Diskretizacija kontinualnih signala

Proces odabiranja – diskretizacija u vremenu

Većina prirodnih signala su kontinualne prirode i da bi se izvršila njihova obrada na računaru, potrebno je izvršiti njihovu konverziju u digitalni oblik. Osnovna operacija kojom se kontinualni signali prevode u diskretne je diskretizacija po vremenu ili odabiranje (engl. *sampling*):

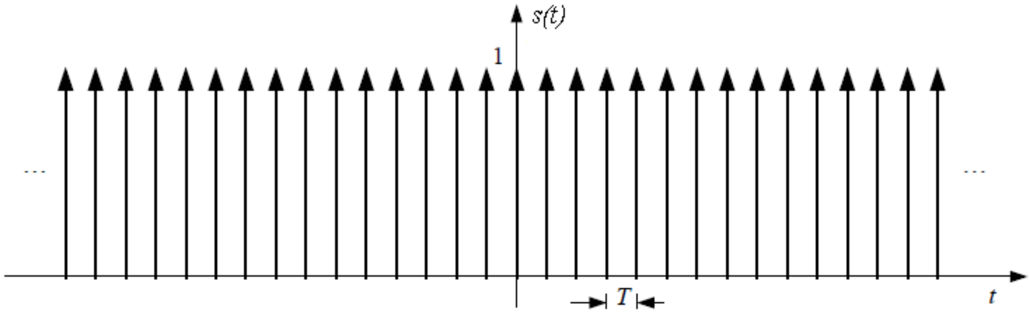
$$x[k] = x(t)\big|_{t=kT} = x(kT)$$

gde je:

$x(kT)$ - vrednost kontinualnog signala $x(t)$ u trenutku odabiranja, a
T – perioda odabiranja.

Idealizovani proces odabiranja se može predstaviti kao množenje kontinualnog signala $x(t)$ sa periodičnom povorkom Dirakovih impulsa

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$



Slika *Periodična povorka Dirakovih impulsa*

Na taj način se dobija takozvani idealno diskretizovani signal $x_s(t)$:

$$x_s(t) = x(t)\cdot s(t) = x(t)\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

Furijeova transformacije signala $x_s(t)$ je:

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot s(t)e^{-j\omega t}dt$$

Razvojem periodičnog signala $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ u Furijeov red:

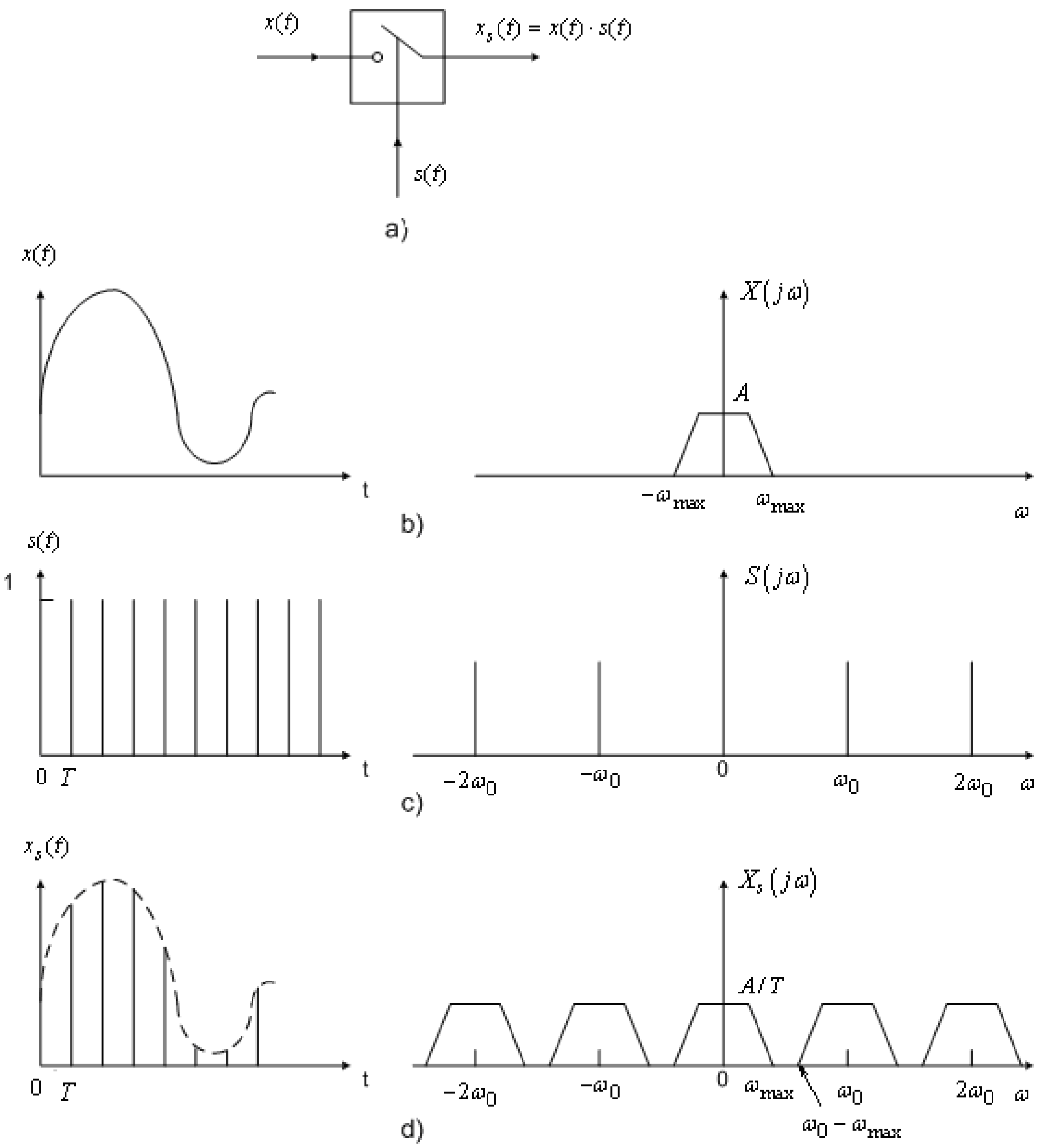
$$s_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}$$

