Diskretizacija PID regulatora

Zoran D. Jeličić
Mirna N. Kapetina

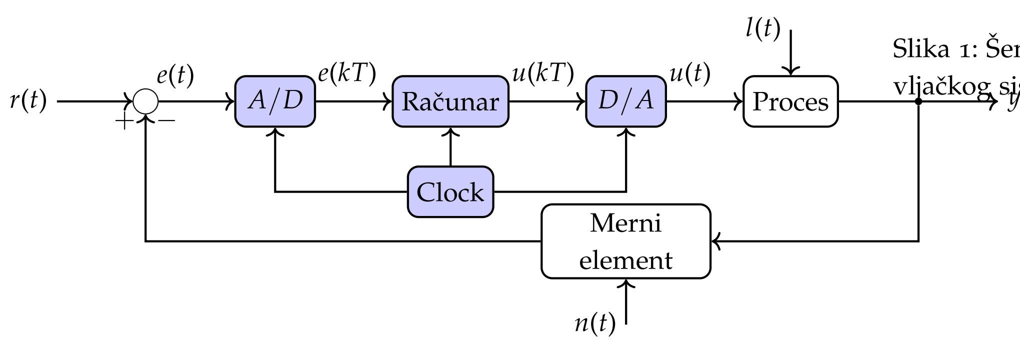
30. april 2020.

1 Uvodna razmatranja

Ovo poglavlje predstavlja prirodan nastavak prethodnog poglavlja o diskretizaciji digitalnih regulatora i filtara. Naime, dobro je poznato da je PID zakon upravljanja najrasprostranjeniji upravljački algoritam u inženjerskoj praksi [1], stoga je i njegova diskretizacija odnosno implementacija na digitalnom računaru od posebnog značaja u studiji računarskih upravljačkih sistema.

[1] *Based on a survey of over eleven thousand controllers in the refining, chemicals and pulp and paper industries, 97% of regulatory controllers utilize PID feedback, Desborough Honeywell, 2000*

Podsetićemo na tipičnu šemu digitalnog upravljačkog sistema, slika 1 i naglasiti da nam je cilj u okviru ovog poglavlja dvojak. Prvi, da kontinualnu formu upravljačkog algoritma diskretizujemo i prilagodimo izvršavanju na računaru, drugi, da ovaj upravljački algoritam „obogatimo", odnosno da u njega ugradimo formalizme, koji su karakteristični za implementaciju na računaru, a mogu da unaprede performanse upravljačkog kola. Odnosno, cilj nam nije samo direktna diskretizacija PID regulatora, već i izmene algoritma, koji će na prirodan način omogućiti rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstva, prelaska sa ručnog na automatski režim rada i sl. Napomena, praktična implementacija, podrazumeva i dobro razumevanje principa A/D i D/A konverzije, odnosno dobro poznavnje principa digitalnog upravljanja.



Slika 1: Šema digitalnog upravljačkog sistema

Podelićemo ovo poglavlje u dve celine. U okviru prve celine, razmatraćemo diskretizaciju osnovnog oblika PID regulatora, a u okviru druge celine, analiziraćemo diskretni oblik realnog PID regulatora sa svim svojim modifikacijama. Diskretizacija osnovnog oblika regulatora, naravno nema preveliku upotrebnu vrednost u praksi, ali je jako značajno da kroz ovu jednostavniju formu sagledamo osnovne specifičnosti vezane za sam postupak diskretizacije, a kasnije da ta znanja uopštimo i primenimo na realni upravljački algoritam.

2 Diskretizacija osnovnog oblika PID regulatora

Podsećamo na osnovni oblik PID regulatora, koje je dat izrazom (1)

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right) \tag{1}$$

gde je K pojačanje, koje odgovara proporcionalnom pojačanju, T_i je *integralna vremenska konstanta* i T_d je *diferencijalna vremenska konstanta*. Prateći pravila diskretizacije *numeričkom integracijom*, za dovoljno malo T lako dobijamo sledeću diferencenu jednačinu

$$u(k) = K\left(e(k) + \frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T}\left(e(k) - e(k-1)\right)\right), \tag{2}$$

