Prirodno - granični uslovi i Bolca problem

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

15. decembar 2022.

1 Prirodno granični uslovi

U dinamičkoj optimizaciji kriterijum optimalosti se definiše na sledeći način:

$$I = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

gde t predstavlja nezavisno promenljivu, $x(t)$ predstavlja zavisno promenljivu funkciju, $\dot{x}(t)$ predstavlja prvi izvod funkcije $x(t)$ po t i tkđ. je zavisno promenljiva funkcija, a podintegralna funkcija $F(t, x(t), \dot{x}(t))$ se naziva funkcionalom.

Da bi postojola ekstremala $x(t)$, funkcionala F, potrebno je da važi **Ojler-Lagranžova jednačina**, pod uslovom da su vrednosti $x(a)$ i $x(b)$ poznate:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.$$

U zavisnosti od vrednosti $x(a)$ i $x(b)$, odnosno u zavisnosti da li su nam poznate njihove vrednosti, posmatraćemo četiri slučaja:

1. $x(a) = x_a$ **i** $x(b) = x_b$
   $\delta x_a = 0$ i $\delta x_b = 0$
   U ovom slučaju potreban uslov jeste da je zadovoljena Ojler-Lagranževa jednačina:
   $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.$$
2. $x(a) = x_a$ **i** $x(b)$ **nije poznato**
   $\delta x_a = 0$ i $\delta x_b \neq 0$
   U ovom slučaju pored potrebnih uslova, moraju da važe i prirodno - granični uslovi:
   $$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b} = 0.$$
3. $x(a)$ **nije poznato i** $x(b) = x_b$

$\delta x_a \neq 0$ i $\delta x_b = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a} = 0.$$

4. $x(a)$ **i** $x(b)$ **nisu poznati**
   $\delta x_a \neq 0$ i $\delta x_b \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b} = 0.$$

1.1 Zadaci

1. Pronaći ekstremalu funkcionala, $x(t)$, koja integralu:

$$I = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)dt,$$

saopštava ekstremnu vrednost, ako je $x(0) = 1$, a $x(1)$ nije poznato.
Prvo je potrebno da formiramo Ojler-Lagranževu jednačinu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\ddot{x}$$

Dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$2x - 2\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} - 1 = 0$$

Diferencijalnu jednačinu rešavamo, formiranjem karakteristične jednačine:

$$m^2 - 1 = 0$$
$$m = \pm 1$$

Pošto su koreni karakteristične jednačine realni i prosti, u skladu sa tim, formiramo opšte rešenje:

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

Sada uvrštavamo vrednost kada je $t = 0$:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$
$$x(0) = C_1 + C_2 = 1 \to C_1 = 1 - C_2$$

Pošto nam $x(1)$ nije poznato, potrebno je da važi prirodno-granični uslov:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=1} = 2\dot{x} = 0$$
$$2\dot{x}(1) = 2(C_1 e^t - C_2 e^- t) = 0$$

Sada, na osnovu uslova, možemo da odredimo konstante C_1 i C_2:

$$C_1 e - C_2 e^{-1} = 0$$
$$(1 - C_2)e - C_2 e^{-1} = 0$$
$$C_2(e + e - 1) = e$$
$$C_2 = \frac{e}{e + e^{-1}}$$
$$C_1 = 1 - C_2$$
$$C_1 = 1 - \frac{e}{e + e^{-1}}$$
$$C_1 = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}}$$

Uvrštavanjem vrednosti C_1 i C_2, dobijamo izraz za ekstremalu:

$$x(t) = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}} e^t + \frac{e}{e + e^{-1}} e^{-t}$$

2. Naći krivu minimalne dužine, koja spaja tačku sa koordinatama $A(2, 3)$ i pravu $x = 5$.

   Kriterijum optimalnosti u ovom slučaju je

   $$I = \int_s ds,$$

   gde ds računamo po sledećem obrascu:

   $$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{dx^2(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} \\ &= \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \\ &= \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx. \end{aligned}$$

