

Часть 6

Синтез цифрового фильтра по заданному аналоговому фильтру

№ 1.

По заданной системной функции аналогового фильтра определить и построить частотную характеристику и импульсную характеристику аналогового фильтра.

$$A1 := 6 \quad (\text{В}) \quad A2 := -2 \quad (\text{В}) \quad T := 40 \cdot 10^{-6} \quad \text{с} \quad \tau_3 := 20 \cdot 10^{-6} \quad (\text{с}) \quad \tau_0 := 1 \cdot 10^{-6} \quad (\text{с})$$

$$s(t) := A1 \cdot e^{\frac{t}{\tau_0}} \cdot \Phi(-t) + A1 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_0}} \cdot \Phi(t) + A2 \cdot e^{\frac{(t-\tau_3)}{\tau_0}} \cdot \Phi(-t + \tau_3) + A2 \cdot e^{\frac{-(t-\tau_3)}{\tau_0}} \cdot \Phi(t - \tau_3)$$

$$\omega_0 := 3.705 \times 10^5 \quad \frac{\text{рад}}{\text{с}} \quad \alpha := \frac{\omega_0}{2} = 1.853 \times 10^5 \quad \frac{\text{рад}}{\text{с}} \quad H_0 := 4 \cdot \omega_0^2 = 5.491 \times 10^{11} \quad \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)^2$$

$$F_{95\%} := 3 \cdot 10^5 \quad \text{Гц} \quad F_{Д1} := 2 \cdot F_{95\%} = 6 \times 10^5 \quad \text{Гц} \quad T_{Д1} := \frac{1}{F_{Д1}} = 1.667 \times 10^{-6} \quad \text{с}$$

$$F_{Д2} := 4 \cdot F_{95\%} = 1.2 \times 10^6 \quad \text{Гц} \quad T_{Д2} := \frac{1}{F_{Д2}} = 8.333 \times 10^{-7} \quad \text{с}$$

$$F_{\text{пер}95\%} := 4.5 \times 10^5 \quad \text{Гц}$$

$$F_{\text{пер}Д1} := 2 \cdot F_{\text{пер}95\%} = 9 \times 10^5 \quad \text{Гц} \quad T_{\text{пер}Д1} := \frac{1}{F_{\text{пер}Д1}} = 1.111 \times 10^{-6} \quad \text{с}$$

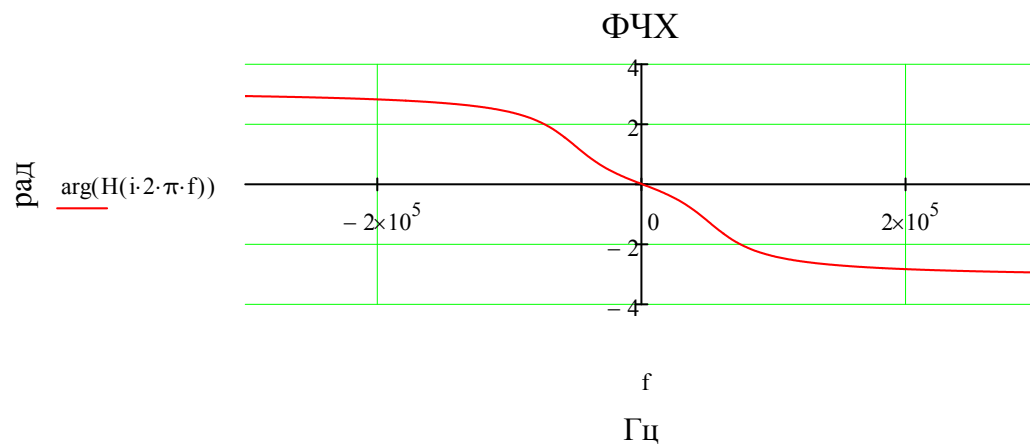
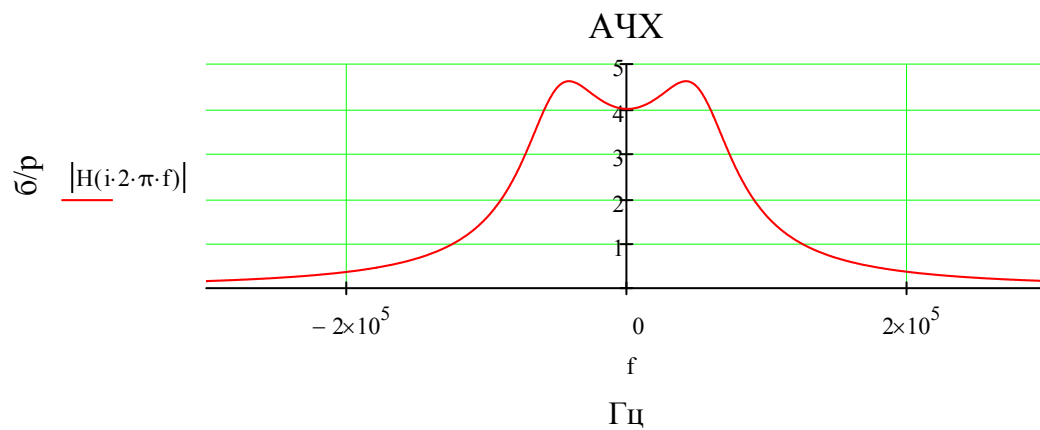
$$N_1 := F_{\text{пер}Д1} \cdot T = 36$$

$$F_{\text{пер}Д2} := 4 \cdot F_{\text{пер}95\%} = 1.8 \times 10^6 \quad \text{Гц} \quad T_{\text{пер}Д2} := \frac{1}{F_{\text{пер}Д2}} = 5.556 \times 10^{-7} \quad \text{с}$$

$$N_2 := F_{\text{пер}Д2} \cdot T = 72$$

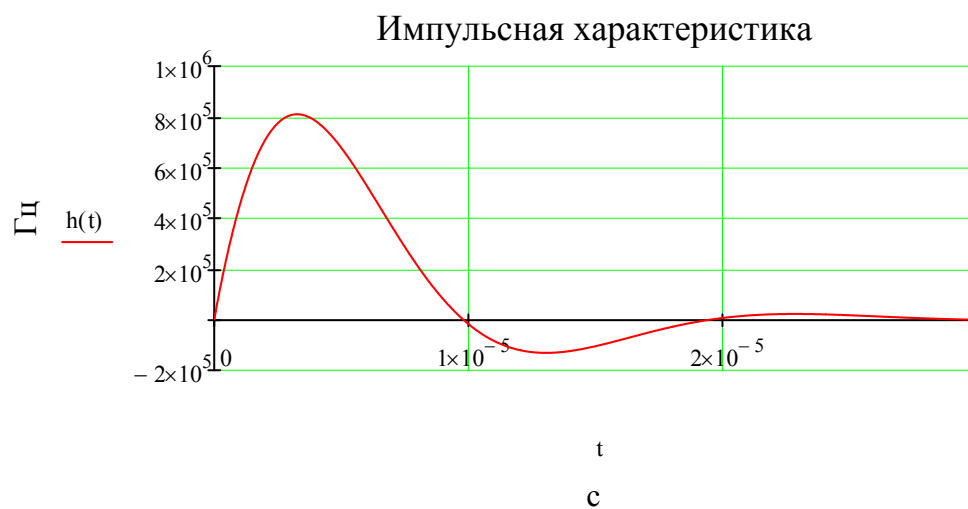
$$\omega_c := \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 3.209 \times 10^5 \quad \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$H(p) := \frac{H_0}{p^2 + 2 \cdot \alpha \cdot p + \omega_0^2} \quad \text{Системная функция}$$



$$B_1 := \frac{H_0}{2 \cdot i \cdot \omega_c} = -8.556i \times 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \quad B_2 := \frac{H_0}{-2 \cdot i \cdot \omega_c} = 8.556i \times 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$h(t) := \begin{cases} 2 \cdot |B_1| \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \arg(B_1)) & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

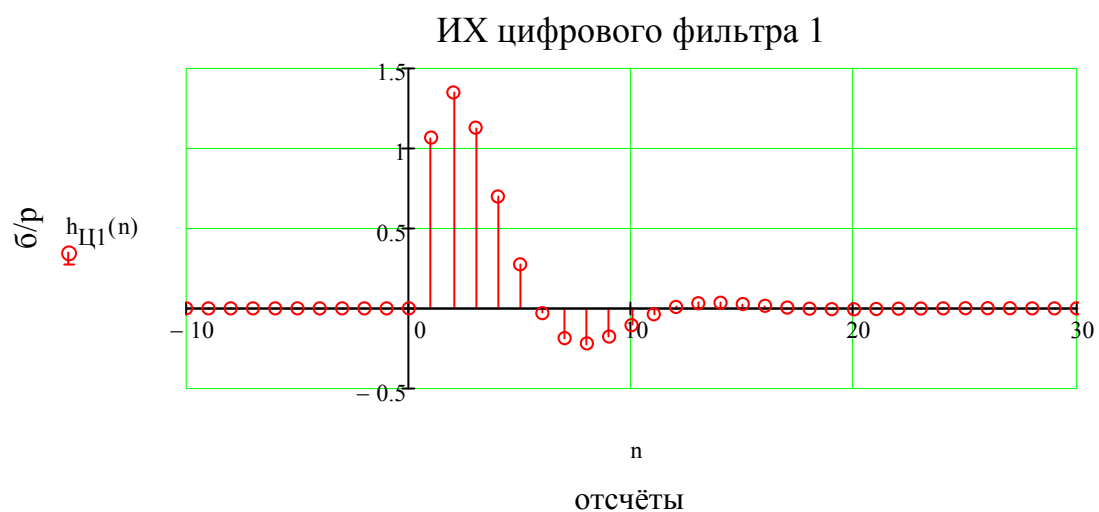


№ 2

. Для первой частоты дискретизации определить ИХ цифрового фильтра, отсчеты которой совпадают со значениями ИХ аналогового фильтра в дискретные моменты времени.

$$h_{\Pi 1}(n) := T_{Д1} \cdot h(n \cdot T_{Д1})$$

$$n := -100 \dots 100$$



№ 3

По ИХ цифрового фильтра:

- найти системную функцию;
- построить диаграмму нулей и полюсов на Z-плоскости;
- найти и построить частотную характеристику;
- составить структурную схему фильтра в канонической форме;
- составить разностное уравнение.

$$a_1 := e^{(-\alpha + i \cdot \omega_c) \cdot T_{Д1}} = 0.632 + 0.374i \quad a_2 := e^{(-\alpha - i \cdot \omega_c) \cdot T_{Д1}} = 0.632 - 0.374i$$

$$C_1 := (B_1 + B_2) \cdot T_{Д1} = 0$$

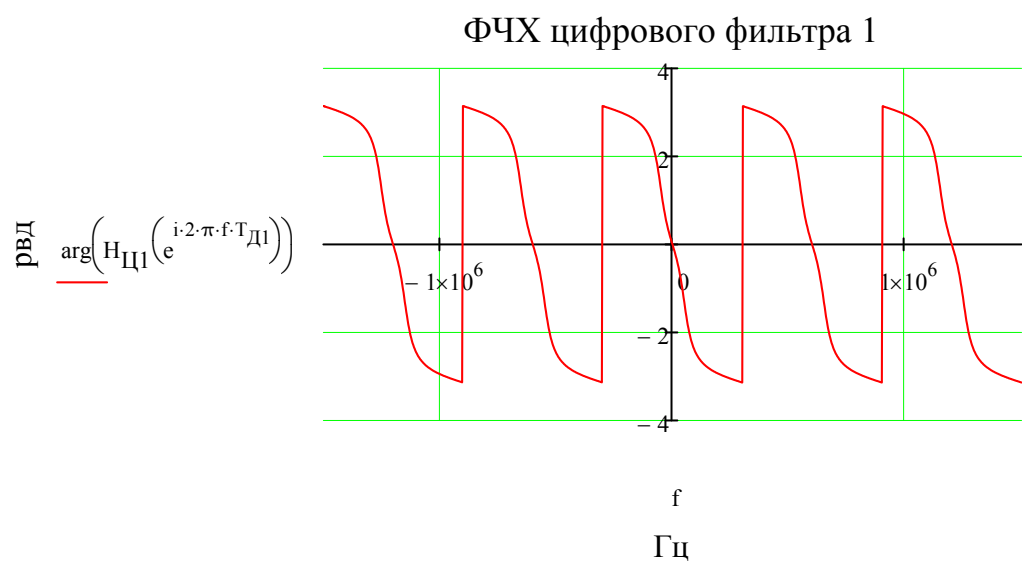
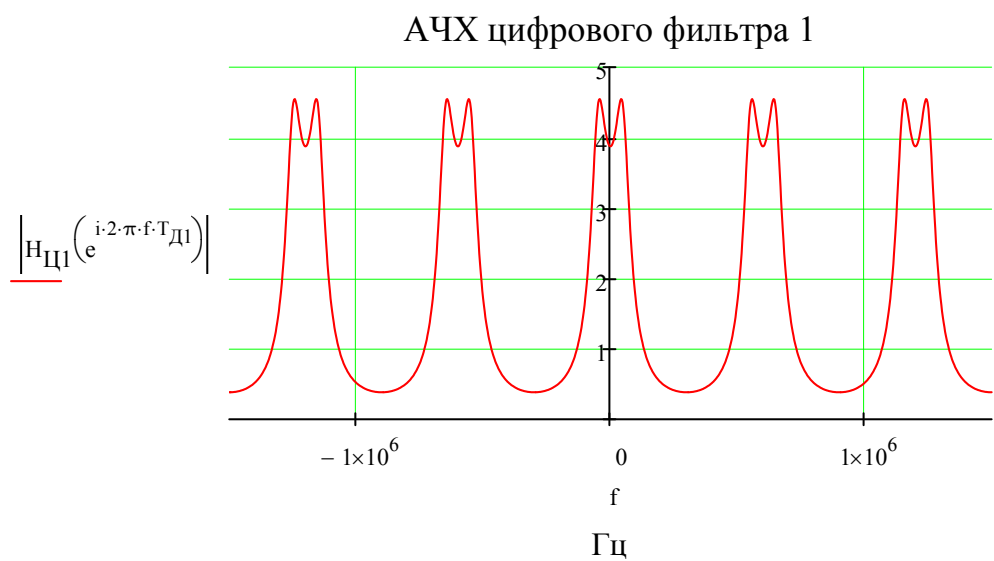
$$C_2 := (-B_1 \cdot a_2 - B_2 \cdot a_1) \cdot T_{Д1} = 1.067$$

