强连通分量

吉林大学计算机学院
谷方明
fmgu2002@sina.com

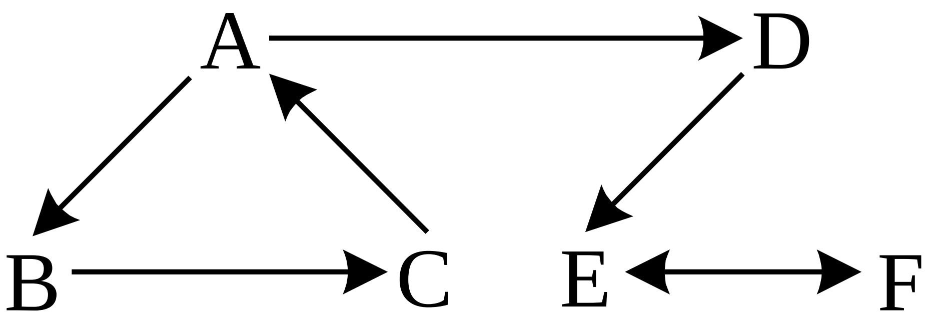
学习目标

- 理解求强连通分量的All_Componet算法
- 掌握求强连通分量的求Tarjan算法

定义回顾

- 有向图中如果两个点能互相可及（或连通）则称这两个点强连通。
- 有向图G中任意两点互相可及（或连通），则称G是强连通图。
- 有向图G的极大强连通子图，称为强连通分量(SCC,Strongly Connected Componenet)。

例



- 三个强连通分量: **{A,B,C},{D},{E,F}**

教材上的方法

- 利用Warshall算法求图G的可及矩阵；
- 根据强连通分量的定义判断两个顶点是否属于同一连通分量；

- 容器：记录当前SCC中的点
  - ✓ 栈、队列、线性表均可

- visited[ ]：visited[i]表示结点i是否已处理过

算法All_Componet(E.)

/*输入图的边集E，输出图中所有的强连通分量*/

All_Componet1[初始化]

```
for (k = 1;  k < n ; k++) visited[k] = 0;
Warshall(E.WSM).  //计算图的可及矩阵
t  = 0;   //记录连通分量的个数
CREATESTACK(scc);
```

All_Componet2 [计算图的全部连通分量]

```
for (v=1 ; v<=n ; v++) {
  if (visited[v]==0)  {  /*处理新的连通分量*/
    t =  t+1; visited[v]  = 1;
    for( i=1 ; i <= n ; i++) {
      if( i!=v && WSM[v][i]==1 && WSM[i][v]==1) {
        visited[i] = 1;
        scc.push(i);
      }}
    print (“第”+ t + “个连通分量:”);
    while(!scc.empty()) { print(scc.pop())};
  }} ▌
```

- 算法All_Componet的时间复杂度$O(n^3)$，空间复杂度$O(n^2)$

强连通分量的实用算法

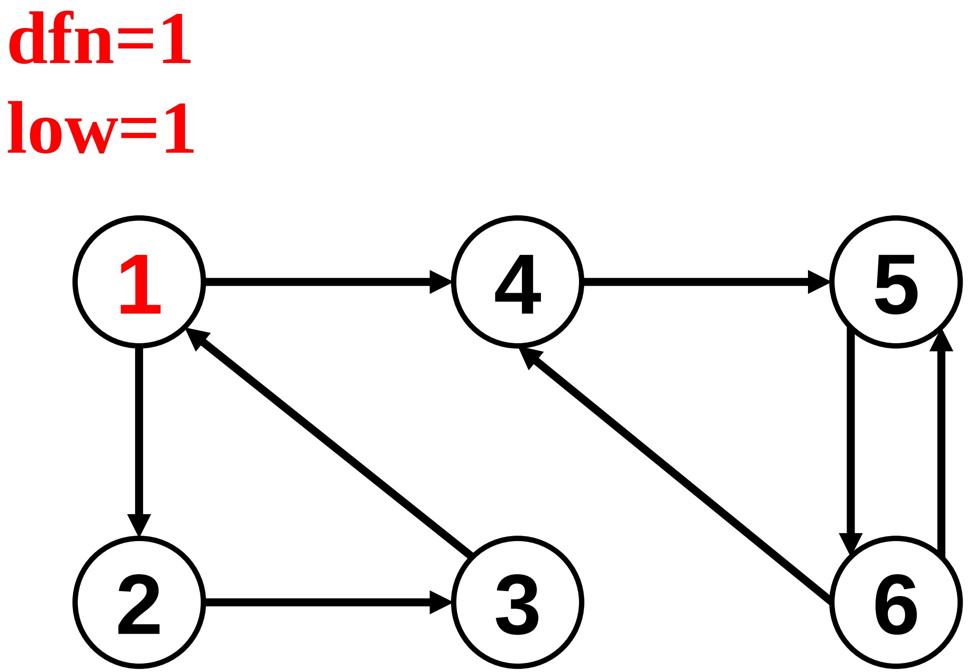
- **Kosaraju-Sharir算法**
  - ✓ 两次DFS，一次原图，一次逆图
  - ✓ 参考算法导论/网上教程，直观，但实现略复杂
- **Tarjan算法**
  - ✓ 利用DFS的dfn和搜索树的根编号low
- **Gabow算法**
  - ✓ Tarjan算法的提升版；利用DFS 和 两个栈；

