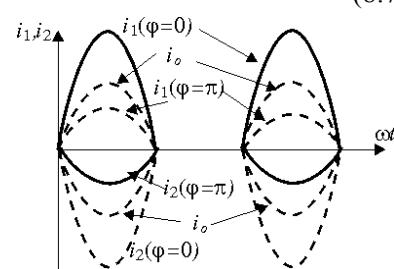
Prikazan je na sl. 8.46. Ovo je najprostiji demodulator za primenu u SAU i često se koristi. Na primarni transformatora  $T_{r1}$  dovodi se ulazni amplitudno modulisani signal  $u_{u\sim}$  koji nosi informaciju. Izlazni jednosmerni signal se dobija na krajevima katoda dioda  $D_1$  i  $D_2$ , koji se filtrira pomoću  $RC$  filtra. Napon za sinhronu detekciju,  $u_{o\sim}$ , se dobija iz sekundarnog transformatora  $T_{r2}$ , čiji se primarni napaja stabilnim naizmeničnim naponom iste frekvencije kao i ulazni signal.

Za ispravan rad demodulatora potrebno je ostvariti osnovni uslov [11]

$$u_{u\max} = u_{u\max}'' < u_{o\max}. \quad (8.79)$$



Sl. 8.46. Fazno-osetljivi diodni demodulator sa jednostranim ispravljanjem.



Sl. 8.47. Signali promene struje kroz otpornike R, za C=0.

## Glava 8.: Komponente SAU

Statička karakteristika demodulatora mora biti simetrična u odnosu na koordinatni početak, tj. da za nulti ulazni signal imamo i nulti izlazni signal. Zaista, ako su diode  $D_1$  i  $D_2$  uparene, a ulazni signal je jednak nuli, za vreme jedne poluperiode napona  $u_o$  obe diode će biti polarisane direktno, a za vreme druge - inverzno. Pretpostavljajući da je  $C=0$ , kroz otpornosti  $R$  filtra će, u oba slučaja, proticati iste struje suprotnog smera, pa će ukupni izlazni jednosmerni napon biti jednak nuli, sl. 8.47.

Neka je, sada, ulazni napon  $u_u$  različit od nule i ima fazni stav kao na slici 8.46. Neka, takođe, napon  $u_o$  ima prikazani fazni stav. Tada će na anodi  $D_1$  biti priložen efektivni napon  $u_{D1} = u_o + u_u$ , a na anodi  $D_2$  -  $u_{D2} = u_o - u_u$ . S toga će se struje koje protiču kroz diode razlikovati, biće različiti i imati suprotne polarizacije padovi napona na otpornicima  $R$ . Zbog toga se, za srednju vrednost napona na izlazu, može napisati

$$u_i = \frac{\sqrt{2}}{\pi} [u_o + u_u - (u_o - u_u)] = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u_u. \quad (8.80)$$

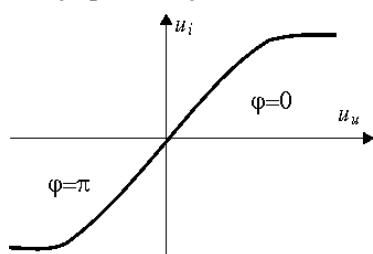
Dakle, izlazni jednosmerni signal je jednak dvostrukoj vrednosti ulaznog signala, pri čemu će potencijal katode diode  $D_1$  biti viši od potencijala diode  $D_2$ .

Ako fazni stav referentnog napona  $u_o$  ostane isti, a promeni se fazni stav ulaznog napona (signala)  $u_u$  za  $\pi$ , tada će nastupiti suprotna situacija - na izlazu će se dobiti jednosmerni signal iste veličine ali suprotnog znaka (potencijal katode  $D_2$  biće viši od potencijala katode  $D_1$ ).

Opisana situacija podrazumeva da su referentni napon i ulazni signal strogo sinfazni ili protivfazni. Na sl. 8.47 prikazani su talasni oblici ovih signala za dva opisana karakteristična slučaja. Međutim, ako ovi signali nisu sinhronizovani, tj. ne poklapa im se prolazak kroz nulu, tada nastupaju fazna izobličenja. Neka je

$$u_o = U_{o \max} \sin \omega t; \quad u_u = U_{u \max} \sin(\omega t - \varphi), \quad (8.81)$$

tj. neka ulazni signal kasni za ugao  $\varphi$  u odnosu na referentni napon. Uz ispunjenje osnovnog uslova (8.79) može se sa dovoljnom tačnošću pretpostaviti da struje kroz jednu i drugu diodu kasne za naponima za isti ugao  $\theta$ , koji se određuje po relaciji [9]:



Sl. 8.48. Statička karakteristika fazno-osetljivog diodnog demodulatora.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{u_u \sin \varphi}{u_o + u_u \sin \varphi}, \quad (8.82)$$

a srednja vrednost izlaznog jednosmernog napona će biti

$$u_i = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{uR}{R + R_d} \cos \theta \cos \varphi, \quad (8.83)$$

odakle se zaključuje da će izlazni napon opadati sa porastom ugla  $\varphi$ .  $RC$  filter unosi inercijalno kašnjenje. Pretpostavljajući da je dinamička otpornost diode nepromenljiva i da

iznosi  $R_d$  te da važi odnos  $R \gg R_d$ , onda se inercijalnost demodulatora može okarakterisati vremenskom konstantom  $R_d C$ , kada dioda vodi (punjenje

kondenzatora). Međutim, kada dioda ne vodi kondenzator se prazni preko otpornika  $R$ . Stoga je ovaj element dinamički nelinearan i može se govoriti samo o približnoj vrednosti vremenske konstante.

Statička karakteristika razmatranog demodulatora prikazana je na sl. 8.48.

## 8.4 Pojačavači

Signalni, dobijeni iz detektora signala greške sistema, najčešće nemaju potreban nivo (napon) niti snagu (struju) za neposredno delovanje na objekat upravljanja ili njegov izvršni organ. Veoma su retki slučajevi kada je to moguće. Isto tako, u mnogim slučajevima, signalni od mernih ili pretvaračkih elemenata ne mogu se direktno voditi na detektor greške ili na izvršni organ, već se moraju prethodno pojačati po naponu i/ili struji (po nivou i/ili po snazi). Osim toga, kao što je ranije rečeno, osnovni značaj primene sistema sa negativnom povratnom spregom zasniva se na velikom pojačanju u direktnoj grani. Elementi koji ostvaruju pojačanje signala bilo po naponu ili po snazi (struji) nazivaju se *pojačavači*. Sa tog stanovišta razlikujemo *pojačavače napona* i *pojačavače snage (struje)*.

Pojačavači su najzastupljeniji elementi u SAU. Imaju zadatku da signal, doveden na njihov ulaz, samo pojačaju ne menjajući mu oblik. Pri tome, idealnim se smatra pojačavač sa beskonačnom ulaznom i nultom izlaznom impedansom, sa konstantnim pojačanjem, nezavisnim od frekvencije pojačavanog signala. Takav pojačavač se ne može ostvariti u praksi. Realni pojačavač unosi kako nelinearna izobličenja tako inercijalna i transportna kašnjenja; ima konačnu ulaznu i izlaznu impedansu. Ipak stepen nelinearnih izobličenja, inercijalnosti i transportnog kašnjenja u mnogim realnim pojačavačima, u odnosu na osobine drugih dinamičkih elemenata koji ga okružuju (izvršni organ, objekat upravljanja), mogu se najčešće zanemariti i pojačavač smatrati idealnim. U svakom konkretnom slučaju potrebno je proceniti uticaj zanemarenih neidealnosti na izučavane osobine sistema u kojima se posmatrani pojačavač primenjuje. U cilju minimalizacije cene koštanja, često se namerno koriste nelinearni pojačavači relejnog tipa. Međutim, i u tom slučaju neke od napred navedenih osnovnih osobina pojačavača su očuvane. U praksi SAU primenu su našli mnogi tipovi pojačavača, koji se mogu svrstati u različite kategorije, u zavisnosti od principa rada i korišćene energije za napajanje. Treba istaći osnovnu činjenicu da se pojačanje signala ostvaruje na račun energije kojom se napaja pojačavač. Prema vrsti te energije pojačavači se mogu klasifikovati u sledeće tipove: *elektromašinske, magnetne, elektromagnetne, elektronske, mehaničke, hidraulične, pneumatske, dielektrične*.

U pogledu oblika statičkih karakteristika ulaz-izlaz svrstavaju se u:

- *linearne*,
- *nelinearne* (koji se mogu klasifikovati na pojačavače sa nesuštinskom i suštinskom nelinearnošću)

U pogledu konstrukcije pojačavači se dele na:

pojačavače bez povratne spregе, pojačavače sa povratnom spregom; jednostepene i višestepene.

U jednom SAU mogu se primenjivati jedan ili više tipova navedenih pojačavača istovremeno: na primer elektronski i hidraulični, elektronski i magnetni, elektronski i elektromehanički i sl.

U daljem izlaganju osnovna pažnja biće posvećena pojačavačima koji koriste električnu energiju za napajanje, jer su našli najširu primenu u praksi SAU.

#### 8.4.1 Elektromашinski obrtni pojačavači

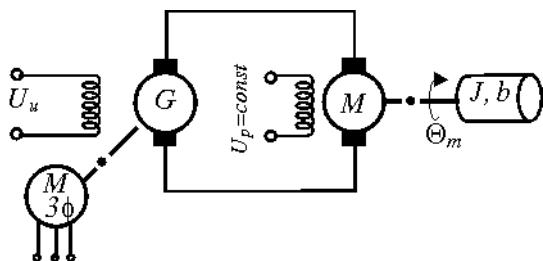
Ovi pojačavači danas, za savremene konstrukcije, imaju mali značaj, jer su tehnološki prevaziđeni drugim vrstama pojačavača, prvenstveno elektronskim. Međutim, oni se mogu sresti u praksi, u starijim konstrukcijama, pa je potrebno da inženjeri automatičke imaju neke osnovne informacije o njima. Tri su osnovna predstavnika elektromehaničkih pojačavača: *generator jednosmerne struje (jednostepeni), amplidin (dvostepeni generator jednosmerne struje) i generator naizmenične struje (alternator).*

##### 8.4.1.1 Generator jednosmerne struje

Generator jednosmerne struje kao jednostepeni pojačavač je obrađen detaljnije kao objekat upravljanja u poglavljju 2. Stoga se nećemo ovde detaljno zadržavati na njegovim osobinama. Funkcija prenosa ovog pojačavača je data izrazom (8.7). S obzirom na to da je vremenska konstanta kola rotora mnogo manja od vremenske konstante kola pobude, ovaj pojačavač se može aproksimativno opisati funkcijom prenosa

$$W(s) = \frac{K}{(1 + sT_p)}. \quad (8.84)$$

Vremenska konstanta  $T_p$  je velika (reda 0,2 - 5 s za generatore od 1 - 1000 kW), što čini ovaj pojačavač sporim. Stoga se on i primenjivao u sporim regulacionim sistemima kao što su valjaonički stanovi, budilice generatora u elektranama, sistemi za namotavanje traka u tekstilnoj industriji i sl. Jedna od najčešćih primena je u kombinaciji sa motorom jednosmerne struje, u tzv. Vard-Leonardovoj grupi, čija je principijska šema prikazana na sl. 8.49.



Sl. 8.49.

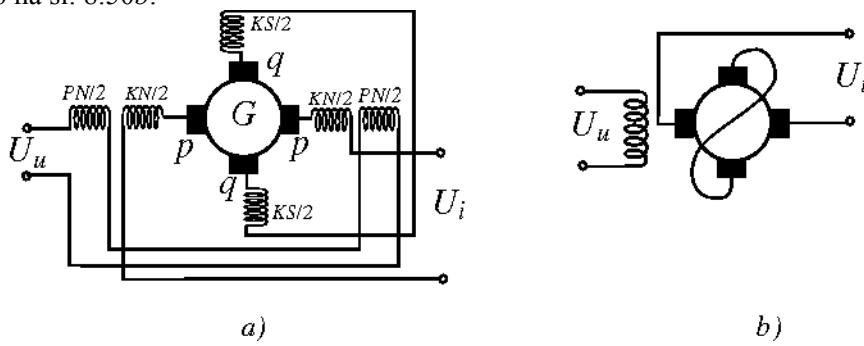
Principska šema Vard-Leonardove grupe.

Preporučuje se studentima da sami izvedu funkciju prenosa Vard-Leonardove grupe.

Izvor: [www.electrical-engineering-articles.com/2015/01/principska-sema-vard-leonardove-grupe.html](http://www.electrical-engineering-articles.com/2015/01/principska-sema-vard-leonardove-grupe.html)

#### 8.4.1.2 amplidin

To je dvostepeni pojačavač, sl. 8.50, koga čine dva redno vezana generatora jednosmerne struje specijalne konstrukcije u obliku jedne jedinstvene električne mašine. Za razliku od jednostepenog generatora, amplidin u statoru ima dva para polova: podužni i poprečni, a na kolektoru dva para četkica: podužni ( $p-p$ ) i poprečni ( $q-q$ ). Na podužnom paru polova smeštaju se sekcijske pobudne namotaje (PN) prvog stepena generatora i kompenzacione namotaje (KN), a na poprečnom - sekcijske pobudne namotaje drugog stepena generatora koji se kratkospajaju (KS). Krajevi pobude prvog stepena predstavljaju ulaz pojačavača. Krajevi pobudne namotaje drugog stepena generatora se napajaju sa poprečnog para četkica (sa izlaza prvog stepena pojačanja). Izlazni signal se uzima sa podužnog para četkica ( $p-p$ ) (od drugog stepena pojačanja). Kako se usled opterećenja javlja reakcija rotora, usmerena na poništenje polja pobude prvog stepena pojačavača, struja opterećenja se vodi od podužnog para četkica preko kompenzacionog namotaja. Na električnim šemama amplidin se označava kao na sl. 8.50b.



Sl. 8.50. Principijska šema amplidina (a) i usvojena oznaka (b).

S obzirom na to da ovde postoje tri kola: pobudno, poprečno i kolo opterećenja koje uključuje i kompenzacioni namotaj, funkcija prenosa amplidina može se predstaviti rednom vezom pojačavačkog i tri inercijalna elementa prvog reda, tj.:

$$W(s) = \frac{K}{(1+sT_p)(1+sT_q)(1+sT_o)}, \quad (8.85)$$

gde su:  $K$ -ukupno pojačanje amplidina,  $T_p$ - vremenska konstanta pobudnog kola

$$T_p = \frac{L_p}{R_p}; \quad (8.86)$$

$T_q$ - vremenska konstanta poprečnog kola

$$T_q = \frac{L_a + L_q}{R_a + R_q}, \quad (8.87)$$

$L_a, R_a$  - induktivnost i otpornost namotaja rotora,  $L_q, R_q$  - induktivnost i otpornost kratkospojenog namotaja;  $T_o$  - vremenska konstanta kola opterećenja

$$T_o = \frac{L_o + L_a + L_k}{R_o + R_a + R_k}, \quad (8.88)$$

$L_k$ ,  $R_k$  - induktivnost i otpornost kompenzacionog namotaja,  $L_o$ ,  $R_o$ , - induktivnost i otpornost opterećenja.

Iz funkcije prenosa se vidi da amplidin ima veliku inerciju te se primenjivao u sporim sistemima sa vrlo velikim pojačanjima po snazi (valjaonički stanovi za hladno valjanje).

#### 8.4.1.3 Alternator

**Alternator** kao generator naizmenične, najčešće trofazne struje, uz primenu ispravljača i filtra može da zameni generator jednosmerne struje. Prednost mu je u tome što umesto kolektora ima dva prstena na rotoru kojim se napaja pobudno kolo jednosmernom strujom te stoga nema varničenja. Sve ostale osobine su slične generatoru jednosmerne struje.

