Моделирање и симулација система

1. Основни појмови моделирања и симулације. Модел и теорија.

Модел – логички приказ неког реалног система.

<u>Моделирање и симулацију чине низ активности за прављење модела реалног система и његову симулацију на рачунару. Моделовање је процес који на основу реалног система прави његов модел, док симулација тај модел поставља у рачунар и омогућава експериментисање.</u>

Реалан систем: Уређен и међузависан скуп компоненти које формирају целину и делују заједнички да би остварили циљ или функцију. Може бити постојећи или планиран за будућност (замишљен). Представља извор података о понашању – потребних за формирање модела. Понашање је битно ако се може забележити.

Модел: Погодан начин представљања укупног човековог искуства и његовог начина размишљања о систему који истражује. Модел је резултат моделирања. Апстракција реалности – упрошћена, идеализована (У једном делу реалности - за нас релевантан. Не може да обухвати све аспекте). Садржи изабране елементе и карактеристике система значајне за истраживање (Укључујући и уведене претпоставке о условима ваљаности модела).

Моделирање: је начин представе о реалном систему у облику којим се може манипулисати. Брине о ваљаности модела тј. колико добро модел репрезентује посматрани систем. Ради недвосмисленог представљања система користи се формалним описима – карактеристике система се представљају променљивим, а везе између променљивих математичким функцијама чиме се представљају везе унутар система, као и везе са околином.

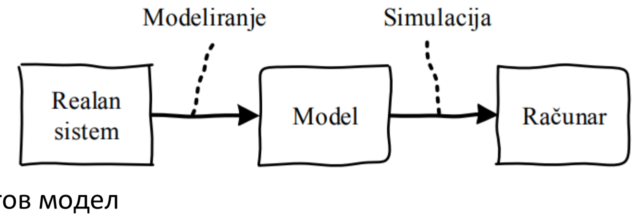
Симулација: одређивање понашања модела на основу вредности улаза (или скупа описних променљивих). Симулација се спроводи: 1.Аналитички 2.Нумерички 3.Експериментом. Рачунарска симулација <=> експерименти на рачунару (Укључује и изградњу апстрактног модела – програмирање).

Теорија је општи исказ принципа изведен из посматрања система и података добијених посматрањем. а) неопходан елеменат који повезује модел и систем, б) објашњава понашање система, ц) омогућава предвиђање закључака који се могу проверити. Теорија служи да: а)објасни понашање система, б)се изгради модел на основу кључних елемената теорије. Теоријом модел се: предвиђа, објашњава, повезује са системом.

Модел је само предочена (приказана) теорија: конкретан је за разлику од теорије и омогућава да се теорија провери на делу (модел = пример на коме се та теорија потврђује; теорија је општа). Модел не може постојати ако нема теорије, теорија мора бити претходно формулисана. Модел поједностављује и апстракује неке кључне елементе теорије.

Подпитања:

Који су главни елементи? Нацртати цртеж



Шта је моделовање?

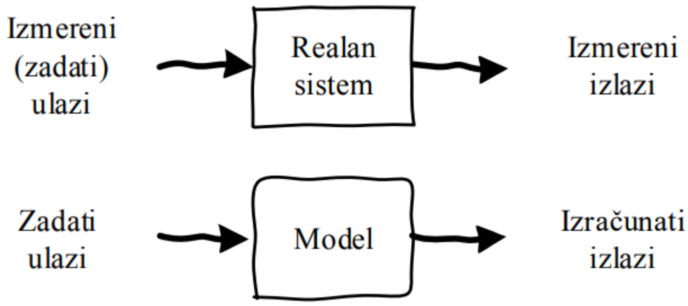
процес који на основу реалног система прави његов модел

Шта је модел?

Шта је експериментални оквир?

експериментални оквир - границе у којима посматрамо реалан систем

Слика модел и реалан систем →



Шта је симулација?

Шта је студија симулације?

Шта је рачунарска симулација?

Зашто модел не може без теорије?

2. Фазе моделовања и симулације. Неформалан и формалан опис модела.

Процес формирања и употребе модела:

1. разумевање система и вршење мерења

како реалан систем ради; врше се експерименти на реалном систему у циљу мерења података о понашању система, то се обично ради аутоматизованим поступком прикупљања података, па је потребно изабрати она понашања система која су релевантна за наше истраживање датог система. Селекција релевантних понашања је често дуг и напоран посао, али је битно да се сваки податак добро анализира, јер бирањем лоших података у овој фази моделовања може довести до заблуда о раду система касније; најскупља фаза

2. формирање теорије

Теорија се користи да опише хипотезе о понашању стварности. Обично се примењују знања из фундаменталних истраживања науке: познати закони природних наука, највише физике, примењених научних дисциплина. Уколико теорија датог система није позната, потребно ју је формулисати пре него што се крене на следећу фазу моделовања. Од правилног избора теорије даље зависи поступак формирања модела; уколико је теорија погрешно формулисана, модел неће бити ваљан.

3. формирање неформалног модела

Формирање модела започиње формирањем неформалног модела. Он даје основне податке о моделу, брзо и лако се формира и његово формирање је потпуно препуштено моделару.

4. разрада у формалан модел

Разрађивањем нефоралног модела ствара се формалан модел. Он је јасан и прецизан, потпуно описује систем на недвосмислен начин. Користи се математичко-логички записи.

5. изградња симулационог модела

На основу формалног модела изграђује се симулациони модел, тј формални модел се прилагоди извршавању на рачунару. Математички модел (из формалног модела) се преписује у рачунарски програм који користи нумерички алгоритам за решавање система једначина и тај програм је заправо симулациони модел. За његову израду се могу користити програмски језици опште намене или се користе симулациони програмски алати специјализоване намене.

6. тестирање и верификација модела

Верификација модела је провера да ли се модел понаша онако како је замислио моделар.
Посматра се поклапање података измерних у реалном систему и података добијених на основу модела.
Апсолутно подударање је немогуће, али се очекује да грешка буде мања од неког задатог максималног одступања.

7. симулације (у ужем смислу) и прикупљање симулационих резултата

Покретање симулације више пута, задавањем другачијих улаза и параметара модела се добијају тражена понашања као резултат извршавања програма. Код симулације у ужем смислу се врше измене програмског кода симулационог програма. Симулација укључује неколико подкорака: планирање експеримента на рачунару, извршавање симулационог програма и анализу добијених резултата (и формирање документације).

8. анализа резултата и формирање документације

анализа (студија) симулације се састоји из више изведених симулационих експеримената.

Свака симулација (укључујући и студију симулације) треба да је поновљива. Резултати симулације за исти симулациони модел и истим улазним вредностима и параметрима мора бити исти.
Цео процес је често итеративан (Лош исход неке фазе нас враћа у претходне фазе)

Неформалан опис даје основне појмове о моделу. Формалан опис користи методологије моделирања – ослања се на конвенције и правила (Одређује тип посматраних објеката на јасан и недвосмислен начин коришћењем математичких формула).

Неформалан модел: Уводи: Објекте (градивне јединице модела, тј делови који сачињавају модел), Описне променљиве (описују стања објеката и њихове карактеристике), Правила интеракције објеката (опис међусобних утицаја објеката). Избор је препуштен моделару: али резултат треба да је ваљан модел. Особине неформалног модела: Брзо и лако се формира, Најчешће је: нејасан (постоје акције непознатог редоследа), некомплетан (не описује све ситуације), неконзистентан (постоји више правила која се могу применити у истој ситуацији).

Формалан модел: Треба да обезбеди већу прецизност и потпуност описа модела. Употребљава апстракције (усредсређује пажњу на битне особине модела). Научно-инжењерски приступ:
а)Изградња модела (формализација), б)Употреба модела (анализа добијених резултата).

Подпитања:

Кораци?

Базни модел?

савршен модел

Експериментални оквир?

Експериментални оквир је уопштен појам којим се наглашава да је понашање система посматрано у жељеним границама

Односи се на границе у понашању система, а тиме се модел везује за такав оквир

Објаснити итеративни поступак

Шта уводи неформални, а шта формални модел?

Лоше особине неформалног модела

Зашто су потребни формалан и неформалан модел?

Шта садржи неформалан модел?

основне појмове о моделу: објекте, описне променљиве, правила интеракције објеката

Зашто је моделовање итеративни процес?

3. Класификације модела.

Бројне су – разни критеријуми се односе на:
– Природу променљивих и опсеге вредности
– Опсег вредности времена
– Временску зависност модела
– Детерминизам
– Линеарност
– Формалан опис модела
– “Опипљивост” модела
– Стање равнотеже ...

a) Физички и Апстрактни (Физички модели су материјалне репрезентације истраживаног система засноване на аналогији физичких закона. Апстрактни модели су симболична, вербална и математичко-логичка репрезентација система.);
b) Линеарни и нелинеарни модели (Линеарни модели мењају стања и дају излазе поштујући линеарне трансформације);
c) Статички и Динамички модели (Статички модели дају излазе модела за систем у равнотежи – стационарно стање. Описују се алгебарским једначинама. Динамички модели дају промене изазване активностима у систему. Описују се диференцијалним једначинама.);
d) Континуалног и Дискретног стања (Модели са континуланим стањима - Описне променљиве узимају вредности опсега реалних бројева. Модели са дискретним стањима - описне променљиве узимају вредности из скупова чији су елементни дискретне вредности. Модели са мешовитим стањима);
e) Стохастички и Детерминистички (Да ли модел садржи случајне променљиве? Ако су излази модела увек исти за исте улазе и стање модела = детерминистички модел. Супротно, стохастички модел = недетерминистички. Модел са барем једном стохастичком променљивом = стохастички модел.);
f) Аутономни или Неаутономни;
g) Инваријантни и варијантни (Уколико се структура модела или правила интеракције мењају са временом. Временски променљив – варијантан, временски непроменљив - инваријантан).
h) Временски континуални и временски дискретни модели – скуп вредности које прима променљива „време“ може бити: а) непребројив – временски континуалан и б) пребројив – временски дискретан
Симулација временски континуалан модел преводи у временски дискретан

Подпитања:

По којим особинама можемо да поделимо модел?

Какве функције преноса могу да буду?

$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ временски дискретна функција преноса

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ континуална функција преноса

Шта је стохастички модел?

формира се када постоји променљива коју је претешко описати
садржи у себи случајно генерисане променљиве које примају случајно генерисану вредност
свако ново покретање симулације генерише нове вредности, које утичу на израчунавање излаза

Шта је квази-статички (=квази-динамички) модел?

статички модел који се мења током времена
трајања прелазних процеса кратка у односу на промене вредности на улазима
посматрају се промене вредности променљивих стања у устаљеном стању током времена

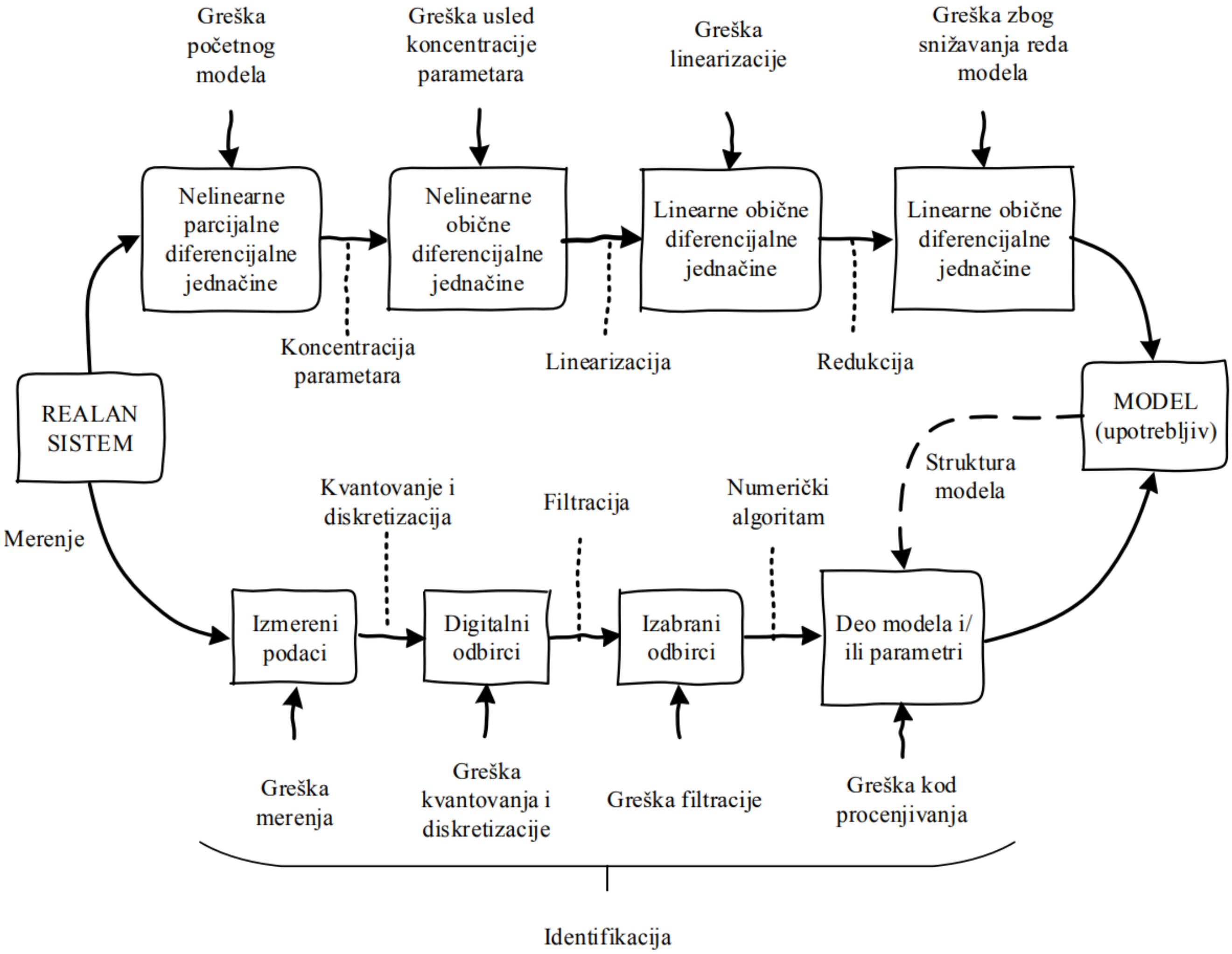
Како можемо да испитамо ваљаност код стохастичког модела?

мора се спровести низ експеримената са истим вредностима на улазима
резултат се статистички обради, посметрају се стање вредности и расипања

Динамички модел?

описује се диференцијалним једначинама
време се може мењати скоковито или континуално

4. Пример процеса добијања математичког модела. Поједностављење модела.



Подпитања:

Блок шема са обе гране, описати поступак, који је лакши, а који је прецизнији; да ли је редослед битан?

Који се кораци могу изоставити?

- На основу теорије се могу одмах писати једначине
- у реалности се не морају применити све трансформације, нити морају да иду тим редоследом
- може се десити да почетни модел прво редукујемо, па линеаризујемо

Како се поједностављује модел?

- неки од примењљивих техника су:
  - одбацивање делова модела
  - поједностављивање правила итерације
  - груписање компоненте у веће целине
  - увођење случајних промењљивих

Који модел је најпростији, а који најтачнији?

- груби модел је најпростији, базни је најсавршенији

Где користимо измерене податке?

- у процесу идентификације
- измерени подаци се преводе у бројне вредности процесом квантовања и дискретизације

Написати модел са улазом *u* и излазом *y* и „*a*“ као параметром?

$$a_n\, y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) = a_m\, u^m(t) + \cdots + a_0 u(t) \qquad n \geq m$$

5. Верификација и ваљаност модела. Степени подударања модела.

Верификација модела је провера да ли се модел понаша онако како је замислио моделар.
Ваљаност (исправност) модела говори колико верно модел представља реалан систем - даје степен поклапања резултата симулације и измереног понашања реалног система. Проверава се у којој се мери модел поклапа са понашањем реалног система. Моделирање се брине колико добро модел репрезентује систем. Проверавају се програм(и) и подаци. Дефинише се степен подударања: Апсолутно подударање је немогуће. Разлике су последица апроксимација.

$$\mathcal{J} = \sum_{po\ svim\ slučajevima(i)} \ \sum_{po\ svim\ izlazima(k)} \left\| y_{i,k} - d_{i,k} \right\|$$

$\mathcal{J}$ је мера разлике (број), *y* измерени излази из система, а *d* израчунати излази

Базни модел – ($\mathcal{J}$ = 0) Апсолутно је ваљан, не може се практично реализовати. Модел који укључује све промењљиве и везе међу њима.
Сажети модел: Поједностављен базни модел је сажети или груби модел (Односи се на изабран експеримантални оквир – границе у којима посматрамо реалан систем).
Степени ваљаности модела:

Репликативна ваљаност (најнижи степен - Пореде се излази модела и система);

Предиктивна ваљаност (Модел производи добре вредности на излазима пре него што се могу измерити у реалном систему. Омогућава истраживање ситуација које нису посматране у систему);

Структурна ваљаност (Модел у потпуности осликава начин на који реалан систем функционише. Омогућава истраживање операција система које се не могу мерити).

Подпитања:
Шта је базни модел?
Шта је експериментални окир?
Формула ваљаности модела
Како се зове модел коме је J=0? базни модел
Степени ваљаности, објаснити и набројати
Какав степен ваљаности треба да буде код матричног записа?

