

Digitalni upravljački sistemi

Računarski upravljački sistemi

SADRŽAJ

I	Kratko ponavljanje sistema automatskog upravljanja	2
I-A	Opis sistema i Laplasova transformacija	2
I-B	Modeliranje sistema	2
I-C	Linearizacija sistema	3
I-D	Odzivi sistema prvog i drugog reda na različite pobude	4
I-E	Karakteristike sistema automatskog upravljanja	7
I-F	Greška u ustaljenom stanju	7
I-G	Stabilnost sistema	9
II	Dvopoložajni regulator i osnovni oblik kontinualnog PID regulatora	10
II-A	Dvopoložajni regulator	10
III	Modifikovani PID regulator. Modifikacija D dejstva	12
IV	Modifikovani PID regulator. Nagomilavanje integralnog dejstva, modifikacije P dejstva	13
V	Struktura digitalnih sistema automatskog upravljanja. A/D konverzija i D/A konverzija. Principiska šema digitalnog upravljačkog sistema	14
V-A	Klasifikacija signala	14
V-B	Kolo digitalnog sistema automatskog upravljanja	15
VI	Matematički model odabiranja i zadržke	17
VII	Osobine idealno odbirkovanog signala	19
VIII	Pojam \mathcal{Z}-transformacije. Inverzna \mathcal{Z}-transformacija. \mathcal{Z}-transformacija elementarnih signala	22
VIII-A	\mathcal{Z} -transformacija karakterističnih signala	22
IX	Osnovne osobine \mathcal{Z}-transformacije	24
X	Preslikavanje primarnog pojasa iz s-ravni u z-ravan	27
XI	Preslikavanje prave vremena smirenja, preslikavanje konture konstantnih frekvencija	29
XII	Preslikavanje položaja polova i vremenskog odziva	30
XIII	Stabilnost diskretnih sistema	31

I. KRATKO PONAVLJANJE SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

A. Opis sistema i Laplasova transformacija

Sistemi kojima se bavimo na kursu su:

- 1) **Linearni** - Sistemi za koje važi princip **superpozicije** - ako je na pobudu u_1 odziv sistema y_1 , a na pobudu u_2 odziv y_2 , sistem je linearan ako važi da, u slučaju pobude $a_1u_1 + a_2u_2$, odziv izgleda kao $a_1y_1 + a_2y_2$ (u princip superpozicije su integrisani i principi **aditivnosti** i **homogenosti**).
- 2) **Kauzalni** - Sistemi kod kojih odziv ne postoji prije dovodenja pobudnog signala (dakle, prije početnog trenutka, njihova vrijednost je 0).
- 3) **Vremenski invarijantni** - Sistemi su vremenski invarijantni ako se parametri sistema ne mijenjaju u vremenu.
- 4) **Stacionarni** - Dinamički sistemi sa koncentrisanim parametrima (opisuju se običnim diferencijalnim jednačinama sa vremenom kao nezavisnom promjenljivom) koji su vremenski invarijantni nazivaju se stacionarnim sistemima.

Pojednostavljenje analize sistema vršimo konverzijom iz polja vremenskog domena (diferencijalnih jednačina) u polje kompleksnih brojeva (algebarskih jednačina). Stoga uvodimo **Laplasovu transformaciju**, koja se zapisuje kao

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \quad (\text{I-A.1})$$

Vezu između ulaza i izlaza linearnih, vremenski kontinualnih, stacionarnih sistema opisuje se pomoću Laplasove transformacije **funkcijom prenosa**, odnosno

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (\text{I-A.2})$$

Dakle, **funkcija prenosa je odnos Laplasovih transformacija izlaza i ulaza, pri nultim početnim uslovima**. Kod ovakvih sistema, one su **racionalne** (polinomi cijelih stepena se nalaze i u brojiocu i u imeniocu) i važi da je $n \geq m$, gdje je n red polinoma (najveći stepen) imenioca, a m red polinoma brojioca.

B. Modeliranje sistema

Sisteme kojima se bavimo na kursu (**linearne**) možemo modelovati:

- 1) **Diferencijalnim jednačinama**
- 2) **Matematičkim modelom u prostoru stanja**

Matematički model u prostoru stanja je opis sistema u formaciji

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{I-B.1})$$

$$y = g(x, u) \quad (\text{I-B.2})$$

ili česće, matrično

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{I-B.3})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{I-B.4})$$

gdje je x **vektor promjenljivih stanja**, u **ulazni signal**, dok je y **izlaz iz sistema (odziv)**.

Matrica A se naziva **matrica stanja**, matrica B **matricom ulaza**. Matrica C je **matrica izlaza**, dok je D **matrica ulaza-izlaza**.

Ako uradimo Laplasovu transformaciju jednačine stanja i jednačine izlaza, dobijamo

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (\text{I-B.5})$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (\text{I-B.6})$$

Uvrštavanjem prve u drugu jednačinu, dobijamo

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (\text{I-B.7})$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (\text{I-B.8})$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \quad (\text{I-B.9})$$

te se funkcija prenosa može odrediti kao

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\text{I-B.10})$$

Inverzna matrica se određuje kao

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{(\text{cof}(sI - A))^T}{\det(sI - A)} \quad (\text{I-B.11})$$

C. Linearizacija sistema

Linearizacija sistema suštinski je potrebna pri analizi nelinearnih sistema, nakon koje možemo primjeniti pretpostavke i zakone teorije upravljanja na linearne sisteme. Linearizacija se vrši **oko mirne radne tačke** (radno stanje u kom proces može ostati neograničeno dugo ako na njega ne djeluje poremećaj).

Radne tačke procesa nalazimo kada su promjene sistema nulte, odnosno

$$\dot{x} = f(x, u) = 0 \quad (\text{I-C.1})$$

Odstupanja vrijednosti promjenljivih stanja i ulaza linearizovanog modela od stvarnih vrijednosti pomenutih zapisaćemo kao

$$x = x_0 + \Delta x \quad (\text{I-C.2})$$

$$u = u_0 + \Delta u \quad (\text{I-C.3})$$

Ako razvijemo prvu jednačinu matematičkog modela u prostoru stanja ($\dot{x} = f(x, u)$) u Tejlorov red u okolini mirne radne tačke koja ima koordinate (x_0, u_0) , zanemarujući izvode višeg reda od prvog, dobijamo sledeće:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(x_0 + \Delta x) = \frac{df(x, u)}{dt} = f(x_0, u_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u}(u - u_0) \quad (\text{I-C.4})$$

U mirnoj radnoj tački, važi da je $f(x_0, u_0) = 0$, pa je

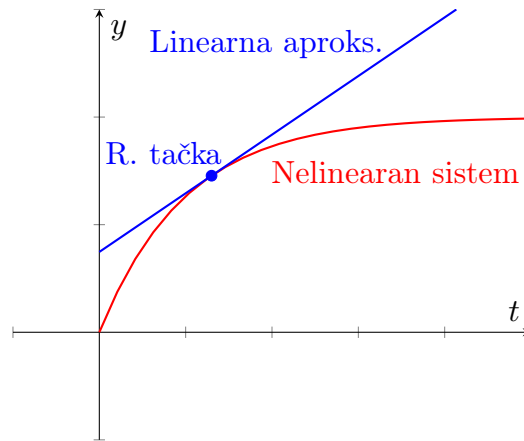
$$\dot{\Delta x} = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u}\Delta u \quad (\text{I-C.5})$$

Poslednja jednačina je **linearizovan matematički model u prostoru stanja nelinearnog sistema**.