#### 8.4.2 Elektronski pojačavači

Elektronski pojačavači se konstrušu na osnovu elektronskih komponenata: elektronskih cevi, tranzistora ili tiristora.

##### 8.4.2.1 Pojačavači sa elektronskim cevima

Ovi pojačavači su sasvim potisnuti iz upotrebe u SAU te se njima nećemo baviti. Jedina oblast gde ostaju nezamenljivi, zbog visokog kvaliteta reprodukcije signala, su pojačavači za muzičke instrumente i snažne emisione cevi u radiostanicama. Osim toga, treba ukazati da su elektronske cevi manje osetljive na radijaciju, te se još uvek koriste u nekim vojnim sistemima.

##### 8.4.2.2 Pojačavači sa tranzistorima

Imaju dominantnu ulogu u SAU kako kao pojačavači napona tako i kao pojačavači snage. Ova oblast tehnike se veoma uspešno razvija u drugoj polovini XX veka i predstavlja generator eksplozivnog razvoja tehnike i tehnologije, posebno informatičke, oličene u širokoj primeni računara u svim oblastima ljudskog delovanja pa i u automatici.

S obzirom na veliku razvijenost i raznootvarnost elektronskih pojačavača sa tranzistorima, i na postojanje odgovarajuće literature za izučavanje istih, nećemo se upuštati u detalje i sva moguća rešenja. Osnovnu pažnju ćemo posvetiti nekim bitnim osobinama tranzistorских pojačavača i rešenjima koja se najčešće primenjuju u realizaciji SAU. Na taj način se mogu stići osnovna znanja neophodna za praćenje ove oblasti koja se i dalje dinamično razvija.

Pojačavači sa tranzistorima, osim navedene podele na pojačavače napona i pojačavače snage, po načinu realizacije, u tehničkom smislu, mogu se klasifikovati na: *pojačavače sa diskretnim komponentama* i *integrисane pojačavače*. I jedan i drugi tip pojačavača, u biti, ima osnovne elemente bazirane na tipičnim rešenjima pojačavača sa diskretnim (pojedinačnim) tranzistorima.

U automatici se u kolima pojačanja i obrade signala koriste integrisani tranzistorski pojačavači koji su poznati pod nazivom *operacioni pojačavači*,

dok se u kolima pojačanja snage koriste rešenja sa diskretnim tranzistorima, za srednje i velike snage, ili sa integriranim pojačavačima za manje snage.

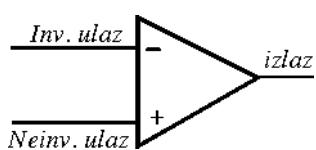
#### 8.4.2.2.1 Operacioni pojačavači (OP)

To su integrirani tranzistorski pojačavači sa jakom negativnom povratnom spregom, realizovani na bazi diferencijalnog pojačavača, koje karakterišu sledeće osobine:

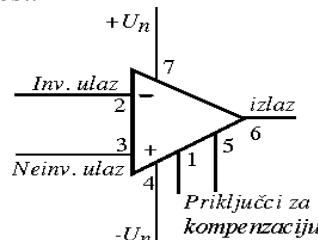
1. veoma veliko pojačanje,  $2 \cdot 10^4 - 10^6$  puta, pa se u praksi smatra da im je pojačanje beskonačno;
2. velika ulazna impedansa, reda stotinu  $k\Omega$  do reda  $M\Omega$ , praktično  $\infty$ , pa je ulazna struja u pojačavač ravna nuli, tj. OP ne opterećuje element koji mu prethodi;
3. mala izlazna impedansa, što omogućava prenošenje signala bez deformacije na naredne komponente koje slede iza OP.

Naravno, navedene osobine su idealizovane. Međutim, te idealizacije ne unose bitne promene u inženjerskom prilazu realizaciji raznovrsnih rešenja sa OP. Integrirani OP imaju dva ulaza i jedan izlaz. Prvi ulaz se naziva *invertujući*, a drugi - *neinvertujući*. Ovi nazivi definišu fazu (znak) izlaznog signala u odnosu na odgovarajući ulaz. Šematski prikaz OP dat je na sl. 8.51. Na ovoj osnovnoj oznaci ukazana su samo tri pristupa - dva ulaza i jedan izlaz. U detaljnijim šemama, pored ovih pristupa postoji i: priključci za napajanje kao i priključci za kompenzaciju drifta nule i frekvencijsku kompenzaciju. Na sl. 8.52 je data detaljnija principska oznaka jednog od često korišćenih OP, μA 741M, u metalnom kućištu.

Drift nule OP javlja se zbog nesimetričnosti u realizaciji diferencijalnih pojačavača i manifestuje se kao pojava naponskog signala na izlazu kada su oba ulaza OP na nultom potencijalu. Taj izlazni napon sveden na ulaz OP predstavlja *offset* koji unosi pogrešnost OP. Tu grešku treba kompenzovati u realizacijama koje zahtevaju visoku preciznost.



Sl. 8.51. Usvojena principska oznaka za OP.



Sl. 8.52. Šematski prikaz OP μA 741 M.

Brojevi bez zagrada odnose se na metalno kućište, a bez zagrada na 14-pinsko kućište.

S druge strane, zbog parazitnih sprega induktivnog i kapacitivnog karaktera u samom OP i elementima koji su u vezi sa njim, pojačanje OP zavisi od frekvencije. Može se dogoditi da se u blizini granične frekvencije propusnog opsega javi takva fazna razlika signala da OP kao sistem sa povratnom spregom postane nestabilan i da se javi samooskulacija. U cilju njihovog sprečavanja u nekim OP postoje priključci za frekvencijsku kompenzaciju, a u nekim izvo-

## Glava 8.: Komponente SAU

---

denjima je ugradena frekvencijska kompenzacija u samom OP, kao na primer u OP,  $\mu\text{A}$  741.

### Osnovne šeme primene OP

Postoji nekoliko osnovnih šema korišenja OP. Većina od njih koristi invertujući ulaz, dok se neinvertujući ulaz uzemljuje.

**Sumator.** Pretpostavimo, u najopštijem slučaju, šemu veze kao na sl. 8.53, gde su  $Z_{ui}$ ,  $i=1,2,\dots$ , i  $Z_p$  - ulazne i impedansa povratne sprege, respektivno. S obzirom na uslove koji karakterišu OP, potencijal neinvertujućeg ulaza u odnosu na masu je blizak nuli i naziva se *virtualna nula*. U toj tački je suma struja jednaka nuli, jer OP ima  $\infty$  ulaznu impedansu. Tada se može napisati

$$\sum_{i=1}^k i_i + i_p = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{u_{ui}}{Z_i} + \frac{U_{iz}}{Z_p} = 0 \Rightarrow u_{iz} = -Z_p \sum_{i=1}^k \frac{u_{ui}}{Z_i} = -\sum_{i=1}^k \frac{Z_p}{Z_i} u_{ui} \quad (8.89)$$

Iz ovog izraza se vidi da je izlazni napon jednak sumi, sa negativnim znakom, ulaznih napona pomnoženih sa odgovarajućim težinskim (ponderišućim) faktorima koji predstavljaju odnos impedanse povratne sprege i odgovarajuće impedanse ulaza. U posebnom slučaju, ako su sve ove impedanse međusobno jednakе, data šema predstavlja algebarski sumator ulaznih signala, tj.

$$u_i = -\sum_{i=1}^k u_{ui}. \quad (8.90)$$

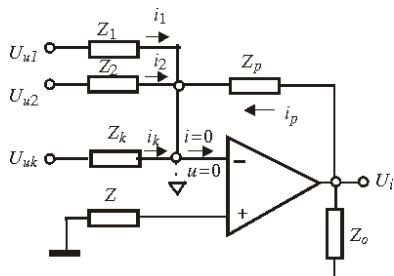
**Invertor.** Neka je  $k=1$ .  $Z_p = Z_l = R$ . Tada je  $u_i = -u_u$ . Prema tome, tada OP samo menja fazu za  $180^\circ$  ulaznom signalu, tj. inverte mu znak.

**Pojačavač-invertor.** Neka je  $k=1$ .  $Z_p = KZ_l$ . Tada je  $u_i = -Ku_u$  i OP pojačava  $K$  puta ulazni signal i obrće mu fazu za  $180^\circ$ .

**Integrator.** Neka je impedansa na ulazu samo aktivna i ima vrednost  $R$ . Neka je element povratne sprege kondenzator kapacitivnosti  $C$ . Tada se, koristeći (8.89) može napisati

$$\frac{u_u}{R} + C \frac{du_c}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{RC} u_u \Rightarrow u_i = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_u dt. \quad (8.91)$$

Zaključuje se da takva šema obavlja funkciju integraljenja. Prema tome OP sa kondenzatorom u povratnoj sprezi i omskom otpornošću na invertujućem ulazu je operacioni integrator. On ima veliku ulogu u realizaciji analognih računara, odnosno u formiraju funkcionarnih elemenata za transformaciju signala u vremenski kontinualnim SAU. Integrator se na šemama za transformaciju signala predstavlja kao na sl. 8.54b. S obzirom na to da kondenzator ima osobinu da pamti, u trenutku dovođenja ulaznog signala može postojati izlazni napon na OP koji se može tretirati kao početni uslov diferencijalne jednačine (8.91), te je potpuni izraz za integrator



Sl. 8.53. Sumator sa OP.

$$C \frac{du_u}{dt} + \frac{u_i}{R} = 0 \Rightarrow u_i(t) = -RC \frac{du_u}{dt}. \quad (8.92)$$

$$u_i(t) = u_{io} - \frac{1}{RC} \int_0^t u_u dt. \quad (8.92)$$

Na usvojenoj oznaci integratora početni uslov se označava kružićem sa naznakom vrednosti.

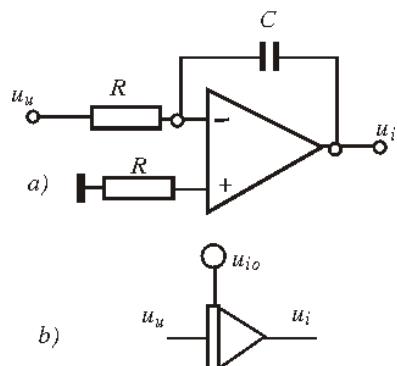
**Diferencijator.** Zamenom mesta elementima integratora (kondenzatoru i otporniku) dobija se šema diferencijatora. Zaista, tada važe sledeće relacije

$$C \frac{du_u}{dt} + \frac{u_i}{R} = 0 \Rightarrow u_i(t) = -RC \frac{du_u}{dt}. \quad (8.93)$$

odakle se jasno vidi da je izlazni signal proporcionalan diferencijalu ulaznog signala.

U praksi se ovaj operacioni element retko koristi jer veoma ističe uvek prisutne šumove. Umesto ovog "idealnog" diferencijatora radije se koristi realni diferencijator realizovan pomoću integratora, pojačavača-sumatora i invertora, obuhvatajući pojačavač negativnom integralnom povratnom spregom.

**Neinvertujući pojačavač.** Ako je potrebno pojačati signal bez invertovanja tada se koristi šema neinvertujućeg pojačavača prikazana na sl. 8.55a.



Sl. 8.54. Principska šema i oznaka integratora sa OP.

Strukturalna blok-šema ovog pojačavača prikazana je na istoj slici, b. Iz nje se nalazi spregnuti prenos

$$K_{ni} = \frac{K}{1 + \beta K} \Big|_{K \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{\beta}; K \rightarrow \infty. \quad (8.94)$$

S druge strane je

$$\beta \Big|_{R_{ul} \rightarrow \infty} = \frac{R_1}{R_1 + R_p}. \quad (8.95)$$

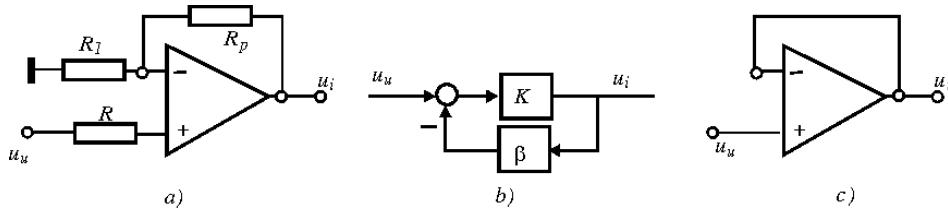
Na osnovu ova dva izraza ima se:

$$K_{ni} = 1 + \frac{R_p}{R_1}. \quad (8.96)$$

Može se uočiti da otpornost  $R$  ne utiče na pojačanje. Međutim, ulazna impedansa celog kola je velika i iznosi

$$R_{uni} = R_{up}(1 + K\beta), \quad (8.97)$$

gde je  $R_{up}$  - ulazna impedansa samog OP.

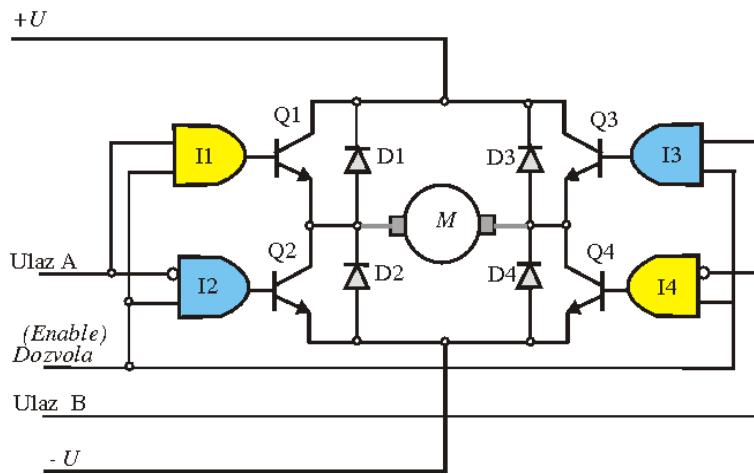


Sl. 8.55. Šema neinvertujućeg pojačavača (a); njegova struktura blok-šema (b); šema naponskog sleditelja (c)

**Naponski sleditelj.** Kada je potrebno ostvariti prenos signala sa jediničnim pojačanjem uz prilagođenje impedansi, tada se, na osnovu neinvertujućeg pojačavača, uzimajući da je  $R_p=0$ ,  $R_1=\infty$ , dobija, shodno (8.96) jedinično pojačanje. Šema naponskog sleditelja prikazana je na sl. 8.55c.

#### 8.4.2.2.2 Tranzistorski pojačavači snage

U SAU se koriste različiti tipovi pojačavača snage sa tranzistorima. Za upravljanje motorima jednosmerne struje u tzv. četvorokvadrantnom režimu rada (motorni režimi sa promenom smera obrtanja i režimi protivstrujnog i dinamičkog ili generatorskog kočenja) koriste se šeme sa četiri tranzistora koji, zajedno sa opterećenjem - motorom, imaju oblik latiničnog slova H te se u literaturi nazivaju *H-mostni pojačavači*, odnosno kraće *H-pojačavači*. Izrađuju se kao integrisani sklopolovi (na primer L292, L298 firme SGS) ili sa diskretnim komponentama, za veće snage. Na sl. 8.56 data je principska šema H-pojačavača sa upravljačkom logikom. Pojačavač radi u impulsnom režimu rada u cilju minimizacije gubitaka. Pobuđuje se pravougaonim impulsima visoke frekvencije (nekoliko kHz ili desetina kHz) iz širinsko-impulsnog modulatora (videti odeljak *Širinsko-impulsni modulator*) tako da srednja vrednost napona na motoru za periodu odgovara željenom naponu napajanja.



Sl. 8.56. Principska šema H-pojačavača za upravljanje jednosmernim motorom.