$$C_3 := a_1 + a_2 = 1.264$$

$$C_4 := -a_1 \cdot a_2 = -0.539$$

$$H_{Ц1}(z) := \frac{C_1 + C_2 \cdot z^{-1}}{1 - C_3 \cdot z^{-1} - C_4 \cdot z^{-2}}$$

$$1 - C_3 \cdot z^{-1} - C_4 \cdot z^{-2} \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 0.632 - 0.374i \\ 0.632 + 0.374i \end{pmatrix}$$



№ 4

Пересчитать системную функцию аналогового фильтра в системную функцию цифрового фильтра по методу билинейного Z-преобразования

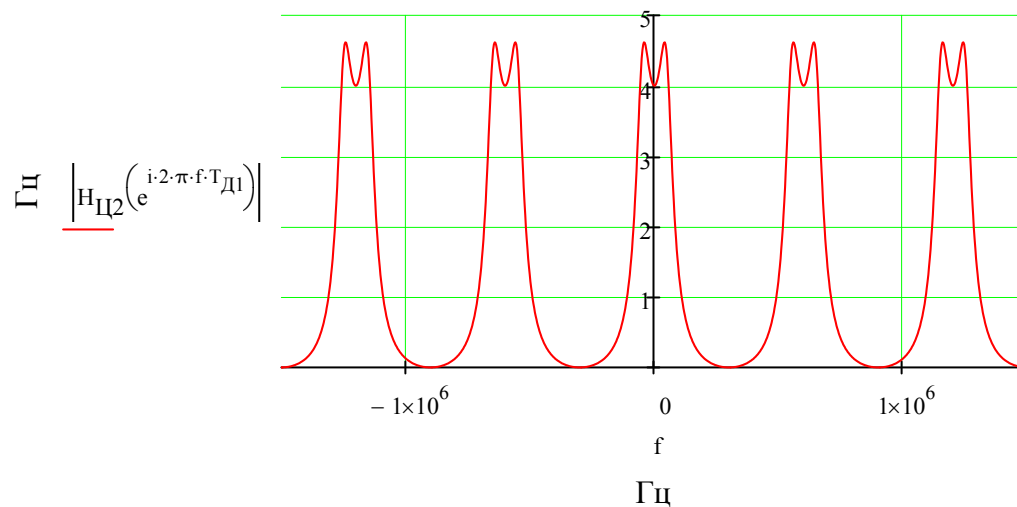
$$H_{Ц2}(z) := \frac{H_0}{\left(\frac{2}{T_{Д1}} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{2}{T_{Д1}} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right) + \omega_0^2}$$

$$H_{Ц2}(z) := \frac{H_0 \cdot T_{Д1}^2 \cdot (z+1)^2}{\omega_0^2 \cdot T_{Д1}^2 \cdot z^2 + 2 \cdot \omega_0^2 \cdot T_{Д1}^2 \cdot z + \omega_0^2 \cdot T_{Д1}^2 + 4 \cdot \alpha \cdot T_{Д1} \cdot z^2 - 4 \cdot \alpha \cdot T_{Д1} + 4 \cdot z^2 - 8 \cdot z + 4}$$

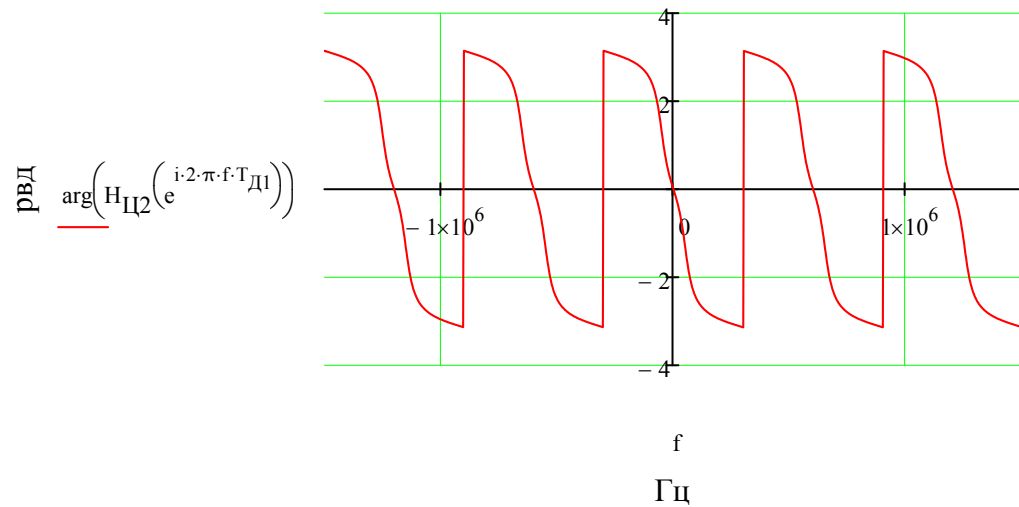
№ 5

По найденной системной функции построить временные и частотные характеристики. Сравнить их и сделать выводы.

АЧХ цифрового фильтра 2



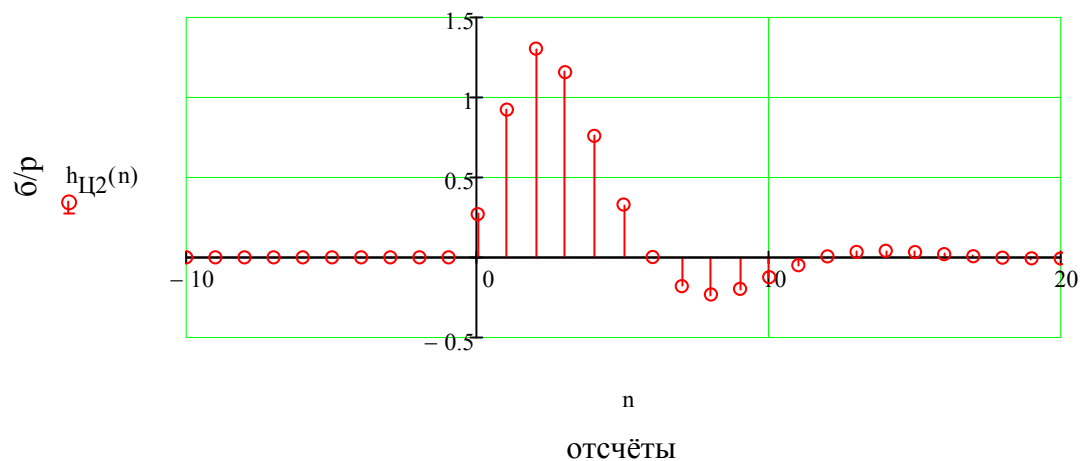
ФЧХ цифрового фильтра 2



$$h_{\Pi 2}(n) := H_{\Pi 2}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, } z \\ \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow 0.49 \cdot \delta(n, 0) - (0.11 - 1.4i) \cdot (0.64 - 0.38i)^n - (0.11 + 1.4i) \cdot (0.64 + 0.38i)^n$$

$$h_{\Pi 2}(n) := \begin{cases} 0.49 \cdot \delta(n, 0) - (0.11 - 1.4i) \cdot (0.64 - 0.38i)^n - (0.11 + 1.4i) \cdot (0.64 + 0.38i)^n & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ИХ цифрового фильтра 2



Частотные и временные характеристики, полученные методом ИИХ и билинейного Z-преобразования схожи друг с другом. Так же отметим, что частотная характеристика цифрового фильтра- периодическая функция, в отличие от аналогового.

Часть 7

Фильтрация одиночных дискретных сигналов

№ 1.

Определить и построить одиночные цифровые сигналы и их спектры на выходах синтезированных Ц.Ф. для разных частот дискретизации с помощью линейной дискретной свертки и в частотной области

$$s_{Д1}(n) := T_{Д1} \cdot s(n \cdot T_{Д1}) \quad s_{Д2}(n) := T_{Д2} \cdot s(n \cdot T_{Д2})$$

$$S(f) := \frac{\left(A2 \cdot \tau0 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau3} - A2 \cdot e^{\frac{-\tau3}{\tau0}} + A1 \cdot \tau0 \right)}{1 - i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau0} + \frac{A2 \cdot \tau0 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau3} + A1 \cdot \tau0}{1 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau0}$$

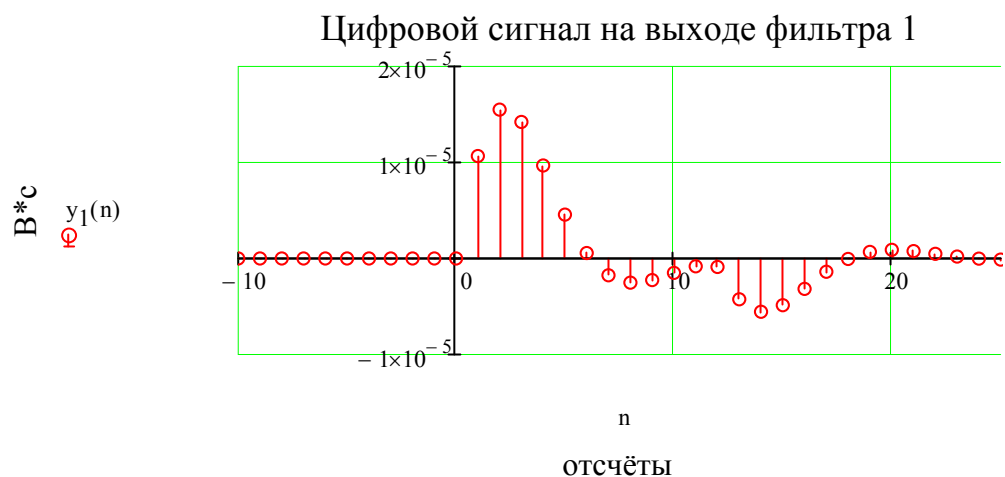
$$S_{\Delta 1}(f) := \sum_{n=-20}^{20} \left(s_{Д1}(n) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_{Д1}} \right) \quad S_{\Delta 2}(f) := \sum_{n=-40}^{40} \left(s_{Д2}(n) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_{Д2}} \right)$$

1) Для первой частоты дискретизации

1 а) Первый фильтр (синтезированный по методу ИИХ)

