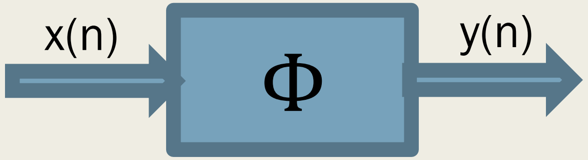
# FIR DIGITALNI FILTERI

Primena DSP u upravljanju

# FIR diskretni sistemi




- Nerekurzivn sistemi opisani diferencnom jednačinom:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

- $a_k$ konstante koje definišu karakteristiku sistema
- Funkcija prenosa je sledećeg oblika:

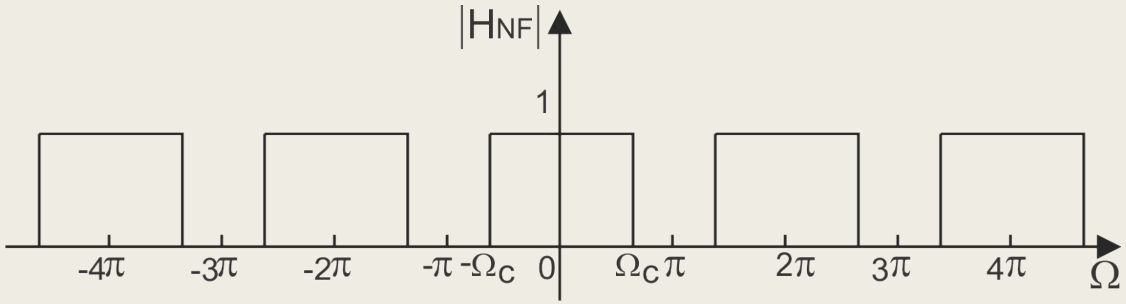
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} = Q(z^{-1})$$

