L5：线性表

吉林大学计算机学院
谷方明
fmgu2002@sina.com

学习目标

- 熟悉线性表的定义、特性、基本操作
- 掌握顺序表
- 掌握单链表、循环链表、双向链表
- 掌握跳舞链（拓展）
- 掌握静态链表（拓展）

线性表的例子

- 数　列　　　（ **1, 2, 4, 8, 16**）
- 字符串　　　**“You cannot improve your past, but you can improve your future. ”**
- 栈和队列

线性表的定义

- 线性表是由零个或多个具有**相同类型**的结点组成的**有序集合**。

线性表记为

$$\begin{cases} (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) & n>0 \\ (\quad\quad) & n=0 \quad \text{空表} \end{cases}$$

术语和特性

- 称a_0为线性表的头结点(简称表头)，称a_{n-1}为线性表的尾结点(简称表尾)
- a_i为a_{i+1}的前驱结点(简称前驱)，a_{i+1}为a_i的后继结点(简称后继)。

- 线性表特性：除表头和表尾外，每个结点都有唯一的前驱和后继。

线性表的基本操作

1. 在表中第k个结点后插入一个新结点；
2. 删除表中第k个结点；
3. 存取线性表中第k个结点的字段值；
4. 查找指定字段值在表中的位置；
5. ……

基于位置

基于关键词

6. 创建一个线性表；
7. 确定线性表的长度；
8. 判断线性表是否为空；

线性表的顺序存储

- 将线性表的结点按逻辑顺序依次存放在一块地址连续的内存空间中。顺序存储的线性表也称为顺序表。

- 实现顺序存储的最便捷的方法是使用一维数组。
  - ✓ 存储顺序表的数组：**T *element ;**
  - ✓ 顺序表的实际长度：**int length ;**
  - ✓ 顺序表的最大长度：**int maxSize ;**

顺序表结构的声明

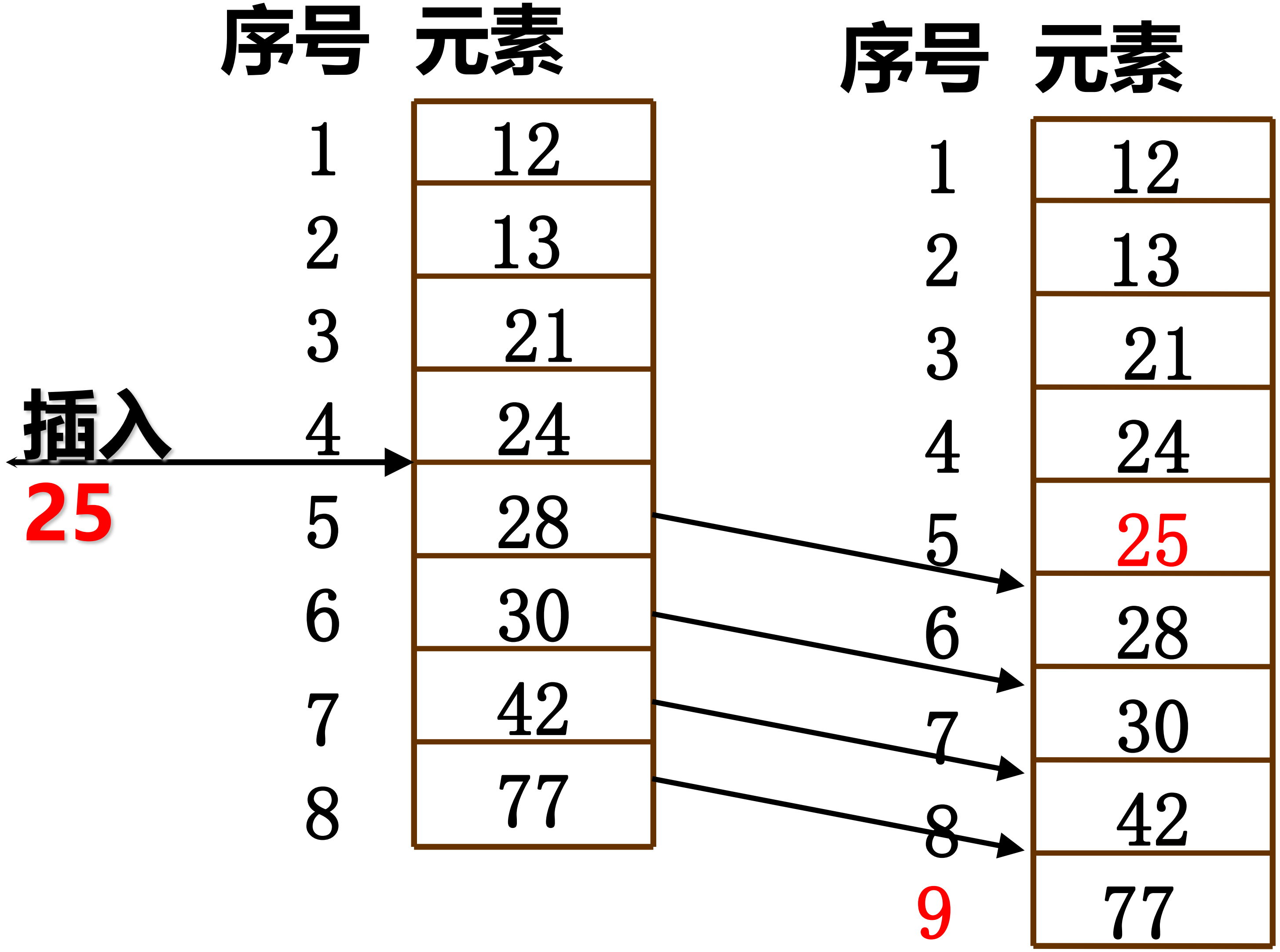
```
template<class T>
struct LinearList{
   T * element;
   int length;
   int maxSize;
   LinearList(int size);//init(int size)
   ~LinearList();//clear
   void ins(int k,int x);
   void del(int k,int* x);
};
```