предиктивна ваљаност

Када је модел ваљан?

када је разлика модела и система мања од граничне вредности

Шта се ради када модел није ваљан?

постепено проширујемо модел док не добијемо жељено поклапање са реалним системом

6. Аналитичко и симулационо решење. Симулација и оптимизација.

Аналитичко решавање: Користи дедуктивне поступке математичке анализе. Даје опште решење у облику формуле у ком се појављују вредности параметара модела и улазних сигнала. Користити га увек када је то могуће! Модел мора имати строго дефинисан облик да би се могао употребити аналитички метод.

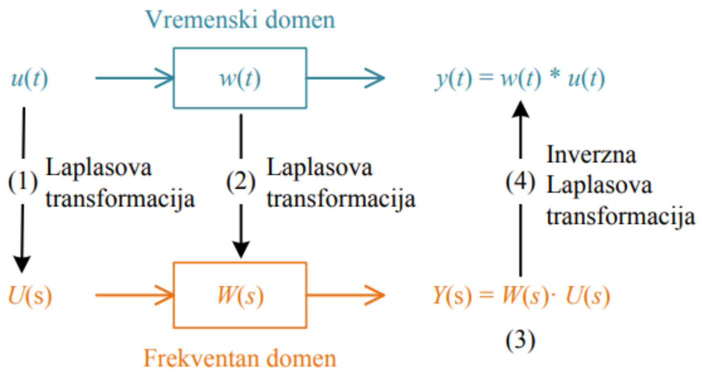
Ограничења: Систем и његови односи нису довољно познати да се опишу математички, сложено се спроводи, а често је и немогуће.

Нумеричко решавање: Подразумева писање програма за дигитални рачунар, као и његово извршавање над скупом датих улазних података. У модел се уврштавају нумеричке вредности улаза и параметара. Даје парцијално решење где сваки резултат одговара одређеним улазима (Свака промена параметара или вредности улаза захтева ново решавање). Спроводи се итеративно (У симулацији динамичких модела време је променљива). Поступак формирања програма и извршавање „експеримената“ је поступак симулације.

Подпитања:

Како се долази до аналитичког решења?

Који су кораци када се за аналитичко решавање користи Лапласова трансформација. Нацртати дијаграм процеса



Показати кораке употребом Лапласове трансформације (на примеру)

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad y(0) = 0 \quad u(t) = 2$$
$$\dot{y}(t) + y(t) = 2 \quad / L$$
$$sY(s) + Y(s) = \frac{2}{s}$$
$$Y(s)\,(s+1) = \frac{2}{s}$$
$$Y(s) = \frac{2}{s(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} \quad / L^{-1}$$
$$y(t) = 2 - 2e^{-t}$$

Када долази до симулационог решења? Како долазимо до њега?

- немогуће спровести аналитичко решење за произвољан систем, тада се користи нумеричко решавање
- подразумева писање програма за симулациони софтвер
- не добија се функционална зависност улаза и излаза

Задаци симулације и оптимизације

- Симулација – проналази нумеричко решење
- Оптимизација – проналази најбоље могуће од више могућих решења

Оптимизациони проблем

- може садржати симулацију (као саставни део рачунања да би се одредила вредност функције циља)
- где се током његовог решавања мењају улази у модел или његови параметри.
- Тако гледано, свака итерација у претрази врши симулацију

Резултат оптимизације

- алгоритми за решавање једначина математичких модела, као и одређивање непознатих параметара изведени су на основу циља да би се минимизовала грешка

Зашто се препоручује употреба аналитичког решења?

- прецизније, тачније, погодно за анализу утицаја параметара улазних и излазних сигнала

Које решење примењујемо на сложене системе?

- нумеричко, аналитичко би било превише компликовано.

Математички модели

7. Типови математичких модела (набројати особине)

статички – динамички   линеарни – нелинеарни   временски континуални – временски дискретни

Подпитања:

Нелинеаран временски континуалан модел (матрична форма)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ – ulazi
$\boldsymbol{y}$ – izlazi
$\boldsymbol{x}$ – promenljive stanja
t – vreme

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ – nelinearne vektorske funkcije

Линеаран временски континуалан модел (матрична форма)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

n - број променљивих стања

m - број улаза

k - број излаза

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{km} \end{bmatrix}$$

Линеаран временски дискретан модел (матрична форма)

$$x(k+1) = E \cdot x(k) + F \cdot u(k), \quad x(0) = x_0$$
$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \qquad k \equiv kT, k = 0,1,2, \dots$$

Пример функције преноса 2.реда $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$

Пример дискретне функције преноса 1.реда $W(z) = \frac{1}{z+1}$

ARX модел (Auto-Regressive with eXtra inputs)

једноставнији за идентификацију

$A(z)y(k) = B(z)u(k) + v(k)$, $v(k)$ – бели шум

ARMAX модел (Auto-Regressive Moving Average with eXtra inputs)

боље описује шум, чешће се користи у управљањима система

$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k)$, $C(z)v(k)$ – обојен шум

Пример диференцијалне једначине 2.реда

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = 0$$

Пример диференцне једначине 2.реда

$$y(k) + 2y(k-1) + 3y(k-2) = u(k)$$

8. Математички модел (нелинеаран) у простору стања. Концепт и избор променљивих стања

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \;\; \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ – ulazi
$\boldsymbol{y}$ – izlazi
$\boldsymbol{x}$ – promenljive stanja
t – vreme

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ – nelinearne vektorske funkcije

Избор променљивих стања за посматрани систем није једнозначан. Обично се бирају променљиве које одређују закони физике, али моделар има слободу да изабере неки други скуп променљивих (нпр разлика позиције и брзине се може узети као променљива стања; не примењује се често, није практично).

Подпитања:

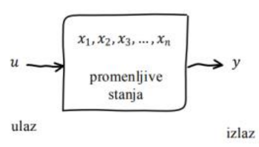
Како изгледа матрични облик?

Пример нелинеарног модела $y = au + b$

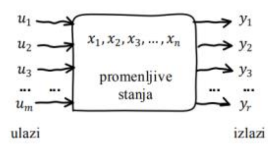
Мултиваријабилан систем (слика и димензије)

број излаза/улаза модела већи од 1

Jedan ulaz – jedan izlaz



Više ulaza/izlaza – *multivarijabilni* model



Како се опсиује статички модел?

алгебарским једначинама

Како се опсиује динамички модел?

диференцијалним једначинама

Шта су променљиве стања?

описују понашање система

једнозначно одређују стање система

променљиве се најчешће одређују законима физике, али моделар има слободу бирања

Зашто је дискретизација битна?

дискретизација – процес квантовања континуалног сигнала у временски дискретан сигнал

битна је да бисмо измерене податке из реалног система могли превести у рачунар

Шта се добија трансформацијом модела вишег реда?

од диференцијалне једначине вишег реда се увођењем смена добија еквивалентан систем једначина првог реда

оне су много лакше за нумеричко решавање употребом рачунара

---

10. Особине линеарног модела

суперпозиција	$y_1 + y_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$
хомогеност	$m\, y = m\, f(u) = f(m\, u)$
стационарност	$y(t - m) = f(u(t - m))$

Примена особина линеарних модела је веома корисна за анализу понашања линеарних модела побуђеног сложеним улазним сигналом. Тада се анализа своди на анализу понашања на појединачне улазе и сваки од улаза се може представити сумом „елементарних сигнала“ који могу бити скалирани и/или временски померени како би формирали жељени улазни сигнал.

---

9. Линеаран математички модел (у простору стања). Трансформације

линеарне алгебарске једначине

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x_i + r(t) = 0$$

обичне (линеарне) диференцијалне једначине

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} + r(t)$$

Најчешће се користи линеарни математички модел у простору стања. Линеарни математички модел у простору стања описује кретање система у временском домену, док се функција преноса односи на представу модела у комплексном домену.

Линеарни математички модел у простору стања је описан системом диференцијалних једначина 1.реда

Подпитања:

Пример линеарног модела

$$y = au_1 + bu_2$$

$$y = f(u) = 2u$$

Пример нелинеарног модела

$$y = au + b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{km} \end{bmatrix}$$

Векторски запис

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = n \times n, \quad B = n \times m, \quad C = k \times n, \quad D = k \times m$$

n - број променљивих стања, m - број улаза, k - број излаза

Развијен запис

$$\dot{x_1}(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t) \qquad x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x_2}(t) = a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u(t) + \cdots + b_{2m}u_m(t) \qquad x_2(0) = x_{20}$$

$$\dots$$

$$\dot{x_n}(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t) \qquad x_n(0) = x_{n0}$$

$$y_1(t) = c_{11}x_1(t) + \cdots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u(t) + \cdots + d_{1m}u_m(t)$$

$$y_2(t) = c_{21}x_1(t) + \cdots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u(t) + \cdots + d_{2m}u_m(t)$$

$$\dots$$

$$y_k(t) = c_{k1}x_1(t) + \cdots + c_{kn}x_n(t) + d_{k1}u(t) + \cdots + d_{km}u_m(t)$$

Веза између физичких сигнала и сигнала у линеарном моделу

$x_k(t) = \overline{x_k} + \widehat{x_k}(t)$ $\qquad$ $\overline{x_k}$ – номинална вредност $\qquad$ $\widehat{x_k}$ – инкрементална вредност

$u_k(t) = \overline{u_k} + \widehat{u_k}(t)$

$y_k(t) = \overline{y_k} + \widehat{y_k}(t)$

Особине линеарности. Описати их математички

суперпозиција, хомогеност, стационарност (питање 10)

11. Линеаризација модела (кораци, радна тачка)

Линеаризација – поступак који се примењује на нелинеарни модел да би се добио линеарни модел. Врши се ради поједностављивања система. Теоријски посматрано, линеаризација уводи грешку у систем, међутим у већини случајева одступање(од РС) и грешка су довољно мали, а поступак рачунања се значајно поједностави, те је прихватљиво користити овај процес.

Апроксимација модела се спроводи само у околини такозване радне тачке, за коју је такав модел везан. Удаљавањем од радне тачке понашање система се све више разликује од понашања реалног система. Уколико је околина радне тачке за коју је модел линеаризован превише мала, онда линеаризација није оправдана и тада се посматрани система сматра нелинеарним.

Кораци поступка линеаризације су:

1. Одредити радну тачку – писањем и решавањем одговарајућих алгебарских једначина
2. Преписати све чланове као суме номиналне и инкременталне вредности

$$x_k(t) = \overline{x_k} + \widehat{x_k}(0) \quad k = 1,2,\dots,n$$
$$u_k(t) = \overline{u_k} + \widehat{u_k}(0) \quad k = 1,2,\dots,m$$
$$y_k(t) = \overline{y_k} + \widehat{y_k}(0) \quad k = 1,2,\dots,r$$

$\overline{x_k}$ номиналне вредности; описују стање система у радној тачки

$\widehat{x_k}$ инкременталне вредности; промена величине у односу на номиналну вредност

3. Заменити све нелинеарне чланове са прва 2 сабирка развоја у Тејлоров ред

$y(t) \approx f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}|_{\bar{x}} \frac{(x(t)-\bar{x})}{1!}$...сређивањем се добија $\hat{y}(t) = a\hat{x}(t)$, $a = \frac{df}{dx}|_{\bar{x}}$

4. Скратити константне чланове у диференцијалним једначинама
(употребити алгебарске једначине које одређују радну тачку)
5. Дефинисати почетне вредности инкременталних промењљивих $\hat{x}(0) = x(0) - \bar{x}$

Подпитања:

Пример нелинеарне диференцијалне једначине 2.реда $m\ddot{x} + c\dot{x} + 8x^3 = mg + f(t)$

Пример линеарне диференцијалне једначине 1.реда $m_1\ddot{x_1} + c_1\dot{x_1} + k_1x_1 = 0$

Кораци линеаризације

Чиме је одређена радна тачка?

одређена номиналним вредностима(вредностима у устаљеном стању)

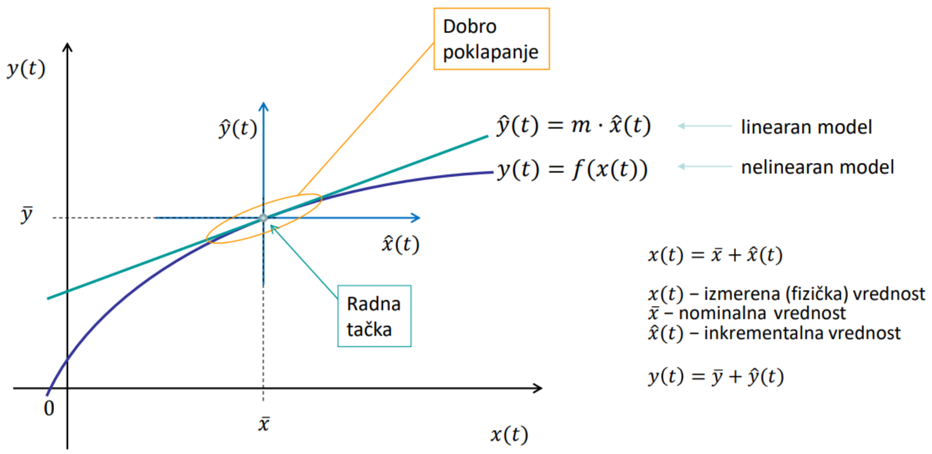
када систем промени устаљено стање, тада се мења и радна тачка,

за нову радну тачку важи другачији линеарни модел

Веза физичких величина код линеаризованог модела

Објаснити графичку представу

формирамо тангенту на криву у радној тачки, у околини радне тачке добијамо солидно поклапање линеарног и нелинеарног модела



Објаснити аналитички поступак

Извести

12. Линеаризација модела у простору стања

Подпитања:

У развијеном облику

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \quad x_1(t_0) = x_{10} \qquad y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \quad x_2(t_0) = x_{20} \qquad y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \quad x_n(t_0) = x_{n0} \qquad y_r(t) = g_r(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$

f и *g* су нелинеарне функције које је потребно линеаризовати

$$\dot{x}_i(t) \approx f_i\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(x_n - \bar{x}_n) + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(u_1 - \bar{u}_1) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(u_m - \bar{u}_m)$$

$$\dot{\hat{x}}_i = \dot{x}_i - f_i\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{x}_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{x}_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{u}_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{u}_m$$

Након линеаризације свих *n* нелинеарних функција *f* добија се:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = a_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{1n}\hat{x}_n(t) + b_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{1m}\hat{u}_m(t) \qquad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_{10}$$
$$\dot{\hat{x}}_2(t) = a_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{2n}\hat{x}_n(t) + b_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{2m}\hat{u}_m(t) \qquad \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{20}$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$\dot{\hat{x}}_n(t) = a_{n1}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{nn}\hat{x}_n(t) + b_{n1}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{nm}\hat{u}_m(t) \qquad \hat{x}_n(0) = \hat{x}_{n0}$$

где су константе

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}, \qquad b_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial u_k}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}, \qquad i = 1,2,\dots,n, \qquad j = 1,2,\dots,n, \qquad k = 1,2,\dots,m$$

Аналогно за излазе модела:

$$y_i \approx g_i\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} + \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(x_n - \bar{x}_n) + \frac{\partial g_i}{\partial u_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(u_1 - \bar{u}_1) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial u_m}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}(u_m - \bar{u}_m)$$

$$\hat{y}_i = y_i - g_i\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{x}_1 + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{x}_n + \frac{\partial g_i}{\partial u_1}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{u}_1 + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial u_m}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}\hat{u}_m$$

Након линеаризације свих *r* нелинеарних функција *g* добија се:

$$\hat{y}_1(t) = c_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{1n}\hat{x}_n(t) + d_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{1m}\hat{u}_m(t)$$
$$\hat{y}_2(t) = c_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{2n}\hat{x}_n(t) + d_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{2m}\hat{u}_m(t)$$
$$\dots$$
$$\hat{y}_r(t) = c_{r1}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{rn}\hat{x}_n(t) + d_{r1}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{rm}\hat{u}_m(t)$$

где су контанте

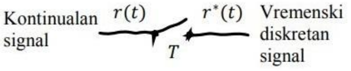
$$c_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}, \qquad d_{ik} = \frac{\partial g_i}{\partial u_k}\Big|_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}, \qquad i = 1,2,\dots,r, \qquad j = 1,2,\dots,n, \qquad k = 1,2,\dots,m$$

У векторском/матричном облику

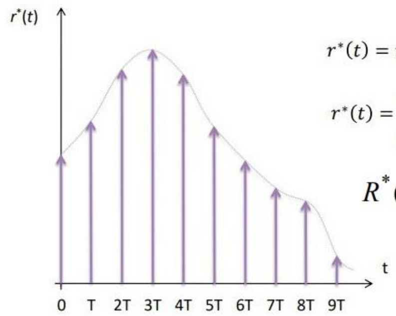
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) \qquad \hat{x}(0) = x_0$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + D\hat{u}(t)$$

13. Временски дискретни модели: намена, квантовање, теорема о одабирању

Дискретизација је процес квантовања временски континуалног сигнала у временски дискретан сигнал. Временски дискретни сигнали су погодни за обраду на рачунару(системи се моделују коначним скупом вредности које се периодично мењају), па је због тога дискретизација често примењивана на континуалним системима. Употреба временски дискретизованих модела је посебно важна и за управљачке системе. Модел и сигнали се посматрају у дискретним временским тренуцима, најчешће у еквидистантним тренуцима ($t_k = kT$). Између тих тренутака се сматра да није дошло до битних промена у систему.



$$r^*(t) = \begin{cases} r(kT), & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots$$



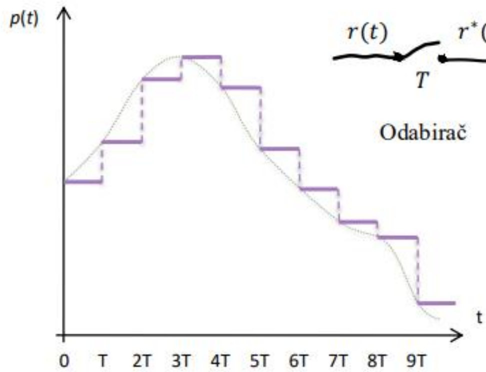
$$r^*(t) = r(kT)\cdot\delta(t-kT), \qquad k = 0,1,\ldots$$

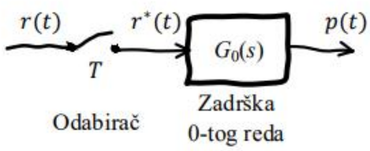
$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot e^{-kTs}$$

Квантовање сигнала се врши по времену и по нивоу(амплитуди).

