Rotacioni faktori, matrični oblik DFT

Diskretna Furijeova transformacija signala $x(n)$ je:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n},\ k=0,1,...,N-1\cdot$$

Ako uvedemo oznaku $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, dobija se:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\ k=0,1,...,N-1\cdot$$

Inverzna DFT je tada:

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},\ n=0,1,...,N-1\cdot$$

Eksponencijalni faktori W_N^{nk} zovu se rotacioni faktori.

Primer

Odrediti položaj rotacionih faktora u z ravni za $N=8$.

$$W_8^{nk}=e^{-j\frac{2\pi nk}{8}}=e^{-j\frac{\pi nk}{4}}$$

$$W_8^0=1,\ W_8^1=e^{-j\frac{\pi}{4}},\ W_8^2=e^{-j\frac{\pi}{2}},...$$

Slika

Rotacioni faktori predstavljaju tačke na jediničnom krugu ekvidistantno raspoređene na uglovnom rastojanju od $2\pi/N$.

Osobine rotacionih faktora:

1. periodičnost $W_N^{nk}=W_N^{(n+N)k}=W_N^{(k+N)n}$
2. simetrija $\left(W_N^{nk}\right)^*=W_N^{k(N-n)}$

Transformacioni par $x(n)\leftrightarrow X(k)$ može se predstaviti i u matričnom obliku. Ako niz $\{x(n)\}$ predstavimo kao vektor $\mathbf{x}_N=\left[x_0\ x_1 ... x_{N-1}\right]^T$, a niz $\{X(k)\}$ kao vektor $\mathbf{X}_N=\left[X_0\ X_1 ... X_{N-1}\right]^T$, važi da je $\mathbf{X}_N=\mathbf{W}_N\cdot\mathbf{x}_N$, gde je $\mathbf{W}_N$ matrica transformacije:

$$\mathbf{W}_N=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & ... & 1\\ 1 & W_N & W_N^2 & ... & W_N^{N-1}\\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & ... & W_N^{2(N-1)}\\ . & . & . & & .\\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & ... & W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}$$

Primer

Izračunati DFT niza $\{x(n)\}=\{1,\ 0,\ 0.5,\ 1\}$ koristeći matrični oblik definicije DFT-a.

U ovom slučaju $N=4$, pa je

$$\mathbf{W}_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3\\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6\\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_4=\mathbf{W}_4\cdot\mathbf{x}_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0.5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5\\ 0.5+j\\ 0.5\\ 0.5-j\end{bmatrix}$$

DFT niz je $\{X(k)\}=\{2.5,\ 0.5+j,\ 0.5,\ 0.5-j\}$.

Brza Furijeova transformacija – FFT

FFT čini grupa algoritama za efikasno izračunavanje diskretne Furijeove transformacije.
Definicioni obrazac za računanje DFT –a je:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n},\ k=0,1,\dots,N-1$$

$$X(k)=x(0)+x(1)e^{-j\frac{2\pi k}{N}}+\dots+x(N-1)e^{-j\frac{2\pi k(N-1)}{N}},\ k=0,1,\dots,N-1$$

Odavde se vidi da za jedan element DFT niza treba N kompleksnih množenja i N-1 kompleksnih sabiranja. Za ceo DFT niz od N elemenata treba N^2 kompleksnih množenja i $N(N-1)$ kompleksnih sabiranja što je neprimenljivo za veliki broj N.
FFT su algoritmi kod kojih se redukcija broja aritmetičkih operacija zasniva na dekompoziciji DFT-a i na osobinama periodičnosti i simetrije rotacionih faktora. Kod FFT algoritama broj množenja i sabiranja srazmeran je sa $N\log_2 N$.

Složenost izračunavanja DFT-a i princip dekompozicije

DFT i inverzna DFT (IDFT) se računaju po sledećim formulama:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\ k=0,1,\dots,N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},\ n=0,1,\dots,N-1$$

DFT I IDFT se razlikuju samo u znaku eksponenta kompleksne baze W_N i u faktoru $1/N$, pa se praktično isti postupak može primeniti za izračunavanje DFT i IDFT.

FFT algoritmi se zasnivaju na sukcesivnoj dekompoziciji DFT-a na manje delove uz korišćenje osobina periodičnosti i simetrije rotacionih faktora. FFT algoritmi rade sa nizovima dužine $N=2^p,\ p\in\mathbf{Z}$. Ako originalni niz ne zadovoljava ovaj uslov, on se dopunjava nulama. Za niz dužine N potrebno je N^2 kompleksnih množenja. Ako niz dužine N podelimo na dva kraća niza čije su dužine N/2, broj kompleksnih množenja se smanjuje na $\frac{N^2}{4}\cdot 2=\frac{N^2}{2}$. Dekompozicija se vrši sve dok se ne dobiju elementarni podnizovi sa dva elementa. Osim toga, zahvaljujući osobinama periodičnosti i simetrije, vrednosti mnogih rotacionih faktora su iste.

$\downarrow k$ \ $n\rightarrow$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	-*j*	-1	*j*
2	1	-1	1	-1
3	1	*j*	-1	-*j*

U ovoj tabeli su prikazane vrednosti rotacionih W_4^{nk} faktora za $n=0,1,2,3$ i $k=0,1,2,3$. Proizvod nk se kreće u opsegu od 0 do 9, a u tabeli ima samo 4 različite vrednosti za W_4^{nk}. Od tih vrednosti, jedna polovina se razlikuje od druge samo po znaku. Osim toga, neke vrednosti su ± 1, pa se u tim slučajevima radi samo sabiranje ili oduzimanje bez množenja.