顺序表的初始化和释放

```
template<class T>
LinearList<T>::LinearList(int size){
        maxSize = size;
        element =  (T*)malloc(size*sizeof(T));//new
        length = 0;
}
template<class T>
LinearList<T>::~LinearList(){
        free(element);//delete
}
```

顺序表的插入

- 元素移动
- 长度增1



插入算法ADL描述

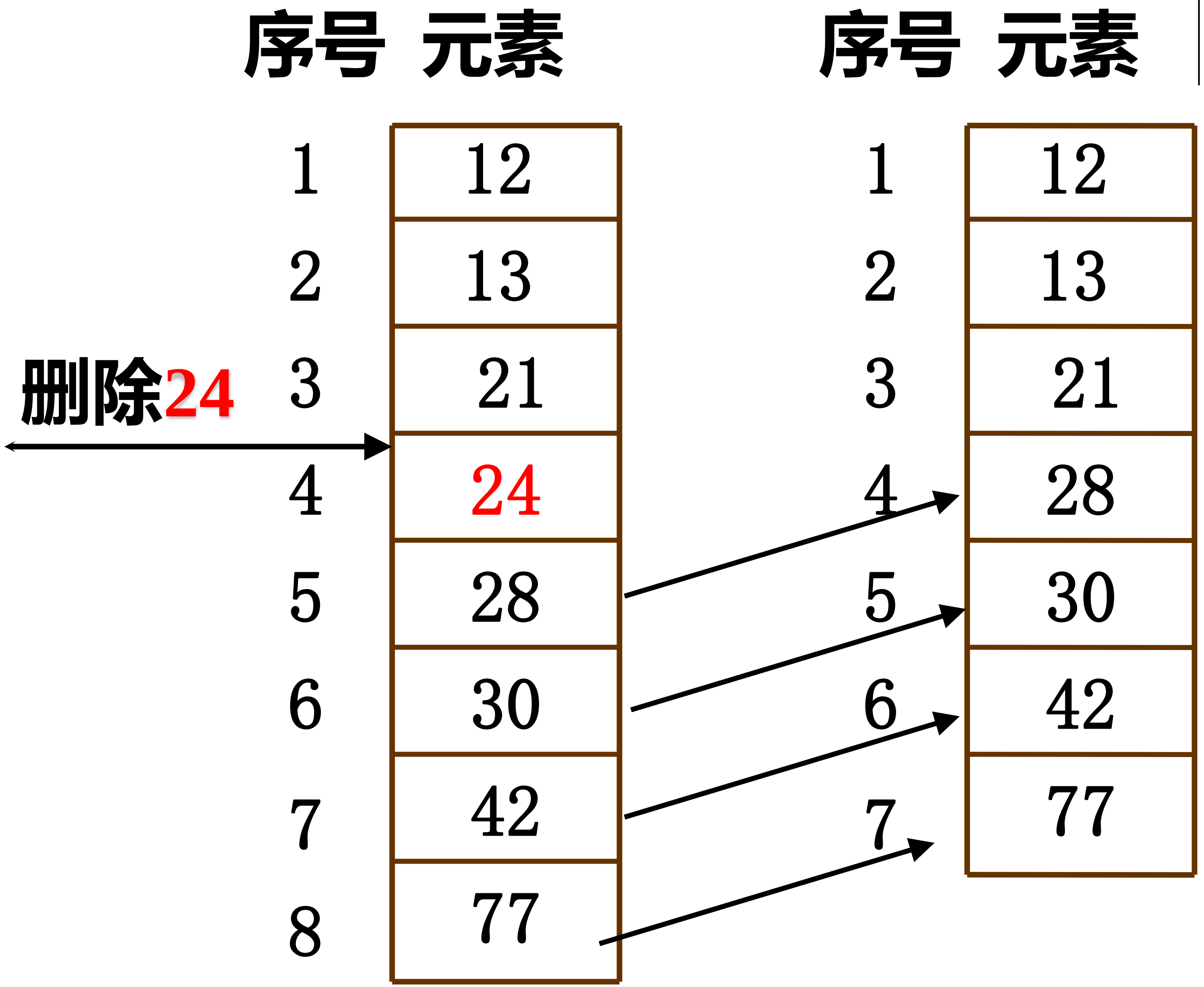
```
算法 Insert(A, k, item)
/* 在第 k 个结点后插入值为 item 的结点 */
I1.[ 插入合法? ]
    if ( k<0  ||  k>length || length==maxSize)   {
        cout<< “插入不合法” ; return;  }
I2.[插入]
    for(i=length; i>=k+1; i--)  A[i+1]←A[i];
    A[k] = item;
    length = length+1;
```

插入操作时间复杂度

- 基本运算：元素移动（表现为元素赋值）
- 最坏时间复杂度
  - ✓ W(n)= n // 若包含A[k] ← item. 计数加1
- 期望时间复杂度
  - ✓ **n+1个位置可以发生插入，设插入成功且插入到各位置的概率相同：1/(n+1)**
  - ✓ **E(n)= (n+(n-1)+…… +1+0) /(n+1) = n/2**
- O(n)

顺序表的删除

- 元素移动
- 长度减1



删除算法ADL描述

算法 Delete(A, k)

/* 删除顺序表 A中第 k 个结点 */

D1.[k合法?]

```
if  (k<1  ||  k>length ||  length==0){ cout<<"删除不合法" ; return ; }
```

D2.[删除]

```
for (i=k+1 ; i<= length ; i++)  A[i-1] = A[i];
length = length-1;
```

删除操作时间复杂度

- 基本运算：元素移动
- 最坏时间复杂度
  - ✓ $W(n)= n - 1$
- 期望时间复杂度
  - ✓ **n个位置可以发生删除，设删除成功且各位置被删除的概率相等：1 / n**
  - ✓ **$E(n) = ((n-1) +\ldots\ldots+1+0)/ n = (n-1)/2$**
- $O(n)$

存取和查找

- 存取第 k 个结点
  - 下标运算
  - 一次命中，O(1)

- 查找元素出现的位置
  - 从前向后逐个比较
  - O(n)