Slično, za $y = g(x, u)$, kao i za odziv y_0 kada je ulaz u sistem u_0 i vrijednosti promjenljivih stanja x_0 ($y_0 = g(x_0, u_0)$), dobijamo

$$y = y_0 + \Delta y = g(x, u) = g(x_0, u_0) + \frac{\partial g(x_0, u_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, u_0)}{\partial u} \Delta u \quad (\text{I-C.6})$$

$$\Delta y = \frac{\partial g(x_0, u_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, u_0)}{\partial u} \Delta u \quad (\text{I-C.7})$$



Slika I.1: Crvenom bojom je označen **nelinearan sistem**, dok je plavom bojom označena **njegova linearna aproksimacija**, kao i **radna tačka** oko koje linearizujemo.

D. Odzivi sistema prvog i drugog reda na različite pobude

Red sistema određujemo po tome koji je najveći izvod funkcije koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednačini koja ga opisuje (recimo, sistem drugog reda sadrži u sebi izvod najviše drugog reda, i sl.).

1) Karakteristični oblik **sistema prvog reda** je

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad (\text{I-D.1})$$

Funkcija prenosa ovakvog sistema je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s + a} \quad (\text{I-D.2})$$

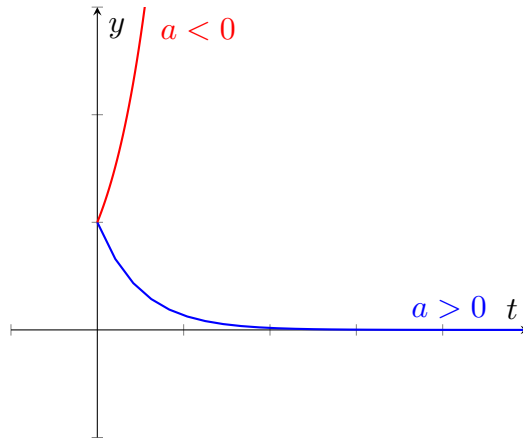
a) **Odziv sistema** na impulsni (Dirakov, *delta impuls*) signal kao ulaz

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \quad (\text{I-D.3})$$

čija je **Laplasova transformacija** $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ jeste

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b}{s + a} \quad (\text{I-D.4})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = be^{-at}h(t) \quad (\text{I-D.5})$$



Slika I.2: **Plavom** je označen slučaj $a > 0$, dok je **crvenom** označen slučaj $a < 0$.

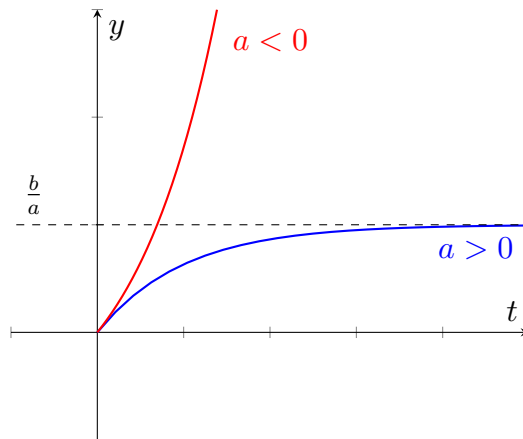
b) **Odziv sistema** na Hevisajdov signal kao ulaz

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I-D.6})$$

čija je Laplasova transformacija $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$ je

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b}{s+a} \frac{1}{s} = \frac{\frac{b}{a}}{s} - \frac{\frac{b}{a}}{s+a} \quad (\text{I-D.7})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})h(t) \quad (\text{I-D.8})$$



Slika I.3: **Plavom** je označen slučaj $a > 0$, dok je **crvenom** označen slučaj $a < 0$.

2) Karakteristični oblik **sistema drugog reda** je

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = cu(t) \quad (\text{I-D.9})$$

Funkcija prenosa ovakvog sistema je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b} \quad (\text{I-D.10})$$

ili češće zapisano

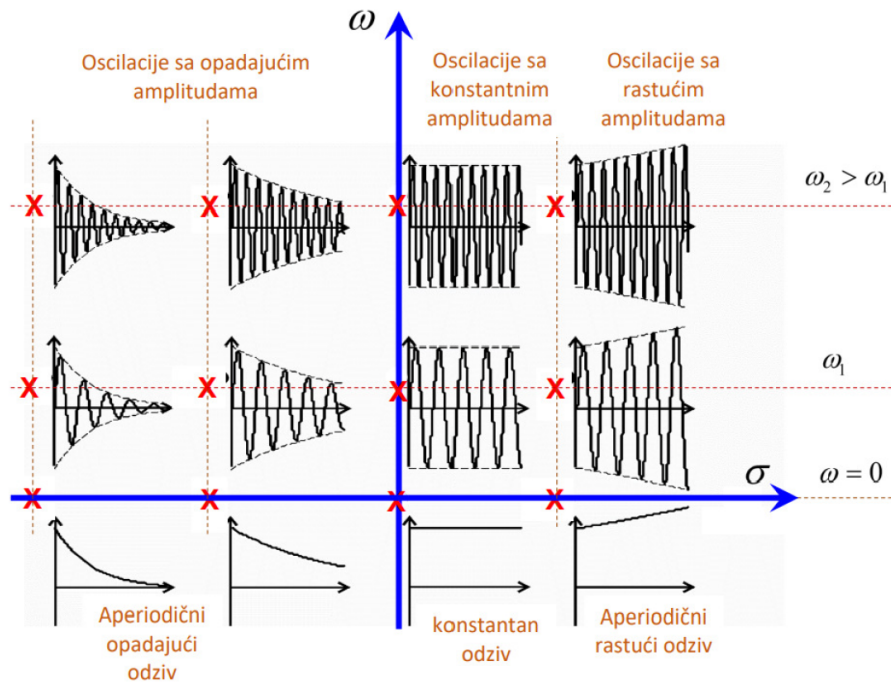
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{I-D.11})$$

Polovi sistema su

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm j\omega \quad (\text{I-D.12})$$

Step odziv sistema drugog reda izgleda

$$y(t) = \left(1 - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi) \right) h(t) \quad (\text{I-D.13})$$



Slika I.4: Različiti odzivi u zavisnosti od parametara ω_n i ξ , na δ pobudu.

E. Karakteristike sistema automatskog upravljanja

- 1) **Statičko pojačanje** - Dobija se izrazom

$$K_{stat} = \lim_{t \rightarrow 0} G(s) = G(0) \quad (\text{I-E.1})$$

- 2) **Dominantna vremenska konstanta** - Govori o tome koliko brzo će sistem ući u ustaljeno stanje. Dobija se izrazom

$$T_d = \frac{1}{|\sigma_d|} \quad (\text{I-E.2})$$

gdje je σ_d realni dio dominantnog pola (pola najbližeg imaginarnoj osi).

- 3) **Greška u ustaljenom stanju** - Govori o tome koliko ostvarena vrijednost odziva sistema prati željenu (referentnu) vrijednost procesa.
- 4) **Stabilnost sistema** - Govori o tome šta se dešava sa sistemom kada se on izvede iz mirne radne tačke (u smislu Ljapunova). Stabilnost zavisi od položaja polova funkcije prenosa.
- 5) **Brzina sistema** - Povezana sa **dominantnom vremenskom konstantom** i određena je polom najbližim Im osi. To je ujedno i **najsporiji pol** (**najsporija komponenta** odziva), pa iz toga proizilazi da je **sistem onoliko brz koliko je brza njegova najsporija komponenta**. Pri projektovanju regulatora, moguće je pomjeriti polove lijevo te tako ubrzati sistem, ali kao posljedicu toga dobijamo preskoke i proširujemo propusni opseg funkcije prenosa.