Квантовање по времену се најчешће спроводи периодично и врши га компонента названа <u>одабирач</u>. На улаз одабирача се доводи временски континуалан сигнал *r(t)*, а на излазу се појављује временски дискретан сигнал описан <u>поворком импулса *r*(t)*</u>. Квантовање по нивоу врши аналогно-дигитални конвертор (A/D конвертор) тако да се на излазу добијају бројне вредности у дигиталним регистру. Број нивоа квантовања зависи од резолуције конвертора(типично се ради о 2^8,2^{10},2^{12},2^{16} нивоа). Иако квантовање по амплитуди уноси грешку у процес моделовања, сматра се да је број дискретних нивоа довољно велики тако да се не деградира сигнал.





$$g_0(t) = h(t) - h(t-T)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

У процес одабирања се уграђује <u>коло задршке нултог реда</u> које омогућава да дискретне вредности остају непромењене током трајања једне периоде одабирања(напонски сигнал на улазу A/D конвертора има константну вредност током трајања конверзије). Заправо се периода одабирања прилагођава сигналу.

Теорема о одабирању: „Ако континуалан сигнал *f(t)* не садржи хармонике у подручју учестаности ω_0[rad/s], он се може комплетно окарактерисати вредностима сигнала мереним у тренуцима међусобно удаљеним за време T= 0.5(2π/ ω_0).“

Подпитања:

Шта је дискретизација и зашто је битна?

Врсте дискретизације/квантовања

по времену и по нивоу(амплитуди)

Шта је одабирач?

Компонента која врши квантовање по времену и прави поворку сигнала размештених за период T

Поворка сигнала

$r^*(t) = r(kT)\cdot\delta(t-kT) \quad , k = 0,1, \ldots.$

$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot\delta(t-kT)$ $\qquad R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot e^{-kTs}$

Коло задршке нултог реда

Омогућава да дискретне вредности остану непромењене током трајања једне периоде

Формула за коло задршке (модел задршке)

$g_0(t) = h(t) - h(t-T)$ $\qquad G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$

Теорема о одабирању

14. Временски дискретан модел у простору стања. Добијање модела

$$x(k+1) = E \cdot x(k) + F \cdot u(k), \quad x(0) = x_0$$
$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \qquad k \equiv kT, k = 0,1,2,\ldots$$

Нема извода променљивих стања, него постоји функционална зависност у наредном тренутку .

Подпитања:

Матрични облик

На основу контунуалних модела извести одзив за дискретан модел

- Na osnovu (**) odziv u trenutku $t = kT$ je

(**) $\quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{\Phi}(kT) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} \mathbf{\Phi}(kT-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- a u narednom trenutku $t = kT + T$ je

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(kT+T) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- Na osnovu osobine: $\mathbf{\Phi}(a+b) = \mathbf{\Phi}(a) \cdot \mathbf{\Phi}(b)$

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T) \cdot \left(\mathbf{\Phi}(kT) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} \mathbf{\Phi}(kT-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau\right) + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- period $[kT, kT+T]$ je dovoljano kratak da možemo smatrati da je $\boldsymbol{u}(kT)$ nepromenljivo tokom tog perioda.

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) d\tau\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

- Rešavanje se nastavlja uvođenjem smena ...
  - Prva smena: $q = \tau - kT$

  $$\int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) d\tau = \int_0^T \mathbf{\Phi}(T-q) dq$$

  - i još jedna smena: $y = T - q$

  $$\int_0^T \mathbf{\Phi}(T-q) dq = -\int_T^0 \mathbf{\Phi}(y) dy = \int_0^T \mathbf{\Phi}(y) dy$$

- Konačno:

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \left(\int_0^T \mathbf{\Phi}(t) dt\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

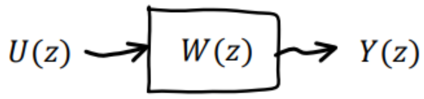
tj.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}(k) \\ &\quad \mathbf{E} = \mathbf{\Phi}(T) \\ &\quad \mathbf{F} = \left(\int_0^T \mathbf{\Phi}(t) dt\right) \cdot \mathbf{B} \end{aligned}}$$

15. Дискретна функција преноса. Диференцна једначина

Дискретна функција преноса: однос Лапласових трансформација временски дискретизованих сигнала излаза *Y(z)* и улаза *U(z)* када су почетне вредности 0.

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$



Диференцна једначина

$$Y(z) = W(z)U(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) \quad \rightarrow \quad A(z)Y(z) = B(z)U(z)$$

у развијеном облику(уз *d=n-m*)

$$(1 + a_1 z^{-1} + \ \dots + a_{n-1}z^{-(n-1)} + a_n z^n)Y(z) = z^{-d}(b_0 + b_1 z^{-1} + \ \dots + b_{m-1}z^{-(m-1)} + b_m z^{-m})U(z)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1}Y(z) + \ \dots + a_n z^n Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1}U(z) + \ \dots + b_m z^{-m}U(z)$$

на основу особине „померање у временском домену“

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + \cdots + b_m u(k-d-m)$$

$$y(k) = -\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) \ + \ \sum_{i=0}^{m} b_i y(k-d-i) \qquad k \equiv kT, k = 0,1,2, \dots$$

Подпитања:

Дефиниција дискретне функције преноса?

Нацртати представу дискретне функције преноса

Математички приказ дискретне функције преноса

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \quad m \leq n$$

степен у имениоцу одређује ред

Шта је промењива s?

Комплексна промењива s је Лапласов оператор

назива се и оператор диференцирања јер множење са s у комплексном домену одговара диференцирању у временскком

Шта је промењива z?

$z = e^{st}$ комплексна промењива

Како се у коду прави функција преноса?

tf(P,Q) за функцију преноса

tf(P,Q,T) за дискретну функцију преноса

Пример дискретне функције преноса 2.реда

$$W(z) = \frac{2z+1}{z^2+z+1}$$

Написати диференцну једначину за тај пример

$$\frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$(1 + z^{-1} + z^{-2})Y(z) = (2z^{-1} + z^{-2})U(z)$$

$$Y(k) + Y(k-1) + Y(k-2) = 2U(k-1) + U(k-2)$$

16. Добијање функције преноса од математичког модела у простору стања. Функција преноса мултиваријабилног система

Функција преноса је однос Лапласових трансформација излазног и улазног временски континуалног сигнала када су почетне вредности нула.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad /L$$
$$\underline{y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad /L}$$
$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$\underline{Y(s) = CX(s) + DU(s)}$$
$$X(s)(s - A) = BU(s)$$
$$\underline{Y(s) = CX(s) + DU(s)}$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$
$$\underline{Y(s) = CX(s) + DU(s)}$$
$$\underline{Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)}$$
$$\underline{Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

s оператор – Лапласов оператор – оператор диференцирања, јер множење са s у комплексном домену одговара диференцирању по времену у временском домену.

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

Функција преноса мултиваријабилног система – посматрају се парови улаз-излаз

$$G_{kj}(s) = \frac{Y_k(s)}{U_j(s)} \qquad k = 1,2, \dots r \quad j = 1,2, \dots m$$

Векторска нотација: $Y(s) = G(s)U(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \qquad U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \qquad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{bmatrix}$$

Подпитања:

Дефиниција и цртеж са сигналима

Извести формулу за функцију преноса

Математичка представа

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m \le n$$

Факторизован облик

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = k \cdot \frac{(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_m)}{(s-t_1)(s-t_2)\dots(s-t_n)}, \quad m \le n$$

$r_1, \dots, r_m$ нуле система

$t_1, \dots, t_n$ полови система

k појачање система

Написати пример функције преноса 2.реда

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

Написати диференцијалну једначину за тај пример

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 3} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$
$$(s^2 + 2s + 3)Y(s) = U(s) \quad /L^{-1}$$
$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

Функција преноса мултиваријабилног система (питање 24.)

Кашњење код функције преноса

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}e^{-\tau s}, \qquad \tau \text{ – временско кашњење}$$

Модели физичких система

17. Транслаторни механички системи – променљиве, елементи, законитости, добијање модела.

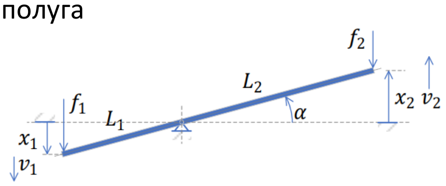
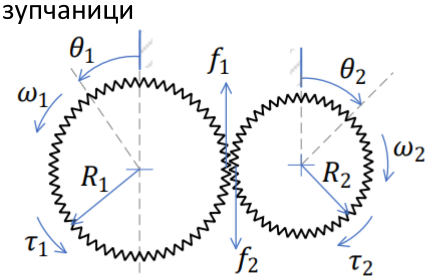
Променљиве	
позиција тела(растојање) – узима се за променљиву стања	x[m]
брзина	$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ $[\frac{m}{s}]$
убрзање	$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ $[\frac{m}{s^2}]$
сила	F[N]
енергија	E[J] $E_k = \frac{mv^2}{2}, E_p = mgh$
снага	P[W] $P = fv = \frac{dE}{dt}$
Елементи	
маса	квантитативна мера инертности $\frac{d}{dt}(mv) = \sum f_i$ $m\frac{dv}{dt} = f$(m=const.)
трење сила вискозности/трења	јавља се када се два тела додирују и крећу различитим брзинама $f_t = f(\Delta v)$ $\Delta v = v_2 - v_1$ $f_t = cv$, c[Ns/m] коефицијент вискозности
еластичност	под дејством спољашње силе опруга се истеже $f_e = f(\Delta x)$ $\Delta x = x_2 - x_1$ $f_e = k\Delta x$, k[N/m] коефицијент еластичности
Законитости	
Други Њутнов закон (Даламберов)	-сума свих сила које делују на тело масе m је нула, укључујући и инерцијалну силу $\frac{d}{dt}(mv) = \sum f_i$ $m\ddot{x} = \sum f_i$ $\sum f_i = 0$
Трећи Њутнов закон (закон акције и реакције)	-ако једно тело масе m делује одређеном силом F_a на друго тело, то значи да ће друго тело деловати на прво тело силом истог интензитета али супротног смера $\vec{F_a} = -\vec{F_r}$
Закон помераја	сума разлике помераја дуж затворене путање је нула $\sum \Delta x_i = 0$

- ред модела
  На основу постављених диференцијалних једначина знамо ког реда је модел
  нпр: 2 диференцијалне једначине 2.реда => модел 4.реда
- формирање модела
  усвајамо позицију и референтни смер кретања
  посматрамо све силе које делују на тело
  пишемо једначину на основу равнотежних сила
- нелинеарност модела
  Модел је нелинеаран кад су у њега укључене нелинеарне везе физичких величина

Подпитања:

Променљиве, елементи, законитости

18. Ротациони механички системи – променљиве, елементи, законитости, добијање модела.

Променљиве	
угаони померај – узима се за променљиву стања	θ [rad]
угаона брзина	$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad [\frac{rad}{s}]$
угаоно убрзање	$\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [\frac{rad}{s^2}]$
момент силе	τ [Nm]
енергија	E[J] $\quad E_k = \frac{1}{2}J\omega^2, E_p = \frac{1}{2}k\theta^2$
снага ротирајућег тела	P[W] $P = \tau\omega = \frac{dE}{dt}$
Елементи	
момент инерције	зависи од облика тела, расподеле масе и осе око које тело ротира код хомогеног тела: $J = \sum m_i {r_i}^2$ Штајнерова теорема: $J = J_0 + ma^2$ J_0 - сопствени моменат инерције, за осу која пролази кроз центар масе a - растојање између оса
трење сила вискозности/трења	јавља се када се два тела додирују и крећу различитим брзинама $\tau_t = \tau_t(\Delta\omega) \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad \tau_t = c\Delta\omega$, c[Nms] коефицијент вискозности
ротациона еластичност	под дејством спољашње силе опруга се истеже $\tau_e = \tau_e(\Delta\theta) \quad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad \tau_e = k\Delta\theta$, k[Nm] коефицијент еластичности
полуга 	-чврст штап са тачком ослонца без масе, трења, момента инерције и унутрашње енергије $\sin\alpha = \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2} \qquad x_1 = \frac{L_1}{L_2}x_2 \qquad v_1 = \frac{L_1}{L_2}v_2$ $L_1 f_1 - L_2 f_2 = 0 \qquad f_1 = \frac{L_2}{L_1} f_2$
зупчаници 	- немају моменат инерције, трење, унутрашњу енергију и зупци им се савршено поклапају - N однос броја зубаца Z_1 и Z_2 $R_1\theta_1 = R_2\theta_2$ $N = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2\pi R_2}{2\pi R_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \qquad N = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ $\tau_1 + f_1 R_1 = 0$ (леви) $\qquad \tau_2 - f_2 R_2 = 0$ (десни) $f_1 = -f_2$ (сила акције и реакције) $\qquad -N = \frac{\tau_2}{\tau_1} = -\frac{R_2}{R_1}$
Законитости	
Други Њутнов закон (Даламберов)	-сума свих момената сила које делују на тело момента инерције J је нула, укључујући и инерцијални момент силе $\frac{d}{dt}(J\omega) = \sum \tau_i \qquad J\ddot{\theta} = \sum f_i \qquad \sum \tau_i = 0$
Трећи Њутнов закон (закон акције и реакције)	-ако једно тело делује моментом силе на друго тело, то значи да ће друго тело деловати на прво тело моментом силе истог интензитета али супротног смера
Закон угаоних помераја	сума угаоних помераја дуж затворене путање је нула $\sum \Delta\theta_i = 0$

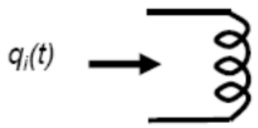
- ред модела

  На основу постављених диференцијалних једначина знамо ког реда је модел

- формирање модела
  назначава се позитиван смер за основне променљиве
  Закон угаоних помераја
  Црта се дијаграм за свако тело које има инерцију
  Даламберов закон за сваки дијаграм

Подпитања:
Променљиве, елементи, законитости

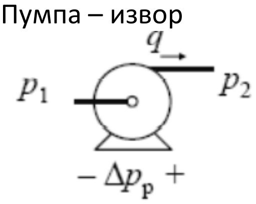
19. Термички системи – променљиве, елементи, законитости, добијање модела.

Променљиве	
температура тела – узима се за променљиву стања	θ [K]
количина топлоте	$q \quad [\frac{J}{s} = W]$
Елементи	
термичка капацитивност C (пасиван)	- промена температуре тела које има способност да акумулира топлоту је сразмерна разлици количини топлота која уђе (q_+) и изађе (q_-) из тела $\Delta q = q_+(t) - q_-(t)$ $\quad C = m\sigma$ $\quad \sigma$ – специфична толота тела $\dot{\theta}(t) = \frac{1}{C}\Delta q = \frac{1}{C}(q_{in}(t) - q_{out}(t))$ $\quad C$ – топлотни капацитет
термичка отпорност R (пасиван)	- топлота се преноси провођењем, струјањем, зрачењем - провођење топлоте са једног тела на друго тело сразмерно је разлици температура та два тела $q(t) = \frac{1}{R}(\theta_1(t) - \theta_2(t))$ $\quad R = \frac{d}{A\alpha}[\frac{Ks}{J}]$ – термичка отпорност α – термичка проводљивост d – дебљина тела, A – површина попречног пресека
термички извор (активан) 	-може доводити и одводити топлоту - Извор који доводи топлоту (одређеном брзином) Количина топлоте која се доведе је позитивна - Извор који одводи топлоту Количина топлоте која се одведе је негативна

- формирање модела
  Код променљиве стања узима се температура сваког тела које има топлотни капацитет
  Преношење топлоте у телу са топлотним капацитетом зависи од
  извора топлоте и преношења топлоте преко термичких отпорности

Подпитања:
Променљиве, елементи, законитости

20. Системи са флуидима – променљиве, елементи, законитости, добијање модела.