gde je $\omega_0 = 2\pi / T$, i zamenom u (4) dobijamo:

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt =$$

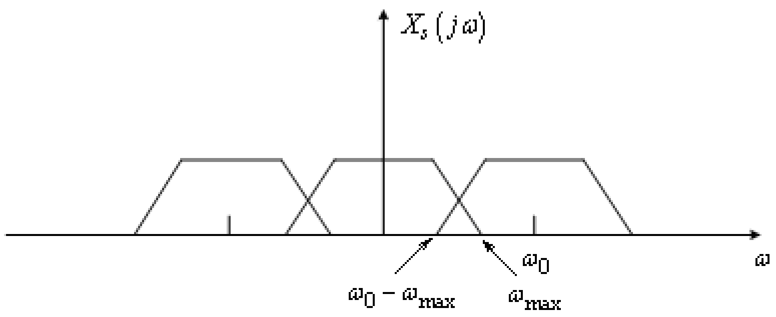
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - n\omega_0)t}dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega - n\omega_0)\right) = X\left(e^{j\Omega}\right)$$

Iz poslednje jednačine se vidi da spektar diskretnog signala predstavlja beskonačnu sumu periodično ponovljenih spektara kontinualnog signala pomnoženih sa 1/*T*.

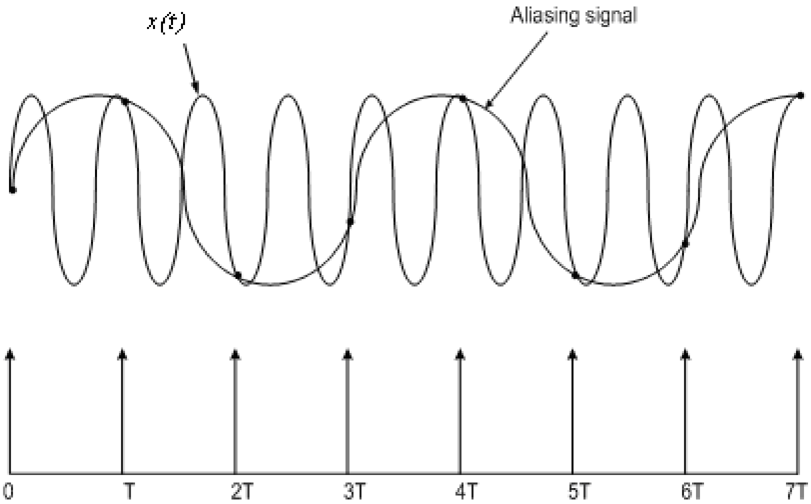


Slika Ilustracija procesa odabiranja bez efekta preklapanja: a) šematski prikaz; b) kontinualni signal $x(t)$ i njegov spektar $X\left(j\omega\right)$; c) periodična povorka Dirakovih impulsa $s(t)$ i njen spektar $S\left(j\omega\right)$; d) diskretni signal $x_s(t)$ i spektar diskretnog signala $X_s\left(j\omega\right)$

Izvesti teoremu o odabiranju
Aliasing, antialiasing filtar



Slika Ilustracija pojave aliasinga u frekvencijskom domenu



Slika Ilustracija pojave aliasinga u vremenskom domenu – dva signala različitih učestanosti imaju iste vrednosti u trenucima odabiranja