FFT algoritam sa razbijanjem po vremenu – FFT DIT (Decimation in Time)

Neka je $\{x(n)\}$ niz dužine $N=2^p,\ p\in\mathbf{Z}$. Potrebno je izvršiti sukcesivnu dekompoziciju (razbijanje na dva niza dvostruko manje dužine) sve dok se ne dođe do elementarnih podnizova dužine 2. Jedan podniz se formira od parnih, a drugi od neparnih odbiraka vremenskog niza $\{x(n)\}$. Zadatak je da se izračuna *N* odbiraka DFT niza $\{X(k)\}$ na osnovu *N* odbiraka niza $\{x(n)\}$.

$$\{x(n)\}=\{x(0),x(1),x(2),...,x(N-1)\}$$
$$\{x_1(n)\}=\{x(0),x(2),x(4),...,x(N-2)\}$$
$$\{x_2(n)\}=\{x(1),x(3),x(5),...,x(N-1)\}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(2n)W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}$$

Ako uvedemo sledeće oznake,

$x_1(m) = x(2n)$
$x_2(m) = x(2n+1)$
$m = 0,1,...N/2-1$
uzimajući u obzir da je $W_N^{2m} = W_{N/2}^m$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m) W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_2(m) W_{N/2}^{mk}$$

Prva suma predstavlja DFT niza $\{x_1(m)\}$ dužine *N*/2, a druga DFT niza $\{x_2(m)\}$ dužine *N*/2:

$$X_1(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m) W_{N/2}^{mk}$$

$$X_2(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_2(m) W_{N/2}^{mk}$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \qquad (1)$$

Nizovi $\{X_1(k)\}$ i $\{X_2(k)\}$ su periodični sa periodom *N*/2 jer su njihove dužine *N*/2, pa je:

$$X_1(k) = X_1(k + \frac{N}{2})$$

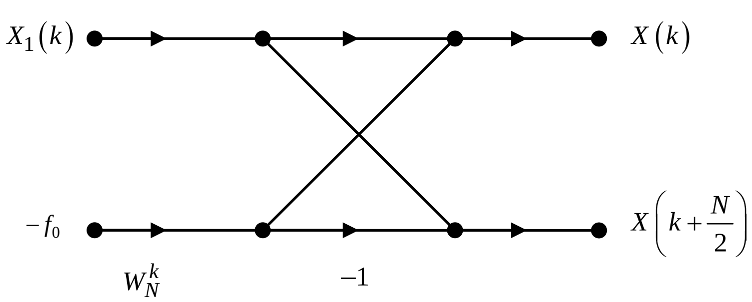
$$X_2(k) = X_2(k + \frac{N}{2})$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+N/2} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) + W_N^k \cdot W_N^{N/2} \cdot X_2(k)$$

Pošto je $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$, važi da je:

$$X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k \cdot X_2(k) \qquad (2)$$

Jednačinama (1) i (2) definiše se osnovni element FFT algoritma, tzv. leptir.



Slika Osnovni element FFT algoritma – leptir

Isti mehanizam razbijanja treba primeniti i na nizove dužine *N*/2, pa se niz $\{x_1(m)\}$ razlaže na podnizove $\{x_{11}(m)\}$ i $\{x_{12}(m)\}$, čije su dužine *N*/4 i to tako što se niz $\{x_{11}(m)\}$ formira od parnih odbiraka niza $\{x_1(m)\}$, a $\{x_{12}(m)\}$ od neparnih. Analogno, niz $\{x_2(m)\}$ razbija se na $\{x_{21}(m)\}$ i $\{x_{22}(m)\}$.

$$X_1(k)=\sum_{m=0}^{N/4-1}x_1(2m)W_{N/2}^{2mk}+\sum_{m=0}^{N/4-1}x_1(2m+1)W_{N/2}^{(2m+1)k}=\sum_{m=0}^{N/4-1}x_{11}(m)W_{N/4}^{mk}+W_N^{2k}\sum_{m=0}^{N/4-1}x_{12}(m)W_{N/4}^{mk}$$

$$X_1(k)=X_{11}(k)+W_N^{2k}X_{12}(k)$$

Nizovi $\{X_{11}(k)\}$ i $\{X_{12}(k)\}$ su periodični sa periodom $N/4$ jer su njihove dužine $N/4$, pa je:

$$X_{11}(k)=X_{11}(k+\frac{N}{4})$$

$$X_{12}(k)=X_{12}(k+\frac{N}{4})$$

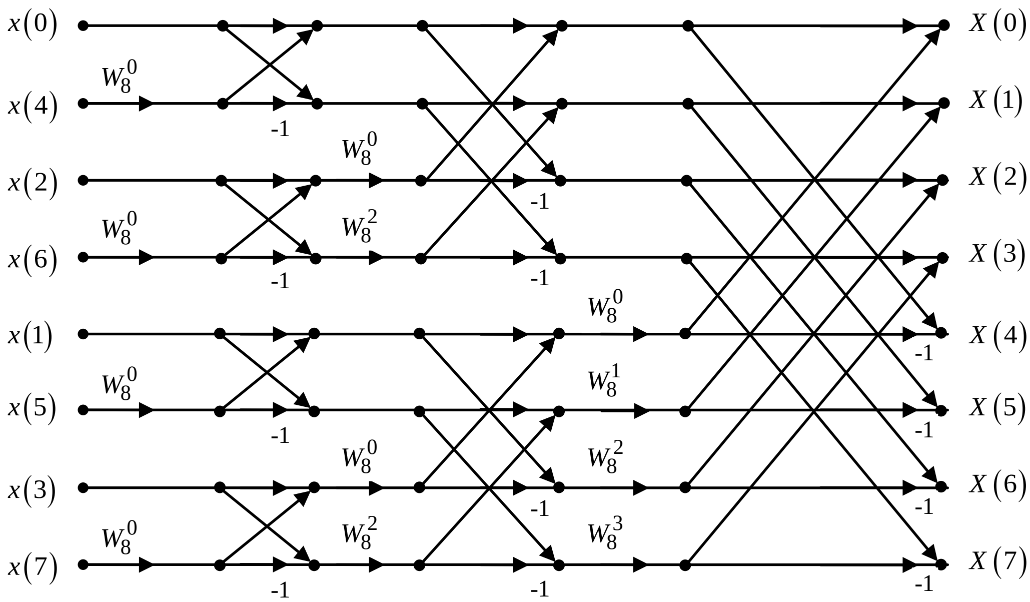
$$X_1(k+\frac{N}{4})=X_{11}(k)-W_N^{2k}\cdot X_{12}(k)$$

Analogno, za drugi niz važi:

$$X_2(k)=X_{21}(k)+W_N^{2k}X_{22}(k)$$

$$X_2(k+\frac{N}{4})=X_{21}(k)-W_N^{2k}\cdot X_{22}(k)$$

Konačno dati sliku za $N=8$



FFT algoritam sa razbijanjem po učestanosti – FFT DIF (Decimation in Frequency)

Redosled odbiraka ulaznog niza $\{x(n)\}$ se ne menja, već se grupišu tako da prvu grupu čini prvih $N/2$ odbiraka, a drugu grupu drugih $N/2$:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{(n+N/2)k} =$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+W_N^{\frac{N}{2}k}\cdot x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{nk}$$

Sledeći korak je razbijanje niza $\{X(k)\}$ na parni i neparni deo.

Za $k=2l$ dobija se:

$$X(2l)=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+W_N^{Nl}\cdot x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{n2l} = \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_{N/2}^{nl}$$

Za $k=2l+1$ dobija se:

$$X(2l+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+W_N^{\frac{N}{2}(2l+1)}x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{n(2l+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{n}\cdot W_{N/2}^{nl}$$

Prethodne dve formule određuju prvu etapu dekompozicije po FFT DIF algoritmu.
Ako uvedemo sledeće oznake:

$$x_{11}(n)=x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)$$

$$x_{12}(n)=\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{n}$$

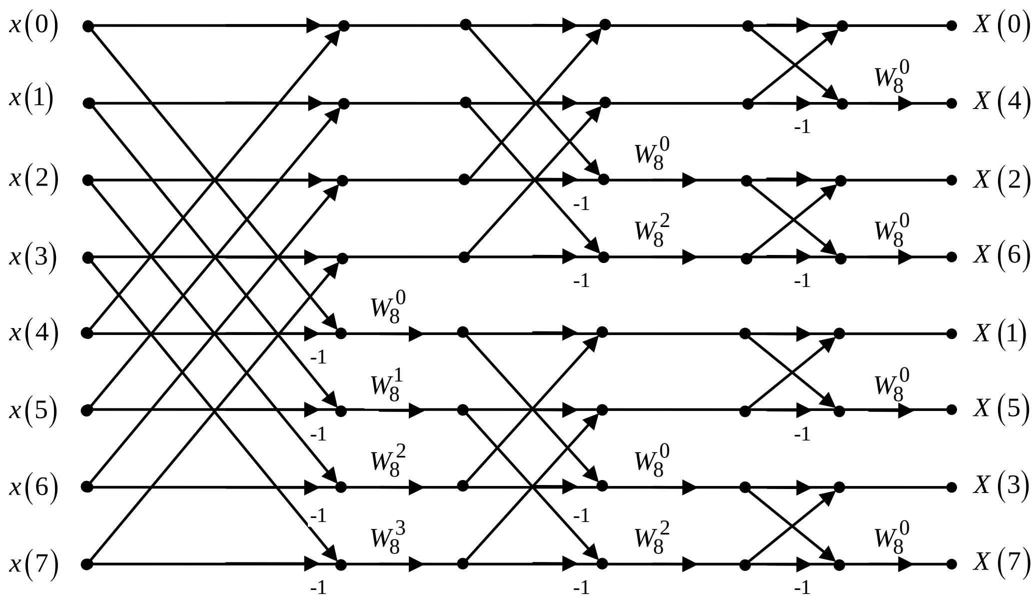
Dobijamo

$$X(2l)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_{11}(n)W_{N/2}^{nl}$$

$$X(2l+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_{12}(n)W_N^{n}\cdot W_{N/2}^{nl}$$

$X(2l)$ predstavlja DFT niza $\{x_{11}(n)\}$ dužine $N/2$, a $X(2l+1)$ predstavlja DFT niza $\{x_{12}(n)\}$ dužine $N/2$.

