Diskretizacija filtara

Anja Buljević
Jelena Bulatović

Primer 1. Za kontinulni sistem, opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

naći odgovarajuće funkcije diskretnog prenosa, koje obezbeđuju

1. Impuls-invarijantna,
2. Step-invarijantna,
3. Ojlerova unapred,
4. Ojlerova unazad i
5. Tustinova transformacija.

Rešenje: $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

- polovi: $p_1 = 0, p_2 = -1$
- stabinost: sistem je granično stabilan
- red: sistem je drugog reda
- kašnjenje: nema kašnjenja (u izrazu ne figuriše $e^{-s\tau}$)

Na primer, opšti oblik funkcije prenosa sistema prvog reda sa kašnjenjem bi bio $G(s) = \frac{b}{s+a}e^{-s\tau}$

1. Impulsno-invarijantna transformacija
   Odgovarajućim inverznim transformacijama dobijamo željene odzive, koji moraju da se poklapaju u trenucima odabiranja ($t = kT$). Odzivi kontinualnog i diskretnog sistema se lako izračunavaju ako znamo da je $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ i $\mathfrak{Z}\{\delta(t)\} = 1$. Dakle,

   $\mathfrak{Z}^{-1}\{G(z) \cdot 1\}_{kT} = (\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot 1\}_t)^*_{kT}$

   Kao što je poznato od pre, zvezdica u gornjem desnom indeksu označava operaciju vremenskog odbirkovanja.

   Primenom $\mathfrak{Z}$-transformacije na levu i desnu stranu izraza dobijamo:

$$G(z) = \mathfrak{Z}\{(\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot 1\}_t)^*\}_{kT}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = h(t) - h(t)e^{-t} = f(t)$$

$$f(kT) = h(kT) - h(kT)e^{-kT}$$

   Najzad, diskretna funkcija prenosa je:

$$G(z) = \mathfrak{Z}\{f(kT)\} = \frac{Tz}{z-1} - \frac{Tz}{z-e^{-T}}$$

$$= \frac{Tz(z-e^{-T}) - Tz(z-1)}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{Tz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

- polovi: $z_1 = 1, z_2 = e^{-T}$
- stabinost: sistem je granično stabilan (za bilo koje $T > 0$)
- red: sistem je drugog reda
- kašnjenje: $d = \#n - \#m = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ kašnjenje = 1 perioda

Ovde n označava stepen imenioca, a m stepen brojioca.

Da bi dobijeni diskretni sistem implementirali na digitalnom uređaju, potrebno je dobijenu funkciju u $\mathfrak{z}$-domenu prevesti u odgovarajuću diferencnu jednačinu na osnovu koje ćemo formirati odgovarajući kod u programskom jeziku.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Tz - Tze^{-T}}{z^2 + z(-1 - e^{-T}) + e^{-T}}$$

Unakrsnim množenjem dobijamo:

$$\begin{aligned}
z^2Y(z) + zY(z)(-1 - e^{-T}) + Y(z)e^{-T} &= Tz(1 - e^{-T})U(z) / : z^2 \\
Y(z) &= z^{-1}Y(z)(1 + e^{-T}) - e^{-T}z^{-2}Y(z) + Tz^{-1}(1 - e^{-T})U(z) \\
y[k] &= (1 + e^{-T})y[k-1] - e^{-T}y[k-2] + T(1 - e^{-T})u[k-1]
\end{aligned}$$

S ciljem upoređivanja impulsnog, odnosno step odziva kontinualnog sistema $G(s)$ i diskretnog sistema $G(z)$ dobijenog primenom impulsno-invarijantne transformacije, koristićemo softverski paket Matlab, gde ćemo implementirati sledeću skriptu:

Za upoređivanje step odziva kontinualnog i diskretnog sistema, zakomentarisati 6. i 14, a otkomentarisati 7. i 15. liniju koda

```
1  % IMPULSNO-INVARIJANTNA APROKSIMACIJA
2
3  s = tf('s');
4  G = 1/(s*(s+1)); %funkcija prenosa sistema koji se diskretizuje
5  t = 0:0.01:10;
6  y_c = impulse(G,t) %impulsni odziv kontinualnog sistema G(s)
7  % y_c = step(G,t) %step odziv kontinualnog sistema G(s)
8  plot(t,y_c) %crtanje kontinualnog odziva i poredjenje sa odzivom
        diskretizovanog sistema G(z)
9  hold on
10
11 T = 0.5;
12 trenuci_odabiranja = 0:T:10;
13 broj_odbiraka = length(trenuci_odabiranja);
14 ulazni_signal = [1/T, zeros(1, broj_odbiraka-1)];%impulsna pobuda
15 %ulazni_signal = ones(1,broj_odbiraka); %step pobuda
16 izlazni_signal = zeros(1,broj_odbiraka);
17
18 ypp = 0;
19 up = 0;
20 yp = 0;
21
22 for i = 1 : broj_odbiraka
23
24 u = ulazni_signal(i);
25 y = (1+exp(-T))*yp + T*(1-exp(-T))*up - exp(-T)*ypp;
26
27 izlazni_signal(i) = y;
```

```
ypp = yp; % pp u indeksu oznacava "prethodno prethodno", odnosno vrednost funkcije u trenutku k-2
yp = y; % p u indeksu oznacava "prethodno", odnosno vrednost funkcije u trenutku k-1
up = u;

end

%impulsna i step pobuda sistema
% mogu i ovako da se realizuju:
%izlazni_signal = impulse(G,trenuci_odabiranja);
%izlazni_signal = step(G,trenuci_odabiranja);

plot(trenuci_odabiranja,izlazni_signal,'o')
xlabel('k')
ylabel('y[k]')
```