nije teško primetiti da smo u ovaj diskretizaciji, koju smo predstavili izrazom (2), koristili dva postupka *numeričke integracije*. Konkretno, integral smo zamenili sumom i to korišćenjem pravila *levih pravougaonika*, a diferencijal smo zamenili *Ojlerovim diferenciranjem unazad*[2]. Ova forma data izrazom (2) naziva se *pozicionom formom* diskretnog *PID* regulatora. U okviru *pozicione forme* sa stanovišta digitalne reprezentacije brojeva u *konačnoj preciznosti* moguća je disproporcija između sume koja predstavlja integralno dejstvo i potencijalno male razlike, koja je definisana diferencijalnim dejstvom, što može uticati na numeričku vrednost upravljačke promenjive. Isto tako, treba voditi računa da integralno dejstvo uvedeno preko sume, prirodno zadržava mogućnost nagomilavanja intergralnog dejstva, čije efekte smo razmtrali u ranijim poglavljima. Alternativni način da se predstavi diskretni *PID* zakon upravljanja, naziva se *brzinska forma*, a u diskretnoj izvedbi koristi se i pojam *inkrementalna forma*. Osnovna zamisao ovog pristupa je da se računa priraštaj upravljanja $\Delta u(k)$ između dva uzatopna trentuka odabiranja, odnosno

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k). \tag{3}$$

Da bi konkretizovali izračunavanja u *inkrementalnoj formi* (3), moramo da izračunamo i vrednost upravljanja u trenutku $k-1$, što je na osnovu (2)

[2] Ovakav pristup se može učiniti kao nedoslednost u odnosu na teorijska razmatranja iz prethodnog poglavlja. Međutim treba znati da će bez obzira na način diskretizacije, digitalni ekvivalent uvek imati pol na jediničnom krugu $(z-1)$. Jedina je razlika kako će izgledati nule integratora. Ovaj pristup smo usvojili prateći preporuke za praktičnu implementaciju, koje će bti predmet dalje studije.
Primera radi, neki projektanti u analizi izraza (2) polaze od činjenice da upravljanje u trenutku k, odnosno $u(k)$ zavisi kod P i kod D dejstva od vrednosti greške u trenutku k ili $e(k)$, a samo I dejstvo zavisi od greške u prethodnom trenutku $e(k-1)$ i predlažu sledeću modifikaciju, koja nije matematički opravdana, ali smatraju je opravdanom u inženjerskoj praksi

$$u(k) = K\left(e(k) + \frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k} e(i) + \frac{T_d}{T}\left(e(k) - e(k-1)\right)\right),$$

Međutim, način diskretizacije diferencijalnog dejstva će se pokazati mnogo značajnijim u funkcionisanju regulatora.

$$u(k-1) = K\left(e(k-1) + \frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_d}{T}\left(e(k-1) - e(k-2)\right)\right), \quad (4)$$

i tada izraz za prirašataj upravljanj $\Delta u(k)$ postaje

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \quad (5)$$

gde se koeficijenti $q_0, \quad q_1 \quad i \quad q_2$ lako izračunavaju kao razlika izraza (2) i (4) odnosno

$$\begin{aligned} q_0 &= K(1 + \frac{T_d}{T}) \\ q_1 &= -K(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i}) \\ q_2 &= K\frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (6)$$

Diskretna *brzinska forma* je očigledno numerički uravnoteženija i lakša za računarsku implementaciju. U osnovi ima najveću primenu zbog inkrementalne forme I dejstva, koja daje mogućnost za lakšu implementaciju algoritma protiv nagomilavanja integralnog dejstva (engl. *anti-windup*) i daje mogućnost za prirodan prelaz sa ručnog na automatski radni režim (engl. *bumpless transfer*).[3] Kao što će se videti u *brzinskoj formi*, implementacija proporcionalnog i diferencijalnog dejstva samostalno bez integralnog dejstva nije prirodna, može se reći da je skopčana sa poteškoćama, koje takvu implementaciju potpuno isključuju. Da bi bolje razumeli sve fenomene, vezane za brzinsku formu, treba da pređemo u kompleksni domen, odnosno primenimo $\mathfrak{Z}$ transformaciju na izraze (3), (5) i (6) dobijamo

[3] *Brzinska forma* je suštinski bila namenjena procesima koji inherentno sadrže integralno dejstvo, a upravljanje se računa kroz inkrementalne promene. Detalji će biti jasniji u nastavku teksta, za sada ovu činjenicu samo napominjemo.