H-pojačavač se napaja iz izvora jednosmernog napona (ne mora biti stabilisan ali je poželjno da bude dobro filtriran kada se jednosmerni napon dobija iz ispravljača). Pojačavač ima tri logička ulaza: A, B i Dozvola (Enable). Poslednji, kada je na logičkoj jedinici, omogućava rad pojačavača. Taj ulaz se koristi za zabranu rada kola u slučaju reagovanja prekostrujne zaštite. Dozvola/zabrana rada ide preko logičkih I-kola I1-I4. Ulazi A i B deluju direktno na kola I1 i I3, a inverovani su za logička kola I2 i I4, respektivno. Osim toga, za zaštitu tranzistora od inverznih napona (struja), kao i za omogućavanje četvorokvadrantnog rada motora, primenjene su diode D1 - D4. Dat pojačavač može da radi u *nesimetričnom* ili u *simetričnom* režimu rada.

## 8.5 Izvršni organi

U prvoj glavi je data definicija izvršnih organa. To su elementi koji ostvaruju spregu između regulatora i objekta upravljanja ili, drugačije rečeno, vrše prilagođenje regulatora (upravljačkog sistema) na objekat. S obzirom na mnoštvo različitih tipova u praksi mogućih objekata upravljanja, nemoguće je unapred definisati elemente koji će uvek igrati ulogu samo izvršnih organa SAU. Na primer, ako se upravlja motorom jednosmerne struje, on je tada objekat upravljanja, a izvršni organ u tom sistemu je generator jednosmerne struje (običan ili amplidin), magnetni pojačavač ili elektronski pojačavač snage (linearni ili nelinearni, kontinualni ili impulsni). Međutim, ako se upravlja protokom fluida (tečnog ili gasovitog) tada je izvršni organ ventil s kontinualnim ili impulsnim delovanjem, upravljan hidrauličnim ili pneumatskim sistemom, elektromagnetnim ili elektromotornim pogonom. Ako se reguliše temperatura neke komore sa električnim grejačima, tada je izvršni organ: tiristor, trijak ili sklopnik. Prema tome, pojedine elemente koji mogu igrati ulogu izvršnih organa smo već opisali, svrstavajući ih u drugu kategoriju elemenata sistema: pojačavača, objekata upravljanja. Tako smo motor jednosmerne struje svrstali u objekte upravljanja iako je on veoma često izvršni organ. U ovom odeljku opisaćemo *dvofazni asinhroni motor* i kao poseban tip izvršnih organa - *servosistem*.

### 8.5.1 Dvofazni asinhroni servomotor (SM)

SM je imao i ima značajnu ulogu u SAU elektromehaničkog tipa, posebno u instrumentalnim sistemima. To je motor male snage, nekoliko desetina W, koji se odlikuje nižom cenom koštanja od jednosmernog motora, nema kolektor i četkice te stoga ne stvara radiosmetnje i probleme održavanja, ima mnogo manju inerciju, manje statičko trenje, odnosno veću brzinu reagovanja. Osnovni nedostatak mu je mali stepen iskorišćenja (do 40%) što uslovljava njegovu primenu u području malih snaga.

Konstruktivno SM se sastoji iz dva osnovna dela: statora i rotora. Postoje dva tipa konstrukcije SM-a: *s kratkospojenim rotorom i s rotorom u obliku čaše*. SM s kratkospojenim rotorom (s rotorom u obliku veveričnjeg kaveza - kaveznim rotorom) ima stator cilindričnog oblika, komponovan od štancovanih limova elektrotehničkog čelika. Paket limova statora ima po unutrašnjem obimu

## Glava 8.: Komponente SAU

---

cilindra ravnomerno rasporedene žlebove u kojima se smeštaju dva raspodeljena nezavisna namotaja, čije magnetne ose zaklapaju međusobno ugao od 90 električnih stepeni. Namotaji se prave u obliku kanura od lakom izolovane bakarne žice, određenog broja zavojaka. Kanure se međusobno spajaju po određenoj šemi zavisno od izabranog broja pari polova motora. Najčešće se primenjuju motori s jednim parom polova. Rotor ovog motora se takođe izrađuje od štancovanih limova, koji formiraju valjak, po čijem se spoljašnjem obodu nalaze žlebovi. Obično se pakovanje limova ostvaruje tako da su žlebovi malo iskošeni u odnosu na podužnu osu rotora. Zakošenim žlebovima se obezbeđuje bolja ravnometnost obrtanja pri malim brzinama. Paket limova se nasaduje na vratilo (osovinu) rotora od čelika, koja se sa obe strane završava rukavcima za uležištenje. U žlebovima rotora se liju provodnici ne od bakra, već od aluminijuma (iz razloga koji će kasnije biti obrazloženi), koji se sa čeonih strana kratkospajaju prstenovima. Na taj način namotaj rotora ima oblik veveričjeg kaveza. Stator se smešta u kućište cilindričnog oblika od aluminijuma koje na bočnim stranama nosi kuglične ležajeve za učvršćivanje rotora. Tehnologijom izrade se teži obezbeđenju što manjeg i ravnometnijeg zazora između rotora i statora. Na statoru se nalazi priključna tablica motora sa, obično, 4, 5 ili 6 priključnih klema, na kojima su dovedeni krajevi namotaja statora. Jedan od namotaja statora je *pobudni namotaj* i on koristi samo dve priključnice. Drugi namotaj se naziva *upravljački (kontrolni)*. On može biti realizovan na tri načina: kao jedan namotaj sa dva izvoda na priključnici; kao jedan namotaj sa srednjim izvodom i ima tri priključka i kao dva odvojena namotaja sa izvodima na četiri priključnice. U poslednjem slučaju upravljački namotaji se mogu vezivati na red (što se svodi na slučaj namotaja sa srednjim izvodom) ili paralelno, što se svodi na prvi slučaj. Upravljački namotaj sa srednjom tačkom obezbeđuje jednostavniju organizaciju promene smera obrtanja motora. Paralelno vezivanje upravljačkih polunamotaja obezbeđuje upravljanje sa nižim naponima.

Na sl. 8.57. dat je šematski prikaz konstrukcije SM-a s kaveznim rotorom s tahogeneratorom ugrađenim u istom kućištu, što je čest slučaj.

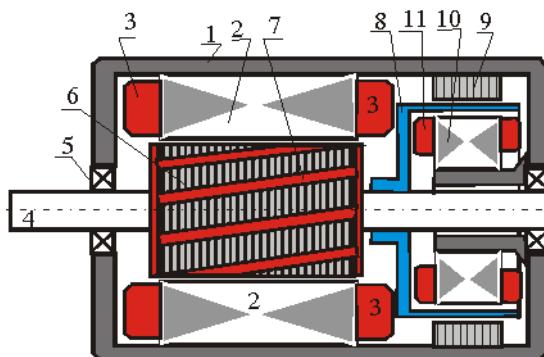
SM s rotorom u obliku čaše (s čašastim rotorom) se razlikuje od prethodne konstrukcije u dva osnovna dela. Najpre, stator, pored osnovnog dela kao kod prethodno opisanog tipa, koji se može nazvati *spoljašnjim statorom*, ima i *unutrašnji stator* valjkastog oblika, sastavljen od dinamo limova. Zatim, u procepu, između unutrašnjeg i spoljašnjeg statora, smešta se rotor u obliku čaše, koja s jedne, zatvorene strane, ima vratilo pomoću koga se rotor učvršćuje u kugličnom ležaju. Čaša je izrađena od aluminijuma. Njen zid je male debljine što čini rotor maloinercijalnim. Zbog toga ovi motori imaju veliki značaj u sistemima gde je potrebna velika brzina reagovanja. Rotor se izrađuje od aluminijuma iz istih razloga zbog kojih se kod kavezognog rotora provodnici liju od aluminijuma. SM s rotorom u obliku čaše se često naziva i Ferarisov motor, mada kako prva tako i druga konstrukcija funkcionišu na principu Teslinog obrtnog magnetnog polja. Konstrukcija motora sa čašom je slična konstrukciji tahogeneratora na sl. 8.57.

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

Kada se na krajevima pobudnog i upravljačkog namotaja statora motora dovedu naponi koji su fazno pomereni za 90 električnih stepeni, struje koje protiču kroz namotaje stvaraće promenljivo naizmenično polje. Ta dva promenljiva polja će u unutrašnjosti statorskog cilindra formirati Teslino obrtno magnetno polje. Brzina rotacije tog polja određena je relacijom

$$\omega = \frac{\omega_o}{p} [s^{-1}], \quad (8.98)$$

gde je  $\omega_o$  - frekvencija napona napajanja statora, a  $p$  - broj pari polova motora.



Sl. 8.57. Konstrukcija SM-a sa kaveznim rotorom i tahogeneratorom sa rotorom u obliku čaše.

1-kućište motora, 2-paket limova statora, 3-namotaji statora, 4-vratilo rotora, 5-kuglični ležajevi, 6-paket limova rotora, 7-provodnici rotora izliveni u žlebovima, 8-čaša rotora tahogeneratora, 9-spoljašnji paket limova statora tahogeneratora, 10-paket limova unutrašnjeg statora tahogeneratora, 11-namotaj statora tahogeneratora.

Ova relacija se obično daje u obliku

$$n = \frac{60f}{p} [\text{min}^{-1}], \quad (8.99)$$

gde je  $f$  - frekvencija napojnog napona u Hz.

Tako će SM s jednim parom polova, napajan iz gradske električne mreže, imati brzinu obrtnog magnetnog polja (idealnog praznog hoda), koja se naziva *sinhronom brzinom*, od  $3000 \text{ min}^{-1}$ .

Obrtno magnetno polje, presecajući provodnike kaveznog rotora indukuje u njima elektromotorne sile. S obzirom da su provodnici kratkospojeni, po njima će proticati struja. Uzajamno delovanje magnetnog polja statora i struja u provodnicima rotora stvaraće spreg sila koji deluje na radialno postavljene provodnike rotora. Taj spreg sila stvara elektromagnetni moment motora.

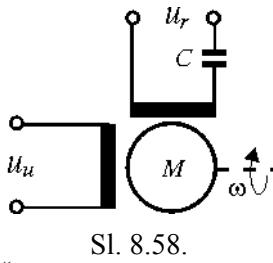
Pobudni namotaj SM-a se obično napaja iz izvora konstantnog napona, a naponom upravljačkog namotaja se vrši upravljanje brzinom motora. Obično se koristi samo jedan izvor naizmenične struje. Za dobijanje dvofanog napona napajanja pobudni namotaj se priključuje preko kondenzatora na izvor referentnog (pobudnog) napona, a upravljački namotaj se napaja iz pojačavača snage koji generiše signal noseće frekvencije modulisani po amplitudi. Stoga se na električnim šemama SM predstavlja kao na sl. 8.58. Kondenzator  $C$  se bira tako

## Glava 8.: Komponente SAU

da se obezbedi kružno obrtno magnetno polje. S obzirom da to nije moguće ostvariti u svim radnim uslovima, kondenzator  $C$  se bira tako da se ostvari kružno magnetno polje pri polasku motora, praktično pri ukočenom rotoru.

Princip rada SM-a sa rotorom u obliku čaše se može objasniti na sličan način uzimajući u obzir da se u čaši indukuju Fukove struje koje stvaraju spreg sila sa elektromagnetskim poljem statora.

Matematički model SM-a je složen. Najpre, složenost je uslovljena time što se namotaji statora napajaju naizmeničnim signalom noseće frekvencije, a upravljanje motorom se ostvaruje amplitudnom modulacijom napona upravljačkog namotaja. Zatim, elektromagnetni moment zavisi od proizvoda struja statora i rotora kao promenljivih veličina što čini model nelinearnim. Teorija dvofaznih motora danas ima izuzetan značaj za regulaciju elektromotornih pogona naizmenične struje.



Šematski prikaz dvofaznog asinhronog motora

Opšti matematički model dvofazne simetrične mašine je [7]:

$$\bar{u}_1 = R_1 \bar{i}_1 + \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} + j\omega_k \bar{\psi}_1 , \quad (8.100a)$$

$$0 = R_2 \bar{i}_2 + \frac{d\bar{\psi}_2}{dt} + j(\omega_k - \omega) \bar{\psi}_2 , \quad (8.100b)$$

$$M = pL_{12} \operatorname{Im}(\bar{i}_1 \times \bar{i}_2) , \quad (8.100c)$$

gde su:  $L_{12}$  - uzajamna induktivnost namotaja statora i rotora,  $u_1, i_1, \psi_1$  - napon, struja i fluks statora u faziskom obliku, a  $i_2, \psi_2$  - struja i fluks rotora u faziskom obliku, tj. bilo koja od navedenih veličina  $\bar{x}$  iz skupa  $\{u_1, i_1, \psi_1, i_2, \psi_2\}$  je  $\bar{x}_i = x_{ix} + jx_{iy}$ . Na primer:  $\bar{u}_1 = u_{1x} + u_{1y}$ , gde indeksi  $x, y$  označavaju koordinatne ose na kojima se posmatraju projekcije navedenih veličina, pri čemu taj koordinatni sistem rotira proizvoljnom brzinom  $\omega_k$ . Ako je  $\omega_k=0$  koordinatni sistem je vezan za stator i nepomičan je, pa se dobija model motora u statorskem koordinatnom sistemu, ako je  $\omega_k=\omega$  koordinatni sistem je vezan za rotor i zajedno sa njim rotira, ako je  $\omega_k=\omega_0$  - koordinatni sistem je vezan za obrtno magnetno polje i zajedno sa njim rotira; znak  $\times$  označava vektorski proizvod.

Takav prilaz omogućava mnoge pogodnosti u analizi motora i njegovom upravljanju. Neka je koordinatni sistem statorski, tada model postaje:

$$u_{1\alpha} = R_1 i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt} , \quad (8.101a)$$

$$u_{1\beta} = R_1 i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt} , \quad (8.101b)$$

$$0 = R'_2 i'_{2\alpha} + \frac{d\psi_{2\alpha}}{dt} + j\omega\psi_{2\beta} , \quad (8.101c)$$

$$0 = R'_2 i'_{2\beta} + \frac{d\psi_{2\beta}}{dt} - j\omega\psi_{2\alpha} , \quad (8.101d)$$

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

$$M = pL_{12} \operatorname{Im}(i_{1\beta}i_{2\alpha} - i_{1\alpha}i_{2\alpha}), \quad (8.101e)$$

gde su  $R'_2, i'_2$  - otpornost i struja rotora svedeni na stator.