F. Greška u ustaljenom stanju

Greška u ustaljenom stanju je pojava odstupanja ostvarene vrijednosti ($y(t)$) od željene vrijednosti ($r(t)$) odziva sistema. Ona govori o sposobnosti sistema da prati željenu vrijednost i definiše se kao

$$e_{ss} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (\text{I-F.1})$$

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (\text{I-F.2})$$

Funkcija prenosa od reference $R(s)$ do greške $E(s)$ je

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad (\text{I-F.3})$$

Dakle, vidimo da greška zavisi ne samo od prirode sistema, već i od reference (pobude).

Funkcija prenosa bilo kojeg sistema može se zapisati kao

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^N \prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad p_j \neq 0 \quad (\text{I-F.4})$$

$$N + n \geq m \quad (\text{I-F.5})$$

gdje je N red astatizma.

Definišimo **statičko pojačanje glavne grane** kao

$$K_{dc} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \right), \quad p_j \neq 0 \quad (\text{I-F.6})$$

Posmatrajmo grešku u ustaljenom stanju u odnosu na pobudni signal:

1) **Pobuda je** $r(t) = h(t)$

Tada je $R(s) = \frac{1}{s}$, te je greška u ustaljenom stanju

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \quad (\text{I-F.7})$$

Po definiciji, greška u ustaljenom stanju na **step pobudu** jeste

$$e_{ss} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + K_p} \quad (\text{I-F.8})$$

gdje se K_p naziva **poziciona konstanta**.

Ako je red astatizma $N = 0$, tada su vrijednosti greške u ustaljenom stanju i pozicione konstante

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + K_{dc}} \quad (\text{I-F.9})$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K_{dc} \quad (\text{I-F.10})$$

Dakle, ako **nema astatizama** u sistemu, na **step ulaz uvijek ćemo imati grešku u ustaljenom stanju** (ona nikada neće biti nula). Grešku možemo smanjiti jakim pojačanjem, no sistem tada trpi veće opterećenje.

Ako je red astatizma $N \geq 1$, tada je greška u ustaljenom stanju

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{G_0(s)}{s^N}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^N}{s^N + G_0(s)} = 0 \quad (\text{I-F.11})$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_0(s)}{s^N} = \infty \quad (\text{I-F.12})$$

gdje je $G_0(s)$ funkcija prenosa sistema bez astatizama.

Dakle, potreban je **bar jedan astatizam** u sistemu **kada je ulaz Hevisajdova funkcija** kako bi se poništila greška u ustaljenom stanju.

2) **Pobuda je** $r(t) = th(t)$

Tada je $R(s) = \frac{1}{s^2}$, te je greška u ustaljenom stanju

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \quad (\text{I-F.13})$$

Po definiciji, greška u ustaljenom stanju na **rampa pobudu** jeste

$$e_{ss} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K_v} \quad (\text{I-F.14})$$

gdje se K_v naziva **brzinska konstanta**.

Analizom prethodne jednačine postižu se sledeći rezultati:

- a) Za $N = 0$, $K_v = 0$ i $e_{ss} \rightarrow \infty$
- b) Za $N = 1$, $K_v = K_{dc}$ i $e_{ss} = \frac{1}{K_{dc}}$
- c) Za $N \geq 2$, $K_v \rightarrow \infty$ i $e_{ss} \rightarrow 0$

Dakle, za otklanjanje greške u ustaljenom stanju na **rampa pobudu**, potrebno je **bar dva astatizma** u sistemu.

Kada je u pitanju projektovanje regulatora, broj astatizama (integratora) koje može sadržati regulator ne prelazi 2, jer se dodavanjem već dva astatizma sistem dovodi na granicu stabilnosti.

G. Stabilnost sistema

Kroz teoriju upravljanja (linearnih) sistema prožima se pitanje - da li je sistem stabilan? Ako sistem nije stabilan, nema smisla analizirati dodatne karakteristike sistema kao što su ponašanje u prelaznom režimu, greška u ustaljenom stanju i dr.

Stabilnost u smislu Ljapunova definiše se na način da je mirna radna tačka stabilna ukoliko za svako pozitivno ϵ postoji pozitivan broj $\delta(\epsilon)$ takav da ukoliko je početno stanje procesa udaljeno od ravnotežnog stanja manje od δ , tada će cjelokupna naredna trajektorija procesa biti unutar ϵ -okoline ravnotežnog stanja, odnosno

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \implies \|x(t) - x_0\| < \epsilon, \forall t > 0 \quad (\text{I-G.1})$$

Asimptotska stabilnost govori o tome da je radna tačka asimptotski stabilna ukoliko je stabilna u smislu Ljapunova, te ukoliko se nakon dovoljno malog poremećaja asimptotski vraća u ravnotežno stanje. Matematički zapisano,

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad (\text{I-G.2})$$

Pored Ljapunovih uslova stabilnosti (koji su uopštenje za bilo koju vrstu sistema, bili oni linearni ili nelinearni), takođe možemo razmatrati **polove sistema**. Naime, **ako se svi polovi funkcije spregnutog prenosa sistema (funkcija prenosa sistema** kada se zatvori negativna povratna sprega, dok se polovi nalaze rješavanjem jednačine $1 + G(s)H(s) = 0$) **nalaze lijevo od imaginarne ose**, tada je linearni sistem **stabilan**. Bar jedan pol sa desne strane imaginarne ose tjera sistem u **nestabilnost**, dok su **granično stabilni** oni sistemi sa polovima na imaginarnoj osi kompleksne ravni. Važno je napomenuti da su sistemi nestabilni i u slučaju kada postoje **višestruki polovi** na imaginarnoj osi (dva ili više pola u jednoj istoj tački).

U slučaju da polovi sistema nisu poznati, možemo iskoristiti **Nikvisov kriterijum**. **Funkcija spregnutog prenosa** sistema je

$$W_{sp}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + W_p(s)} \quad (\text{I-G.3})$$

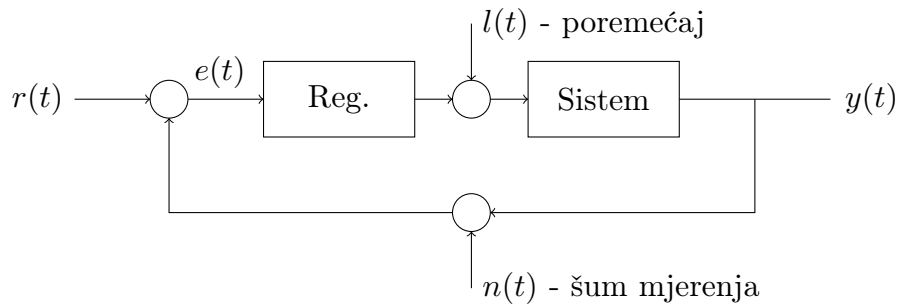
$$W_p(s) = G(s)H(s) \quad (\text{I-G.4})$$

gdje je $W_p(s)$ **funkcija povratnog prenosa**.

Obuhvatimo konturom \mathcal{C} sve **polove** (P) i **nule** (N) funkcije $F(s) = 1 + W_p(s) = 1 + G(s)H(s)$ koji se nalaze u desnoj poluravni kompleksne ravni (ta kontura je beskonačan polukrug). Znajući da stabilnost sistema **zavisí od nula** $F(s)$ (da ona **ne smije imati nule** u desnoj poluravni) i pod pretpostavkom Košijeve teoreme koja govori da broj obuhvata preslikane krive oko koordinatnog početka iznosi $N - P$, dolazimo do zaključka da **obuhvat krive dobijene funkcijom** $F(s)$ **oko koordinatnog početka mora biti jednak** $-P$, da bi sistem bio stabilan. Praktično se uzima u obzir funkcija $W(s)$, te se gleda obuhvat oko tačke $(-1, 0j)$.