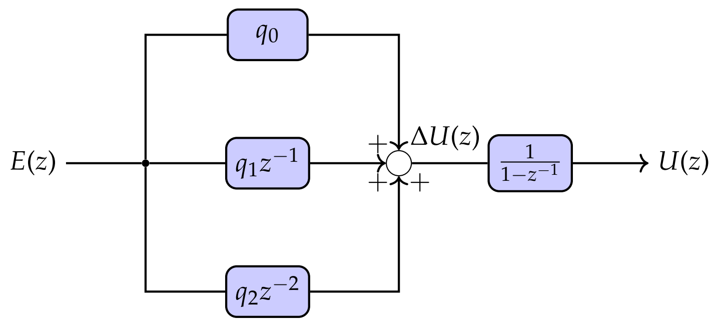
$$\Delta U(z) = U(z) - z^{-1}U(z) = (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})E(z), \quad (7)$$

odnosno funkcije prenosa priraštaja upravljanja, koja suštinski predstavlja *brzinsku formu* regulatora

$$\frac{\Delta U(z)}{E(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}, \quad (8)$$

i konačno upravljanje, kao integral priraštaja

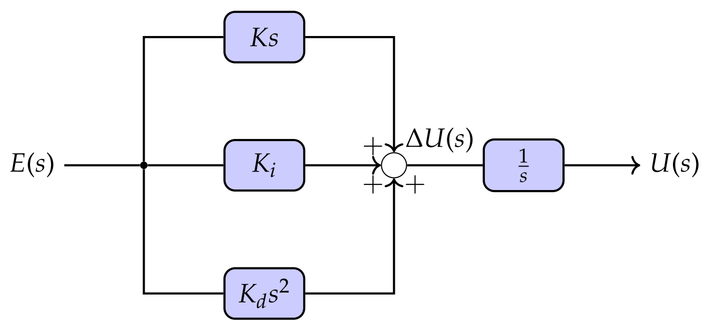
$$\frac{U(z)}{\Delta U(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (9)$$



Slika 2: Funkcija diskretnog prenosa PID regulatora u inkrementalnoj formi

Shematski, funkcije prenosa možemo predstaviti na sledeći način, kao na slici 2

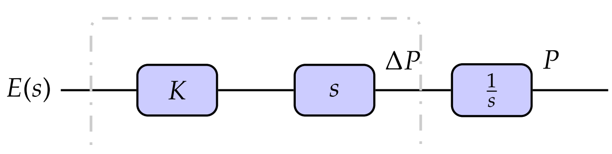
Sa slike 2 je jasno da se *brzinski algoritam*, deo kojim se izračunava priraštaj upravljnaja, implementira kod procesa, koji u sebi inhrenetno sadrže integralno dejstvo, odnosno integralno dejstvo je praktično izmešteno iz upravljačke petlje. Da bi se bolje razumeli principi *brzinskog algoritma* predstavili smo ovaj formalizam i u kontinualnoj formi, slika 3, pretpostavljajući da je kroz dualizam kontinualno/diskretno lakše ispratiti sve fenomene od interesa.



Slika 3: Funkcija prenosa kontinualnog PID regulatora u brzinskoj formi

Napomenuli smo ranije, da je implementacija P i D dejstva bez integralnog elemanta u *inkrementalnom obliku* složena [4], odnosno da u ovom obliku ne može da generiše upravljanje, koje može da obezbedi dostizanje ustaljenog stanja. Da bi to ilustrovali, izdvojimo granu sa slike 3 u kojoj se nalazi samo P dejstvo, slika 4, pretpostavimo da je greška na ulazu konstantna, prolaskom kroz diferencijalno dejstvo ona će se anulirati i efekat pojačanja, karakterističan za P dejstvo će izostati. Slična paralela se lako može napraviti i za D član u *brzinskoj formi*.

[4] Može se reći i nemoguća.