U ustaljenom stanju struje, naponi i fluksevi su naizmenične veličine s međusobnim faznim pomerajima. Koristeći simbolični način zapisivanja naizmeničnih veličina u vidu rotacionih vektora  $\check{U}_{1\alpha}, \check{U}_{1\beta}, \check{I}_{1\alpha}, \check{I}_{1\beta}$  i sl., s obzirom na to da promenljive faze  $\alpha$  prednjače u odnosu na promenljive faze  $\beta$  za 90 električnih stepeni ima se:  $\check{U}_{1\beta} = -j\check{U}_{1\alpha}$ ,  $\check{I}_{1\beta} = -j\check{U}_{1\alpha}$ , a osim toga važi i:

$$\frac{d\check{\Psi}_{1\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Psi_1 e^{j(\varphi_1 + \omega_o t)}) = j\omega_o (\Psi_1 e^{j(\varphi_1 + \omega_o t)}) = j\omega_o \check{\Psi}_{1\alpha}. \quad (8.102)$$

Primenjujući rečeno na model (8.101), i usvajajući da su faze statora i rotora motora identične, dobija se za jednu fazu statora i rotora:

$$\check{U}_1 = R_1 \check{I}_1 + j\omega_o \check{\Psi}_1, \quad (8.103)$$

$$0 = R'_2 \check{I}'_2 + j\omega_o \check{\Psi}_2 - j\omega \check{\Psi}_2.$$

S druge strane, izrazi za flukseve statora i rotora, preko struje magnećenja

$$\check{I}_\mu = \check{I}_1 + \check{I}'_2, \quad (8.104)$$

su:

$$\check{\Psi}_1 = (L_1 - L_{12}) \check{I}_1 + L_{12} \check{I}_\mu, \quad (8.105a)$$

$$\check{\Psi}_2 = (L_2 - L_{12}) \check{I}'_2 + L_{12} \check{I}_\mu, \quad (8.105b)$$

$L_1, L_2$ - su induktivnosti namotaja statora i rotora. One se mogu izraziti preko odgovarajućih induktanci kao:

$$L_1 = \frac{x_1 + x_\mu}{\omega_o}; L_2 = \frac{x'_2 + x_\mu}{\omega_o}; L_{12} = \frac{x_\mu}{\omega_o}. \quad (6.106)$$

Zamenjujući ove veličine u (8.105), a zatim u (8.103) dobija se

$$\check{U}_1 = R_1 \check{I}_1 + jx_1 \check{I}_1 + \check{E}_1, \quad (8.107a)$$

$$\check{E}_2 = \frac{R'_2}{s} \check{I}'_2 + jx'_2 \check{I}'_2, \quad (8.107b)$$

gde su:  $\check{E}_1 = -\check{E}'_2 = jx_\mu \check{I}_\mu$ , a

$$s = \frac{\omega_o - \omega}{\omega_o} \quad (8.108)$$

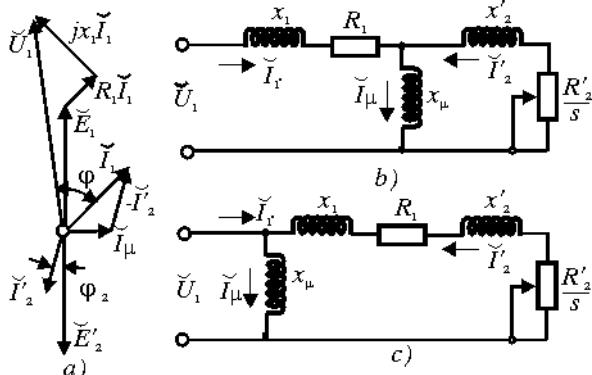
je relativni pad brzine rotora u odnosu na sinhronu brzinu i naziva se *klizanje*.

Relacije (8.107) mogu se prikazati u obliku vektorskog dijagrama, sl. 8.59, i ekvivalentne električne šeme, sl. 8.59b, koja se, za praksu, može pojednostaviti kao na sl. 8.59c.

Kada je rotor motora ukočen, tada imamo transformator u kome se prenosi električna energija iz primara (statora) u sekundar (rotor). S obzirom da je rotor u kratkom spoju, zanemarujući gubitke u gvožđu, celokupna preneta energija se troši na omskoj otpornosti rotora. Preneta snaga za dve faze je

## Glava 8.: Komponente SAU

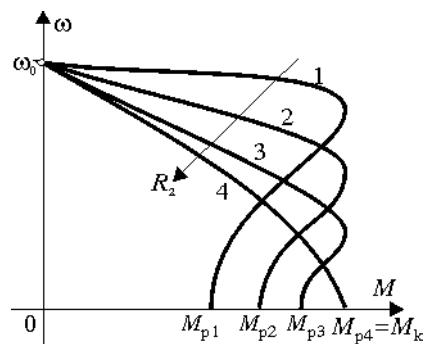
$$P_2 = 2 \frac{R'_2}{s} I'^2_2 = \frac{R'_2}{s} \frac{2U_1^2}{(R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + (x_1 + x'_2)^2}. \quad (8.109)$$



Sl. 8.59. Vektorski dijagram (a), ekvivalentna šema (b) i uprošćena ekvivalentna šema jedne faze motora.

$$M = \frac{2U_1^2 R'_2}{\omega_0 s \left[ (R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + x_k^2 \right]}. \quad (8.111)$$

Iz ove relacije se vidi da je moment motora nelinearna funkcija napona, otpornosti statora i rotora, induktivnosti i klizanja za dato  $\omega_0$ . Analiza izraza (8.111) pokazuje da on ima ekstremalnu vrednost u odnosu na klizanje. Diferencirajući (8.111) po klizanju i izjednačavajući difrencijal s nulom, dobija se *kritično (prevalno) klizanje*



Sl. 8.60. Statičke mehaničke karakteristike asinhronog motora. ostaje isti ako se frekvencija, otpornost statora i induktance rotora i statora ne menjaju. Međutim, klizanje pri kome nastupa maksimalni moment direktno je proporcionalno otpornosti rotora.

Mehaničke karakteristike motora (zavisnost brzine obrtanja od momenta ili obrnuto), određene na osnovu (8.111), za različite otpornosti rotora imaju izgled kao na sl. 8.60.

S druge strane, ako motor nije ukočen njegov rotor će se okretati pod dejstvom elektromagnetskog momenta. Ako se zanemare mehanički gubici, mehanička snaga je

$$P_m = M\omega_o \quad (8.110)$$

Izjednačavajući poslednja dva izraza i rešavajući tako dobijenu jednačinu po momentu, dobija se

$$s_k = \pm \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + x_k^2}}. \quad (8.112)$$

a zamenom (8.112) u (8.111) dobija se *kritični (prevalni) moment*

$$M_k = \frac{U_1^2}{\omega_0 \left[ R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + x_k^2} \right]}. \quad (8.113)$$

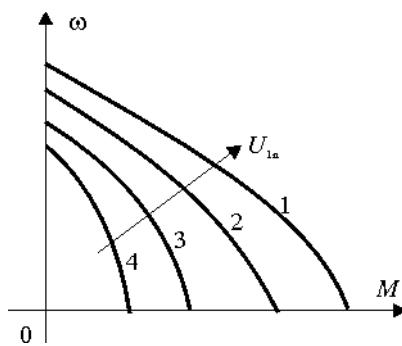
Znak + odgovara motornom, a znak - generatorskom režimu rada motora.

Iz (8.113) se vidi da maksimalni moment ne zavisi od otpornosti rotora i ostaje isti ako se frekvencija, otpornost statora i induktance rotora i statora ne menjaju.

Međutim, klizanje pri kome nastupa maksimalni moment direktno je proporcionalno otpornosti rotora.

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

Karakteristika 1 odgovarala bi motoru sa provodnicima rotora od bakra, a karakteristike 2, 3, 4 za provodnike rotora sa povećanom otpornošću. Karakteristike 1-3 imaju tri nedostatka: (i) izrazito su nelinearne, (ii) imaju deo u kome sa porastom brzine raste i moment, što stvara probleme stabilnosti sistema s takvim motorom i (iii) polazni moment nije i maksimalni moment. Karakteristika 4 je najpogodnija jer nema ni jedan od nabrojanih nedostataka. Ona ima blago izraženu nelinearnost. Maksimalni moment je istovremeno i polazni. Vrednost otpornosti koju treba ostvariti u rotoru izračunava se iz (8.112) za  $s_k=1$ . To povećanje otpornosti rotora, s druge strane, ima negativne posledice na povećanje gubitaka u rotoru motora. Zbog toga ovi motori imaju mali stepen iskorišćenja i konstruišu se za manje snage.



Sl. 8.61.

Mehaničke karakteristike asinhronog motora za različite fazne napone.

Iz (8.111) i (8.113) se vidi da su moment i maksimalni moment funkcije kvadrata faznog napona. Stoga se mehaničke karakteristike menjaju s promenom napona kao na sl. 8.61, pri čemu se napon može samo smanjivati u odnosu na nominalnu vrednost. Karakteristika 1 odgovara nominalnoj vrednosti faznog napona, a ostale - manjim vrednostima. Strelica označava porast napona. Sa slike se uočava da i brzina praznog hoda ne ostaje ista zbog smanjenja aktivnog momenta uz isto trenje.

Iako se povećanjem otpornosti rotora mehanička karakteristika u mnogome poboljšala, ona još uvek ostaje nelinearna. Međutim, ona se može u okolini ravnotežnog stanja aproksimirati linearnom karakteristikom i izvesti funkcija prenosa. S obzirom na to da se SM upravlja naponom upravljačke faze, u opštem slučaju možemo napisati:

$$M = f(u_u, \omega). \quad (8.114)$$

Za dato  $u_u=u_u^o$ , i  $\omega=\omega^o$  ima se  $M=M^o$ , razvijajući (8.114) u Taylorov red u okolini date radne tačke i zadržavajući samo linearne članove imamo

$$M = M^o + \left. \frac{\partial M}{\partial u_u} \right|_{\substack{u_u=u_u^o \\ \omega=\omega^o}} \Delta u_u + \left. \frac{\partial M}{\partial \omega} \right|_{\substack{u_u=u_u^o \\ \omega=\omega^o}} \Delta \omega. \quad (8.115)$$

Oduzimajući  $M^o$ , označavajući koeficijente linearizacije po naponu i momentu,

respektivno sa:  $\left. \frac{\partial M}{\partial u_u} \right|_{\substack{u_u=u_u^o \\ \omega=\omega^o}} = K_u$ ,  $\left. \frac{\partial M}{\partial \omega} \right|_{\substack{u_u=u_u^o \\ \omega=\omega^o}} = -K_\omega$ , linearizovani model SM-a

postaje

$$M = K_u u_u - K_\omega \omega, \quad (8.116)$$

## Glava 8.: Komponente SAU

---

gde su, radi kratkoće zapisivanja, priraštaji zamenjeni samim veličinama.

Izraz (8.116) je izraz za elektromagnetski moment linearizovanog SM-a. To je jednačina električnog generatora mehaničkog momenta. Taj aktivni moment deluje na mehanički deo sistema - na rotor s mehaničkim opterećenjem koje je direktno ili preko reduktora povezano s rotorom. Neka to mehaničko opterećenje ima samo dve komponente: inerciju i viskozno trenje. Tada jednačina dinamičke ravnoteže motora s opterećenjem postaje

$$K_u u_u - K_\omega \omega = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega . \quad (8.117)$$

Razdvajajući promenljive, prelazeći u kompleksni (operatorski) domen, (8.117) se može napisati u obliku funkcije prenosa

$$W_m(s) = \frac{\omega(s)}{U_u(s)} = \frac{K_u}{sJ + (b + K_\omega)} = \frac{K}{1 + sT}; K = \frac{K_u}{b + K_\omega}; T = \frac{J}{b + K_\omega} . \quad (8.118)$$

$K$ - je ukupno pojačanje motora,  $T$  - elektromehanička vremenska konstanta.

Iz izraza (8.118) se uočava da veličine  $b$  i  $K_\omega$  imaju istu prirodu (sabiraju se) tj. odražavaju viskozno trenje. Jedno od njih je mehaničke prirode, dok je drugo posledica elektromagnetskih pojava u motoru. To novo "viskozno" trenje se može lako uočiti ako se samo na pobudnu fazu motora dovede napon, a rotor motora obrće rukom. Imaće se utisak kao da se rotor nalazi u ulju. Ovo se naročito ispoljava kod motora s rotorom u obliku čaše od aluminijuma. Neki autori ovu pojavu nazivaju *unutrašnjim viskoznim trenjem* motora.

Jednačina (8.118) je linearna aproksimacija stvarne dinamike SM-a. Za određivanje parametara funkcije prenosa u literaturi postoji nekoliko prilaza. Jedan od njih je da se u okolini mirne radne tačke odrede parametri linearizovanog modela na osnovu statičkih mehaničkih karakteristika motora iz kataloga proizvođača, primenjujući relacije (8.115) i zamenjujući beskonačno male priraštaje konačnim malim priraštajima, tj.

$$K_u = \left. \frac{\Delta M}{\Delta u_u} \right|_{\substack{u_u = u_u^o \\ \omega = \omega^o}}, K_\omega = - \left. \frac{\Delta M}{\Delta \omega} \right|_{\substack{u_u = u_u^o \\ \omega = \omega^o}} . \quad (8.119)$$

Drugi autori [16] predlažu da se parametri funkcije prenosa određuju na osnovu linearne aproksimacije koja se dobija spajanjem tačke polaznog i nominalnog momenta na mehaničkoj karakteristici. Tada su:

$$K_\omega = - \frac{M_p - M_n}{\omega_n}, K_u = \frac{M_p}{U_{u_n}} . \quad (8.120)$$

S druge strane, polazeći od (8.111)  $K_u$  se može odrediti po formuli

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{2(u_u + u_p)R'_2}{\omega_o s \left[ (R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + x_k^2 \right]}, \quad (8.121)$$

iz koje se vidi da funkcija napona upravljanja. Isto tako iz (8.111) se vidi da će

$$K_{\omega} = -\frac{\partial M}{\partial \omega} = k(u_u^2 + u_p^2), \quad (8.122)$$

što jasno ukazuje da su parametri funkcije prenosa prvenstveno funkcija napona upravljanja i da se menjaju tokom rada motora, a da su relacije (8.119) i (8.120) samo približne.

**Primer.** Tehničke karakteristike SM-a su:  $M_n = 9,81 \cdot 10^{-3}$  Nm;  $\omega_n = 418 \text{ s}^{-1}$ ,  $M_p = 13,7 \cdot 10^{-3}$  Nm,  $J_m = 7,8 \cdot 10^{-7}$  kgm<sup>2</sup>;  $U_{un} = 120$  V,  $J'_o = 5 \cdot 10^{-7}$  kgm<sup>2</sup>,  $J''_o$  - moment inercije opterećenja sveden na vratilo motora.

Na osnovu (8.122) je

$$K_{\omega} = -\frac{M_p - M_n}{\omega_n} = \frac{(13,7 - 9,81)10^{-3}}{418} = 0,9310^{-5} \text{ Nms/rad};$$

$$K_u = \frac{M_p}{U_{un}} = \frac{13,7 \cdot 10^{-3}}{120} = 1,14 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/V};$$

$$T = \frac{J}{K_{\omega}} = \frac{J_m + J'_o}{K_{\omega}} = \frac{(7,8 + 5)10^{-7}}{0,93 \cdot 10^{-5}} = 0,1376 \text{ s};$$

$$K = \frac{K_u}{K_{\omega}} = \frac{1,14 \cdot 10^{-4}}{0,93 \cdot 10^{-5}} = 15,05 \text{ rad/Vs};$$

$$W(s) = \frac{15,05}{1 + 0,1376 s}.$$

Ako je motor namenjen za pozicioniranje tada je

$$W(s) = \frac{15,05}{s(1 + 0,1376 s)}.$$

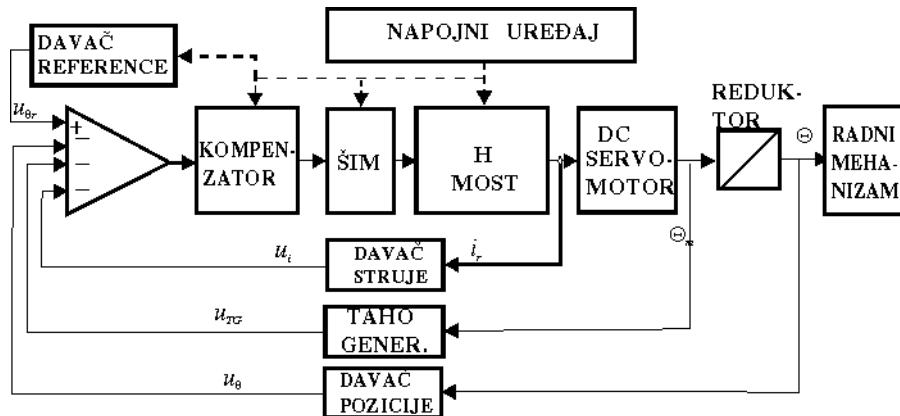
### 8.5.2 Servosistemi

To su SAU čiji je osnovni zadatak da ostvare kontrolisano mehaničko rotaciono ili translaciono kretanje uz istovremeno pojačanje po snazi. Razlikuju se dve vrste servosistema: *brzinski* i *pozicioni*. Prvi imaju zadatak da održavaju zadatu brzinu kretanja, a drugi da ostvare zadatu poziciju. Servosistemi imaju široku primenu u mnogim oblastima. Za pozicioniranje: radnih stolova alatnih mašina, valjaka valjanočkih stanova, manipulatora i robota, ventila (servoventili), satelitskih antena, rezogn alata, cevi topova u artiljeriji, za upravljanje pozicijom aerolona aviona i raketa, za kontrolu snage nuklearnih reaktora, za podizanje ustava brodskih prevodnika, regulaciji brzine stezne glave struga, i sl. Postoje različite konstrukcije servosistema (servopogona): električne, hidraulične, pneumatske i kombinovane. Obajsnemo samo strukturu električnih servosistema.