II. DVOPOLOŽAJNI REGULATOR I OSNOVNI OBLIK KONTINUALNOG PID REGULATORA

Sistem koji od sada posmatramo izgleda kao



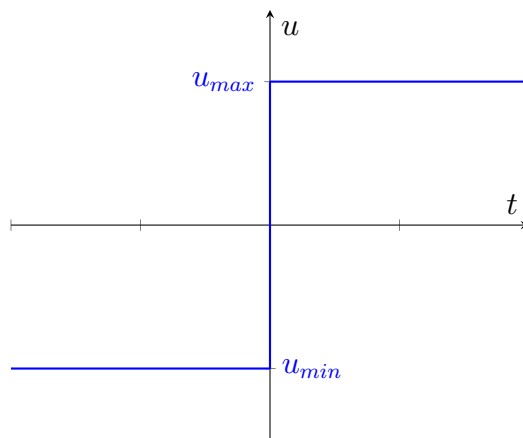
Slika II.1: Kontinualni sistem koji posmatramo.

A. Dvopoložajni regulator

Dvopoložajni regulatori predstavljaju najjednostavnije konvencionalne regulatore kod kojih se na osnovu znaka signala greške opredjeljuje za jedno od dva moguća izlazna stanja - u_{min} i u_{max} . Formalno zapisano,

$$u(t) = \begin{cases} u_{min} & , e(t) < 0 \\ u_{max} & , e(t) > 0 \end{cases} \quad (\text{II-A.1})$$

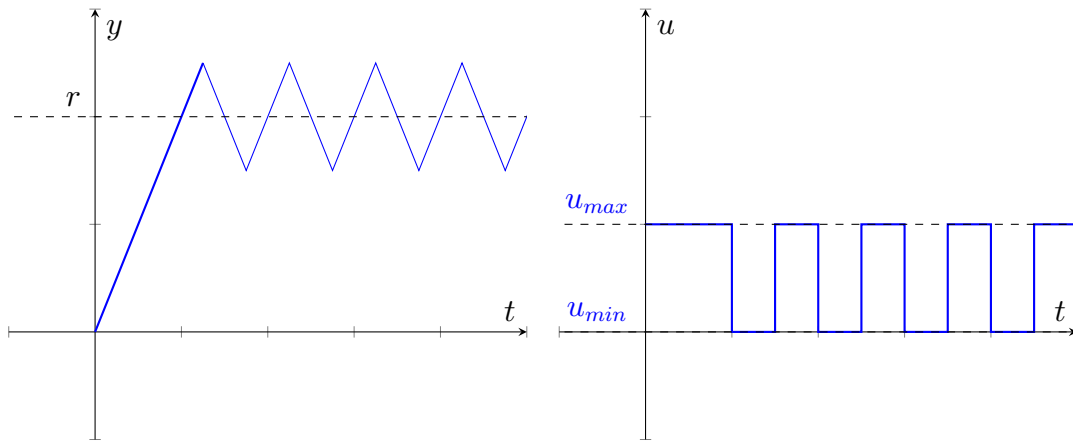
Najčešće, ova dva stanja se nazivaju **OFF** i **ON** stanje, a sam regulator **ON-OFF regulatori** (ili nekada ***bang - bang***).



Slika II.2: Osnovna implementacija dvopoložajnog regulatora.

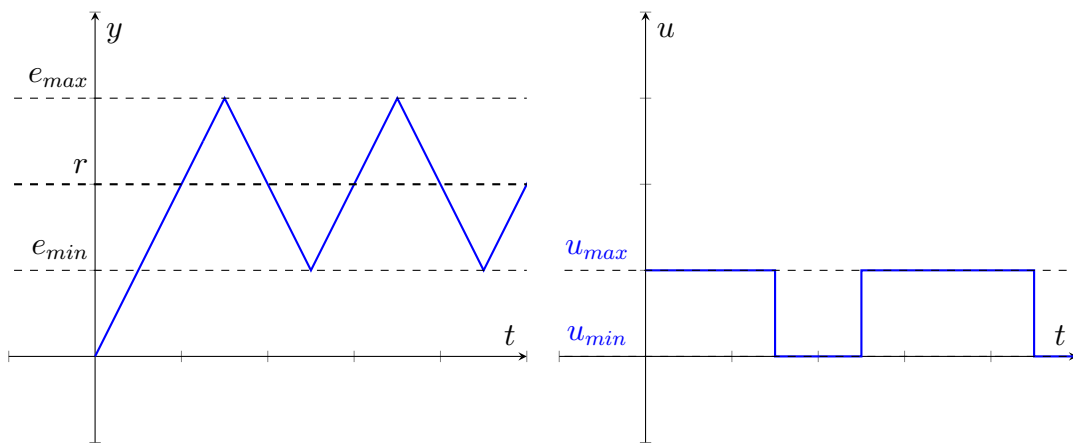
Ovakvi regulatori i njihova praktično jednostavna upravljačka strategija nalaze aplikacije u kućnoj automatiki (regulacija temperature sobe, rerne i sl.).

Međutim, problem kod dvopoložajnih regulatora u njihovoj osnovnoj implementaciji ogleda se u tome što, nakon što odziv dostigne željenu vrijednost (recimo, regulacija temperature u sobi), pri ponovnom pojavljivanju greške u praćenju referentne vrijednosti (ponovni pad temperature), dolazi do instantne reakcije regulatora (koji vraća temperaturu na željenu vrijednost), te kako se ovo dešava konstantno (temperatura će vrlo brzo opet opasti), dolaziće i do čestog uključivanja izvršnog organa, što je loše po njega samog.



Slika II.3: **Odziv sistema** (slika lijevo, aproksimacija) i **ponašanje upravljačkog signala** (slika desno).

Dodamo li određenu **toleranciju** regulatoru, odnosno pustimo li da se regulator ne aktivira odmah pri pojavljivanju greške već izvan nekih tolerantnih vrijednosti, dobijamo manji broj uključivanja i isključivanja izvršnog organa i samim time podnošljiviju regulaciju pomenutog.



Slika II.4: **Odziv sistema** (slika lijevo, aproksimacija) i **ponašanje upravljačkog signala** (slika desno).

Primjetimo da imamo rjeđe paljenje i gašenje izvršnog organa. Takođe, važno je primjetiti da je ON-OFF regulatorima sa histerezisom potrebna **memorija** za rad - ako je izmjerena temperatura 20.5°C , a referentna 22°C , da li je potrebno paliti ili gasiti upravljanje?

Način funkcionisanja dvopoložajnih regulatora je jednostavan, njihova softverska realizacija nije zahtjevana, dok kvalitet regulacije (oblik upravljačke krive) nije na visokom nivou (nije gladak) i praćen je sopstvenim oscilacijama. Prva modifikacija ovog upravljačkog kola je **proporcionalni P regulator**.