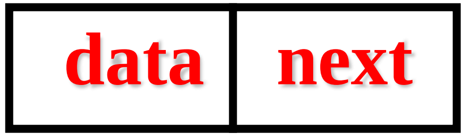
测试

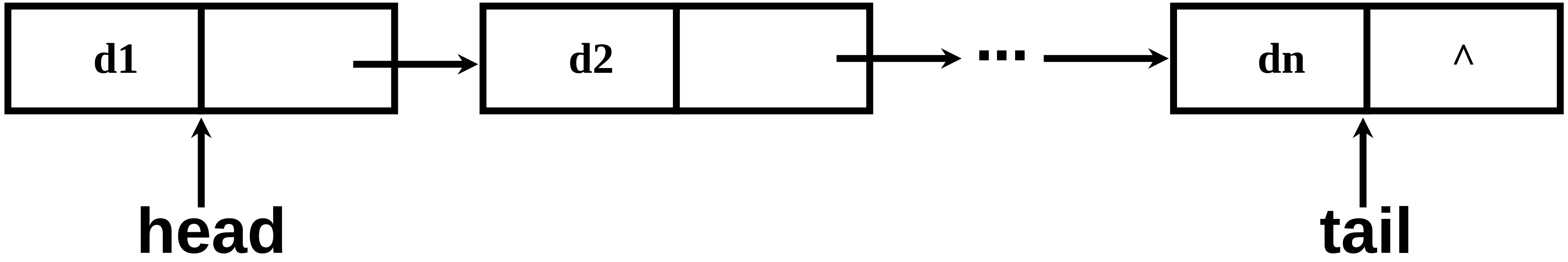
```
int main(){
	int i,x;
	LinearList<int> li(10);
	for(i=0;i<5;i++)
	   li.ins(i,i+1);
	li.del(2,&x);
	//li.pri()

	return 0;
}
```

线性表的链接存储

- 每个存储单元包含结点的值和逻辑相邻结点的地址信息（指针域）。链接存储的线性表也叫链表。
- 链表结点的指针域根据需要进行设计。最常见的是单链表，通常也简称为链表。

单链表





- 链表的第一个结点被称为头结点(也称为表头)，指向头结点的指针被称为头指针(head).
- 链表的最后一个结点被称为尾结点(也称为表尾)，指向尾结点的指针被称为尾指针(tail).

单链表结构的声明

```
template<class T>
struct SLNode{
        T data;
        SLNode* next;
};
```

```
template<class T>
struct SLList{
	SLNode<T>* head;
	SLList(); //init
	~SLList(); //clear
	SLNode<T>* find(int k);
	void ins(int k,T x);
	void del(int k,T& x);
	//void pri();
};
```

单链表的初始化和释放

```
template<class T>
SLList<T>::SLList(){
   head = new SLNode<T>;  //哨位结点
   head->next = NULL;
}
template<class T>
SLList<T>::~SLList(){
   for(SLNode<T>* p=head;head;p=head){
        head = head->next;
        delete p;
   }
}
```

单链表:查找/存取第k个元素

算法 Find (*head, k* . *p*)

// 查找链表第*k*个结点，找到用*p*指向，其它情况 p为NULL

F1. [*k*合法？]

if (*k* < 0) { p = NULL; return ; }

F2. [初始化]

p = head ; i = 0; //有哨兵变量

F3. [找第*k*个结点]

while **(p!=NULL && i<k) { p= p->next; i++ }**

存取/查找第k个的时间复杂度

- 基本运算： 比较（定位）
- 最坏情况下的时间复杂度为O(n)；
- 平均情况下，假设k<1, k=1, …, k=n, k>n的概率相同，即每种情况的发生概率为1/(n+2)，则WHILE循环的执行次数平均为

$$\frac{0+1+\ldots+n+n}{n+2}=\frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=1\cdots n}k+n\right)=\frac{1}{n+2}(n(n+1)/2+n)=\frac{n(n+3)}{2(n+2)}=O(n)$$

- $O(n)$.

单链表:查找元素

算法 **Search** (***head*，*item. p***)

/*在链表中查找值为*item*的结点用p指向*/

S1. [初始化]

p = head->next; //有哨兵变量

S2. [逐点访问]

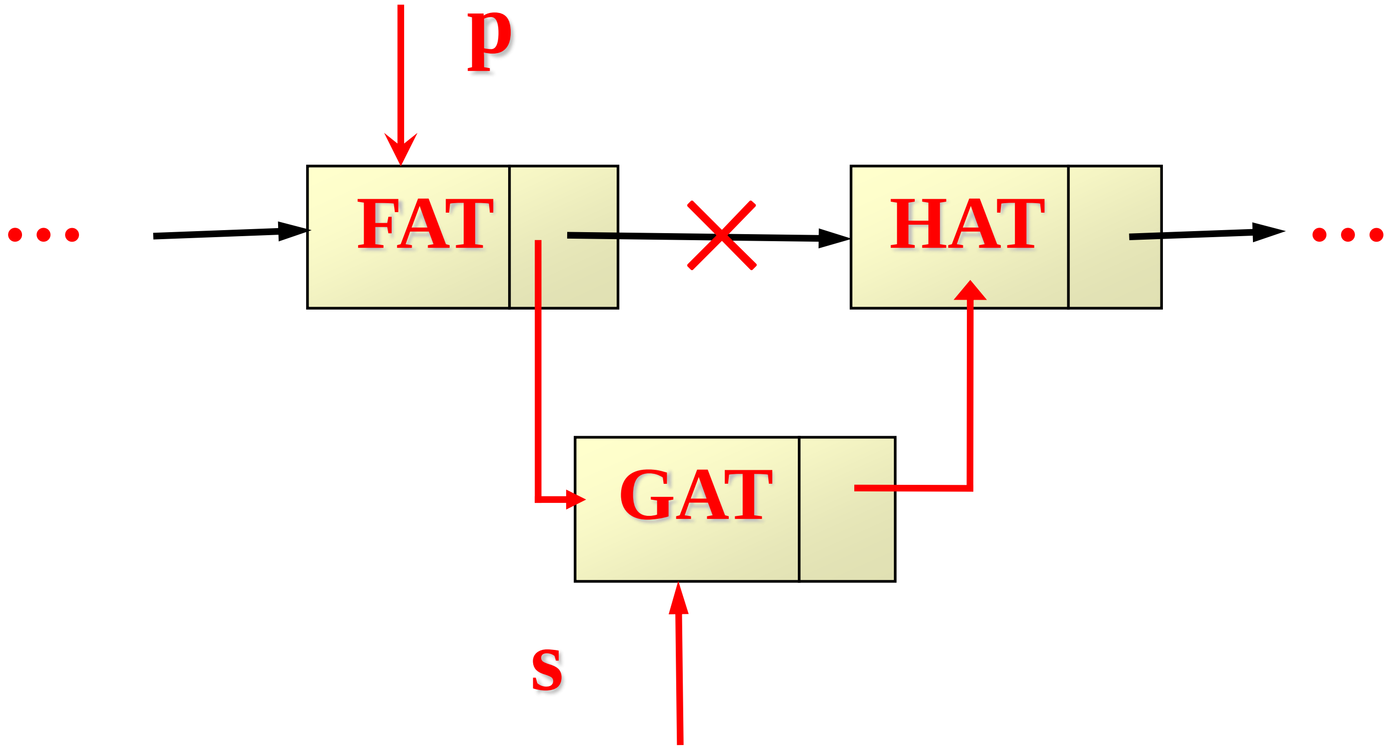
while (p != NULL && p->data != *item*)