- **三个算法都是基于DFS的，都是O(n+e)的。**

Tarjan算法思想

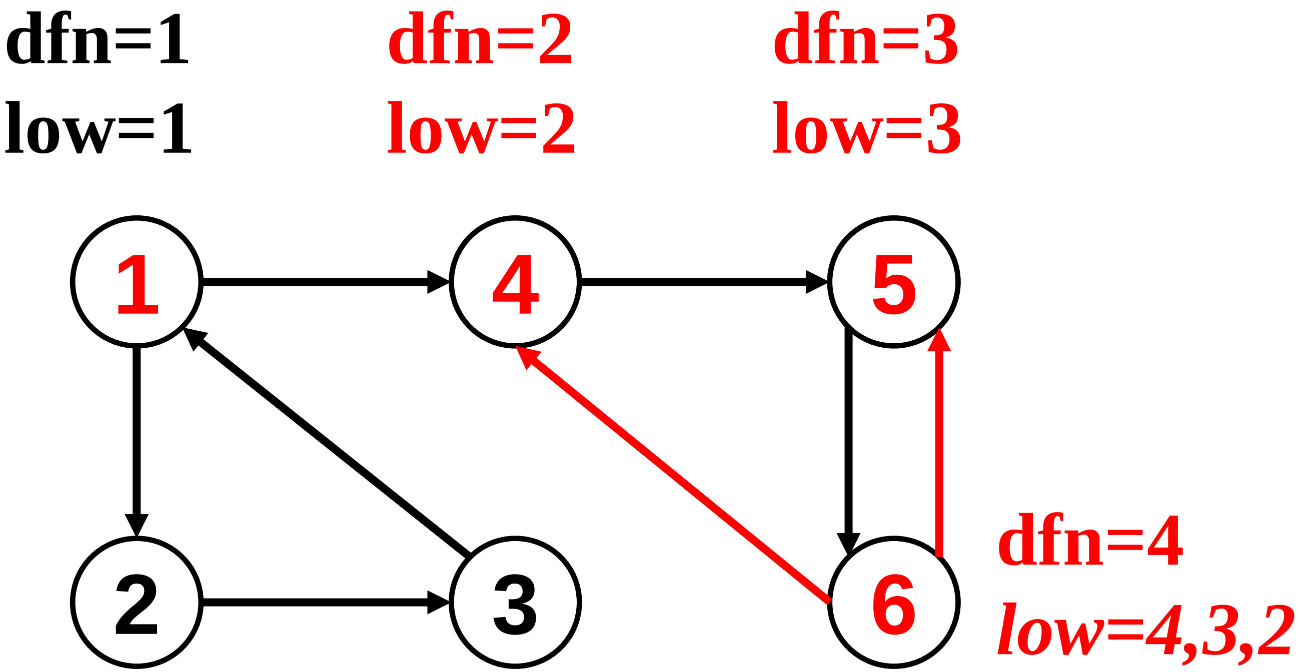
- SCC性质：存在一条**回路**能从初始点经过其中所有点又回到初始点。
- 思想：处于同一个SCC中的结点必然构成DFS树的一棵子树。 找SCC，即找其所在子树的根。
- **辅助结构**
  - ✓ dfn[u]： **dfs时达到顶点u的次序号（时间戳）**；
  - ✓ low[u]： **u所在DFS子树中次序号最小顶点的次序号**；
  - ✓ Stack： 存储搜索路径上的点；