2. Step-invarijantna transformacija
   Sada na ulazu u sistem imamo Hevisajdovu funkciju i znajući da je $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$ i $\mathfrak{Z}\{h(t)\} = \frac{z}{z-1}$, imaćemo:

$$\mathfrak{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}G(z)\right\} = \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}\right)^{*}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\} \\ &= th(t) - h(t) - h(t)e^{-t} = f(t)\end{aligned}$$

$$f(kT) = h(kT)kT - h(kT) + h(kT)e^{-kT}$$

$$\begin{aligned}G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\{f(kT)\} = \frac{z-1}{z}\mathfrak{Z}\left\{h(kT)kT - h(kT) + h(kT)e^{-kT}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right] \\ &= \frac{Tz - Te^{-T} - \cancel{z^2} + ze^{-T} + z - e^{-T} + \cancel{z^2} - 2z + 1}{(z-1)(z-e^{-T})} \\ &= \frac{z(T + e^{-T} - 1) + (-Te^{-T} - e^{-T} + 1)}{(z-1)(z-e^{-T})}\end{aligned}$$

   - polovi: $z_1 = 1, z_2 = e^{-T}$
   - stabinost: Kao i početni kontinualni sistem i diskretni sistem je granično stabilan. Odnosno, transformacija nije narušila stabilnost sistema i ovo važi za bilo koje $T > 0$. Tačnije, transformacija je stabilna za $T > 0$, čime su očuvane karakteristike polaznog sistema.
   - red: sistem je drugog reda
   - kašnjenje: $d = \#n - \#m = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ kašnjenje = 1 perioda

   Vodeći se prethodnim primerom, dobijeni diskretni sistem implementirati na računaru i uporediti impulsne i step odzive kontinualnog sistema $G(s)$ i diskretnog sistema $G(z)$.

3. Ojlerova unapred transformacija
   Da bismo izvršili diskretizaciju, kontinualnu funkciju prenosa transformišemo uvođenjem smene kompleksne promenjive s

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad \text{smena:} \quad s = \frac{z-1}{T}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\frac{z-1}{T}(\frac{z-1}{T}+1)} \\ &= \frac{1}{\frac{z-1}{T}\frac{z-1+T}{T}} \\ &= \frac{T^2}{(z-1)(z-1+T)} \end{aligned}$$

   - polovi: $z_1 = 1, z_2 = 1 - T$
   - stabilnost: (od periode odabiranja T zavisi gde će se preslikati polovi)
     z_2 će biti stabilan ako je $|z_2| < 1$, odnosno

     $$\begin{aligned} |1-T| &< 1 \\ -1 < 1-T &< 1 \\ -2 < -T &< 0 \\ 0 < T &< 2 \end{aligned}$$

     Dakle, za $T \in (0,2]$ sistem će očuvati performanse kontinualnog sistema i ostati granično stabilan, dok će za $T > 2$ sistem biti nestabilan.
   - red: sistem je drugog reda
   - kašnjenje: $d = \#n - \#m = 2 - 0 = 2 \Rightarrow$ kašnjenje = 2 periode

   Vodeći se prethodnim primerom, dobijeni diskretni sistem implementirati na računaru i uporediti impulsne i step odzive kontinualnog sistema $G(s)$ i diskretnog sistema $G(z)$.

Pojam stabilan se u ovom slučaju odnosi na pol, koji se u s ravni nalazio u levoj poluravni i njegovu stabilnost posle diskretizacije analiziramo. Drugi pol se nalazi na imaginarnoj osi s ravni i celom sistemu daje "*granično stabilan karakter*". Znači, ako je transformacija iz s u z ravan dobro isprojektovana, ona će očuvati opštu karakteristiku sistema i neće uvesti sistem u nestabilnost. Odnosno, transformacija će biti *stabilna*.

4. Ojlerova unazad transformacija

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad \text{smena:} \quad s = \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{zT}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\frac{z-1}{zT}(\frac{z-1}{zT}+1)} = \frac{1}{\frac{z-1}{zT}\frac{z-1+zT}{zT}} \\ &= \frac{z^2T^2}{(z-1)(z-1+zT)} = \frac{z^2T^2}{(1+T)(z-1)(z-\frac{1}{1+T})} \\ &= \frac{1}{1+T}\frac{z^2T^2}{(z-1)(z-\frac{1}{1+T})} \end{aligned}$$

   - polovi: $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{1+T}$

- stabilnost: (od periode odabiranja T zavisi gde će se preslikati polovi)
  z_2 će biti stabilan ako je $|z_2| < 1$, odnosno
  $$|\frac{1}{1+T}| < 1$$
  $$-1 < \frac{1}{1+T} < 1$$
  Dakle, za svako $T > 0$ sistem će očuvati kakarkteristike kontinualnog sistema i ostati granično stabilan.
- red: sistem je drugog reda
- kašnjenje: $d = \#n - \#m = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$ nema kašnjenja

Vodeći se prethodnim primerom, dobijeni diskretni sistem implementirati na računaru i uporediti impulsne i step odzive kontinualnog sistema $G(s)$ i diskretnog sistema $G(z)$.