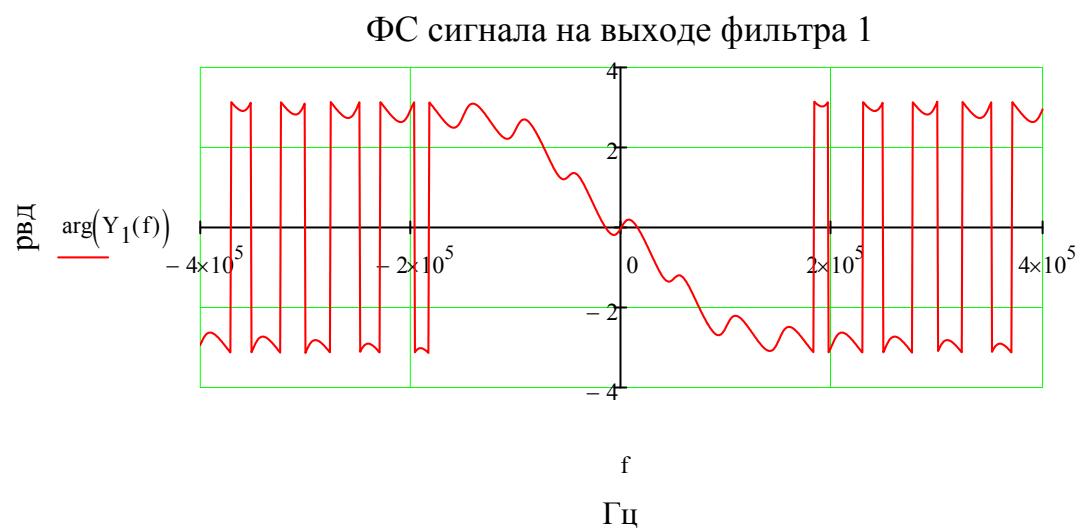
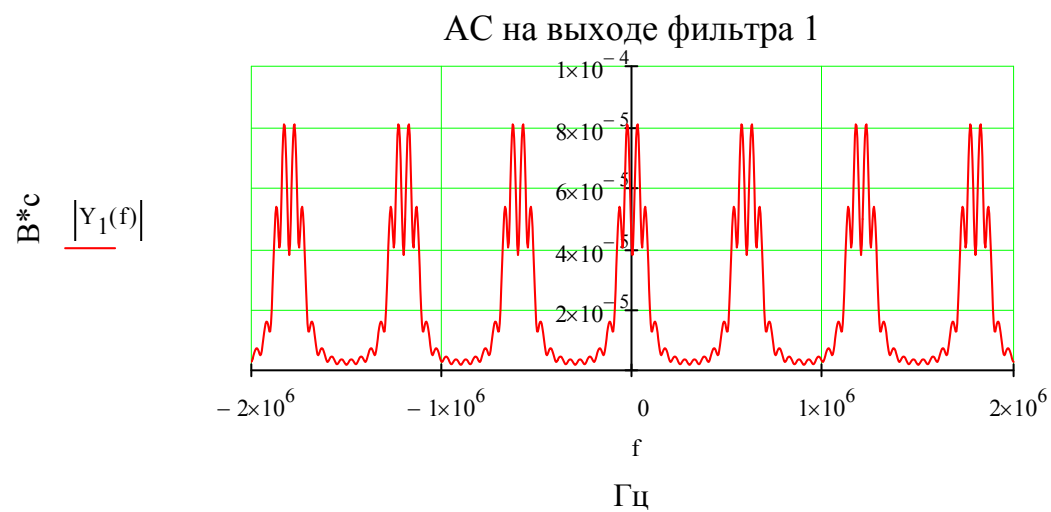
Во временной области:

$$y_1(n) := \sum_{m=0}^n \left(s_{Д1}(m) \cdot h_{Ц1}(n-m) \right)$$

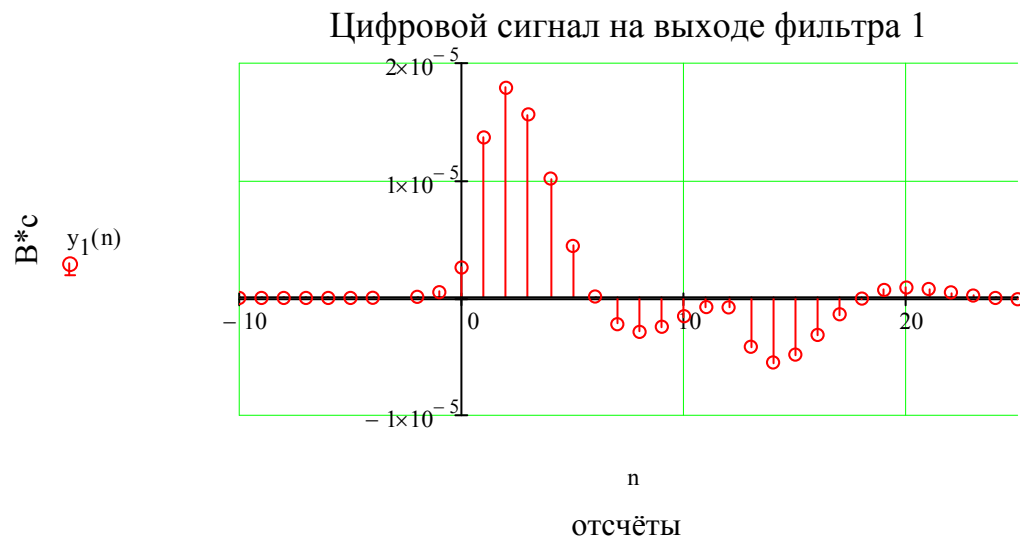


В частотной области:

$$Y_1(f) := S_{\Delta 1}(f) \cdot H_{\Pi 1} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T_{Д1}} \right)$$



$$y_1(n) := T_{Д1} \cdot \int_{-\frac{F_{Д1}}{2}}^{\frac{F_{Д1}}{2}} Y_1(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_{Д1}} df$$

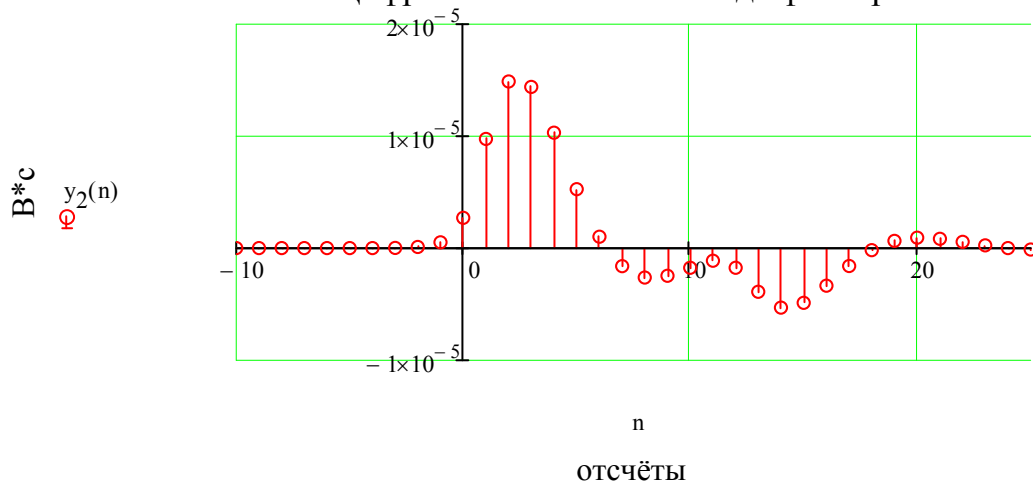


1 б) Второй фильтр (синтезированный по методу билинейного Z-преобразования)

Во временной области:

$$y_2(n) := \sum_{m=0}^n (s_{Д1}(m) \cdot h_{Ц2}(n - m))$$

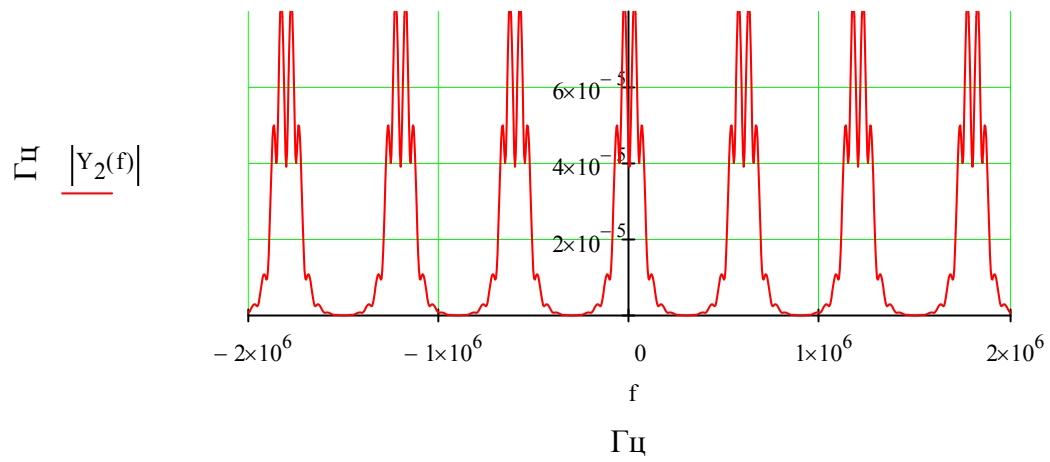
Цифровой сигнал на выходе фильтра 2



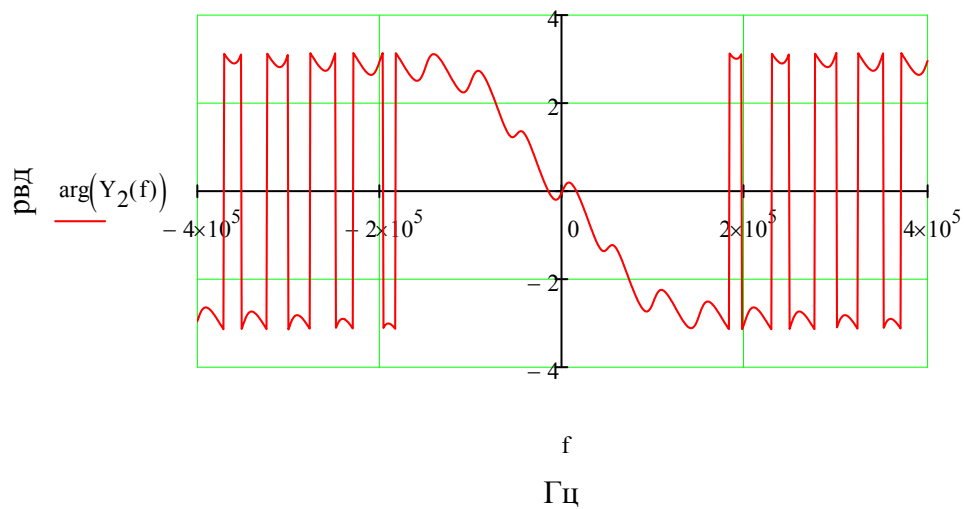
В частотной области:

$$Y_2(f) := S_{\Delta 1}(f) \cdot H_{\Pi 2} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T_{Д1}} \right)$$

АС сигнала на выходе фильтра 2

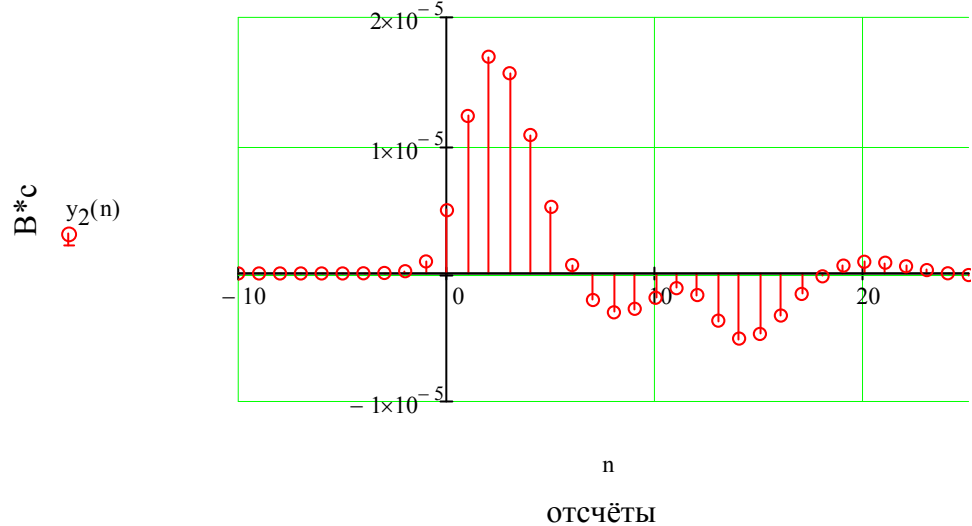


ФС сигнала на выходе фильтра 2



$$y_2(n) := T_{Д1} \cdot \int_{-\frac{F_{Д1}}{2}}^{\frac{F_{Д1}}{2}} Y_2(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_{Д1}} df$$

Цифровой сигнал на выходе фильтра 1



2) Для второй частоты дискретизации

2 а) Первый фильтр (синтезированный по методу ИИХ)

Во временной области:

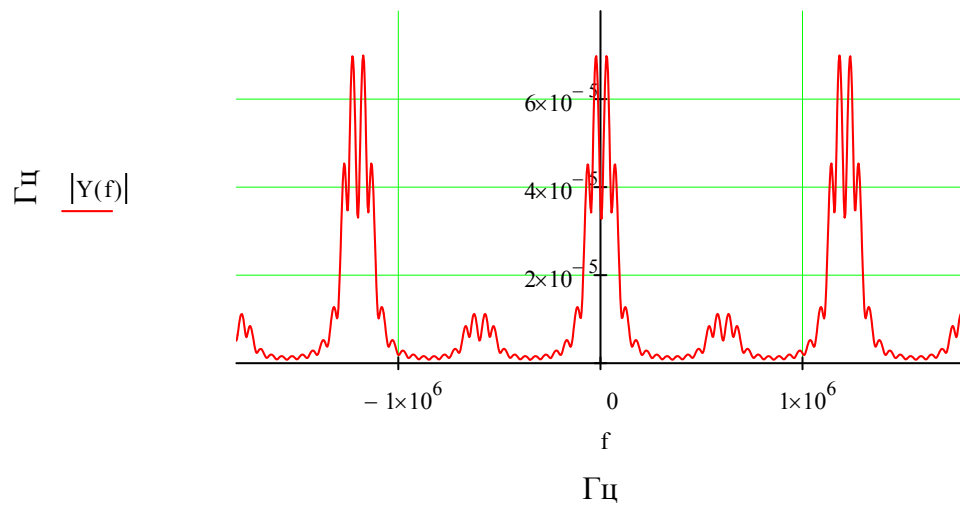
$$y(n) := \sum_{m=-60}^{60} (s_{\Delta 2}(m) \cdot h_{\Pi 1}(n-m))$$



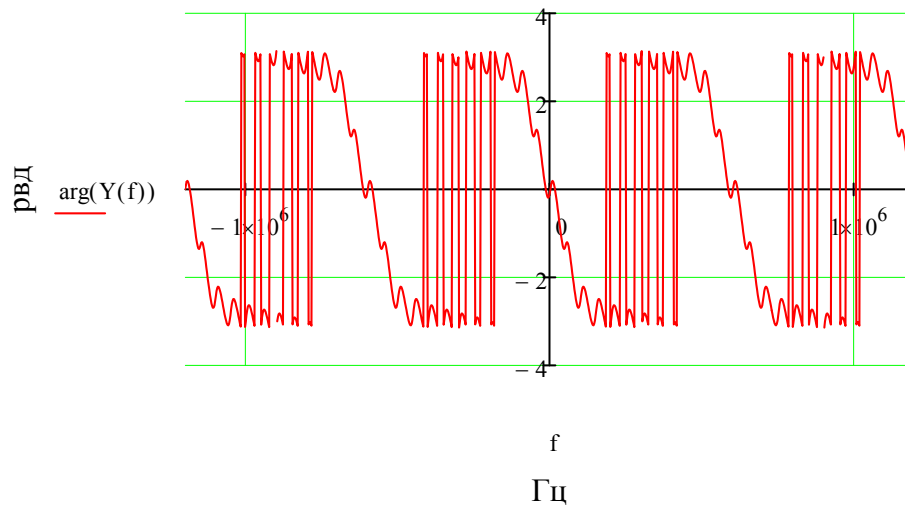
В частотной области:

$$Y(f) := S_{\Delta 2}(f) \cdot H_{\Pi 1} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T_{\Delta 1}} \right)$$

АС сигнала на выходе фильтра 1



ФС сигнала на выходе фильтра 1



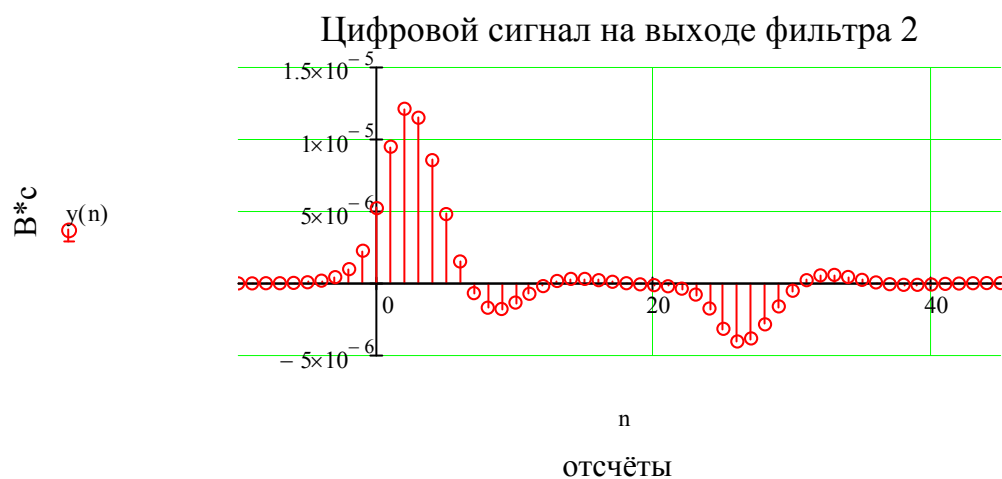
$$x(n) := T_{Д1} \cdot \int_{-\frac{F_{Д2}}{2}}^{\frac{F_{Д2}}{2}} Y(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_{Д2}} df$$



2 б Второй фильтр (синтезированный по методу билинейного Z-преобразования)

Во временной области:

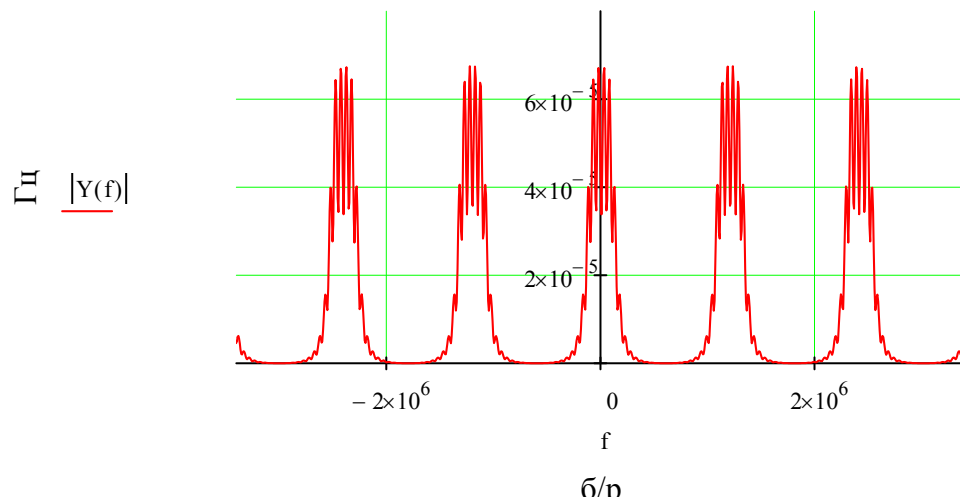
$$y(n) := \sum_{m=-60}^{60} (s_{D2}(m) \cdot h_{D2}(n-m))$$



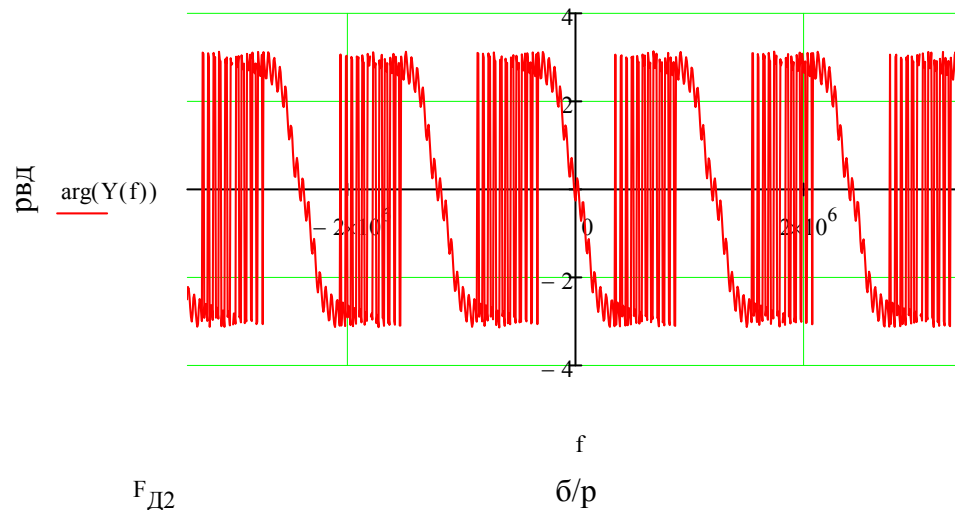
В частотной области:

$$\underline{Y}(f) := S_{\Delta 2}(f) \cdot H_{\Pi 2} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T_{\Delta 2}} \right)$$

АС сигнала на выходе фильтра 2



ФС сигнала на выходе фильтра 2



$$\underline{y}(n) := T_{\Delta 2} \cdot \int_{-\frac{F_{\Delta 2}}{2}}^{\frac{F_{\Delta 2}}{2}} Y(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_{\Delta 2}} df$$



№ 2

Восстановить и построить одиночные аналоговые сигналы и их спектры на выходе синтезированных цифровых фильтров с помощью идеальных ФНЧ.

Восстановим сигнала для 1 ой частоты дискретизации:

$$K_0 := 1 \quad F_{гр1} := \frac{F_{Д1}}{2} = 3 \times 10^5 \text{ Гц}$$

$$K(f) := K_0 \cdot \Phi(f + F_{гр1}) - K_0 \cdot \Phi(f - F_{гр1}) \quad \text{АЧХ идеального восстанавливающего ФНЧ}$$

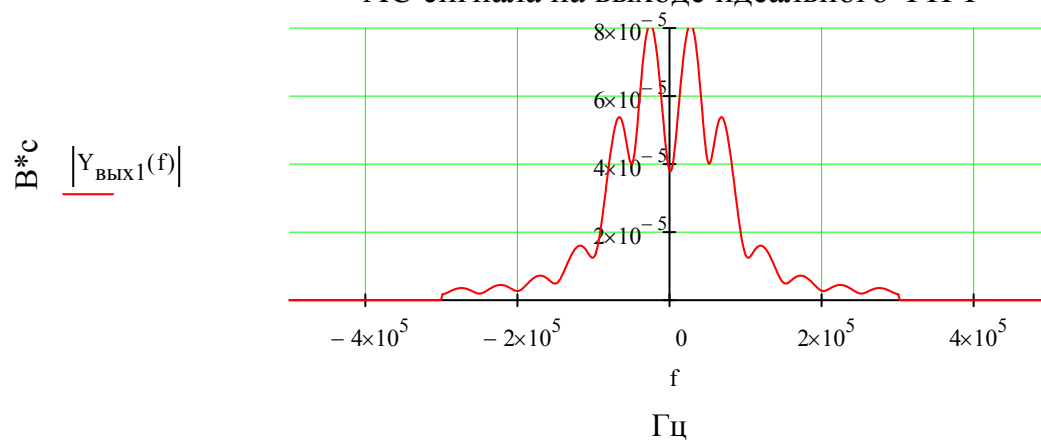
$$k(t) := \frac{K_0}{\pi \cdot t} \cdot \sin(2\pi \cdot F_{гр1} \cdot t) \quad \text{ИХ идеального ФНЧ}$$

Для фильтра 1:

Решение в частотной области :

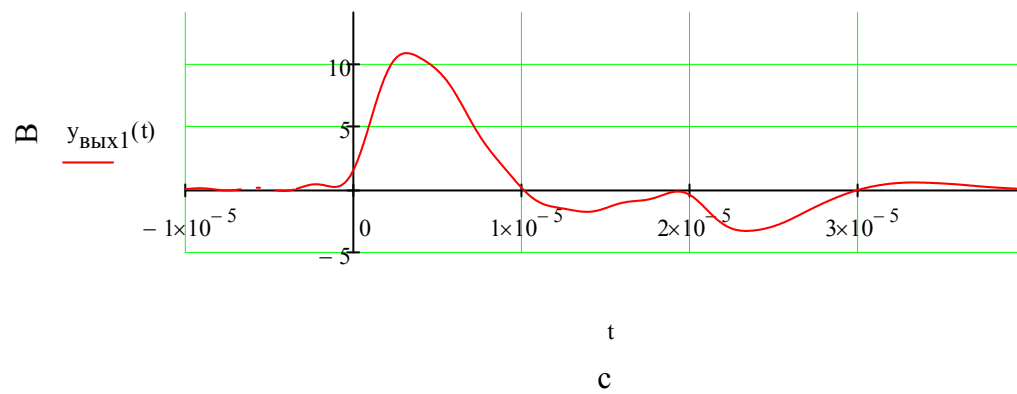
$$Y_{\text{ВЫХ1}}(f) := K(f) \cdot Y_1(f)$$