III. MODIFIKOVANI PID REGULATOR. MODIFIKACIJA D DEJSTVA

IV. MODIFIKOVANI PID REGULATOR. NAGOMILAVANJE INTEGRALNOG DEJSTVA, MODIFIKACIJE P DEJSTVA

V. STRUKTURA DIGITALNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA. A/D KONVERZIJA I D/A KONVERZIJA. PRINCIPSKA ŠEMA DIGITALNOG UPRAVLJAČKOG SISTEMA

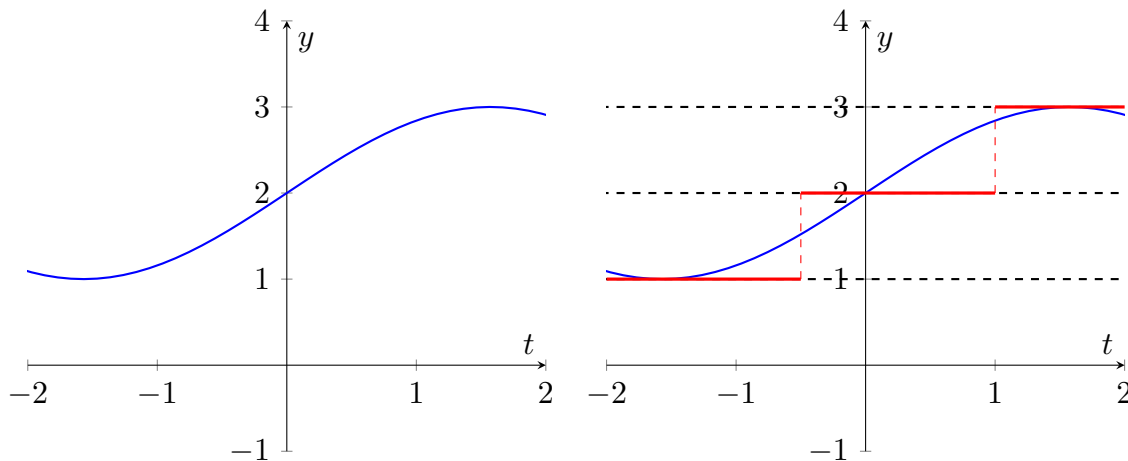
A. Klasifikacija signala

Signale možemo podijeliti na više načina:

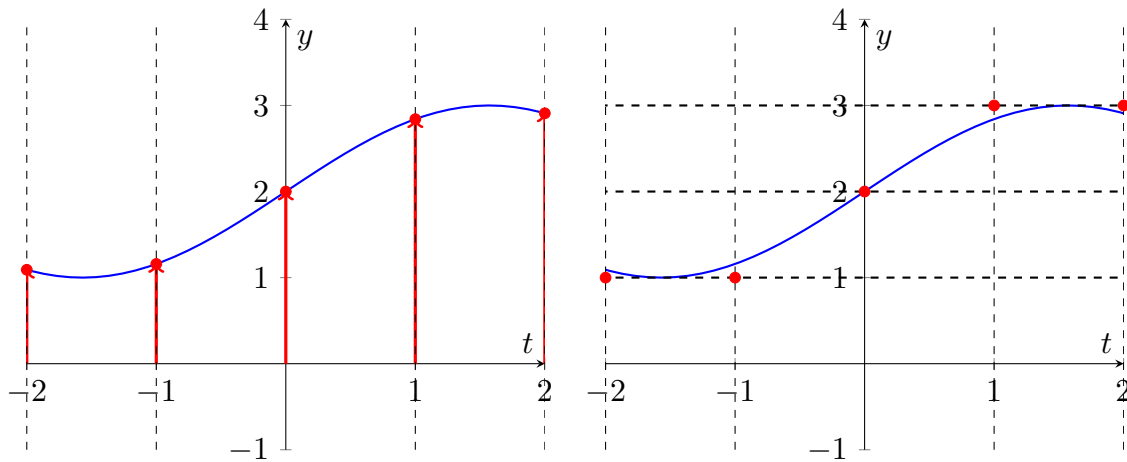
- 1) **Po „vremenu“** - odnosi se na pitanje vremenskih trenutaka u kojima je vrijednost signala **definisana**, odnosno trenutaka u kojima može doći do promjene njegove vrijednosti. Po takvoj podjeli, možemo ih svrstati u
 - a) **Analogne po vremenu** - vrijednost signala je poznata u svakom trenutku intervala.
 - b) **Diskretne po vremenu** - vrijednost signala je poznata samo u određenim diskretnim trenucima.
- 2) **Po „amplitudi“** - odnosi se na pitanje **koje vrijednosti** može uzimati amplituda signala. Po takvoj podjeli, možemo ih svrstati u
 - a) **Analogne po amplitudi** - iznos amplitude je bilo koja realna vrijednost.
 - b) **Diskretne po amplitudi** - iznos amplitude je iz nekog predefinisanoг konačnog prebrojivog skupa - amplitudski kvantovan.

Konkretnе vrste signala dobijaju se ukrštanjem prethodne dvije podjele, dok sledeća tabela govori o nazivima signala

	Vremenski kontinualni	Vremenski diskretni
Amplitudski kontinualni	Analogni signali	Impulsni signali
Amplitudski diskretni	Relejni signali	Digitalni signali



Slika V.1: Analogni signal (lijevo) i relejni signal (desno).

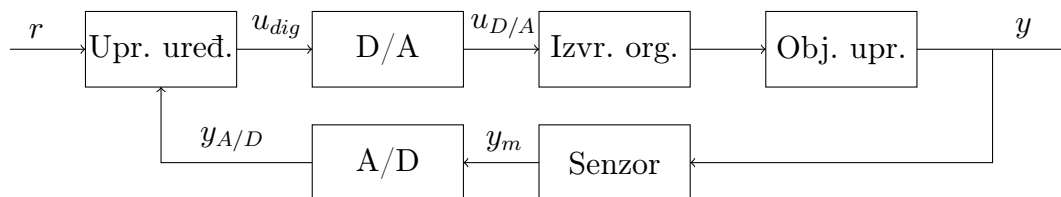


Slika V.2: Impulsni signal (lijevo) i digitalni signal (desno).

B. Kolo digitalnog sistema automatskog upravljanja

U savremenim implementacijama sistema automatskog upravljanja, upravljački uređaj je **računarski sistem**. Računar raspoznaje i radi samo sa digitalnim signalima (kvantovanim i po vremenu, kao i po amplitudi), pa je potrebno u nativno kolo sistema automatskog upravljanja uvesti **A/D konvertor**, kako bi primio ulaze iz sistema (mjerjenje) i generisao upravljačku komandu. Takođe, izlaz iz računara je digitalan signal, pa kako bi se upravljalo izvršnim organima (koji su „analogne” prirode), potrebno je u kolo dodati i **D/A konvertor**.

Osnovno kolo digitalnog sistema automatskog upravljanja izgleda kao



Slika V.3: Osnovno kolo digitalnog sistema automatskog upravljanja.

Proces diskretizacije (A/D konverzije) odvija se u sledećim etapama:

- 1) **Odabirač** - Uzima vrijednosti signala u određenim vremenskim trenucima - karakteriše ga **perioda odabiranja** T .
- 2) **Kolo zadržke** - Kolo koje zadržava vrijednost signala, kako bi ga A/D konvertor stigao dalje obraditi.
- 3) **Kvantovanje signala** - Dalja obrada signala gdje se kvantifikuje amplituda signala tako da uzima vrijednost iz već predefinisano skup vrijednosti. A/D konvertor karakteriše **rezolucija** - broj bitova kojima se može predstaviti vrijednost signala. U praksi su to registri sa 8, 12 i 16 bitova.

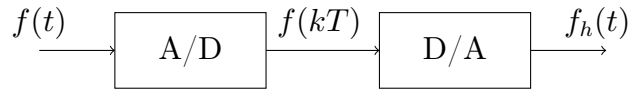
Na izlazu A/D konvertora dobijamo neki digitalni broj koji se pojavljuje svakih T sekundi.

