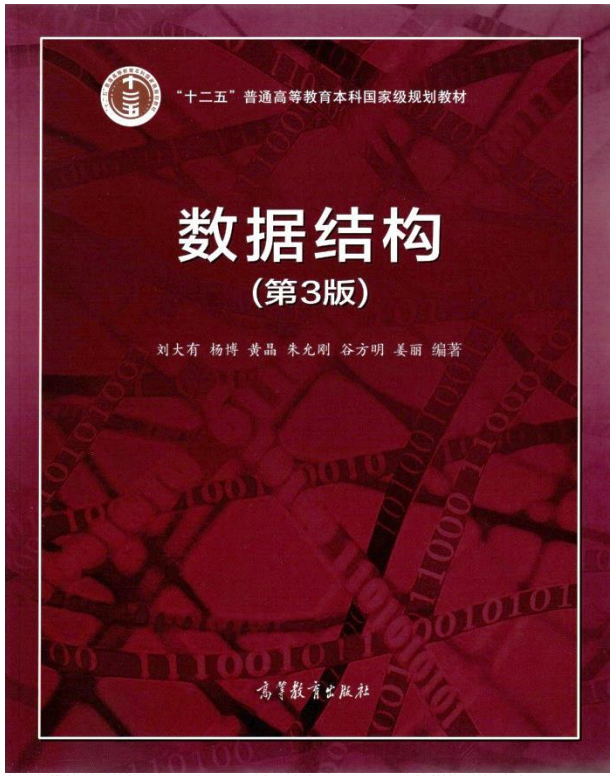
计算机学院王湘浩班
2024级



数据之法
结构之美
算法之道

多叉查找树

- B树
- 数字查找树/字典树

zhuyungang@jlu.edu.cn

Last updated on 2025.6

我刚接触电脑就发现电脑的妙处，电脑远没有人那么复杂。如果你的程序写得好，就可以和电脑处好关系，就可以指挥电脑干你想干的事，这个时候你是十足的主宰。每当你坐在电脑前，你就是在你的王国里巡行，这样的日子简直就是天堂般的日子。

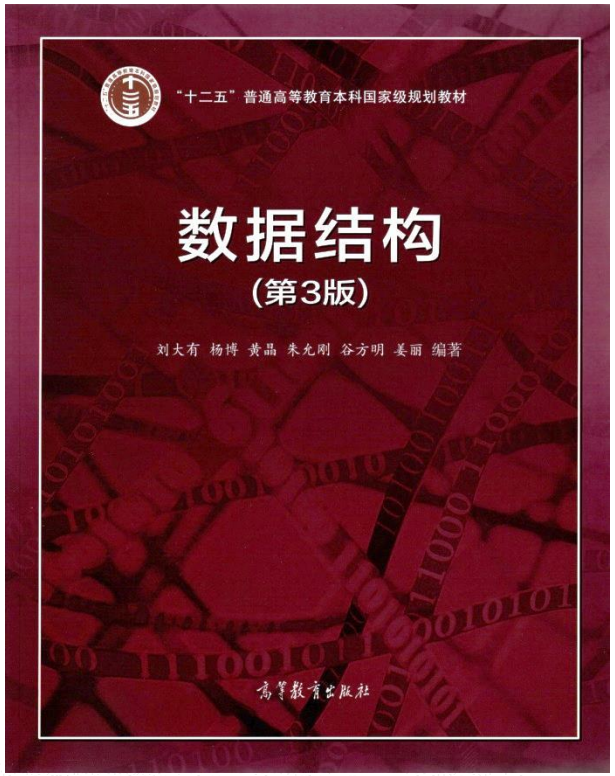
电脑里的世界很大，编程人是活在自己想象的王国里。你可以想象到电脑里细微到每一个字节、每一个比特的东西。

编程不仅仅是技术，也还是艺术。编程是技术活，才有可能大规模进行，才会有软件工程和软件工厂。也正是因为编程是艺术，才会有如此多的好产品，让大家如痴如醉。

——雷军

武汉大学学士

小米集团创始人、董事长兼CEO



多叉查找树

- **B树**
- 数字查找树/字典树

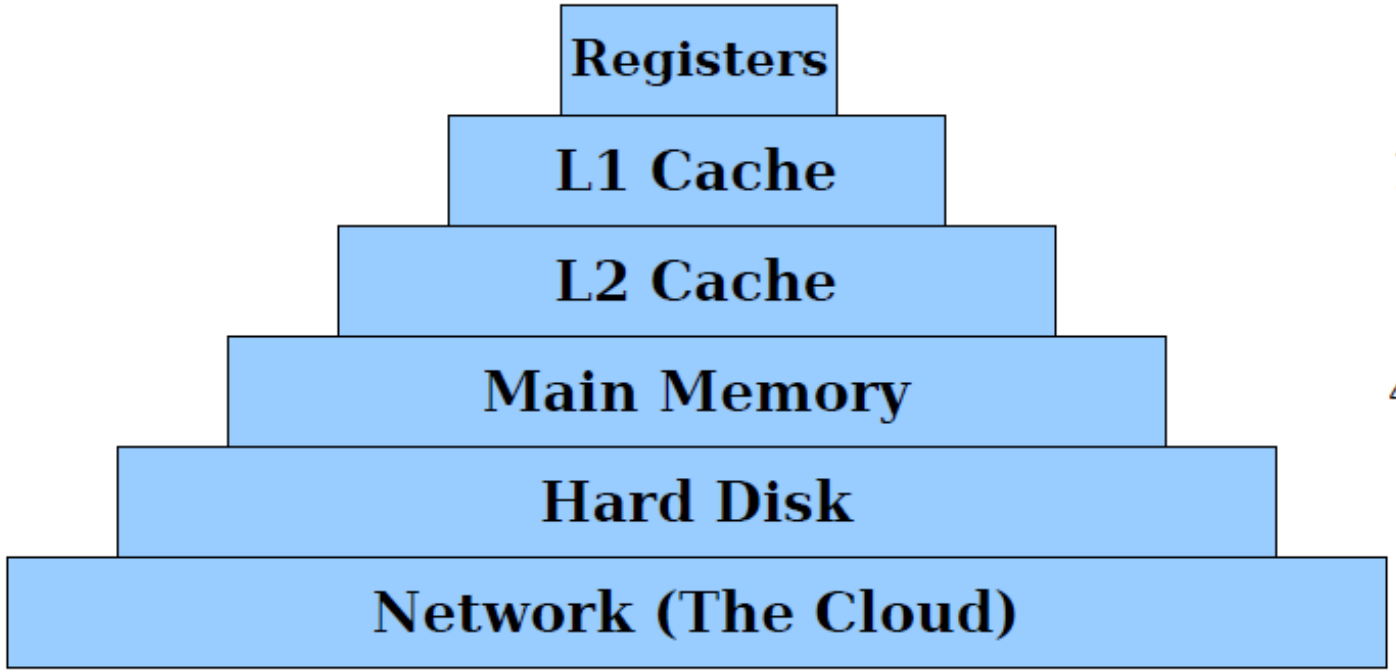
数据之法
结构之美
算法之道

zhuyungang@jlu.edu.cn

Last updated on 2025.6

计算机存储体系

C

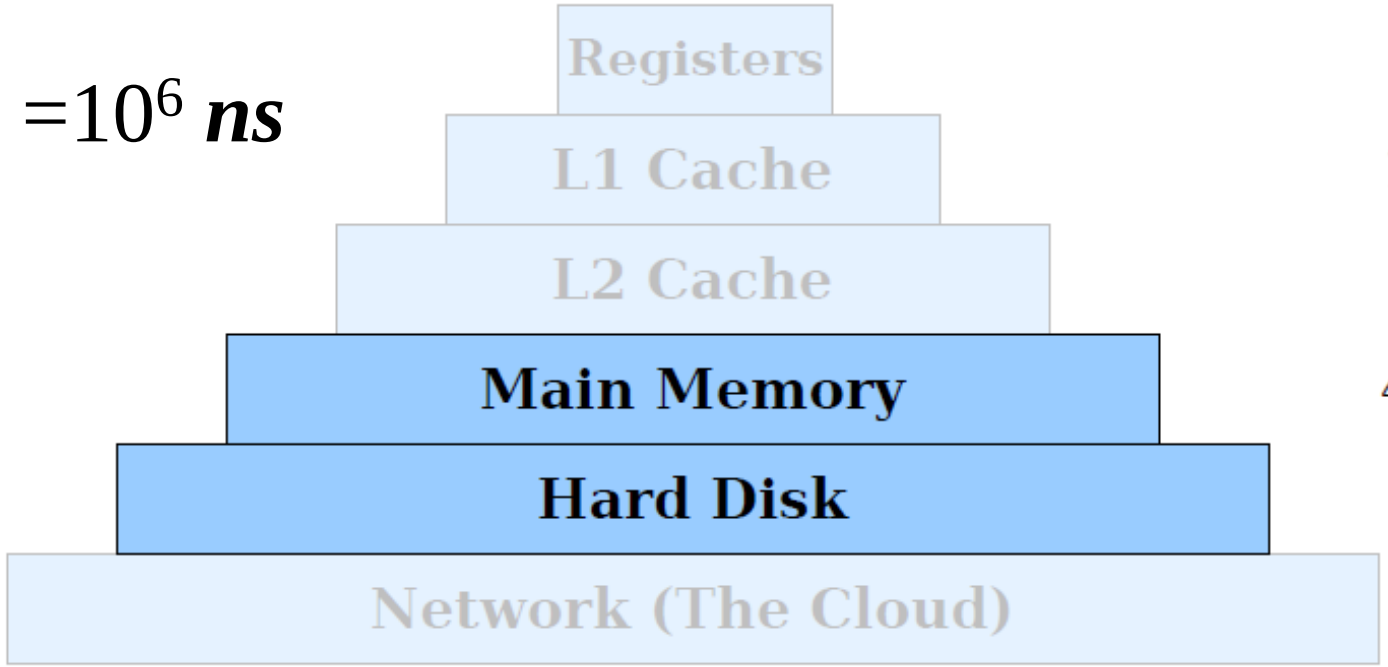


	存储容量	访问速度
Registers	256B - 8KB	0.25 - 1ns
L1 Cache	16KB - 64KB	1ns - 5ns
L2 Cache	1MB - 4MB	5ns - 25ns
Main Memory	4GB - 256GB	25ns - 100ns
Hard Disk	1TB+	3 - 10ms
Network (The Cloud)	*Lots*	10 - 2000ms

计算机存储体系

C

$1ms = 10^6\ ns$



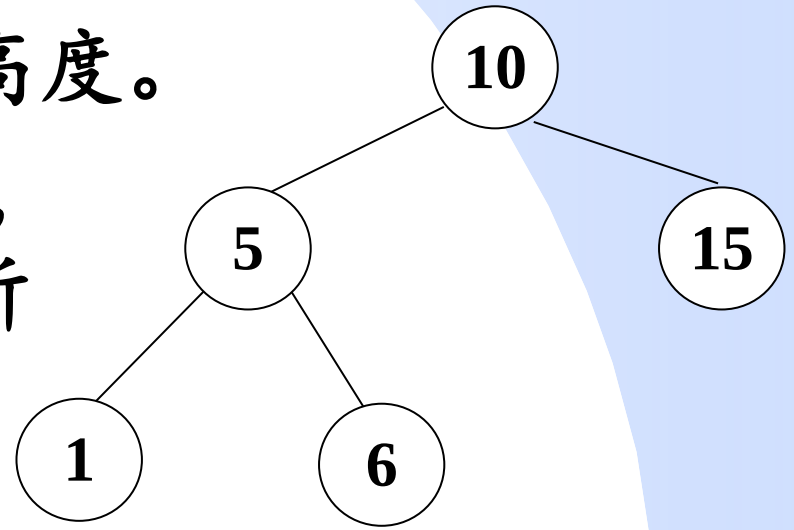
	存储容量	访问延迟
Registers	256B - 8KB	0.25 - 1ns
L1 Cache	16KB - 64KB	1ns - 5ns
L2 Cache	1MB - 4MB	5ns - 25ns
Main Memory	4GB - 256GB	25ns - 100ns
Hard Disk	1TB+	3 - 10ms
Network (The Cloud)	*Lots*	10 - 2000ms

- 外存与内存的访问速度：相差10万倍
- 若一次内存访问需要1秒，则一次外存访问就相当于1天
- 为避免1次外存访问，我们宁愿做10次、100次、甚至更多次内存访问
- 当从一个存放在外存上的文件中查找信息时，希望尽可能减少访问外存的次数。

动机

A

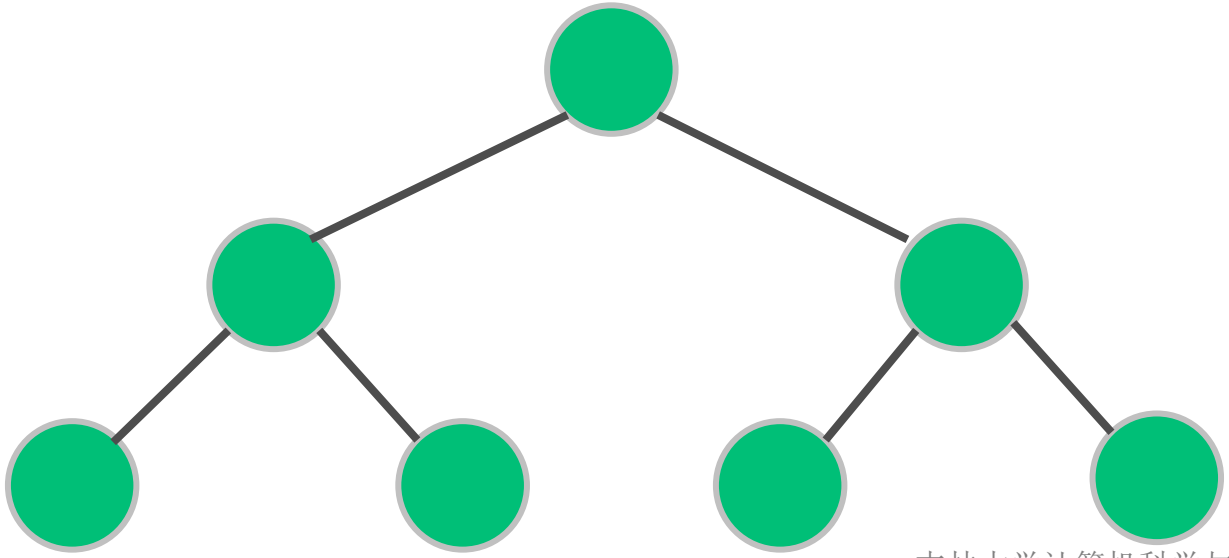
- 前面介绍的树形查找方法，主要属于内查找方法，适用于被检索文件能完整地被放入计算机内存中的情况。
- 如果文件很大，以至于计算机内存容纳不下时，则必须放在硬盘等外存储器上，即查找树的结点存储在外存。
- 采用树形表示存于外存上的大文件，此时指针域已不是内存地址，而是磁盘存储器的地址。
- 时间复杂度 ↔ 外存访问次数 ↔ 查找树高度。
- 如果一个文件包含n个记录，若$n=2\times10^{10}$，且该文件组织成一棵二叉查找树。查找所需平均外存访问次数约为$\log_2 n \approx 35$ 次。

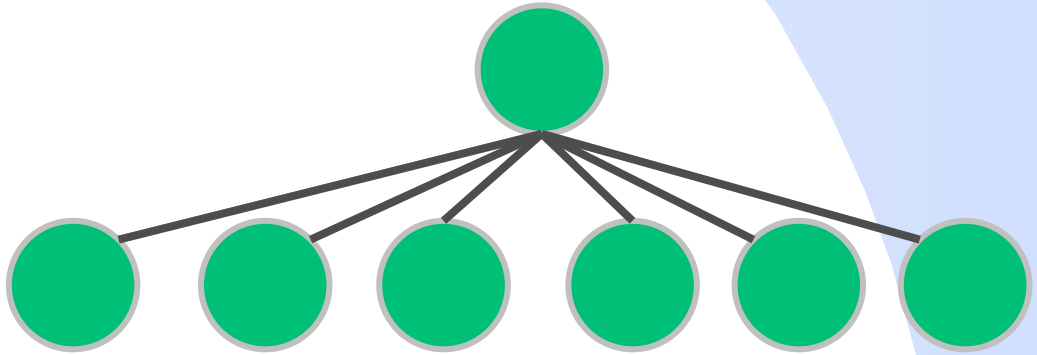


动机

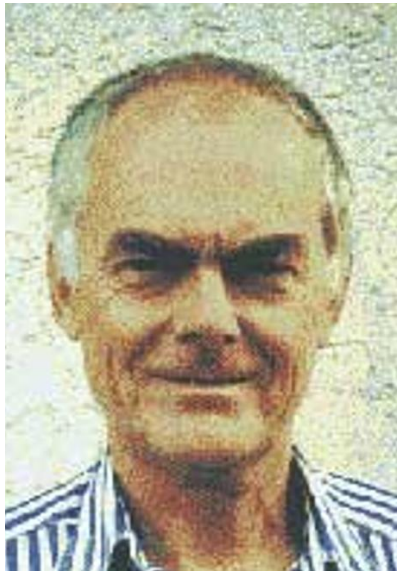
A

- 外存访问次数取决于查找树高度。
- 希望：查找树的高度尽可能矮，且一次访问外存时多读一些数据。
- 解决方案：一个结点存多个关键词，形成多叉查找树来代替二叉查找树，降低查找树高度。
- B树：平衡*m*叉查找树。





B树（B-Tree）



Rudolf Bayer
波音公司高级研究员
慕尼黑工业大学教授

Edward McCreight
波音公司研究员

I am occasionally asked what the **B** in B-Tree means. We wanted the name to be short, quick to type, easy to remember. It honored our employer, **B**oeing Airplane Company. It suggested **B**alance. Rudolf **B**ayer was the senior researcher of the two of us.

We had been admiring the elegant natural balance of AVL Trees, but for reasons clear to American English speakers, the name BM Tree was a non-starter.

——Edward McCreight

The more you think about what the **B** could mean, the more you learn about B-Trees, and that is good.

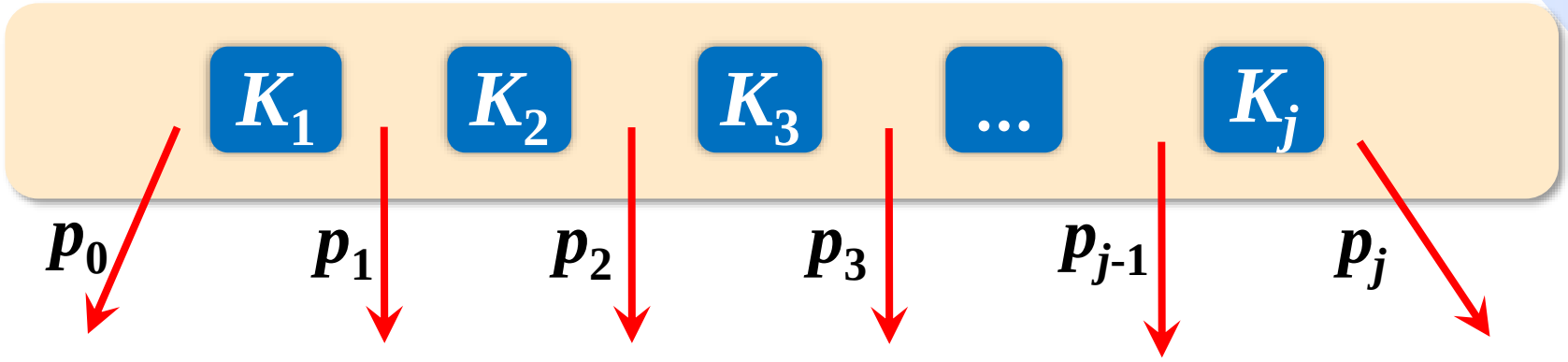
——Rudolf Bayer

B树结点结构

A

- 包含j个关键词：满足$K_1 < K_2 < \ldots < K_j$。
- 包含j+1个指针：第i个指针p_i（$0 \le i \le j$）指向的子树所包含关键词都在K_i和K_{i+1}之间。

B树的结点



m阶B树的定义

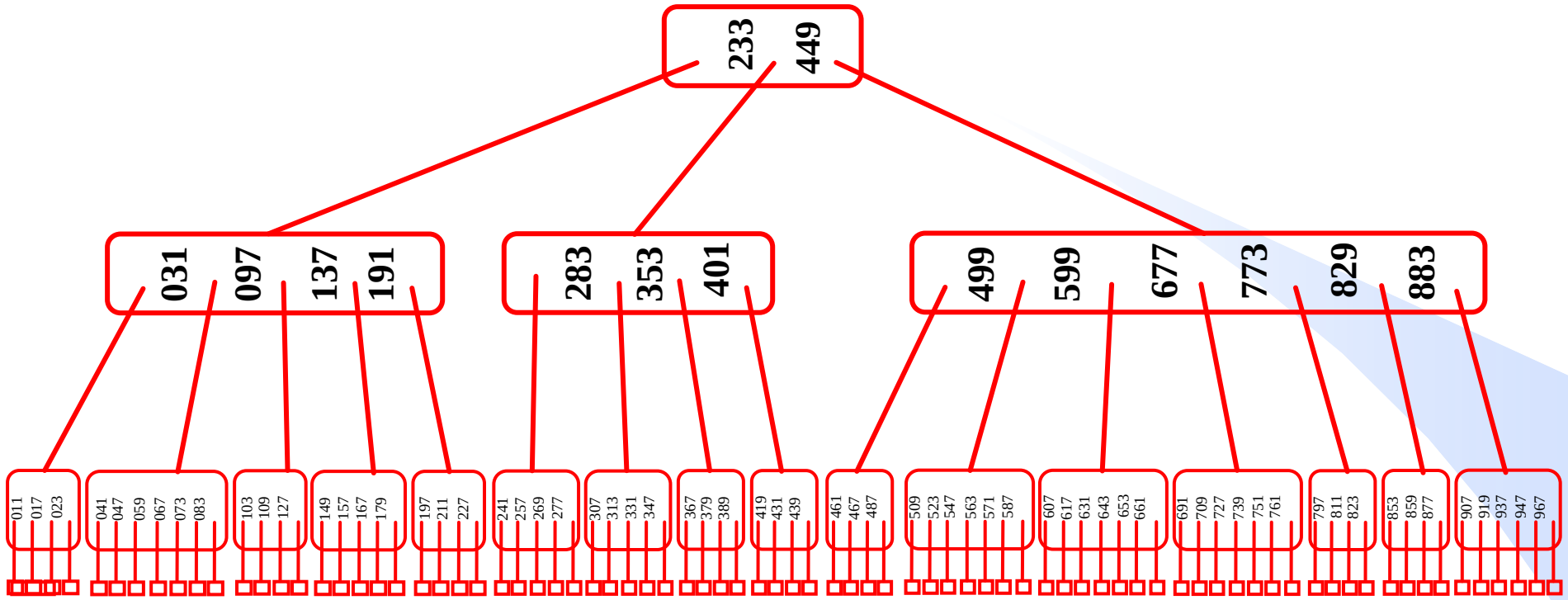
A

① 每个结点至多有m个孩子；
② 除根和叶结点外，每个结点至少有$\lceil m/2 \rceil$个孩子；
③ 若根结点不是叶结点，则至少有2个孩子；
④ 有k个孩子的结点恰好包含$k-1$个递增有序的关键词；
⑤ 所有的叶结点在同一层，不包含任何信息。