Slika 4: Funkcija prenosa brzinske forme P regulatora

Međitim, *brzinski algoritam*, posebno u svojoj diskretnoj izvedbi, na prirodan način rešava dva značajna problema u eksploataciji PID regulatora, a to su prelaz sa ručnog na automatski radni režim (engl. *bumpless transfer*) i nagomilavanje integralnog dejstva (engl. *anti-windup*). **Prilikom prelaska sa ručnog na automatski režim rada**, cilj nam je da ne dođe do nagle promene upravljačke veličine, što bi naravno rezultovalo i značajnom promenom odziva procesa. U trenutku prelaska sa ručnog na automatski režim rada, osnovano je pretpostaviti da je greška, kao razlika između željene i ostvarene vrednosti, velika. Kao što smo naučili, velika greška može da dovede do nagle porasti integralnog dejstva kada je u formi integrala, odnosno sume u *pozicionoj formi*. Ova će kao rezultat naravno imati i veliku promenu u upravljačkom signalu, pa samim tim i u odzivu. Međutim, u *inkrementalnoj formi* mi računamo samo priraštaj upravljanja $u(k) - u(k-1)$ čime se ovaj problem na prirodni način rešava i izbegava nagla promena upravljačke veličine. Isto tako **nagomilavanje integralnog dejstva** je očigledno vezano za forme integrala, odnosno sume u diskretnoj izvedbi. Podsećamo, da je problem bio u neosetljivosti ove sume (integrala) na promenu znaka greške. U slučaju *integralne izvedbe*, integralni član figuriše u izrazima (5) i (6) samo kao $K\frac{T}{T_i}e(k-1)$ i u slučaju promene znaka, pa čak i kod saturacije izvršnog organa, ući će u normalno osteljiv, linearan režim, u vremenu jednog takta, odnosno jedne periode odabiranja. Mi smo ovde izneli pristup i logiku, karakterističnu za digitalne sisteme u studiji nagomilavanja integralnog dejstva i prelaska sa ručnog na automatski rad, međutim aktivno se koriste u inženjerskoj praksi pravila i postupci za rešavanje ova dva problema, koja su karakteristična za kontinualne sisteme, samo je njihova implementacija u diskretnom obliku ili bolje reći softverska implementacija značajno jednostavnija. Deo toga ćemo prirodno uvesti u nastavku poglavlja.

Kao što smo videli, obe forme *poziciona* i *brzinska* imaju svoje formalne nedostatke i prednosti, u nastavku teksta predstavićemo diskretizaciju realnog PID regulatora, [5] gde ćemo koristiti sva najbolja iskustva iz ovog paragrafa. Dobru praksu ustanovljenu u ovom poglavlju, koja se tiče izbora forme diskretizacije, uvodićemo prirodno i bez prevelikog ulaženja u detalje, koje smo u ovom poglavlju već razjasnili ili kolokvijalno rečeno *asemblirali*.

[5] Videti poglavlje *Moodifikacije PID algoritma*

3 *Diskretizacija realnog oblika PID regulatora*

Realni PID regulator, kako smo ranije utvrdili[6] ima funkciju pre-

[6] Bez gubitka na opštosti, posmatraćemo realni PID regulator u tzv. *ISA* formi, bez člana za servoregulaciju u D dejstvu.

nosa datu izrazom (10)

$$PID(s) = K\left((bR(s) - Y(s)) + \frac{1}{T_i s}E(s) + \frac{-T_d s Y(s)}{1 + \frac{T_d s}{N}}\right) , \tag{10}$$

Kao što smo ranije napomenuli, u postupku diskretizacije koristićemo pravila i *pozicione* i *inkrementalne* forme, na način koji nam najviše odgovara. U studiji postupaka diskretizacije, koristićemo vremenski zapis jednačine (10) i to za svako dejstvo ponaosob.

3.1 Diskretizacija P dejstva

Realno P dejstvo smo uveli u sledećoj formi

$$P(t) = K(br(t) - y(t)), \tag{11}$$

direktnom diskretizacijom po vremenu $t = kT$ dobijamo[7]

$$P(kT) = K\left(br(kT) - y(kT)\right) . \tag{12}$$

[7] Diskretizacija se može vršiti i u trenucim odabrianja, koji nisu ekvidistantni t_k, pa diskretizacija može biti i formi $P(t_k) = K\left(br(t_k) - y(t_k)\right)$

3.2 Diskretizacija I dejstva

Integralno dejstvo je u vremenskom domenu definisano na sledeći način

$$I(t) = \frac{K}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau . \tag{13}$$

Ovaj izraz (13) možemo zapisati i u drugoj formi, koja je pogodnija za dalju transformaciju, odnosno