   Odavde sledi da je kriterijum optimalnosti

   $$I = \int_2^5 \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Formiramo jednačinu za potreban uslov, na osnovu našeg kriterijuma optimalnosti:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}}2\dot{y} = C_1$$
$$\frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} = C_1$$
$$\dot{y}^2 = \frac{C_1}{1-C_1} = C_2$$
$$\dot{y} = \sqrt{C_2} = C_3$$
$$y(x) = C_3 x + C_4$$

Uvrštavamo vrednost za $x = 2$:

$$y(2) = 2C_3 + C_4$$

Pošto nam $y(5)$ nije poznato, potrebno je da važi sledeći prirodno - granični uslov, kada je $x = 5$:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}|_{x=5} = 0$$

Sada možemo da odredimo naše konstante C_3 i C_4:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{C_3}{\sqrt{1+C_3^2}} = 0$$
$$C_3 = 0 \rightarrow C_4 = 3$$

Odavde sledi, da je naša ekstremala:

$$y(x) = 3$$

2 Bolca problem

Kriterijum optimalnosti Bolca problem definiše se na sledeći način:

$$I = \psi(x(a), x(b)) + \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

gdje $x(a)$ predstavlja početni trenutak, a $x(b)$ krajnji trenutak. Potreban uslov da bi imali ekstremalu $x(t)$ jeste da je prva varijacija jednaka nuli:

$$\delta I = 0$$

$$\delta I = \frac{\partial \psi}{\partial x(a)}\delta x(a) + \frac{\partial \psi}{\partial x(b)}\delta x(b) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_a^b + \int_a^b \Big[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big]\delta x dt$$

Ukoliko nam $x(a)$ i $x(b)$ nisu poznati, moraju biti zadovoljeni sledeći Bolcini granični uslovi:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x(a)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a} = 0$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x(b)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b} = 0$$

2.1 Zadaci

3. Odrediti ekstremalu $x(t)$, ako je $I = 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) + \int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4xsin(t))dt$, a $x(0)$ i $x(\pi) =$ nisu specificirani. Na samom početku potrebno je da formiramo Ojler-Lagranžovu jednačinu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4sin(t)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\ddot{x}$$
$$2x - 4sin(t) - 2\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} - x = -2sin(t)$$

Pošto se radi o nehomogenoj diferencijalnoj jednačini, potrebno je da odredimo homogeno i partikularno rešenje diferencijalne jednačine:

$$m^2 - 1 = 0$$
$$m = \pm 1$$

Na osnovu rešenja karakteristične jednačine, dobijamo opšti oblik homogenog rešenja:

$$x_h(t) = C_1e^t + C_2e^-t$$

Pošto je $f(x) = -sin(t)$, formiramo opšti oblik partikularnog rešenja:

$$x_p(t) = Acos(t) + Bsin(t)$$
$$\dot{x}_p(t) = -Asin(t) + Bcos(t)$$
$$\ddot{x}_p(t) = -Acos(t) - Bsin(t)$$

Uvrštavanjem drugog izvoda $x_p(t)$ i opšteg oblika $x_p(t)$ možemo odredi konstante A i B:

$$-2Acos(t) - 2Bsin(t) = -2sin(t)$$
$$B = 1,$$
$$A = 0$$

Opšti oblik ekstremale $x(t)$, dobijamo sabiranjem homogenog i partikularnog rešenja:

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^-t + sin(t)$$

Da bi smo odredili konstante C_1 i C_2, mora da važi Bolcin granični uslovi:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x(a)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a} = 0$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x(b)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b} = 0$$

Odnosno, za naš slučaj, dobijamo sledeće uslove:

$$4x(0) - 2\dot{x}(0) = 0$$
$$2 - 2x(\pi) + 2\dot{x}(\pi) = 0$$

Uvrštavanjem vrednosti kada je $t = 0$ i $t = \pi$, dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$4(C_1 + C_2) - 2(C_1 - C_2 + 1) = 0$$
$$2C_1 + 6C_2 = 2$$

$$2 - 2(C_1e^\pi + C_2e^{-\pi}) + 2(C_1e^\pi - C_2e^-\pi - 1) = 0$$
$$2 - 4C_2e^-\pi - 2 = 0$$