Proces digitalno-analogne konverzije odvija se nakon generisanja upravljačkog signala. Kako računar „izbacuje” svakih τ sekundi upravljačku komandu koja je digitalni broj, tako je potrebno generisati (**interpolirati**) signal i između tačaka izdavanja novog upravljanja, te se u tu svrhu D/A konvertor ponaša kao **kolo zadržke**.

Obično se koristi **kolo zadržke nultog reda**, koje interpolira tačke na način da zadržava staru vrijednost signala dok ne dođe nova. Moguće je koristiti i kolo zadržke višeg reda, ali to sa sobom donosi kompleksnost u teorijskim razmatranjima i praktičnu implementaciju.

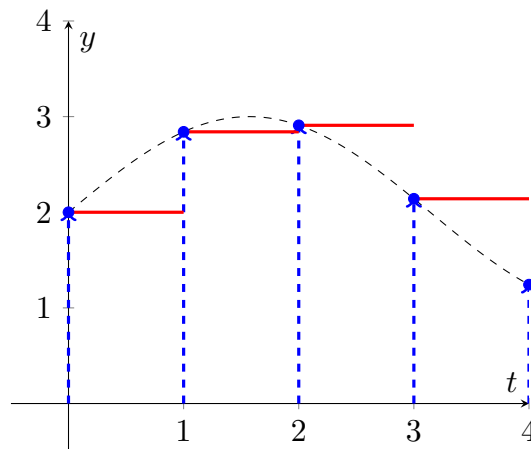
VI. MATEMATIČKI MODEL ODABIRANJA I ZADRŠKE

Razmotrimo sledeći blok dijagram



Slika VI.1: Redna A/D i D/A konverzija.

D/A konvertor na svom izlazu daje analogni signal $f_h(t)$ nastao konverzijom **povorku odbiraka** signala $f(t)$ u vremenskim trenucima određenim periodom odabiranja T . **Povorku odbiraka** obilježili smo sa $f(kT)$.



Slika VI.2: Signal $f_h(t)$ prikazan je crvenim linijama, dok odbirkovanje u trenucima označenim plavom bojom prikazuje diskretni signal $f(kT)$.

Signal $f_h(t)$ može se zapisati kao

$$f_h(t) = f(0) (h(t) - h(t - T)) + f(T) (h(t - T) - h(t - 2T)) + \dots \quad (\text{VI-1})$$

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)] \quad (\text{VI-2})$$

Laplasova transformacija gornje sume je

$$\mathcal{L}\{f_h(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \frac{1}{s} [e^{-skT} - e^{-s(k+1)T}] \quad (\text{VI-3})$$

$$F_h(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} \quad (\text{VI-4})$$

Poslednji izraz predstavlja **matematički model odabiranja i zadrške** u kompleksnom domenu. Prvi činilac

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (\text{VI-5})$$

predstavlja **kolo zadrške nultog reda** (D/A konvertor), dok izraz

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} \quad (\text{VI-6})$$

predstavlja **odabiranje**, **semplovanje** ili A/D konverziju.

Dokaz da gornji izraz zaista predstavlja model A/D konvertora dobijamo iz njegove inverzne Laplasove transformacije

$$f^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F^*(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \quad (\text{VI-7})$$

Zaista, dobijeni signal $f^*(t)$ predstavlja **odabiranje** u trenucima kT , upravo zbog Dirakovog delta impulsa koji ima vrijednost 1 u trenucima odabiranja, a 0 u ostalim.

Signal $f^*(t)$ identički je jednak $f(kT)$ jer nose identičnu informaciju o signalu (njegovu amplitudu u vremenskim trenucima kT), iako je očigledno da su ovo dva različita tipa signala (analogni i diskretni po vremenu).

VII. OSOBINE IDEALNO ODBIRKOVANOG SIGNALA

Osobine idealno odbirkovanog signala ispituju se u kontekstu frekventnog domena. Kako je red (suma, povorka) Dirakovih delta impulsa periodična funkcija (ista vrijednost amplitude signala se ponavlja u svakom umnošku periode), odnosno

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (\text{VII-1})$$

njega je moguće predstaviti Furijeovim redom, odnosno

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega_s t} \quad (\text{VII-2})$$

gdje je $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Koeficijent A_k računa se kao

$$A_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\omega_s t} dt \quad (\text{VII-3})$$

i on iznosi $A_k = \frac{1}{T}$ (za konkretnu funkciju $s(t)$).

Signal koji ćemo dobiti upravo predstavlja idealni odabirač jer sve što nam daje ovaj signal jeste vrijednost amplitude signala u trenucima kT , što je i svrha odabirača.

Dakle, idealni odabirač može se predstaviti kao

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \quad (\text{VII-4})$$

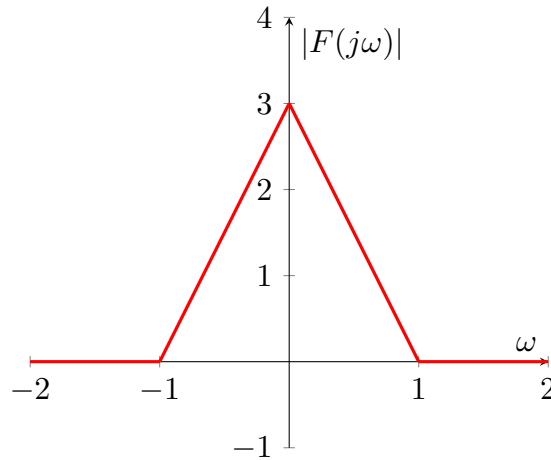
U kombinaciji sa signalom kojeg želimo odbirkovati, $f(t)$, odabiranje će biti izvedeno tako što pomnožimo signal odabiračem, odnosno

$$f^*(t) = f(t)s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jk\omega_s t} \quad (\text{VII-5})$$

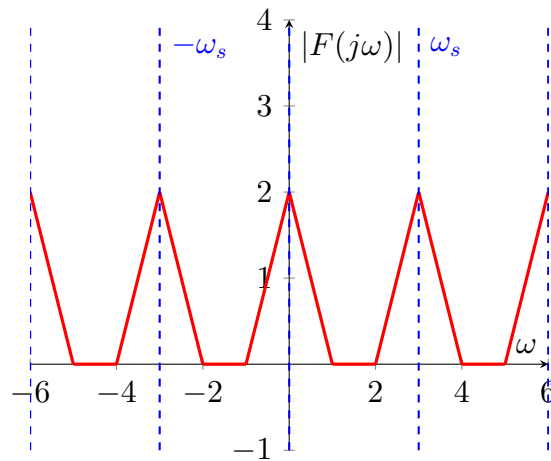
Laplasovom transformacijom dobijamo izraz

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - jk\omega_s) \quad (\text{VII-6})$$

Posljedica dobijanja ovakve sume je da se spektar analognog signala $F(s)$ **beskonačno multiplikuje, preslikava simetrično oko svakog cjelobrojog umnoška kružne učestalosti odabiranja**. Dakle, odbirkovani signal $F^*(s)$ je pojačan za $\frac{1}{T}$, a njegov iznos (ukupan spektar) je zbir svih slika originalnog spektra.