Proces dekompozicije se nastavlja dok se ne dođe do elementarnog DFT-a od dve tačke.

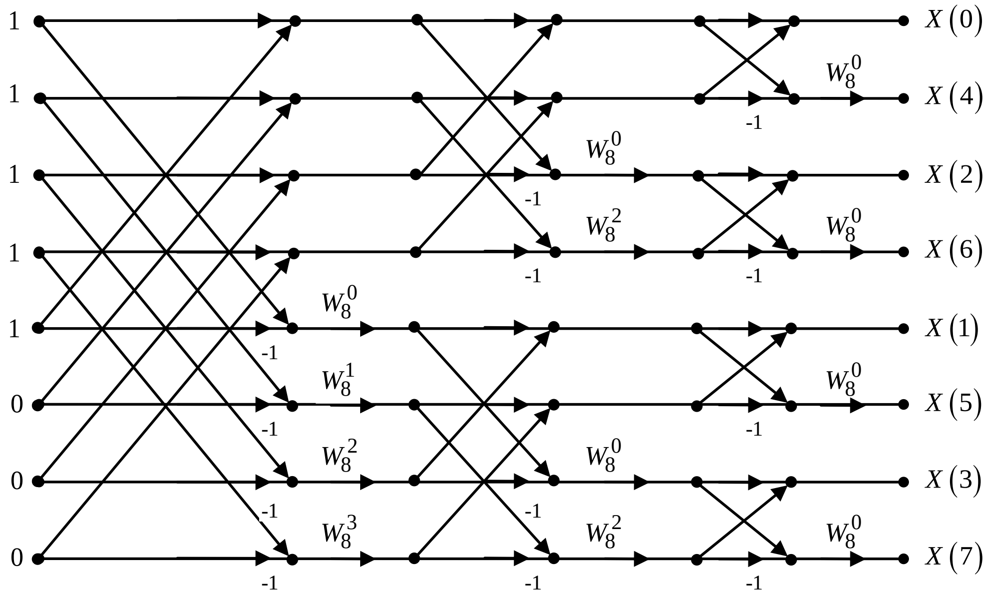


Zadaci

1. Dat je pravougaoni impuls *x(t)* dužine 1s i amplitude 1. Niz *x(n)* dobija se tako što se signal *x(t)* diskretizuje sa periodom odabiranja 0.25s. Uzeti prvih 8 tačaka signala *x(n)* i izračunati DFT korišćenjem FFT DIF algoritma. Formirati matricu rotacionih faktora i napisati izraz za računanje DFT-a u matričnom obliku.

Rešenje:

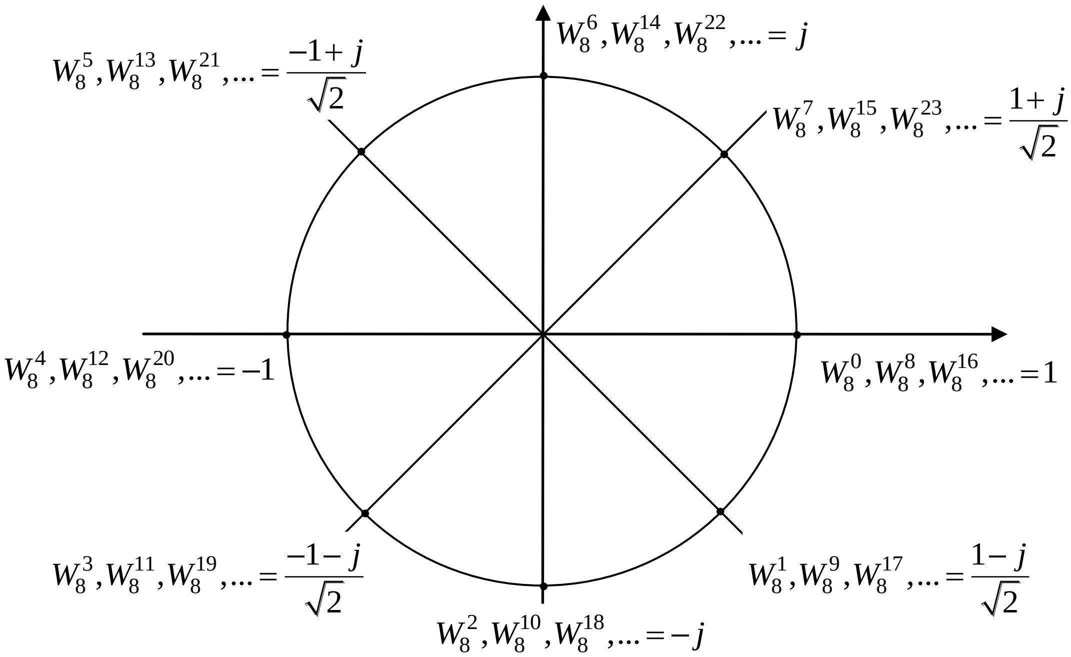
Ulazni niz dužine 8 dobijen diskretizacijom signala *x(t)* sa periodom $T = 0.25s$ je $\{x(n)\} = \{1,1,1,1,1,0,0,0\}$.