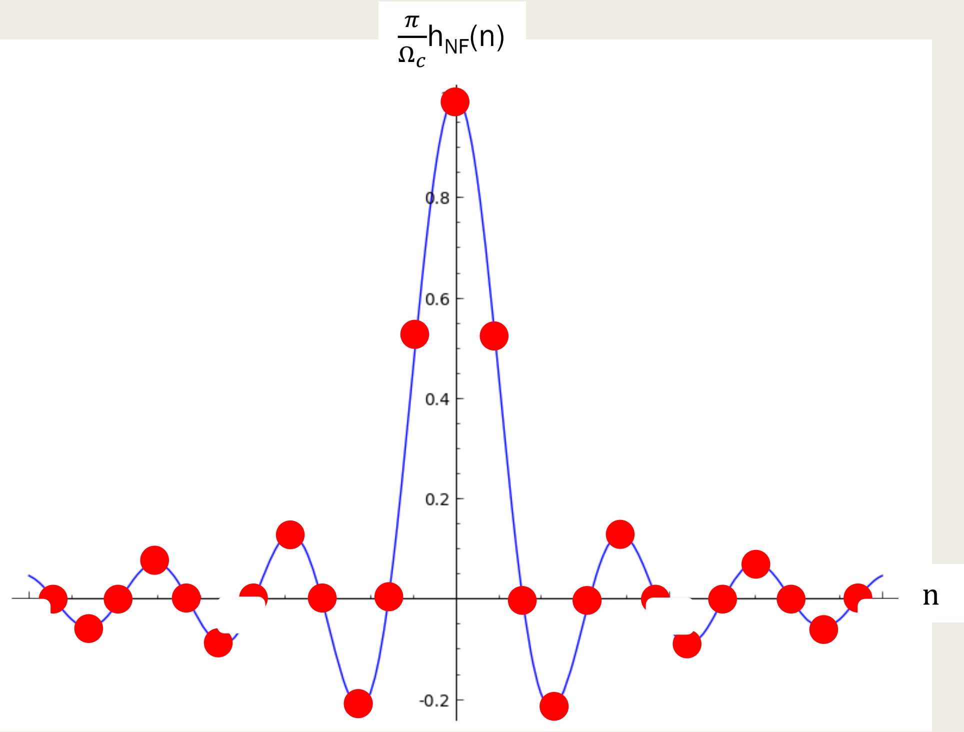
# FIR digitalni filter

- Je FIR diskretni sistem definisane amplitudske karakteristike
- Funkcija prenosa se ne može dobiti transformacijom analognog prototip filtera jer odgovarajući analogni prototip ne postoji
- FIR filteri se projektuju direktnom aproksimacijom idealnih filtera
- Osnovna prednost linearna fazna karakteristika
- FIR filter koji ima uporedivu amplitudsku karakteristiku kao IIR filter mora biti znatno višeg reda, ali može da obezbedi linearnu faznu karakteristiku

# NF filter nulte fazne karakteristike

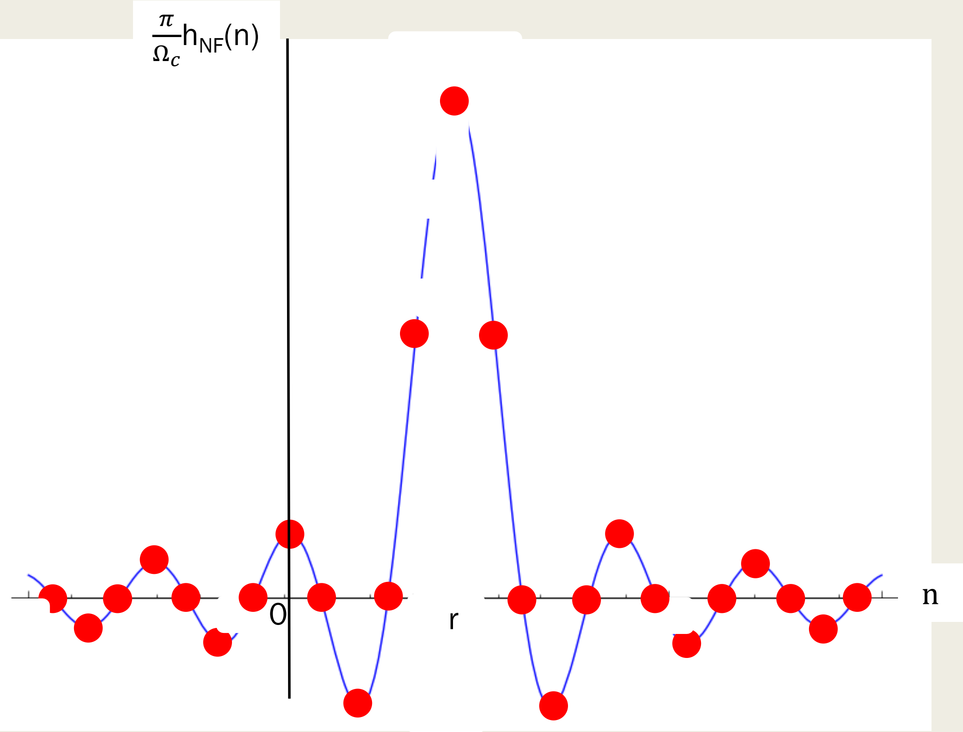
- Frekvencijski odziv: $H_{NF}(j\Omega) = \begin{cases} 1 \;\; za \quad |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 \;\; za \; \Omega_c < |\Omega| \le \pi \end{cases}$
- Impulsni odziv: $h_{NF}(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{NF}(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega_c n)}{\Omega_c n}$



# NF filter linearne fazne karakteristike

- Frekvencijski odziv: $H_{NF}(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega r} & za \quad |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & za\ \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$
- Impulsni odziv: $h_{NF}(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{NF}(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin[\Omega_c(n-r)]}{\Omega_c(n-r)}$