Spektar diskretnog signala – veza između kontinualne i diskretne učestanosti

Furijeova transformacija diskretnog signala i inverzna Furijeova transformacija diskretnog signala

Furijeova transformacije idealno diskretizovanog signala $x_s(t)$ je:

$$X_s(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\omega T}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}=X\left(e^{j\Omega}\right)$$

Sa Ω je označena diskretna učestanost, koja je sa kontinualnom kružnom učestanošću u sledećoj vezi:

$$\Omega=\omega T$$

Furijeova transformacija diskretnog signala je:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}.$$

$X\left(e^{j\Omega}\right)$ predstavlja frekvencijski sadržaj signala $x(n)$, odnosno njegovu dekompoziciju na frekvencijske komponente. Za razliku od signala $x(n)$ koji je diskretne prirode, njegova Furijeova transformacija $X\left(e^{j\Omega}\right)$ je kontinualna funkcija. Osim toga ona je i periodična funkcija sa periodom 2π. Kada je poznat spektar $X\left(e^{j\Omega}\right)$, signal $x(n)$ se može odrediti primenom inverzne Furijeove transformacije:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Elementarni diskretni signali

Postoji čitava klasa signala diskretnih u vremenu koja je vrlo korisna u cilju analize signala i sistema.

Jedinična odskočna funkcija

Diskretna jedinična odskočna funkcija se uobičajeno obeležava kao i definiše se na sledeći način:

Zadaci

1. Odrediti Furijeove transformacije sledećih diskretnih signala:
   a) $x(n)=\delta(n)$, gde je $\delta(n)$ Dirakov delta impuls,
   b) $x(n)=\delta(n-m)$
   c) $x(n)=a^n h(n)$, $|a|<1$,
   d) $x(n)=(n+1)a^n h(n)$, $|a|<1$ i
   e) $x(n)=\dfrac{a^n\sin\left((n+1)\Omega_p\right)}{\sin\left(\Omega_p\right)}h(n),\ |a|<1$

Rešenje:

a) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-jn\Omega}=1\cdot e^{-j\Omega 0}=1$

b) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-m)e^{-jn\Omega}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(p)e^{-j\Omega p}e^{-j\Omega m}=e^{-j\Omega m}$

c) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n h(n)e^{-jn\Omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j\Omega}\right)^n=\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$

d) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+1)a^n h(n)e^{-jn\Omega}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(ae^{-j\Omega}\right)^n$

Ako su svi izvodi funkcije f_n neprekidni i ako red $\sum f_n^{'}$ konvergira, tada je:

$$\sum f_n^{'}=\left(\sum f_n\right)^{'}$$

U našem slučaju je $f_n=\left(ae^{-j\Omega}\right)^n$, pa ako primenimo ovo pravilo, dobijamo:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(ae^{-j\Omega}\right)^n=\frac{1}{\left(1-ae^{-j\Omega}\right)^2}$$

e)

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\sin\left((n+1)\Omega_p\right)}{\sin\Omega_p}e^{-jn\Omega}=$$

$$=\frac{1}{\sin\Omega_p}\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{e^{j(n+1)\Omega_p}-e^{-j(n+1)\Omega_p}}{2j}e^{-j\Omega n}=$$

$$=\frac{1}{2j\sin\Omega_p}\left[e^{j\Omega_p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{j\Omega_p}e^{-j\Omega}\right)^n-e^{-j\Omega_p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j\Omega_p}e^{-j\Omega}\right)^n\right]=$$

$$=\frac{1}{2j\sin\Omega_p}\left[\frac{e^{j\Omega_p}}{1-ae^{j\Omega_p}e^{-j\Omega}}-\frac{e^{-j\Omega_p}}{1-ae^{-j\Omega_p}e^{-j\Omega}}\right]$$

Posle sređivanja ovog izraza dobija se:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-2a\cos\Omega_p e^{-j\Omega}+a^2e^{-j2\Omega}}$$

2. Odrediti signal čija je Furijeova transformacija

$$X(e^{j\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|\le\Omega_{c1}\\ 1/2, & \Omega_{c1}<|\Omega<|\Omega_{c2}\\ 0, & \Omega_{c2}\le|\Omega|<\pi\end{cases}$$

Rešenje

Inverzna Furijeova transformacija diskretnog signala je:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}}\frac{1}{2}e^{j\Omega n}d\Omega+\int_{-\Omega_{c1}}^{\Omega_{c1}}e^{j\Omega n}d\Omega+\int_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}}\frac{1}{2}e^{j\Omega n}d\Omega\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Bigg|_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}}+\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Bigg|_{-\Omega_{c1}}^{\Omega_{c1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Bigg|_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\sin\left(\Omega_{c1}n\right)+\frac{1}{2n\pi}\sin\left(\Omega_{c2}n\right)$$

3. Dat je signal

$$x(t)=\begin{cases}0,\ 0\le t<1\,s\\ 1,\ 1s\le t<2s\\ e^{-(t-2)},\ t\ge 2s\end{cases}$$

a) Odrediti Furijeovu transformaciju signala *x(t).*
b) Diskretizovati signal *x(t)* sa periodom odabiranja *T* = 250 ms. Odrediti Furijeovu transformaciju tako diskretizovanog signala.