Matrica rotacionih faktora je:

$$\mathbf{W}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & W_8^1 & W_8^2 & ... & W_8^7 \\ 1 & W_8^2 & W_8^4 & ... & W_8^{14} \\ . & . & . & & . \\ 1 & W_8^7 & W_8^{14} & ... & W_8^{49} \end{bmatrix}$$

Vrednosti rotacionih faktora mogu se pročitati sa slike:



Na izlazu se dobijaju sledeći DFT koeficjenti:

$X(0) = 5,\ X(1) = -2.4142j,\ X(2) = 1,\ X(3) = -0.4142j,$

$X(4) = 1,\ X(5) = 0.4142j,\ X(6) = 1,\ X(7) = 2.4142j$

Izraz za računanje DFT u matričnom obliku je:

$\mathbf{X}_8 = \mathbf{W}_8 \cdot \mathbf{x}_8,$

gde su

$\mathbf{X}_8 = \left[X(0)\ X(1)\ X(2)\ X(3)\ X(4)\ X(5)\ X(6)\ X(7) \right]^T$

$\mathbf{x}_8 = \left[x(0)\ x(1)\ x(2)\ x(3)\ x(4)\ x(5)\ x(6)\ x(7) \right]^T$

2. Dat je signal:

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1s \\ 0, & t > 1s \end{cases}$$

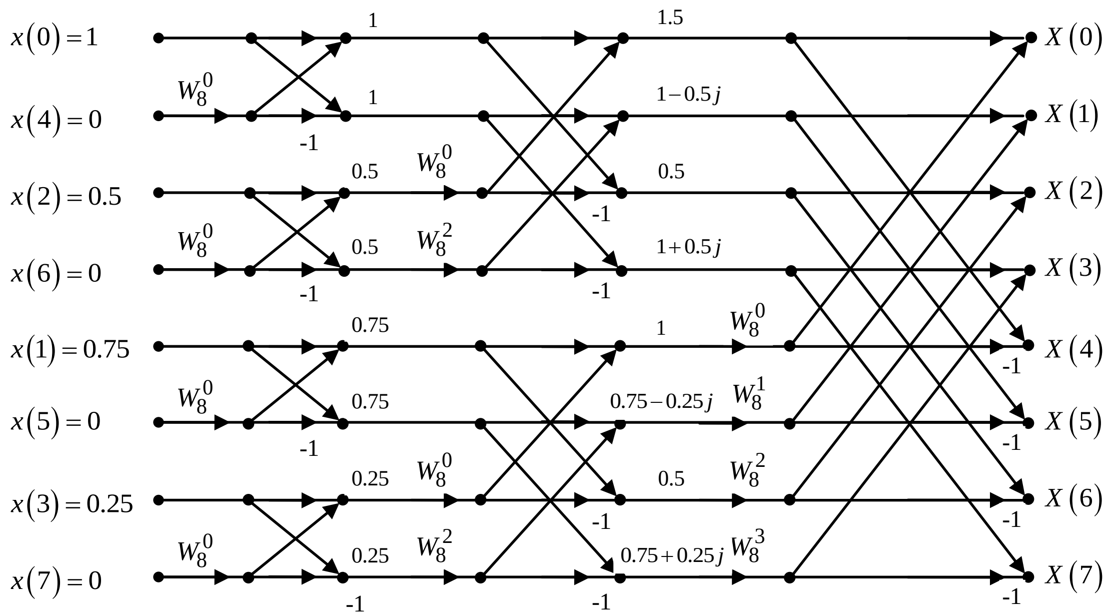
Diskretizovati signal *x(t)* sa periodom odabiranja *T* = 250 ms. Primenom FFT DIT algoritma, odrediti 8 elemenata DFT niza dobijenog diskretnog signala.

Rešenje:

Nakon diskretizacije signala *x(t)* sa periodom *T* = 0.25 s dobija se:

$\{x(n)\} = \{1,\ 0.75,\ 0.5,\ 0.25,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,...\}$

Traženi leptir je prikazan na sledećoj slici



Na izlazu iz leptira se dobija sledeći DFT niz:

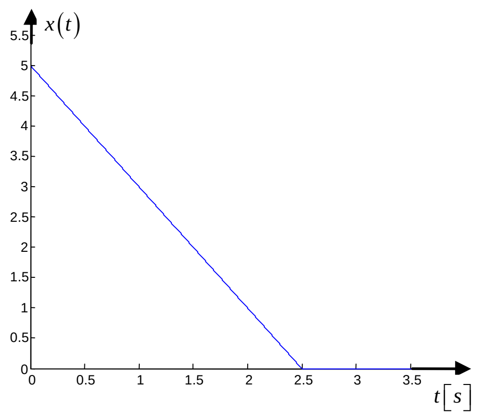
$$\{X(k)\} = \{2.5,\ 1.3536 - 1.2071j,\ 0.5 - 0.5j,\ 0.6464 - 0.2071j,$$
$$0.5, 0.6464 + 0.2071j,\ 0.5 + 0.5j,\ 1.3536 + 1.2071j\}$$

3. Dat je signal $x(t) = \begin{cases} 5 - 2t, & 0 \le t \le 2.5s \\ 0, & t > 2.5s \end{cases}$

Odrediti Furijeovu transformaciju ovog signala. Izvršiti odabiranje signala $x(t)$ sa periodom 0.5s i primenom FFT DIT algoritma u 8 tačaka, odrediti njegovu DFT. Skicirati module dobijenih DFT koeficjenta na osama diskretnih učestanosti Ω i F.