根和叶以外的结点有$\lceil m/2 \rceil \sim m$个孩子

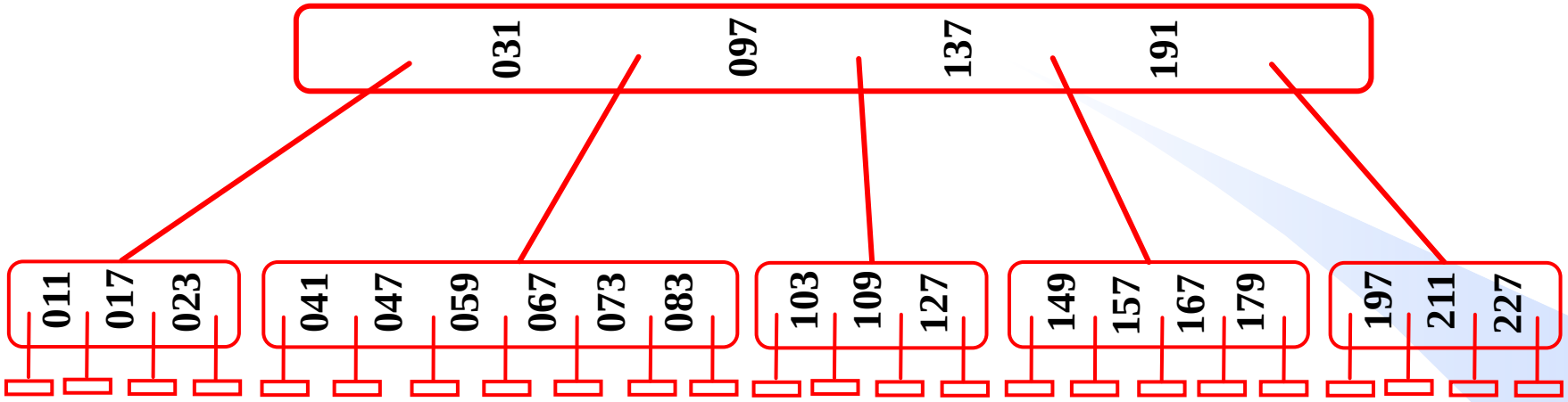
根结点有$2 \sim m$个孩子

一棵 7 阶B树示例：m=7



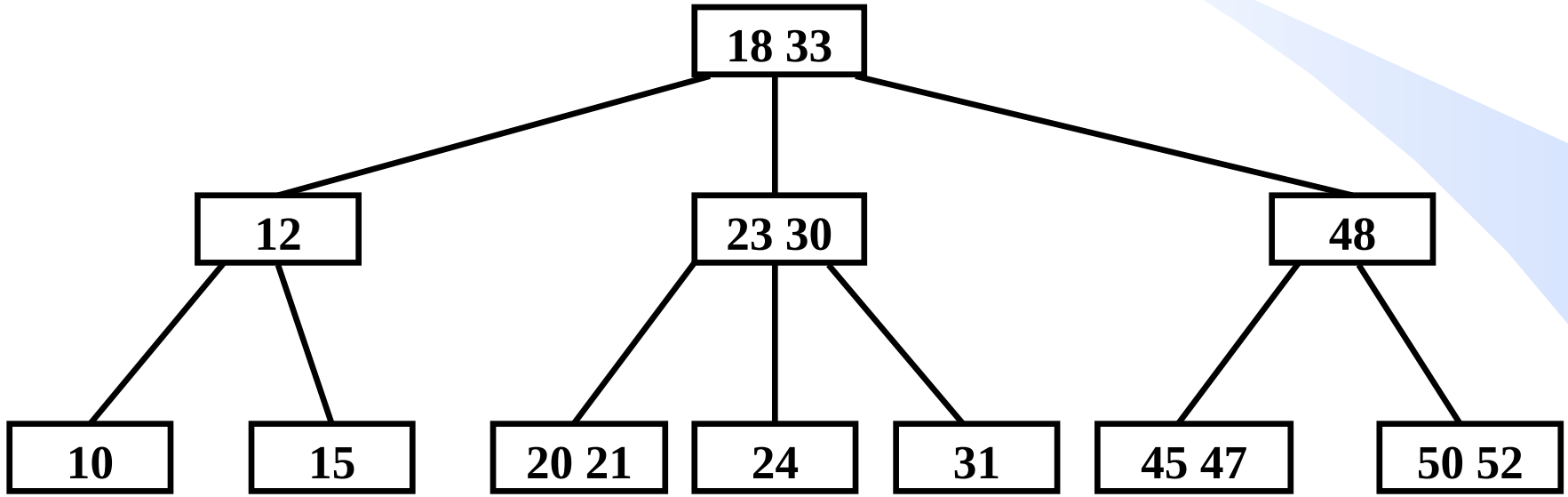
- 根和叶以外的结点：有$[\lceil m/2\rceil, m]$个孩子，即4～7个孩子；
- 根和叶以外的结点：有$[\lceil m/2\rceil-1, m-1]$个关键词，即3～6个关键词；
- 根结点有$[2, m]$个孩子，即2～7个孩子、1～6个关键词；
- 每个结点中的关键词从左到右递增排列。

关于叶结点



- 叶结点是虚拟的结点，相当于外结点，不包含数据。
- 指向叶结点的指针是空指针。
- 多数情况下叶结点可以不画，将最下层非空结点看做叶结点。

一棵 3 阶B树示例：m=3

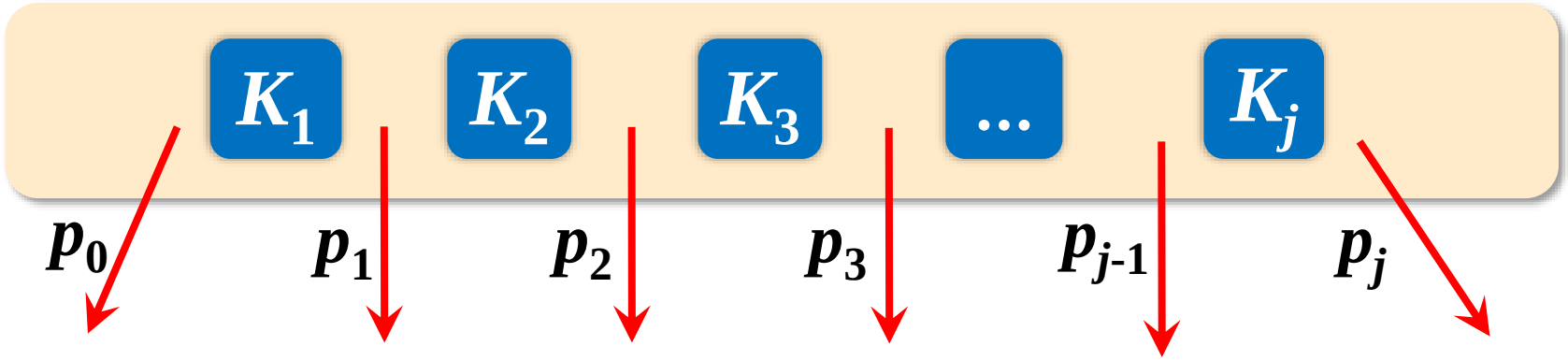


B树的查找

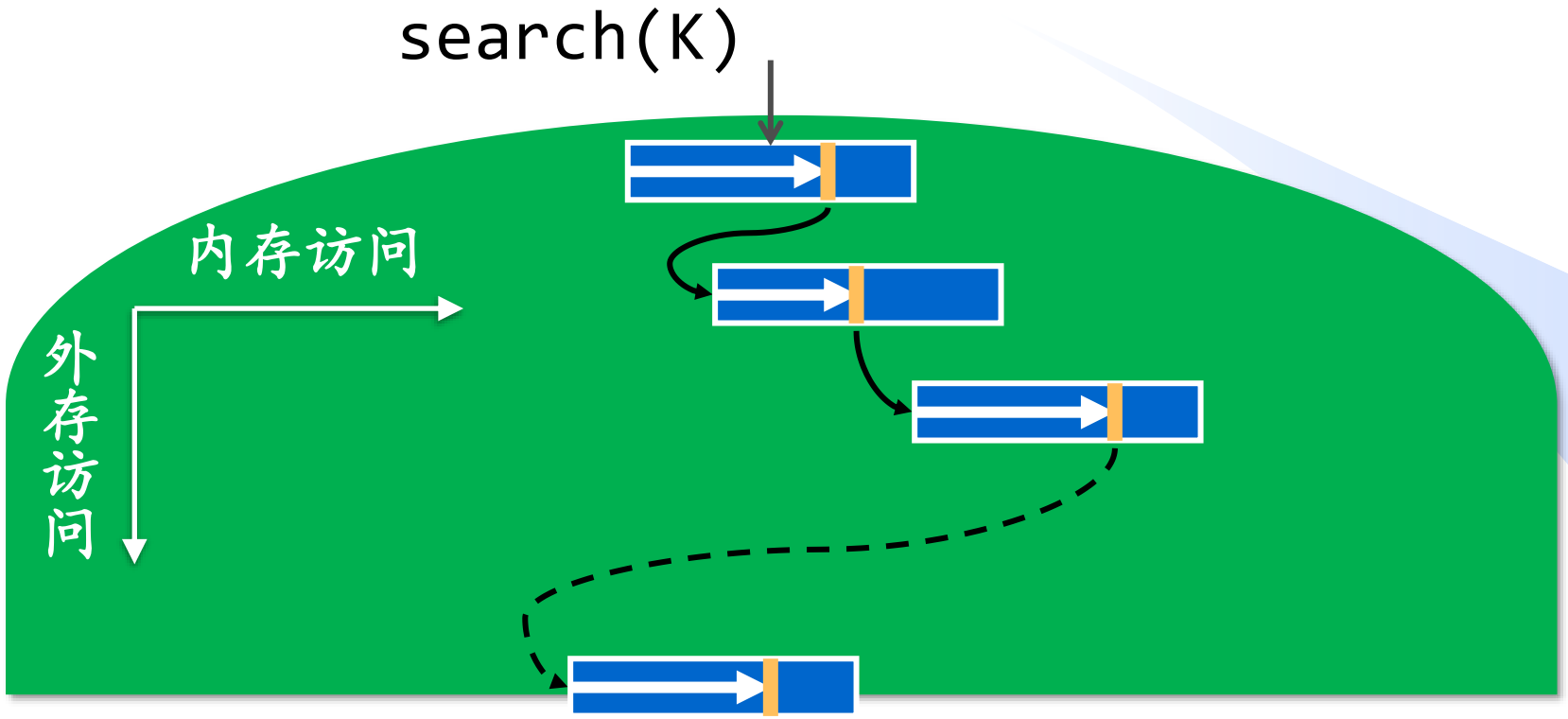
查找给定关键词K

① 在根结点内查找K，即在其所包含的关键词$K_1,\ldots,K_j$中查找K（可采用顺序查找或对半查找），找到则查找成功；

② 否则，确定K在某个K_i和K_{i+1}之间，于是在指针p_i所指向的子树里继续查找K，即将p_i所指向的结点读入内存，继续查找；如果p_i为空，则查找失败。



B树的查找



外存访问次数取决于树的高度

B树的插入

A

- 先查找，在查找失败的位置插入。
- 若在结点中插入关键词后，结点包含的关键词小于等于*m*-1个，则直接插入。如在如下7阶B树中插入关键词337。

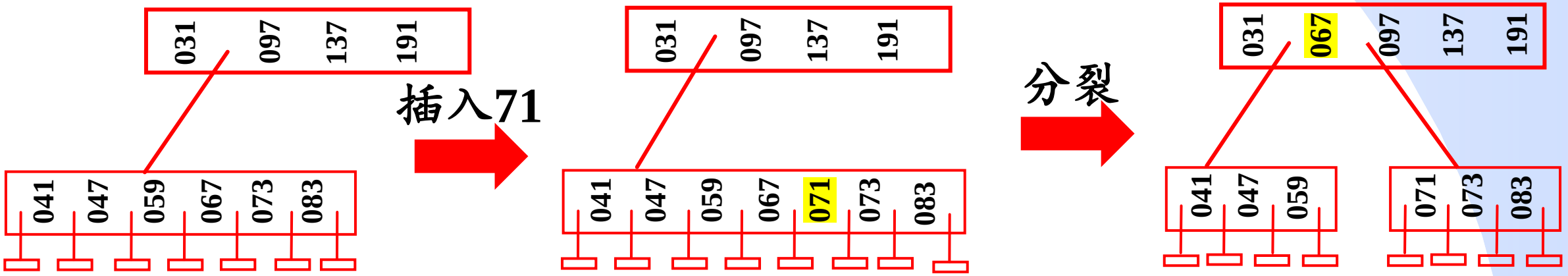
每个结点包含最多*m*-1个关键词

7阶B树

B树的插入：上溢→分裂

A

- 若在结点中插入关键词后，结点包含的关键词超过$m-1$个，则该结点关键词上溢，需进行分裂操作。
- 结点内关键词$K_{\lceil m/2 \rceil}$提升到上一层结点中，$K_{\lceil m/2 \rceil}$左侧的关键词分裂成一个结点，$K_{\lceil m/2 \rceil}$右侧的关键词分裂成另一个结点。
- $K_{\lceil m/2 \rceil}$提升到上一层结点，若导致上一层结点上溢，则须进一步分裂，即分裂操作可能会向上传播，直至根结点。