Променљиве	
запремински проток	$q = \frac{dV}{dt} = q_+(t) - q_-(t) \quad [\frac{m^3}{s}]$
запремина	V[m³]
висина (ниво) течности	h[m] $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A(h)}(q_{in}(t) - q_{out}(t))$ ниво течности у посуди $A(h)$ – површина на висини h
притисак	p[Pa] $p^*(t)=p(t)-p_a$ (p_a атмосферски притисак) $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c(h)}(q_{in}(t) - q_{out}(t))$ промена притиска
Елементи	
Хидраулички капацитет	-капацитет посуде за течност - веза између запремине течности и притиска на дну $c(h) = \frac{dV}{dp} = \frac{dV}{dp}\frac{dh}{dh} = \frac{dV}{\rho g \cdot dh} = \frac{A(h)}{\rho g}$ $c(h) = \frac{A(h)}{\rho g} = \frac{r^2\pi}{\rho g}$ код усправне посуде
Хидраулична отпорност *R*	- Отпор протицању - када течност протиче кроз цев, вентил или отвор, долази до пада притиска који се објашњава губитком енергије и обично је последица ове нелинеарне зависности $q = k\sqrt{\Delta p}$ зависност протока и пада притиска k-карактеристика цеви, вентила или отвора - везује промене пада притиска и протока по формули и важи за мали опсег промена јер повезује инкременталне променљиве $\hat{q} = \frac{1}{R}\Delta\hat{p} \qquad \frac{1}{R} = \frac{dp}{d\Delta p}$ $R = \frac{2\bar{q}}{k^2}, \quad \bar{q} = k\sqrt{\Delta\bar{p}}$ за вентил $R_c = R_a + R_b$ редно везана 2 вентила
Пумпа – извор  	-пумпа је извор енергије која добија снагу од електро мотора -Карактеристику пумпе одређујемо експериментално у устаљеном стању и прилично је нелинеаран $\Delta\hat{p} = -K\hat{q}$
Законитости	
Једначина континуитета за нестишљиве флуиде	$v_1A_1 = v_2A_2 = const.$
Бернулијева једначина	$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = const.$

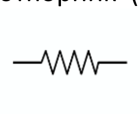
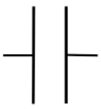
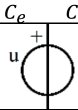
- Повезују се са механичким системима преко пумпи, вентила...
- Сложен због нелинеарних карактеристика система и просторне зависности физичких величина
- формирање модела
  посматра се притисак у сваком чвору и притисак у свакој цеви
  за сваки чвор везујемо једначину континуитета
  за сваку цев се пише Бернулијева једначина проширена губицима

Подпитања:

Променљиве, елементи, законитости

21. Електрични и електромеханички системи – променљиве, елементи, законитости, добијање модела.

а) електрични системи

Променљиве		
напон	u [V]	
јачина струје	i [A]	
електрична снага	p=ui [W]	
електрична енергија	E [J]	
Елементи		
отпорник (пасивни) 	$R[\Omega]$ отпорност $u(t) = Ri(t)$	
	редна веза $R_e = R_1 + R_2$	паралелна веза $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
калем (пасивни) 	$L = \frac{\Phi}{i}[H]$ индуктивност $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	
кондензатор (пасивни) 	$C = \frac{q}{u}[F]$ капацитет $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$	
	редна веза $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	паралелна веза $C_e = C_1 + C_2$
идеалан напонски извор (активан)		
идеалан струјни извор (активан)		
Законитости		
Омов закон	$I = \frac{U}{R} \quad \leftrightarrow \quad U = IR$	
Први Кирхофов закон (струјни)	$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$	
Други Кирхофов закон (напонски)	$\sum_{c} u_i = 0$	

- Алтернативне технике добијања модела
  - метода потенцијалних чворова
  - метода контурних струја
- Модел добијамо применом горе наведених закона
- За променљиву стања се бира напон или јачина струје

импедансе	
R	R
C	$\frac{1}{j\omega C}$
L	$j\omega L$

б) електромеханички системи

Променљиве	
електромагнетна сила	f_e [N]
брзина проводника у односу на магнетно поље	$v\ [\frac{m}{s}]$
дужина проводника у магнетном пољу	l [m]
магнетни флукс	Φ [Wb]
магнетна индукција	$B\ [\frac{Wb}{m^2}]$
јачина електричне струје	i [A]
индуктивна електромоторна сила	e_m [V]
Законитости	
Амперова сила $\overrightarrow{f_e} = \vec{\imath} \cdot l \times \vec{B} = ilB\ sin\theta$	На праволинијски проводник дужине l кроз који потиче струја јачине i и који се креће у хомогеном магнетском пољу индукције B делује сила f_e
Електромоторна сила $e_m = l \cdot \vec{v} \times \vec{B} = Blv\ sin\theta$	Кретање проводника брзином v у хомогеном магнетском пољу индукује електромоторну силу e_m.
Снага	$p_m = f_e v = (ilBsin\theta)v$ механичка снага: магнетно поље делује на магнетни елемент
	$p_e = e_m i = (Blv)i$ електрична снага: протицање струје услед e_m. из закона одржања енергије
	$p_m = p_e$

- формирање модела
  одвојено посматрамо механички део и електрични део и правимо моделе у простору стања

Подпитања:

Променљиве, елементи, законитости

Симулација система описаног математичким моделом

22. Лапласова трансформација: дефиниција, особине и примена у моделовању и анализи система

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

L – Лапласов оператор

s – комплексна учестаност или комплексна променљива Лапласове трансформације

f(t) – временски зависан сигнал - оригинал

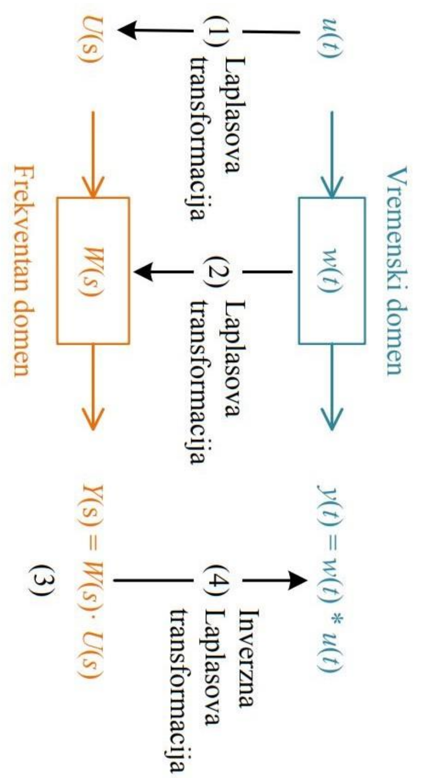
F(s) – комплексан лик сигнала *f(t)*.

Инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma - j\omega}^{\gamma + j\omega} F(s)e^{st}ds, \qquad t > 0$$

Особине Лапласове трансформације

Br.	Naziv osobine	Izraz
1	Linearnost	$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
2	Čisto vremensko kašnjenje	$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}F(s)$
3	Pomeranje kompleksnog lika	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$
4	Konvolucija originala	$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$
5	Izvod originala	$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
6	Integral originala	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$ $\mathcal{L}\left\{\iint_0^t \dots \int_0^t f(t)dt^n\right\} = \frac{F(s)}{s^n}$
7	Izvod kompleksnog lika	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8	Promena vremenske skale	$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$
9	Granične vrednosti	$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$



доказ линеарности:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = \\
&\quad = \int_0^{\infty}(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t))e^{-st}dt = \\
&\quad = a_1\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt + a_2\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt = \\
&\quad = a_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \\
&\quad = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)
\end{aligned}$$

доказ чистог временског кашњења:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \\
&\quad = \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt = \\
&\quad = e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{\infty} f(v)e^{-sv}dv = \\
&\quad = e^{-s\tau}\int_0^{\infty} f(v)e^{-sv}dv = \\
&\quad = e^{-s\tau}\, F(s)
\end{aligned}$$

Smena: $t - \tau = v$

kauzalan signal: $f(v) \equiv 0, v < 0$

Примена Лапласове трансформације: добијамо функцију преноса која нам знатно олакшава израчунавање израза. Такође, на основу ЛТ можемо лако утврдити природу одзива на основу полова и нула функције преноса.

Подпитања:

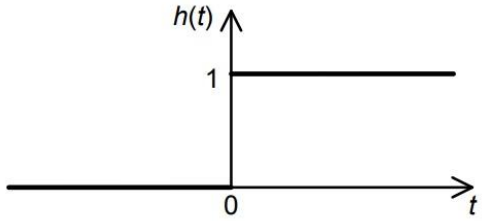
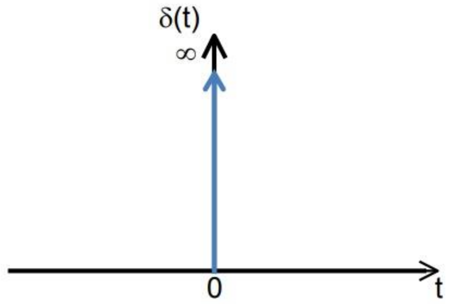
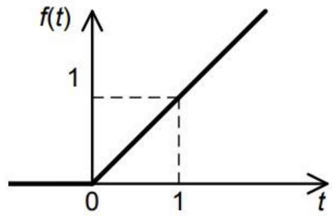
Дефиниција Лапласове трансформације и инверзне Лапласове трансформације. Навести особине

Доказати чисто временско кашњење

Шта је променљива s?

Како се формира модел Лапласа?

23. Стандардни побудни сигнали. Примена Лапласове трансформације на сигнале.

Хевисајдов сигнал – јединични сигнал	Poznat kao jedinični signal $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big\|_0^\infty = \frac{1}{s}$
Дираков сигнал - импулсни сигнал	$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$  $D(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{0}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ $D(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{h(t)\} - h(0_-) = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$
Јединични нагибни сигнал – рампа сигнал	$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot h(t)\} = \int_0^\infty t \cdot e^{-st}dt = -\frac{t \cdot e^{-st}}{s}\Big\|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$ $u = t, dv = e^{-st}dt$

- $f(t) = \delta(t),$ $\quad F(s) = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1,\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
- $f(t) = h(t),$ $\quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\big\|_0^\infty = \frac{1}{s}$
- $f(t) = t,$ $\quad F(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt = -t\frac{e^{-st}}{s}\Big\|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$

24. Функција преноса система са једним улазом и једним излазом.

Дефиниција: Функција преноса је однос Лапласових трансформација излазног и улазног (временски континуалног) сигнала када су почетни услови нулти.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Како се дефинише кашњење?

Функција преноса се помножи са $e^{-s\tau}$

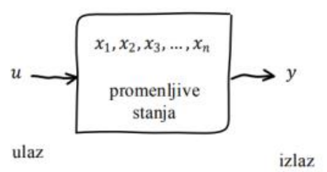
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} &= \\ &= \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt = \\ &= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{\infty} f(v)e^{-sv}dv = \\ &= e^{-s\tau}\int_0^{\infty} f(v)e^{-sv}dv = \\ &= e^{-s\tau}F(s)\end{aligned}$$

Smena: $t-\tau = v$

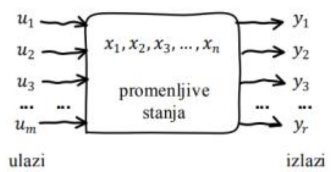
kauzalan signal: $f(v) \equiv 0, v < 0$

математичка нотација - као количник полинома по *s*	$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_m s^m + \cdots + p_1 s + p_0}{s^n + \cdots + q_1 s + q_0}, \quad m \le n$
развијен облик P(s)=0 нуле система $r_1, \ldots, r_m$ Q(s)=0 полови система $t_1, \ldots, t_n$ k појачање система	$G(s) = k \cdot \frac{(s-r_1)\cdots(s-r_m)}{(s-t_1)\cdots(s-t_n)}$

Jedan ulaz – jedan izlaz



Više ulaza/izlaza – *multivarijabilni* model



Функција преноса мултиваријабилног система – посматрају се парови улаз-излаз

$$G_{kj}(s) = \frac{Y_k(s)}{U_j(s)} \qquad k = 1,2,\ldots r \quad j = 1,2,\ldots m, \quad r \le m$$

Векторска нотација: $Y(s) = G(s)U(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \qquad U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \qquad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{bmatrix}$$

Подпитања:

Нацртати слику функције преноса и обележити сигнале

Дефиниција

Како се дефинише кашњење?

Шта су полови? Шта су нуле?

Како се дефинише функција преноса мултиваријабилног система?

  тако што се посматрају парови улаз-излаз

За шта служи оператор s?

  назива се и оператор диференцирања,

    јер множење са s у комплексном домену одговара диференцирању по t у временском домену

Представа функције преноса

Зашто је модел на побуду дату збиром две побуде једнак збиру одзива на те две побуде појединачно?

  због принципа суперпозиције

Како се моделује кашњење код функције преноса?

25. Аналитичко израчунавање излаза применом инверзне Лапласове трансформације.

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_m s^m + \cdots + p_1 s + p_0}{s^n + \cdots + q_1 s + q_0}, \qquad m \leq n$$

раставимо G(s) на парцијалне разломке

препознајемо сабирке у табели ЛТ и писање оригинала

Од полова функције (корени Q(s)=0) зависи понашање система, какав ће бити одзив. Могу се уочити 4 карактеристична случаја:

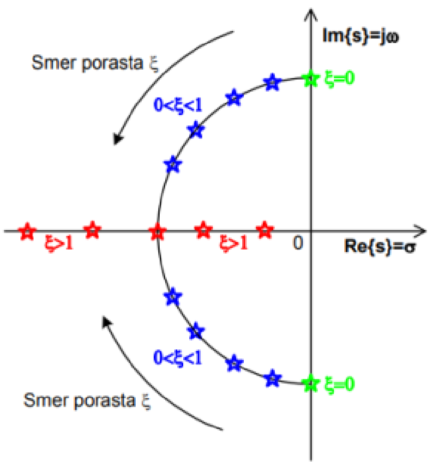
реални и прости полови (нема вишеструких полова)

вишеструки реални полови

прости конјуговано-комплексни полови

вишеструки конјуговано-комплексни полови

	Полови (корени карактеристичне једначине)	Одзив – зависи од полова функције преноса $D = \zeta^2 - 1$ дискриминанта ζ коефицијент пригушења
1.	реални и прости полови (нема вишеструких полова)	Апериодичан одзив $\zeta > 1, D > 0$
2.	вишеструки реални полови	критично-апериодичан одзив $\zeta = 1, D = 0$
3.	конјуговано-комплексни полови са негативним реалним делом	пригушено-периодичан (осцилаторан) одзив $0 < \zeta < 1, D < 0$
4.	конјуговано-комплексни полови са реалним делом = 0	Периодичан (осцилаторан) одзив $\zeta = 0, D < 0$



карактеристична једначина за одзив модела 2.реда

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0{}^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \mp j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

ζ коефицијент пригушења

ω_0 непригушена природна учестаност

Подпитања:

Кораци

Шта зависи од полова функције преноса?

Карактер одзива модела зависи од полова функције преноса

Какви су полови ако је одзив критично-апериодичан?

Какви су полови ако је одзив апериодичан?

Какви су полови ако је одзив пригушено периодичан?

Какви су полови ако је одзив периодичан?

26. Аналитичко израчунавање излаза линеарног модела у простору стања. Фундаментална матрица.

Линеаран временски континуалан модел (матрична форма) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ n - број променљивих стања m - број улаза k - број излаза	$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{km} \end{bmatrix}$
Линеаран временски континуалан модел (развијен облик)	$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t)$ ... ... $\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t)$ $y_1(t) = c_{11}x_1(t) + \cdots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \cdots + d_{1m}u_m(t)$ ... ... $y_k(t) = c_{k1}x_1(t) + \cdots + c_{kn}x_n(t) + d_{k1}u_1(t) + \cdots + d_{km}u_m(t)$
$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ резолвентна матрица Фундаментална матрица $\Phi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad /L$ $sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$ $(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$ $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$ $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ резолвентна матрица $X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)\,BU(s) \quad /L^{-1}$ $x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)d\tau$ $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ $y(t) = C\Phi(t)x(0) + C\int_0^t \Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)d\tau + Du(t)$

Подпитања:

Линеаран математички модел у простору стања - матрично

Линеаран математички модел у простору стања – развијен облик

Дефинисати фундаменталну матрицу

Како се добијају променљиве стања и излаз?

27. Нумеричко израчунавање излаза линеарног временски дискретног модела у простору стања

Дискретни модели су погодни за нумеричко рачунање излаза модела.