5. Tustinova transformacija

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad \text{smena:} \quad s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$
$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+1)} = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\frac{2(z-1)+T(z+1)}{T(z+1)}} \\ &= \frac{T^2(z+1)^2}{2(z-1)(2z-2+Tz+T)} = \frac{T^2(z+1)^2}{2(z-1)(z(2+T)+T-2)} \\ &= \frac{T^2}{2(T+2)}\frac{(z+1)^2}{(z-1)(z+\frac{T-2}{T+2})} \end{aligned}$$

- polovi: $z_1 = 1, z_2 = \frac{T-2}{T+2}$
- stabinost: (od periode odabiranja T zavisi gde će se preslikati polovi)
  z_2 će biti stabilan ako je $|z_2| < 1$, odnosno
  $$|\frac{T-2}{T+2}| < 1$$
  $$-1 < \frac{T-2}{T+2} < 1$$
  Kao i početni kontinualni sistem i diskretni sistem je granično stabilan. Odnosno, transformacija nije narušila stabilnost sistema i ovo važi za bilo koje $T > 0$. Tačnije, transformacija je stabilna za $T > 0$, čime su očuvane karakteristike polaznog sistema.
- red: sistem je drugog reda
- kašnjenje: $d = \#n - \#m = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$ nema kašnjenja

Da bi dobijeni diskretni sistem implementirali na digitalnom uređaju, potrebno je dobijenu funkciju u $\mathfrak{Z}$-domenu prevesti u odgovarajuću diferencnu jednačinu na osnovu koje ćemo formirati odgovarajući kod u programskom jeziku.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T^2(z+1)^2}{2(z-1)(z(2+T)+T-2)}$$

Unakrsnim množenjem dobijamo:

$$Y(z)(2z-2)(2z+zT+T-2) = U(z)T^2(z+1)^2$$

$$z^2Y(z)(4+2T) - 8zY(z) + (4-2T)Y(z) = T^2z^2U(z) + T^2 2zU(z) + T^2U(z) / : z^2$$

$$Y(z) = z^{-1}\frac{8}{4+2T}Y(z) - z^{-2}\frac{4-2T}{4+2T}Y(z) + \frac{T^2}{4+2T}U(z) + z^{-1}\frac{2T^2}{4+2T}U(z) + z^{-2}\frac{T^2}{4+2T}U(z)$$

$$y[k] = \frac{8}{4+2T}y[k-1] - \frac{4-2T}{4+2T}y[k-2] + \frac{T^2}{4+2T}u[k] + \frac{2T^2}{4+2T}u[k-1] + \frac{T^2}{4+2T}u[k-2]$$

Koristimo MATLAB okruženje za implementaciju i upoređivanje impulsnih, odnosno step odziva sistema $G(s)$ i $G(z)$.

Za upoređivanje step odziva kontinualnog i diskretnog sistema, zakomentarisati 7. i 18, a otkomentarisati 6. i 17. liniju koda

```
1  % TUSTINOVA APROKSIMACIJA
2
3  s = tf('s');
4  G = 1/(s*(s+1)); %funkcija prenosa sistema koji se diskretizuje
5  t = 0:0.01:100;
6  %y_kontinualni = step(G,t); %step odziv kontinualnog sistema G(s)
7  y_kontinualni = impulse(G,t); %impulsni odziv kontinualnog sistema G(s)
8  plot(t,y_kontinualni) %crtanje kontinualnog odziva i poredjenje sa odzivom diskretizovanog sistema G(z)
9  hold on
10
11 T = 0.5;
12 trenuci_odabiranje = 0:T:100;
13 broj_odbiraka = length(trenuci_odabiranje);
14
15 %ulazni_signal = ones(1,broj_odbiraka);
16 ulazni_signal = [1/T, zeros(1,broj_odbiraka-1)];
17 izlazni_signal = zeros(1,broj_odbiraka);
18
19 ypp = 0;
20 upp = 0;
21 yp = 0;
22 up = 0;
23
24 for i = 1:broj_odbiraka
25
26     u = ulazni_signal(i);
27     y = -((4-2*T)/(4+2*T))*ypp + ((T^2)/(4+2*T))*upp + (8/(4+2*T))*yp + ((2*T^2)/(4+2*T))*up + ((T^2)/(4+2*T))*u;
28
29     izlazni_signal(i) = y;
30
31     ypp = yp;
32     upp = up;
33     yp = y;
34     up = u;
```

```
end

plot(trenuci_odabiranje,izlazni_signal, 'o')
xlabel('k')
ylabel('y[k]')
ylim([-1 1.5])
```