Tarjan算法示例



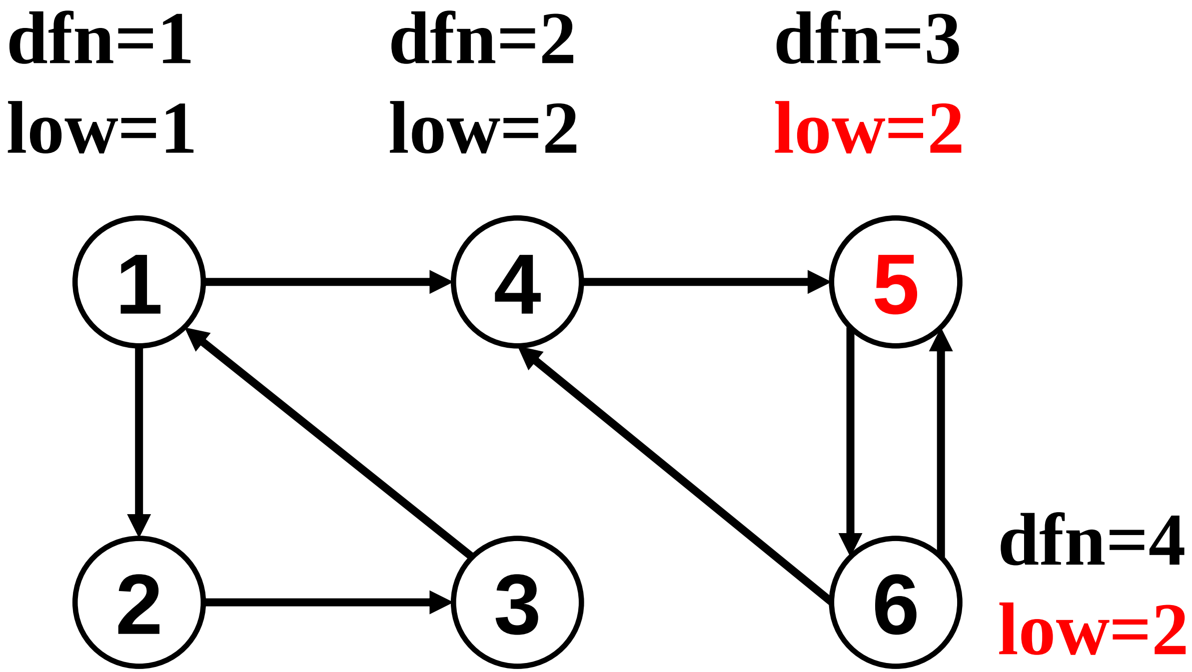
从结点1开始搜索，初始化dfn和low，将结点入栈

Stack：1



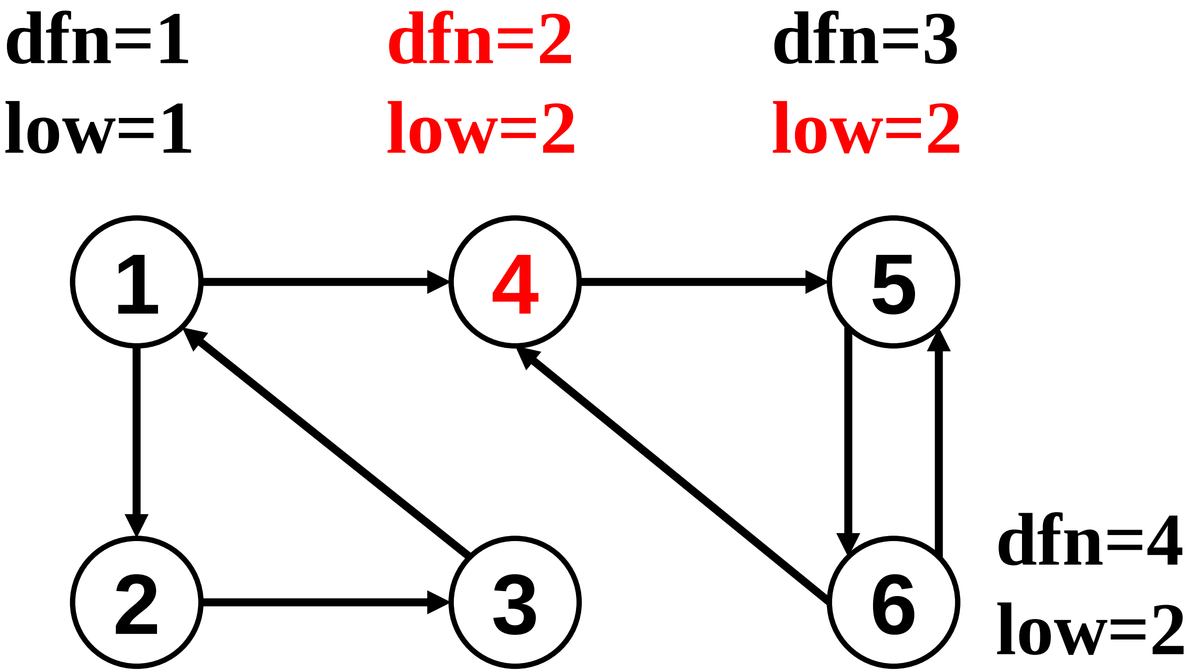