Slika VII.1: Amplitudski spektar analognog signala



Slika VII.2: Amplitudski spektar idealno odbirkovanog signala koji odgovara gornjem analognom signalu

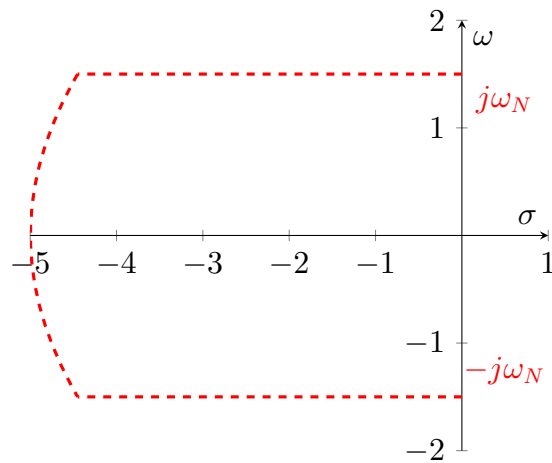
Posljedica dobijenog spektra jeste **multipliciranje polova**. Ovo otežava analizu diskretnih sistema i u tu svrhu uvodimo ograničenje razmatranja polova na takozvani **primarni (Nikvistov)** pojas. Njega generišemo pomoću **niskopropusnog filtra** (odsjeća sve visoke učestanosti), no ako je signal zašumljen, takvi polovi će se pojaviti u pojasu. Razlog zbog kojeg se polovi pojavljuju leži u **alijasingu** - pojava da se signali visokih učestanosti (konkretno, šumovi) zamjenjuju prividno signalima niskih učestanosti. Kako bi se „odsjekli” polovi uzrokovani šumom, prije A/D konverzije uvodi se **antialijasing filter**, koji će eliminisati pomenute.

Takođe, bitno je „dobro” odabrati periodu biranja, jer prevelikom periodom odabiranja uzrokuje smanjenje učestalosti smplovanja ω_s , te može doći do međusosbnog preklapanja preslikanih spektara. U tu svrhu, postavlja se uslov koji govori **Nikvist - Šenonova teorema**, a koji kaže da **ukoliko je frekvencija odbirkovanja bar dva puta veća od najveće frekvencije koju signal sadrži, tada se signal može rekonstruisati iz svojih odbiraka**. Formalno,

$$\omega_s \geq 2\omega_{max} \quad (\text{VII-7})$$

U praksi se bira da učestanost odabiranja bude 5 do 10 puta veća od najveće frekvencije signala.

Time je čitav lijevi dio s -poluravni sveden na tzv. **Nikvistovu oblast**, odnosno



Slika VII.3: Nikvistova oblast, gdje je $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$, po Nikvistovoj teoremi odabiranja.

Ovo je oblast koju od sada primarno posmatramo.

VIII. POJAM \mathcal{Z} -TRANSFORMACIJE. INVERZNA \mathcal{Z} -TRANSFORMACIJA. \mathcal{Z} -TRANSFORMACIJA ELEMENTNARNIH SIGNALA

\mathcal{Z} - transformacija omogućava određivanje odziva diskretnog sistema na ulaznu diskretnu pobudu, kao i rješavanje diferencnih jednačina kojim se diskretni sistemi opisuju. Ona se može uvesti iz prethodne analize redno vezanih A/D i D/A konvertora. Naime, primjenom Laplasove transformacije na idealno odbirkovan signal, dobili smo izraz za **kompleksni lik povorke odbiraka**, odnosno

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} \quad (\text{VIII-.1})$$

U gornjem izrazu konfiguriše neracionalna (stepena) funkcija, koja umnog otežava analizu sistema (pronalazak polova, komentarisanje stabilnosti i sl.). Ovo ugrožava samu primjenu Laplasove transformacije, te se u tu član e^{sT} zamjenjuje **novom kompleksnom promjenljivom** z , odnosno

$$z \stackrel{\text{def}}{=} e^{sT} \quad (\text{VIII-.2})$$

Kompleksni lik povorke odbiraka dobija formu

$$F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (\text{VIII-.3})$$

te tako **možemo definisati \mathcal{Z} -transformaciju** kao

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (\text{VIII-.4})$$

pod uslovom da gornja suma **konvergira**.

Inverzna \mathcal{Z} -transformacija definiše se kao

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz \quad (\text{VIII-.5})$$

Inverznom \mathcal{Z} -transformacijom dobija se **vremenski diskretan signal** $f(k)$.

A. \mathcal{Z} -transformacija karakterističnih signala

1) Dirakov impulsni signal

Jedinični impulsni signal ima vrijednost 1 samo u tački $k = 0$, dok je svugdje ostalo vrijednost signala 0. Samim time, njegova \mathcal{Z} -transformacija postaje

$$\mathcal{Z}\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT)z^{-k} = z^0 = 1 \quad (\text{VIII-A.1})$$

2) Hevisajdov signal

S obzirom da diskretizovan Hevisajdov signal ima formulaciju

$$h(kT) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (\text{VIII-A.2})$$

njegova \mathcal{Z} -transformacija izgleda kao

$$\mathcal{Z}\{h(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-k}} = \frac{z}{z - 1} \quad (\text{VIII-A.3})$$

3) Rampa signal

Rampa signal formulisan je kao

$$r(kT) = \begin{cases} kT, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (\text{VIII-A.4})$$

\mathcal{Z} -transformacija rampa signala jeste

$$\mathcal{Z}\{r(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \dots = Tz(1 + 2z^{-1} + \dots) \quad (\text{VIII-A.5})$$

$$\mathcal{Z}\{r(kT)\} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (\text{VIII-A.6})$$

IX. OSNOVNE OSOBINE \mathcal{Z} -TRANSFORMACIJE

1) Linearnost \mathcal{Z} -transformacije

Linearnost \mathcal{Z} -transformacije proizilazi iz linearnosti operatora sume, odnosno

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) + \dots + a_n f_n(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) + \dots + a_n f_n(k)) z^{-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_1 f_1(k) z^{-k} + a_2 f_2(k) z^{-k} + \dots + a_n f_n(k) z^{-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_1 f_1(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_2 f_2(k) z^{-k} + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} a_n f_n(k) z^{-k} = \\
 &= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k} + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k) z^{-k} + \dots + a_n \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) z^{-k} = \\
 &= a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) + \dots + a_n F_n(z)
 \end{aligned} \tag{IX-.1}$$

2) Pomjeranje u vremenskom domenu - kašnjenje signala

\mathcal{Z} -transformacija signala koji kasni jeste

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z) \tag{IX-.2}$$

Dokaz slijedi iz

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{f(k-n)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) z^{-k} \stackrel{m=k-n}{=} \sum_{m=-n}^{\infty} f(m) z^{-(m+n)} \\
 &\stackrel{\text{Zbog kauzalnosti, } f(m)=0 \text{ za } m < 0}{=} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} z^{-n} = \\
 &= z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} = z^{-n} F(z)
 \end{aligned} \tag{IX-.3}$$

3) Pomjeranje u vremenskom domenu - prednjačenje signala

\mathcal{Z} -transformacija signala koji prednjači jeste

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} f(k) \tag{IX-.4}$$

Dokaz slijedi iz

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{f(k+n)\} &= z^n F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n) z^{-k} \stackrel{m=k+n}{=} \sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-(m-n)} = \\
 &= z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right) = \\
 &= z^n F(z) - z^n \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m}
 \end{aligned} \tag{IX-.5}$$

4) **Granična teorema - prva ili početna**

Ona govori da je

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0) \quad (\text{IX-.6})$$

Dokaz je trivijalan i slijedi iz same definicije \mathcal{Z} -transformacije

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} (f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots) = f(0) \quad (\text{IX-.7})$$

5) **Granična teorema - druga ili krajnja**

Druga granična teorema govori da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (\text{IX-.8})$$

Ako zapišemo povorku odbiraka signala do m -tog člana

$$\sum_{k=0}^m f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(m)z^{-m} \quad (\text{IX-.9})$$

i signala koji kasni

$$\sum_{k=0}^m f(k-1)z^{-k} = 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots + f(m-1)z^{-m} \quad (\text{IX-.10})$$