АС сигнала на выходе идеального ФНЧ



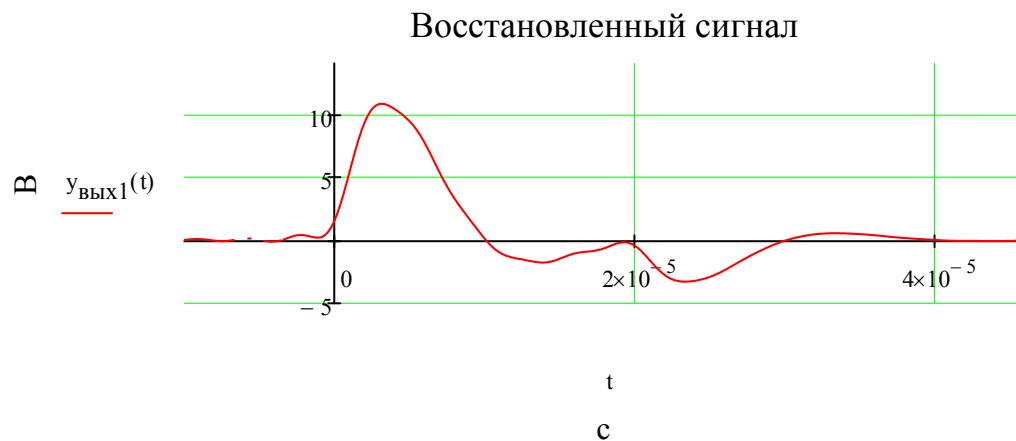
$$y_{\text{ВЫХ1}}(t) := \int_{-\frac{F_{\text{Д1}}}{2}}^{\frac{F_{\text{Д1}}}{2}} Y_{\text{ВЫХ1}}(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

Восстановленный сигнал



Решение во временной области:

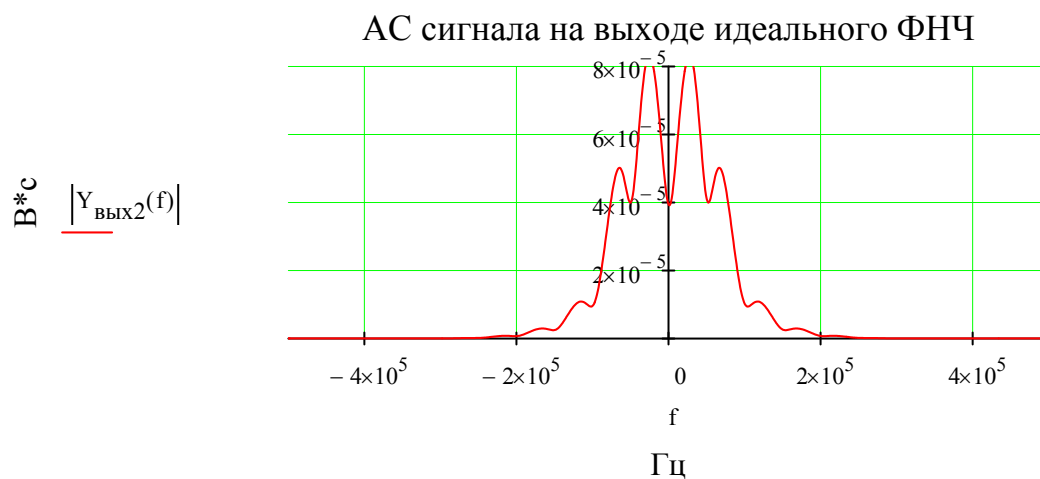
$$y_{\text{ВЫХ1}}(t) := \sum_{n=-10}^{10} \left((y_1(n) \cdot k(t - n \cdot T_{\text{Д1}})) \right)$$



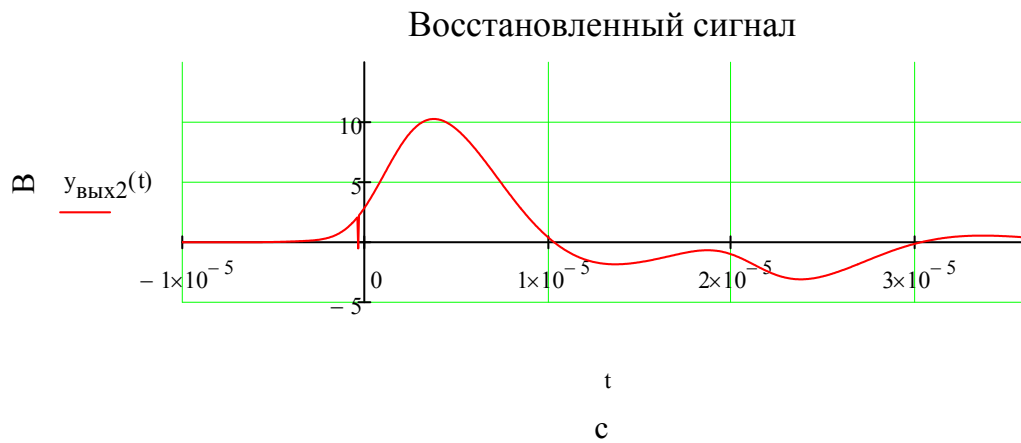
Для фильтра 2:

Решение в частотной области :

$$Y_{\text{ВЫХ2}}(f) := K(f) \cdot Y_2(f)$$

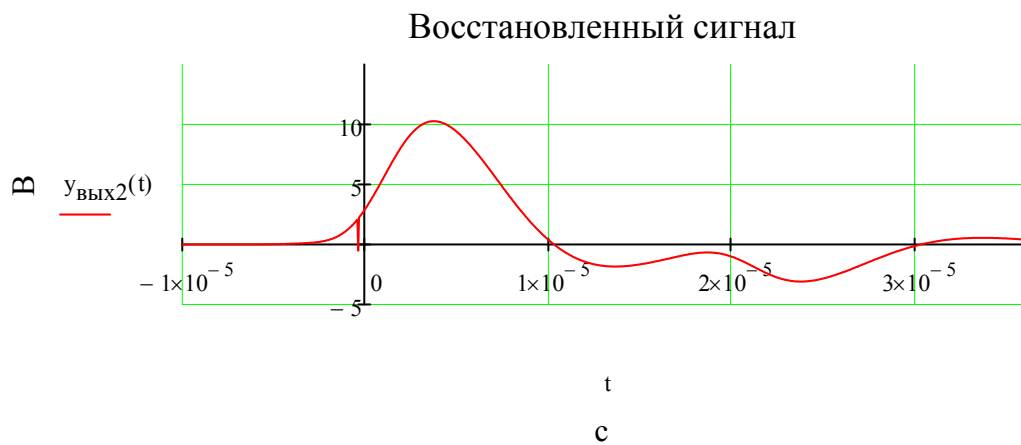


$$y_{\text{ВЫХ2}}(t) := \int_{-\frac{F_{\text{Д1}}}{2}}^{\frac{F_{\text{Д1}}}{2}} Y_{\text{ВЫХ2}}(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$



Решение во временной области:

$$y_{\text{ВЫХ2}}(t) := \sum_{n=-10}^{10} ((y_2(n) \cdot k(t - n \cdot T_{\text{Д1}})))$$



№ 3. Проанализировать полученные дискретные и аналоговые одиночные сигналы, сравни их между собой и с одиночным аналоговым сигналом на входе заданного аналогового фильтра.

Временные и частотные характеристики фильтров, синтезированных двумя различными методами с большой точностью совпадают.

Цифровые сигналы, полученные на выходах фильтров 1 и 2, схожи между собой.

Восстановленные аналоговые сигналы схожи с аналоговым сигналом, прошедшим через аналоговый фильтр (ч 3 КР за прошлый семестр).

Таким образом пропустив цифровой сигнал через цифровой фильтр, а затем восстановив его, мы получаем такой же сигнал, если бы мы пропустили сразу аналоговый сигнал через аналоговый фильтр.

Часть 8

Фильтрация периодического дискретного сигнала

№ 1.

Определить и построить периодические цифровые сигналы и их спектры на выходах синтезированных фильтров для разных частот дискретизации с помощью линейной дискретной свёртки и в частотной области.

$$s_T(t) := \sum_{n=-4}^4 s(t - n \cdot T)$$

$$s_{N1}(n) := T_{\text{перД1}} \cdot s_T(n \cdot T_{\text{перД1}})$$

$$s_{N2}(n) := T_{\text{перД2}} \cdot s_T(n \cdot T_{\text{перД2}})$$

$$S1(k) := \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=0}^{N_1-1} \left(s_{N1}(n) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N_1}} \right)$$

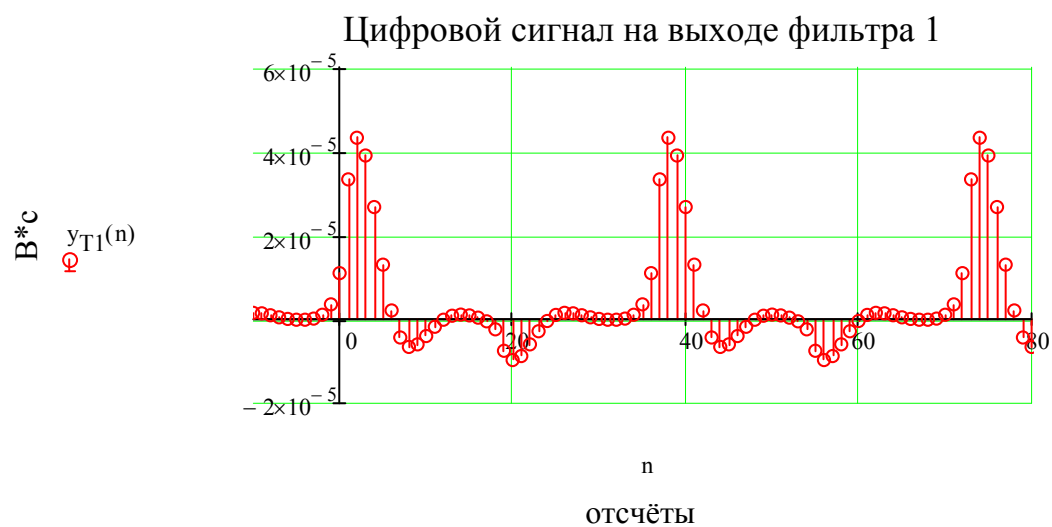
$$S2(k) := \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=0}^{N_2-1} \left(s_{N2}(n) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N_2}} \right)$$

1) Для первой частоты дискретизации

1 а) Первый фильтр (синтезированный по методу ИИХ)

Во временной области:

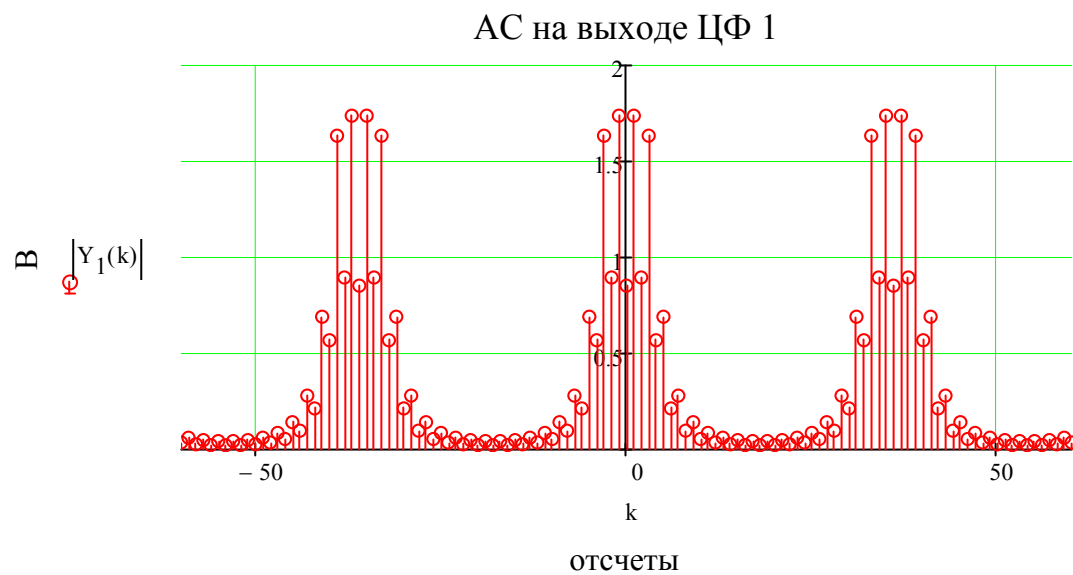
$$y_{T1}(n) := \sum_{m=-40}^{40} \left(s_{N1}(m) \cdot \sum_{q=-7}^7 h_{\Pi1}(n - m - q \cdot N_1) \right)$$