未遇到SCC之前，搜索正常进行，一直到6

Stack：1，4，5，6



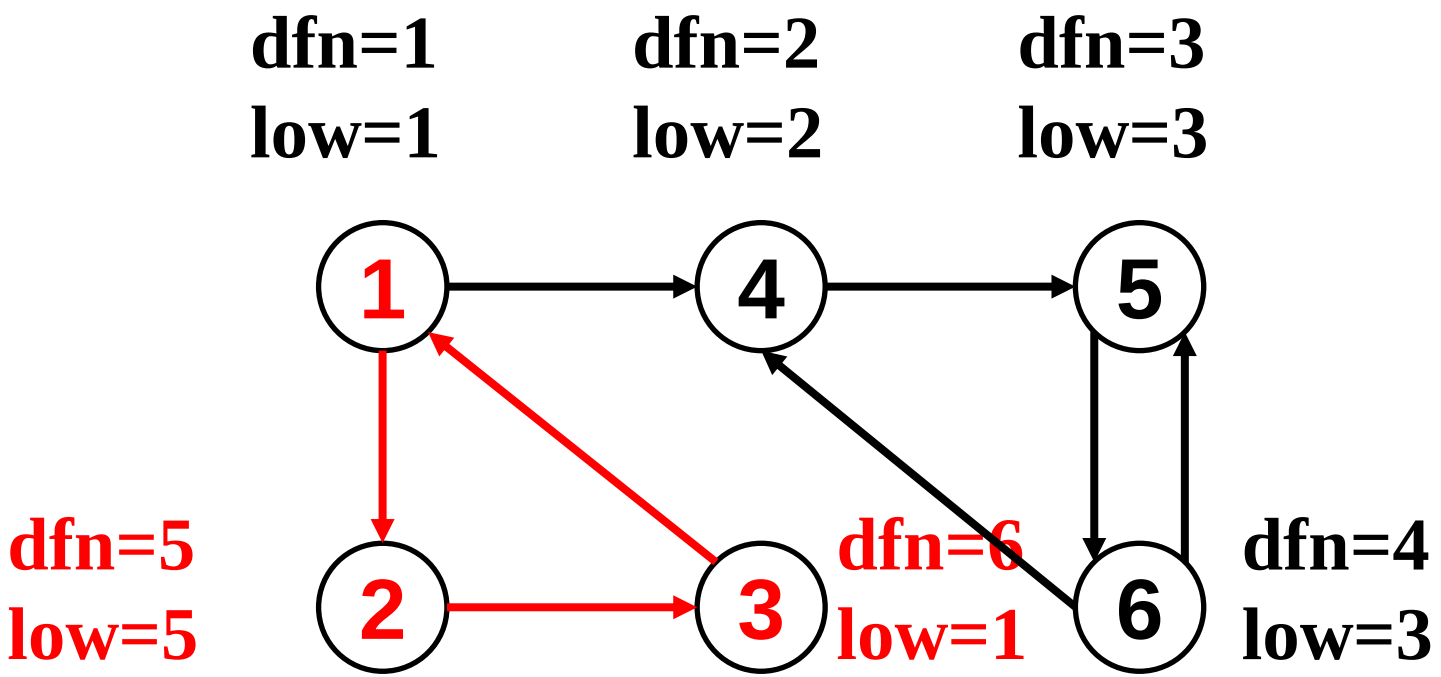
6不能继续搜索；回溯到5，更新low[5]=2