Rešavanjem sistema jednačina, dobijamo vrednosti za C_1 i C_2:

$$C_2 = 0$$
$$C_1 = 1$$

Konačno, naša ekstremala je:

$$x(t) = e^t + sin(t).$$

4. Naći minimum integrala $I = \frac{A}{2}x^2(0) + \int_0^1 (\frac{\dot{x}^2}{2} + x)dt$, gdje je $A = const$. Ako su:

(a) $x(0) = 1$, $x(1) = \frac{3}{2}$

(b) $x(0)$ i $x(1)$ nisu specificirani.

Formiramo Ojler-Lagrančevu jednačinu:

(a) $x(0) = 1$, $x(1) = \frac{3}{2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \ddot{x}$$

Dobili smo diferencijalnu jednačinu drugog reda, čijim rešavanjem dobijamo opšti oblik $x(t)$:

$$1 - \ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} = 1 / \int dt$$
$$\dot{x} = t + C_1 / \int dt$$
$$x(t) = t^2 + C_1 t + C_2$$

Uvrštavanjem vrednosti za $t = 0$ i $t = 1$, dobićemo vrednosti konstanti C_1 i C_2:

$$x(0) = C_2 = 1$$
$$x(1) = \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = \frac{3}{2}$$
$$C_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Dobijamo izraz za našu ekstremalu $x(t)$:

$$x(t) = t^2 + 1$$
$$\dot{x} = 2t$$

Da bismo odredili minimalnu vrednost integrala, potrebno je da $x(t)$ uvrstimo u naš početni integral I:

$$I = \frac{A}{2} + \int_0^1 (\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} + 1)dt$$
$$I = \frac{A}{2} + (\frac{t^3}{3} + t)|_0^1$$
$$I = \frac{A}{2} + \frac{4}{3}$$

(b) $x(0)$ i $x(1)$ nisu specificirani.
Ponavljamo postupak iz prethodnog zadatka, te formiramo Ojler-Lagranževu jednačinu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \ddot{x}$$

Rešavamo diferencijalnu jednačinu drugog reda, kako bismo dobili opšti oblik $x(t)$:

$$1 - \ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} = 1 / \int dt$$
$$\dot{x} = t + C_1 / \int dt$$
$$x(t) = t^2 + C_1 t + C_2$$

Pošto nam vrednosti x nisu poznate za $t = 0$ i $t = 1$, moraju da nam važe prirodno-granični uslovi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x(a)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=a} = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x(b)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t=b} = 0$$

$$Ax(0) - \dot{x}(0) = 0$$
$$\dot{x}(b) = 0$$

Daljim rešavanjem graničnih uslova, dobijamo sledeći sistem jednačina, odakle dalje možemo da odredimo C_1 i C_2:

$$\dot{x}(t) = t + C_1$$
$$AC_2 - C_1 = 0$$
$$C_1 = AC_2$$
$$\dot{x}(b) = \dot{x}(1) = 1 + C_1 = 0$$
$$C_1 = -1$$
$$C_2 = -\frac{1}{A}$$

Dobijamo sledeći izraz za ekstremalu $x(t)$:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{A}$$
$$\dot{x}(t) = t - 1$$

Minimum integrala, odredićemo uvrštavanjem x(t) u početni integral:

$$I = \frac{A}{2}\frac{1}{A^2} + \int_0^1 (\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{A})dt$$
$$I = \frac{1}{2A} + \int_0^1 (\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{A})dt$$
$$I = \frac{1}{2A} + \frac{t^3}{3} - t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{A}t\Big|_0^1$$
$$I = -\frac{1}{2A} - \frac{1}{6}$$