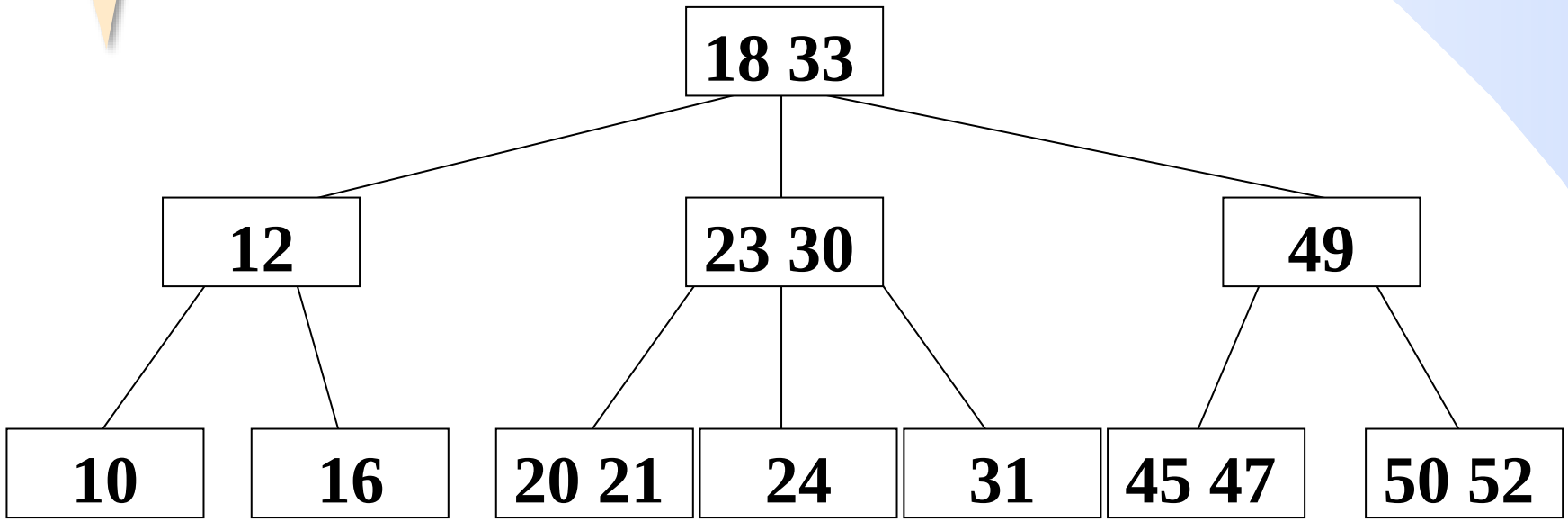
7阶B树每个结点最多包含6个关键词

例1：3阶B树插入15

A

插入15

3阶B树每个结点最多包含2个关键词



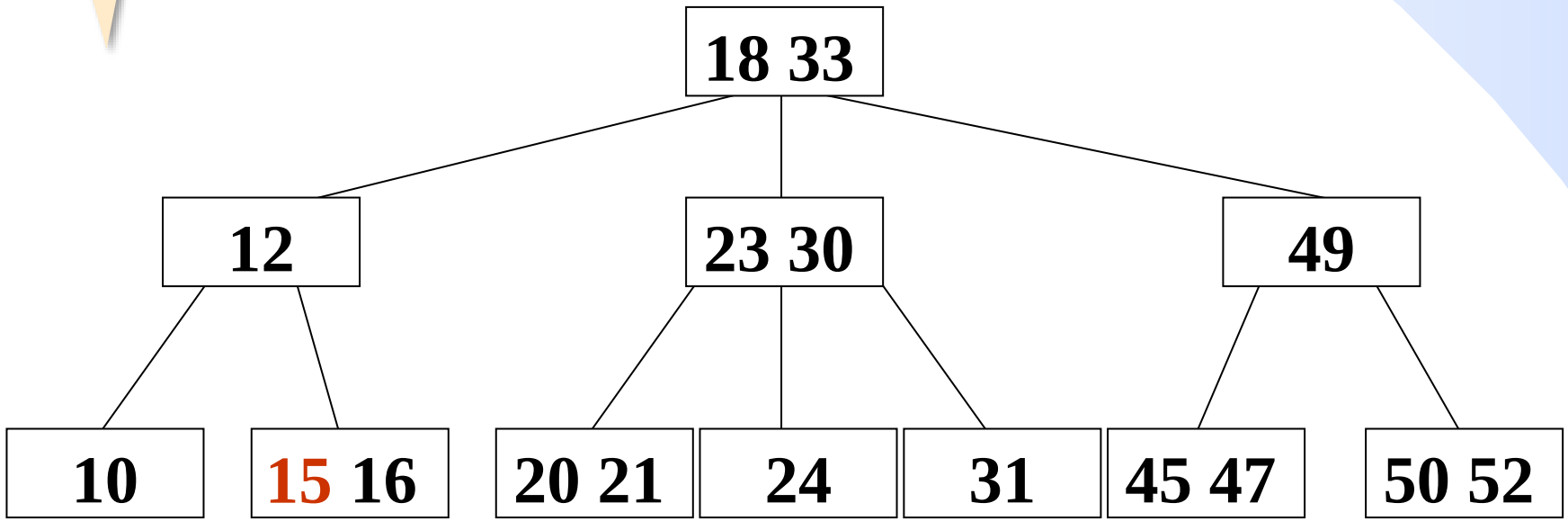
15

例1：3阶B树插入15

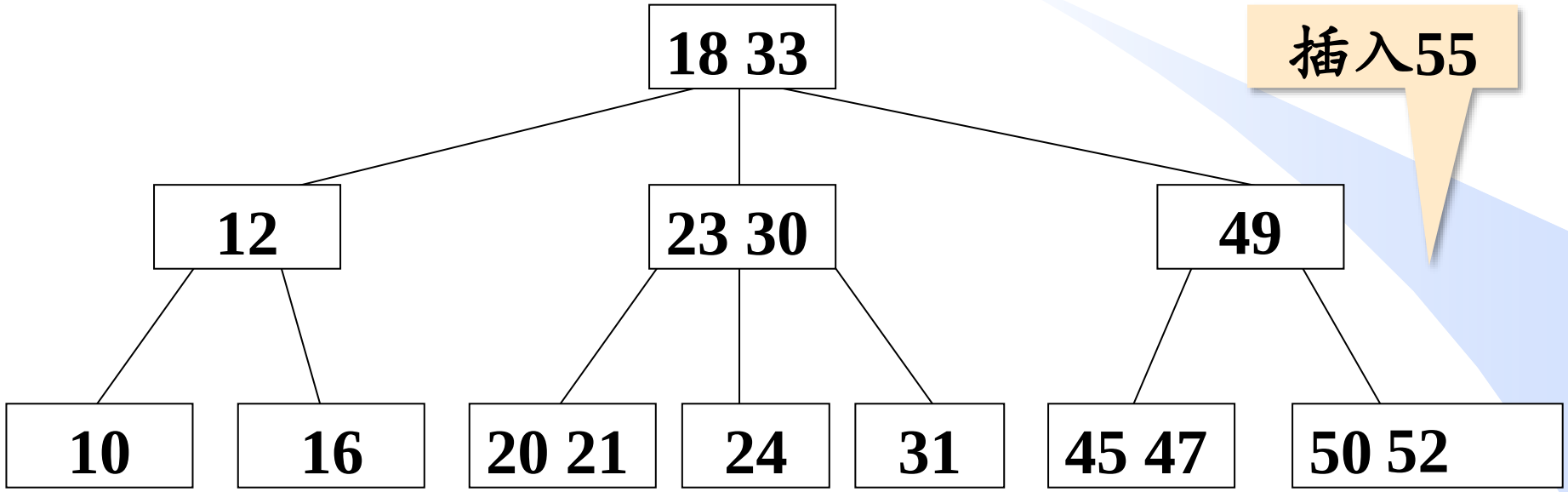
A

插入15

3阶B树每个结点最多包含2个关键词

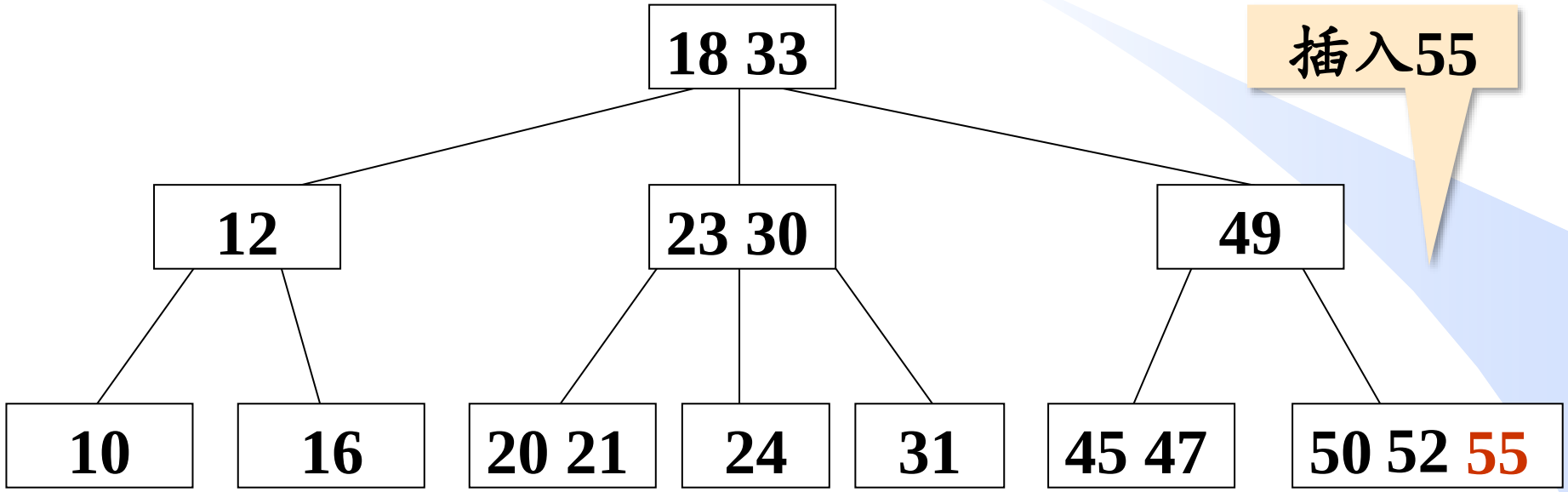


例2：3阶B树插入55



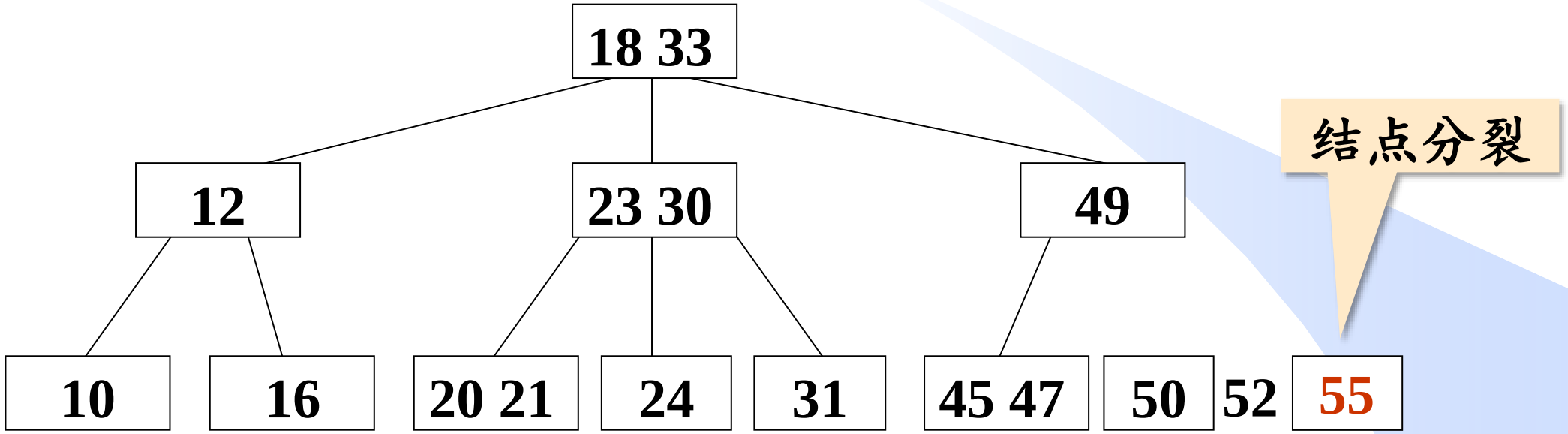
3阶B树每个结点最多包含2个关键词

例2：3阶B树插入55



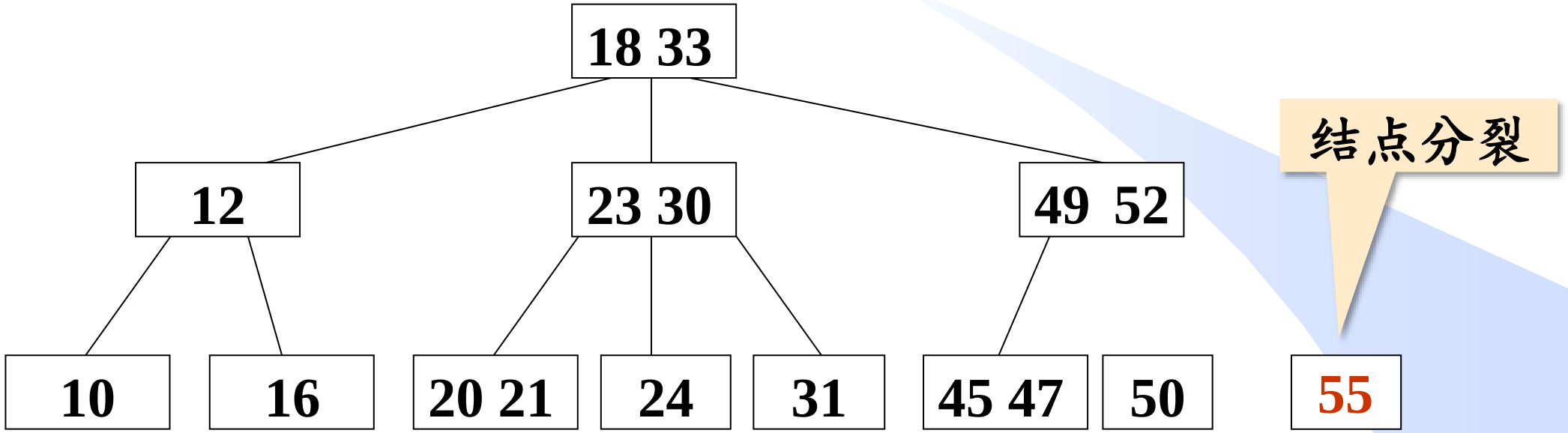
3阶B树每个结点最多包含2个关键词

叶结点分裂，把52提升到父结点



3阶B树每个结点最多包含2个关键词

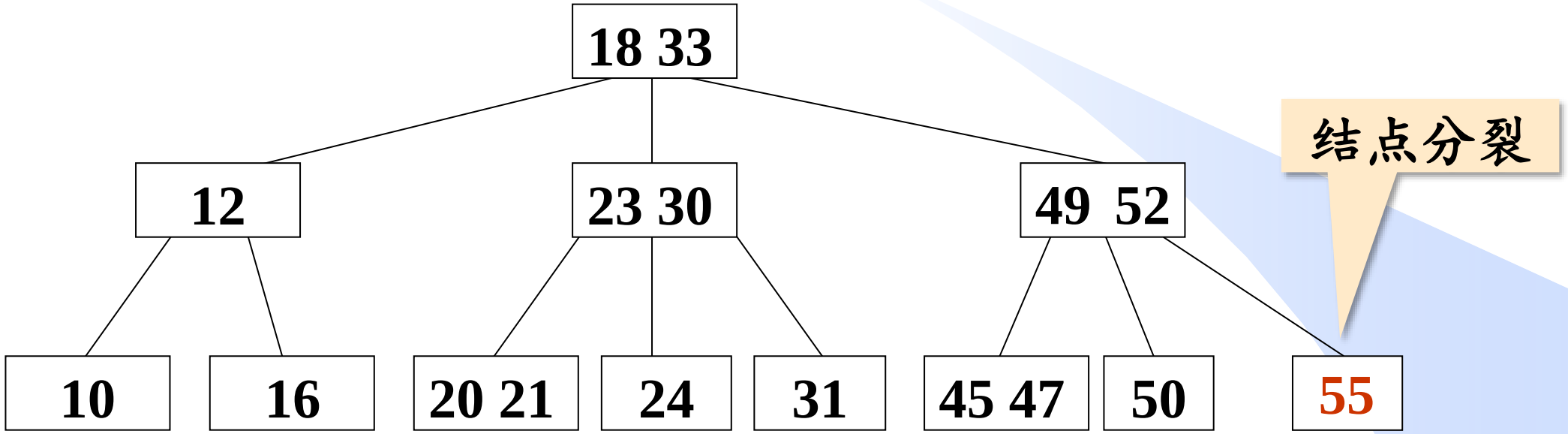
叶结点分裂，把52提升到父结点



3阶B树每个结点最多包含2个关键词

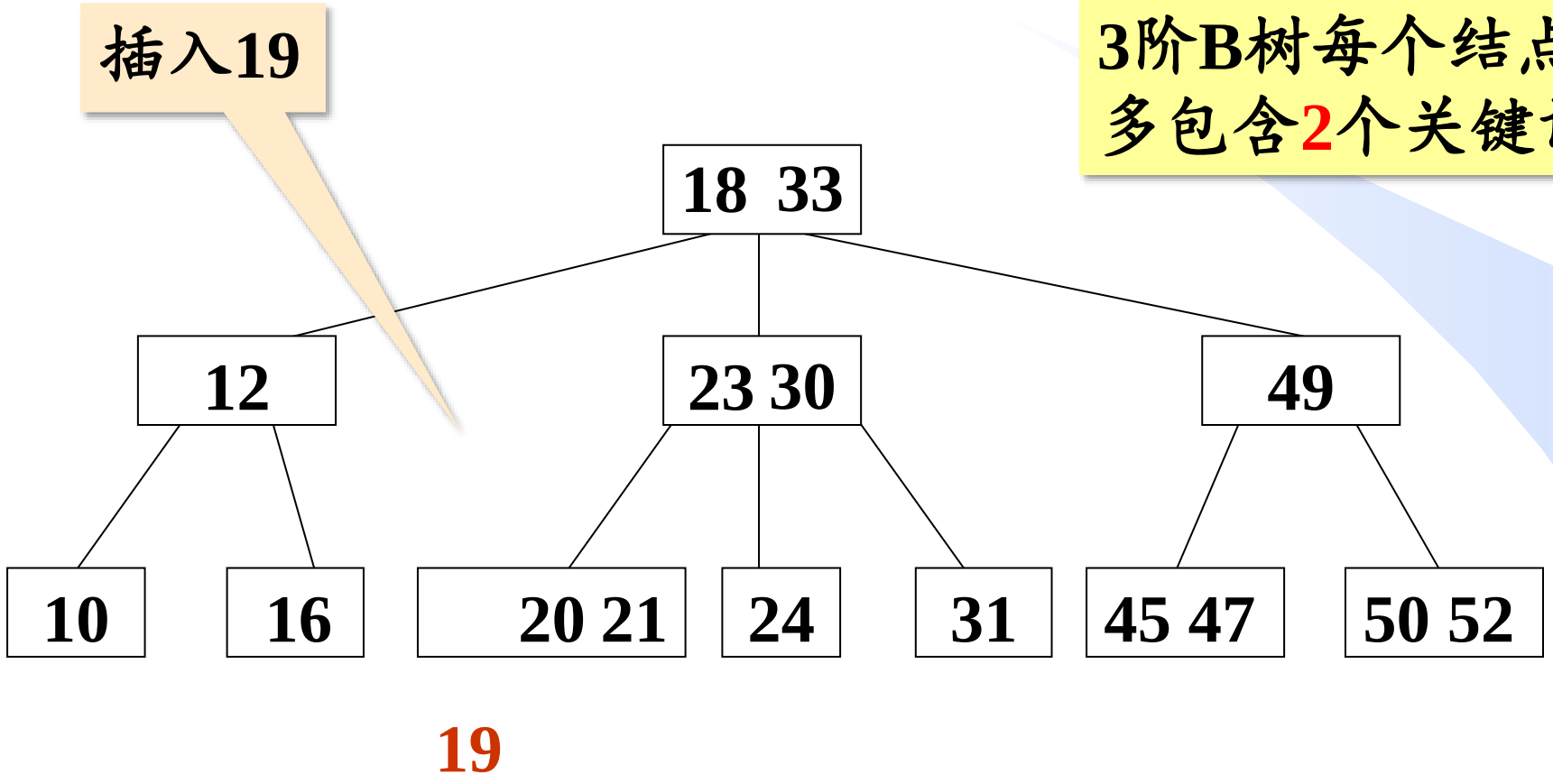
叶结点分裂，把52提升到父结点

A



3阶B树每个结点最多包含2个关键词

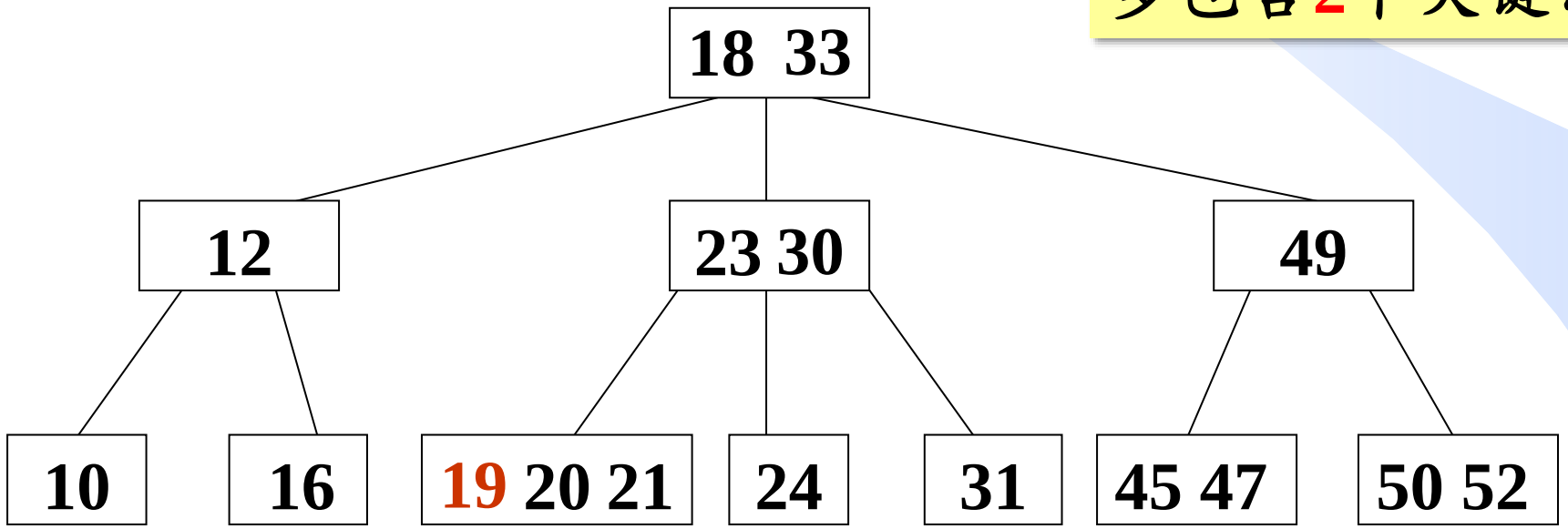
例3：3阶B树插入19


插入19
3阶B树每个结点最多包含2个关键词
18 33
12
23 30
49
10
16
20 21
24
31
45 47
50 52
19

例3：3阶B树插入19

A

3阶B树每个结点最多包含2个关键词

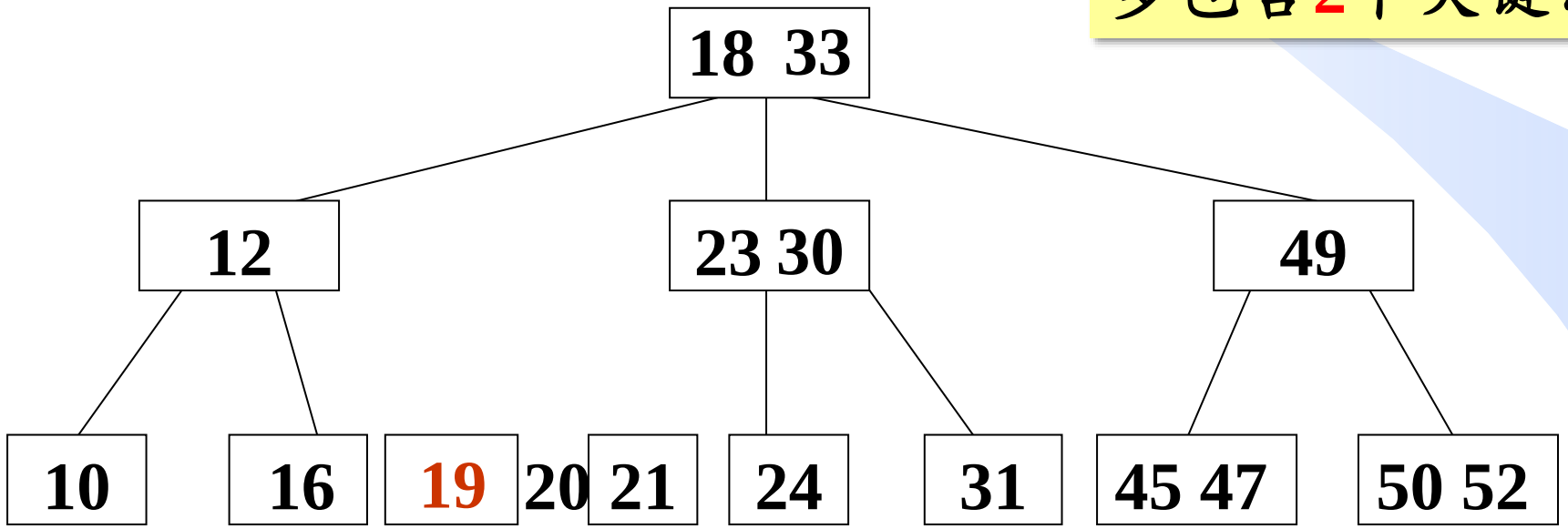


叶结点分裂

例3：3阶B树插入19

A

3阶B树每个结点最多包含2个关键词

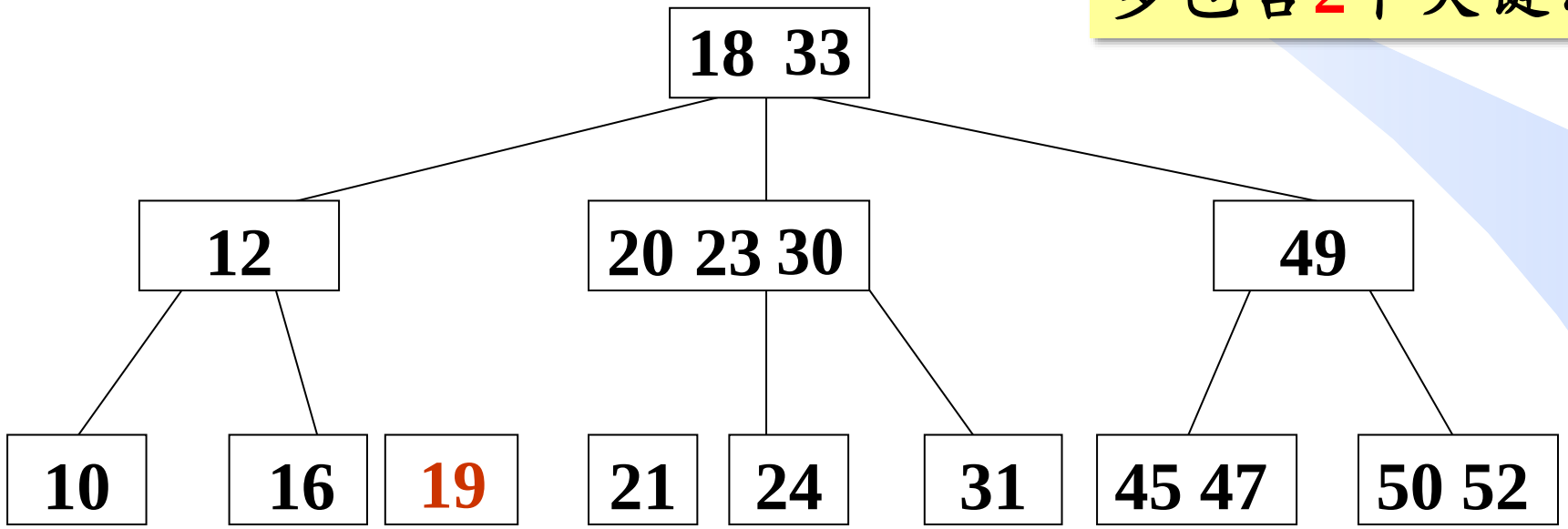


叶结点分裂

例3：3阶B树插入19

A

3阶B树每个结点最多包含2个关键词



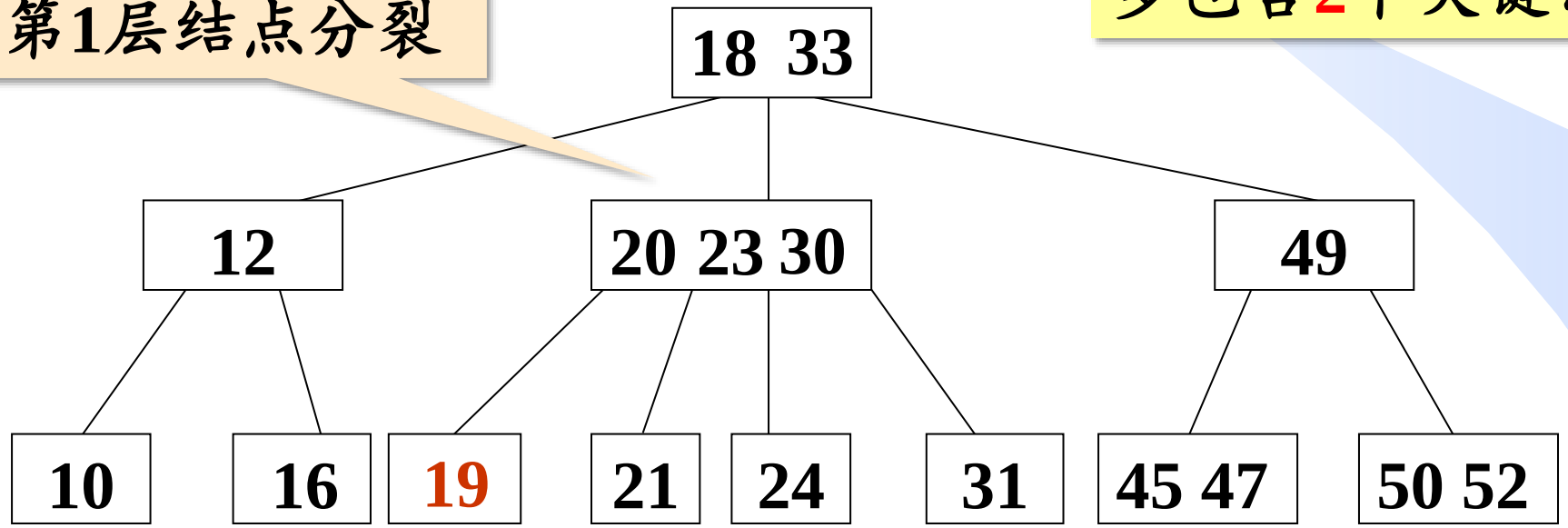
叶结点分裂

例3：3阶B树插入19

A

3阶B树每个结点最多包含2个关键词

第1层结点分裂

