Transformacije signala

Vremenski i frekvencijski domen obezbeđuju komplementarne informacije o istom signalu.

Furijeov red

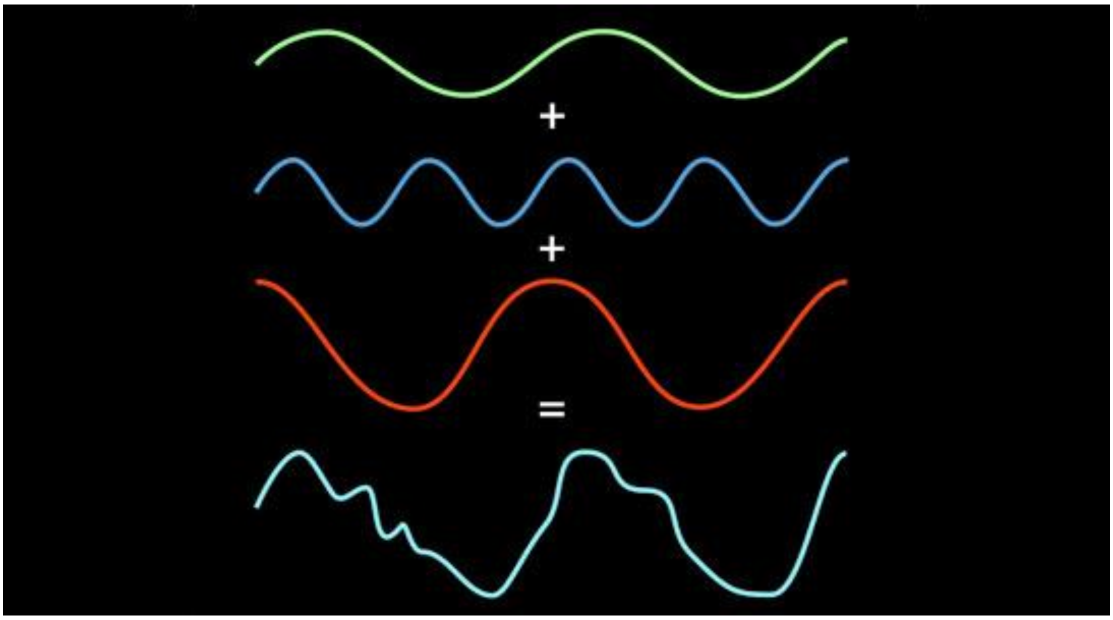
Svaki periodični signal *f(t)* može da se predstavi kao suma beskonačno mnogo sinusoida i kosinusoida različitih frekvencija i amplituda:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

gde su:

$\omega_0 = 2\pi / T_p$ osnovni (prvi) harmonik, a

T_p perioda signala.



Slika 1

Koeficjenti a_n i b_n se određuju na sledeći način:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Možemo primetiti da je a_0 konstanta koja je jednaka srednjoj vrednosti signala $f(t)$ u toku jedne periode, Signal $f(t)$ može da se predstavi i u eksponencijalnoj formi:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t}$$

gde su:

$$d_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Koeficjent d_n je kompleksna veličina, pri čemu njen moduo predstavlja amplitudu n-tog harmonika, a faza predstavlja fazu n-tog harmonika.

Periodični signal može da se razvije u Furijeov red i na sledeći način:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n),$$

pri čemu je A_n amplituda *n*-tog harmonika, a φ_n faza *n*-tog harmonika. Veze između ova dva zapisa su sledeće:

$$A_0 = |d_0|$$
$$A_n = 2|d_n|$$
$$\varphi_n = \arg\{d_n\}$$

Snaga nultog harmonika je $P_0 = A_0^2$, a snaga *n*-tog $P_n = \frac{1}{2} A_n^2$. Ukupna snaga signala izražena preko snaga pojedinih harmaonika je:

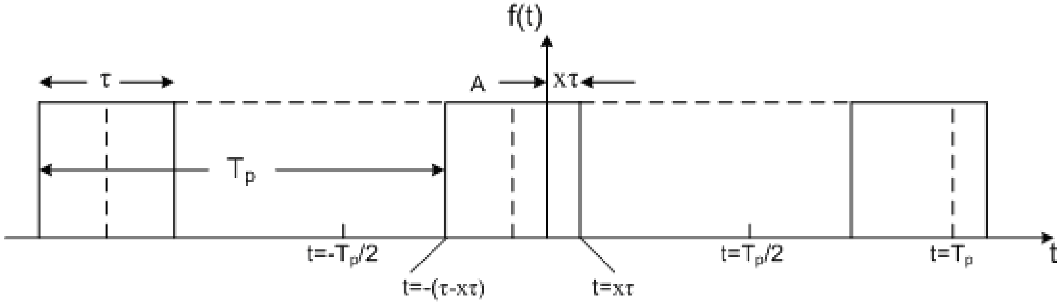
$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 .$$

Ukupna snaga signal može da se izračuna i na sledeći način:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt .$$

Zadaci

1. Na slici 1 prikazan je jedan periodičan signal.



Slika 2

a) Razviti ovaj signal u Furijeov red.
b) Za vrednosti parametara $\tau = T_p / 5$ i $x = 0$ nacrtati amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.