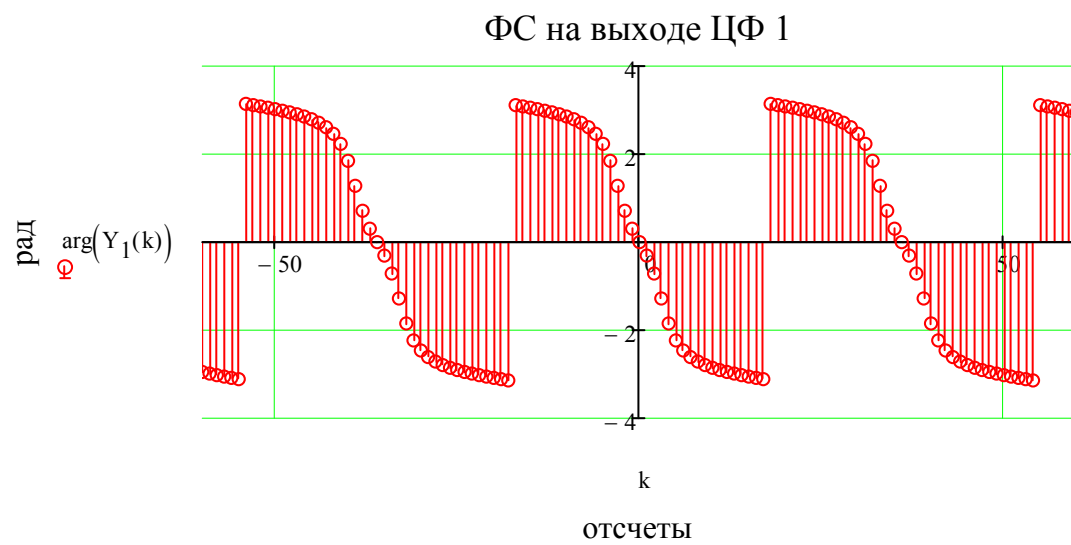


В частотной области:

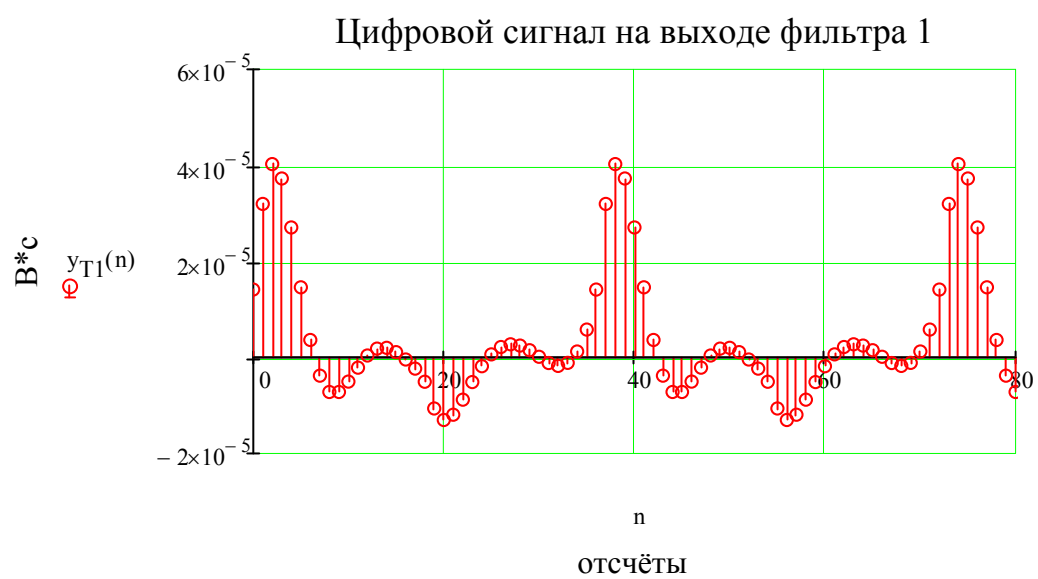
$$Y_1(k) := S1(k) \cdot H_{Ц1} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{N_1}} \right)$$

$$k := -100 .. 100$$





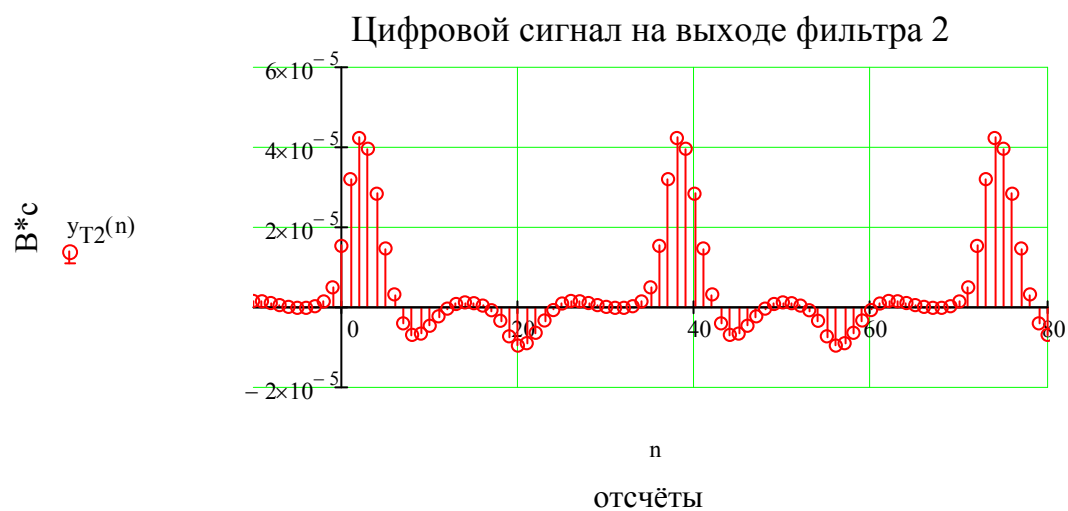
$$y_{T1}(n) := T_{\text{перД1}} \cdot \sum_{k=-40}^{40} \left(Y_1(k) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N_1}} \right)$$



1 б) Второй фильтр (синтезированный по методу билинейного Z-преобразования)

Во временной области:

$$y_{T2}(n) := \sum_{m=-40}^{40} \left(s_{N1}(m) \cdot \sum_{q=-7}^7 h_{\Pi2}(n - m - q \cdot N_1) \right)$$

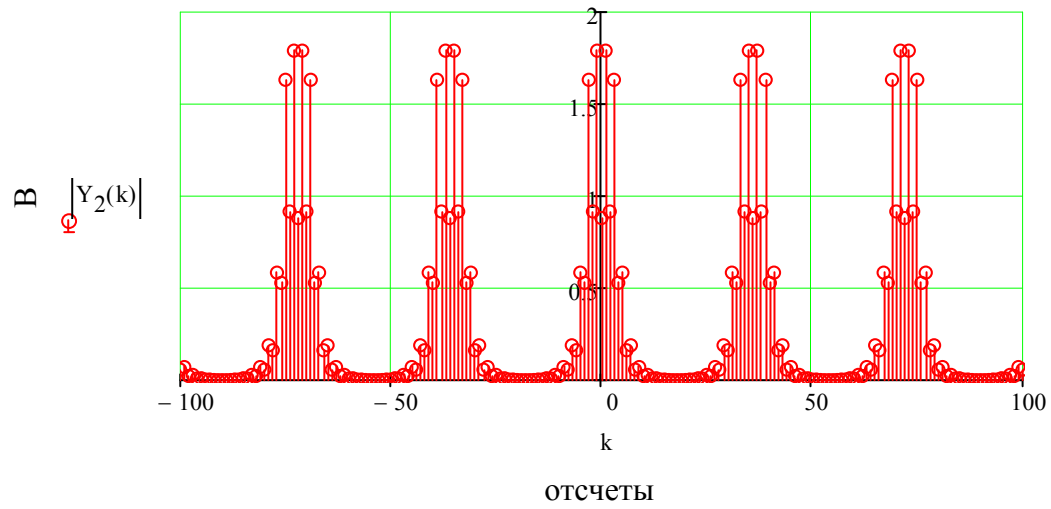


В частотной области:

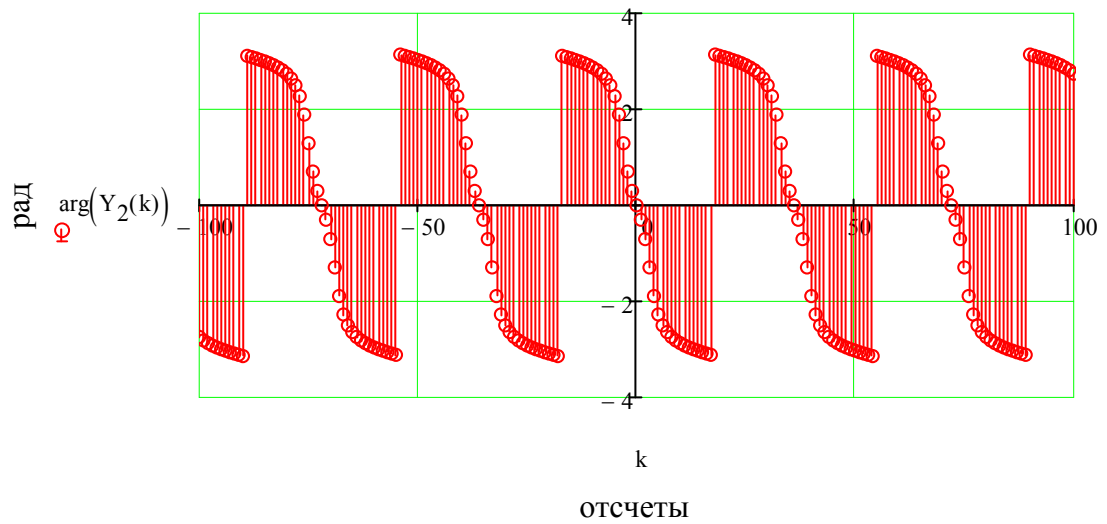
$$Y_2(k) := S1(k) \cdot H_{\Pi2} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{N_1}} \right)$$

$$k := -100 .. 100$$

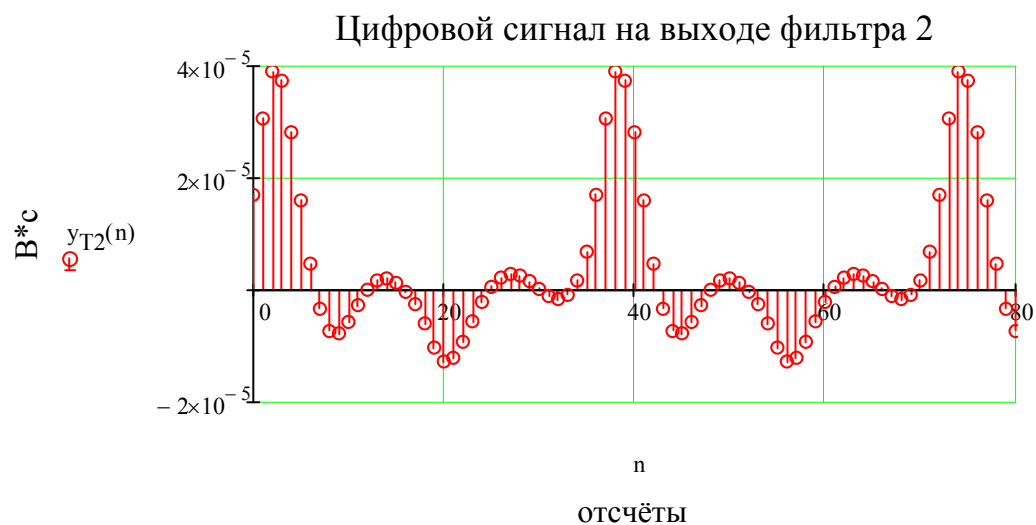
АС на выходе ЦФ 2



ФС на выходе ЦФ 2



$$y_{ГД2}(n) := T_{\text{перД1}} \cdot \sum_{k=-40}^{40} \left(Y_2(k) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N_1}} \right)$$

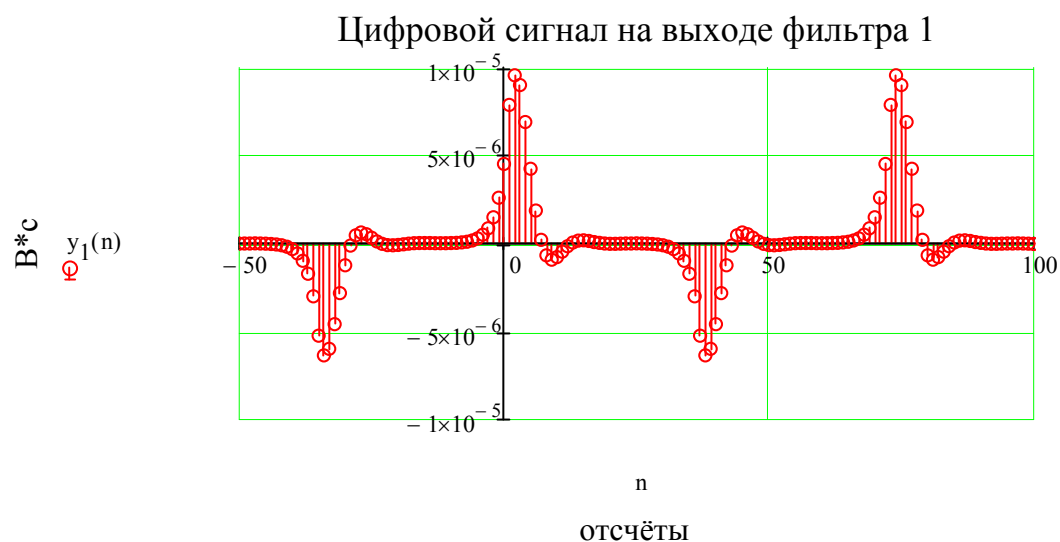


1) Для второй частоты дискретизации

1 а) Первый фильтр (синтезированный по методу ИИХ)