Rešenje:

Signal $x(t)$ je prikazan na slici

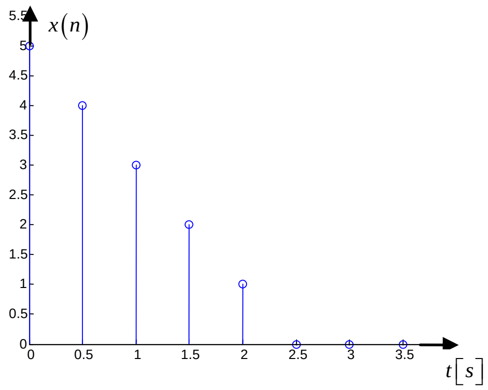


Furijeova transformacija se računa na sledeći način:

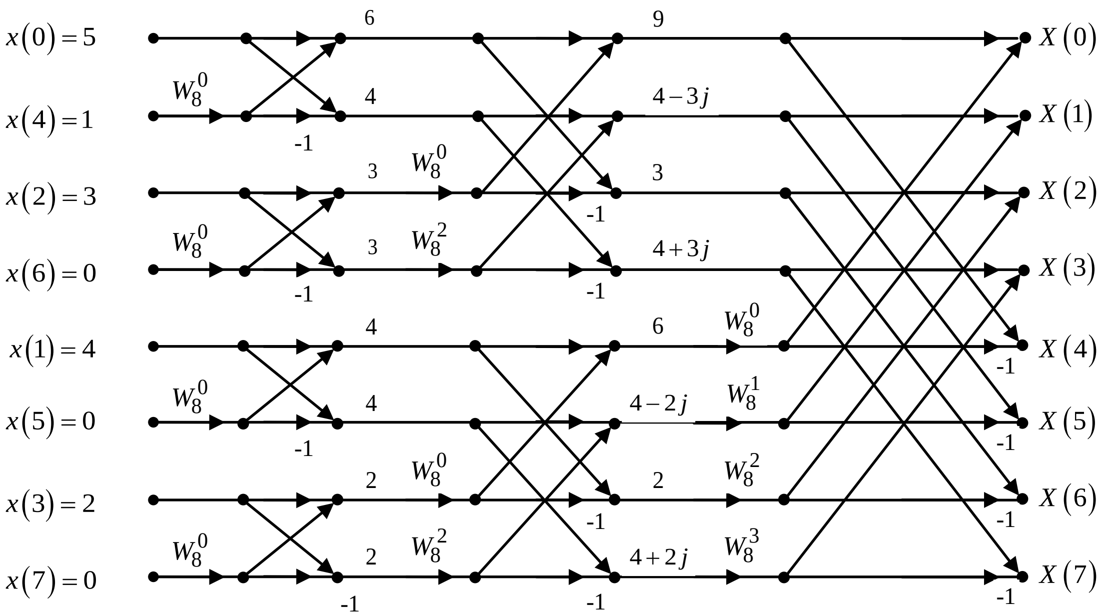
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{2.5}(5-2t)e^{-j\omega t}dt=5\int_{0}^{2.5}e^{-j\omega t}dt-2\int_{0}^{2.5}te^{-j\omega t}dt\Rightarrow$$

$$X(j\omega)=\frac{5}{j\omega}+\frac{2}{\omega^2}\left(1-e^{-j\frac{5}{2}\omega}\right)$$

Nakon diskretizacije sa periodom $T=0.5s$ dobija se diskretni signal kao na slici



Pa su vrednosti prvih 8 odbiraka $\{x(n)\}=\{5,4,3,2,1,0,0,0\}$. Odgovarajući leptir za FFT DIT i *N*=8 dat je na sledećoj slici



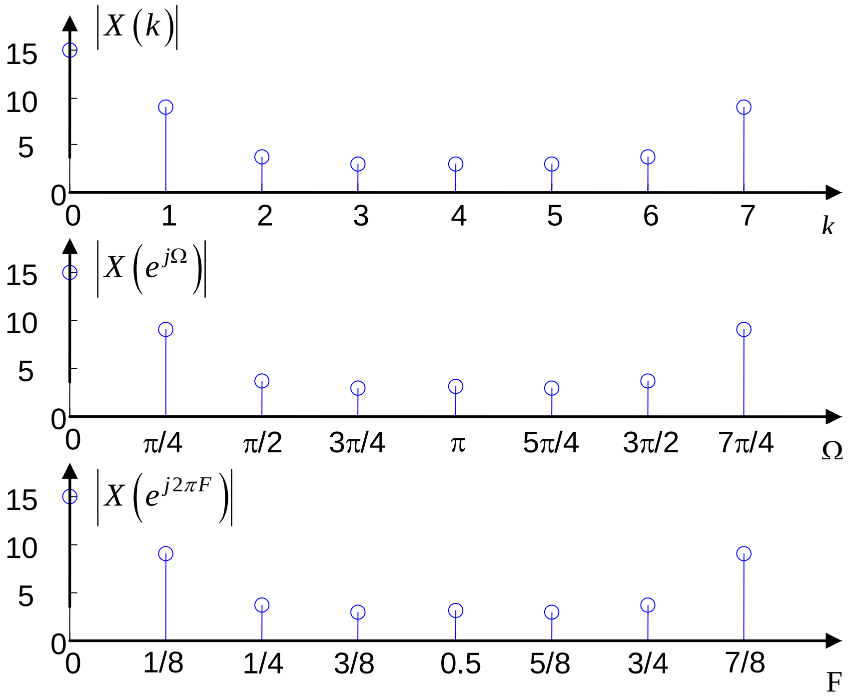
Na izlazu iz leptira se dobija sledeći DFT niz:

$$\{X(k)\}=\{15,\ 5.4142-7.2426j,\ 3-2j,\ 2.5858-1.2426j,$$
$$3, 2.5858+1.2426j,\ 3+2j,\ 5.4142+7.2426j\}$$