Rešenje:

a) Razvijamo signal u Furijeov red, pri čemu je:

$$d_n = \frac{1}{T_p}\int_{x\tau-\tau}^{x\tau} Ae^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{A}{-jn\omega_0 T_p} e^{-jn\omega_0 t}\Bigg|_{x\tau-\tau}^{x\tau} = \frac{A}{jn\omega_0 T_p} e^{-jn\omega_0 x\tau}(e^{jn\omega_0\tau}-1) =$$

$$= \frac{A}{jn\omega_0 T_p} e^{-jn\omega_0 x\tau} e^{jn\omega_0\tau/2} 2j\sin(n\omega_0\tau/2) = \frac{A\tau}{T_p}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} e^{jn\omega_0(0.5-x)\tau}$$

Koeficjenti d_n su kompleksni brojevi, čiji su moduli:

$$|d_n| = \frac{A\tau}{T_p}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$

a argumenti:

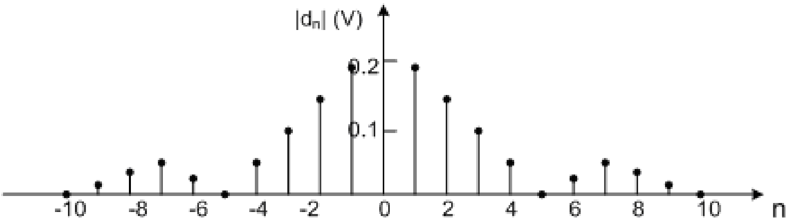
$$\phi_n = n\omega_0(0.5-x)\tau$$

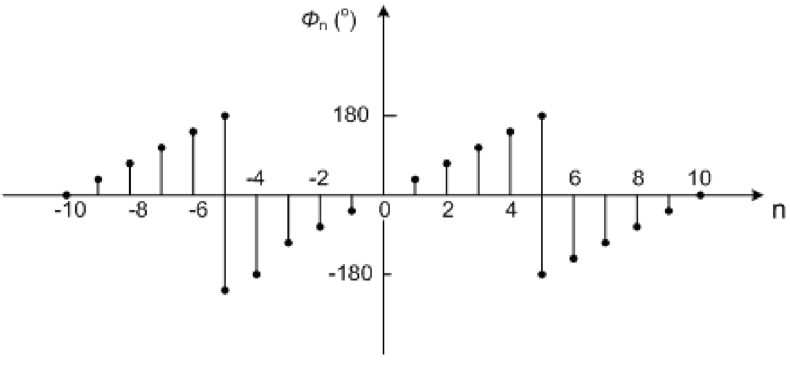
b) Funkcija $|d_n| = \frac{A\tau}{T_p}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$ ima vrednost nula za

$$\frac{n\omega_0\tau}{2} = k\pi \Rightarrow n = \frac{2k\pi}{\omega_0\tau} = \frac{kT_p}{\tau}$$, pošto je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$.

Za $\tau = \frac{T_p}{5} \Rightarrow n = 5k$.

Amplitudski i fazni spektar prikazani su na slici 2.





Slika 3

Slika 1. *Amplitudski i fazni spektar periodične povorke pravougaonih impulsa*

2. Periodični signal, periode T, definisan je u intervalu (-T/2, T/2) izrazom: $f(t) = Ae^{\alpha t}$

a) Razviti signal $f(t)$ u Furijeov red.
b) Odrediti odnos snage prvog harmonika i ukupne snage ako je faza drugog harmonika π/4.