Вредност променљиве стања у дискретним тренуцима се могу израчунати рекурзивно на основу познавања вредности променљиве услова x_0 и вредности улаза у свим дискретним тренуцима $u(k)$, $k=0,1,2,\ldots$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(1) &= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(0)\\ \boldsymbol{x}(2) &= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(1)\\ \boldsymbol{x}(3) &= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(2)+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(2)\\ &\ldots\\ \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}$$

Vreme,
tj. diskretni vremenski trenuci
$t = kT, \quad k = 0,1,2,\ldots$

Применимо Лапласову трансформацију на временски дискретан модел у простору стања са једним улазом и једним излазом

$$x(k+1) = E\cdot x(k) + F\cdot u(k), \quad x(0) = x_0, k \equiv kT, k = 0,1,2,\ldots \qquad /L$$
$$X(s)e^{sT} = E\cdot X(s) + F\cdot U(s) \qquad /\text{смена: } z = e^{sT}$$
$$zX(z) = E\cdot X(z) + F\cdot U(z)$$
$$(zI-E)\cdot X(z) = F\cdot U(z)$$
$$X(z) = (zI-E)^{-1}\cdot F\cdot U(z)$$

излази:

$$y(k) = C\cdot x(k) + D\cdot u(k) \qquad /L$$
$$Y(z) = C\cdot X(z) + D\cdot U(z)$$
$$Y(z) = C\cdot (zI-E)^{-1}\cdot F\cdot U(z) + D\cdot U(z)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C\cdot(zI-E)^{-1}\cdot F + D$$

- Na osnovu (**) odziv u trenutku $t = kT$ je

  (**) $\quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\cdot\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau$

  $$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{\Phi}(kT)\cdot\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT}\mathbf{\Phi}(kT-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau$$
- a u narednom trenutku $t = kT + T$ je
  $$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(kT+T)\cdot\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT}\mathbf{\Phi}(kT+T-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{kT}^{kT+T}\mathbf{\Phi}(kT+T-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- Na osnovu osobine: $\mathbf{\Phi}(a+b) = \mathbf{\Phi}(a)\cdot\mathbf{\Phi}(b)$
  $$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T)\cdot\left(\mathbf{\Phi}(kT)\cdot\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT}\mathbf{\Phi}(kT-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau\right) + \int_{kT}^{kT+T}\mathbf{\Phi}(kT+T-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- period $[kT, kT+T]$ je dovoljano kratak da možemo smatrati da je $\boldsymbol{u}(kT)$ nepromenljivo tokom tog perioda.
  $$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T)\cdot\mathbf{x}(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T}\mathbf{\Phi}(kT+T-\tau)d\tau\right)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(kT)$$
- Rešavanje se nastavlja uvođenjem smena ...
  - Prva smena: $q = \tau - kT$
    $$\int_{kT}^{kT+T}\mathbf{\Phi}(kT+T-\tau)d\tau = \int_0^T\mathbf{\Phi}(T-q)dq$$
  - i još jedna smena: $y = T - q$
    $$\int_0^T\mathbf{\Phi}(T-q)dq = -\int_T^0\mathbf{\Phi}(y)dy = \int_0^T\mathbf{\Phi}(y)dy$$

- Konačno:
  $$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T)\cdot\mathbf{x}(kT) + \left(\int_0^T\mathbf{\Phi}(t)dt\right)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(kT)$$

  tj.
  $$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}(k)\\ &\quad\mathbf{E} = \mathbf{\Phi}(T)\\ &\quad\mathbf{F} = \left(\int_0^T\mathbf{\Phi}(t)dt\right)\cdot\mathbf{B}\end{aligned}}$$

---

28. Нумерички поступак добијања линеарног временски дискретног модела у простору стања

тражи се погодна трансформација $x(t) = P\tilde{x}(t) \quad \rightarrow \quad \tilde{x}(t) = P^{-1}x(t)$

тако да модел можемо описати као $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$

- Ako je $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, tada je $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
- Veza sa $\boldsymbol{A}$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(t)$$
$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(t)$$
$$= \underbrace{\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}}_{\tilde{\boldsymbol{A}}}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \underbrace{\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}}_{\tilde{\boldsymbol{B}}}\cdot\boldsymbol{u}(t)$$

- daje

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}$$

- Jednačina: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}\cdot\tilde{\mathbf{A}}$
  se može napisati kao:

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ_i su svojstvene vrednosti matrice **A**

$\mathbf{p}_i$ su svojstveni vektori matrice **A**

- Tj. može se predstaviti kao sistem jednačina

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i\lambda_i, \quad i = 1,2,\ldots n$$

ili

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\cdot\mathbf{p}_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots n$$

gde je netrivijalno rešenje za:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

када нађемо својствене вредности и својствене векторе матрице A, тада можемо израчунати матрице E и F:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(T)\tilde{\boldsymbol{x}}(k) + \cdots$$
$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(T)\tilde{\boldsymbol{x}}(k) + \cdots =$$
$$= \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(T)\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{x}(k) + \cdots = \boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(k) + \cdots$$
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Phi}(T) = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(T)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Phi}(T)$$
$$\boldsymbol{F} = \left(\int_0^T \boldsymbol{\Phi}(t)dt\right)\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$\boldsymbol{F} = \left(\int_0^T \boldsymbol{\Phi}(t)dt\right)\boldsymbol{B} = \left(\int_0^T \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{P}^{-1}dt\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\left(\int_0^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)dt\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$= \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(T) - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$$

jer je: $$\int_0^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)dt = \begin{bmatrix} \int_0^T e^{\lambda_1 t}dt & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^T e^{\lambda_n t}dt \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(T) - \boldsymbol{I})$$

$$\frac{1}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}\Big|_0^T = \frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 T} - 1)$$

Подпитања:

Линеаран континуалан модел у простору стања

Линеаран дискретан модел у простору стања

Применити израз *x(t)=F(t)x(0)+....* и одредити(извести) матрице временски дискретног модела

$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau\,,\ 0 \le t,\qquad \Phi(t) = e^{At}$ фундаментална матрица система

$$t = kT \quad \rightarrow \quad x(kT) = \Phi(kT)x(0) + \int_0^{kT} \Phi(kT-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

$$t = kT + T \quad \rightarrow \quad x(kT+T) = \Phi(kT+T)x(0) + \int_0^{kT} \Phi(kT+T-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau + \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

Из $\Phi(a+b) = \Phi(a)\Phi(b)\ \rightarrow$

$$x(kT+T) = \Phi(T)\left(\Phi(kT)x(0) + \int_0^{kT} \Phi(kT-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau\right) + \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

Период [*kT, kT+T*] је довољно кратак да можемо сматрати да је $u(kT)$ непромењено током тог периода

$$x(kT+T) = \Phi(T)x(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)\, d\tau\right) B\, u(kT)$$

Уводи се смена $q = \tau - kT \quad \rightarrow \quad \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT+T-\tau)\, d\tau = \int_0^T \Phi(T-q)\, dq$

Уводи се смена $y = T - q \quad \rightarrow \quad \int_0^T \Phi(T-q)\, dq = -\int_T^0 \Phi(y)\, dy = \int_0^T \Phi(y)\, dy$

$$x(kT+T) = \Phi(T)x(kT) + \left(\int_0^T \Phi(t)\, dt\right) B\, u(kT)$$

Добија се: $x(k+1) = Ex(k) + Fu(k)$

$E = \Phi(t)$

$F = \left(\int_0^T \Phi(t)\, dt\right) B$

29. Динамички модели првог и другог реда. Утицај локације полова функције преноса на њен одзив.

Подпитања:

Шта је функција преноса?

Модел првог реда – формула и пример

$G(s) = \frac{k}{1+Ts} \cdot e^{-s\tau}$ T-временска константа; k-појачање

Кашњење модела првог реда?

Функција преноса се множи са $e^{-s\tau}$

τ - представља временско кашњење

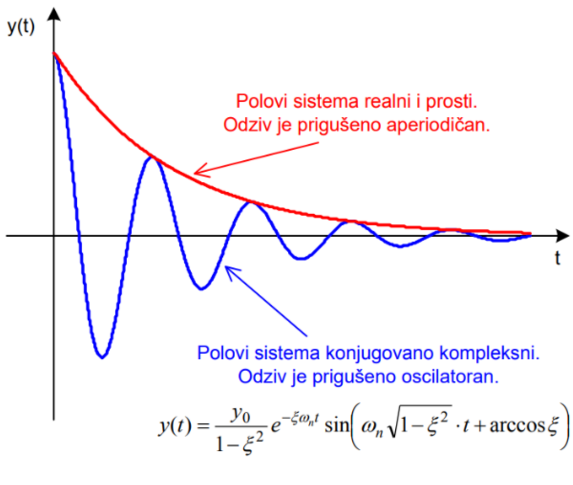
Модел другог реда – формула и пример

$G(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot e^{-s\tau}$

k-појачање

ω_n – непригушена временска учестаност

ζ – коефицијент пригушења



Утицај ζ на локацију полова (питање 25.)

Утицај ω_n и ζ

карактеристична једначина за одзив модела 2.реда: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

реални корени $\zeta \ge 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

конј.-комплексни корени $\zeta < 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Критично-апериодичан одзив (питање 25.)

Пригушен одзив – график (слика десно)

30. Нумеричко решавање алгебарских једначина. Типови проблема. Метода најмањих квадрата.

- Нумеричко решавање система линеарних алгебарских једначина
  - регуларан случај
  - преодређен систем једначина: методом најмањих квадрата
- Нумеричко решавање система нелинеарних алгебарских једначина

Подпитања:

Како изгледа линеаран модел у простору стања?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Како изгледа решење ако је модел одређен?

За одређен модел постоји једно решење (један случај од n вредности)

m=n број непознатих и једначина једнак

развијен облик

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

матрични облик

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

услов за постојање решења : $\det(A) \neq 0$

математичко решење : $x = A^{-1} \cdot b$

решење у juliji : $x = A \backslash b$

Како изгледа решење ако модел није одређен?

n>m неодређен (број непознатих већи од броја једначина) решење није једнозначно

n<m преодређен (број непознатих мањи од броја једначина) систем не мора имати решење; оно се може наћи уз додатне параметре

Која се метода користи ако је систем преодређен? Дефинисати

Користи се метода најмањих квадрата

Уводе се грешке једначина: $e_1, e_2, \dots, e_m$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = e_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = e_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = e_m$$

Ukupno odstupanje:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$$

Problem postaje

$$\min_{x} \mathcal{J} = \min_{x} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2 = \min_{x} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - b_k)^2$$

...

- Potreban uslov za minimum $\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$ je $\nabla\mathcal{J} = \mathbf{0}$

$$\nabla\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- tj.

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} (a_{k1}x_1 + \cdots + a_{ki}x_i + \cdots + a_{kn}x_n - b_k)^2\right) = \sum_{k=1}^{m} e_k \frac{\partial e_k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}e_k = [a_{1i} \quad a_{2i} \quad \dots \quad a_{mi}] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_m \end{bmatrix} = 0$$

$$\nabla\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m1} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

Pseudoinverzija matrice A:

$$\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$$

Нумеричко решавање нелинеарних алгебарских једначина

проблем садржи нелинеарне функције

Поступак долажења до решења је итеративан

претпостави се почетно решење : x_0

сваку наредну итерацију се налази Δx_k ,тако да је решење ближе решењу проблема : $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$

1.) Њутнов поступак

$f(x) = 0$ проблем

$f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)\Delta x_k = 0$ алгоритам

$\Delta x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

тест краја:

$|\Delta x_k| \leq \varepsilon_x$ промена x довољно мала

$\frac{1}{2} f(x_k)^2 \leq \varepsilon_j$ функција је довољно блиска нули

$k > k_{max}$ број итерација већи од максималног (задатог)

2.) Гаус-Њутнов поступак

Брзо завршавање; конвергенција у околини оптимума, али могућа дивергенција у почетним итерацијама

За овај алгоритам је неопходно дефинисати вектор функција $f(x)$ и Јакобијана $J(x) = \nabla f(x)$

Према аналогији са методом најмањих квадрата

$$\mathrm{A} \leftrightarrow J(x) \qquad x \leftrightarrow \Delta x \qquad b \leftrightarrow -f(x) \quad \rightarrow \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad \leftrightarrow \quad \Delta x = -\left(J^T(x) J(x)\right)^{-1} J^T(x) f(x)$$

тест краја:

$||\Delta x_k|| < \varepsilon_x$ промена x довољно мала

$J(x_k) < \varepsilon_j$ функција је довољно блиска нули

$k > k_{max}$ број итерација већи од максималног (задатог)

3.) Градијентни алгоритам

Брзо напредовање у почетним итерацијама, али споро на крају у околини оптимума; велики број итерација

Тражи се минимум од Јакобијана $J(x)$,

тако да Δx_k треба изабрати да $J(x_k) > J(x_{k+1}) \quad \rightarrow \quad \Delta x_k = -h \cdot \nabla J(x_k), \ \ h > 0$

Градијент алгоритам се назива алгоритам најстрмијег пада јер је корекција сразмерна ∇J (најбржи пораст) али са супротним предзнаком, те је најбржи пад

$$J(x_k) = \frac{1}{2} f^T(x_k) \cdot f(x_k)$$

$$\Delta x_k = -h \cdot \nabla J(x_k), \ \ h > 0$$

$$\nabla J(x_k) = \nabla\left(f^T(x_k) \cdot f(x_k)\right) = J^T(x_k) \cdot f(x_k) \qquad J = \nabla f$$

$$\Delta x_k = -h \cdot J^T(x_k) \cdot f(x_k), \ \ h > 0$$

4.) Левенберг-Маркарт

Комбинује Гаус-Њутнов и градијентни алгоритам

Погодно је у почетку користити градијентни, а касније Гаус-Њутнов

$$\Delta x_k = -(J^T(x_k) \cdot J(x_k) + \lambda_k I)^{-1} \cdot J^T(x_k) \cdot f(x_k), \ \ \lambda_k > 0$$

Adaptira λ_k tokom iteracija

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \nu \lambda_k, & \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) > \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_{k-1}) \\ \frac{1}{\nu} \lambda_k, & \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) \leq \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_{k-1}) \end{cases}, \quad \nu > 1$$

Gaus-Njunov algoritam

$$\Delta \boldsymbol{x}_k = -\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

Gradijentni algoritam

$$\Delta \boldsymbol{x}_k = -h \cdot \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k), \qquad h > 0$$

$$\lambda_k \to \infty: \ \Delta \boldsymbol{x}_k = -\frac{1}{\lambda_k} \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

$$\lambda_k \to 0: \ \Delta \boldsymbol{x}_k = -\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

Како градијенти метод обезбеђује смањење функције циља?

Бира Δx_k тако да $J(x_k) > J(x_{k+1})$, то ради тако што уведе $h > 0$ $\quad \Delta x_k = -h \cdot \nabla J(x_k)$

31. Нумеричко решавање обичних диференцијалних једначина: проблем, Ојлерове методе

почетни проблем: $\frac{\partial y}{\partial t} = f(y,t) \qquad y(t_0) = y_0$

основна идеја: заснива се на одређивању y_{i+1}, који се може одредити на основу развоја у Тејлоров ред у околини тачке (t_i, y_i)

- Vrednost y_{i+1} se može odrediti na osnovu razvoja u Tejlorov red u okolini tačke (t_i, y_i)

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y = y_i + \frac{dy_i}{dt}h + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{h^2}{2!} + \ldots$$
$$h = t_{i+1} - t_i$$

- Za h malo y_{i+1} se aproksimira sa

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{dy_i}{dt}h$$

Primetiti da $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ znamo.

- Nakon diferenciranja se dobija

$$\frac{dy_{i+1}}{dt} = \frac{dy_i}{dt} + \frac{d^2y_i}{dt^2}h \qquad \text{ili} \qquad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \left(\frac{dy_{i+1}}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{1}{h}$$

- Smenom u gornji izraz se dobija bolja aproksimacija

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dt}h + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{h^2}{2!} = y_i + \frac{dy_i}{dt}h + \left(\frac{dy_{i+1}}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

U svakoj iteraciji :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dt}h + \left(\frac{dy_{i+1}}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Računanje izvoda traži vrednost y_{i+1} koju još ne znamo!

1. Uvodi se predviđena (*predicted*) vrednost

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{dy_i}{dt}h$$

metod 1. reda
(ako se ne radi drugi korak)

2. I ona se koriguje

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Korekcija, a ujedno i procena greške

$$y_{i+1}^c = y_{i+1}^p + \varepsilon_i$$

metod 2. reda

---

32. Нумеричко решавање обичних диференцијалних једначина: Ојлерове метода и промењиви корак интеграције

Не знамо унапред колики корак интеграције треба да поставимо. Погодније је да алгоритам за решавање обичних диференцијалних једначина сам проглашава корак на основу релативне и апсолутне грешке. Зато се уводи промењиви корак интеграције.

Код рачунања кориговане вредности, ε директно зависи од h и уколико је корекција већа од унапред прописане вредности, онда корак h треба смањити и обрнуто.

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Подпитања:

Дефиниција Ојлерове методе

Основна идеја

Који су почетни елементи?

Процењена вредност

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{dy_i}{dt}h$$

Коригована вредност

$$y_{i+1}^c = y_{i+1}^p + \varepsilon_i$$

Шта је проблем код фиксног корака интеграције?

не може да се прилагођава по итерацијама, због тога је мање ефикасна

Како се исправља корак интеграције?

На основу величине ε прилагоди се корак h (за велико ε смањити корак, за мало ε повећати корак)

Формула за ε?

Добра особина фиксног корака интеграције? увек знамо вредност, рачунање је једноставније

33. Нумеричко решавање обичних диференцијалних једначина – Рунге-Кута методе

Подпитања:

Опиши шта ова метода ради, који јој је циљ, од чега креће, шта јој је познато?

решава обичне диференцијалне једначине првог реда

Уопштен Ојлеров поступак, увели су више чланова који боље апроксимирају тражену вредност

Ако користимо 2 члана, онда се говори о методи 2.реда . . .

Претпоставили су да постоје неке константе које се користе у прорачуну и да то не морају бити тачне вредности које је ставио Ојлер

Познато је y_i у тренутку t_i и извод $f'(y,t)$, тражи се y_{i+1}

Како Рунге-Кута метода решава диференцијалне једначине вишег реда?

Једначине се препишу у систем од n диференцијалних једначина првог реда

уводи се онолико k-променљивих колико има једначина у систему

Зашто говоримо о фамилији Рунге-Кута метода 2.реда?

Рунге-Кута методе уводе међузависне параметре где постоји слобода избора њихових вредности

постоји бесконачно много метода 2.реда - фамилија

Како би Рунге-Кута реализовао Ојлерову једначину другог реда?