Servosistem elektromehaničkog tipa ima strukturu kao na sl. 8.62. Kao što se sa slike vidi, servosistem predstavlja jedan tipičan višekonturni SAU čiji je osnovni zadatak praćenje zadate pozicije, ovičene u referentnom signalu  $u_{\theta_r}$ , koji se dobija iz odgovarajućeg davača reference. On može biti: potenciometar, predajni selsin, rizolver i sl. Taj signal se, u detektoru signala greške na bazi

## Glava 8.: Komponente SAU

operacionog pojačavača, upoređuje sa signalom  $u_\theta$  koji je mera stvarnog izlaznog ugla na korisnom opterećenju (radnom mehanizmu), a dobija se pomoću jednog od navedenih pretvarača pozicije u električni signal. Signal greške se, zatim, u kompenzatoru (regulatoru) na želejni način transformiše u upravljački signal koji se dovodi na širinsko-impulsni modulator (ŠIM) i posredstvom H-mosta (tranzistorskog ili tiristorskog), deluje na servomotor (jednosmerne ili naizmenične struje). Servomotor, preko mehaničkog reduktora, prenosi mehaničku energiju s vratila servomotora na korisno mehaničko optere-



Sl. 8.62. Principska struktura blok-šema servosistema elektromehaničkog tipa.

ćenje - radni mehanizam. U cilju optimalizacije prelaznih procesa, uvedena je stabilizaciona kontura, preko tahogeneratora koji generiše signal proporcionalan brzini pozicioniranja. Za zaštitu motora i izvršnog organa (H-mosta) od mogućih strujnih preopterećenja primenjena je strujna regulaciona petlja preko davača struje. Strujna regulaciona petlja može biti realizovana kao interventna ili kao podređena. U prvom slučaju strujna regulaciona petlja deluje samo kada se prekorači zadata vrednost struje i u dinamičkom smislu nema uticaja na ponašanje sistema kada se taj limit ne prekorači. U drugom slučaju strujna petlja utiče na dinamiku celokupnog sistema, a proces regulacije se ostvaruje po sistemu hijerarhijske regulacije sa ograničenjem. Tada brzinski regulator ulazi u režim ograničenja svog izlaznog signala, koji postaje konstantna referenca strujne regulacione petlje. Detaljnije se ovi problemi izučavaju u kursevima regulacije elektromotornih pogona.

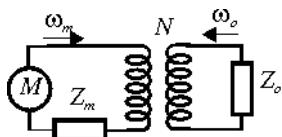
Sve sastavne elemente servosistema smo već izučili u ovoj glavi, osim mehaničkog reduktora. Zbog toga ćemo, na kraju ovog poglavља, posvetiti odgovarajuću pažnju tom sastavnom elementu, koji je gotovo neizbežan u servosistemima elektromehaničkog tipa.

### 8.5.2.1 Mehanički reduktori

To su elementi za prilagođenje brzine (ugla) obrtanja vratila motora i brzine (ugla) obrtanja vratila radnog mehanizma, odnosno za transformaciju obrtnog

### Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1

momenta vratila motora na vratilo radnog mehanizma. S tog stanovišta, mehanički reduktor se može posmatrati kao analog strujnog, odnosno naponskog transformatora u elektrotehnici, imajući u vidu elektromehaničke analogije. Razmatraćemo idealizovani reduktor u kome nema mehaničkih gubitaka. Tada reduktor možemo posmatrati kao idealni transformator, sl. 8.63.



Sl. 8.63. Ekvivalentna električna šema mehaničkog prenosa.

Na šemici je sa  $M$  označen aktivni obrtni moment koji razvija motor, a koji treba preneti na korisno mehaničko opterećenje, predstavljeno impedansom  $Z_o$ . Impedansom  $Z_m$  je označeno mehaničko opterećenje samog vratila motora. Sa  $N$  je označen prenosni odnos reduktora,

$$N = \frac{\omega_m}{\omega_o} = \frac{\theta_m}{\theta_o}. \quad (8.122)$$

Prenosni odnos reduktora je odnos brzine (ugla) obrtanja vratila motora i vratila opterećenja.

Na osnovu prenosa mehaničke snage bez gubitaka može se napisati

$$P_m = P_o \Rightarrow M\omega_m = M_o\omega_o. \quad (8.123)$$

Zamenjujući  $\omega_o$  iz (8.122) u (8.123) i rešavajući po  $M_o$  dobija se

$$M_o = NM. \quad (8.124)$$

Iz poslednjeg izraza se vidi da se sa smanjenjem brzine na osovini opterećenja povećava obrtni moment, što je jedna od osnovnih odlika reduktora.

S druge strane, iz uslova očuvanja kinetičke i potencijalne energije, mogu se napisati sledeći izrazi:

$$J_{om} \frac{\omega_m^2}{2} = J_o \frac{\omega_o^2}{2} \quad (8.125)$$

- za kinetičku, i

$$c_{om} \frac{\theta_m^2}{2} = c_o \frac{\theta_o^2}{2} \quad (8.126)$$

- za potencijalnu energiju, gde su  $J_{om}$  i  $c_{om}$  vrednosti momenta inercije i koeficijenta torzije ktutosti opterećenja svedeni na vratilo motora. Njihove vrednosti se nalaze iz datih izraza kao:

$$J_{om} = \frac{J_o}{N^2}; \quad c_{om} = \frac{c_o}{N^2}. \quad (8.127)$$

Ako se, pak, želi svođenje opterećenja sa strane motora na stranu radnog mehanizma ima se

$$J_{mo} = N^2 J_m; \quad k_{mi} = N^2 c_m. \quad (8.128)$$

Parametri mehaničkog opterećenja radnog mehanizma se svode na vratilo motora deljenjem s kvadratom prenosnog odnosa reduktora.

Parametri motora se svode na vratilo radnog mehanizma množenjem s kvadratom prenosnog odnosa reduktora.

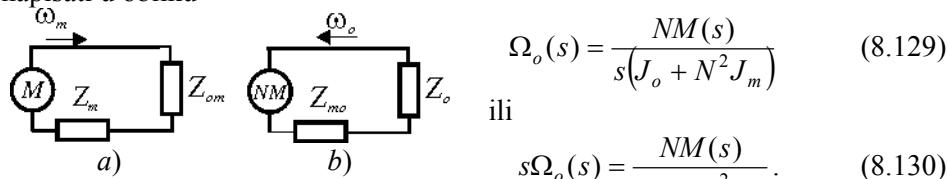
## Glava 8.: Komponente SAU

Osnovni problem u izboru reduktora, pored izbora tipa, je izbor potrebnog prenosnog odnosa,  $N$ . Kod servosistema izbor prenosnog odnosa reduktora se ne može zasnivati isključivo na relaciji (8.124), već se postavljaju i dodatni zahtevi kao što je postizanje maksimalno mogućeg ubrzanja pri prelasku iz jednog u drugo ustaljeno stanje.

Na osnovu prethodnih relacija, odnosno pravila, svedene proračunske šeme mehaničkog dela sistema motor-reduktor-radni mehanizam prikazane su na sl. 8.64. Svodeći momente i opterećenja na vratilo radnog mehanizma (sl. 8.64b) možemo napisati

$$NM(s) = (Z_{mo}(s) + Z_o(s))\Omega_o(s) = (N^2 Z_m(s) + Z_o(s))\Omega_o(s).$$

Ako se zanemari uticaj torzionih elastičnosti, tada se prethodni izraz može napisati u obliku



Sl. 8.64. Ekvivalentne svedene proračunske šeme: a) svodenje na vratilo motora; b) svodenje na vratilo radnog mehanizma.

$$\Omega_o(s) = \frac{NM(s)}{s(J_o + N^2 J_m)} \quad (8.129)$$

$$\text{ili} \quad s\Omega_o(s) = \frac{NM(s)}{J_o + N^2 J_m}. \quad (8.130)$$

S obzirom na to da množenje kompleksnom promenljivom  $s$  označava diferenciranje u vremenskom do-

menu, zaključujemo da poslednji izraz predstavlja izraz za ubrzanje  $\varepsilon$  vratila radnog mehanizma. Zatražimo maksimum ubrzanja u funkciji prenosnog odnosa reduktora, pri konstantnom momentu  $M$ .

Diferencirajući prethodni izraz po  $N$  i izjednačavajući diferencijal s nulom dobija se optimalan prenosni odnos reduktora

$$N_{op} = \sqrt{J_o / J_m}. \quad (8.131)$$

Zamenom (8.131) u (8.130) dobija se izraz za maksimalno ubrzanje

$$\varepsilon_{max} = \frac{M}{2\sqrt{J_m J_o}}. \quad (8.132)$$

Nađeni optimalni prenosni odnos reduktora (8.131), uz istovremeno obezbeđenje što većeg ubrzanja (8.132), može se realizovati samo u slučaju kada se konstruiše potpuno novi servosistem, kada je moguć nezavisani izbor motora i reduktora. Pri tome se, zavisno od potrebne snage, bira motor sa najvećim mogućim odnosom  $M / \sqrt{J_m}$ . Međutim, u praksi je čest slučaj da posedujemo bilo motor bilo reduktor, te nije moguće ispoštovati istovremeno (8.131) i (8.132). U slučaju da imamo motor, prenosni odnos reduktora izabraćemo u skladu sa (8.131). Ako imamo reduktor, a možemo birati motor tada treba birati motor s najvećim odnosom  $M / J_m$ , ili motor sa što većim pokretačkim momentom.

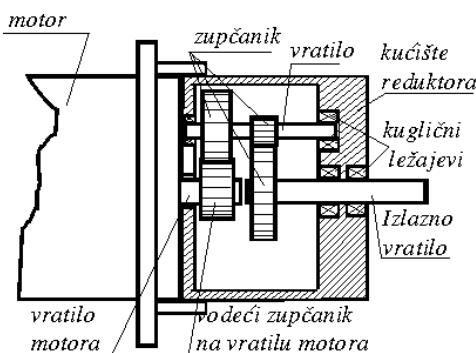
Što se tiče konstruktivnih osobina reduktora, u praksi servosistema koristi se nekoliko tipova: reduktori s cilindričnim zupčanicima, pužasti reduktori,

planetarni reduktori, talasni reduktori i dr. Kod sistema nižeg kvaliteta mogu se koristiti i reduktori sa zupčastim remenim prenosom.

#### 8.5.2.1.1 Reduktori sa cilindričnim zupčanicima

Ovi reduktori se najčešće koriste u praksi servosistema ali nije isključena i primena reduktora sa koničnim zupčanicima, kada predajno i prijemno vratilo zaklapaju neki ugao. Zbog tačnosti koriste se zupčanici s malim modulom. S obzirom na to da kod sprege para zupčanika nije moguć prenos bez zazora, reduktor unosi nelinearnost tipa zazora (lufta) što stvara probleme stabilnosti i tačnosti pozicioniranja servosistema.

Radi eliminacije zazora, kod servosistema manjih snaga, jedan od zupčanika



Sl. 8.65. Sklop mehaničkog reduktora.

u spregnutom paru se konstruiše iz dva dela, koja se međusobno sprežu oprugom, čime se ostvaruje elastična sprega, bez zazora.

Zupčanici se izrađuju od čelika ili od teflona, kada se prenose manji momenti opterećenja, a zahteva tiši rad. Mogu se koristiti i drugi materijali. U cilju minimalizacije gabarita reduktora oni se izrađuju iz većeg broja stepena prenosa, sl. 8.65.

#### 8.5.2.1.2 Planetarni reduktor

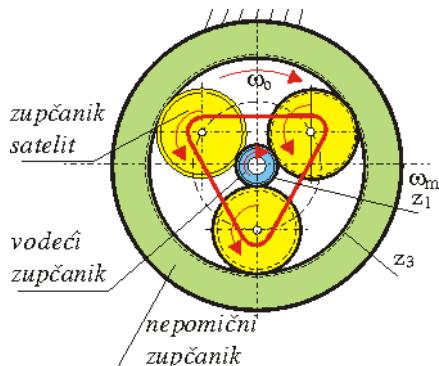
Kada je potrebno ostvariti vrlo velike prenosne odnose sa što manjim gabaritima tada se primjenjuje konstrukcija s *planetarnim tipom reduktora*, sl. 8.66. Vodeći zupčanik, koji se obrće u naznačenom smeru, pokreće zupčanike satelite koji vrše složeno kretanje: oko svoje ose i oko ose vodećeg zupčanika. Nepomični zupčanik je ozubljen s unutrašnje strane. Zupčanici-sateli su mehanički međusobno spojeni (trouglasta ploča na slici) i njihovo obrtanje oko ose vodećeg zupčanika predstavlja obrtanje izlazne osovine.

Prenos ovog tipa reduktora je

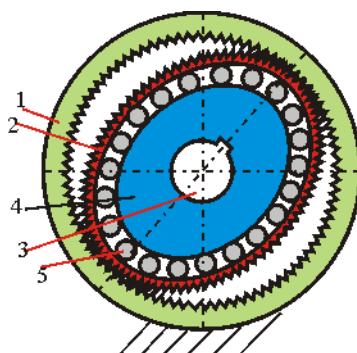
$$N = \frac{\theta_m}{\theta_o} = \frac{\omega_m}{\omega_o} = 1 + \frac{z_3}{z_1}, \quad (8.133)$$

gde su  $z_1$  i  $z_3$  broj zuba vodećeg i nepomičnog zupčanika, respektivno.

Isto tako veliki prenosni odnos uz male gabarite reduktora postiže se tzv. pužastim prenosom. Međutim, njegova primena se ne preporučuje u servosistemima sa naglim promenama smera kretanja i velikim inercijalnim silama, jer može doći do zaklinjivanja i do lomova.



Sl. 8.66. Šematski prikaz konstrukcije planetarnog reduktora.



Sl. 8.67. Princip konstrukcije talasnog reduktora.

Ako se brojevi zubaca fiksног i fleksibilног zupčanika označе sa  $z_1$  i  $z_2$ , respektivno, prenos reduktora određuje se po formuli

$$N = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}. \quad (8.134)$$

Razlika broja zubaca je celobrojna vrednost i umnožak je od broja talasa koje proizvodi generator talasa. Na prikazanoj slici broj talasa je  $\lambda=2$  (ekscentar ima dve izboćine). Za jedan obrтaj pogonske osovine, gipki zupčanik se okreće za  $k\lambda$  zubaca, gde je  $k=1,2,\dots$

Na primer, ako je  $z_1=200$ ,  $k=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $z_2=198$ , tada je  $N=100$ .

Odlike talasnih reduktora su: male dimenzije i moment inercije, velika kinematička tačnost, i mali zazor uz veliki stepen prenosa.

Nedostatak talasnog reduktora je pojava parazitnih vibracija i ograničena brzina pogonske osovine zbog gipkog zupčanika.

### 8.5.2.1.3 Talasni reduktor

Talasni reduktor (engl.: *Harmonic drive*, ruski: *волновая зубчатая передача*) je reduktor relativno novije konstrukcije sličan planetarnom reduktoru, sl. 8.67. Pogodan je za prenose gde se traži obezbeđenje hermetičnosti. Našao je široku primenu u finim mehanizmima, u robotima na primer. Odlikuje se malim zazorima, što mu je velika prednost u odnosu na druge reduktore. I ovde je spoljašnji zupčanik (1) nepomičan i izrađuje se od čelika.