Rešenje:

a)

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Ae^{\alpha t}e^{-jn\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{(\alpha - jn\omega_0)t}dt = \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{\alpha - jn\omega_0}e^{(\alpha - jn\omega_0)t}\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

Posle kraćeg sređivanja, ako uzmemo u obzir da je $\omega_0 = 2\pi / T$, dobijamo:

$$d_n = \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{\alpha - jn\omega_0}(e^{\alpha T/2} - e^{-\alpha T/2})e^{jn\pi},$$

pa je moduo

$$|d_n| = \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + n^2\omega_0^2}}(e^{\alpha T/2} - e^{-\alpha T/2}),$$

a argument

$$\arg\{d_n\} = n\pi + arctg\,\frac{n\omega_0}{\alpha}.$$

b) Faza drugog harmonika je

$$\arg\{d_2\} = 2\pi + arctg\,\frac{2\omega_0}{\alpha} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow arctg\,\frac{2\omega_0}{\alpha} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\omega_0}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 2\omega_0 = \frac{4\pi}{T}$$

Snaga prvog harmaonika je:

$$P_1 = \frac{1}{2}A_1^2 = \frac{1}{2}\cdot(2|d_1|)^2 = 2|d_1|^2 = 2(A\frac{e^{\alpha T/2} - e^{-\alpha T/2}}{T\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}})^2$$

Uvođenjem smene $\alpha = \frac{4\pi}{T}$ i $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, dobija se:

$$P_1 = \frac{(e^{2\pi} - e^{-2\pi})^2}{10\pi^2}A^2 = 2.9054\cdot 10^3\,A^2$$

Ukupna snaga signala je:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{2\alpha t}dt = \frac{A^2}{T}\cdot\frac{1}{2\alpha}\cdot e^{2\alpha t}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = ... = 11.409\cdot 10^3\,A^2$$

Odnos snage prvog harmonika i ukupne snage je:

$$\frac{P_1}{P} = 0.2547$$

3. Signali $s_m(t),\ m = 1, 2$, periode T su definisani u intervalu (-T/2, T/2) izrazom:

$$s_m(t) = \begin{cases} f_m(t), & |t| \le T/4 \\ 0, & |t| > T/4 \end{cases}$$

gde su:

$$f_1(t) = A_1, \quad \text{a} \quad f_2(t) = A_2\left(1 - \frac{4|t|}{T}\right).$$

Razviti ove signale u Furijeove redove. Odrediti odnos snaga jednosmerne komponente i prvog harmonika prema ukupnoj snazi signala. Ukupne snage signala $s_1(t)$ i $s_2(t)$ su jednake.

Rešenje:

Za signal $s_1(t)$:

koeficjenti Furijeovog reda su: $d_{n1} = \dfrac{A_1}{2} \dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}}$,

ukupna snaga: $P_{uk1} = \dfrac{A_1^2}{2} = P$,

snaga nultog harmonika: $P_{01} = \dfrac{A_1^2}{4} = \dfrac{P}{2}$

snaga prvog harmonika: $P_{11} = \dfrac{2A_1^2}{\pi^2} = \dfrac{4P}{\pi^2}$

Odavde sledi:

$$\frac{P_{01}}{P_{uk1}} = 0.5 \ \text{ i } \ \frac{P_{11}}{P_{uk1}} = 0.4053$$

Za signal $s_2(t)$:

koeficjenti Furijeovog reda su: $d_{n2} = \dfrac{A_2}{4} \left(\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{\frac{n\pi}{4}} \right)^2$,

ukupna snaga: $P_{uk2} = \dfrac{A_2^2}{6} = P$, snaga nultog harmonika: $P_{02} = \dfrac{3P}{8}$

snaga prvog harmonika: $P_{12} = \dfrac{48P}{\pi^4}$

Odavde sledi:

$$\frac{P_{02}}{P_{uk2}} = \frac{3}{8} = 0.375 \text{ i } \frac{P_{12}}{P_{uk2}} = 0.4928$$

4. Za svaki od sledećih periodičnih signala odrediti osnovnu učestanost ω_0 i Furijeove koeficjente:

a) $x(t) = \sin(3t + \pi/4)$

b) $x(t) = \sin 2t + \cos 4t$

c) $x(t) = |\sin 2t|$

d) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-a(t-k)}\left[u(t-k) - u(t-1-k)\right]$

Za filtar $H(jn\omega_0) = \begin{cases} 1, & |n| \le 1 \\ 0, & |n| > 1 \end{cases}$, naći odziv $y(t)$ na pobudu $x(t)$.