Rešenje:

a)

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{1}^{2}e^{-j\omega t}dt+\int_{2}^{\infty}e^{-(t-2)}e^{-j\omega t}dt=$$

$$=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Bigg|_{1}^{2}-e^{2}\frac{1}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)t}\Bigg|_{2}^{\infty}=\frac{e^{-j\omega}(1+j\omega)-e^{-j2\omega}}{j\omega(1+j\omega)}$$

b)

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}=\sum_{n=4}^{7}e^{-jn\Omega}+\sum_{n=8}^{\infty}e^{-(nT-2)}e^{-jn\Omega}=$$

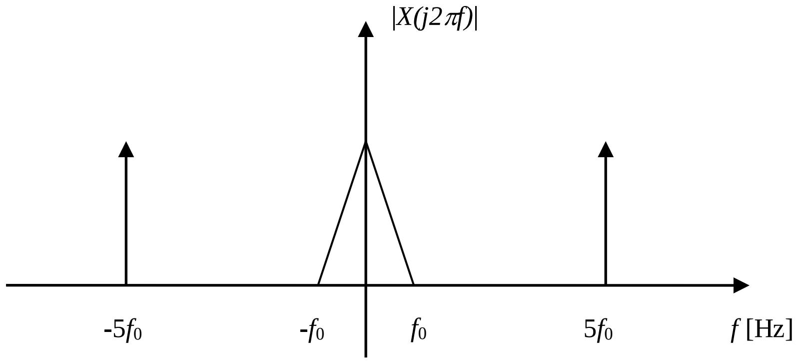
$$=\sum_{n=0}^{7}e^{-jn\Omega}-\sum_{n=0}^{3}e^{-jn\Omega}+e^{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(T+j\Omega)n}-e^{2}\sum_{n=0}^{7}e^{-(T+j\Omega)n}=$$

$$=\frac{1-e^{-j8\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}-\frac{1-e^{-j4\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}+\frac{e^{2}}{1-e^{-T-j\Omega}}-\frac{e^{2}(1-e^{-8(T+j\Omega)})}{1-e^{-(T+j\Omega)}}$$

Za *T* = 250 ms dobija se:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{-j4\Omega}-e^{-j8\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}+\frac{e^{-j8\Omega}}{1-e^{-0.25}e^{-j\Omega}}$$

4. Na slici je prikazan spektar jednog signala. Učestanosti od interesa su u opsegu od 0 do f_0. Poremećaj ima konstantnu učestanost f_p=5f_0.

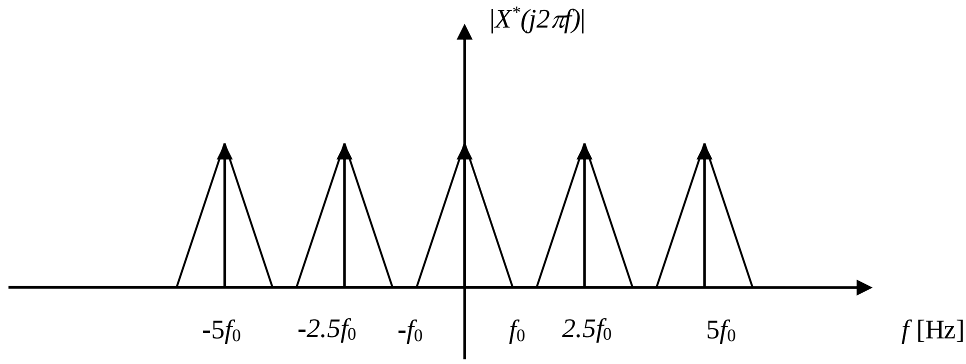


Slika *Amplitudski spektar signala x(t)*

a) Nacrtati spektar idealno diskretizovanog signala ako je $f_s=2.5f_0$, gde je f_s frekvencija odabiranja.
b) Nacrtati spektar idealno diskretizovanog signala ako je $f_s=3.5f_0$.
c) Odrediti intervale u kojima mora da se nalazi frekvencija odabiranja kako ne bi došlo do preklapanja spektra korisnog signala sa spektrom šuma u spektru idealno diskretizovanog signala.