Zupčanik (2) je gibak zupčanik, a izrađuje se od plastike (poliformaldehid). Pogonsko vratilo (3) pokreće ekscentar (4) koji ima ulogu generatora talasa. Izlazno (pogonjeno) vratilo je mehanički povezano s gipkim zupčanikom (2). Pri obrtanju pogonskog vratila u smeru kazaljke na satu, gipki zupčanik će se obrтati u suprotnom smeru kazaljke na satu. Postoje konstrukcije kod kojih je gipki zupčanik spoljašnji. Tada se on obrće u istom smeru kao i pogonsko vratilo.

## 8.6 Kompenzatori i regulatori

U prethodnim izlaganjima izučavali smo elemente SAU, koji se, pri projektovanju biraju iz kataloga tako da zadovolje osnovne tehničke i funkcionalne zahteve sistema. Naime, polazeći od objekta upravljanja (regulacije), koji je unapred poznat, i od postavljenih tehničkih zahteva, mi biramo sve ostale elemente (merno-pretvarački, komandni, detektor signala greške, pojačavač, modulator ili demodulator po potrebi, i izvršni organ) iz kataloga.<sup>6</sup> Na osnovu izbora standardnih na tržištu dostupnih elemenata, utvrđujemo njihove parametre i matematičke modele u obliku funkcija prenosa ili u obliku diffrencijalnih jednačina. Te matematičke modele pridružujemo matematičkom modelu objekta koga smo prethodno dobili od tehnologa-naručioca ili smo sami do njega došli analizom fizičko-hemijskih procesa koji se u njemu odvijaju, odnosno eksperimentalnom identifikacijom. Na osnovu matematičkih modela objekta i izabranih funkcionalnih elemenata, vodeći računa o pretpostavljenim, odnosno projektovanim uzajamnim vezama tih elemenata (redne, paralelne, povratne) sastavljamo matematički model polaznog sistema. U tom postupku često skiciramo strukturni blok-dijagram ili graf toka signala u cilju vizualizacije uzajamnih sprega elemenata. Na osnovu dobijenog matematičkog modela polaznog sistema izučavamo njegove dinamičke i statičke osobine, u prvom redu njegovu stabilnost i tačnost u ustaljenom stanju, a zatim i prelazne dinamičke karakteristike: brzinu odziva, stepen oscilatornosti, veličinu dinamičke greške, zadovoljenje nekog kriterijuma optimalnosti i sl. U najvećem broju slučajeva tako formiran sistem od standardnih elemenata neće moći da zadovolji sve tehničke uslove: polazni sistem nije stabilan i/ili nije dovoljno brz, odnosno ima veliki stepen oscilatornosti i/ili ima veliku statičku grešku. U cilju postizanja zadatih tehničkih uslova mora se izvršiti korekcija/kompenzacija karakteristika polaznog (nekompromisovanog) sistema. Radi minimizacije troškova, procesu kompenzacije treba prići odgovorno. Najpre treba utvrditi tip kompenzatora, njegovu minimalnu realizaciju, a zatim vršiti izbor njegovih parametara i način fizičke realizacije. U praksi projektovanja SAU koristi se više prilaza za rešenje ovog problema. Problem se može razrešiti primenom kompenzatora, realizovanih obično s pasivnim ili aktivnim elementima, ili primenom standardnih linearnih regulatora koji se mogu dobiti na tržištu. Ako je u postupku izbora elemenata sistema izabran procesni računar, mikroračunar ili mikroprocesor, onda se proces kompenzacije ostvaruje softverski, realizujući matematičke funkcije kompenzatora potrebnog tipa. U tom cilju potrebno je poznavati osobine, način izbora parametara najčešće primenjivanih kompenzatora i regulatora.

---

<sup>6</sup> Često smo prinuđeni da neke funkcionalne elemente sami konstruišemo jer nismo u mogućnosti da ih nabavimo na tržištu.

### 8.6.1 Kompenzatori

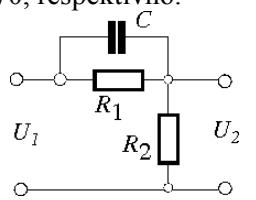
Kompenzatori su obično pasivni ili aktivni električni, mehanički ili elektromehanički elementi. U parksi se mogu koristiti različiti tipovi kompenzatora. U izboru kompenzatora postoji velika individualna sloboda projektanta. Ali, ipak, u cilju efikasnijeg rešavanja problema, treba koristiti dosadšnja iskustva u projektovanju sistema, minimalizujući vreme potrebno za rešenje problema. U dosadašnjoj praksi se pokazalo da se mnogi zadaci regulacije mogu rešiti primenom četiri vrste kompenzacije: *proporcionalne, diferencijalne, integralne i diferencijalno-integralne (integro-diferencijalne)*. Prvi tip kompenzacije se obično u literaturi ne ističe kao poseban oblik, jer se u najvećem broju slučajeva ne zahteva dodatni element za njegovu realizaciju. Naime, većina elemenata, a naročito pojačavači, imaju mogućnost podešavanja pojačanja ugrađenim elementima za korekciju-podešavanje. Proporcionalni kompenzator ističemo ovde u cilju skretanja pažnje na činjenicu da se u nekim slučajevima postizanje traženih karakteristika može ostvariti prostim podešavanjem pojačanja: povećanjem - ako sistem nije dovoljno brz ili ima veću statičku grešku, odnosno smanjenjem - u suprotnim slučajevima. Ako se na taj način ne mogu dobiti zahtevane karakteristike, pristupa se izboru drugih tipova kompenzatora. Sve zavisi od toga da li sistem ne poseduje potrebne dinamičke ili/i statičke karakteristike. *Ako sistem nema potrebne dinamičke karakteristike (u pogledu brzine reagovanja, stepena oscilatornosti) tada se kao kompenzator primenjuje diferencijalni. Ako sistem nema potrebne statičke karakteristike, primenjuje se integralni kompenzator. U slučaju da sistem nema ni potrebne dinamičke niti tražene statičke osobine, primenjuju se integro-diferencijalni (diferencijalno-integralni kompenzatori).*

#### 8.6.1.1 Diferencijalni kompenzatori

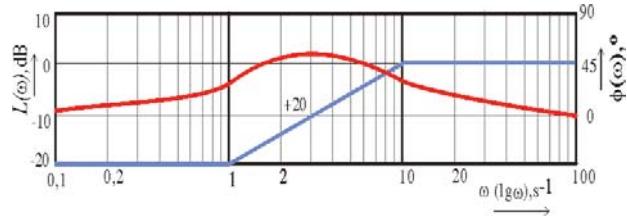
Matematički model ovog kompenzatora je u obliku funkcije prenosa

$$G_d(s) = \frac{s + a}{s + b}, \quad a < b. \quad (8.136)$$

Najprostije realizacije (električna i mehanička) prikazane su na sl. 8.68 i sl. 8.70, respektivno.



Sl. 8.68. Električna šema diferencijalnog kompenzatora.



Sl. 8.69. Logaritamski dijagram slabljenja i faze diferencijalnog kompenzatora za  $(b/a)=0,1$ .

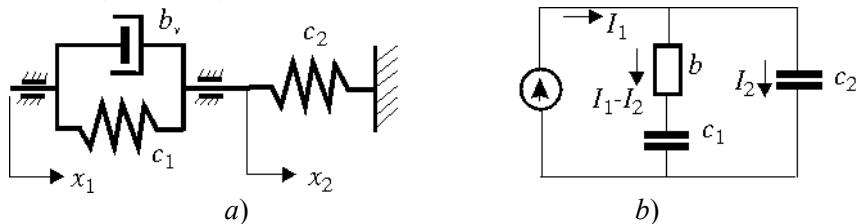
Treba obratiti pažnju na to da su signali kod električnog diferencijalnog kompenzatora naponi, dok su kod mehaničkog - pomeraji ili brzine (struje). Stoga su parametri  $a$  i  $b$  za ove kompenzatore dati izrazima:

-za električni diferencijalni kompenzator

$$a = \frac{1}{R_1 C}; b = \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \quad (7.137)$$

- za mehanički

$$a = \frac{c_1}{b_v}; b = \frac{c_1 + c_2}{b_v}. \quad (7.138)$$



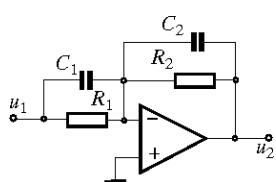
Sl. 8.70. Mehanička realizacija diferencijalnog kompenzatora (a) i njegova ekvivalentna električna šema (b).

Na sl. 8.69 prikazani su logaritamski dijagrami slabljenja i faze diferencijalnog kompenzatora. Zapaža se da diferencijalni kompenzator ima pozitivnu faznu karakteristiku, tj. on unosi u sistem pozitivan fazni pomak, odnosno vrši predikciju (predviđanje) promene ulaznih signala. Na taj način on omogućava da se u srednjefrekvencijskoj oblasti, koja definiše stabilnost sistema, koriguje fazna karakteristika sistema i obezbedi potreban pretek faze (videti poglavlje 6 - Sinteza sistema)

### 8.6.1.2 Diferencijalni kompenzator sa aktivnim elementima

Često je potrebno, pored same realizacije osnovne funkcije prenosa diferencijalnog kompenzatora (8.136) obezbediti i dodatno pojačanje. Tada se diferencijalni kompenzator realizuje pomoću operacionog pojačavača kao na sl. 8.71. Sa sl. 8.71 neposredno sledi

$$W(s) = -\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1+sC_1R_1}{1+sC_2R_2} = -k \frac{s+a}{s+b}; a = \frac{1}{R_1 C_1}; b = \frac{1}{R_2 C_2}, k = \frac{C_1}{C_2}. \quad (8.139)$$



Sl. 8.71. Diferencijalni kompenzator sa aktivnim elementima.

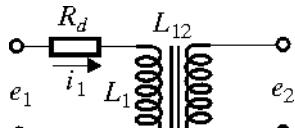
Treba obratiti pažnju da ovaj kompenzator unosi i dodatni fazni pomeraj od \$\pi\$, što treba uzeti u obzir pri praktičnoj primeni.

### 8.6.1.3 Višestruki diferencijalni kompenzatori

U praksi projektovanja sistema događa se da se problem korekcije dinamičkih osobina sistema ne može ostvariti primenom samo jednog diferencijalnog kompenzatora, već se moraju primeniti dva ili više diferencijalnih kompenzatora vezanih na red. Redno vezivanje pasivnih kompenzatora ne daje dobre rezultate zbog međusobnog uticaja izlazno-ulaznih impedansi pasivnih četvoropola. U tom slučaju potrebno je razdvajanje pasivnih četvoropola pojačavačima (kao na sl. 8.78) ili svaki diferencijalni kompenzator realizovati sa aktivnim elementima (operacionim pojačavačima) koji se tada mogu vezivati u potreban broj kaskada.

#### 8.6.1.4 Transformator kao realni diferencijator

U sistemima upravljanja kao realni diferencijator sporopromenljivih jedno-smernih signala može se koristiti diferencirajući transformator, sl. 8.72.



Sl. 8.72. Diferencirajući transformator.

Prepostavljajući da sekundar transformatora nije opterećen ( $\infty$  otpornost optrećenja) napon na sekundaru je

$$e_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow E_2(s) = sI_1(s), \quad (8.140)$$

gde je  $L_{12}$  - koeficijent uzajamne indukcije primara i sekundara transformatora.

S druge strane, jednačina primarnog kola je

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + (R_d + R_1)i_1 = e_1 \Rightarrow (sL_1 + R)I_1(s) = E_1(s), \quad (8.141)$$

gde je:  $R_1$  - otpornost namotaja primara, a  $R_d$  - dodatni otpor  $L_1$ -induktivnost namotaja primara,  $R=R_d+R_1$ .

Na osnovu (8.140) i (8.141) dobija se

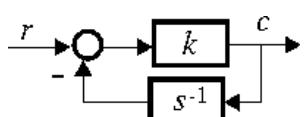
$$W(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{sL_{12}}{R + sL_1} = \frac{sT}{1 + sT_1}; T = \frac{L_{12}}{R}, T_1 = \frac{L_1}{R}. \quad (8.142)$$

Relacija (8.142) važi za neopterećen transformator, što se može postići primenom operacionog pojačavača s velikom ulaznom impedansom.

#### 8.6.1.5 Realni diferencijator sa operacionim pojačavačima

Prethodno rešenje realnog diferencijatora ima dva važna nedostatka-glomaznost i neekonomičnost u odnosu na moguće rešenje sa operacionim pojačavačima. Na sl. 8.73. data je strukturalna blok-šema realnog diferencijatora, a na sl. 8.74 principiјelna šema za realizaciju. Na osnovu sl. 8.73, dobija se

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 + \frac{K}{s}} = \frac{s}{1 + \frac{1}{K}s} = \frac{s}{1 + sT}. \quad (8.143)$$



Sl. 8.73. Strukturalna blok-šema realnog diferencijatora.

Sa sl. 8.74 može se napisati:

$$U_2(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)U_1(s) - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{CR_3s} U_2.$$

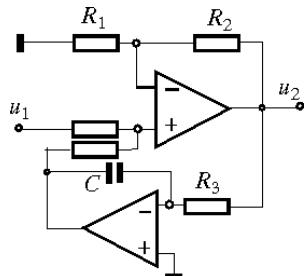
Rešavajući po  $U_2(s)$ , i usvajajući:

$$CR_3=1, K=R_2/R_1,$$

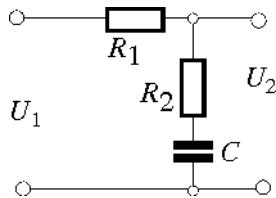
dobija se

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1+K}{1+\frac{1+K}{s}} = \frac{(1+K)s}{s+1+K} = \frac{s}{1+sT}, \quad T = \frac{1}{1+K}; K \rightarrow \infty, u_2(t) = \frac{d}{dt} u_1(t). \quad (8.144)$$

Dobra strana realnih diferencijatora je filtracija šumova, zbog prisustva inercijalnog elementa - niskopropusnog filtra.



Sl. 8.74. Jedno od rešenja realnog diferencijatora.



Sl. 8.75.

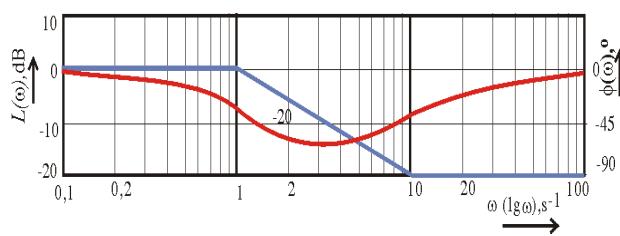
Električna šema integralnog kompenzatora.

### 8.6.2 Integralni kompenzator

Integralni kompenzator se, obično, predstavlja funkcijom prenosa

$$W_i(s) = \frac{a s + b}{b s + a}, a < b. \quad (8.145)$$

Najprostija realizacija ovog kompenzatora s pasivnim elementima prikazana je na sl. 8.75, dok je logaritamski dijagram slabljenja i faze dat na sl. 8.76.



Sl. 8.76. Logaritamski dijagram slabljenja i faze integralnog kompenzatora za  $(a/b)=0,1$ .