p=p->next ;

查找元素操作的时间复杂度

- 基本元算：元素比较
- 最坏时间复杂度
  - ✓ $W(n) = n$
- 平均时间复杂度
  - ✓ $E(n) = O(n)$
- **$O(n)$**

单链表的插入



s->next = p-> next;

p-next = s;

插入算法ADL描述

算法**Insert** (***head, k, item***)

// 在链表中第*k*个结点 后 插入字段值为*item*的结点

I1. [查找第*k*个结点]

Find(head,k,p).

if (p==NULL) { cout<< “插入不合法” ; return; }

I2. [插入]

s⇐AVAIL;

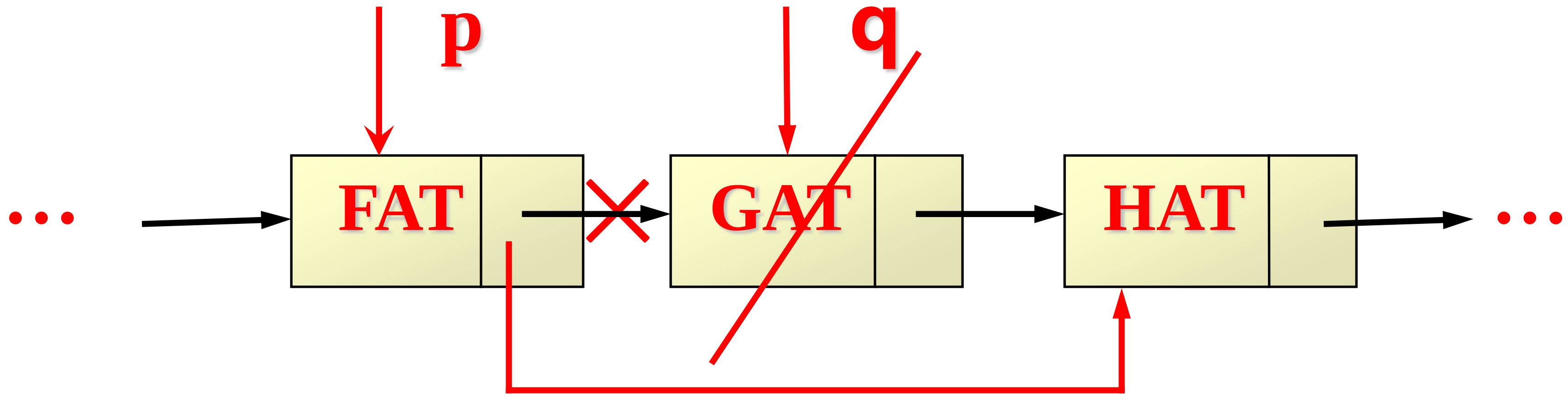
s->data = *item*； s->next = p->next;

p->next = s;

插入操作时间复杂度

- 基本运算：比较（定位）
- 最坏时间复杂度
  - ✓ $W(n)= n$
- 期望时间复杂度
  - ✓ **n+1个位置可以发生插入，设插入成功且插入到各位置的概率相同：1/(n+1)**
  - ✓ **$E(n)=(n+(n-1)+\dots\dots +1+0) /(n+1)$ $= n/2$**
- O(n)

单链表的删除



q = p->next ; p->next = q->next;

AVAIL $\Leftarrow$ q ;

删除算法ADL描述

算法**Delete** (***head, k***)

// 删除链表中第*k*个结点

D1. [找第*k*–1结点]

Find(head,k-1,p).

if (p==NULL || p->next==NULL){

cout<<“无此结点” ; return;}

D2. [删除]

q = p->next ; p->next = q->next ;// 修改p的next指针

AVAIL⇐q;

删除操作时间复杂度

- 基本运算：比较（定位元素）
- 最坏时间复杂度
  - $W(n)= n - 1$
- 期望时间复杂度
  - **n个位置可以发生删除，设删除成功且各位置被删除的概率相等：1 / n**
  - **$E(n) = ((n-1) +......+1+0)/ n =$ $(n-1)/2$**
- $O(n)$

顺序表VS链表：时间复杂度

- 线性表的基本操作是存取(第k个)、插入和删除。对于顺序表，随机存取非常容易，但插入或删除元素需要移动若干元素；对于链表，随机存取必须要从表头开始遍历链表，但链表的插入和删除操作非常简便，只需修改一个或者两个指针值。
- 对于基于位置的插入和删除，两者时间复杂度都是O(n)，顺序表的基本运算是元素移动，链表的基本运算是比较。一般来说，元素移动要大于比较。