$\tau_d = r$

# Uslov za linearnu faznu karakteristiku

- Da li svaki FIR sistem koji ima simetričan impulsni odziv ima linearnu faznu karakteristiku?
- FIR sistem nulte fazne karakteristike: $H_0(z) = \sum_{n=-M}^{M} h_0(n) z^{-n} \Rightarrow H_0(j\Omega) = \sum_{n=-M}^{M} h_0(n) e^{-j\Omega n}$
- Simetričan impulsni odziv: $h_0(-n) = h_0(n)$
- $H_0(j\Omega) = h_0(0) + \sum_{n=1}^{M} h_0(n)\left[e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}\right] = h_0(0) + 2\sum_{n=1}^{M} h_0(n)\cos(\Omega n)$
- $arg\{H_0(j\Omega)\} = \begin{cases} 0, & H_0(j\Omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & H_0(j\Omega) < 0 \end{cases}$
- Sistem linearne fazne karakteristike dobija se pomeranjem $h_0(n)$ za $M$ odbiraka
- $h(n) = h_0(n-M) \Rightarrow H(j\Omega) = H_0(j\Omega)e^{-j\Omega M}$
- Kauzalni FIR sistem ima linearnu faznu karakteristiku ukoliko je njegov impulsni odziv simetričan u odnosu na središnju tačku

# Uslov za linearnu faznu karakteristiku

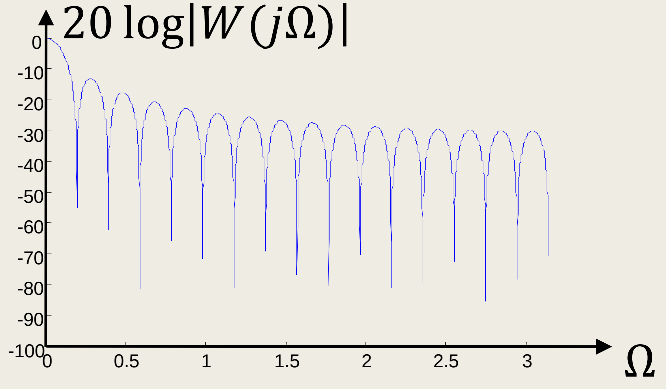
- Da li svaki FIR sistem koji ima antisimetričan impulsni odziv ima linearnu faznu karakteristiku?
- FIR sistem nulte fazne karakteristike: $H_0(z) = \sum_{n=-M}^{M} h_0(n) z^{-n} \Rightarrow H_0(j\Omega) = \sum_{n=-M}^{M} h_0(n) e^{-j\Omega n}$
- Antisimetričan impulsni odziv: $h_0(-n) = -h_0(n) \quad i \quad h_0(0) = 0$
- $H_0(j\Omega) = \sum_{n=1}^{M} h_0(n)\left[e^{-j\Omega n} - e^{j\Omega n}\right] = -2j \sum_{n=1}^{M} h_0(n) \sin(\Omega n)$
- $arg\{H_0(j\Omega)\} = \pm {}^{\pi}/_{2}$
- Sistem linearne fazne karakteristike dobija se pomeranjem $h_0(n)$ za $M$ odbiraka
- $h(n) = h_0(n-M) \Rightarrow H(j\Omega) = |H_0(j\Omega)| e^{j(\pm\pi/2 - \Omega M)}$
- Kauzalni FIR sistem ima linearnu faznu karakteristiku ukoliko je njegov impulsni odziv antisimetričan u odnosu na središnju tačku