Rešenje:

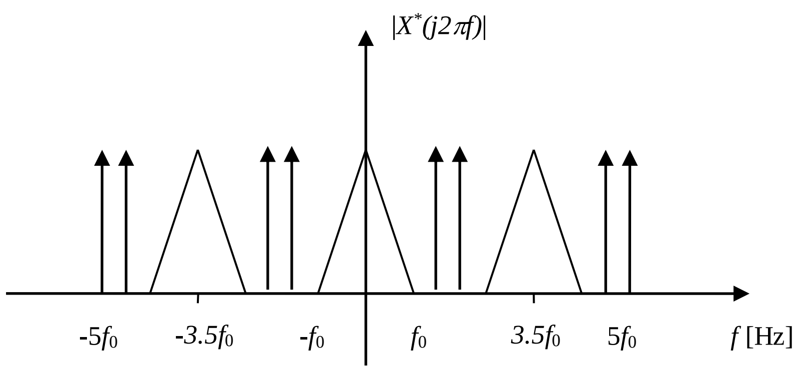
a) Spektar diskretnog signala za $f_s=2.5f_0$:



Slika *Spektar idealno diskretizovanog signala ako je* $f_s=2.5f_0$

Kao što se vidi sa slike, dolazi do preklapanja spektra korisnog signala sa spektrom šuma što znači da frekvencija odabiranja nije dobro odabrana.

b) Spektar diskretnog signala za $f_s=3.5f_0$:



Slika *Spektar idealno diskretizovanog signala ako je f_s=3.5f_0*

c) Obeležićemo sa f_n frekvenciju na kojoj se nalazi šum, tj. $f_n = 5f_0$. Kako ne bi došlo do preklapanja spektra šuma sa spektrom korisnog signala mora da važi:

$$f_n - nf_s \notin [-f_0, f_0]$$
$$-f_n + nf_s \notin [-f_0, f_0]$$

odnosno

$$f_n + f_0 < nf_s \ \vee \ f_n - f_0 > nf_s \ \Rightarrow$$
$$6f_0 < nf_s \ \vee \ 4f_0 > nf_s \ \Rightarrow$$
$$f_s > \frac{6f_0}{n} \ \vee \ f_s < \frac{4f_0}{n}$$

Za

$$n = 2 \ \ f_s > 3f_0 \ \vee \ f_s < 2f_0$$
$$n = 3 \ \ f_s > 2f_0 \ \vee \ f_s < \frac{4}{3}f_0$$
$$n = 4 \ \ f_s > \frac{3}{2}f_0 \ \vee \ f_s < f_0 \cdots$$

Na osnovu ovoga, dolazimo do zaključka da frekvencija odabiranja može biti u sledećem opsegu:

$$f_s \in (3f_0, 4f_0) \cup (6f_0, \infty)$$

5. Dat je signal $c(t) = A\cos\omega_0 t$.
   a) Odrediti Furijeovu transformaciju signala nacrtati njegov spektar.
   b) Nacrtati spektar signala $f(t) = 10\cos(2\pi t) + 10\cos(4\pi t)$.
   c) Signal $f(t)$ se dovodi na ulaz odabirača sa periodom odabiranja T= 0.2s. Nacrtati spektar idealno diskretizovanog signala.
   d) Tako idealno diskretizovan signal se dovodi na ulaz sistema opisanog funkcijom prenosa $G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$. Odrediti amplitudsku i faznu karakteristiku ovog sistema i nacrtati spektar signala na njegovom izlazu.

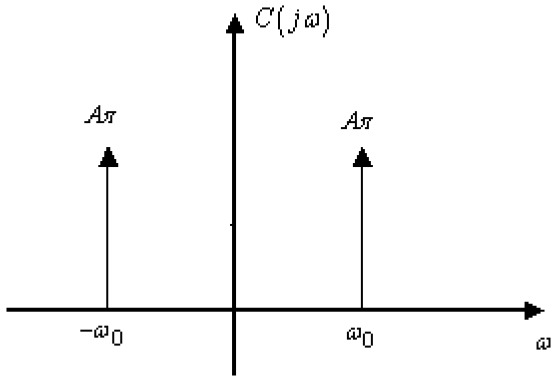
Rešenje:

a)

$$C(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-j\omega t}dt = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt + \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt$$

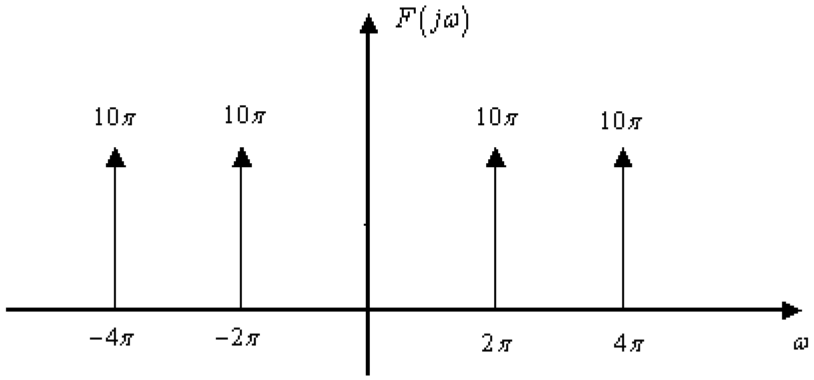
Nakon uvođenja smene $\tau = -t$, uzimajući u obzir da je $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega$ dobijamo:

$$C(j\omega) = A\pi\delta(\omega-\omega_0) + A\pi\delta(\omega+\omega_0)$$



Slika Spektar kosinusoide *c(t) = Acosω_0t*

b) $f(t)=10\cos(2\pi t)+10\cos(4\pi t)$



Slika Spektar signala $f(t)=10\cos(2\pi t)+10\cos(4\pi t)$

c) $T=0.2s \Rightarrow \omega_s=\dfrac{2\pi}{T}=10\pi\left[rad/s\right]$ frekvencija semplovanja

Slika spektra diskretnog signala

d) Slika – odabiranje i kolo zadrške

$G(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ je funkcija prenosa kola zadrške nultog reda

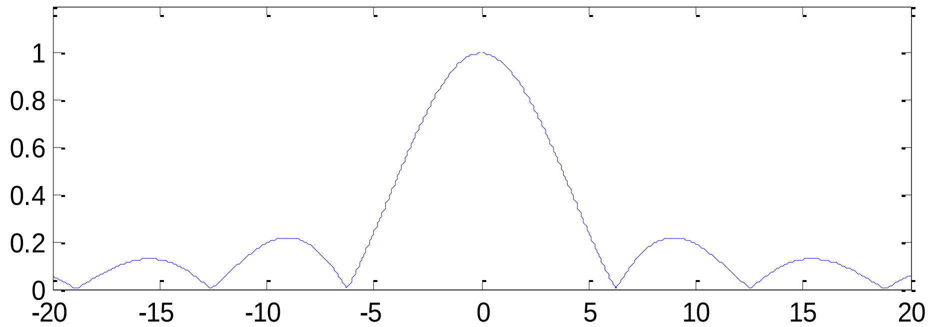
$$G(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{e^{-j\omega T/2}\cdot 2j\sin(\omega T/2)}{j\omega}=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}e^{-j\omega T/2}$$

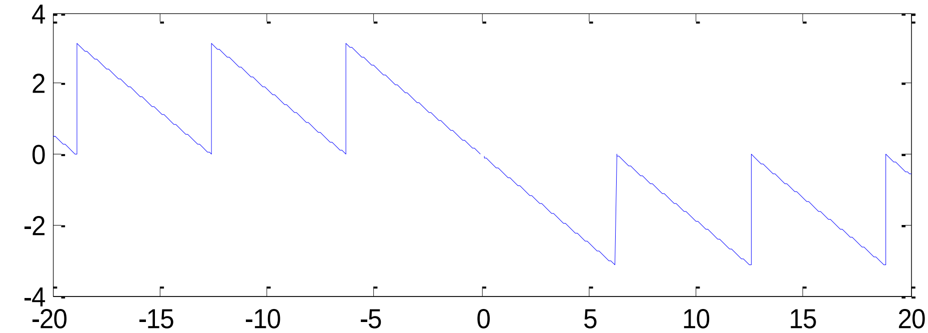
Amplitudska karakteristika je:

$$|G(j\omega)|=T\left|\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right|,$$

a fazna:

$$\varphi(\omega)=-\frac{\omega T}{2}+\arg\left\{\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right\}$$





Slike Amplitudska i fazna karakteristika kola zadrške nultog reda za T=1s

6. Dat je kontinualni signal $x(t) = \sin(2\pi ft + \pi/6)$. Ako je učestanost sinusoide f=200 Hz, a učestanost odabiranja f_s = 8 kHz, kolika je "diskretna" ugaona učestanost Ω i "diskretna" frekvencija F sinusnog niza koji se dobija odabiranjem kontinualnog signala?

Rešenje:

Diskretna frekvencija F se računa kao $F = \frac{f}{f_s} = \frac{200}{8000} = \frac{1}{40}$, a diskretna ugaona učestanost Ω kao $\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}[rad]$.

7. Dat je signal $x(t) = e^{-t}h(t)$.
   a) Analitički odrediti Furijeovu transformaciju ovog signala. Skicirati amplitudsku karakteristiku.
   b) Diskretizovati signal $x(t)$ sa periodom T. Analitički odrediti Furijeovu transfomaciju diskretnog signala. Skicirati spektar diskretnog signala u slučaju da je zadovoljena teorema o odabiranju i u slučaju da ova teorema nije zadovoljena. Komentarisati dobijene rezultate.