- 对于基于关键词的操作，顺序表要增加查找的时间，耗时更多。
- 链表的插入和删除涉及到内存的申请和释放，需要调用系统函数，耗时更多。
- 当线性表要经常进行插入、删除操作时，链表的时间效率较高（动态表）；当线性表基本不需要插入和删除时，顺序表的时间效率较高（静态表）。

思考

- **栈和队列的插入删除的操作为何都是O(1)的？**

- **栈**
  - ✓ 顺序表在表尾增删高效
  - ✓ 链表在表头增删高效
- **队列**
  - ✓ 删除用表头指针加速
  - ✓ 插入用表尾指针加速

顺序表VS链表：空间复杂度

- 顺序表所占用的空间来自于申请的数组空间，数组大小是事先确定的。当表中的元素较少时，顺序表中的很多空间处于闲置状态，造成了空间的浪费；
- 链表所占用的空间是根据需要动态申请的，不存在空间浪费的问题，但是链表需要在每个结点上附加一个指针，产生一定的结构性开销

空间复杂度临界值

设N： 线性表的长度； D： 顺序表可存储结点个数；

s： 存储结点数据域所占字节数；

p： 存储指针所需字节数；

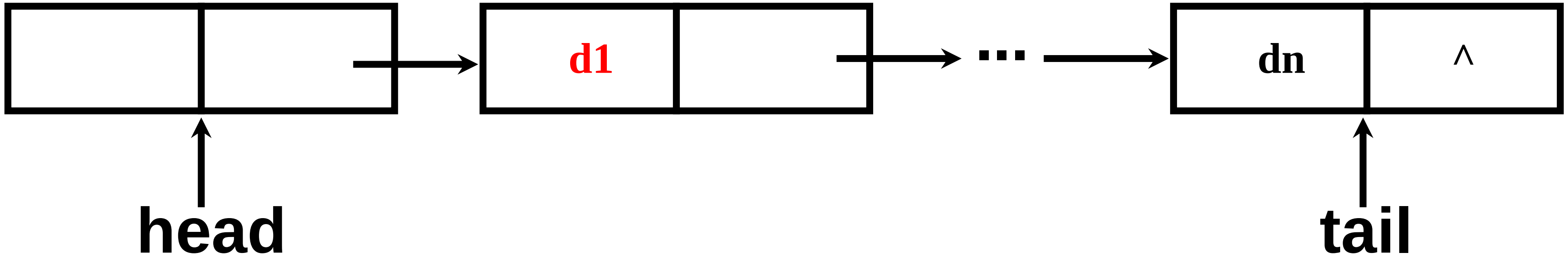
顺序表空间需求D×s， 链表空间需求N×(s + p) .

- 临界点： $N = D \times s / (s + p)$

- 线性表长度N较大时，顺序表的空间效率较高，线性表长度N较小时，链表的空间效率较高

哨位结点

- 为了对表头结点插入、删除等操作的实现方便，通常在表的前端增加一个特殊的表头结点，称其为哨位结点 （哨兵变量）



增加哨位结点的单链表

例： 删除值为x的结点

- 无哨位结点版本（讨论多种情况）

```
Node* p0,*p;
if(head==NULL) return;
if(head->next== NULL && head->data==x){
      delete head; head=NULL;
      return;
}
for( p=head ; p ; p0=p , p=p->next )
   if(p->data==x){
         p0->next=p->next;
         delete p;
         p=p0->next;
 }
```

- 有哨位结点版本（逻辑简洁）

```
Node* p0=head,*p=p0->next;
for( ; p ; p0=p, p=p->next)
    if(p->data==x){
        p0->next=p->next;
        delete p;
        p=p0->next;
    }
```

哨位结点的用处

- 标识第0个（逻辑上）结点；
- 避免讨论head为空的情况;
- 易于编程（插入、删除等操作统一规范）；

线性表的应用

- 线性表应用极其广泛。
  - ✓ 序列、表格、字符串……
  - ✓ 数组、矩阵、……
  - ✓ 环、……
  - ✓ 多项式、……

- 线性表的适用条件：线性数据的容器。
- 线性表是最基本、最简单、也是最常用的一种数据结构。

例：多项式的计算系统

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- 加法、减法、微分、代入求值……
- 增项、删项

设计方案 I

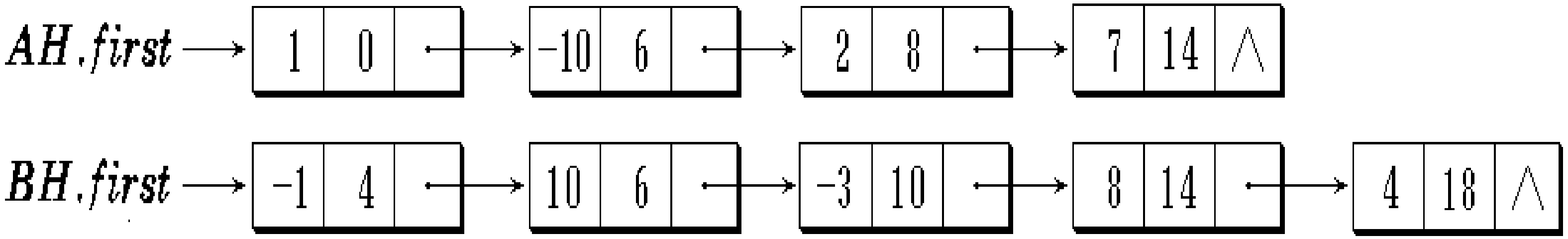
- 在多项式的链表表示中每个结点增加了一个数据成员Link，作为链接指针。

coef	Exp	Link

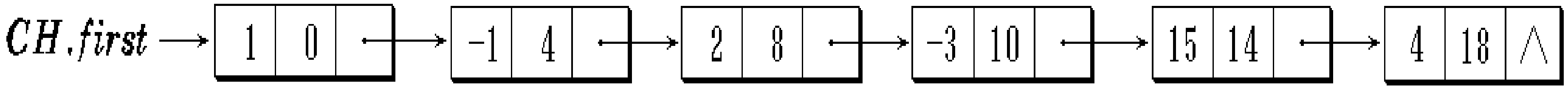
- 优点：
  - ✓ 多项式的项数可以动态地增长，不存在存储溢出问题。
  - ✓ 插入、删除方便，不移动元素。