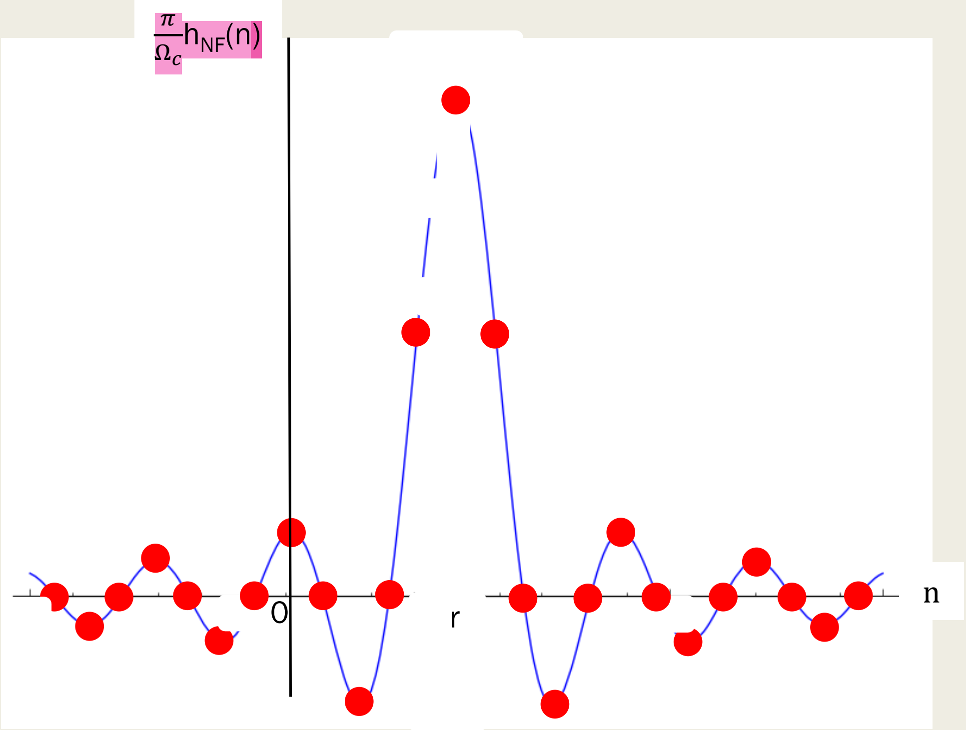
# Impulsni odziv FIR sistema linearne fazne karakteristike

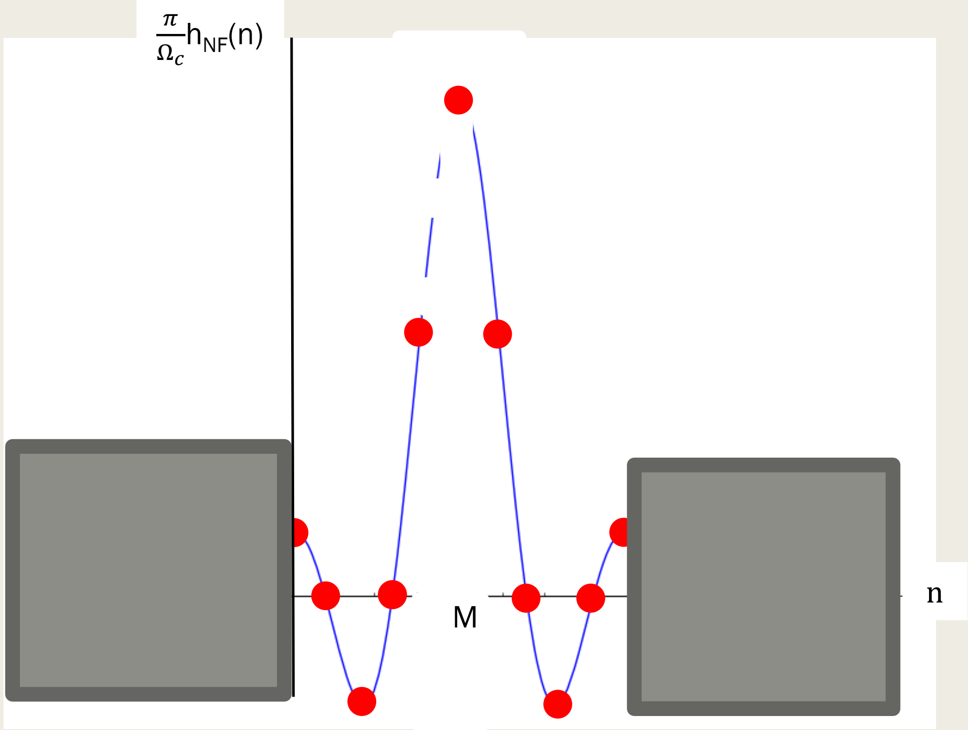
- Dužina odziva $N$ je neparan broj i simetričan je oko $M = \frac{N-1}{2}$
  - *Kašnjenje filtera $M$ je ceo broj*
  - *Pogodan za sve tipove filtera (NF, VF, PO, NPO)*
- Dužina odziva $N$ je paran broj i simetričan je oko $M = \frac{N-1}{2}$
  - *Kašnjenje filtera $M$ nije ceo broj*
  - *Pogodan za NF i PO filtere, ne može se koristiti za VF i NPO*
- Dužina odziva $N$ je neparan broj i antisimetričan je oko $M = \frac{N-1}{2}$
  - *Kašnjenje filtera $M$ je ceo broj*
  - *Pogodan samo za PO filtere*
- Dužina odziva $N$ je paran broj i antisimetričan je oko $M = \frac{N-1}{2}$
  - *Kašnjenje filtera $M$ nije ceo broj*
  - *Pogodan za VF i PO filtere, ne može se koristiti za NF i NPO*