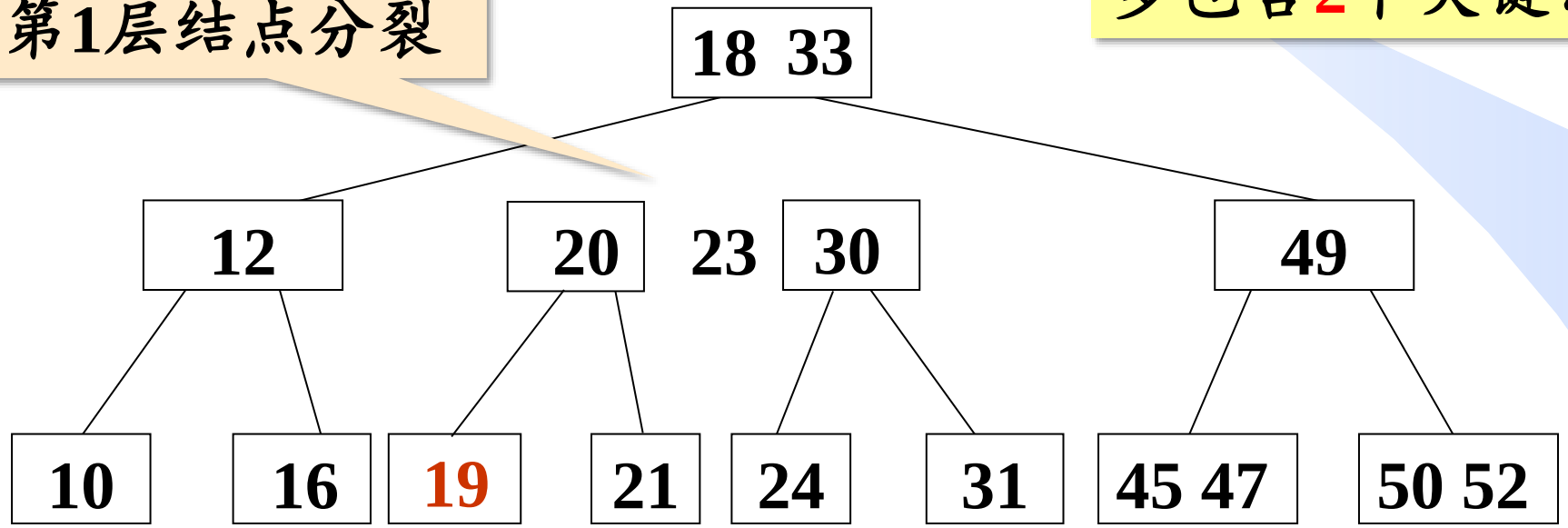


例3：3阶B树插入19

A

3阶B树每个结点最多包含2个关键词

第1层结点分裂

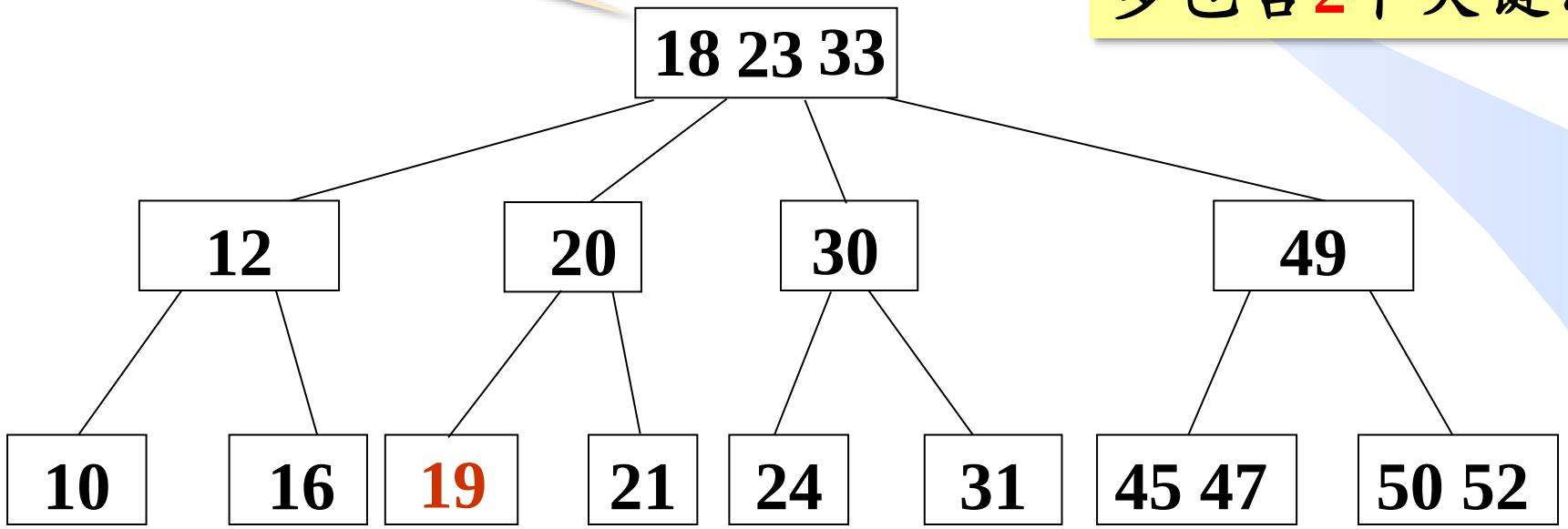


例3：3阶B树插入19

A

根结点分裂

3阶B树每个结点最多包含2个关键词

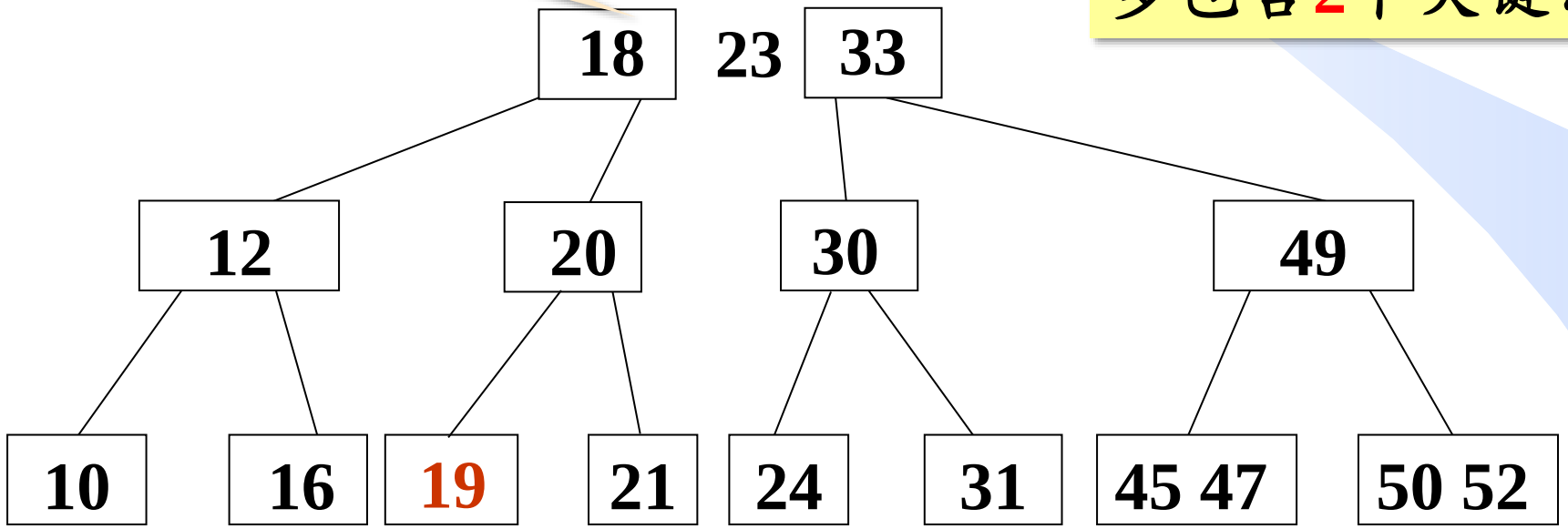


例3：3阶B树插入19

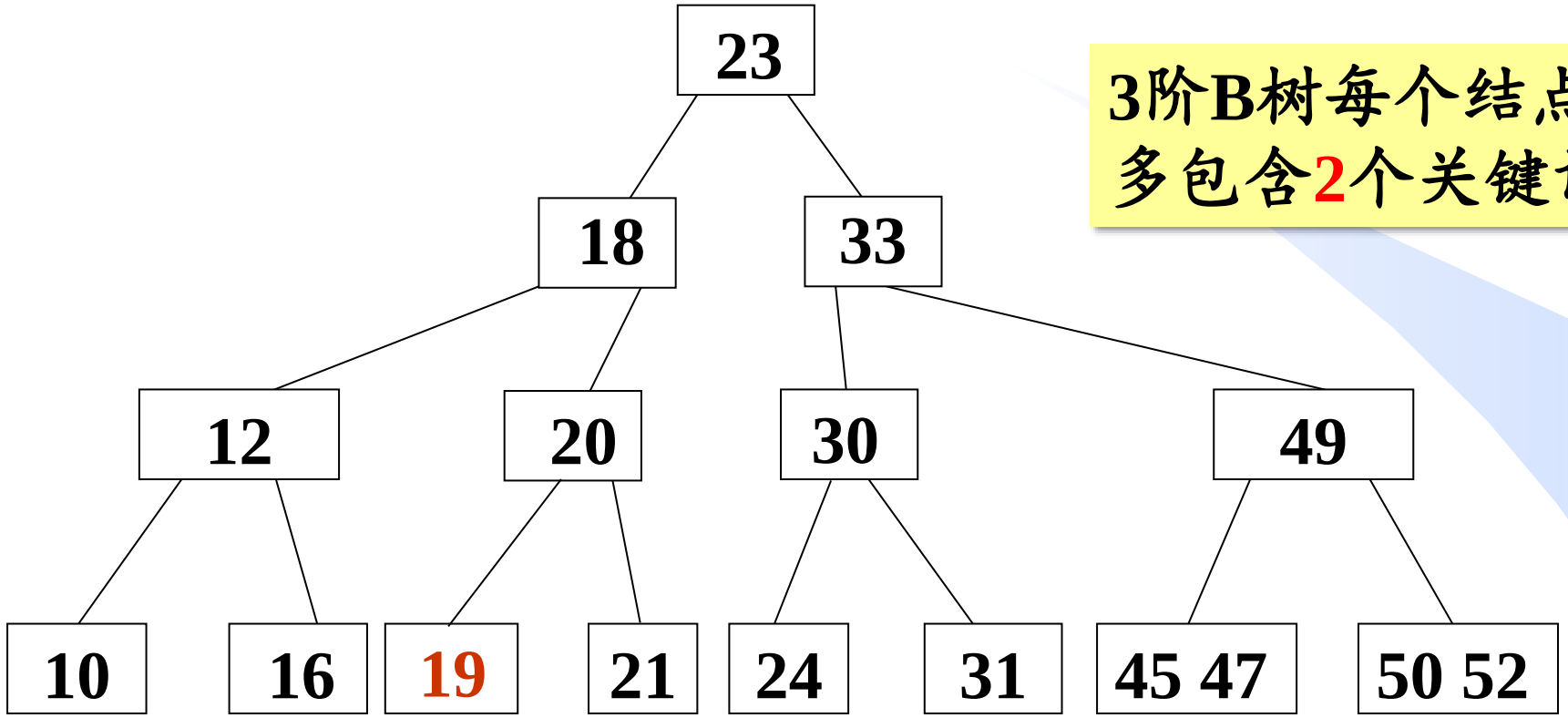
A

根结点分裂

3阶B树每个结点最多包含2个关键词



例3：3阶B树插入19



3阶B树每个结点最多包含2个关键词

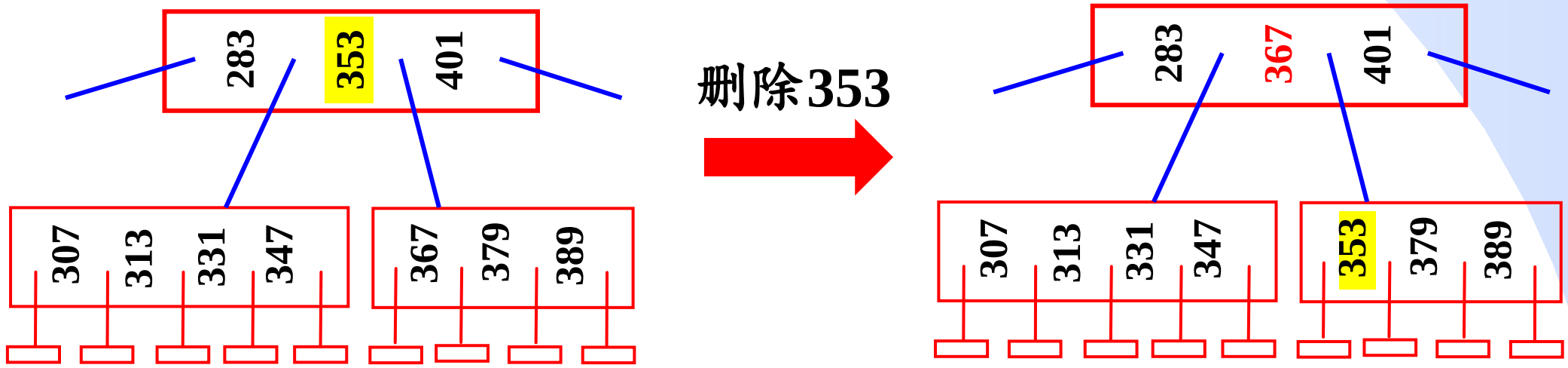
B树的删除

A

- 查找要删除的关键词K的位置。
- 换：若K不在最底层，将K与其中跟后继（“右子树”最小关键词）交换，然后再删K，即真正的删除只发生在最底层。

如下图删除关键词 353 的情形。

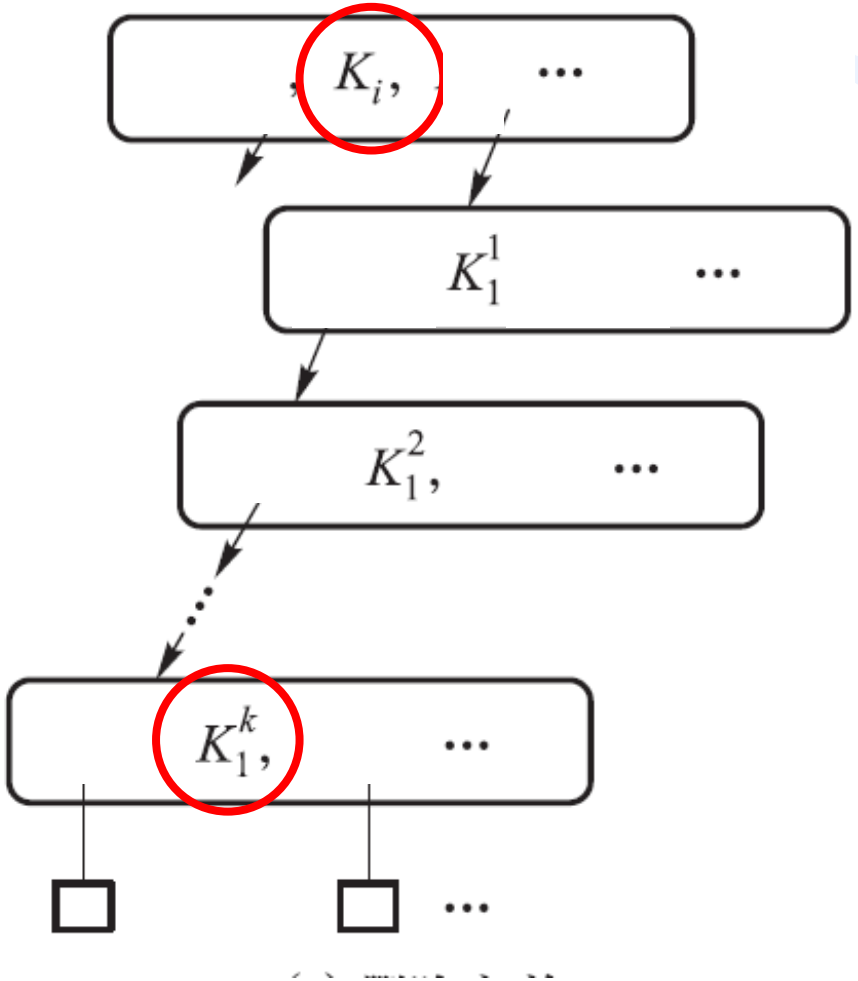
先换后删



B树的删除

A

将K与其“右子树”最底层最小关键词交换。



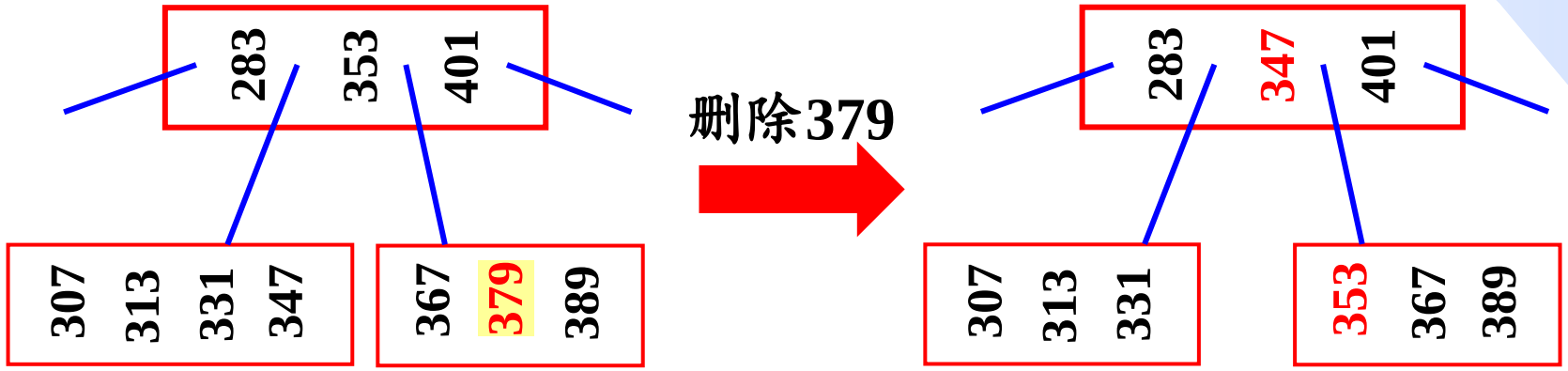
B树的删除：下溢→借位

A

- 借：当删除关键词后，若该结点目前包含的关键词个数小于$\lceil m/2 \rceil-1$称为下溢，则从左（右）兄弟结点中借最大（最小）关键词。
- 不是直接从兄弟结点借，而是通过父结点中转。
- 借的一般顺序：左顾右盼（优先从左兄弟借）。

下溢借位

如下图删除关键词 379 的情形。



7阶B树非根结点最少包含3个关键词

B树的删除

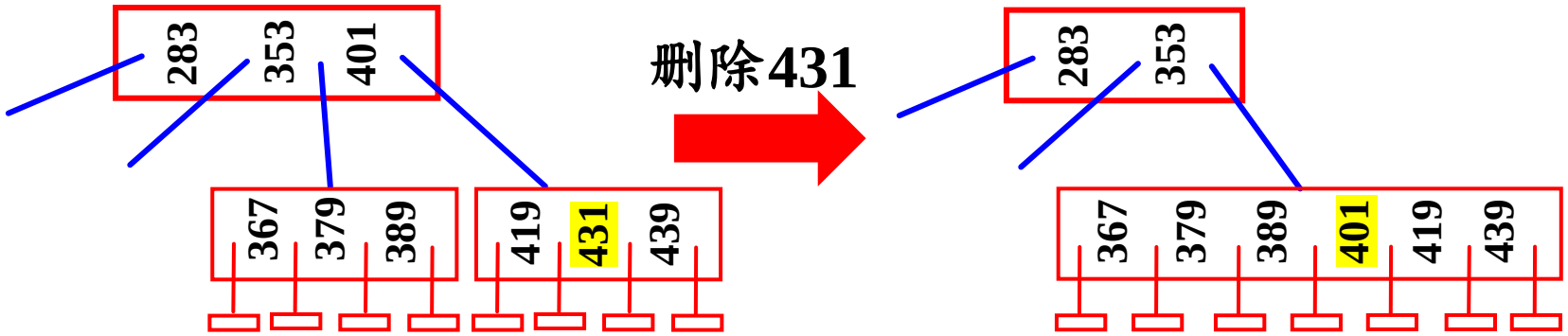
A

- 若借位不是发生在最底层：从左（右）兄弟结点中借最大（最小）关键词的同时，须连同左（右）兄弟结点最右（左）方的子树一起借。稍后通过示例说明。

B树的删除：下溢→不够借→合并

A

- 若兄弟结点不够借，即兄弟结点包含的关键词个数等于$\lceil m/2 \rceil - 1$，则执行合并操作：把两个兄弟结点的关键词、父结点中指向这两个结点的指针之间的关键词按递增顺序合并到一个新结点中。
- 合并的顺序：左顾右盼（优先与左兄弟合并）。
- 例如删去关键词431。