$$AH = 1 - 10x^6 + 2x^8 + 7x^{14}$$

$$BH = - x^4 + 10x^6 - 3x^{10} + 8x^{14} + 4x^{18}$$



(a) 两个相加的多项式



(b) 相加结果的多项式

设计方案 II

- 顺序存储(每一项保存系数和指数)
  - ✓ 优点：实现容易，
  - ✓ 缺点: 增项、删项效率低

- 顺序存储(每一项保存系数，指数用下标表示)
  - ✓ 优点：处理简单
  - ✓ 缺点：可能导致空间浪费严重，适用于指数较小的情况

STL顺序表：vector

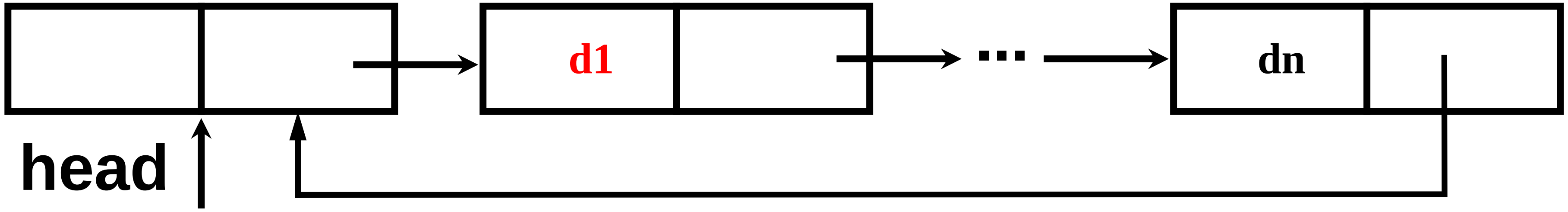
- 动态数组 / 有序集合
  - ✓ at() // [ ]
  - ✓ insert()
  - ✓ erase()
  - ✓ size() //capacity
  - ✓ vector<int>::iterator i;
  - ✓ push_back(); //末端操作效率高
  - ✓ pop_back();
  - ✓ back();
  - ✓ front();

STL链表：list

- 双向链表，不支持随机存取
  - ✓ insert()
  - ✓ erase()
  - ✓ size() //无capacity
  - ✓ list<int>::iterator i;
  - ✓ push_back();
  - ✓ pop_back();
  - ✓ push_front();
  - ✓ pop_front();
  - ✓ remove, splice, merge, sort,……

循环链表

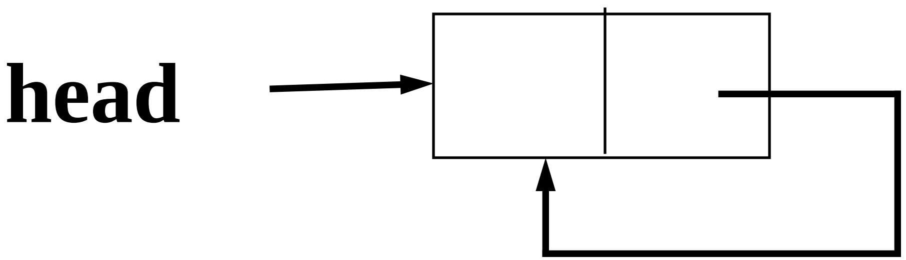
- 链接结构“循环化”，即表尾结点的**next**域存放指向哨位结点的指针，而不是存放空指针**NULL**，这样的单链表被称为循环链表。



- 循环链表特性: 可从链表的任何位置开始，访问链表中的任一结点。

循环链表状态和操作

- 空表



head->next == head

- 表尾

p->next == head

- 其操作和单链表类似

例：约瑟夫问题

- 据说著名犹太历史学家 Josephus的故事。
- 罗马人占领乔塔帕特，39 个犹太人与Josephus及其朋友躲到一个洞中。39个犹太人宁愿死也不要被敌人抓到，于是决定了一个自杀方式。 41个人排成一个圆圈，由第1个人开始报数，每报数到第3人该人就必须自杀，然后再由下一个重新报数，直到所有人都自杀身亡为止。
- 然而Josephus 及其朋友并不想遵从。他将朋友与自己安排在第16个与第31个位置。

简化版本

- **N**个人围成一圈，从第一个开始报数，第**M**个将被杀掉，最后剩下一个。
- 例如**N=6**，**M=5**，被杀掉的人的序号为依次**5**，**4**，**6**，**2**，**3**。最后剩下**1**号。

- 被杀掉的序号顺序？
- 最后剩下的人序号？

方案I

- **模拟法：顺序存储（不真删）**
  - 法1：下标表示第i个人的编号
  - 法2：第i个位置存放编号i
- **效率分析**

  $(M/2 + 1) * N + (M/3 + 1) * N + \ldots + (M/N + 1) * N$

  $< MN*\ln N + N(N-1)$

- **如果不置0，每次都真删，要移动元素，请同学们分析效率。**

方案II

- 模拟法：循环链表

- 时间效率：M*(N-1)
- 空间效率：O(N)

方案III

- 数学公式

双向链表

- 双向链表（**Double-Linked List**）**:** 链表中的结点由**data**域、**left**域**(**前驱地址**)**和**right**域**(**后继地址**)**构成。