# Projektovanje FIR filtera primenom prozora

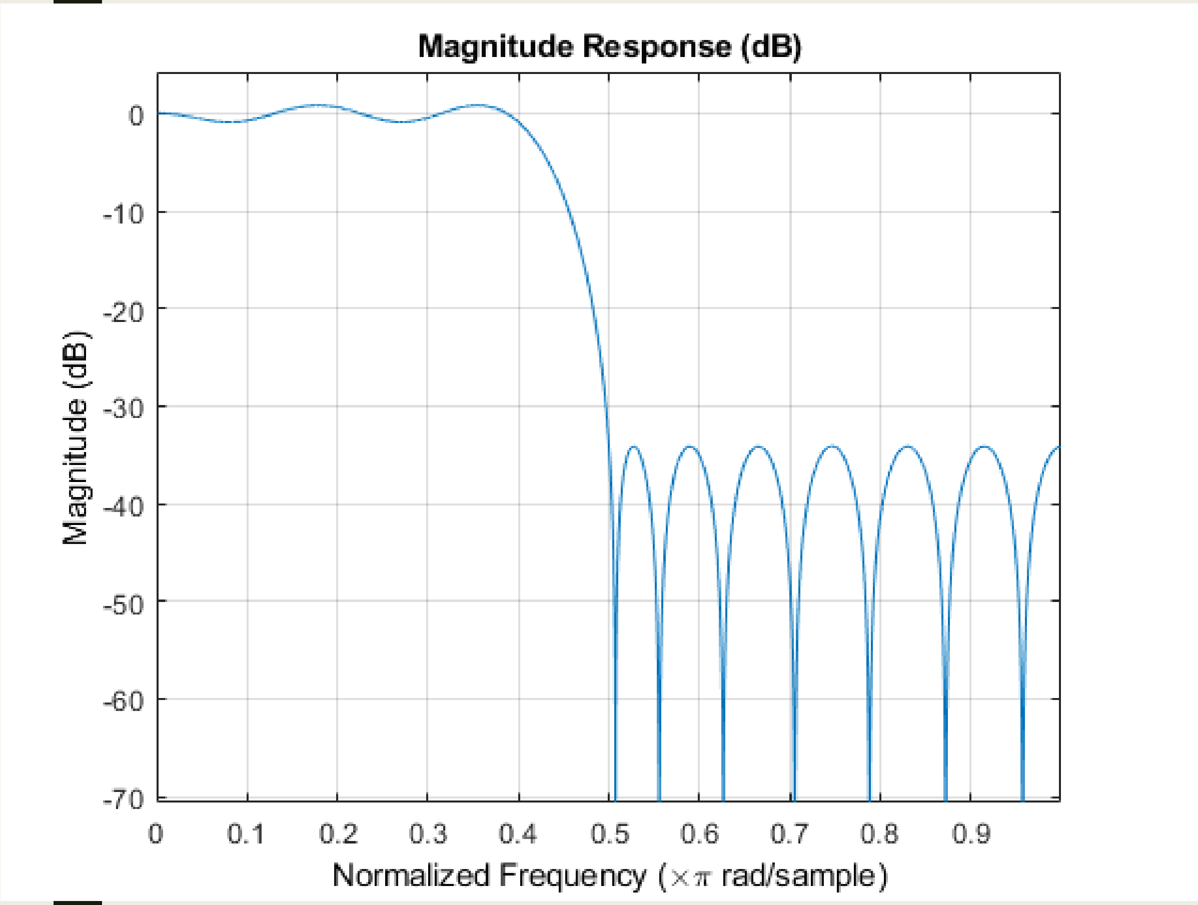
- Frekvencijski odziv željenog idealnog filtera: $H_d(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)\, e^{-j\Omega n}$
- Ima beskonačan impulsni odziv: $h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(j\Omega)\, e^{j\Omega n} d\Omega$ nekauzalan
- Možemo ga učiniti kauzalnim ako ga ograničimo na $N$ odbiraka i zakasnimo za $M = \frac{N-1}{2}$
- Pa je impulsni odziv kauzalnog filtera: $h(n) = h_d(n-M)w(n)$ gde je $w(n)$ prozorska funkcija
- Tada je $H(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[H_d(j\theta)\, e^{-j\theta M}]W[j(\Omega-\theta)]d\theta$ konvolucija
- Za pravougaoni prozor: $W(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega^{n}/_{2})}{\sin(^{\Omega}/_{2})} e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}$
- Bočni lukovi prouzrokuju propusnost u nepropusnom opsegu
- Što je glavni luk uži veća je selektivnost
- Povećanje širine prozora $N$ povećava se selektivnost, ali ne i propusnost u nepropusnom opsegu