先换后删

下溢借位

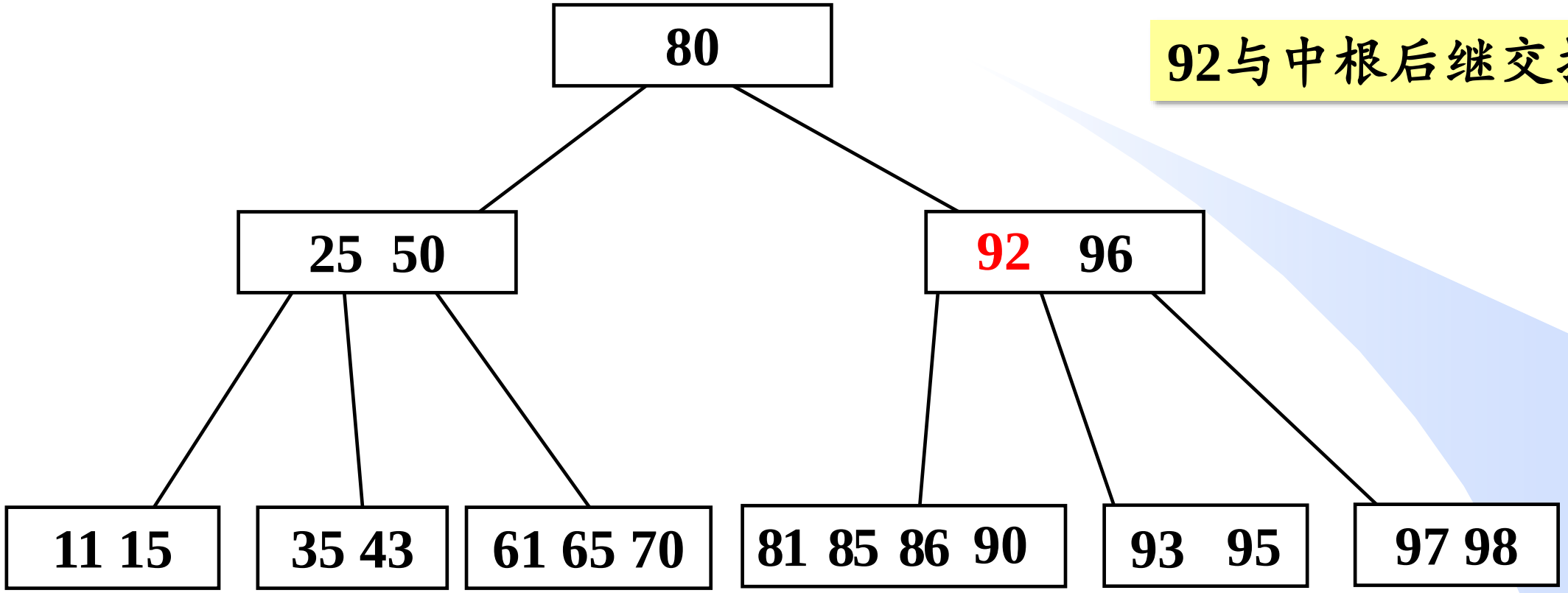
不够借则合并

- 若“合并”操作使上一层结点（父结点）所包含的关键词个数出现不够（下溢）的情况，则对上一层结点继续“借”或“合并”。
- “合并”可能会导致上一层发生“合并”，从而可能使“合并”不断向上传播，直至根结点，进而使整个B树减少一层。