$y_{i+1} = y_i + c_1 k_1 + c_2 k_2$

$k_1 = f(y_i, t_i) \cdot h \qquad k_2 = f(y_i + a_2 k_1, t_i + a_2 h) \cdot h$

добија се систем 3 једначине са 2 непознате, те постоји више решења за c_1, c_2, a_2

Крути модели

Код крутих модела неке променљиве стања се могу мењати веома споро у односу на интервал симулације, а друге много брже. Методе које нису дизајниране за круте моделе нису ефикасне јер не примају мали корак интеграције.

Добре и лоше особине?

добра: боља апроксимација од Ојлерове методе

лоша: методе 2.реда немају тачност па се користе методе 3.реда

Где су апроксимације?

Апроксимације су у вишим деловима(степенима) Тејлоровог развоја

Шта значи Рунге-Кута 45?

Рунге-Кута методе 4-5 реда

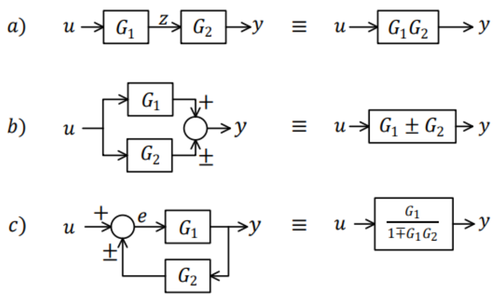
Добијају се када се из Тејлоровог реда узму првих 5 сабирака

34. Структурни блок дијаграм система аутоматског управљања. Алгебра функција преноса.

Структурни блок дијаграм је графичка представа математичког модела. Посматра се сложен модел описан повезаним деловима. Сви делови су линеарни модели за себе.

Елементи: блок/гране, сигнали (чворови, сабирачи)

- Transformacije:
  a) Redna veza
  b) Paralelna veza
  c) Povratna sprega



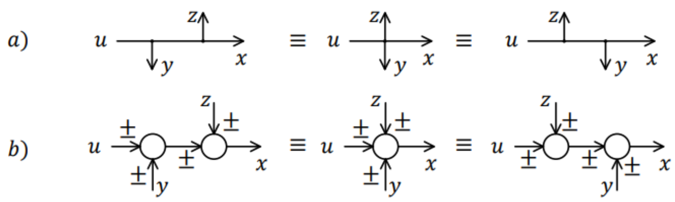
$z = G_1 u, y = G_2 z \rightarrow y = G_1 G_2 u$

$y_1 = G_1 u, y_2 = G_2 u, y = y_1 \pm y_2 \rightarrow y = (G_1 \pm G_2)u$

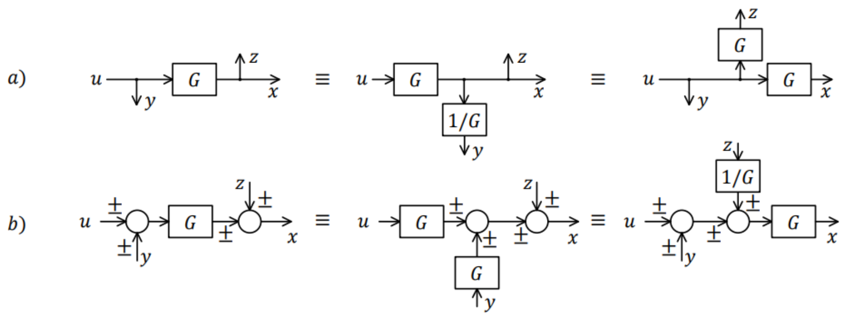
$e = u \pm G_2 y, y = G_1 e, y = G_1 u \pm G_1 G_2 y \rightarrow y = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2} u$

- Pravilo: isti odnos ulaz-izlaz pre i posle transformacije!

Trivijalne transformacije sa signalima



Jednostavne transformacije izvlačenja bloka iz grane



Подпитања:

Шта је структурни блок дијаграм и који су његови елементи?

Основне трансформације?

Тривијалне трансформације

Пример блок дијаграма?

Кад и зашто се користе једноставне трансформације?

Уколико не можемо искористити неку од основних трансформација, морамо користити једноставне како бисмо на крају дошли до функције преноса

Симулација и софтверске библиотеке

35. Решавање система линеарних алгебарских једначина употребом Julia софтвера. Метода најмањих квадрата.

А) одређен систем (услов за постојање решења : $\det(A) \neq 0$)

математичко решење : $x = A^{-1} \cdot b$

julija : $x = A\backslash b$ "\" „десно дељење“ - уграђен оператор за решавање проблема

нпр:

$x_1 + 2x_2 = -2.5$

$-x_1 + 3x_2 = 0.5$

julia>> A = [1 2; -1 3]

julia>> b = [-2.5; 0.5]

julia>> x = A\b

$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = [-2.5 \quad 0.5]$

julia>> A = [1 2; -1 3]

julia>> b = [-2.5 0.5]

julia>> x = A/b

Б)преодређен користи се метода најмањих квадрата → $x = (A^T A)^{-1} A^T b$

julija : $inv(A^T A) * A^T * B$

грешка: $e = A * x - b$

циљ: $J = \frac{1}{2}\, e` * e$

Код решавања система нелинеарних алгебарских једначина у јулији, поступци су итеративни.

Њутнов алгоритам мора имати дефинисано критично стање, зауставно стање и Δx_k.

Гаус-Њутнов мора имати дефинисано вектор ф-ја $f(x_k)$ и $J(x) = \nabla f(x)$

градијентни мора имати дефинисано Δx_k и $J(x_k)$

Подпитања:

Шта је опсег?

Генерисање растућег/опадајућег низа еквидистантних вредности

Посматра се као посебан тип у julijи

Ставити последњу врсту матрице на почетак

*julia>> A = round(rand(4,4)*10)*

julia>> v = A [end, :]

julia>> A = [v`, A[begin:end-1, :]]

Трансформације матрице

inv(A) *det(A)* *A`* (транспоновање матрице) ...

Разлика између низова и n-торки

Торке су сличне низовима, али се њихове вредности не могу мењати након инцијализације

Оставити само парне колоне у матрици

julia>> A = [:, 2, 2:end]

Метода најмањих квадрата

(пример горе)

36. Решавање обичних диференцијалних једначина употребом Julia софтверске библиотеке DifferentialEquations (опис једначина, параметри модела, избор алгоритма, параметри алгоритма)

Пакет DifferentialEquations решава ОДЈ, дискретне једначине , стохастичке ОДЈ, стохастичке ПДЈ.

Прво се дефинише проблем, затим се решава користећи DifferentialEquations пакет, потом се резултати анализирају.

Разликују се описи једне ОДЈ и система више ОДЈ (више једначина 1.реда)

Кораци:

1. укључе се потребни пакети	→	using DifferentialEquations	
2. дефинише се проблем	→	функција f	$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y, p, t) \qquad y(0) = y_0$
3. prob = ODEProblem(f,y0,t,p)	→	y0 – почетне вредности зависне променљиве	
	→	t – посматрани временски интервал	
	→	p – параметри модела	
4. sol = solve(prob)	→	sol.t : временски тренуци	
	→	sol.u : одговарајуће вредности зависне променљиве	

Подпитања:

Основно о пакету DifferentialEquations

Кораци решавања ОДЈ у јулији?

Алгоритми?

solve (prob, algoritam)

BS3()	варијанте Рунге-Кута 23
DP5() или TSit5()	варијанте Рунге-Кута 45
Rosenbrock23()	модификован Рунге-Кута 23 за круте проблеме

Параметри нумеричког прорачуна (ово нису параметри модела!!!)

релативна грешка reltol (подразумевана вредности 10^{-3})

апсолутна грешка abstol (подразумевана вредности 10^{-6})

фреквенција снимања решења - saveat

памћење само крајње тачке решења (save_everystep = false)

корак интеграције - dt, максимални корак - dtmax, минимални корак dtmin

пример: r = solve(problem, saveat = 0.01, abstol = 1e-9, reltol = 1e-6)

Пример:

$y_1'(t) = -2y_2 + t \qquad y_1(0) = 2$

$y_2'(t) = y_1 y_2 \qquad y_2(0) = 1$

$function\ f!\,(dy, y, p, t)$

$dy[1] = -2 * y[2] + t$

$dy[2] = y[1] * y[2]$

end

$prob = ODEProblem(f!, [2.0\ , 1.0], (0, 15.0))$

37. Начини представљања модела и конверзије у Julia софтверском пакету ControlSystems.

Употребљава се за моделовање, анализу (симулације) и пројектовање система аутоматског управљања. Моделује линеарне временски непромењиве моделе. Једна променљива се употребљава да опише модел система. Садржи методе за анализу понашања модела - симулације.

Подржани су линеарних временски непромењиви модели описани као:

– модел у простору стања - типа **ss**

– функција преноса описана количником полинома - типа **tf**

– функција преноса описана описана преко нула/полова/појачања - типа **zpk**

Временски дискретни модели имају додатни параметар - време одабирања **Ts**.

Модел се описује једним објектом (промењљивом)

Сви наведени типови објеката су изведени из LTI (Linear Time invariant) типа објекта и са њиме деле неке заједничке особине.

нпр:

julia>> ss(A,B,C,D,Ts) (*Ts* – за дискретне системе, код континуалних се само изостави)

julia>> tf(P,Q,Ts)

julia>> zpk(nule, polovi, pojacanje, Ts)

Функције (конструктори модела) tf, zpk и ss се могу употребити да конвертују раније унет модел у жељени тип.

$h = tf(1, [1,2,1])$

$h_2 = zpk(h)$

Конвертовање временски континуалног у временски дискретан модел се вржи **c2d**(h, Ts)

---

38. Анализа понашања модела у Julia софтверском пакету ControlSystems.

Подпитања:

Како се спроводи?

Анализа понашања модела се може спровести у временском и у комплексном домену.

Анализа у временском домену се односи на симулације, тј. на израчунавање излаза из модела када се побуди жељеним улазом.

Функција за израчунавање излаза?

step - даје јединични одзив (улаз је Хевисајдова функција $h(t)$)

impulse - даје импулсни одзив (улаз је Дираков импулс $\delta(t)$)

lsim - даје одзив на улаз задат у виду низа вредности y.

Такође омогућава да се дефинише и почетна вредност променљивих стања x0.

пример:

y,t,x = step(model, tu)

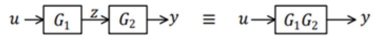
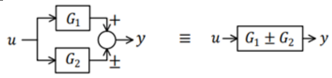
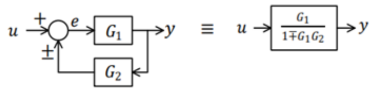
y,t,x = impulse(model, tu)

y, t, x = lsim(model, u, t; x0)

Како се утиче на временски корак симулације?

t = 0 : 0.1 : 6 delay функција

39. Формирање сложених линеарних модела у Julia софтверском пакету ControlSystems.
Делови модела су описани променљивима (објектима) ss, zpk, tf ...
На делове модела (променљиве) се могу применити трансформације модела
алгебра блокова функција преноса је примењива на све LTI типове објеката (променљивих)
Поступно повезивање делова модела:

редна веза	функција series или оператор множења „*“	 $z = G_1 u, y = G_2 z \rightarrow y = G_1 G_2 u$
паралелна веза	функција parallel или оператор сабирања „+“ или одузимања „-“	 $y_1 = G_1 u, y_2 = G_2 u, y = y_1 \pm y_2 \rightarrow y = (G_1 \pm G_2)u$
повратна спрега	функција feedback	 $e = u \pm G_2 y, y = G_1 e, y = G_1 u \pm G_1 G_2 y \rightarrow y = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2} u$

Поред наведених, могу се користити и оператори степеновања "^" и дељења "/".

append - обједињавања делова у неповезан модел M_d
Добија се блок дијагонална форма резултујућег модела
connect - везе модела се представе као јединичне повратне спреге излаза M_d на његове улазе
(није део ControlSystems пакета)

Идентификација

Идентификација система се бави формирањем модела на основу података из посматраног система

– ради се о експерименталном поступку моделирања објекта, који се заснива на мерењу улаза и излаза објекта у коначном броју тренутака и процесирању резултата мерења

– технике идентификације система се баве организацијом експеримента мерења и алгоритмима обраде мерних података који дају довољно тачне процене модела

-модели и идентификација:

- White-box модел – искључиво теоријски изграђен
- Black-box модел – настао искључиво на основу података из мерења
- Gray-box модел – комбиновано: теорија одреди облик (класу) модела, а преко мерења се израчунају непознати делови модела (типично непознати параметри)
- Параметарска идентификација - уколико је модел познат са тачношћу до непознатих параметара

-спровођење и идентификација

- Off-line идентификација - формирање модела се врши ван нормалног рада објекта
- On-line идентификација – одређивање модела се врши током нормалног рада објекта – непосредно након мерења
  Процес је аутоматизован – без утицаја човека
- Идентификацији у реалном времену - је on-line идентификација где се процесирање мерених података (и ажурирање модела) врши после сваке периоде одабирања

40. Задех-ов опис проблема идентификације. Примена и начини спровођења. Поступак идентификације.

Задех-ов опис проблема идентификације: „Идентификација је одређивање на основу улазних и излазних сигнала процеса, модела из одређене класе модела, који је еквивалентан процесу на коме су извршена одређена мерења“. Дефиниција је општа и обухвата и проблем одређивања структуре модела.

У поступку идентификација треба:

- усвојити структуру модела
- дефинисати критеријум еквиваленције (критеријум за оцену ваљаности модела)
- извршити мерења (експериментално добијени подаци)

Подпитања:

Задехова дефиниција идентификације

Кораци итеративног поступка идентификације

1. Направи се експеримент и прикупе улазно/излазни подаци процеса који се идентификује
2. Испитају се добијени подаци: елиминишу се грубе грешке и трендови; треба изабрати употребљив део података и по потреби га филтрирати
3. Изабере се или дефинише класа модела (структура модела)
4. Одреди се (израчуна) конкретан модел из изабране класе модела на основу улазно/излазних података и усвојеног критеријума оптиманости
5. Испитају се особине усвојеног модела
6. Уколико модел не задовољава треба се вратити:
   - на корак 4 и променити алгоритам идентификације
   - на корак 3 и променити структуру модела
   - на корак 1 или 2 и обезбедити нове улазно/излазне податке

Шта одређује резидуал?

одређује дисперзију сигнала шума

$\varepsilon = Y - S\hat{q}$ где су појединачне вредности $\varepsilon_k = y_{vk} - u_{vk}\hat{q}$, $k = 1,2, \dots, K$

Особина идентифиабилности

Особина модела која се везује за могућност процене одређеног модела (да ли му се параметри могу одредити)

Модел није идентифиабилан ако су функције осетљивости линерно зависне $\det(S^T S) = 0$

Функције осетљивости $U_i(t,q) = \frac{\partial y(t,q)}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\dots,r$

нпр: Да ли је систем $y(t) = (q_1 + q_2)u(t)$ идентифиабилан? НИЈЕ јер су $\frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{\partial y}{\partial q_2}$ линеарно зависне

41. Методе параметарске идентификације (кратак опис линеарних и нелинеарни модела и метода идентификације)

линеаран модел → $y(t) = q \cdot u(t)$ нелинеаран модел → $y(t) = q \cdot u(t) \underline{+ a}$

На основу улаза и излаза појачивача одредити непознато појачање q.

Тачну вредност параметра q никада нећемо знати, али можемо направити (израчунати) његову процену $\hat{q}$.

Метода идентификације, процена вредности непознатих параметара

Параметарска идентификација је одређивање модела који је познат са тачношћу до непознатог параметра.