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K}{T_i}e(t) . \tag{14}$$

Izraz (14) u diferencijalnoj formi, može se diskretizovati na nekoliko načina, mi ćemo početi od *diferenciranja unapred*,[8] koja se pokazala kao veoma često korišćena u praksi

[8] Kao što smo rekli diferenciranje I dejstva ne utiče na polove sistema, odnosno ne utiče na stabilnost, već samo na nule posle emulacije.

$$\frac{I(kT + T) - I(kT)}{T} = \frac{K}{T_i}e(kT), \tag{15}$$

dalje se lako dobija rekurzivna forma, koja opisuje integralno dejstvo u diskretnom obliku

$$I(kT + T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i}e(kT). \tag{16}$$

Na sličan način izraz (14) se može diskretizovati *diferenciranjem unazad*

$$\frac{I(kT) - I(kT - T)}{T} = \frac{K}{T_i}e(kT), \tag{17}$$

a odgovarajuća rekurzivna forma integralnog dejstva, lako se dobija kao

$$I(kT+T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} e(kT+T). \tag{18}$$

Tustinovu formu ostavljamo da čitaoci sami izvedu, mi ćemo dati samo konačan oblik u rekurzivnoj formi

$$I(kT+T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} \frac{e(kT) + e(kT+T))}{2}. \tag{19}$$

Treba primetiti da se rekurzivni obrasci[9] (16), (18) i (19) imaju istu formu

$$I(kT+T) = I(kT) + b_{i1} e(kT) + b_{i2} e(kT+T), \tag{20}$$

gde je očigledno da koeficijenti b_{i1} i b_{i2} zavise od metoda diskretizacije.

[9] Može se primetiti da ovi obrasci, suštinski odgovaraju *inkrementalnoj* formi, koja je, kao što smo videli, bila od najvećeg značaja baš za integralno dejstvo

3.3 *Diskretizacija D dejstva*

Diferencijalno dejstvo, za potrebe regulacije, uveli smo na sledeći način

$$\frac{T_d}{N} \frac{tD}{dt} + D(t) = -KT_d \frac{dy(t)}{dt} \,. \tag{21}$$

Diskretizacija D dejstva je najsloženija i ovim postupcima ćemo posvetiti i najviše pažnje. Diferencijalno dejstvo, dato izrazom (21) je osetljivo na izbor postupka *numeričke integracije* i pogrešnom primenom može da uvede regulator u nestabilnost ili da izmeni ponašanje sistema u vremenskom i/ili frekventnom domenu.

Kao i ranije diskretizaciju D dejstva ćemo započeti *diferenciranjem unapred*

$$\frac{T_d}{N} \frac{D(kT+T) - D(kT)}{T} + D(kT) = -KT_d \frac{y(kT+T) - y(kT)}{T} \,. \tag{22}$$

Izraz (22) može se lako prevesti i u sledeću formu

$$D(kT+T) = \left(1 - \frac{NT}{T_d}\right) D(kT) - KN\left(y(kT+T) - y(kT)\right) \,. \tag{23}$$

Kao što je poznato, ovaj postupak *numeričke integracije* ne garantuje stabilnost digitalnog ekvivalenta, pa je važno analizirati da li izraz (23) obezbeđuje željeno stabilno ponašanje regulatora. Da bi ovaj rezulat emulacije očuvao stabilnost potrebno[10] je da

[10] Do uslova stabilnosti lako možemo doći primenom $\mathcal{Z}$ transformacije na izraz (23), gde se dobije sledeća funkcija diskretnog prenosa

$$\frac{D(z)}{Y(z)} = \frac{-KN(z+1)}{z - \left(1 - \frac{NT}{T_d}\right)} \,.$$

Dobro je poznat uslov stabilnosti diskretnog sistema, da svi polovi (u ovom slučaju jedan pol), moraju da se nalaze unutar jediničnog kruga.

$$\left|1 - \frac{NT}{T_d}\right| < 1\,, \tag{24}$$

odnosno da je

$$T_d > \frac{NT}{2}\,. \tag{25}$$

Pokazalo se da *diferenciranje unapred* ne garantuje stabilnost digitalnog ekvivalenta, odnosno moraju da budu zadovoljeni uslovi (24) i (25), što ovu transformaciju čini nepodesnom u pratkičnoj upotrebi.