7阶B树非根结点最少包含3个关键词

5阶B树删除92示例

A

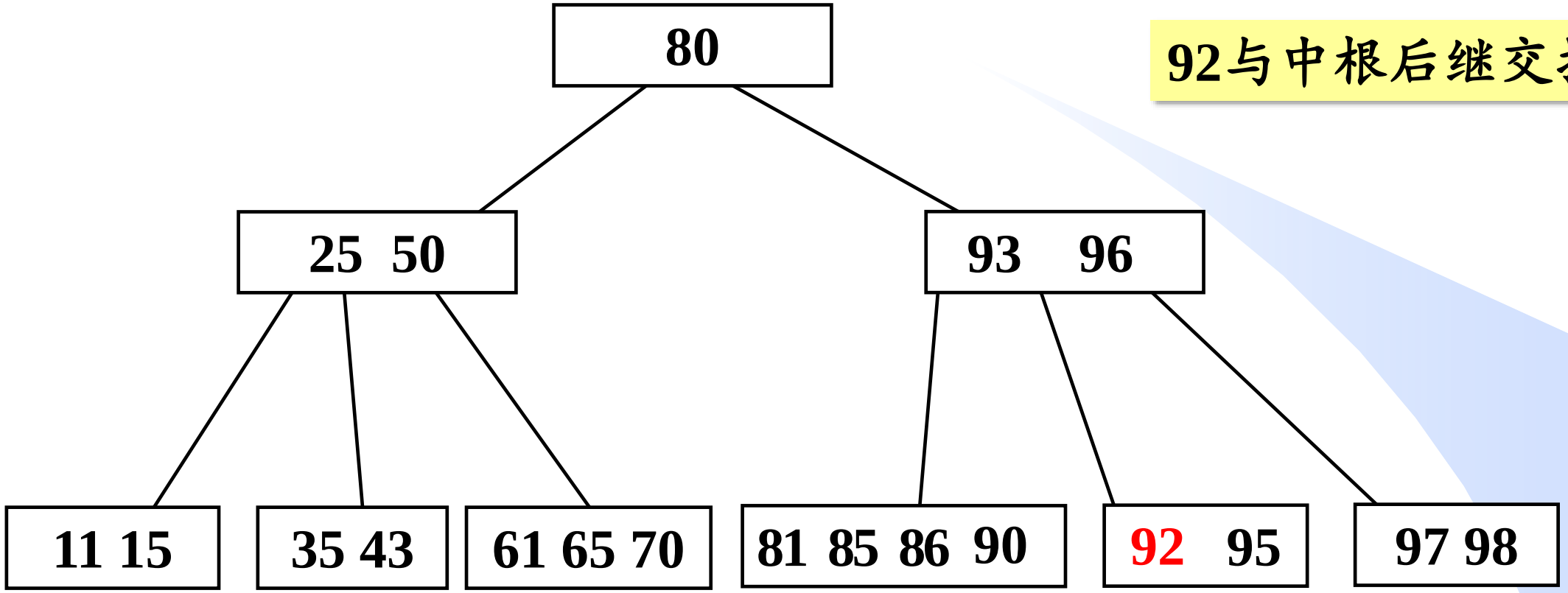


92与中根后继交换

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除92示例

A

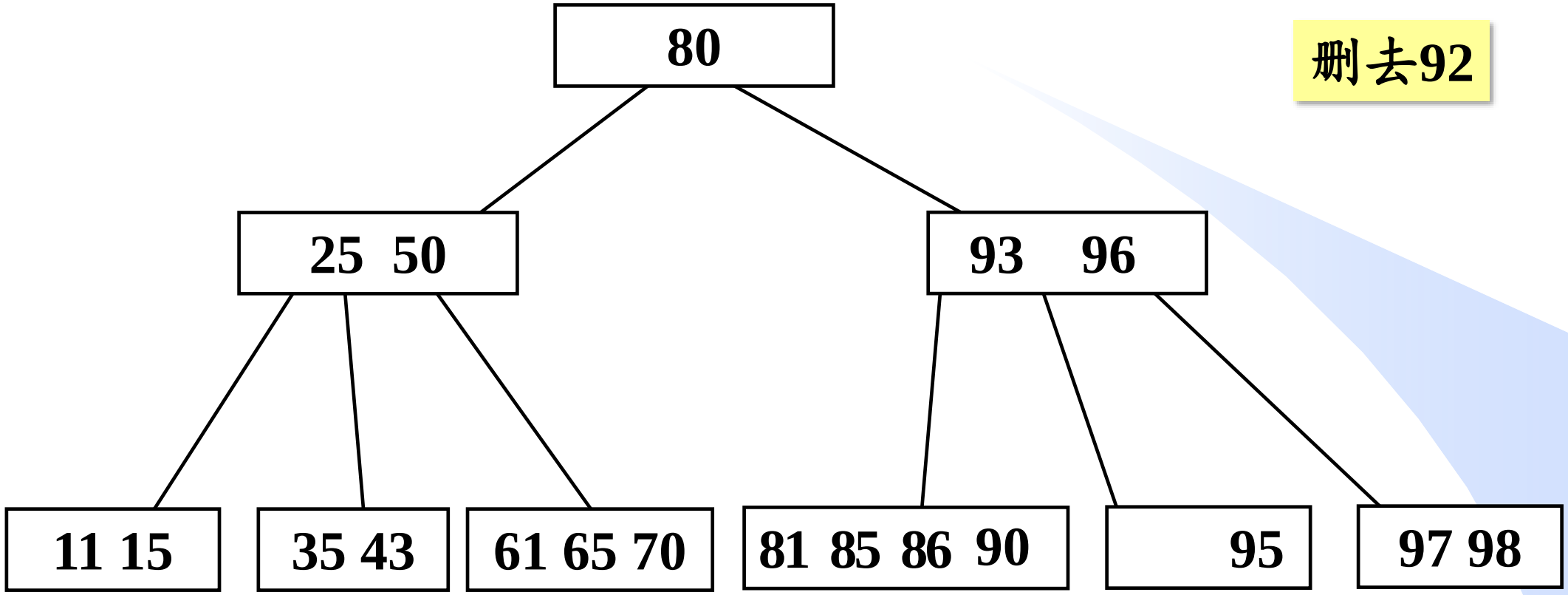


92与中根后继交换

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除92示例

A

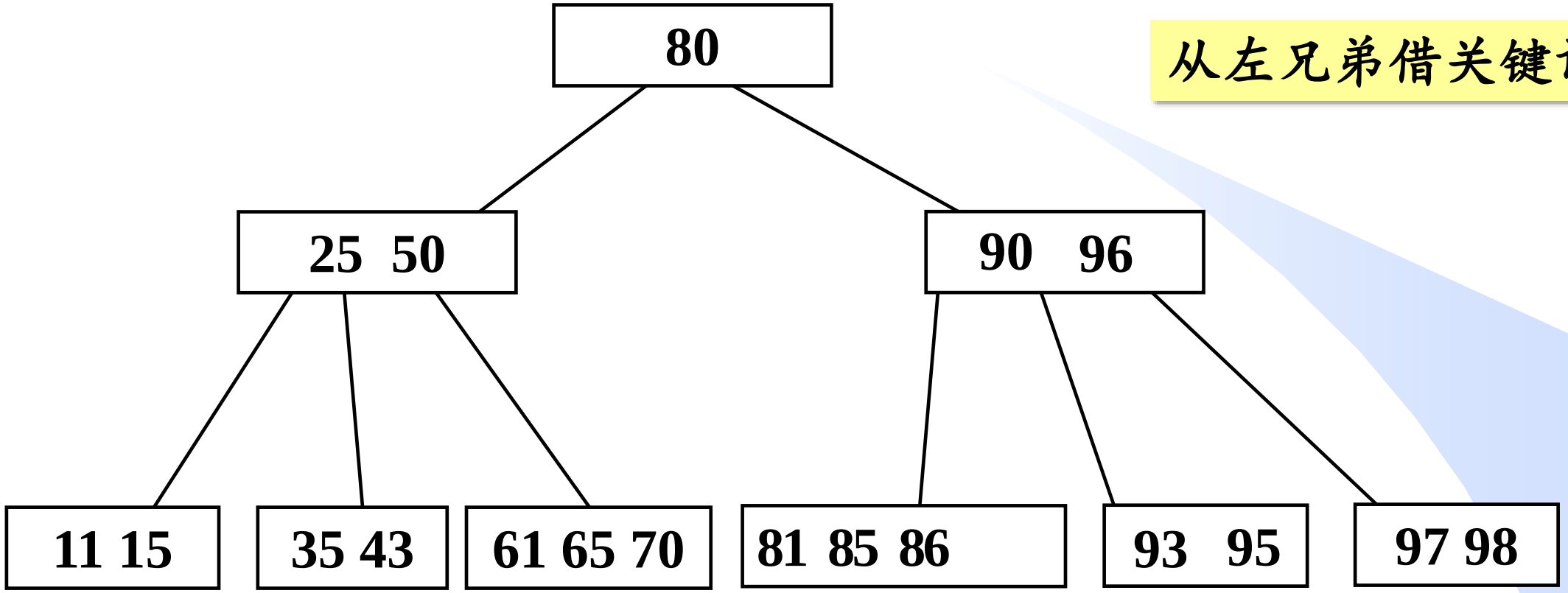


删去92

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除92示例

A

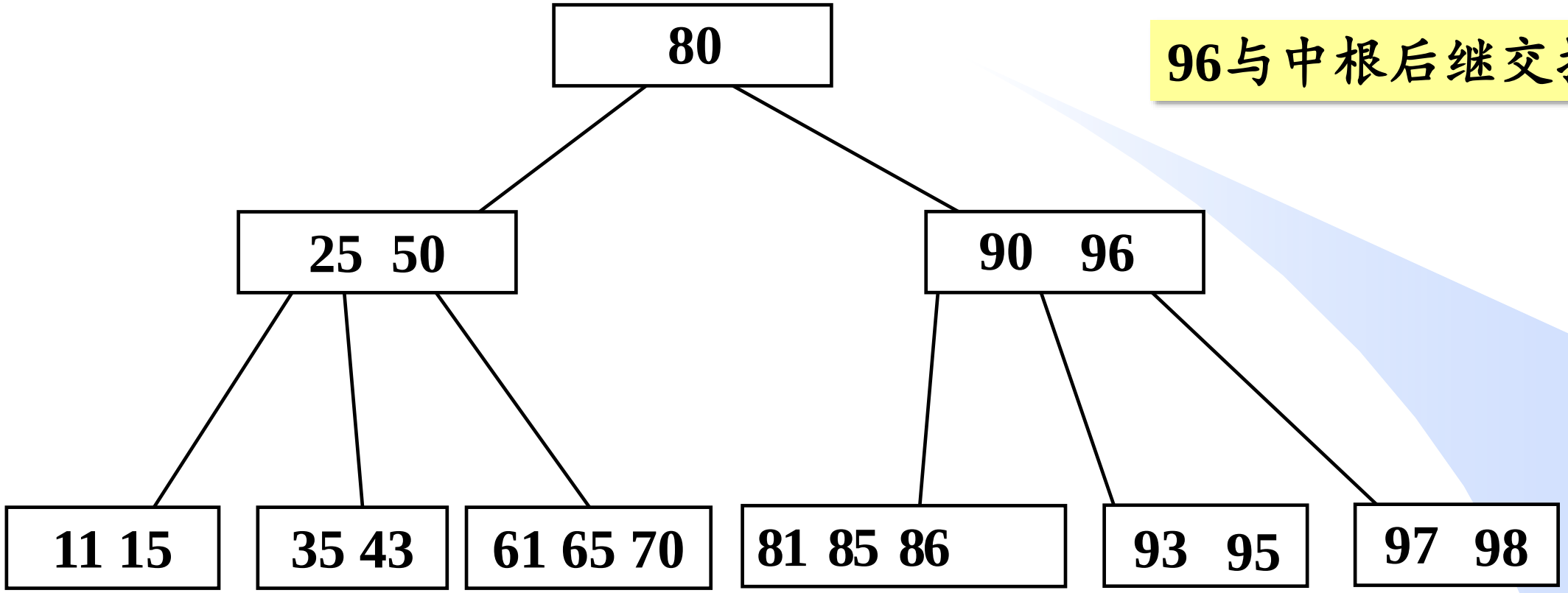


从左兄弟借关键词

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除96示例

A

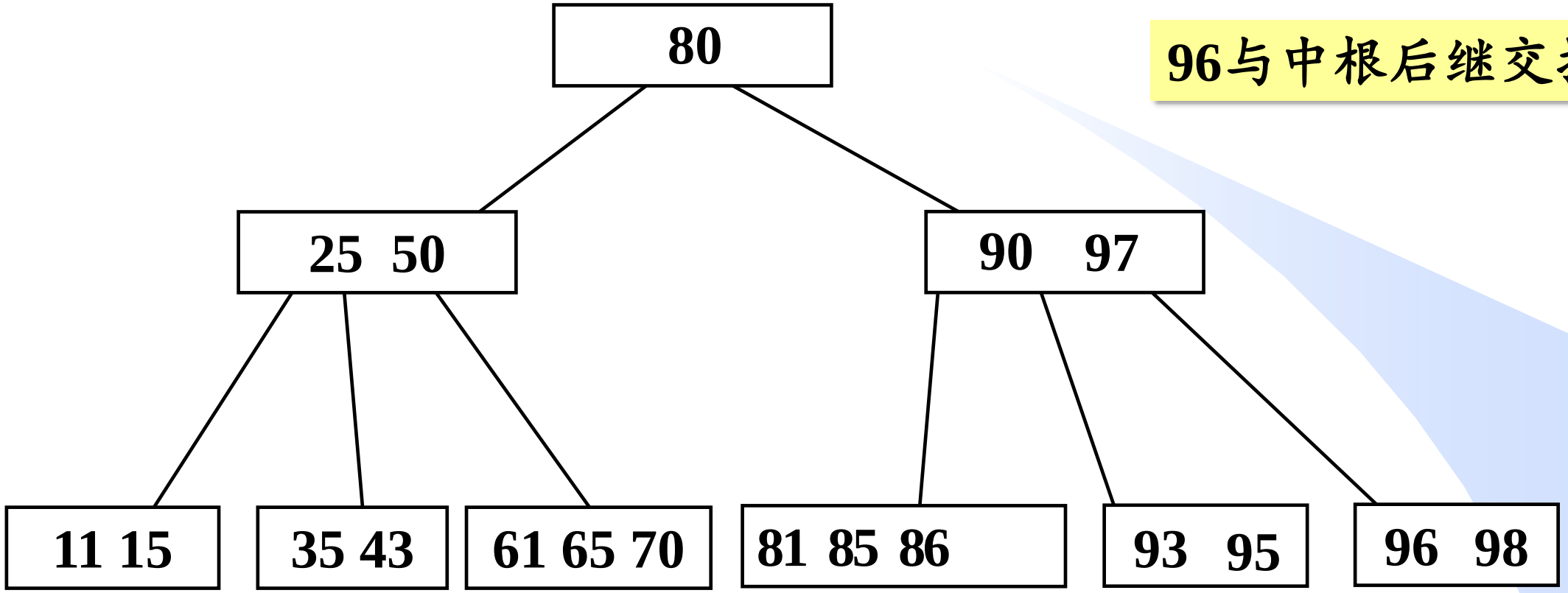


96与中根后继交换

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除96示例

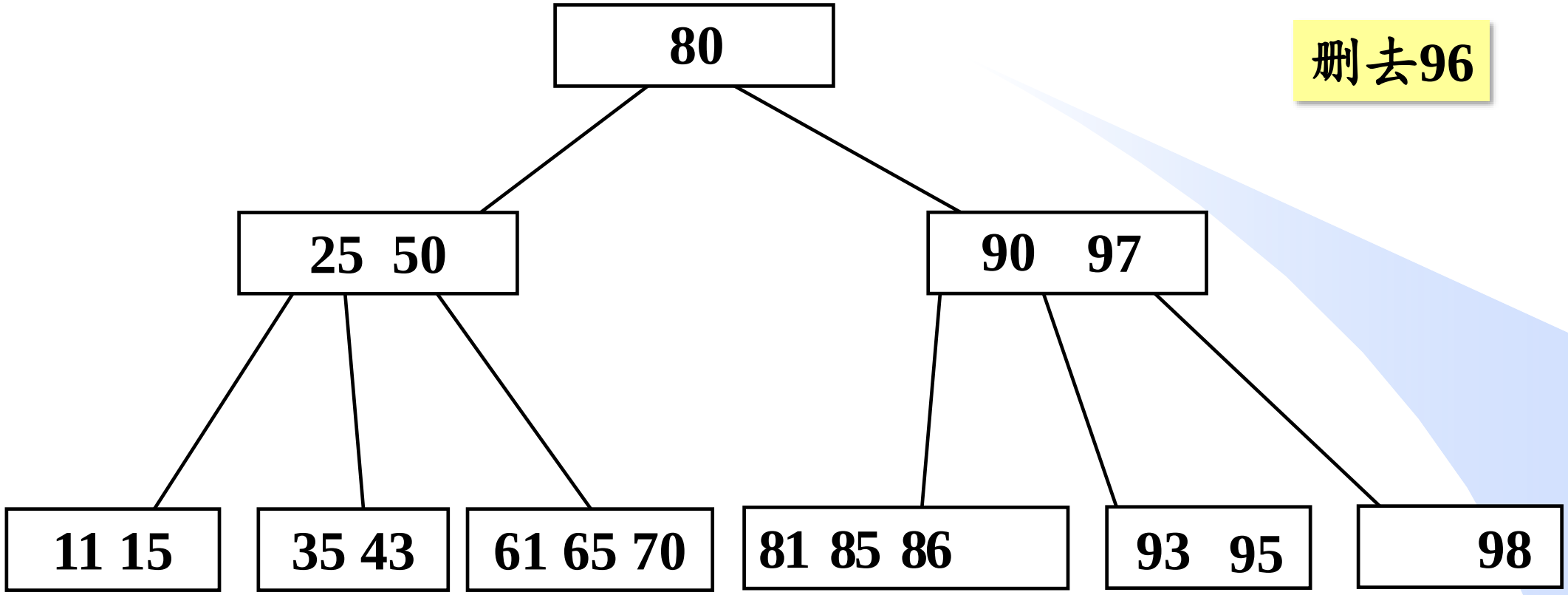
A



96与中根后继交换

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

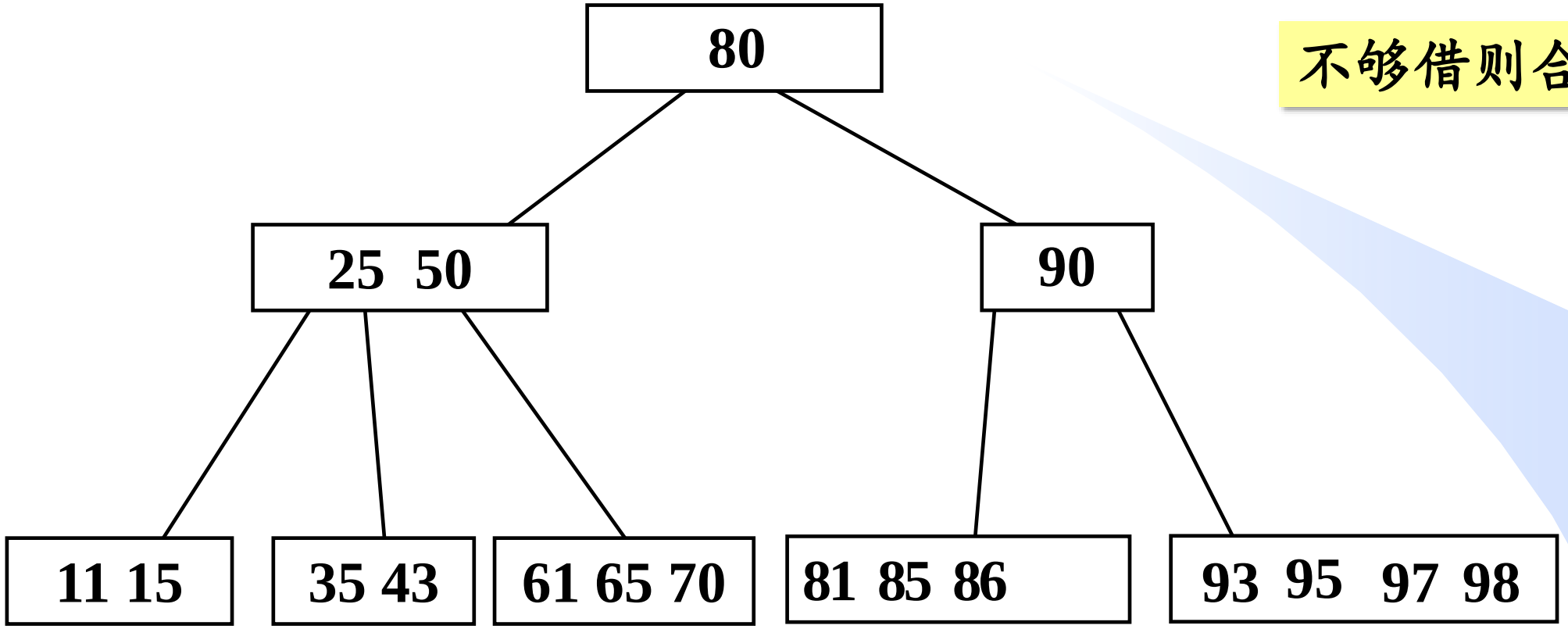
5阶B树删除96示例



删去96

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除96示例



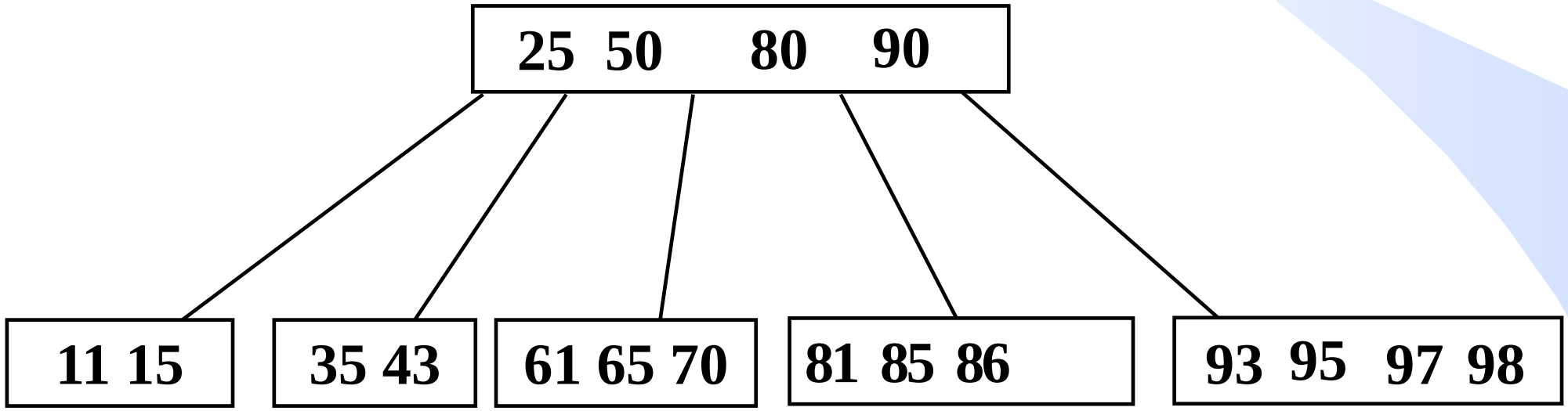
不够借则合并

5阶B树非根结点最少包含2个关键词

5阶B树删除96示例

A

不够借则合并

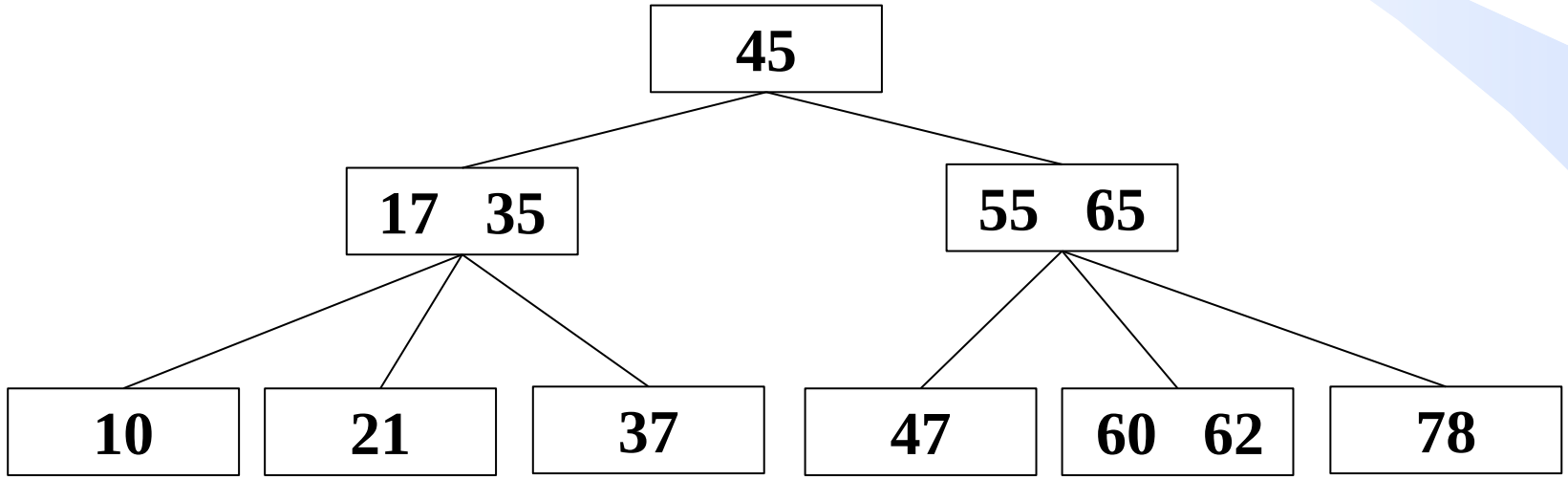


5阶B树非根结点最少包含2个关键词

练习

A

已知一棵3阶B树如下图所示，删除关键字78后得到一棵新B树，其最右叶结点中的关键字是__65__。【考研题全国卷】



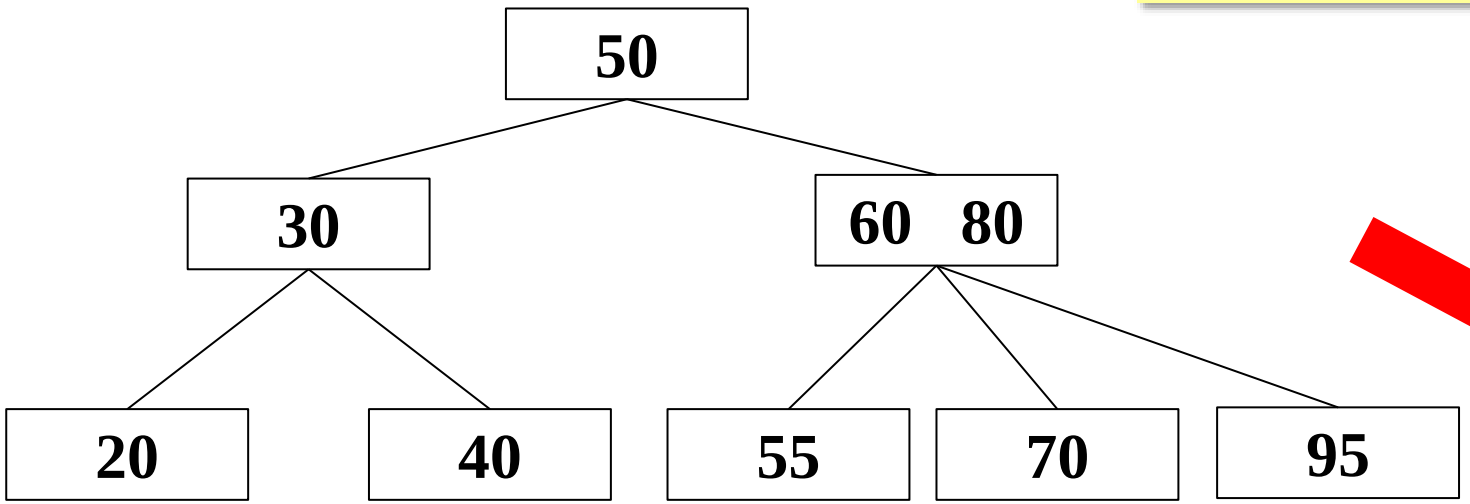
3阶B树非根结点最少包含1个关键词

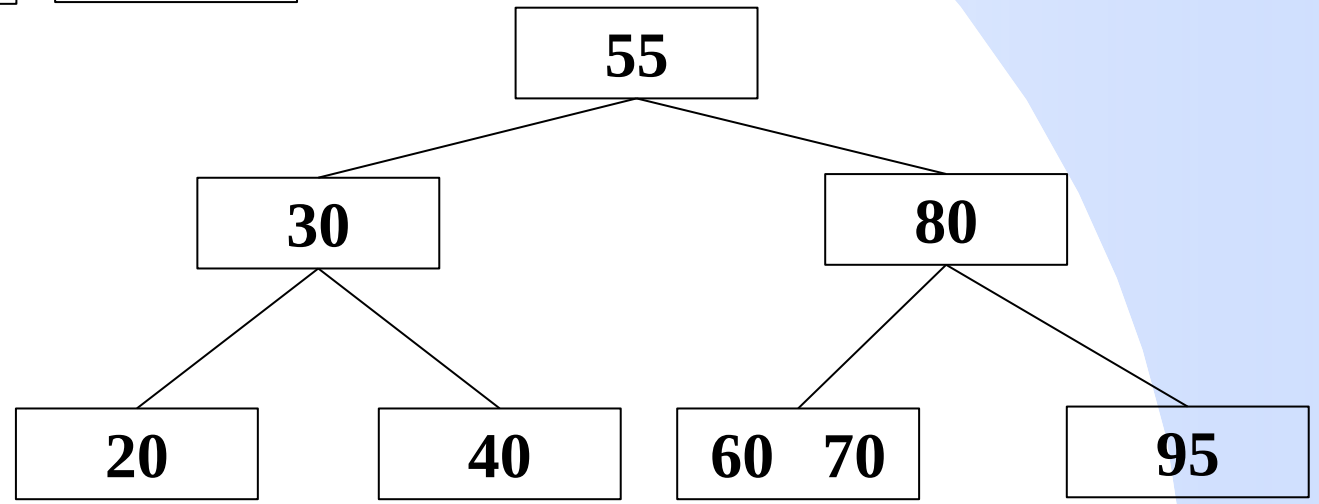
练习

A

对如下3阶B树删除关键字50

3阶B树非根结点最少包含1个关键词



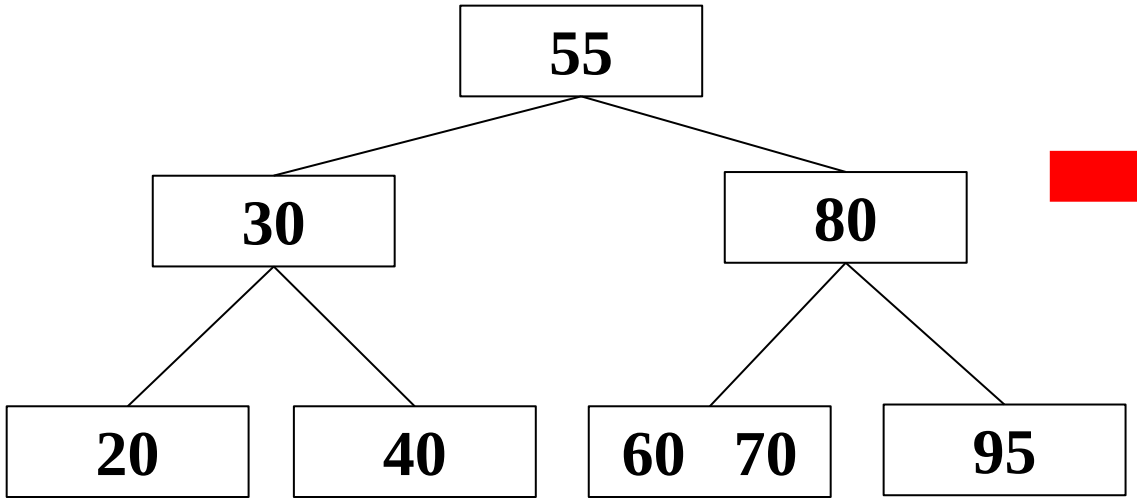


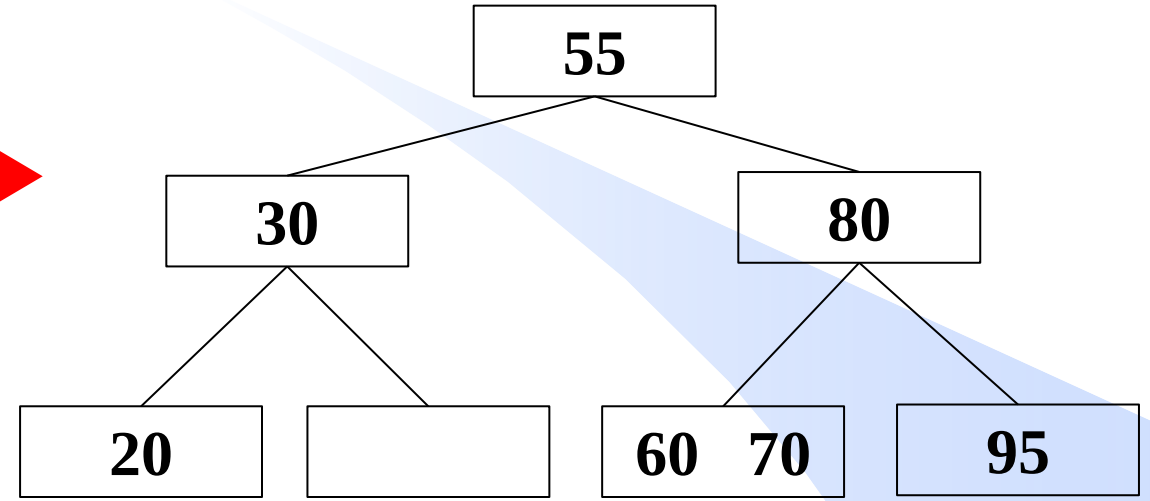
练习

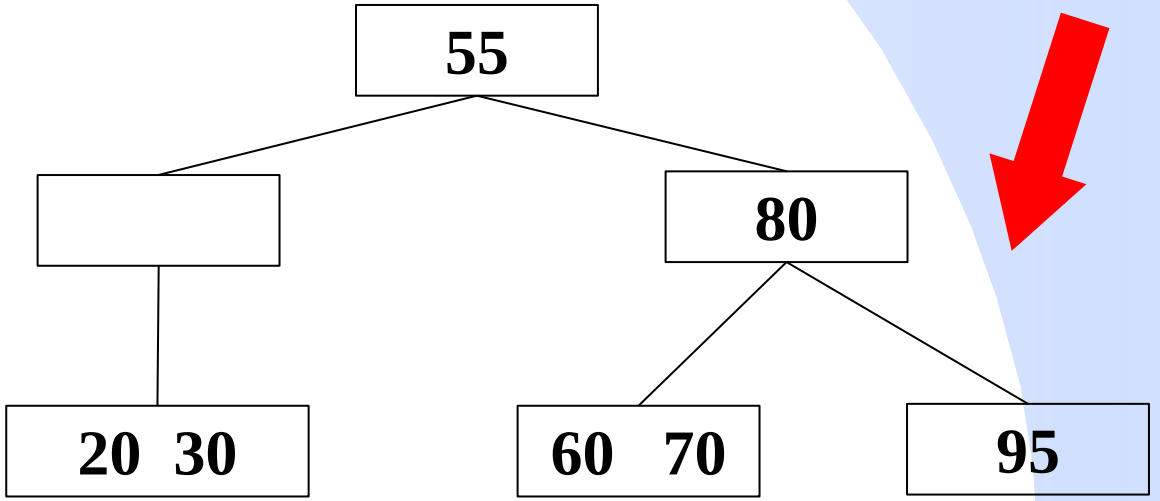
A

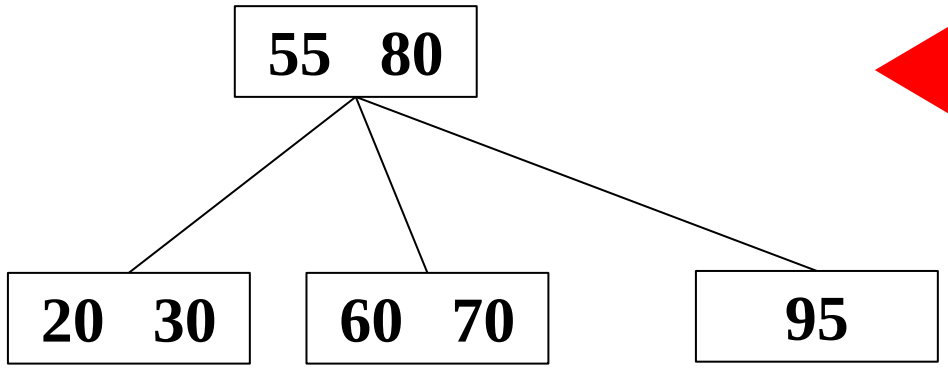
对如下3阶B树删除关键字40

3阶B树非根结点最少包含1个关键词



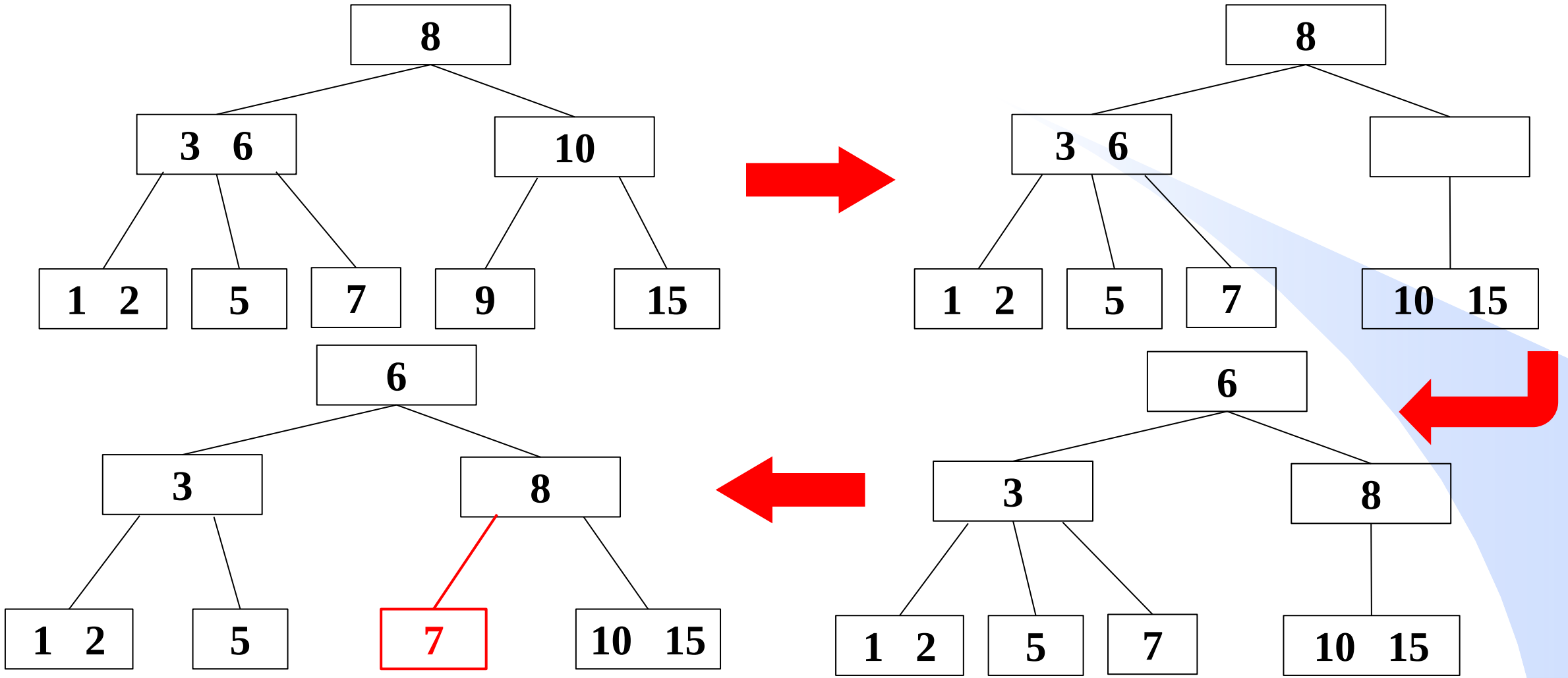






练习——对如下3阶B树删除关键字9

A

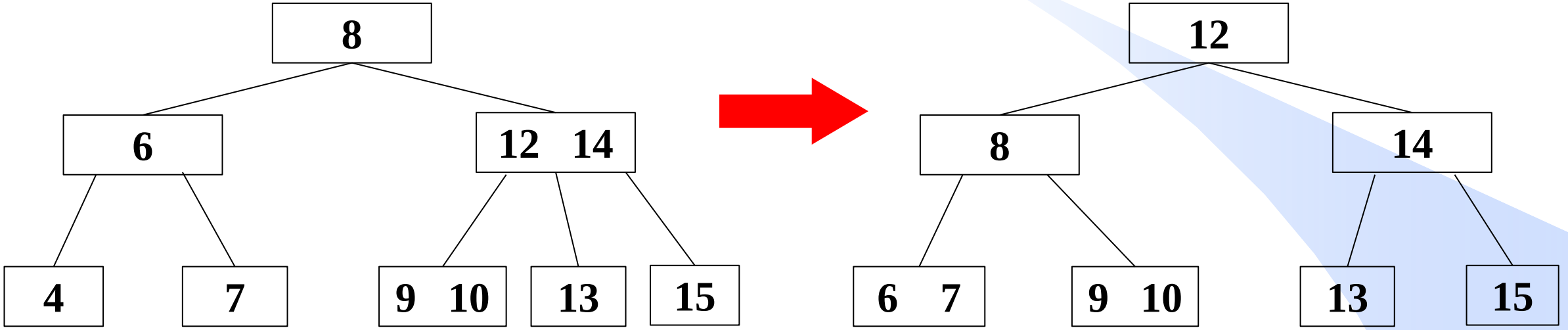


回顾：若借位不是发生在最底层：从左（右）兄弟结点中借最大（最小）关键词的同时，须连同左（右）兄弟结点最右（左）方的子树一起借。

课下练习

A

对如下3阶B树删除关键字4

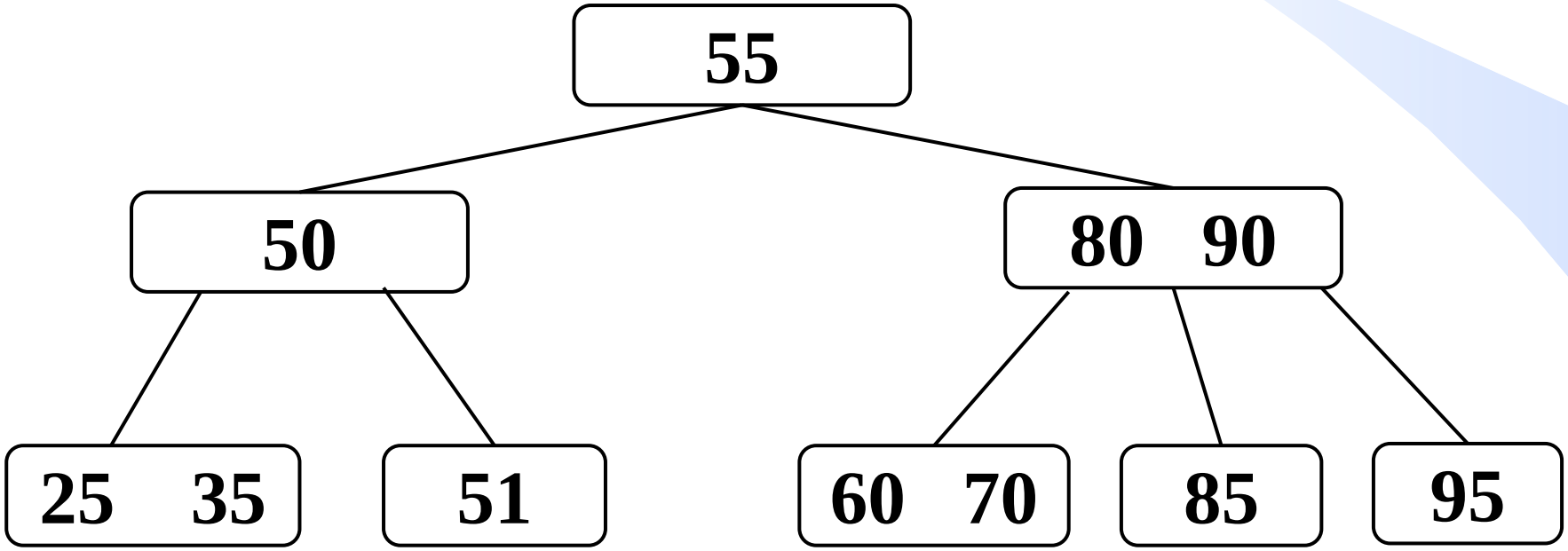


3阶B树非根结点最少包含1个关键词

课下练习

A

已知一棵3阶B树如下图所示，给出对其依次插入关键词65, 15后，再依次删除60, 80所得到的B树。【吉林大学计软两院2022级期末考试题】

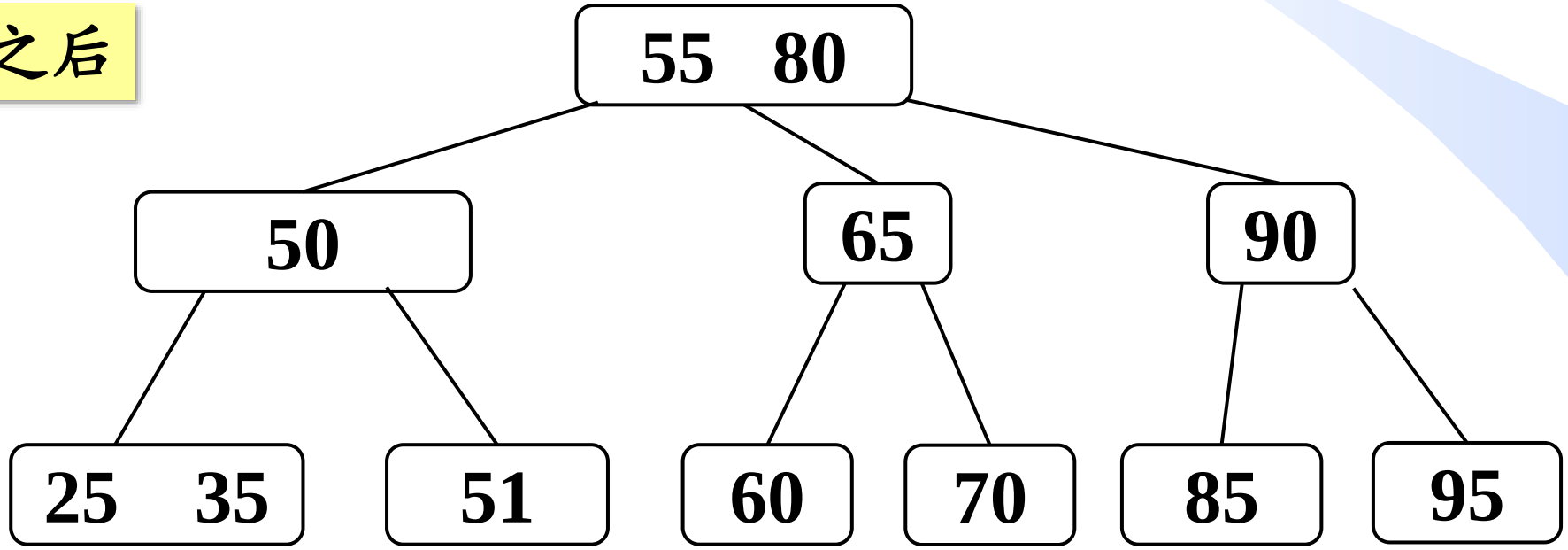


课下练习

A

已知一棵3阶B树如下图所示，给出对其依次插入关键词65, 15后，再依次删除60, 80所得到的B树。【吉林大学计软两院2022级期末考试题】

插入65之后