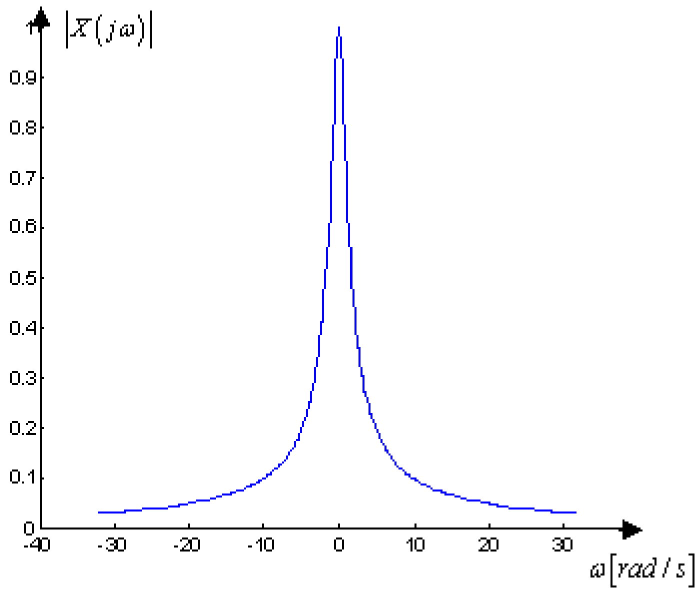
Rešenje:

a) Furijeova transformacija signala $x(t)$ je:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt = -\frac{1}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega}$$

Amplitudska karakteristika je

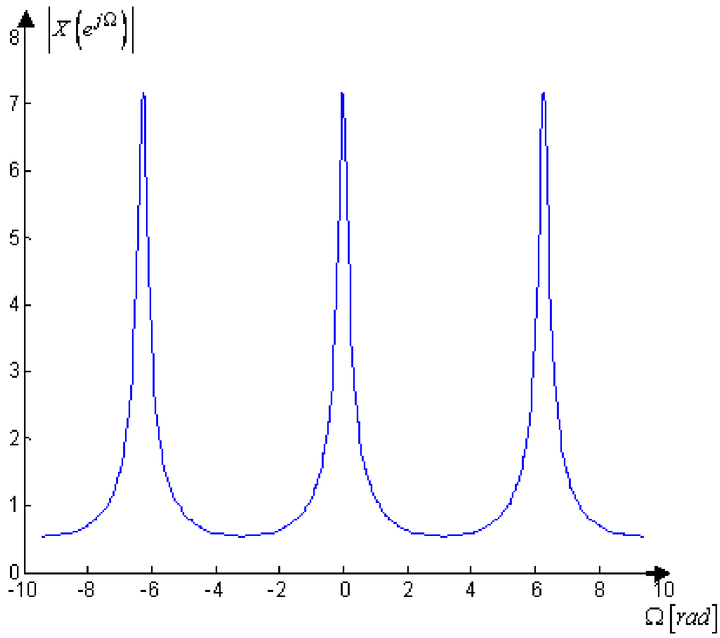
$$\left|X(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$



b) Furijeova transformacija diskretnog signala je

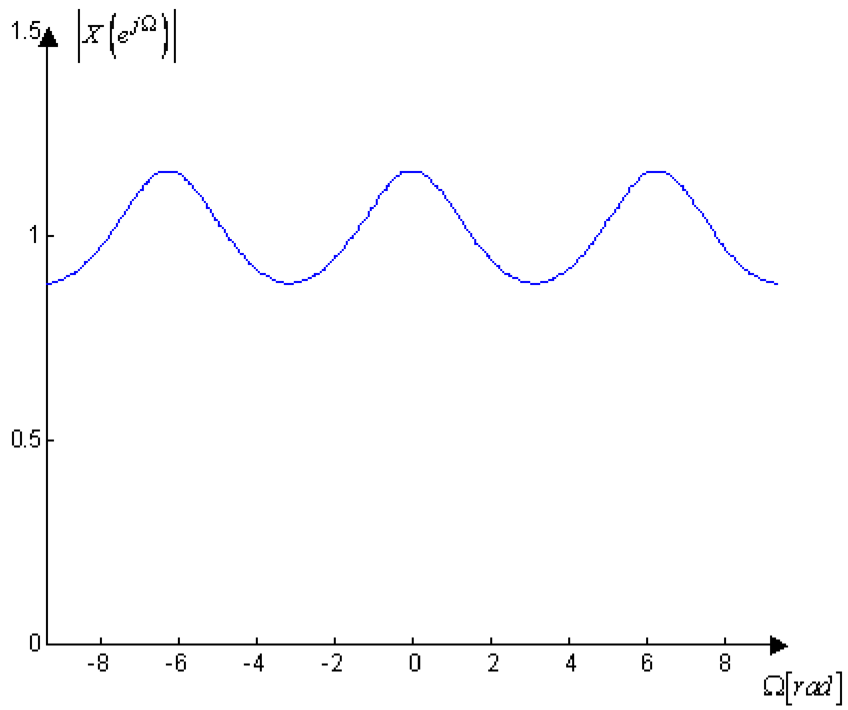
$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(T+j\Omega)n} = \frac{1}{1-e^{-(T+j\Omega)}}$$

U slučaju da je perioda odabiranja dobro izabrana, tj. u slučaju da je zadovoljena teorema o odabiranju, spektar diskretnog signala će biti kao na sledećoj slici.