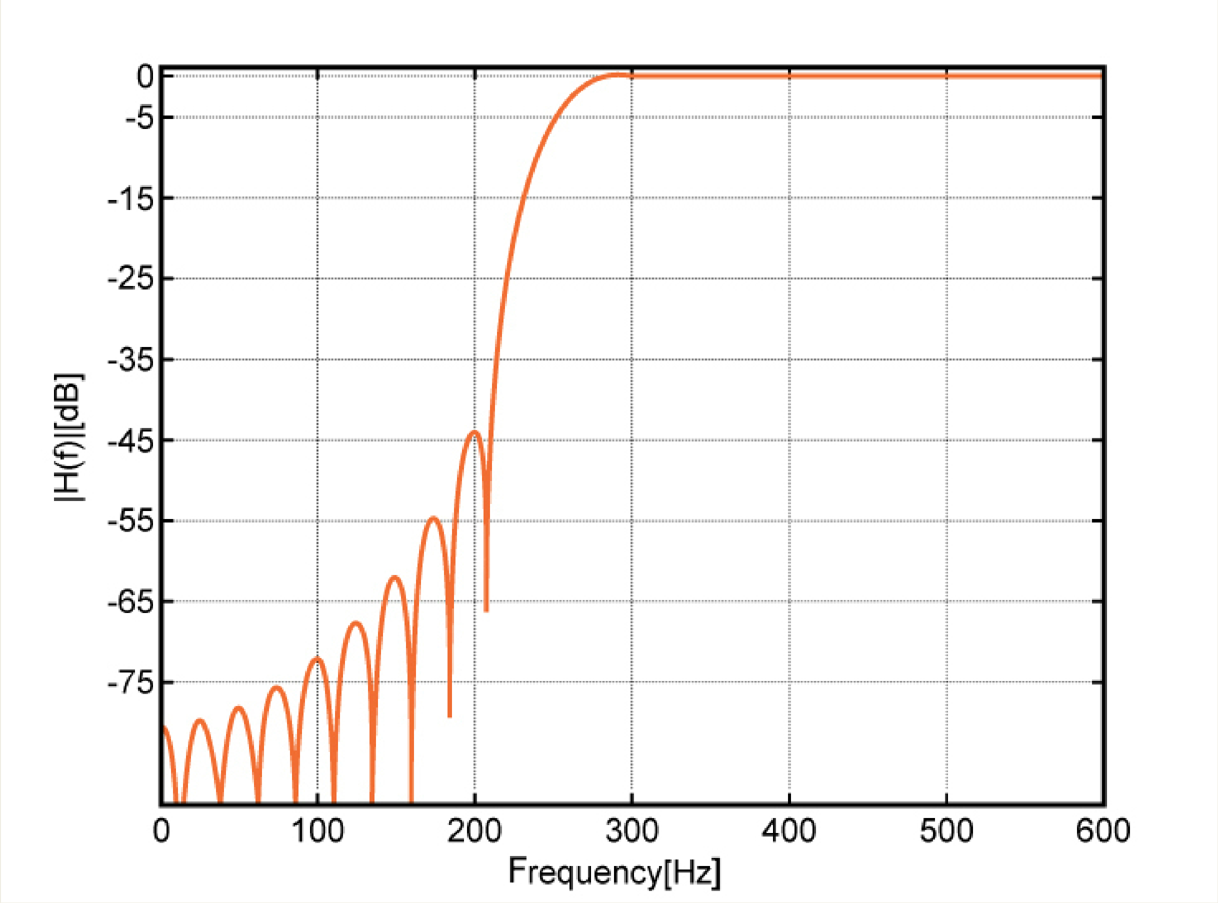



$\frac{\pi}{\Omega_c} h_{NF}(n)$
0
r
n


$\frac{\pi}{\Omega_c} h_{NF}(n)$
M
n

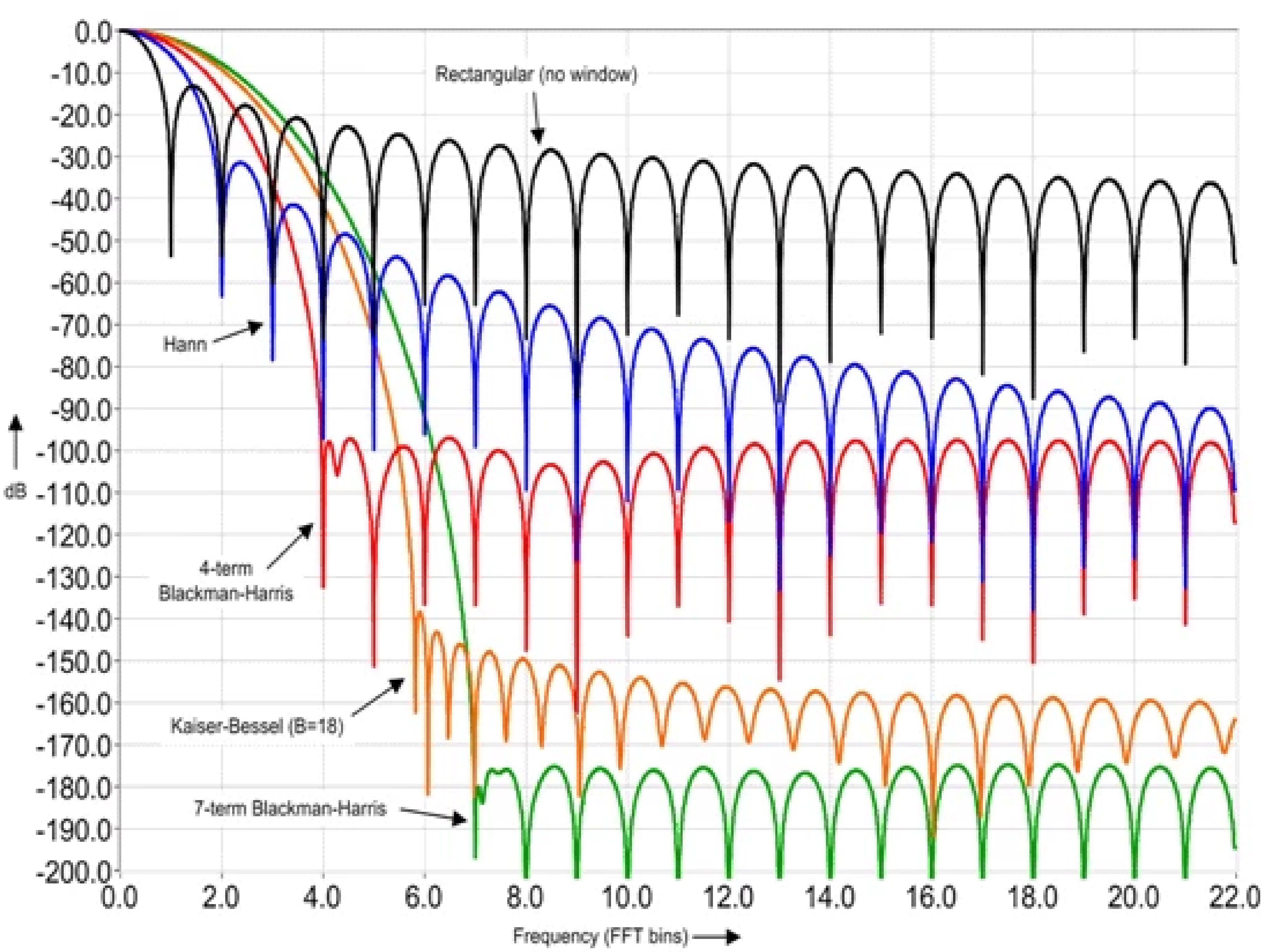
# Primer frekvencijskog odziva FIR filtera dobijenom primenom prozora



# Prozors

| PROZORSKA FUNKCIJA | Š LU |
|---|---|
| Pravougaona | |
| Trougaona | |
| Hanova | |
| Hemingova | |
| Blekmanova | |



# Projektovanje FIR filtera zasnovano na frekvencijskom odabiranju

- Frekvencijski odziv željenog idealnog filtera je $H_d(j\Omega)$
- Odabire se u $N$ ekvidistantnih tačaka: $H(k) = H_d(j\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi^k/_N}, k = 0,1, \dots N-1$
- $H(k)$ predstavlja DFT niza $\mathrm{h}(n)$, pa se $h(n)$ može dobiti pomoću IDFT
- $h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{-j2\pi kn/N}, \; n = 0,1, \dots, N-1$ što predstavlja impulsni odziv FIR sistema
- Niz $h_d(n)$ impulsni odziv $H_d(j\Omega)$ je beskonačane, dok je niz $h(n)$ konačne dužine tako da sistem $H(k)$ ne reprodukuje verno $H_d(j\Omega)$ već ga samo aproksimira
- Funkcija prenosa je: $H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N}.z^{-1}}$
- Frekvencijski odziv je: $H(j\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\frac{\sin\frac{\Omega N}{2}}{N\sin\frac{\Omega}{2}}e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}$
- $H(j\Omega)$ će se podudarati sa $H_d(j\Omega)$ samo u tačkama odabiranja $\Omega = 2\pi\, {}^k/_N$, između ovih tačaka samo ga aproksimira
- Zadovoljavajuća karakteristika u propusnom opsegu, ali malo slabljenje u nepropusnom opsegu, čak ispod 20dB
- Rešenje je da se ne aproksimira idealan filter već filter sa nenultom prelaznom zonom

# Primer frekvencijskog odziva FIR filtera dobijenog metodom frekvencijskog odabiranja