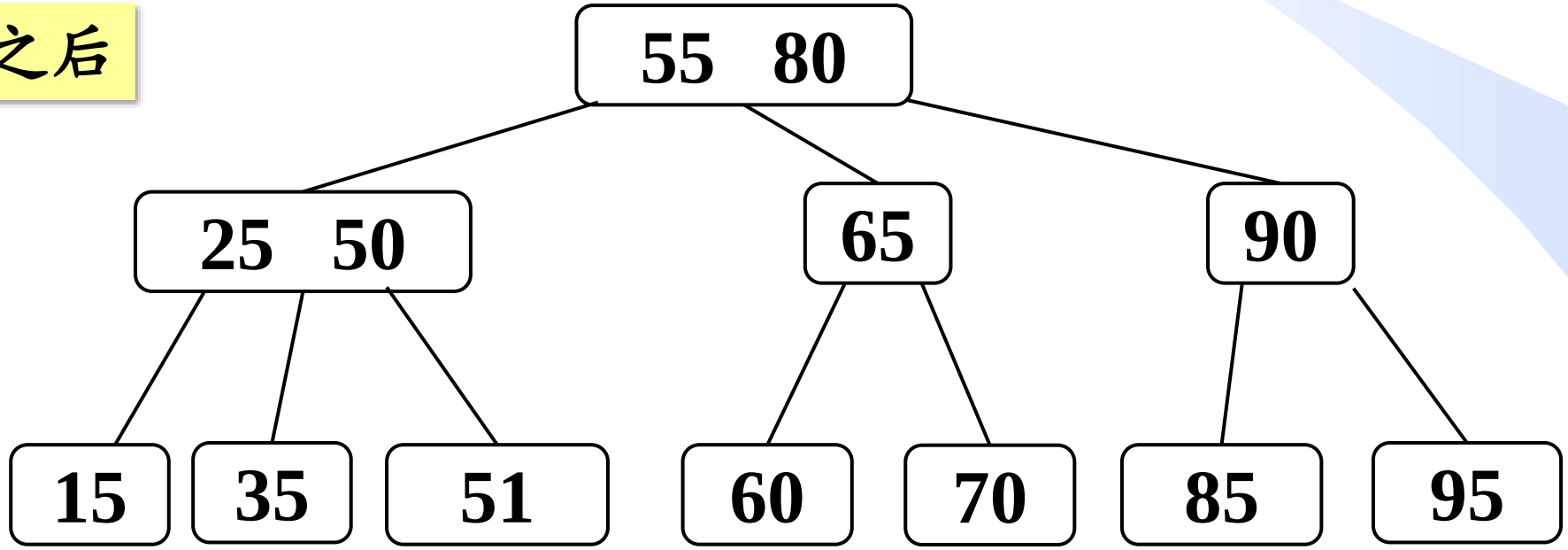


课下练习

A

已知一棵3阶B树如下图所示，给出对其依次插入关键词65, 15后，再依次删除60, 80所得到的B树。【吉林大学计软两院2022级期末考试题】

插入15之后

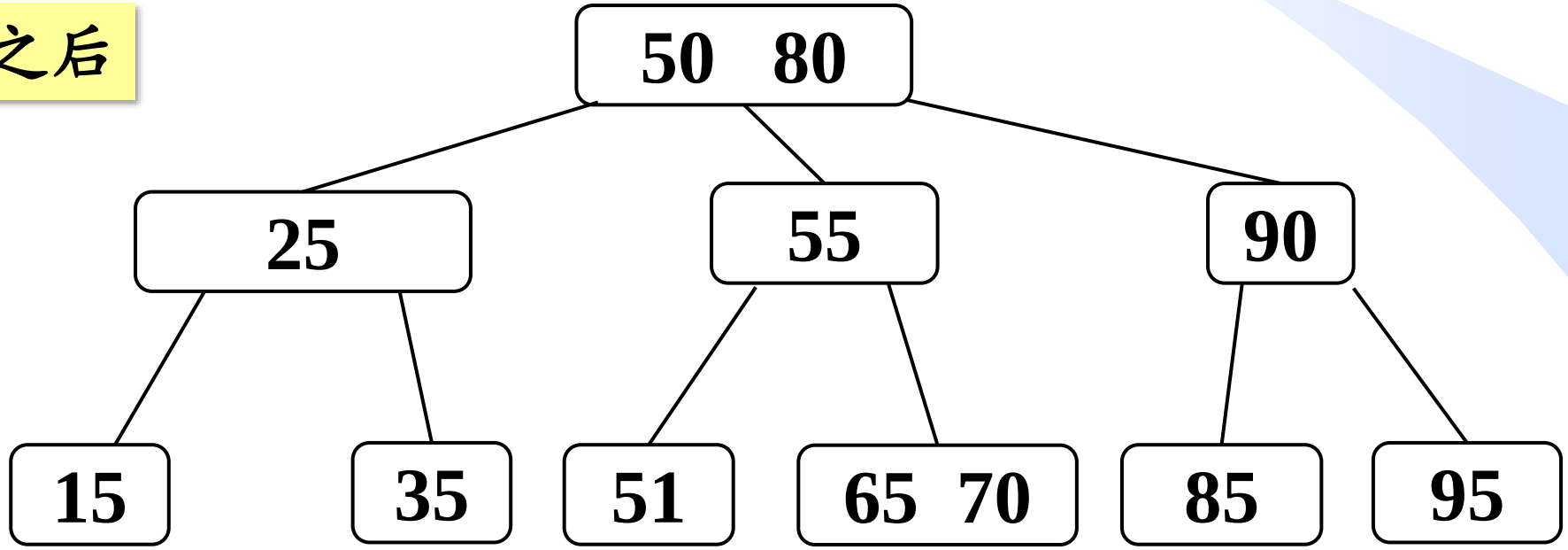


课下练习

A

已知一棵3阶B树如下图所示，给出对其依次插入关键词65, 15后，再依次删除60, 80所得到的B树。【吉林大学计软两院2022级期末考试题】

删除60之后

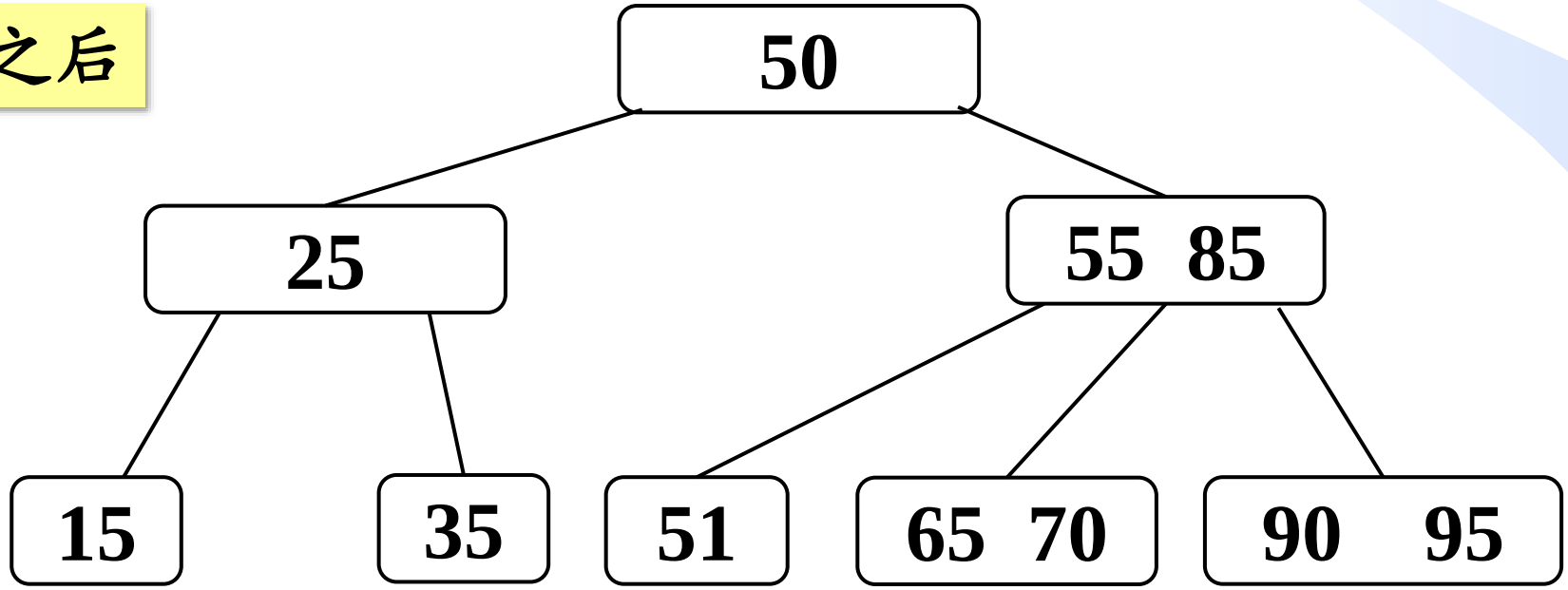


课下练习

A

已知一棵3阶B树如下图所示，给出对其依次插入关键词65, 15后，再依次删除60, 80所得到的B树。【吉林大学计软两院2022级期末考试题】

删除80之后



B树的高度

B

- B树的高度由叶结点的深度决定。
- 包含n个关键词的B树，有$n+1$个叶结点。

  n个关键词 $\leftrightarrow n$ 种成功查找 $\leftrightarrow n+1$种失败查找 $\leftrightarrow n+1$个叶结点
- 假设叶结点在第k层
- 各层的结点数目
  - ✓第0层为根，第1层至少2个结点，
  - ✓第2层至少 $2\cdot\lceil m/2\rceil$ 个结点
  - ✓第3层至少 $2\cdot\lceil m/2\rceil^2$个结点
  - ✓第4层至少 $2\cdot\lceil m/2\rceil^3$个结点
  - ✓……
  - ✓第k层至少 $2\cdot\lceil m/2\rceil^{k-1}$个结点，

$$n+1\geq 2\cdot\lceil m/2\rceil^{k-1},$$

$$k\leq 1+\log_{\lceil m/2\rceil}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$=O(\log_m n)$$

m多大为宜

B

- 磁盘块是操作系统读写外存的最小单位。m取值与磁盘块大小相关，尽量让B树每个结点的大小接近一个磁盘块的大小。
- 一般多数数据库系统采用 $m=200\sim300$。
- 例如，若关键词个数$n=2\times10^{10}$ 且 $m=300$ 时，k最多是5。意味着在最坏的情况下，一次查找至多需要5次外存访问。

$$k \le 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

- 若将文件组织成一棵二叉查找树，查找所需平均外存访问次数约为 $\log_2 n \approx 35$ 次。

插入操作的分裂次数

B

- 设B树包含n个关键词，k个内结点。
- 当根结点包含1个关键词，其他内结点都包含$\lceil m/2 \rceil$-1个关键词时，B树包含的总关键词数最少，故有$n \geq 1 + (\lceil m/2 \rceil - 1)(k-1)$，整理得：

$$k - 1 \leq \frac{n-1}{\lceil m/2 \rceil - 1}$$

- 考虑最坏情况，从第二个结点开始，每个内结点都是分裂出来的，即插入n个关键词的过程中分裂出k-1个结点，则插入1个关键词平均分裂出的结点数为：

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{n-1}{(\lceil m/2 \rceil - 1)n} \leq \frac{1}{\lceil m/2 \rceil - 1}$$

- 从上式可见，每插入$\lceil m/2 \rceil$-1个关键词分裂出一个结点，当m=200时，平均每插入100个关键词分裂一次。

当每个元素包含多个属性时

C

Key Value

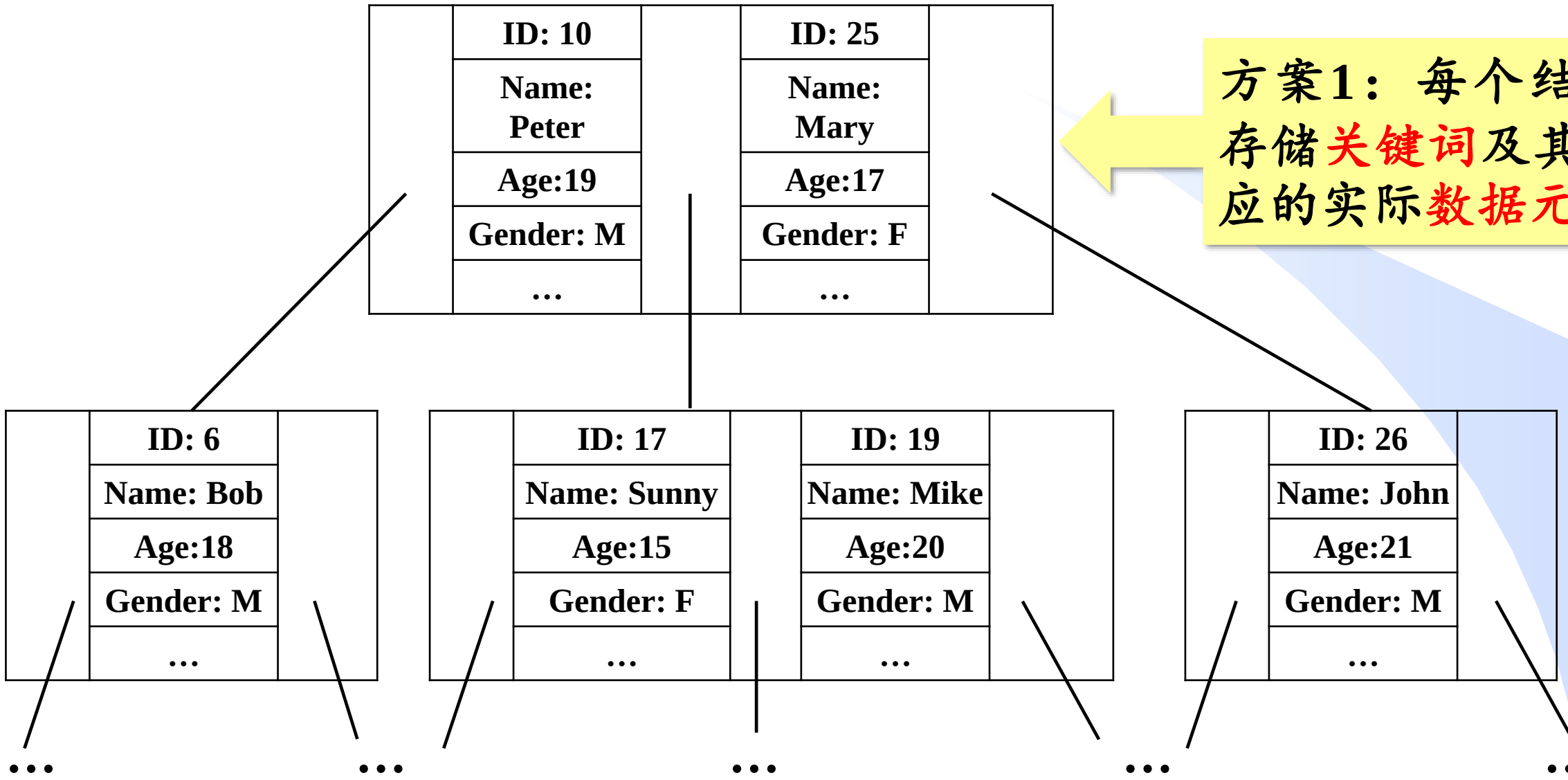
Student

ID	Name	Age	Gender	GPA	…
6	Bob	18	Male	3.9	…
7	Sunny	15	Female	3.5	…
9	Mike	20	Male	2.8	…
10	Peter	19	Male	1.0	…
13	Proro	18	Male	3.3	…
15	John	21	Male	3.7	…
25	Mary	17	Female	2.6	…