Stack：1，4，5，6



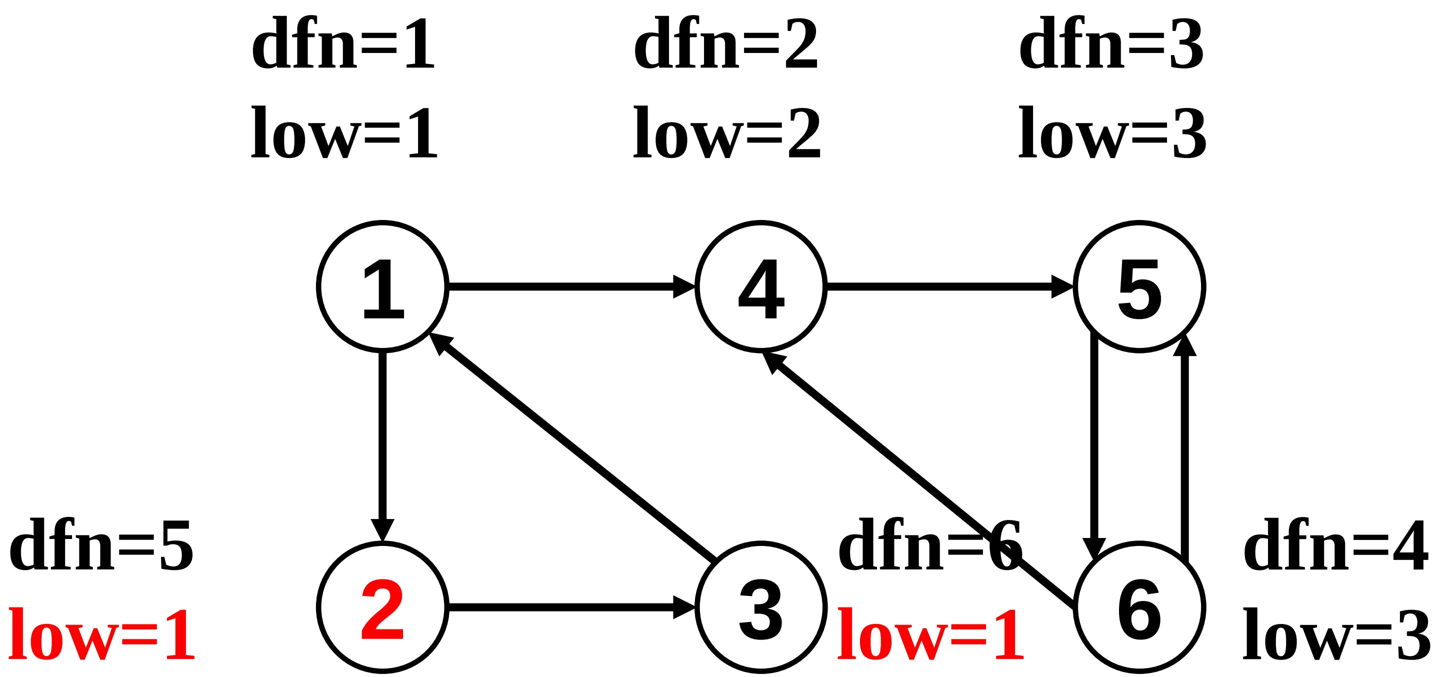
5不能继续搜索；回溯到4，low[4]不变。4不能继续搜索，dfn[4]=low[4]，找到一个SCC={4，5，6}