Укупна грешка се исказује као сума разлике измерених излаза y_{vk} и излаза модела y_k:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}(y_{vk} - y_k)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}(y_{vk} - q \cdot u_k)^2$$

Потребан услов за минимум од $\mathcal{J}$:

$$\nabla\mathcal{J} = \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial q} = -\sum_{k=1}^{K} e_k u_k = -\sum_{k=1}^{K}(y_{vk} - q \cdot u_k)u_k = 0$$

$$\left(\sum_{k=1}^{K} u_k^2\right) \cdot \hat{q} = \sum_{k=1}^{K} u_k y_{vk}$$

$$S^T S \cdot \hat{q} = S^T Y$$

$$\hat{q} = (S^T S)^{-1} S^T Y$$

$S = [\, u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_K \,]^T$ вектор улаза

$Y = [\, y_{v1} \quad y_{v2} \quad \cdots \quad y_{vK} \,]^T$ вектор измерених излаза

---

42. Параметарска идентификација и метода најмањих квадрата (LS алгоритам)

Подпитања:

Пример модела (систем где је излаз линеаран по непознатим параметрима)

$$y_v(t) = \varphi_1(t)q_1 + \varphi_2(t)q_2 + \cdots + \varphi_p(t)q_p + v(k)$$ $v(k)$ - шум

$$y_v(t) = \Phi(t)\, q + v(k)$$ q – вектор непознатих конст. параметара

Процена више параметара преко методе најмањих квадрата

Базира се на процени једног параметра, само што се процена врши *p* пута

p непознатих параметара и исто толико функција које зависе од *m* улаза

$\hat{q} = (S^T S)^{-1} S^T Y$

Непомерена процена параметара

Средња вредност процене је $E\{\hat{q}\} = q + (S^T S)^{-1} S^T E\{N\}$

Процена параметра је непомерена када је $E\{\hat{q}\} = q$, а то важи када је шум бео, јер му је средња вредност $E\{N\} = 0$

Ефикасна процена параметара

Расипање се процењује преко коваријационе матрице $C = E\{(\hat{q} - q)(\hat{q} - q)^T\}$

Процена параметара је ефикасна када за велики број мерења *K* важи да $E\{(\hat{q} - q)(\hat{q} - q)^T\} = {\sigma_q}^2$ (због аутокорелације код белог шума) тежи нули, тј. $\lim_{K\to\infty} {\sigma_q}^2 \to 0$

Тачне вредности параметара

Поступак параметарске идентификације је тачан ако је процена непомерена и ефикасна

Услови: 1) шум је бео 2) велики број мерења *K*

Бели шум

Особине	
средња вредност = 0	$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
стандардна девијација = 1	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$ Disperzija je σ^2
аутокорелација = 0 за све помераје сигнала	$R(k) = \frac{1}{(N-k)\sigma^2}\sum_{i=1}^{N-k}(x_i - \mu)(x_{i+k} - \mu)$

Може се представити генератором случајних бројева по нормалној расподели

Псеудослучајан бинарни сигнал

То је временски дискретизован сигнал са вредностима $\{a, -a\}$ које се насумично мењају у сваком тренутку одабирања

Користи се као улаз у идентификацији динамичког модела

Обојен шум

Добија се пропуштањем белог шума кроз филтер

а) описан је функцијом дискретног преноса

б) који комбинује неколико последњих вредности

43. Идентификација параметара ARX модела

ARX(*Auto-Regressive with eXtra inputs*) модел : *r = j = p = 0*

линеаран, временски дискретан, динамички модел, чије се понашање у околини стационарног стања може описати

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + v(k) \quad , \qquad v(k) – \text{бели шум}$$

или у разввијеном облику

$$(1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n})y(k) = (b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_mz^{-m})u(k) + v(k)$$

Модел је линеаран по параметрима и параметри се могу идентификовати методом најмањих квадрата

$$\hat{q} = (S^TS)^{-1}S^TY$$

Generalizovana struktura vremenski diskretnih modela (u Z domenu):

$$A(z)y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}u(t) + \frac{C(z)}{D(z)}v(t)$$

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}$$
$$B(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_mz^{-m}$$
$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + \cdots + c_rz^{-r}$$
$$D(z) = 1 + d_1z^{-1} + \cdots + d_jz^{-j}$$
$$F(z) = 1 + f_1z^{-1} + \cdots + f_pz^{-p}$$

Model uključuje merljivi (deterministički) ulaz $u(t)$ i stohastički poremećaj $v(t)$

Имплементација захтева да се убаци додатан параметар у методу – кашњење d: $A(z)y(k) = z^{-d}B(z)u(k) + v(k)$

Добро је познавати кашњење јер се тиме смањује број *b* параметара који се идентификује.

Ако се кашњење не моделује а постоји

идентификује се *B* параметар, иако се зна да је *y=0*

Подпитања:

Дефиниција

Идентификација

Кашњење улаза ARX модела

44. Идентификација параметара ARMAX модела

ARXMAX(*Auto-Regressive Moving Average with eXtra inputs*) модел : *j = p = 0*

линеаран, временски дискретан, динамички модел, општији од ARX модела јер претпоставља да је шум обојен

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k)$$

или у разввијеном облику

$$\begin{aligned} y(k) + a_1y(k-1) + \cdots + a_ny(k-n) \\ = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \cdots + b_mu(k-m) + v(k) + c_1v(k-1) + \cdots + c_rv(k-r) \end{aligned}$$

И овај модел је линеаран по непознатим параметрима, али уз параметре полинома C не стоје „познате“ вредности па се не може директно применити метода најмањих квадрата, већ се она реализује у 2 корака.

1.) направи се адекватан ARX модел и процене се његови параметри

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k) \quad /{:}\,C(z)$$

$$\frac{A(z)}{C(z)}y(k) = \frac{B(z)}{C(z)}u(k) + v(k)$$

$$H(z)y(k) = G(z)u(k) + v(k) \qquad G, H \text{ се одреде}$$

2.) процени се шум и одреде се параметри ARMAX модела

$e(k) = H(z)y(k) - G(z)u(k), \quad k = 0,1,2,\dots,K-1$ грешка једначина

$\hat{v}(k) = e(k)$ процена за шум

$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)e(k)$ методом најмањих квадрата се одреде *A, B, C*

У оба корака је излаз модела линеаран по непознатим параметрима које множе раније вредности улаза и излаза

Подпитања:

Дефиниција

Идентификација

Кашњење улаза ARMAX модела

Кашњење исто као код ARX модела - d: $A(z)y(k) = z^{-d}B(z)u(k) + C(z)v(k)$

Одређивање реда AR(MA)X модела

Процес рачунања параметара модела се покреће више пута за разне комбинације дужина полинома A и B и посматра се вредност функције циља $\mathcal{J}$. Добро процењен модел има мало $\mathcal{J}$ уз што мање дужине полинома

45. Идентификација промењљивих параметара. Рекурзивни метод најмањих квадрата

Подпитања:

Погодности РМНК

Када се параметри модела мењају током рада система, те се не може користити МНК

Користи се рекурзивна метода најмањих квадрата

Погодна је и због бржег завршавања и мање меморије

Користе се on-line и real-time идентификација

Идеја РМНК

За одређивање $\hat{q}(k+1)$ употребити постојећу процену параметара $\hat{q}(k)$ и кориговати је на основу нових мерења излаза $y(k+1)$ и улаза (доданог у $\Phi^T(k+1)$)

$\hat{q}(k+1) = \hat{q}(k) + P(k+1)\Phi(k+1)(y(k+1) - \Phi^T(k+1)\hat{q}(k))$

Кораци РМНК

1.	прикупе се нове вредности улаза $u(k+1)$ и излаза $y(k+1)$
2.	формирају се $\Phi(k+1)$
3.	израчуна се $P(k+1)$
4.	израчуна се процена параметара $\hat{q}(k+1)$
5.	меморишу се: $P(k) = P(k+1)$ и $\hat{q}(k) = \hat{q}(k+1)$за наредни тренутак одабирања

Идентификација промењљивих параметара модела

Ако се параметри модела мењају током рада система онда је потребно вршити параметарску идентификацију у реалном времену

Тада је погодно дати већу важност скоријим мерењима, а давнашња мерења потиснути.

Фактор заборављања

Фактор заборављања је параметар ρ који се користи у функцији циља за РМНК када желимо да дамо мањи значај ранијим мерењима

$$\mathcal{J}_\rho = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \rho^{k-i}\,(y(i) - \boldsymbol{U}^T(i)\boldsymbol{q})^2, \qquad 0 < \rho \le 1$$

(типично је 0.98 < ρ ≤ 1)

Мања вредност ρ значи „брже заборављање“ старијих мерења

46. Итеративне методе параметарске идентификације (Гаус-Њутнов алгоритам) (питање 30.)

47. Итеративне методе параметарске идентификације (градијентни и Левенберг–Маркарт алг.)

Подпитања:

Уопштена употреба

Посматра се временски дискретан модел система где је излаз модела нелинеаран по непознатим параметрима

Поступак је итеративан, тј. у свакој итерацији се врши кориговање

Параметарска идентификација нелинеарних временски дискретних модела

- Posmatra se vremenski diskretan model sistema:
  $$\boldsymbol{x}(\mathrm{k}+1) = f(\boldsymbol{x}(k), u(k), \boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
  $$y(k) = \varphi(\boldsymbol{x}(k), u(k), \boldsymbol{q})$$
  gde je izlaz modela nelinearan po parametrima. Radi jednostavnosti model ima jedan ulaz i jedan izlaz
- Određivanje parametara prema kriterijumu opt.:
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} e_k^2(\boldsymbol{q})$$
  $$e_k(\boldsymbol{q}) = e(k, \boldsymbol{q}) = y_v(k) - y(k, \boldsymbol{q}),$$
  $$k = 0,1, \ldots, K-1$$
  tj. traženje $\hat{\boldsymbol{q}}$ za koje je $\mathcal{J}$ minimalno: $\min_{\boldsymbol{q}} \mathcal{J}(\boldsymbol{q})$

- Rešenje $\min \mathcal{J}$ se dobija iterativno
  $$\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + \Delta\boldsymbol{q}_n$$
  gde je n oznaka iteracije, a ne merenja!
- Početna procena parametara je $\boldsymbol{q}_0$
- Kriterijum zaustavljenje algoritma:
  $$\|\Delta\boldsymbol{q}_n\| = \sum_{i=0}^{r} \Delta q_i^2 < \varepsilon_q$$
  ili relativan odnos
  $$\left\|\frac{\Delta\boldsymbol{q}_n}{\boldsymbol{q}_n}\right\| < \varepsilon_q$$
  ili
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n) < \varepsilon_J$$
  Dodatan uslov: $n \le n_{max}$

Алгоритми

- Gradijentni algoritam
  $$\Delta\boldsymbol{q}_n = -h\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n), \qquad h > 0$$
- Gaus-Njutn algoritam
  $$\Delta\boldsymbol{q}_n = -\left(\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q}_n)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_n)\right)^{-1}\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n)$$
- Lavenberg-Markart algoritam
  $$\Delta\boldsymbol{q}_n = -(\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q}_n)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_n) + \lambda_n\boldsymbol{I})^{-1}\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n)$$
  gde se λ_n menja

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial q_i} = -\sum_{k=0}^{K-1} e(k,\boldsymbol{q})\frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial q_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial q_r} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$$

$$\boldsymbol{U}(k,\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_r} \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}^T(0,\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{U}^T(1,\boldsymbol{q}) \\ \ldots \\ \boldsymbol{U}^T(K-1,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} e(0,\boldsymbol{q}) \\ e(1,\boldsymbol{q}) \\ \ldots \\ e(K-1,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

Rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina $f_k(\boldsymbol{x}) = 0$

- Ukupna greška po svim jednačinama
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2(\boldsymbol{x})$$
- greška
  $$e_k(\boldsymbol{x}) = f_k(\boldsymbol{x})$$
- Za rešavanje se obezbeđuje
  - Vektor funkcija $f_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1,2, \ldots m$
  - Jakobijan, tj. izvodi svih $\boldsymbol{f}$ po svim $\boldsymbol{x}$

Parametarska identifikacija nelinearnih modela

- Ukupna greška po svim merenjima
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} e_k^2(\boldsymbol{q})$$
- greška
  $$e_k(\boldsymbol{q}) = y_v(k) - y(k,\boldsymbol{q})$$
- Za rešavanje se obezbeđuje
  - Funkcija izlaza modela $y(k,\boldsymbol{q})$ i merenje izlaza $y_v(k)$
  - Funkcije osetljivosti, tj. izvodi izlaza po svim parametrima $\boldsymbol{q}$

Употреба вештачких неуронских мрежа у моделирању

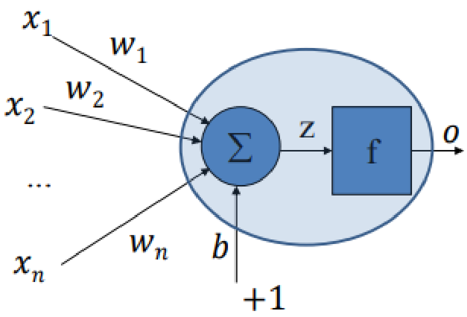
48. Модел вештачког неурона и активационе функције

Вештачке неуронске мреже (VNM) - Artificial Neural Networks

Неурон је основни процесни елемент VNM.

Садржи:

- улазе - x_i
- синапсе (тежински, пондеришући фактори улаза) w_i
- стање активације - z
- Излазну (активациону) функцију - f
- један излаз - o
- праг – b

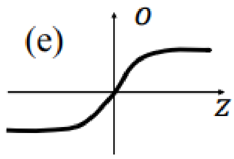


Подесиви параметри су: $w_1, w_2, \dots, w_n$ и b

$$o = f(z) = f(\sum_i w_i x_i + b)$$

Излазне, активационе функције неурона

a) linearna
b) pragovska funkcija
c) semi-linearna
d) log-sigmoidalna
e) hiperbolični tangens (tanh)
f) ReLU (*Rectified Linear Unit*)
g) Leaky ReLU
h) Maxout
i) ELU
...



$$a)\quad f(z) = a \cdot z$$

$$b)\quad f(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$c)\quad f(z) = \begin{cases} a, & z \geq q \\ \frac{a}{q} \cdot z, & -q \leq z \leq q \\ -a, & z \leq -q \end{cases}$$

$$d)\quad f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

$$e)\quad f(z) = \frac{2}{1 + e^{-z}} - 1$$

$$f)\quad f(z) = \max(0, z)$$

$$g)\quad f(z) = \max(0.1z, z)$$

$$h)\quad f(z) = \max(W_1 x + b_1, W_2 x + b_2)$$

$$i)\quad f(z) = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ \alpha(e^z - 1), & z < 0 \end{cases}$$

Подпитања:

Модел вештачког неурона

Излазне, активационе функције неурона

Линеарна	
Праговска	
Лог-сигмоидална	
Хиперболични тангенс	
ReLU	
. . .	

49. Модели вештачких науронских мрежа

-Састоји се од међусобно повезаних неурона

-Мотивација: значајна способност мреже да „рачуна“ када има довољно велик број неурона

-начин рачунања мреже (алгоритам) зависи од вредности тежинских фактора w_{ij}

-обучавање представља промену (подешавање) тежина w_{ij}

-учи на основу серије примера (узорака)

- Архитектура VNM модела

-Неурони се постављају у слојеве, слојеви су хијерархијски организовани где број неутрона варира по слојевима (Deep Learning: много слојева). Типови слојева: fully connected, convolutional, normalisation, ...

fully connected – тип слојева где се неурони повезују са свим неуронима претходног слоја или улазима

feed-forward – врло честа архитектура, одређује излаз само на основу улаза

рачунање одзива $o = f_k(W_k \dots f_1(W_1 x + b_1))$

Израчуна се одзив 1. скривеног слоја, одзив 2. слоја, ...сигнали пропагирају само унапред

Рачунање излаза модела

$Z = WX + B$ стање активације

$o = f(Z)$ излаз из слоја – функција активације

најбоље је да се појединачни вектори улаза x_i сложе у матрицу улаза X као вектори колоне

Рекурентна VNM одређује излаз на основу улаза и вектора стања (има интерну меморију)

Подпитања:

Уопштено о неуронској мрежи

Архитектура

Рачунање излаза модела

Рекурента (рекурзивна) VNM

50. Обучавање вештачких неуронских мрежа (BP алгоритам)

Функција циља $\mathcal{J}$ (*Loss function*) типично представља разлику (растојање) жељеног и оствареног излаза мреже. Циљ је да се функција циља $\mathcal{J}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{b})$ минимизује подешавањем параметара мреже ($\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{b}$).

За обучавање се употребљава обучавајући скуп – тј. подаци за обучавање. Обучавање се спроводи итеративно – у више циклуса (епоха).

Модели обучавања су:

- супервизорско (са учитељем)
  постоји обучавајући скуп, сачињен од парова: (улаз, жељени-излаз) $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)\}$
  Модел заснован на VNM треба да је предиктивно ваљан и лоше је када се мрежа научи само за податке на основу којих се тренирала.
  Обучавајући скуп се дели на 3 дела:
  1. Подскуп за обуку – користи се за промене параметара мреже
  2. Подскуп за контролу (краја обуке)
  3. Подскуп за тестирање обучене мреже (не користи се у обуци)
- несупервизорско (без учитеља)
  постоје само улазни подаци

Подпитања:

Идеја обучавања

Супервизорско обучавање

Функције циља – критеријум оптималности

Грешка Ep представља одступање једног елемента обучавајућег скупа

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(o_{pk} - y_{pk}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(o_p - y_p\right)^T\left(o_p - y_p\right)$$

Функција циља је укупна грешка

$$\mathcal{J} = \sum_{p=1}^{P} E_p$$

Оптималне вредности параметара се могу израчунати из ф-је циља тражењем: $\mathcal{J}(W, b) = \min\limits_{(W,b)} \mathcal{J}$

BP алгоритам (*Back-propagation*)

најчешће употребљаван алгоритам обуке VNM

Користи градијентни алгоритам за минимизацију функције циља

$\Delta w = -\eta\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial w}$, $\Delta b = -\eta\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial b}$, $0 < \eta < 1$ коефицијент брзине обучавања (*learning rate*)

За рачунање градијената примењује се рачунање извода сложене ф-је по променљивим параметрима

$$\frac{\partial E_p}{\partial W} = \frac{\partial E_p}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial W}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial b} = \frac{\partial E_p}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial b}$$

Кораци BP алгоритма:

1. иницијализују се тежине $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{b}$ на случајне мале вредности ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$)
2. постави се улаз $\boldsymbol{X}$ и израчунају се излази неурона $\boldsymbol{O}$ (преко излаза у скривеним слојевима)
3. израчуна се грешка Ep, тј. укупна грешка $\mathcal{J}$
4. Израчунају се градијенти $\mathcal{J}$ по параметрима и на основу њих: $\Delta\boldsymbol{W}$, $\Delta\boldsymbol{b}$ (где изводи пропагирају у назад - *back-propagation*)
5. коригују се параметри мреже: $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{b}$
6. Провери се да ли је мрежа обучена? Ако није наставља се новом епохом (од корака 2)

Шта је епоха?