Во временной области:

$$y_1(n) := \sum_{m=-50}^{50} \left(s_{N2}(m) \cdot \sum_{q=-7}^7 h_{\Pi 1}(n - m - q \cdot N_2) \right)$$

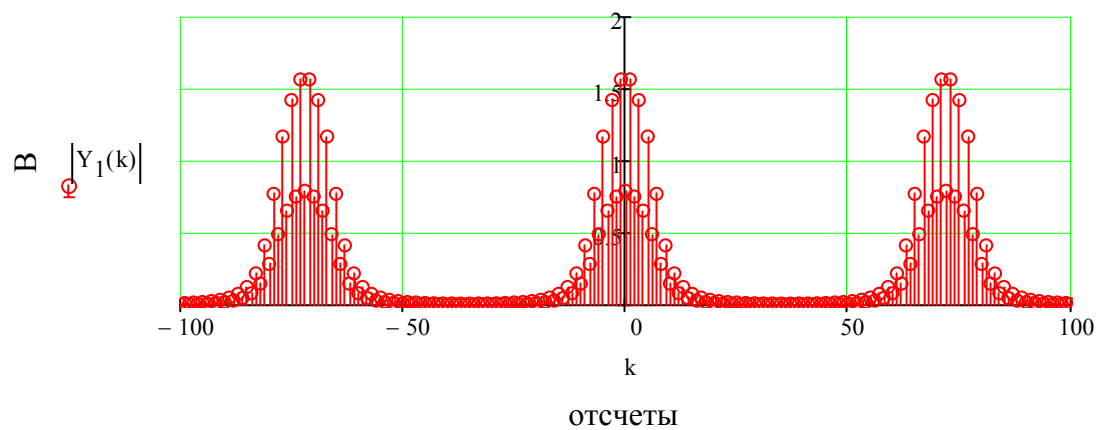


В частотной области:

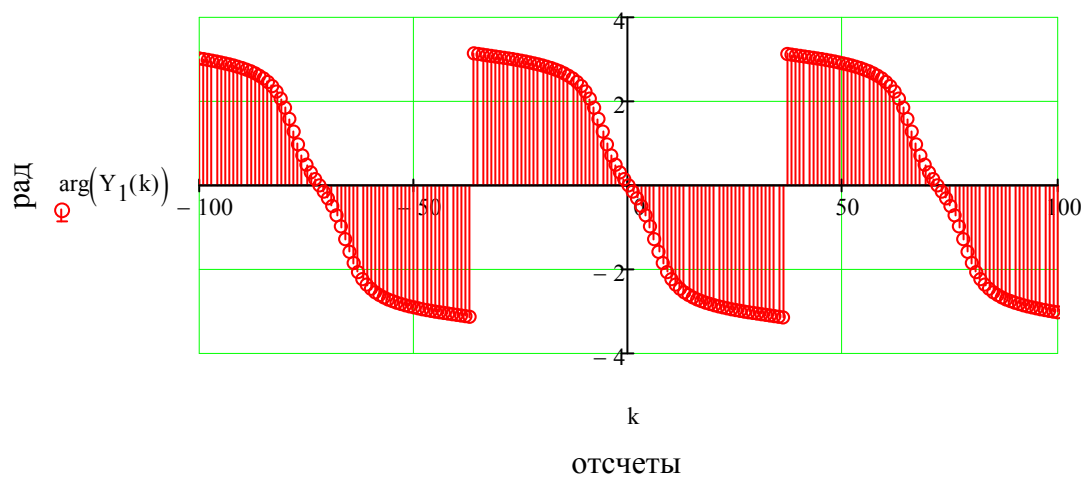
$$Y_1(k) := S_2(k) \cdot H_{Ц1} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{N_2}} \right)$$

$$k := -100 .. 100$$

АС на выходе ЦФ 1

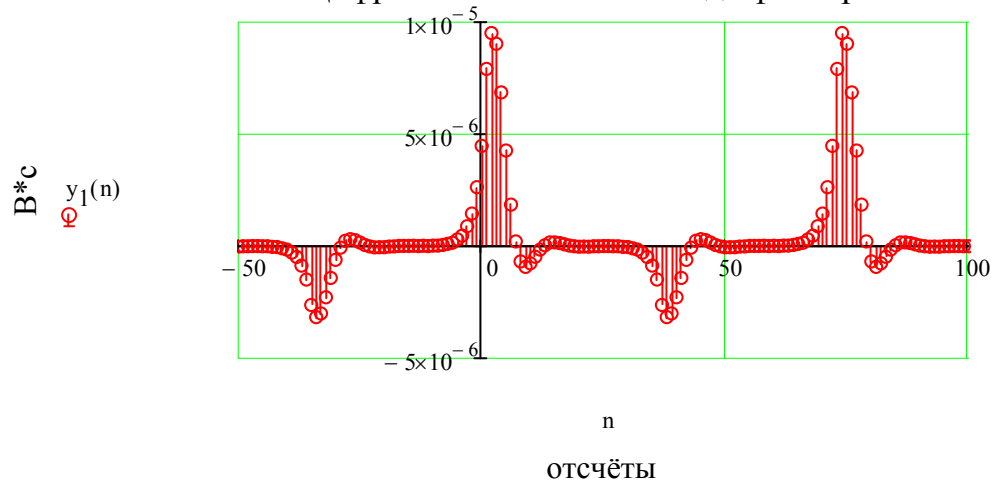


ФС на выходе ЦФ 1



$$y_1(n) := T_{\text{перД2}} \cdot \sum_{k=-40}^{40} \left(Y_1(k) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N_2}} \right)$$

Цифровой сигнал на выходе фильтра 1

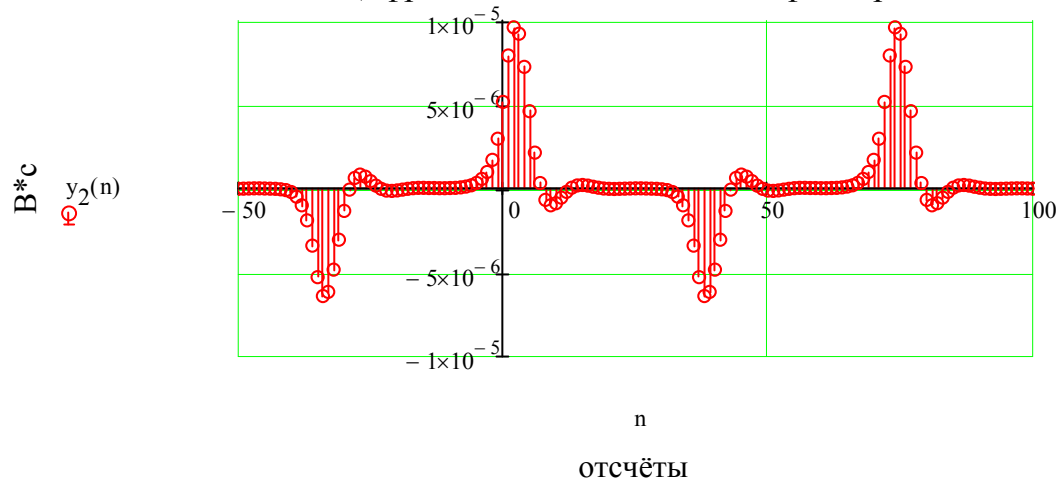


1 б) Второй фильтр (синтезированный по методу билинейного Z-преобразования)

Во временной области:

$$y_2(n) := \sum_{m=-40}^{40} \left(s_{N2}(m) \cdot \sum_{q=-7}^7 h_{H2}(n - m - q \cdot N_2) \right)$$

Цифровой сигнал на выходе фильтра 2

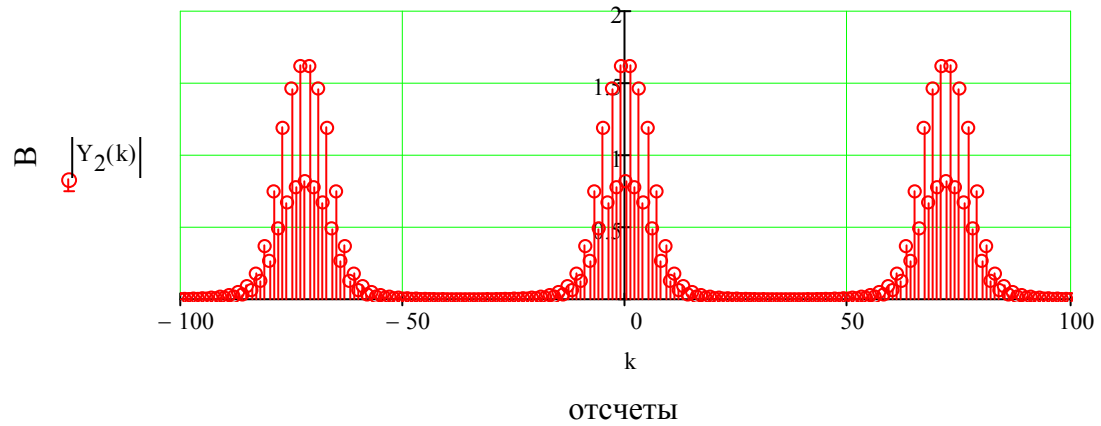


В частотной области:

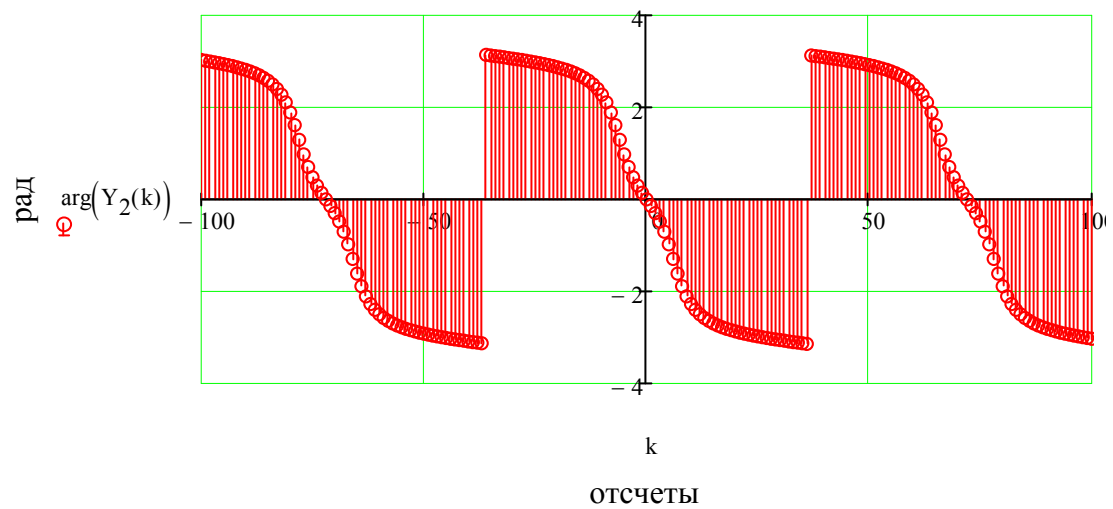
$$Y_2(k) := S_2(k) \cdot H_{Ц2} \left(e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{N_2}} \right)$$