Stack：1



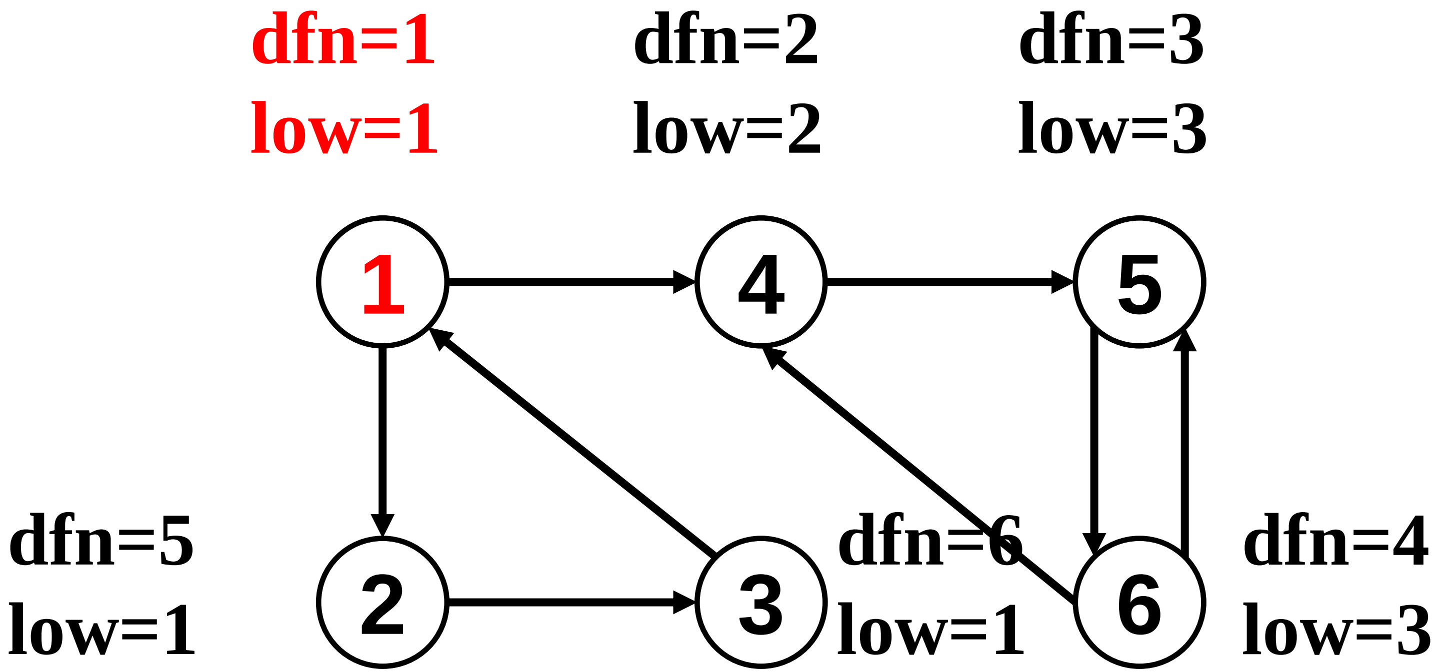
回溯到1，1可以继续搜索，一直到3

Stack：1，2，3



3不能继续搜索；回溯到2，更新low[2]=1

Stack：1，2，3



2不能继续搜索；回溯到1，low[1]不变。 1不能继续搜索，dfn[1]=low[1]，找到一个SCC={1，2，3}

Stack：

Tarjan算法描述

```
tarjan(u){
    DFN[u]=Low[u]=++Index    // 为u设定次序编号和Low初值
    Stack.push(u)            // 将u压入栈中
    for each (u, v) in E     // 枚举每一条边
        if (v is not visted) // 如果节点v未被访问过
            tarjan(v)        // 继续向下找
            Low[u] = min(Low[u], Low[v])
        else if (v in S)     // 如果节点v还在栈内
            Low[u] = min(Low[u], DFN[v])
    if (DFN[u] == Low[u])    // 如果节点u是强连通分量的根
        do{
            v = S.pop  // 将v退栈，为该强连通分量中一个顶点
            print v
        } while (u!= v)
```

Tarjan算法分析

- 类似**DFS**，如果求全图的**SCC**，每次选择一个未被访问的顶点**u**，运行**Tarjan**算法。
  - ✓ DFN数组可作访问标志
  - ✓ Instack数组：顶点在栈中标志

- **Tarjan**算法中，每个顶点都被访问了一次，且只进出了一次堆栈，每条边也只被访问了一次，所以该算法的时间复杂度为**O(n+e)**。

Tarjan算法小结

- **Tarjan算法特点**
  - ✓ 只用对原图进行一次DFS，简洁。
  - ✓ 实测中，Tarjan算法运行效率比Kosaraju算法约高30%
- **Tarjan算法用途**
  - ✓ 缩环
  - ✓ 拓展：割点、桥、双连通分量