Rešenje:

a) Osnovna učestanost je $\omega_0 = 3\,rad/s$. Furijeovi koeficjenti mogu se odrediti na sledeći način:

$$x(t) = \sin(3t + \pi/4) = \sin 3t \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos 3t \cdot \sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{2j} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{e^{j3t} + e^{-j3t}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right)e^{j3t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j3t} =$$

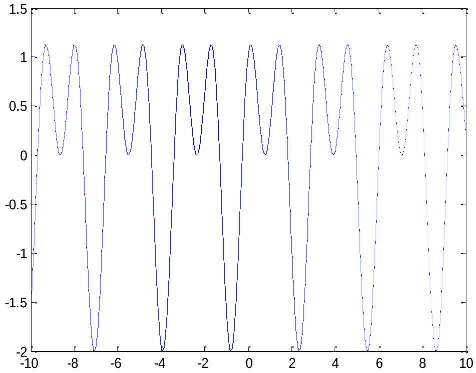
$$= \frac{(1-j)\sqrt{2}}{4}e^{j3t} + \frac{(1+j)\sqrt{2}}{4}e^{-j3t}$$

odakle se vidi da su $d_{-1} = \dfrac{(1+j)\sqrt{2}}{4}$, $d_1 = \dfrac{(1-j)\sqrt{2}}{4}$.

b) Signal $x(t)$ je prikazan na slici, a može da se napiše na sledeći način

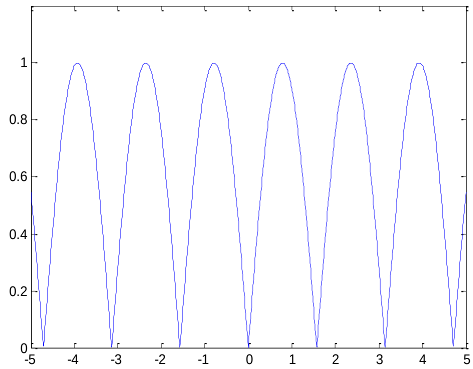
$$x(t) = \sin 2t + \cos 4t = \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} + \frac{e^{j4t} + e^{-j4t}}{2} = -\frac{j}{2}e^{j2t} + \frac{j}{2}e^{-j2t} + \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t},$$

odakle se vidi da je osnovna učestanost $\omega_0 = 2\,rad/s$, perioda $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \pi$, a Furijeovi koeficjenti $d_1 = -\dfrac{j}{2}$, $d_{-1} = \dfrac{j}{2}$, $d_2 = \dfrac{1}{2}$, $d_{-2} = \dfrac{1}{2}$.



Slika 4

c) Signal $x(t)$ je prikazan na sledećoj slici.



Slika 5

Učestanost ovog signala je dva puta veća od učestanosti signala $\sin 2t$, pa je osnovna učestanost $\omega_0 = 4 rad/s$, a perioda $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Furijeove koeficjente možemo odrediti na sledeći način:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sin 2t \cdot e^{-j4nt}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} \cdot e^{-j4nt}dt =$$

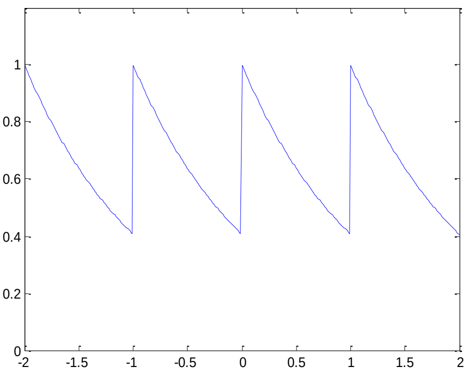
$$= \frac{1}{2jT}\int_0^T e^{j2(1-2n)t}dt - \frac{1}{2jT}\int_0^T e^{-j2(1+2n)t}dt =$$

$$= \frac{1}{2jT} \cdot \frac{1}{2(1-2n)} e^{j2(1-2n)t}\Big|_0^T + \frac{1}{2jT} \cdot \frac{1}{2(1+2n)} e^{-j2(1+2n)t}\Big|_0^T =$$

$$= \frac{1}{4T(1-2n)} \cdot \left(1 - e^{j2(1-2n)T}\right) + \frac{1}{4T(1+2n)} \cdot \left(1 - e^{-j2(1+2n)T}\right)$$

Kako je $T = \frac{\pi}{2}$ i uzimajući u obzir da je $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$ i $e^{-j2n\pi} = 1$ za $n \in \mathbf{Z}$, dobijamo da su koeficjenti $d_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4n^2}$.

d) Signal $x(t)$ je prikazan na sledećoj slici



Slika 6

Perioda signala je $T = 1s$, a osnovna učestanost je tada $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \, rad/s$.

Furijeovi koeficjenti su:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-at}\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-(a+jn\omega_0)t}dt =$$

$$= -\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{(a+jn\omega_0)}e^{-(a+jn\omega_0)t}\Big|_0^T = \frac{1-e^{-a}}{a+j2\pi n}$$