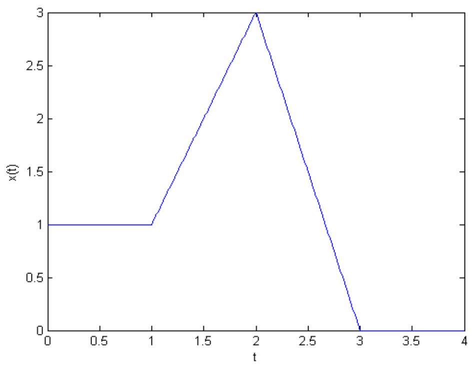
pa su moduli:

$$\{|X(k)|\}=\{15,\ 9.0427,\ 3.6056,\ 2.8689,\ 3,\ 2.8689,\ 3.6056,\ 9.0427\}$$

Moduli dobijenih DFT koeficjenta na osi k i osama diskretnih učestanosti Ω i F prikazani su na sledećoj slici:



4. a) Za signal sa slike naći Furijeovu transformaciju.
   b) Diskretizovati signal x(t) sa periodom odabiranja T = 0.5 s i izračunati Furijeovu transformaciju tako dobijenog diskretnog signala.
   c) Primenom FFT DIF algoritma odrediti 8 elemenata DFT niza dobijenog diskrenog signala.

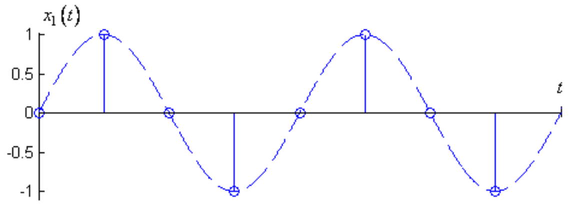


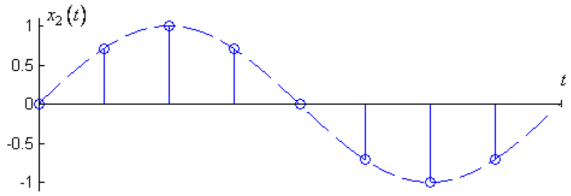
5. Signal $x(t) = \sin 2\pi f_0 t + \sin \pi f_0 t$ disketizuje se sa periodom $T=1/f_s$, gde je $f_s=4f_o$. Primenom FFT DIT algoritma izračunati 8 odbiraka DFT niza ovog diskretnog signala. Nacrtati amplitude komponenti DFT niza na osama Ω i F. Objasniti dobijene rezultate.

Rešenje:

$x(t) = \sin 2\pi f_0 t + \sin \pi f_0 t = x_1(t) + x_2(t)$

Učestanost signala $x_1(t)$ je f_0, a signala $x_2(t)$ $f_0/2$. Pošto je učestanost semplovanja $f_s=4f_o$, to znači da u jednoj periodi signala $x_1(t)$ imamo 4 odbirka. Proces odabiranja ilustrovan je na sledećoj slici.





Vrednosti signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ u trenucima odabiranja su:

$x_1(0)=0$	$x_2(0)=0$
$x_1(1)=1$	$x_2(1)=1/\sqrt{2}$
$x_1(2)=0$	$x_2(2)=1$
$x_1(3)=-1$	$x_2(3)=1/\sqrt{2}$
$x_1(4)=0$	$x_2(4)=0$
$x_1(5)=1$	$x_2(5)=-1/\sqrt{2}$
$x_1(6)=0$	$x_2(6)=-1$
$x_1(7)=-1$	$x_2(7)=-1/\sqrt{2}$