епоха - једна итерација у процесу обуке где се тежине дотерују на основу једног пролаза кроз обучавајући скуп

51. Улога вештачких неуронских мрежа у моделирању и симулацији

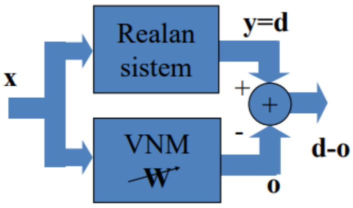
Способност NM да (произвољно) мапира улазе на излазе јој омогућава да моделира (и симулира) понашање система

Обучавање VNM улазно-излазним подацима из система представља поступак идентификације система

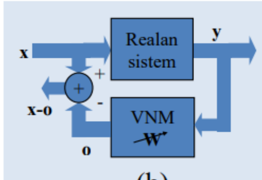
Могу се вршити:

директна идентификација (а) – битна и честа у употреби

инверзна идентификација (б) – ретка у употреби и није увек могућа



(a)



(b)

Идентификација објеката

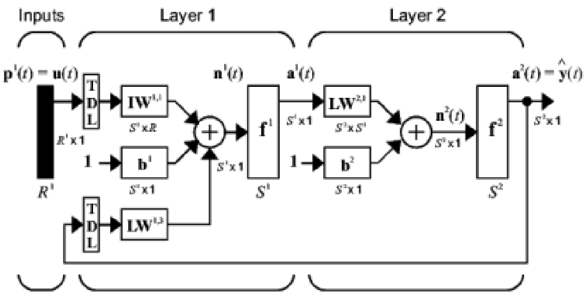
- Статички модел
  пресликавање не зависи од времена, те се модел може реализовати *feed-forward* неуронском мрежом
- Динамички модел
  пресликавање улаза зависи од времена, те се модел може реализовати или употребом рекурзивне неуронске мреже или *feed-forward* мрежом али уз моделовање кашњења (њени додатни улази су њене раније вредности улаза и излаза)

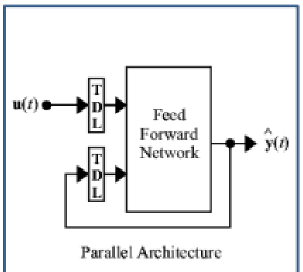
NARX tip mreže

(preuzeto iz Matlab dokumentacije)

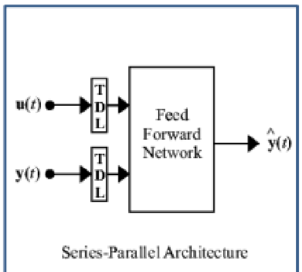
NARX = nelinearni ARX tip modela

$$y(t) = f(y(t-1), y(t-2), \ldots, y(t-n), u(t-1), u(t-2), \ldots, u(t-m))$$





Ulazi FF mreže su raniji ulazi i raniji izlazi iz mreže/modela.



Ulazi FF mreže su raniji ulazi i raniji izlazi iz sistema.

TDL - predstavlja zakašnjene vrednosti signala (*time-delay*)

Подпитања:

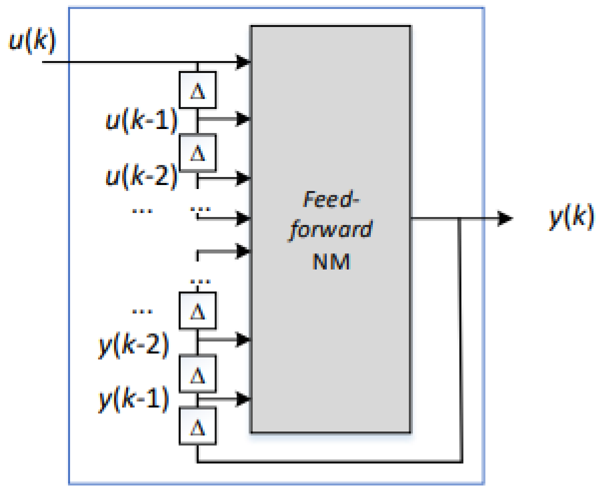
Објашњење примена

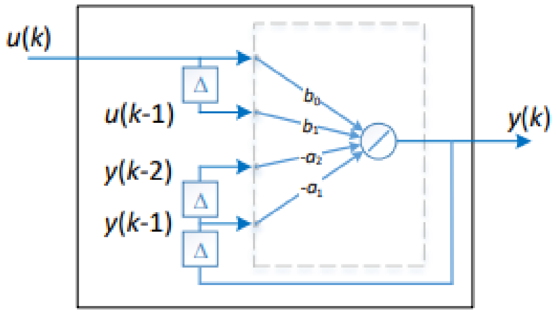
Идентификација објеката

NARX тип модела

52. Вештачка науронска мрежа као модел динамичког система

Пресликавање улаза на излазе зависи од времена (од стања у коме се систем налази) те се модел не може реализовати *feed-forward* неуронском мрежом.
Динамички модел се може реализовати употребом рекурзивних неуронских мрежа (RNN).
Потребно је успоставити стање у моделу (јер се њиме реализује меморија)- излази зависе од улаза и од стања
Десни модел користи *feed-forward* мрежу, али су њени додатни улази раније вредности улаза и излаза
(Δ представља кашњење за тренутак одабирања)

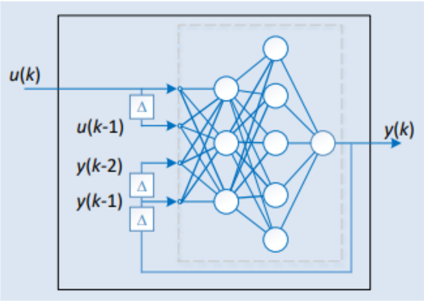




Посматра се модел описан диференцном једначином:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$$

Модел се може реализовати употребом једног неурона са линеарном активационом функцијом.



Идеја: Ако се уместо једног неурона употреби сложена *feed-forward* мрежа, онда се може моделовати знатно сложеније понашање.

---

53. Употреба вештачких неуронских мрежа у Julia софтверском пакету Flux

LinearNeuron – рачуна излаз неурона са линеарном активационом функцијом

Библиотека Flux уводи:

gradient	за израчунавање извода, обука неуронске мреже; циљ је тражење грешке
dense	опис слоја неурона (моделује full connected слој неурона, сви улази повезани на све неуроне)
descent	имплементира градијентни поступак са задатим коефицијентом брзине обучавања η
train!	спроводи се обука Прослеђују се: грешка, параметри, обучавајући скуп и алгоритам за минимизацију функције циља
chain	повезује слојеве неурона, излаз једног рачунања и улаз у наредно
momentum	имплементира градијентни поступак са њеном инерцијом

Бројни типови слојева неурона: Dense, RNN, Conv, MaxPool, MaxOut, ...

Неуронска мрежа као динамички модел – ARX модел
- да би формирао модел динамичког система употребљена је неуронска мрежа са пропагацијом сигнала унапред (*feed-forward*)

Сам поступак обуке, заснован на BP алгоритму, итеративно ажурира вредност параметара мреже употребиом извода функције циља по параметрима мреже
(W,b)

Симулација дискретних догађаја и редови чекања

54. Основни елементи и процеси система са редовима чекања.

Компоненте система:

- Ентитети (клијенти или потрошачи) – нешто што може да промени стање и користи услуге система
  особине: Број ентитета који улазе у систем
  Времена међудолазака ентитета
  Назив ентитета, …
- Редови (попуњавају се ентитетима) – попуњава се ентитетима који тренутно не могу бити послужени
  особине: правило управљања (начин доласка у ред и изласка из реда) – тзв. дисциплина реда и капацитет
- Ресурси (канали услуживања или сервиси) – задатак обраде захтева или опслуживање ентитета
  особине: заузетост (слободан/заузет)
  активност (активан, привремено неактиван, трајно неактиван)
  зависност

Карактеристични процеси (догађаји):

- доласци (долазак ентитета у систем),
- избор реда (избор реда чекања и улазак у одговарајући ред чекања),
- чекање (чекање у реду),
- избор канала (долазак на ред за опслуживање и избор канала услуживања),
- сервисирање (опслуживање)
- напуштање система или прелазак у неки други ред чекања (у овом случају се враћа на корак 2.)

Додатне специфичности система

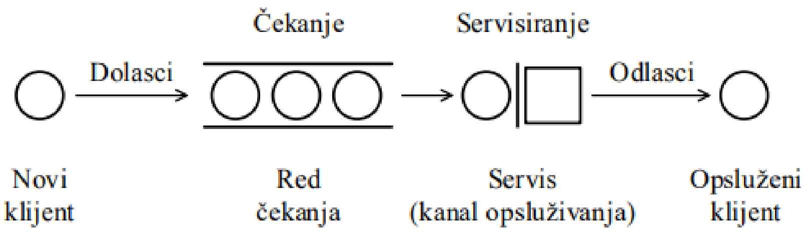
- Одустајање – клијенти који пристижу у систем могу одустати од чекања и напустити систем (нпр. у случају да је дугачак ред чекања, дошао у време паузе, и сл.)
- Напуштање – клијент стане у ред чекања и после неког времена уочи да је његов прогрес у реду толико спор да одустаје од чекања и напушта систем.
- Пребацивање – уколико у систему има више редова чекања, клијент који је стао у „спорији” ред може се пребацити у „бржи” ред.

Подпитања:

Основни елементи и особине

Који су процеси и догађаји?

Скицирати најједноставнији пример



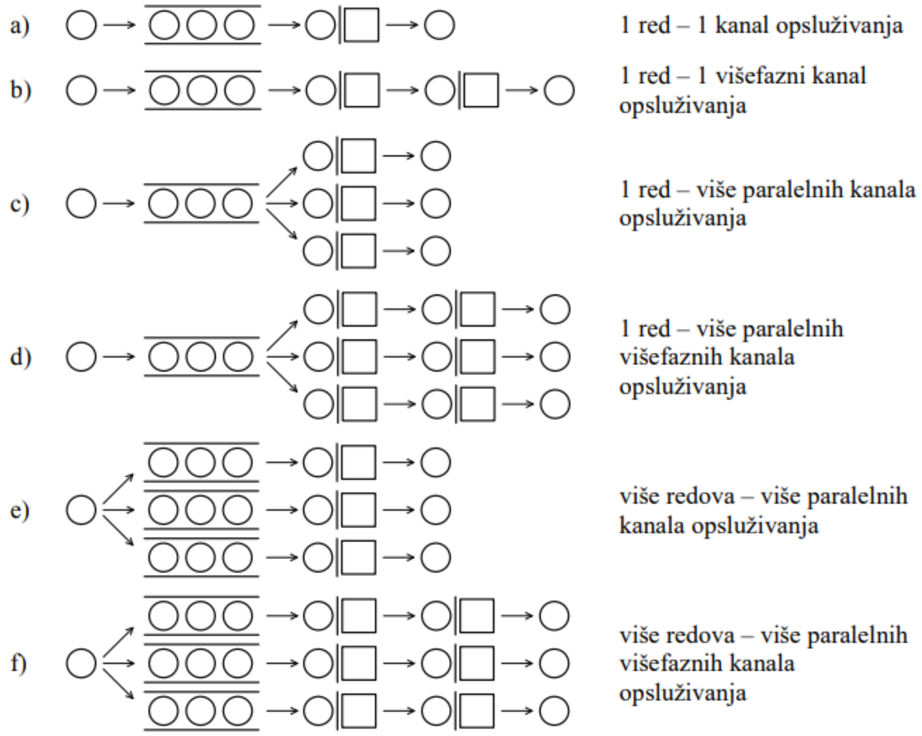
Додатне специфичности система

55. Симулације редова чекања (Типови система. Алгоритам. Параметри. Резултати симулације.)

Поделе се врше на основу:

броја редова чекања	један / више
броја канала услуживања	један / више
броја фаза сервисирања (неопходних сервиса за потпуно услуживање клијента)	једнофазни / вишефазни
дужине реда чекања	ограничен / неограничен
капацитета система (укупан број клијената који се може опслужити)	ограничен / неограничен

Типови система



Параметри симулације система - Разматрани систем се одликује следећим параметрима:

- Трајање симулације
- Укупан број ентитета – максималан број клијената у систему
- Ограничење дужине реда чекања
- s - број сервера (паралелних канала опслуживања) у систему
- λ – средње време до доласка новог клијента по јединици времена
- μ – средње време опслуживања клијента

Подпитања:

Поделе система; Типови система; Параметри (перформансе) на основу којих се анализира систем

Шта је циљ симулације?

Симулација за циљ има да уочи добре и лоше особине система, да се тако измени и побољша структура система

Шта ми одређујемо у симулацији?

време доласка d_i
почетак сервисирања p_i
трајање сервисирања s_i
завршетак сервисирања z_i (када наступа напуштање система или сервиса)
чекање у реду $w_i = p_i - d_i$

Резултати симулације (показатељи) (могу било који показатељи)

просечно време чекања = (укупно чекање) / (укупан број корисника)
вероватноћа чекања = (број корисника који су чекали) / (укупан број корисника)
просечно време сервисирања = (укупно време сервисирања) / (укупан број корисника)

Да ли се може симулирати у јулији?

Може се симулирату помоћу пакета SimJulia који је заснован на асинхроној обради догађаја у току симулације, при чему су сортирани по приоритету, времену размака

Стање система у симулацији Број клијената у систему
Дужина сваког реда чекања
Заузетост сваког сервиса

56. Кендалова нотација. Расподеле.

Кендалова нотација описује систем са редовима чекања у форми: $A\,/\,B\,/\,C\,/\,X\,/\,Y\,/\,Z$ где су:

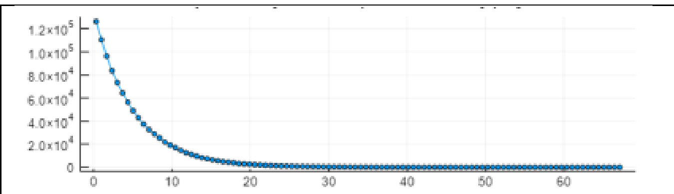
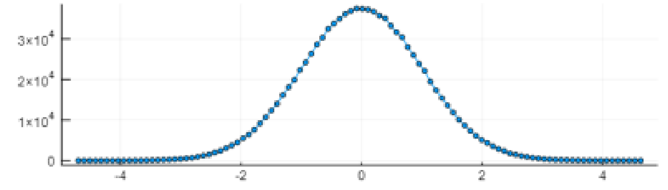
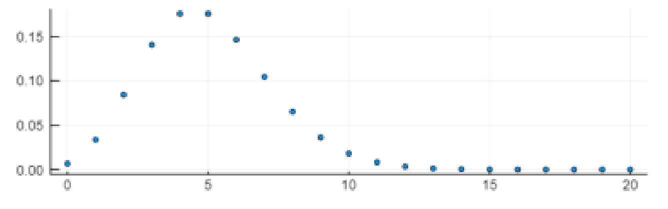
- A – правило долазака клијената (процес долазака - расподела времена „међудолазака“)
- B – правило сервисирања (процес услуживања – расподела времена сервисирања клијената)
- C – број паралелних сервера у систему
- X – правила опслуживања клијената из реда чекања – дисциплина реда
- Y – капацитет система (нпр. максимална дужина реда чекања)
- Z – величина популације

Подпитања:

Шта значи M/M/1?

систем са 1 каналом опслужава код кога су доласци и сервисирање (времена међудолазака) генерисани по експоненцијалној расподели

Графици функције расподеле

експоненцијална расподела		$f(x)=\lambda e^{-i\lambda x}$ f – ф-ја густине вероватноће λ - просечан број долазака у јединици времена
нормална расподела		$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ μ – средња вредност σ^2- варијанса - дисперзија
Поасонова расподела карактеристике: 1. Стационарност 2. Ординарност (ретки догађаји) 3. Одсуство меморије		$P(X=k)=e^{-\lambda\frac{(\lambda)^k}{k!}}$, $k\in\{0,1,2,\ldots\},\lambda>0$ λ – очекивана вредност случајне промењиве X

X – правила опслуживања клијената из реда чекања – дисциплина реда

FIFO	First in First Out	сервис обезбеђује да клијенти који су раније пристигли буду сервисирани раније
SIRO	Service in Random Order	случајни редослед сервисирања
LIFO	Last in First Out	клијенти који последњи уђу у систем – први се опслужују
PRI	Priority	Опслуживање са приоритетом– предност у опслуживању имају клијенти са приоритетом (нпр. предност на раскрсници имају возила хитне помоћи, предност у редовима на шалтерима имају старије особе и труднице, предност приликом запошљавања имају особе са јачом „везом“)

57. Симулација дискретних догађаја у Julia софтверском пакету SimJulia

---

Подпитања:

Основне компоненте које учествују у симулацији су:

симулационо окружење
процеси
догађаји

Дељени ресурси: ресурси, контејнери, магацини

Макрои:

Користи се пакет ResumableFunctions
@resumble - за дефинисање процеса
@yield - за дефинисање догађаја

Дефинисати *timeout* и *run*

Уколико више процеса чека на исти догађај – SimJulia наставља њихова извршења у редоследу њиховог генерисања

Док је посебна врста догађаја *timeout* које се распоређује у тачно дефинисано време

За покретање симулације се користи:

run(env) без временског ограничења (*env* - симулациони оквир)
run(env, t_k) за унапред дато време