U cilju iznalaženja adekvatnog postupka diskretizacije diferencijalnog dejstva, nastavljamo sa postupkom *diferenciranja unazad*. Izraz (21) tada postaje

$$\frac{T_d}{N}\frac{D(kT) - D(kT-T)}{T} + D(kT) = -KT_d\frac{y(kT) - y(kT-T)}{T}\,. \tag{26}$$

odnosno

$$D(kT) = \frac{T_d}{T_d + NT}D(kT-T) - \frac{KT_dN}{T_d + NT}\big(y(kT) - y(kT-T)\big)\,. \tag{27}$$

Očigledno je, da je član ispred $D(kT-T)$, tj. $\frac{T_d}{T_d+NT}$ uvek manji od jedan, što čini ovaj digitalni ekvivalent uvek stabilnim.

Konačno primenićemo i *Tustinovu* aproksimaciju u cilju diskretizacije diferencijalnog dejstva (21), bez većih problema dobijamo konačni izraz, koji opisuje ovaj digitalni ekvivalent

$$D(kT) = \frac{2T_d - NT}{2T_d + NT}D(kT-T) - \frac{2KT_dN}{2T_d + NT}\big(y(kT) - y(kT-T)\big)\,. \tag{28}$$

I u slučaju diskretizacije *Tustinovim* pravilom, dobijamo stabilni digitalni ekvivalent, što se jasno vidi iz člana ispred $D(kT-T)$ u izrazu (28). Međutim, za male vrednosti T_d može se desiti da brojilac u članu $\frac{2T_d-NT}{2T_d+NT}$ ima negativnu vrednost, što ima za posledicu oscilacije diferencijalnog dejstva[11] PID regulatora (engl. *ringing effect*). Kada je $T_d >> \frac{NT}{2}$ upotreba *Tustinovog* metoda aproksimacije je potpuno opravdana, jer daje bolju aproksimaciju kontinualnog diferencijalnog dejstva (pa i integralnog), na način koji smo već analizirirali u prethodnom poglavlju.

[11] Jasno je da promena znaka ispred člana $D(kT-T)$, menja gradijent diferencijalnog dejstva, odnosno menja predviđanje budućeg ponašanja sistema, što je podsećamo i njegova osnovna uloga.

Posmatrajući izraze za diskretno diferencijalno dejstvo (23), (27) i (28) možemo videti da se oni mogu uopštiti sledećom formom

$$D(kT) = a_dD(kT-T) - b_d\big(y(kT) - y(kT-T)\big)\,. \tag{29}$$

gde koeficijenti a_d i b_d zavise od izbora postupka diskretizacije. Kao što smo već zaključili, ove aproksimacije diferencijalnog dejstva su stabilne samo ako je $|a_d| < 1$. Tabelarni pregled koeficijenata u razmatranim postupacima diskretizacije diferencijalnog (29) i integralnog dejstva (20) dat je u tabeli 1. Važno je primetiti da u diskretizaciji realnog PID regulatora nećemo posebno razmatrati *inkrementalnu* formu. Kao što smo zaključili P i D dejstvo nisu pogodni za *brzinsku* formu, bez I dejstva: Diskretizovano integralno dejstvo dato izrazom (20) je već u rekurzivnom obliku, gde se računa samo priraštaj vrednosti integralne komponente.

Koeficijenti	Postupak diferenciranja		
	Diferenciranje unapred	Diferenciranje unazad	Tustin
b_{i1}	0	$\frac{KT}{T_i}$	$\frac{KT}{2T_i}$
b_{i2}	$\frac{KT}{T_i}$	0	$\frac{KT}{2T_i}$
a_d	$1 - \frac{NT}{T_d}$	$\frac{T_d}{T_d+NT}$	$\frac{2T_d-NT}{2T_d+NT}$
b_d	KN	$\frac{KNT_d}{T_d+NT}$	$\frac{2T_dKN}{2T_d+NT}$

Tabela 1: Pregled postupaka diskretizacije PID regulatora

U nastavku dajemo jedan primer implementacije realnog PID regulatora, sa ugrađenim mehanizmom za rešavanje problema nagomilavanja integralnog dejstva.