Sa sl. 8.75, koristeći se relacijama za razdelnik napona, dobija se

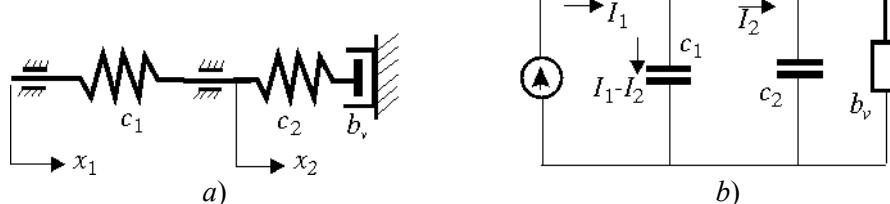
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + sCR_2}{1 + (R_1 + R_2)C} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s + \frac{1}{CR_2}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}. \quad (8.146)$$

$$b = \frac{1}{R_2 C}, a = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}.$$

Iz Bodeovih dijagrama se vidi da integralni kompenzator unosi fazno kašnjenje, što može uticati na pogoršanje dinamičkih osobina sistema, odnosno na smanjenje preteka faze. Stoga se u praktičnoj primeni nastoji da se integralni kompenzator koristi u području niskih frekvencija, gde je njegov uticaj na dinamičke osobine sistema manji a na statičke najveći. Osim toga, ako se izabere  $a \approx b$ , tada će i fazno kašnjenje koje unosi ovaj kompenzator biti malo, što takođe bitno ne utiče na pogoršanje dinamičkih osobina sistema u koji se unosi. Najbitnije je da integralni kompenzator omogući povećanje Bodeovog pojačanja sistema, što se postiže povećanjem odnosa  $b/a$ . Ovo povećanje se može postići, ne povećavajući fazno kašnjenje, ako se kritične frekvencije kompenzatora biraju u području malih brojeva, što je napred konstatovano.

Za korekciju mehaničkih sistema može se primeniti odgovarajući mehanički integralni kompenzator, sl. 8.77a, a njegova ekvivalentna električna šema je prikazana na sl. 8.77b. Iz ekvivalentne šeme se dobija prenos u obliku

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{s b_v + c_1}{s b_v (c_1 + c_2) + c_1 c_2} = \frac{1}{c_1 + c_2} \frac{s + \frac{c_1}{b_v}}{s + \frac{c_1}{b_v} \frac{c_2}{(c_1 + c_2)}}. \quad (8.147)$$



Sl. 8.77. Mechanic realizacija integralnog kompenzatora (a) i njegova ekvivalentna električna šema (b).

### 8.6.2.1 Integralni kompenzator s aktivnim elementima

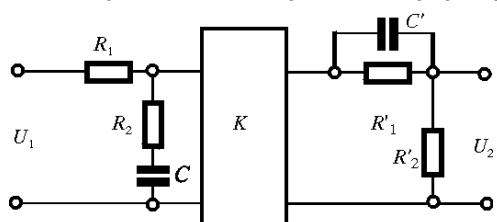
Šema na sl. 8.71, odgovarajućim izborom komponenata, može se koristiti kao integralni kompenzator. Tada je potrebno izabrati odnos

$$\frac{1}{R_1 C_1} > \frac{1}{R_2 C_2}, \quad (8.148)$$

dok za diferencijalni kompenzator treba birati suprotan odnos.

### 8.6.3 Integro-diferencijalni (diferencijalno-integralni) kompenzatori

U slučajevima kada je potrebno vršiti korekciju kako dinamičkih tako i statičkih osobina sistema, primenjuju se integro-diferencijalni (diferencijalno-integralni) kompenzatori. Njihova realizacija se može ostvarivati na više načina: kaskadnim vezivanjem diferencijalnog (integralnog) i integralnog (diferencijalnog) kompenzatora, uz primenu rastavnog pojačavača, sl. 8.78. Ovakva realizacija je pogodna samo u slučajevima kada je potrebno kompenzovati slabljenje kompenzatora. Funkcija prenosa takvog kompenzatora je jednaka proizvodu funkcija prenosa (8.136) i (8.145) i pojačanja pojačavača  $K$ . Jednostavnija i ekonomičnija realizacija je s pasivnim elementima, sl. 8.79.



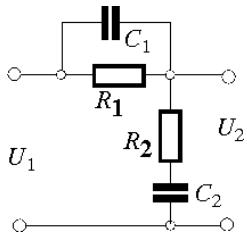
Sl. 8.78. Integro-diferencijalni kompenzator.

Funkcija prenosa integro-diferencijalnog kompenzatora s pasivnim komponentama, sl. 8.79, je data relacijama (8.149). Na osnovu ovih relacija, za konstrukciju logaritamskih dijagrama slabljenja i faze, funkciju prenosa treba napisati u obliku (8.150).

Bodeovi dijagrami za integro-diferencijalni kompenzator prikazani su na sl. 8.80. U cilju definisanosti konstrukcije dijagrama usvojene su vrednosti:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = 10 \quad \text{i} \quad a_2 = 0,1a_1, a_1 = 2s^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{U_2(s)}{U_1(s)} &= \frac{\frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_2}}}{\frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{R_1C_2s(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}} = \frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{R_1C_2s(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)} = \\ &= \frac{\frac{(1+\frac{1}{R_1C_1})(1+\frac{1}{R_2C_2})}{s^2 + (\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2})s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}}{\frac{(s+a_1)(s+b_2)}{(s+b_1)(s+a_2)}}, \quad (8.149) \\ a_1 &= \frac{1}{R_1C_1}, b_1 = \frac{1}{R_2C_2}; a_1b_2 = a_2b_1; a_2 + b_1 = a_2 + b_2 + \frac{1}{R_2C_1}. \end{aligned}$$



Sl. 8.79.

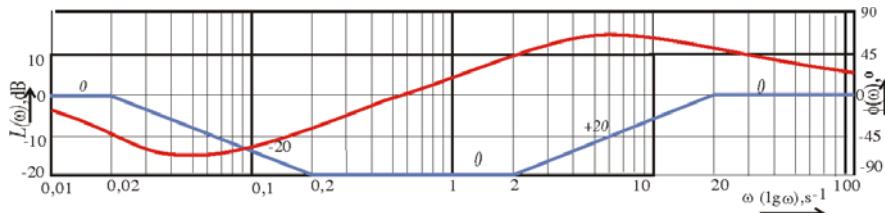
Integro-diferencijalni kompenzator sa pasivnim komponentama.

$$W_{id}(j\omega) = \frac{(1 + \frac{j\omega}{a_1})(1 + \frac{j\omega}{b_2})}{(1 + \frac{j\omega}{b_1})(1 + \frac{j\omega}{a_2})} \quad (8.150)$$

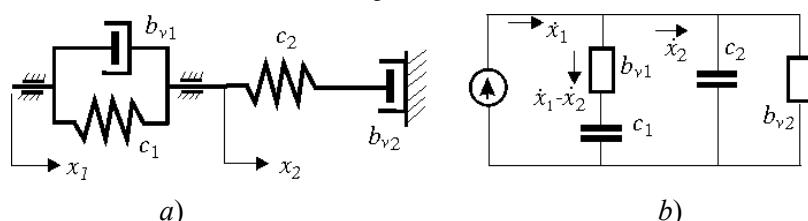
Mehanička realizacija integro-diferencijalnog kompenzatora i njegova ekvivalentna električna šema prikazani su na sl. 8.81a,b, respektivno.

Funkcija prenosa mehaničkog integro-diferencijalnog kompenzatora je istog oblika kao (8.150) gde su parametri:

$$a_1 = \frac{c_1}{b_{v1}}; b_1 = \frac{c_2}{b_{v2}}; a_2 + b_1 = a_2 + b_2 + \frac{c_1}{b_{v2}} \quad (8.151)$$



Sl. 8.80. Logaritamski dijagrami slabljenja i faze integro-diferencijalnog kompenzatora.



Sl. 8.81. Integro-diferencijalni kompenzator mehaničkog tipa (a) i njegova ekvivalentna električna šema (b).

#### 8.6.4 Regulatori

Prilaz sintezi sistema putem primene napred opisanih kompenzatora je karakterističan za projektovanje posebnih uređaja tipa servosistema u specijalizovanim projektantskim organizacijama, gde se konstruišu mašine posebne namene. U industrijskoj praksi, za upravljanje (regulaciju) tehnoloških procesa, pa i upravljanje elektromotornim pogonima, češće se problemi rešavaju primenom standardnih industrijskih regulatora *proporcionalnog* (P), *integralnog* (I), *proporcionalno-diferencijalnog* (PD), *proporcionalno-integralnog* (PI) i *proporcionalno-integralno-diferencijalnog tipa* (PID). Ovaj prilaz, uglavnom, pretpostavlja da je proces u potpunosti pripremljen za uvođenje regulacije, da inženjer pred sobom ima objekat u širem smislu (*postrojenje*) te da je potrebno samo primeniti standardna rešenja, koristeći već gotove uredaje - regulatori. Naime, dugogodišnja istraživanja i praksa pokazali su da se mnogi problemi automatizacije industrijskih procesa svode na izbor jednog od standardnih linearnih *zakona upravljanja*.

Pod zakonom upravljanja podrazumeva se funkcionalna zavisnost između signala greške sistema i signala upravljanja objektom.

Koriste se sledeći linearni zakoni upravljanja:

$$\begin{aligned} & \text{- } \textit{proporcionalni (P)} \\ & u(t) = Ke(t); \end{aligned} \quad (8.152)$$

$$\begin{aligned} & \text{- } \textit{integralni (I)} \\ & u(t) = K \int_0^t e(t) dt; \end{aligned} \quad (8.153)$$

$$\begin{aligned} & \text{- } \textit{proporcionalno-integralni (PI)} \\ & u(t) = Ke(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt; \end{aligned} \quad (8.154)$$

$$\begin{aligned} & \text{- } \textit{proporcionalno-diferencijalni (PD)} \\ & u(t) = K \left( e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right); \end{aligned} \quad (8.155)$$

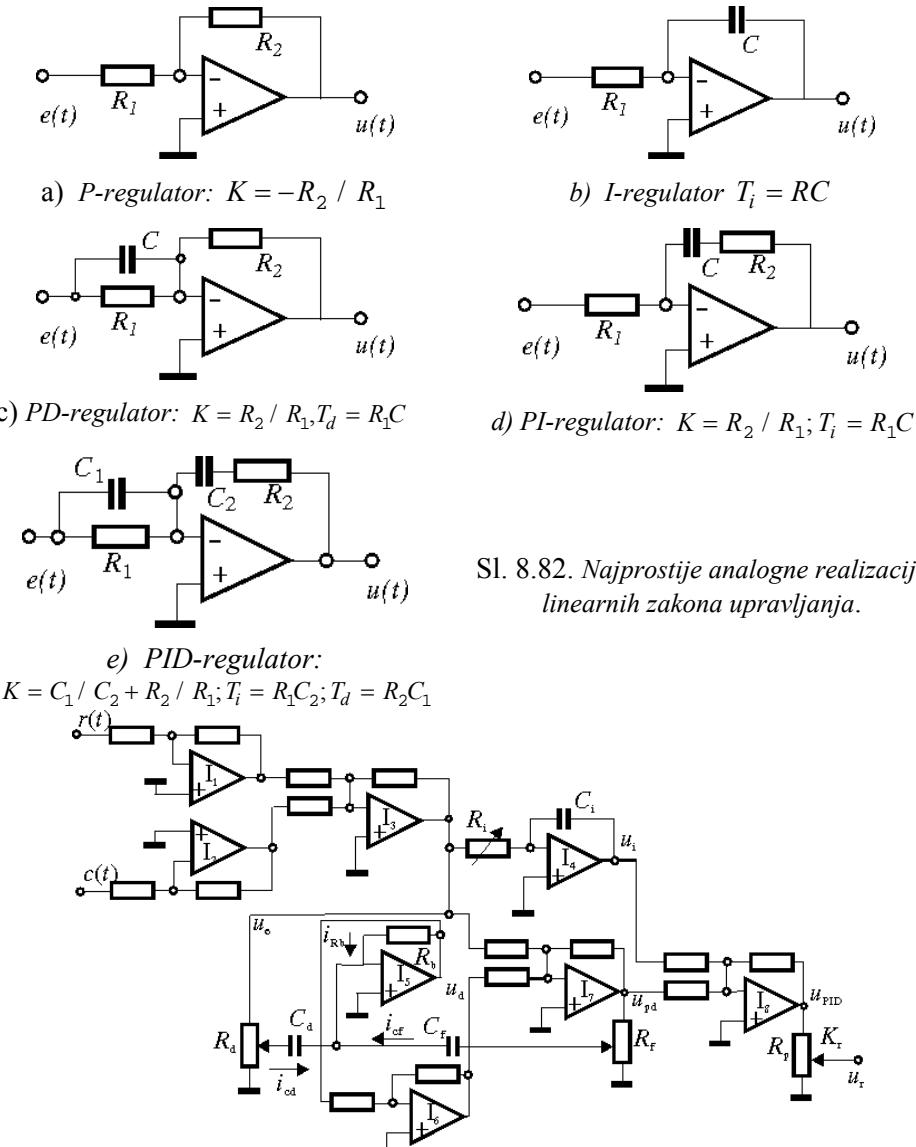
$$\begin{aligned} & \text{- } \textit{proporcionalno-integralno-diferencijalni (PID)} \\ & u(t) = Ke(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (8.156)$$

Diferencijalni zakon upravljanja se samostalno ne koristi, jer on u ustaljenom stanju ne produkuje signal upravljanja i sistem ostaje bez povratne sprege.

Za realizaciju datih zakona upravljanja (regulatora) u najjednostavnijem obliku koriste se operacioni pojačavaci. Na sl. 8.82a-e date su analogne realizacije P, I, PI, PD i PID regulatora, respektivno.

Izbor optimalnih parametara podešenja regulatora opisan je u 7. poglavlju.

U prethodnom izlaganju date su osnovne principske šeme realizacije linearnih zakona upravljanja. Ovaj deo izlaganja završićemo kompletном šemom za realizaciju PID zakona upravljanja, sl. 8.83.



Referentni signal se dovodi na ulaz  $r(t)$ , a regulisana promenljiva na ulaz  $c(t)$  operacionih pojačavača  $I_1$  i  $I_2$ , respektivno, koji mogu prilagođavati te signale.  $I_3$  je detektor signala greške. Signal greške se, zatim, integrali u  $I_4$  i diferencira u  $I_5$ . Najpre se signal greške i njegov diferencijal sumiraju u  $I_7$ . Tako dobijen signal  $u_{pd}$ , preko  $R_f$  i  $C_f$ , ostvaruje negativnu povratnu spregu na diferencijator. Kolo  $I_8$  sumira sve signale i na izlazu daje  $u_{PID}$  čija se vrednost, pomoću potenciometra  $R_p$ , može podešavati. Vremenska konstanta integralnog delovanja se podešava pomoću potenciometra  $R_i$ , a diferencijalna pomoću potenciometra  $R_d$ . Potenciometrom  $R_f$  se podešava vremenska konstanta filtra. Nije potrebno

## Glava 8.: Komponente SAU

obrazlagati posebno funkcije pojedinih kola. Jedino kolo diferencijatora, zajedno s filterskim kolom, potrebno je dopunski razjasniti.

Bilans struja na ulazu diferencijatora je

$$i_{Cd} = i_{Rb} + i_{Cf} \Rightarrow C_d \frac{d(K_d u_e - u_b)}{dt} = \frac{u_d - u_b}{R_b} + C_f \frac{d(K_f u_{pd} - u_b)}{dt}. \quad (8.157)$$

Deleći sa  $u_d$ , uzimajući u obzir da operacioni pojačavač ima veliko pojačanje te je  $u_b/u_d \approx 0$ , sledi:

$$C_d \frac{d(K_d u_e / u_d)}{dt} = \frac{1}{R_b} + C_f \frac{d(K_f u_{pd} / u_d)}{dt}. \quad (8.158)$$

Prelazeći u kompleksni domen dobija se funkcija prenosa

$$W_{pd}(s) = \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s}; \quad T_d = K_d C_d R_b; \quad T_f = K_f C_f R_b. \quad (8.159)$$

tj. ovaj deo kola daje PD signal koji je filtriran niskopropusnim filtrom.