目标：根据Key查Value

当每个元素包含多个属性时

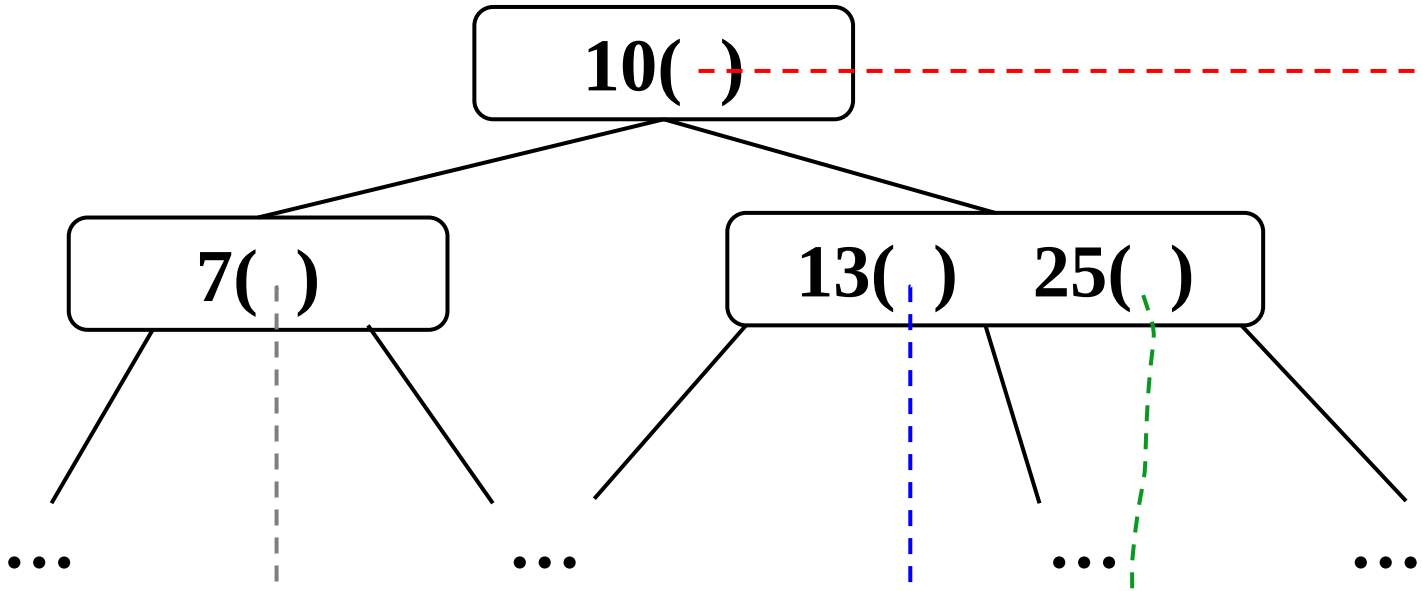
C



方案1：每个结点存储关键词及其对应的实际数据元素

当每个元素包含多个属性时

C



方案2：每个结点存储关键词及其对应的数据元素的指针

存在磁盘的实际数据元素

ID	Name	Age	gender	…
6	Bob	18	Male	…
7	Sunny	15	Female	…
9	Mike	20	Male	…
10	Peter	9	Male	…
13	Proro	8	Male	…
15	John	12	Male	…
25	Mary	17	Female	…

B树及其变种的应用场景

D

- 文件系统
  - ✓Windows NTFS
  - ✓Apple HFS+/APFS
  - ✓Linux EXT4
  - ✓……
- 数据库系统
  - ✓Oracle
  - ✓SQL Server
  - ✓DB2
  - ✓MySQL
  - ✓……

APFS
Apple File System

NTFS

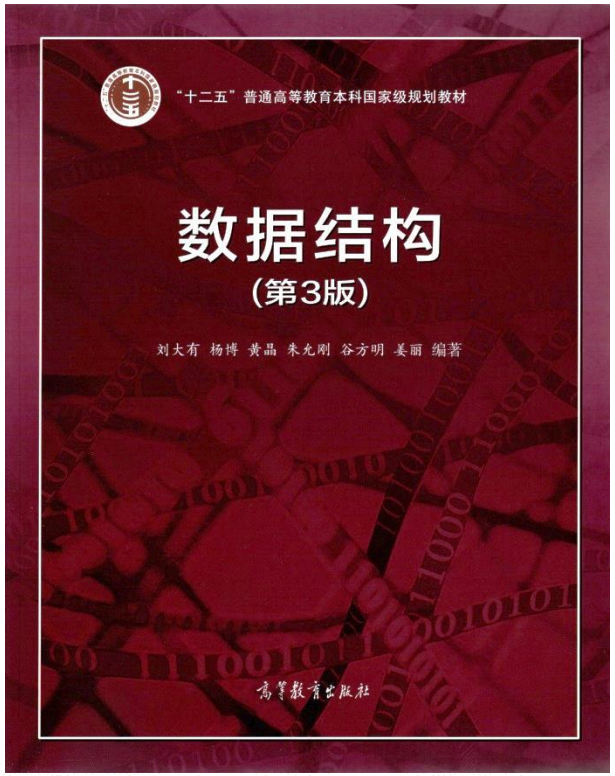
ORACLE
DATABASE

Ext4
File System

IBM
DB2

MySQL

Microsoft
SQL Server



多叉查找树

- B树
- **数字查找树/字典树**

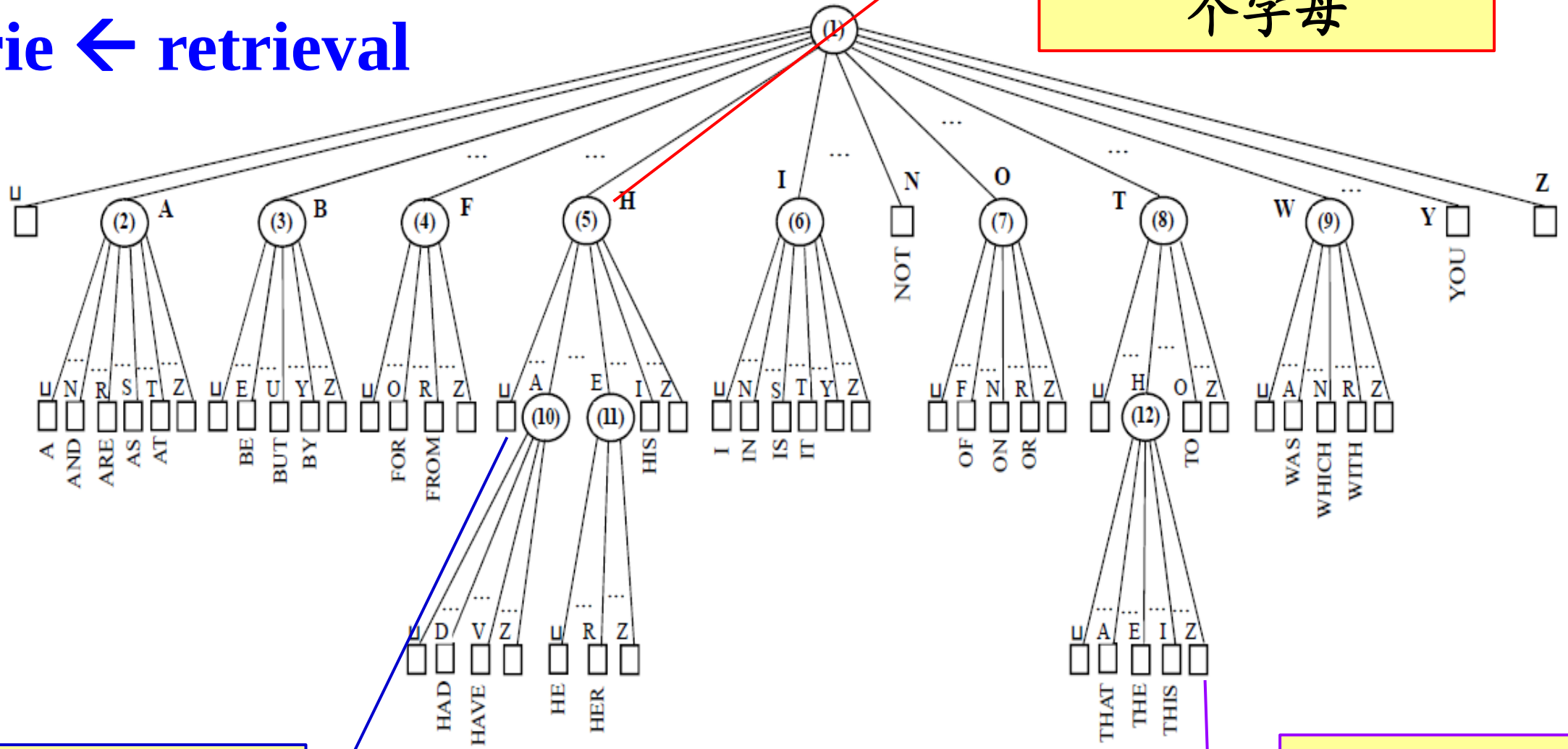
数据之法
结构之美
算法之道

zhuyungang@jlu.edu.cn

Last updated on 2025.6

字典树/Trie树

Trie ← retrieval



第1层对应K的第1个字母

第2层对应K的第2个字母

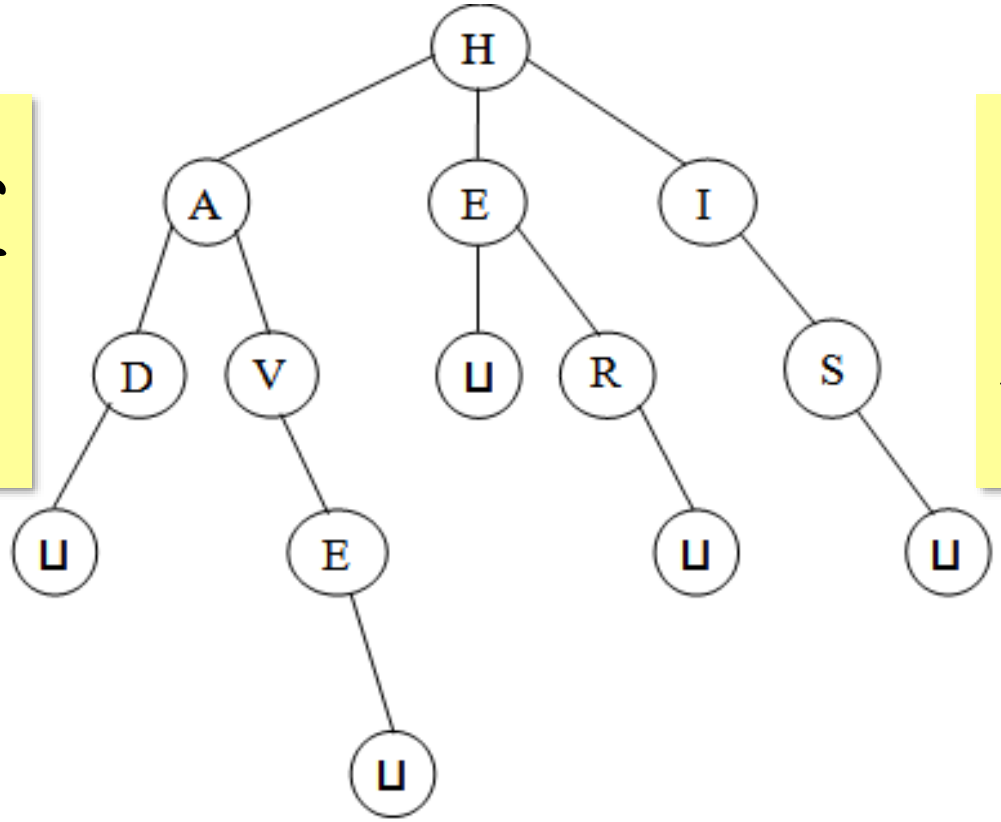
第3层对应K的第3个字母

若关键词K表示成字母序列

C

C

关键词不是结点，而是从根到叶的路径。



空格符“␣”作为关键词的结束符。

如果关键词是字母序列，称字典树/Trie树
如果关键词是数字序列，亦称数字查找树

典型应用场景——字典

C

- 常被用于保存、统计和排序大量的字符串。

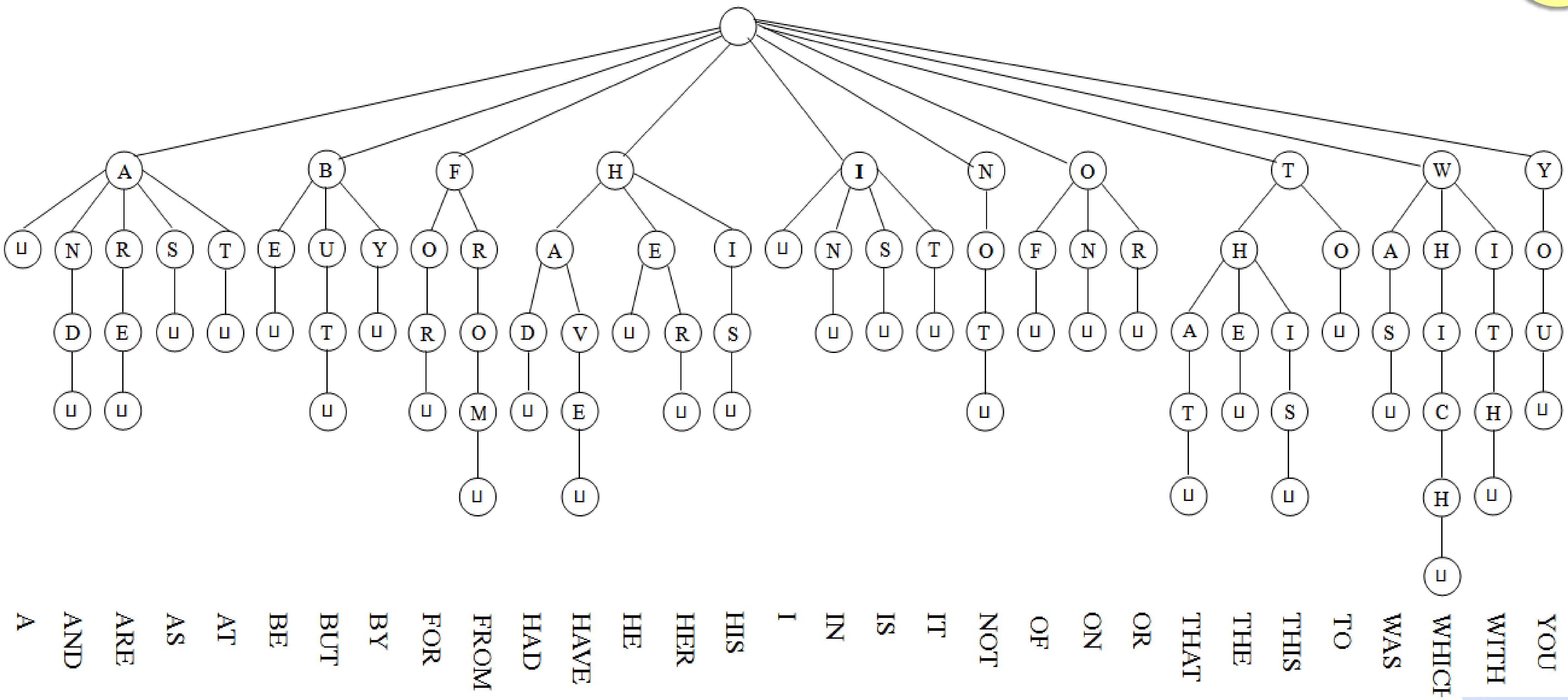
- 查找方法为：

(1)从根结点开始查找；

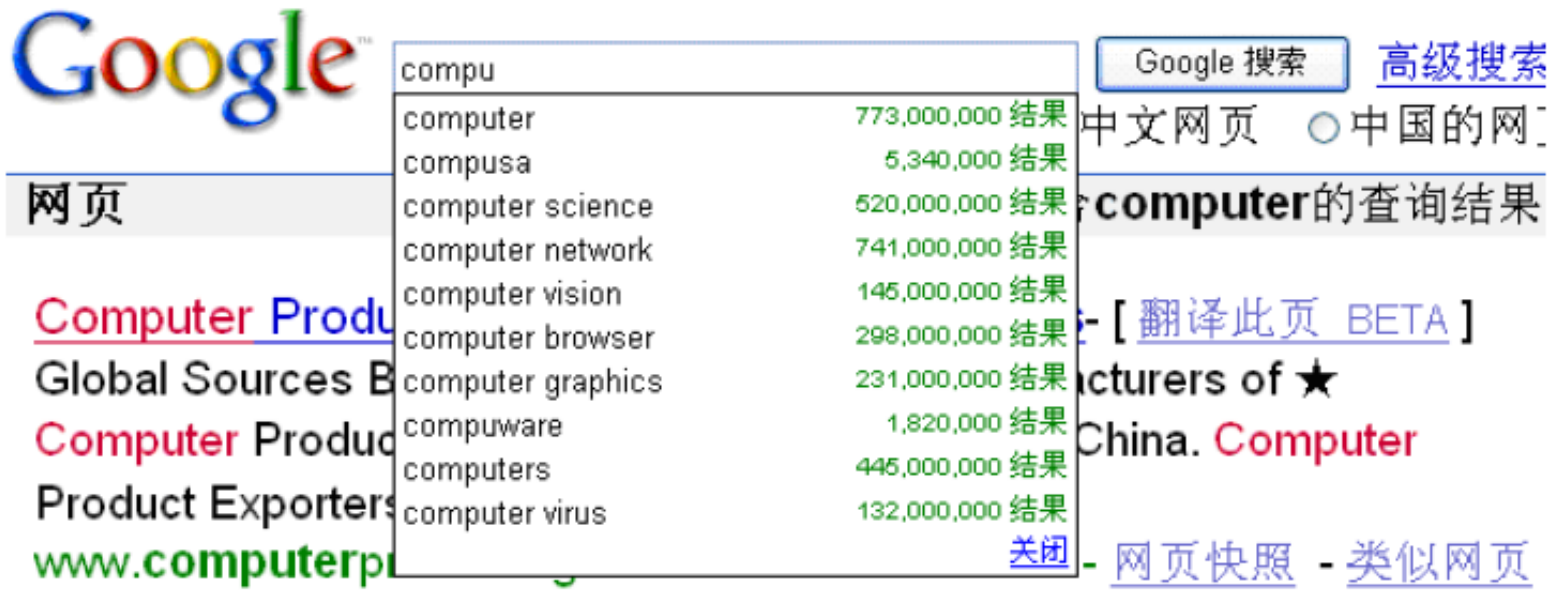
(2)取得要查找关键词的第1个字母，并根据该字母选择对应的子树并转到该子树继续进行查找；

(3)在相应的子树上，取得要查找关键词的第2个字母，并进一步选择对应的子树进行检索。

(4)迭代上述过程……直至在某个结点处，关键词的所有字母已被取出且该结点对应的字母是某一单词的最后一个字母，则完成查找。

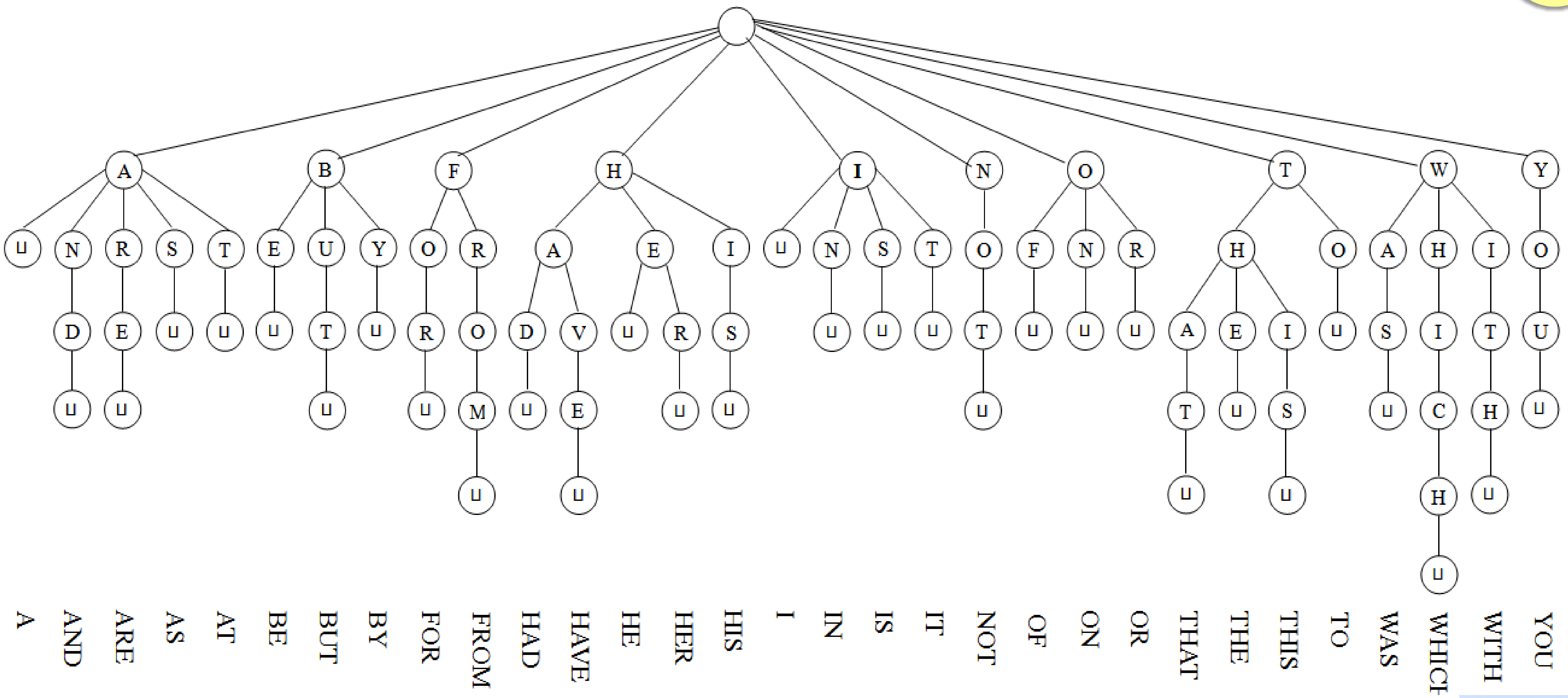

A
AND
ARE
AS
AT
BE
BUT
BY
FOR
FROM
HAD
HAVE
HE
HER
HIS
I
IN
IS
IT
NOT
OF
ON
OR
THAT
THE
THIS
TO
WAS
WHICH
WITH
YOU

搜索引擎的自动补全功能



字符串的前缀匹配

搜索引擎的自动补全功能



搜索引擎的自动补全功能

新闻 网页 贴吧 知道 音乐 图片 视频 地图 百科 文库 更多>>

双 百度一下

双色球开奖结果
双色球
双色球走势图
双视影院
双视

搜索引擎的自动补全功能

C

新闻 **网页** 贴吧 知道 音乐 图片 视频 地图 百科 文库 更多>>

shua

百度一下

双色球开奖结果
双色球
双色球走势图
双视影院
刷机精灵
双视
刷新3.7