Primer 1 (Implementacija realnog PID regulatora)**.** U okviru primera, namera nam je da prikažemo postupak implementiranja realnog PID regulatora u svom digitalnom obliku. Algoritam, koji ćemo predložiti, ima ugrađen postupak protiv nagomilavanja integralnog dejstva i njega ćemo posebno obrazložiti. Upravljanje se sastoji iz tri osnovne komponente i izračuva se kao njihov zbir odnosno

$$v(t) = P(t) + I(t) + D(t)$$

gde je sa $v(t)$ obeleženo **izračunato** upravljanje, koje može da se razlikuje od **mogućeg** ili **stvarnog** upravljanja, koje ćemo obeležiti sa $u(t)$. Kao što je pokazano u prethodnim poglavljima, najčešće razlika između izračunatog i stvarnog upravljanja posledica je ograničenja u maksimalnoj/minimalnoj vrednosti koja može da se ostvari na izlazu izvršnog organa. Ova *saturacija* izvršnog organa je jedan od razloga zašto dolazi do nagomilavanja integralnog dejstva. Podsećamo, ako je razlog za nagomilavanje integralnog dejstva, razlika između stvarnog i izračunatog upravljanja, onda tako nastali *offset*, najlakše eliminišemo tako što dobijenu razliku integralimo i dovedemo na nulu. Ovaj integral za eliminisanje *offseta*, ima konstantu integracije T_t slično kao i integralno dejstvo.

Proprocionalno dejstvo ćemo izračunavati po formuli (12)

$$P(kT) = K\left(br(kT) - y(kT)\right).$$

Za izračunavanje integralnog dejstva, koristićemo modifikovani izraz (16). Naime, kao što smo rekli, da bi eliminisali nagomilavanje integralnog dejstva, moramo da integralimo razliku stvarnog i izračunatog upravljanja. Sama postavka, koja nameće integraciju još jedne vrednosti, upućuje na prirodno proširenje osnovnog I dejstva kao

$$I(kT+T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i}e(kT) + \frac{T}{T_t}\left(u(kT) - v(kT)\right),$$

gde je T_t integralna vremenska konstanta u postpuku rešavanja problema nagomilavanja integralnog dejstva, a vredno je spomenuti da se $u(kT)$ izračunava kao saturacija $v(kT)$, tj. $u(kT) = sat(v(kT), Umin, Umax)$. Gde su naravno, $Umin$ i $Umax$ minimalna i maksimalna dozvoljena vrednost upravljanja.

Diferencijalno dejstvo ćemo izračunavati u skladu sa postupkom diferenciranja *unazad* (27), kao sigurnom izboru sa stanovišta stabilnosti digitalnog ekvivalenta

$$D(kT) = \frac{T_d}{T_d+NT}D(kT-T) - \frac{KT_dN}{T_d+NT}\left(y(kT) - y(kT-T)\right).$$

Odgovarajući pseudokod, koji bi pratio implementaciju diferencnih jednačina, dat je u nastavku

```
 % Izra unavanje koeficijenata
bi=(K*T)/Ti
ad=Td/(Td+NT)
bd=KNTd/(Td+NT)
br=T/Tt

% Upravljacki algoritam - glavna petalja
while (running) {
r=adin(ch1) % ocitati  eljenu  vrednost sa ch1
y=adin(ch2) % ocitati odziv sa  ch2
P=k*(b*r-y) % P dejstvo
D=ad*D-bd*(y-yold) % update D dejstva
v=P+I+D % izarcunata (privremena) vrednost upravljanja
u=sat(v,Umin,Umax) % simulacija saturacije izvrsnog organa
daout(ch1) % prosledi izarcunatu vrednost na izlaz ch1
I=I+bi*(r-y)+br*(u-v) % update I dejstvo
yold=y % azuriranje izalaza y(k) i y(k-1)
sleep(T) % sacekati sledeci takt
}

```

Izračunavanje koeficijenata, koji su po pravilu nepromenjvi, izvan glavne petlje, štedi računarsko vreme. Ovde smo implementirali algoritam za sprečavanje nagomilavanja integralnog dejstva, koji je nasleđen iz logike kontinualnih sistema. Međutim, u softverskoj realizaciji je moguće još lakše rešenje, koje proverava da li su dostignute vrednosti $Umin$ i $Umax$, ako je to slučaj upravljanje će imati minimalnu, odnosno maksimalnu vrednost respektivno. Čitaocima ostavljamo, ovu verziju da implementiraju za vežbu.