## LITERATURA

- [1] Ротач, В. Я: **Расчет настроек промышленных систем регулирования**, “Госэнергоиздат”, Москва, 1961.
- [2] Stojić, M. R. **Kontinualni sistemi automatskog upravljanja**, “Nauka”, Beograd, 1996.
- [3] Чиликин, М. Г., Ключев, В. И., Сандлер, А. С.: **Теория автоматизированного электропривода**, “Энергия“, Москва, 1979.
- [4] Netushil, A. (Ed.): **Theory of Automatic Control**, Mir Publisher, Moscow, 1978.
- [5] Арендт, В. П., Сэвент, К. Дж.: **Практика следящих систем**, “Госэнергоиздат”, Москва, 1962.
- [6] Humo, E.: **Pincipi i elementi automatske regulacije**, Svetlost, Sarajevo, 1987.
- [7] Юферов, Ф. М.: **Электрические машины автоматических устройств**, “Высшая школа”, Москва, 1976.
- [8] Попков, Л. С.: **Следящие системы**, “Высшая школа”, Москва, 1963.
- [9] Солодовников, В. В. (Ред.): **Основы теории и элементы систем автоматического регулирования**, “Машиностроение”, Москва, 1985.
- [10] Солодовников, В. В. (Ред.): **Устройства и элементы систем автоматического регулирования**, “Машиностроение”, Москва, 1978.
- [11] Фельдбаум, А. А. (Ред.): **Теоретические основы связи и управления**, “Физматгиз”, Москва, 1963.
- [12] Гельднер, К., Кубик, С.: **Нелинейные системы управления**, “Мир”, Москва, 1987.
- [13] Stanković, D.: **Fizičko-tehnička merenja**, “Naučna knjiga“, Beograd, 1987.
- [14] Popović, M.: **Senzori i merenja**,
- [15] Milosavljević, Č.: **Osnovi automatike, III deo, Komponente SAU**, Niš, 2002.
- [16] Томов, И.: **Сервомеханизми**, “Техника”, София , 1975.

## Pitanja za samopроверу

1. Generator jednosmerne struje u sistemima automatskog upravljanja može imati dve osnovne uloge: kao \_\_\_\_\_ ili kao \_\_\_\_\_.
2. Dinamika generatora jednosmerne struje se može aproksimirati rednom vezom pojačavačkog i \_\_\_\_\_.
3. Amplidin, kao dvostepeni generator jednosmerne struje može se identifikovati kao redna veza pojačavačkog i tri \_\_\_\_\_ elementa \_\_\_\_\_ reda.
4. Sistem koji se sastoji iz motora jednosmerne struje kao objekta i generatorka jednosmerne struje kao pojačavača naziva se \_\_\_\_\_ grupa.
5. Motor jednosmerne struje sa nezavisnom pobudom ako se istovremeno upravlja pobudom i strujom rotora je \_\_\_\_\_ element.
6. Motor jednosmerne struje sa permanentnim magnetima je \_\_\_\_\_ element.
7. Za linearizaciju modela motora jednosmerne struje sa nezavisnom pobudom moguća su dva načina i to: a) stabilizacijom \_\_\_\_\_; b) stabilizacijom \_\_\_\_\_.
8. Funkcija prenosa motora jednosmerne struje upravljanog pobudom, kada je izlazni signal brzina obrtanja, može se identifikovati kao redna veza pojačavačkog i dva \_\_\_\_\_.
9. Za praktičnu primenu, funkcija prenosa motora jednosmerne struje upravljanog pobudom, kada je izlazni signal ugao obrtanja rotora motora, može se identifikovati kao redna veza \_\_\_\_\_.
10. Motor jednosmerne struje sa permanentnim magnetima, kada je izlazni signal brzina obrtanja, a ulazni napon napajanja rotora, ima funkciju prenosa koja se može identifikovati kao redna veza pojačavačkog i \_\_\_\_\_.
11. Motor jednosmerne struje sa permanentnim magnetima za primenu u automatici, pored podataka o nominalnoj snazi, naponu, brzini obrtanja, karakterišu sledeći parametri: \_\_\_\_\_.
12. Funkcija prenosa motora jednosmerne struje upravljanog strujom rotora ima funkciju prenosa oblika:
13. Za merenje ugaone pozicije u primeni su najčešće sledeći elementi: potenciometri, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
14. Potenciometri mogu biti: \_\_\_\_\_ ili \_\_\_\_\_.
15. Funkcija prenosa potenciometra može se identifikovati funkcijom prenosa \_\_\_\_\_ elementa,
16. Koeficijent pojačanja potenciometra je odnos \_\_\_\_\_.
17. Selsini su male \_\_\_\_\_ koje služe za detekciju \_\_\_\_\_ dvaju obrtnih \_\_\_\_\_ ili za prenos \_\_\_\_\_ na daljinu.

## Glava 6.: Sinteza linearnih SAU

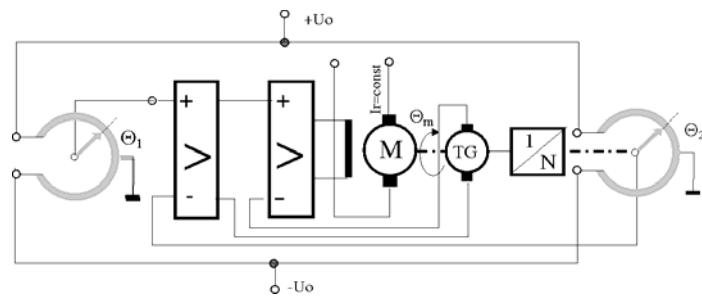
- 
18. Transformatorska sprega selsina je takva sprege predajnog i \_\_\_\_\_ selsina, kada se na rotor predajnog selsina dovodi \_\_\_\_\_ napon, istoimeni krajevi statora su međusobno \_\_\_\_\_, a sa \_\_\_\_\_ prijemnog selsina se dobija napon proporcionalan \_\_\_\_\_ razlici pozicija rotora i \_\_\_\_\_ selsina.
19. Transformatorska sprega selsina se može predstaviti sledećom strukturnom blok-šemom
20. Indikatorska sprega selsina služi za \_\_\_\_\_ pri malim \_\_\_\_\_.
21. Indikatorska sprega selsina može se identifikovati kao funkcija prenosa \_\_\_\_\_.
22. Indikatorsku spregu selsina karakteriše mogućnost pojave \_\_\_\_\_. Zbog toga se rotor pratećeg selsina snabdeva odgovarajućim \_\_\_\_\_.
23. Rizolveri (ili \_\_\_\_\_ transformatori) služe za transformaciju \_\_\_\_\_ obrtanja u ekvivalentni \_\_\_\_\_ signal.
24. Rizolveri \_\_\_\_\_ zameniti selsine?
25. Rizolveri su \_\_\_\_\_ elementi od selsina?
26. Elementi za merenje brzine obrtanja se obično nazivaju \_\_\_\_\_.
27. Za merenje brzine obrtanja koriste se sledeći elementi: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
28. Za merenje brzine obrtanja motora jednosmerne struje i dvofaznog asinhronog servomotora mogu se koristiti \_\_\_\_\_ merni \_\_\_\_\_.
29. Za transformaciju signala iz jednog oblika u drugi koriste se \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
30. Za transformaciju jednosmernog signala u ekvivalentni naizmenični primenjuju se \_\_\_\_\_.
31. Za transformaciju naizmeničnog signala u ekvivalenti jednosmerni koriste se \_\_\_\_\_. U primeni je najčešće fazno-osetljivi \_\_\_\_\_. Njegova funkcija prenosa može se identifikovati kao redna veza \_\_\_\_\_.
32. Ekvivalentnost transformacije signala ogleda se u tome da veličina jednosmernog signala bude proporcionalna \_\_\_\_\_ naizmeničnog signala, a da promena znaka jednosmernog signala rezultuje u promenu \_\_\_\_\_ naizmeničnog signala.
33. U savremenim sistemima upravljanja veoma često se koriste \_\_\_\_\_ modulatori. Njihova funkcija prenosa se identificuje \_\_\_\_\_ elementom, čije je pojačanje \_\_\_\_\_, gde je \_\_\_\_\_.
34. Pojačavači u sistemima upravljanja služe da pojačaju signal \_\_\_\_\_ po nivou ili po \_\_\_\_\_.

**Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja-1**

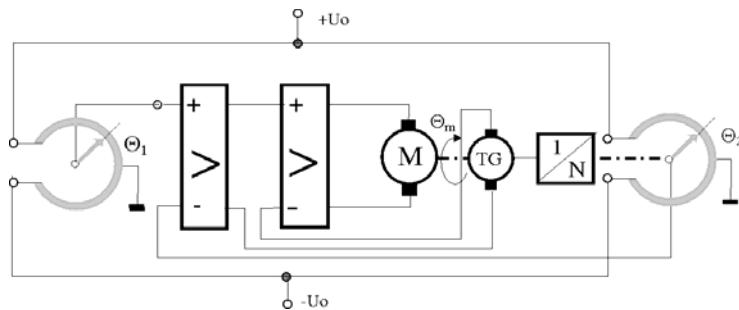
35. U sistemima upravljanja korišćeni su ili se koriste sledeći tipovi pojačavača:  
\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
36. Elektronski pojačavači mogu biti sa: \_\_\_\_\_ ili \_\_\_\_\_.
37. Za pojačanje signala po nivou (naponu) u savremenim sistemima koriste se  
\_\_\_\_\_ pojačavači.
38. Integracioni element na bazi operacionih pojačavača gradi se tako što se u  
povratnoj grani vezuje \_\_\_\_\_, a u direktnoj grani - \_\_\_\_\_.
39. Funkcija prenosa integratora sa operacionim pojačavačem je \_\_\_\_\_.
40. Diferencijator sa operacionim pojačavačem nije našao širu primenu u praksi, jer  
je osetljiv na \_\_\_\_\_.
41. U praksi SAU umesto idealnog diferencijatora koristi se realni diferencijator čija  
je funkcija prenosa \_\_\_\_\_.
42. Napredni sleditelj sa operacionim pojačavačem dobija se tako što je povratna  
grana \_\_\_\_\_ spojena, a ulaz se dovodi na \_\_\_\_\_ ulaz pojačavača.
43. Proporcionalno integralni element sa operacionim pojačavačima se dobija kada je  
povratna grana sastavljena iz redne veze \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_, a u  
direktnoj grani je \_\_\_\_\_.
44. Kao pojačavač snage za četvorokvadrantno upravljanje jednosmernim motorom  
koristi se pojačavač \_\_\_\_\_- tipa.
45. Elementi za korekciju osobina sistema upravljanja nazivaju se \_\_\_\_\_.  
Koriste se uglavnom tri tipa i to: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_.
46. Za regulaciju sistema u primeni su tri tipa regulatora: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ i \_\_\_\_\_  
i njihove kombinacije: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
47. Diferencijalni regulator se nikad ne primenjuje samostalno, jer je njegov izlaz  
jednak \_\_\_\_\_ pri \_\_\_\_\_ ulazu.
48. Kao izvršni organi u sistemima elektromehaničkog tipa najčešće se koriste: \_\_\_\_\_  
i \_\_\_\_\_ struje i \_\_\_\_\_.
49. Dvofazni asinhroni servomotor se izrađuje u dve varijante: a) sa rotorom u obliku  
\_\_\_\_\_ kaveza ili b) sa rotorom u obliku \_\_\_\_\_.
50. Dvofazni asinhroni servomotor sa rotorom u obliku \_\_\_\_\_ ima veću  
brznu reagovanja, jer je njegov moment inercije \_\_\_\_\_.
51. Mehanički reduktor služi za prilagođenje \_\_\_\_\_ impedansi.
52. Prenosni odnos reduktora se najčešće bira iz uslova ostvarenja maksimalnog  
\_\_\_\_\_. Tada se prenosni odnos određuje po formuli \_\_\_\_\_.
53. Mehanički reduktori mogu biti sa cilindričnim zupčanicima, sa \_\_\_\_\_  
prenosom, sa \_\_\_\_\_ prenosom.
54. Najveći prenosni odnos za iste gabarite može dati reduktor sa \_\_\_\_\_  
prenosom.
55. Reduktor sa pužnim prenosom se izbegava u servosistemima, jer je sklon  
pri nagloj promeni \_\_\_\_\_.

### Zadaci za vežu

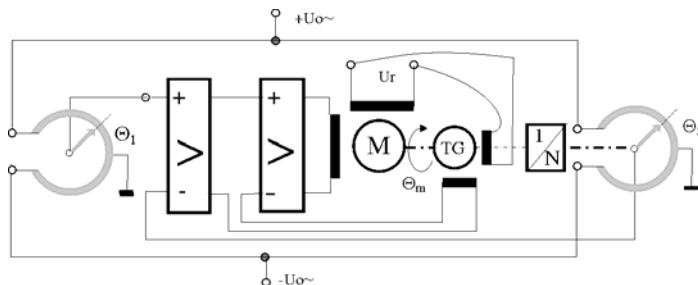
- Principske električne šeme pozicionih servosistema sa potenciometrima ili selsinima kao elementima za merenje pozicije (ugla obrtanja), motorom jednosmerne struje upravljanim pobudom, ili upravljanim strujom rotora, odnosno dvofaznim asinhronim servomotorom, kao izvršnim organom i tahogeneratorom jednosmerne struje ili naizmenične struje, kao meračem brzine obrtanja rotora motora radi stabilizacije sistema, i elektronskim pojačavačima signala greške po poziciji i po brzini, prikazane su na sl. 8.84-8.89. Za date sisteme potrebno je: a) formirati strukturu blok šemu; b) odrediti funkcije prenosa elemenata strukturne blok-šeme.



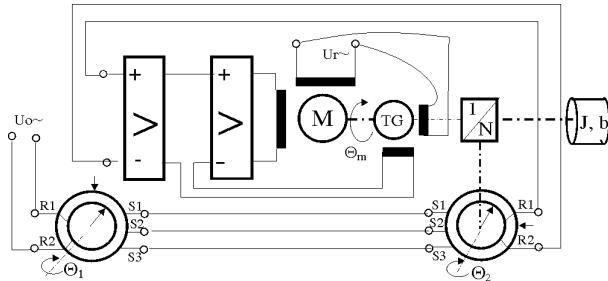
Sl. 8.84. Potenciometarski pozicioni servosistem sa MJS upravljanim pobudom.



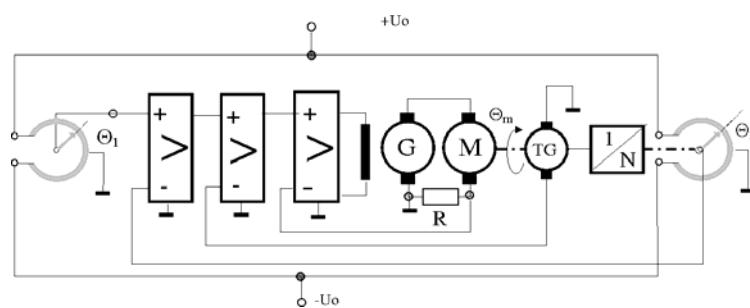
Sl. 8.85. Potenciometarski pozicioni servosistem sa MJS upravljanim strujom rotora.



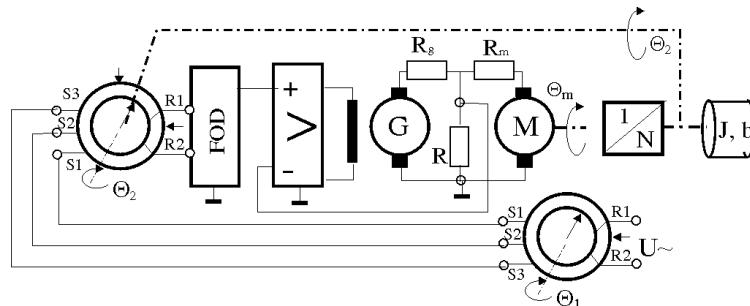
Sl. 8.86. Potenciometarski pozicioni servosistem sa dvofaznim asinhronim servomotorom.



Sl. 8.87. Selsinski pozicioni servosistem sa dvofaznim asinhronim servomotorom.



Sl. 8.88. Potenciometarski pozicioni servosistem sa Ward-Leonardovom grupom



Sl. 8.89. Selsinski pozicioni servosistem sa Ward-Leonardovom grupom.

FOD - fazno osetljivi diodni demodulator.