$k := -100 .. 100$

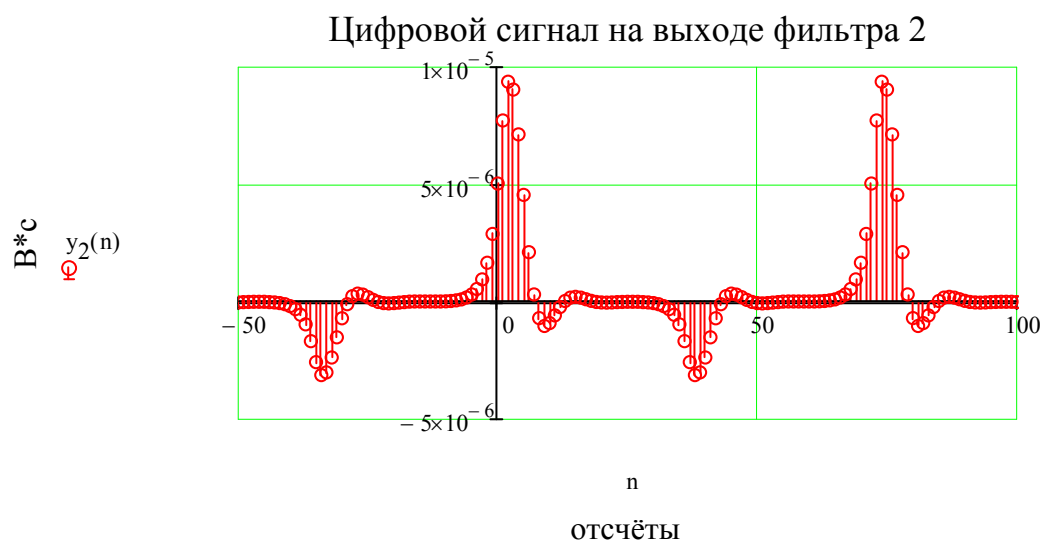
АС на выходе ЦФ 2



ФС на выходе ЦФ 2



$$y_2(n) := T_{\text{перД2}} \cdot \sum_{k=-40}^{40} \left(Y_2(k) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N_2}} \right)$$



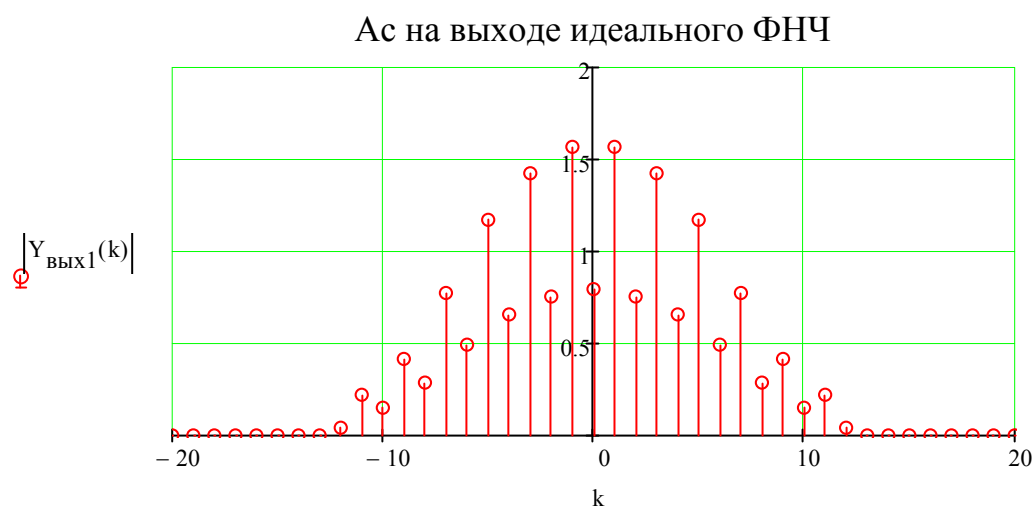
№ 2

Восстановить и построить периодические аналоговые сигналы и их спектры на выходе синтезированных Ц.Ф. с помощью идеальных ФНЧ

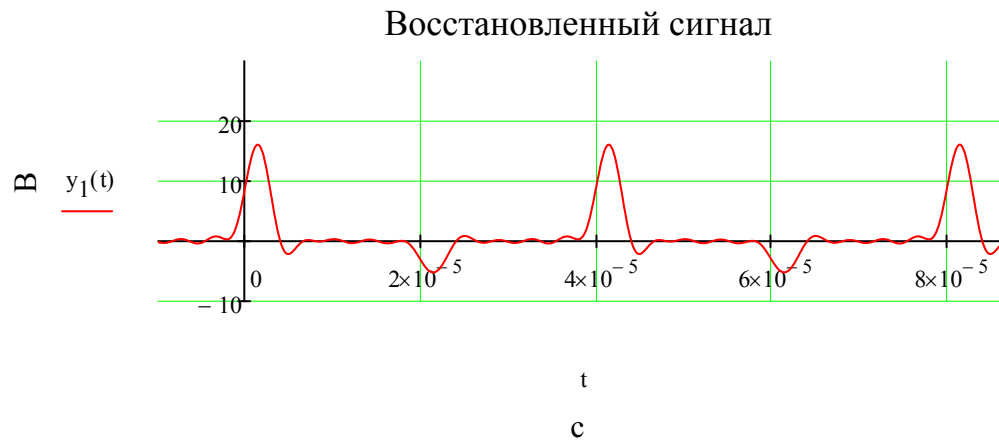
Для фильтра 1:

Решение в частотной области :

$$Y_{\text{ВЫХ1}}(k) := K \left(\frac{k}{T} \right) \cdot Y_1(k)$$



$$\tilde{y}_1(t) := \sum_{k=-10}^{10} \left(Y_1(k) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot t}{T}} \right)$$

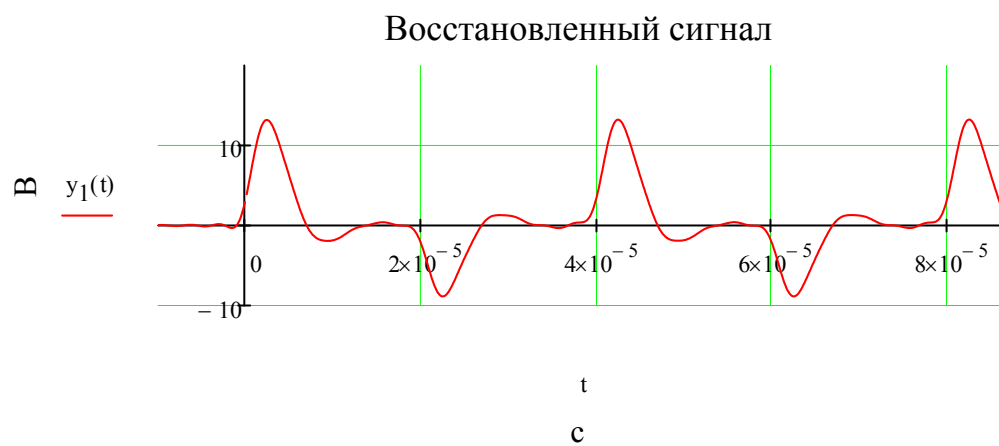


Решение во временной области:

$$k(t) := \frac{K_0}{\pi \cdot t} \cdot \sin(2\pi \cdot F_{\text{гп1}} \cdot t) \quad \text{ИХ идеального ФНЧ}$$

$$\tilde{y}_{T1}(n) := \sum_{m=-20}^{20} \left(s_{N1}(m) \cdot \sum_{q=0}^3 h_{\Pi1}(n - m - q \cdot N_1) \right)$$

$$\tilde{y}_1(t) := \sum_{n=0}^{N_1-1} \left(\left(y_{T1}(n) \cdot \sum_{q=0}^3 k(t - n \cdot T_{\text{перД1}} - q \cdot T) \right) \right)$$



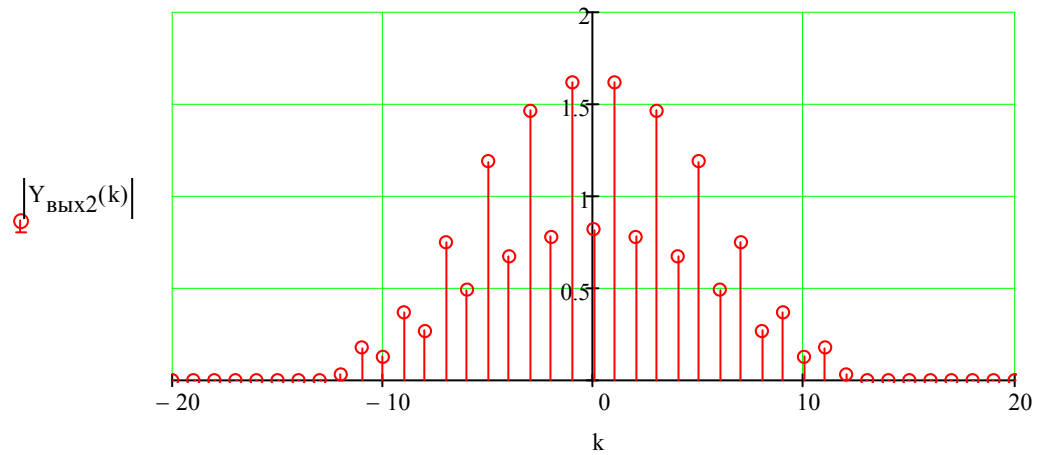
Для фильтра 2:

Решение в частотной области :

$$Y_{\text{вых}2}(k) := K \left(\frac{k}{T} \right) \cdot Y_2(k)$$

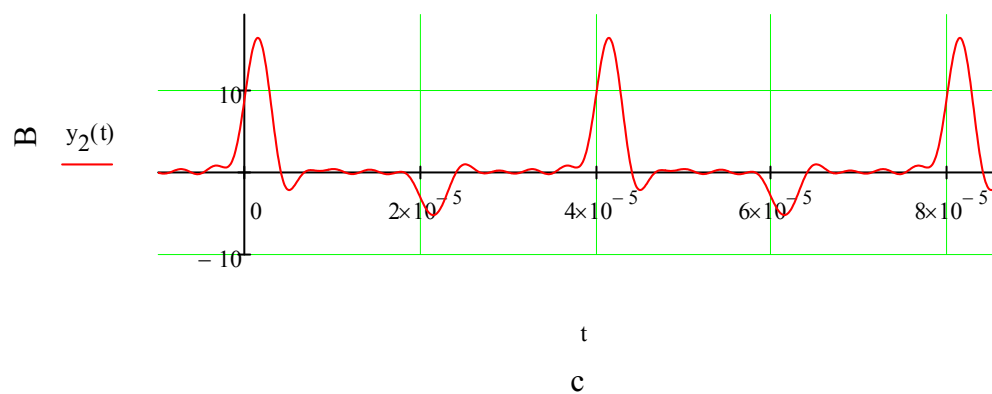
$$k := -30 \dots 30$$

Ас на выходе идеального ФНЧ



$$y_2(t) := \sum_{k=-10}^{10} \left(Y_2(k) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot t}{T}} \right)$$

Восстановленный сигнал

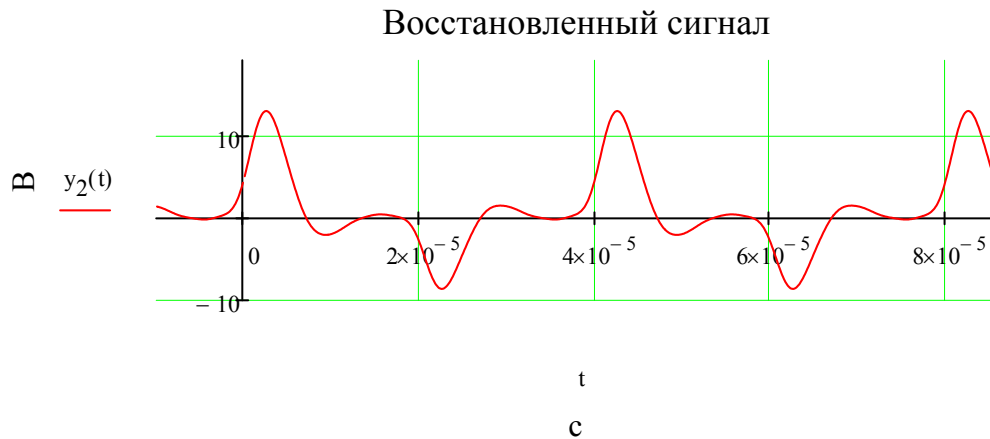


Решение во временной области:

$$k(t) := \frac{K_0}{\pi \cdot t} \cdot \sin(2\pi \cdot F_{\text{гп1}} \cdot t) \quad \text{ИХ идеального ФНЧ}$$

$$y_{T2}(n) := \sum_{m=-20}^{20} \left(s_{N1}(m) \cdot \sum_{q=0}^3 h_{\Pi2}(n - m - q \cdot N_1) \right)$$

$$y_2(t) := \sum_{n=0}^{N_1-1} \left(y_{T2}(n) \cdot \sum_{q=-3}^3 k(t - n \cdot T_{\text{перД1}} - q \cdot T) \right)$$



№ 3.

Проанализировать полученные дискретные и аналоговые периодические сигналы, сравнить между собой и с периодическим аналоговым сигналом на входе заданного аналогового фильтра.

Цифровые сигналы, полученные на выходах фильтров 1 и 2, схожи между собой.

Восстановленные периодические аналоговые сигналы схожи с аналоговым периодическим сигналом, прошедшим через аналоговый фильтр (ч 3 КР за прошлый семестр).

Таким образом пропустив цифровой сигнал через цифровой фильтр, а затем восстановив его, мы получаем такой же сигнал, если бы мы пропустили сразу аналоговый сигнал через аналоговый фильтр.