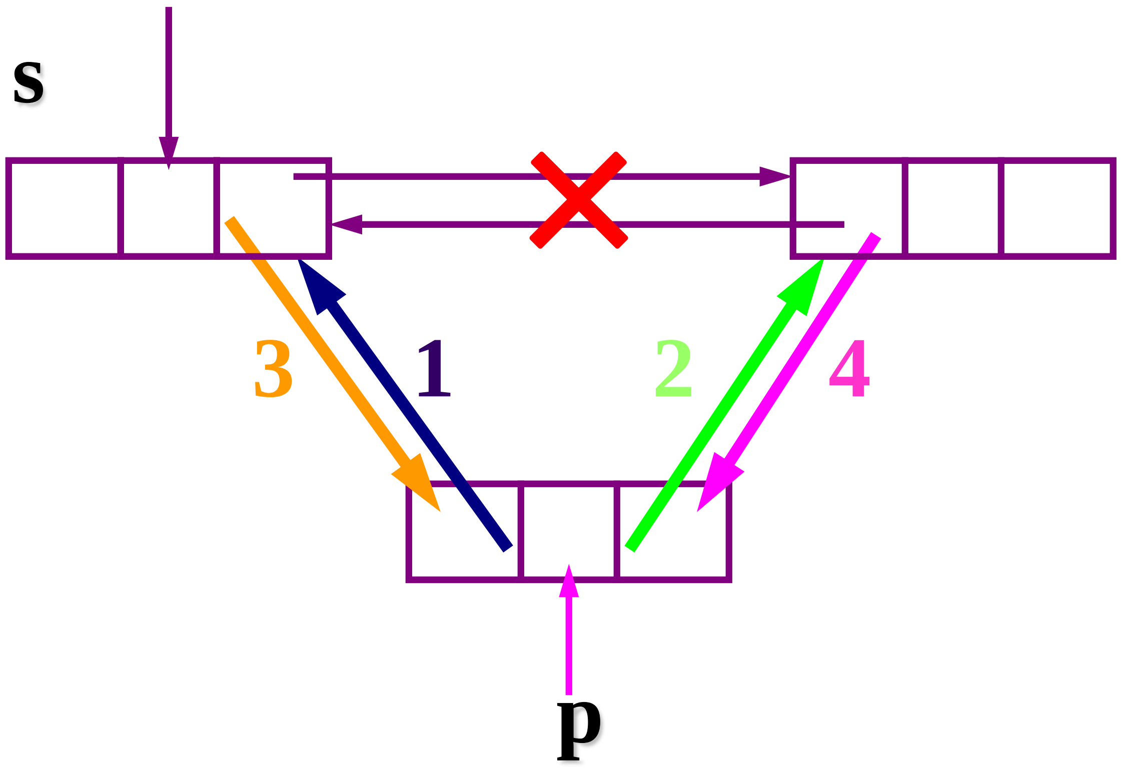
left	**data**	**right**

- 双向链表的特性：直接的双向访问能力
- 链表中表头结点的**left**指针和表尾结点的**right**指针均为**NULL.**

双向链表结点的结构

```
template<class T>
struct DLNode{
    T data;
    DLNode* left,*right;
};
```

插入算法



- p -> left = s;
- p -> right = s->right;
- p -> left -> right = p;
- p -> right -> left = p;

插入算法的ADL描述

算法**DLInsert**（*head* , *s* , *p* . *head*）

// 结点*s*的右边插入结点*p* ,有哨位

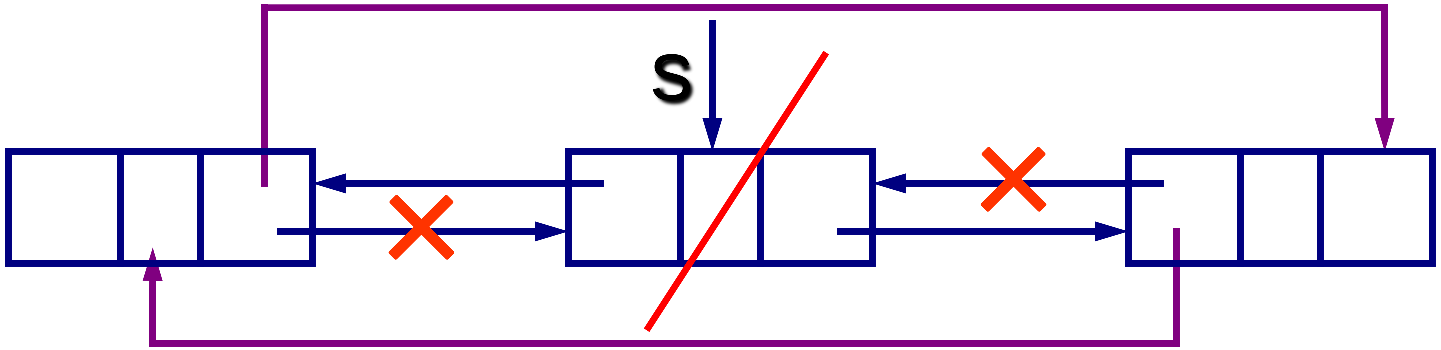
DLI1.[特判：空 和 *s*是尾结点]

```
if (s ==NULL || p == NULL) return;
if (s->right==NULL) { p->left =s; p->right=NULL; p->left->right=p;return;}
```

DLI2. [插入]

```
p->left = s;
p->right = s -> right;
p->left->right = p ;
p->right->left =p ;
```

删除算法



- s -> left -> right = s->right;
- s -> right -> left = s->left;
- free(s);

删除算法的ADL描述

算法**DLDelete**（*head,p . head*）// 删除结点*p*,有哨位

DLD1.[特判：若结点*p*为空或尾结点]

if (*p* == NULL) return;

if (p->right ==NULL) { *p->left-right =NULL;* AVAIL⇐*p*; return;}

DLD2. [删除]