Pa su odbirci signala $x(t)$

$x(0)=0$

$x(1)=1+1/\sqrt{2}$

$x(2)=1$

$x(3)=-1+1/\sqrt{2}$

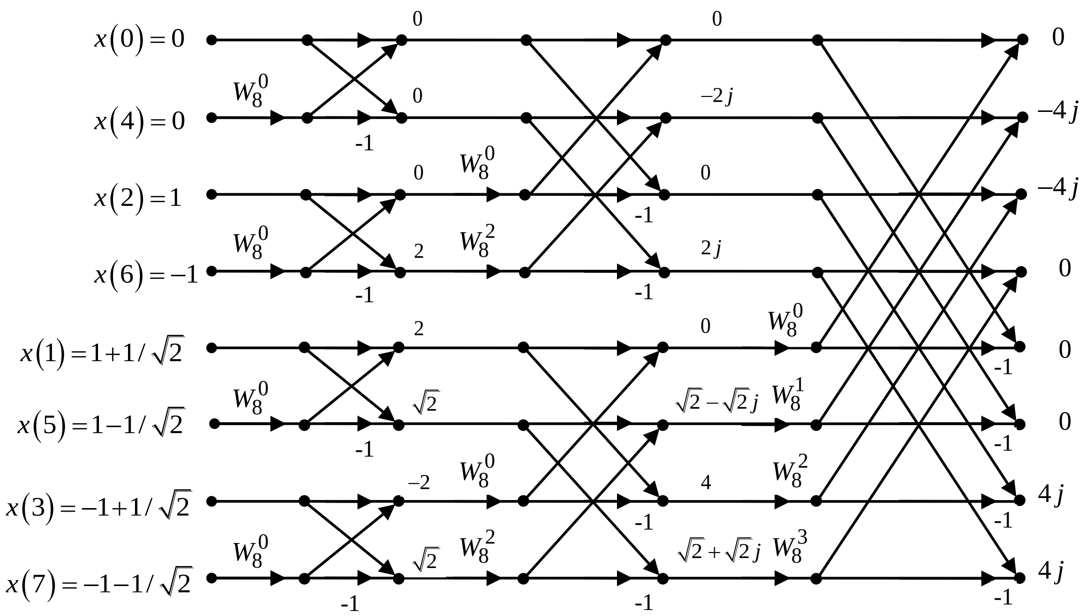
$x(4)=0$

$x(5)=1-1/\sqrt{2}$

$x(6)=-1$

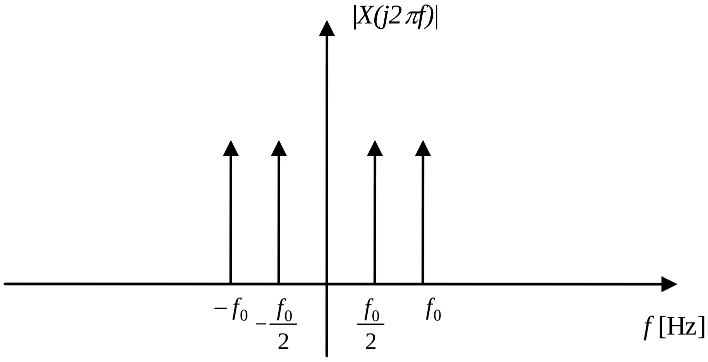
$x(7)=-1-1/\sqrt{2}$

DFT DIT algoritam za $N=8$ prikazan je na slici

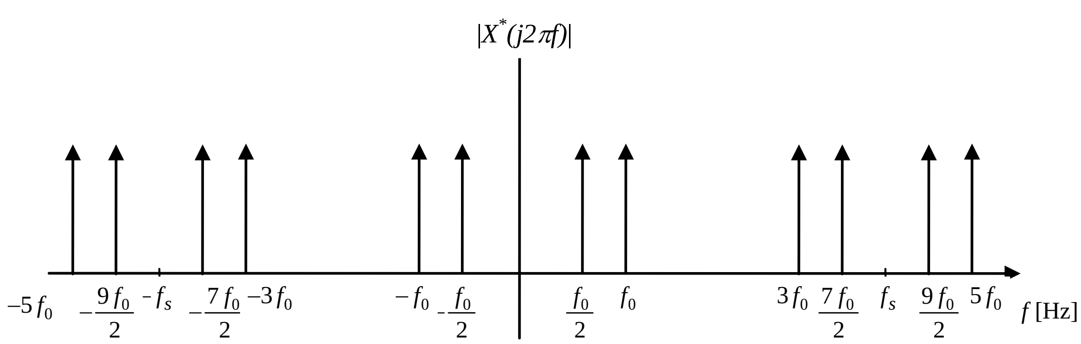


Traženi DFT koeficjenti su:

$$X(0)=0,\ X(1)=-4j,\ X(2)=-4j,\ X(3)=0,\ X(4)=0,\ X(5)=0,\ X(6)=4j,\ X(7)=4j$$

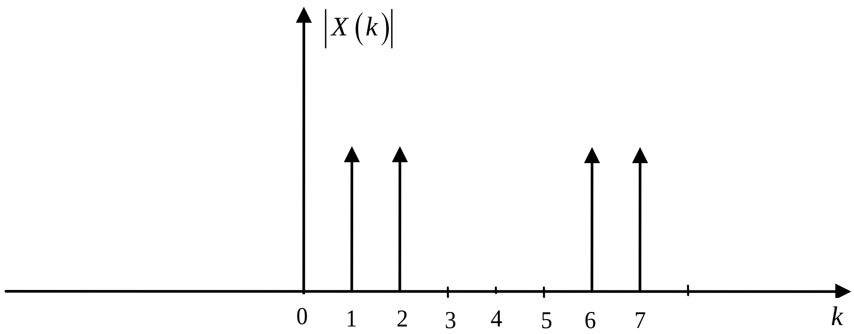


Slika *Spektar signala* $x(t)$



Slika *Spektar diskretnog signala koji je dobijen diskretizacijom* $x(t)$ *sa učestanošću* $f_s=4f_o$

Pošto učestanosti semplovanja f_s odgovara diskretna učestanost Ω=2π, a spektar diskretnog signala u opsegu učestanosti $\left[0,2\pi\right]$ diskretizujemo u N=8 tačaka, dobijamo:



Slika *Diskretizovan spektar signala – DFT*

Komponenti na učestanosti $f_0/2$ odgovara DFT komponenta $X(1)$, komponenti na učestanosti f_0 $X(2)$, komponenti na $3f_0$ $X(6)$, a komponenti na $7f_0/2$ $X(7)$. Svi ostali članovi DFT niza su jednaki nuli.