Oduzimanjem prethodno napisane dvije sume dobijamo

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^m f(k-1)z^{-k} = \\ & = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(m)z^{-m} - (f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots + f(m-1)z^{-m}) = \\ & = f(0)(1 - z^{-1}) + f(1)z^{-1}(1 - z^{-1}) + \dots + f(m-1)z^{-(m-1)}(1 - z^{-1}) + f(m)z^{-m} = \\ & = (1 - z^{-1})(f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots + f(m-1)z^{-(m-1)}) + f(m)z^{-m} \end{aligned} \quad (\text{IX-.11})$$

Ukoliko $z \rightarrow 1$, slijedi da će razlika suma biti

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\sum_{k=0}^m f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^m f(k-1)z^{-k} \right) = f(m) \quad (\text{IX-.12})$$

a ako $m \rightarrow \infty$, slijedi da je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (\text{IX-.13})$$

6) \mathcal{Z} -transformacija konvolucije signala

Konvolucija dva (kauzalna) diskretna signala definiše se kao

$$f(k) \star g(k) = \sum_{i=0}^k f(i)g(k-i) \quad (\text{IX-.14})$$

Dokaz - primjenom \mathcal{Z} -transformacije na konvoluciju signala dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k f(i)g(k-i)z^{-k} &\stackrel{\text{zbog kauzalnosti, } \sum_{i=0}^{\infty}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)z^{-k} \\ &\stackrel{m=k-i}{=} \sum_{m=-i}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(m)z^{-m}z^{-i} = \sum_{m=0}^{\infty} g(m)z^{-m} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} f(i)z^{-i} = \\ &= F(z)G(z) \end{aligned} \quad (\text{IX-.15})$$

7) Kompleksno pomjeranje

Kompleksno pomjeranje govori o osobini da

$$\mathcal{Z}\{f(k)e^{-akT}\} = F(ze^{aT}) \quad (\text{IX-.16})$$

Dokaz proizilazi iz same primjene \mathcal{Z} transformacije

$$\mathcal{Z}\{f(k)e^{-akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(ze^{aT})^{-k} = F(ze^{aT}) \quad (\text{IX-.17})$$

X. PRESLIKAVANJE PRIMARNOG POJASA IZ s -RAVNI U z -RAVAN

Osobine kontinualnih sistema automatskog upravljanja, kao što su **stabilnost**, **oscilatornost**, **vrijeme smirenja** i dr. mogu se odrediti na osnovu **položaja polova u kompleksnoj ravni**.

Na sličan način se mogu odrediti i karakteristike diskretnih sistema, a to činimo preslikavanjem s -ravni u z -ravan.

Dakle, preslikavanje iz s -ravni u z -ravan definisano je prema definiciji \mathcal{Z} -transformacije

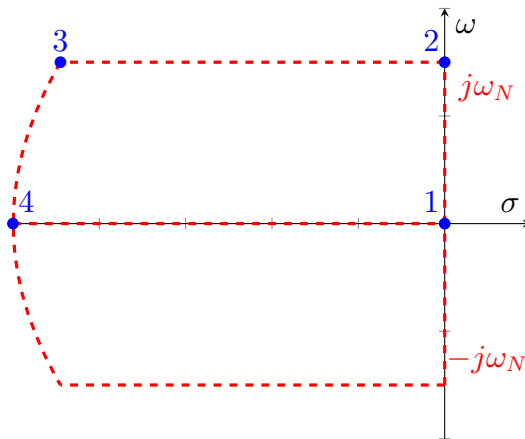
$$z = e^{sT} \quad (\text{X-1})$$

Ako umjesto s napišemo $\sigma + j\omega$, dobijamo da je z promjenljiva

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (\text{X-2})$$

Očigledno je da će modul kompleksne promjenljive z biti $e^{\sigma T}$, dok je argument jednak ωT . Ovi izrazi biće ključni pri preslikavanju s -ravni u z -ravan.

Oblast koju preslikavamo jeste Nikvistova primarna oblast, odnosno



Slika X.1: Nikvistova oblast.

Očigledno je da preslikavamo samo gornju polovinu oblasti jer je donja simetrična (te se i simetrično preslikava kao gornja polovina).

Preslikavanje ide redom

1) Preslikavanje dijela konture $1 \rightarrow 2$

Za tačke koje se nalaze između tačaka 1 i 2 važi da imaju isti realni dio i on je jednak 0. To će značiti da je

$$|z| = e^{0T} = 1 \quad (\text{X-3})$$

Što se tiče imaginarnog dijela, od se kreće od 0 do ω_N , te će argument biti

$$\arg z \in [0, \omega_N T] \implies \left[0, \frac{\omega_s T}{2}\right] \implies \left[0, \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right] \implies [0, \pi] \quad (\text{X-4})$$

Dakle, preslikavanjem dijela konture $1 \rightarrow 2$ dobijamo **polukružnicu radijusa 1 sa centrom u koordinatnom početku**.

2) **Preslikavanje dijela konture $2 \rightarrow 3$**

Za tačke koje se nalaze između tačaka 2 i 3 važi da imaju isti argument (jer je imaginarni dio s isti) i on je upravo π

$$\arg z = \pi \quad (\text{X-.5})$$

Što se tiče realnog dijela s promjenljive, on se mijenja od 0 do $-\infty$ kada idemo u smjeru od 2 do 3, te će moduo promjenljive z biti

$$|z| \in (e^{-\infty \cdot T}, e^{0 \cdot T}] \implies (0, 1] \quad (\text{X-.6})$$

Dakle, preslikavanjem dijela konture $2 \rightarrow 3$ dobijamo da se **sve tačke preslikavaju na dio imaginarne prave između -1 i 0 .**

3) **Preslikavanje dijela konture $3 \rightarrow 4$**

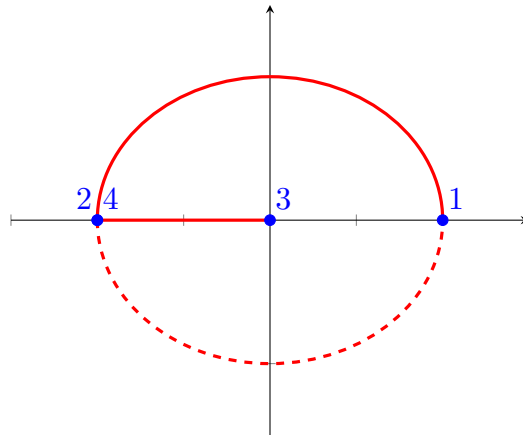
Realni dio svakog kompleksnog broja koji se nalazi između tačaka 3 i 4 jeste $-\infty$, što će značiti da će moduo kompleksne promjenljive z biti 0.

Dakle, preslikavanjem dijela $3 \rightarrow 4$ **sve tačke se slikaju u koordinatni početak.**

4) **Preslikavanje dijela konture $4 \rightarrow 1$**

Ovo preslikavanje je slično preslikavanju $2 \rightarrow 3$, samo što se vrši u suprotnom smjeru. Iz toga dobijamo zaključak da se **sve tačke između tačaka 4 i 1 slikaju u tačke između 0 i 1, u z -ravni.**

Izgled preslikane konture jeste



Slika X.2: Preslikana kontura u z -ravni.

XI. PRESLIKAVANJE PRAVE VREMENA SMIRENJA, PRESLIKAVANJE KONTURE KONSTANTNIH FREKVENCIJA

XII. PRESLIKAVANJE POLOŽAJA POLOVA I VREMENSKOG ODZIVA

XIII. STABILNOST DISKRETNIH SISTEMA