U ovom slučaju je moguće izdvojiti spektar kontinualnog signala iz spektra diskretnog signala pomoću niskofrekventnog filtra.

U slučaju velike periode odabiranja, teorema o odabiranju neće biti zadovoljena i doćiće do preklapanja spektara (engl. *aliasing*) pri periodičnom produženju spektra kontinualnog signala (slika).



8. Na ulaz anti-aliasing fltera dovodi se kauzalni signal $x(t)=0.5^t$. Frekvencijska karakteristika filtra je data sa $H(j\omega)=\begin{cases}1, & -5\,rad/s<\omega<5\,rad/s\\ 0, & drugde\end{cases}$.

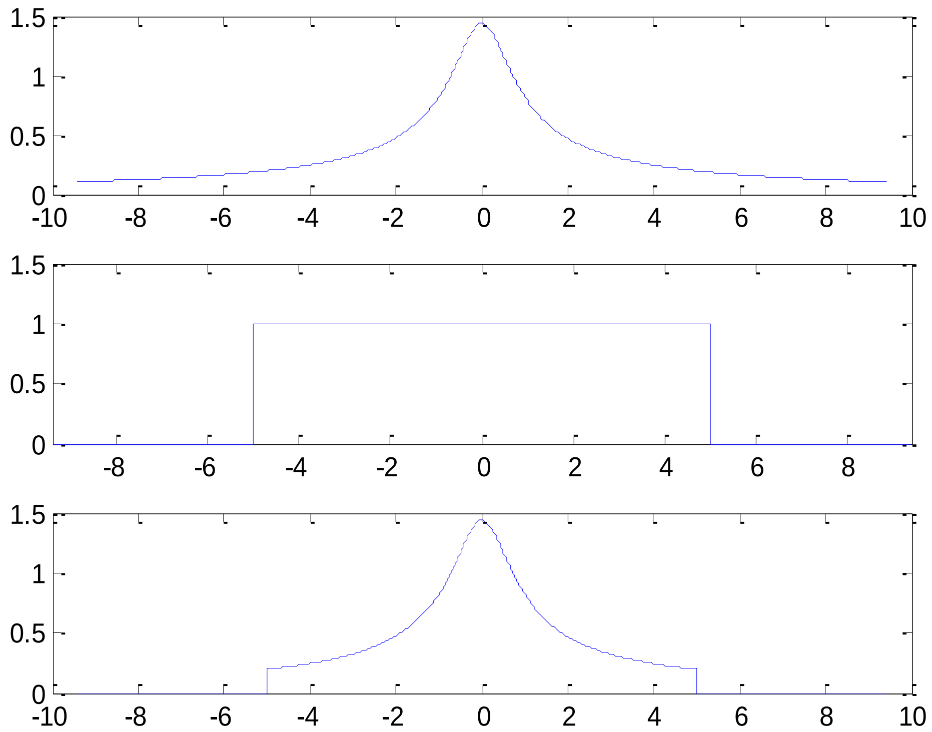
   a) Odrediti Furijeovu transformaciju signala.
   b) Skicirati spektar signala na ulazu filtra, amplitudsku karakteristiku filtra i spektar signala na izlazu filtra.

Rešenje:

   a) Furijeova transformacija signala $x(t)=0.5^t$ je:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}0.5^t e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}\left(0.5e^{-j\omega}\right)^t dt=\left.\frac{\left(0.5e^{-j\omega}\right)^t}{\ln\left(0.5e^{-j\omega}\right)}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{j\omega-\ln 0.5}$$

   b) Amplitudska karakteristika signala na ulazu, amplitudska karakteristika filtra, kao i amplitudska karakteristika signala na izlazu, prikazane su na sledećoj slici.



9. Furijeova transformacija kauzalnog signala $x(t) = 0.1^t$ je $X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega - \ln 0.1}$. Odabiranjem ovog signala dobija se diskretni niz $x(n) = 0.1^{nT} h(n)$, čija je Furijeova transformacija $X(e^{j\Omega}) = \dfrac{1}{1 - 0.1^T e^{j\Omega}}$. Crtanjem amplitudskih spektara kontinualnog i diskretnog signala odrediti vrednost periode T za koju se iz diskretnog signala može rekonstruisati analogni signal i za koju se to ne može uraditi.