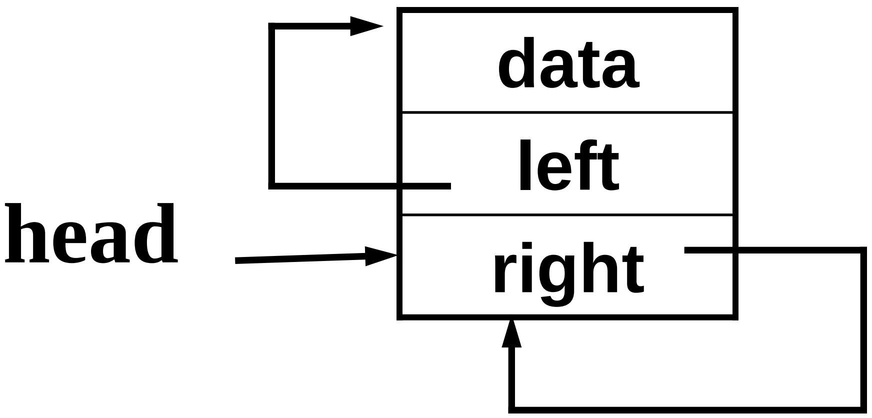
p->left-right = p->right;

p->right->left = p-> left;

AVAIL⇐*p*;

跳舞链

- 带哨兵变量的双向循环链表：跳舞链
- 表头：**head->right**
- 表尾：**head->left**



- 空表：**head->left== head**
  或者 **head->right==head**

插入

```
template<class T>
void DLList<T>::ins(int k,T x) { //k个结点后插入x
   DLNode<T>* p,*q;
    p=find(k);
   if(p==NULL) return;
   q=new DLNode<T>;
   q->data=x;
    q->left=p,q->right=p->right;
    q->left->right=q,q->right->left=q;
}
```

删除

```
template<class T>
void DLList<T>::del(int k,T& x) {//删除 第k个结点
        DLNode<T>* p;
        if(k<=0) return;
        p=find(k); if(p==NULL) return;
        p->right->left=p->left;
        p->left->right=p->right;
        x=p->data;
        delete p;
}
```

静态链表

- 前面学习的各种链表都是由指针实现的；链表中结点的分配和回收都是由系统提供的标准函数动态实现的，故称之为动态链表；
- 但是，有的高级语言，如**BASIC**、**FORTRAN**等，没有提供”指针”这种数据类型；链表的插入和删除效率较高，但实现不如顺序表简单；
- 用数组实现的链表，称为静态链表。

静态链表原理

- 每个结点应含有两个域：**data**域和**next**域；**data**域用来存放结点的数据信息，**next**域指示其后继结点在数组中的相对位置(即数组下标)。
- 定义一个较大的结构数组作为待分配结点空间(即存储池)。
- 结点的分配和回收都针对于存储池。简单的，分配时使用未用的数组元素；回收时不处理或置删除标记；

静态单链表：结构体数组

```
struct Node
{
    int data;
    int next;
};

Node link[MAXN];    // link[0]是哨兵结点
int tot=0;  //用于结点分配
```

头插法创建链表

```
void insHead(int x)
{
   tot++;
   link[tot].data=x;
   link[tot].next=link[0].next;
   link[0].next=tot;
}
```

链表的遍历

```
void print()
{
   for( int p=link[0].next ; p ; p=link[p].next )
       printf("%d\n",link[p].data);
}
```

删除头结点

```
//不回收，空间有浪费
void delHead()
{
   int p=link[0].next;
   if(p) link[0].next=link[p].next;
}
```

验证

```
int main()
{
   int n,i;
   scanf(("%d",&n);
   for(i=1;i<=n;i++)
     insHead(i);
   print();
   delHead();
   print();
}
```

静态单链表：平行成员数组

```
int data[MAXN];
//下标相同成员属于同一结点
int next[MAXN];
 //下标0是哨兵变量，next[0]是头指针
int tot=0;  //用于结点分配
```

```
//头插法创建链表
void insHead(int x)
{
   tot++;
   data[tot]=x;
   next[tot]=next[0];
   next[0]=tot;
}
```

```
void print()
{
   for(int p=next[0];p;p=next[p])
      printf("%d\n",data[p]);
}

void delHead()
{
   int p=next[0];
   if(p) next[0]=next[p];
}
```

例：移动小球

- 描述：n个小球，从左到右编号依次为1,2,3,4,5,6.........n，并规定小球1的左边的球号为n，小球n的右边的球号为1.
- 现在有以下3种操作：
  - A x y:把编号为x小球移动到编号为y的小球的左边，
  - B x y:把编号为x小球移动到编号为y的小球的右边，
  - Q 1 m为询问编号为m的小球右边的球号，

    Q 0 m为询问编号为m的小球左边的球号。

- 输入
  - 第一行有一个整数n(0<n<10000),表示有n组测试数据，
  - 随后每一组测试数据第一行是两个整数N,M，其中N表示球的个数(1<N<10000)，M表示操作的的次数(0<M<10000)；随后的M行，每行有三个数 s x y，s表示操作的类型，x，y为小球号。当s为Q时，若 x 为1，则询问小球 y 右边的球号，x 为0，则询问小球 y 左边的球号。
- 输出 ： 每次询问的球号

- 样例输入
  - 1
  - 6 3
  - A 1 4
  - B 3 5
  - Q 1 5
- 样例输出
  - 3

静态链表版跳舞链

- int D[MAXN];
- int L[MAXN];
- int R[MAXN];

创建

```
inline void create()
{
    for( int i = 1;i < n; i++ ){
        D[i] = i;
        L[i] = i - 1;
        R[i] = i + 1;
    }
    L[n] = n-1 ; R[n] = 0 ;
    L[0]= n ; R[0] = 1 ;
}
```

跳舞链的适用条件

- 多用于表上高效插入和删除；特征是元素固定、只调整链接；

- 查找（第k个）： O(1)
- 插入（链上）： O(1)
- 删除（摘下）: O(1)

跳舞链优化搜索

```
void delink( int x ) { //x的左右指针未置空；控制风险
    R[ L[x] ] = R[x];
    L[ R[x] ] = L[x];
}
void link( int x ) { //利用风险，操作便利；
    R[ L[x] ] = x;
    L[ R[x] ] = x;
}
```

- 连续多次delink可出错；请控制好顺序。
- 真正删除需要将指针置空；

总结

- 线性表的定义、特性
- 线性表的基本操作
- 顺序表
- 单链表
- 双向链表
- 跳舞链
- 静态链表