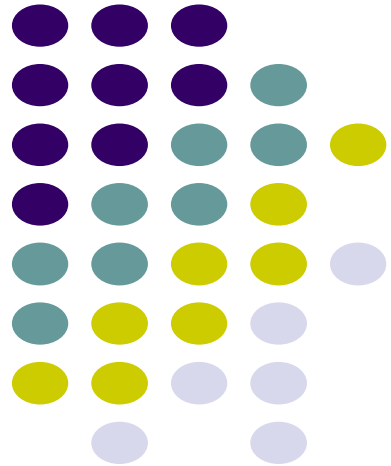
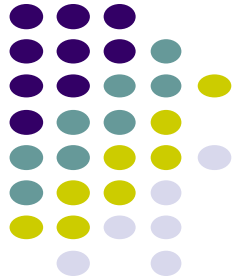
L15：最短路I

吉林大学计算机学院
谷方明
fmgu2002@sina.com

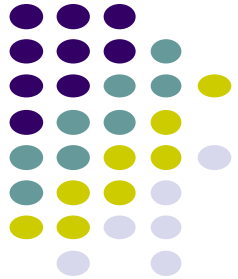


学习目标

- 了解最短路问题及其分类
- 掌握求解单源最短路问题的4个常用算法
  - ✓ BFS
  - ✓ Dijkstra算法
  - ✓ Bellman-Ford算法
  - ✓ SPFA算法



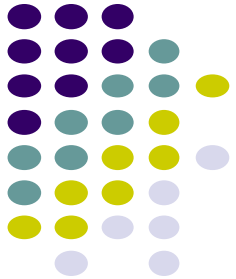
最短路问题



- 最短路问题是实际应用中经常遇到的问题。
  - ✓ 旅游： 长春→杭州
  - ✓ 最少时间
  - ✓ 最少费用

- 最短路问题：给定图中，从某顶点出发，找从该点到其它顶点花费（cost）最小的路径。花费体现为权值，路径的花费是指路径中边的权值和。

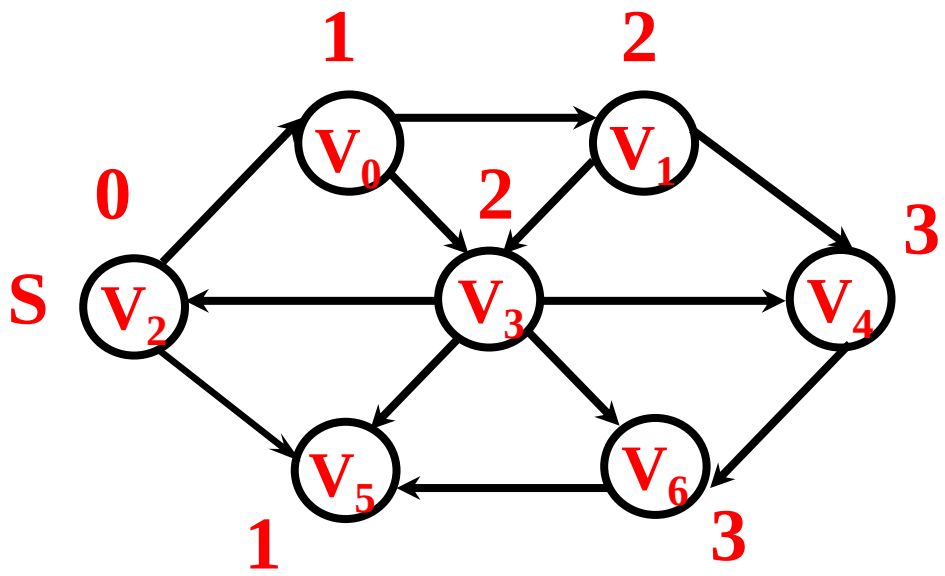
最短路问题分类



- 两个顶点间的最短路：从一个指定的顶点到达另一指定顶点的最短路问题。
- 单源最短路：从一个指定的顶点到其它所有顶点的最短路径问题(Single Source Shortest Path, SSSP).
- 任意顶点间的最短路：所有顶点间的最短路；

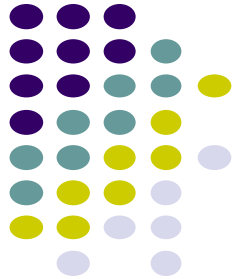
1. 无权图的单源最短路

- 无权——所有边的权值都为 1.
- 源点到各顶点的路径长度：所经历的边的数目



- 从源点开始由近及远依次求各顶点的最短路径

由近及远的算法思想



设D_i为源点S到顶点 i 的最短路径长度

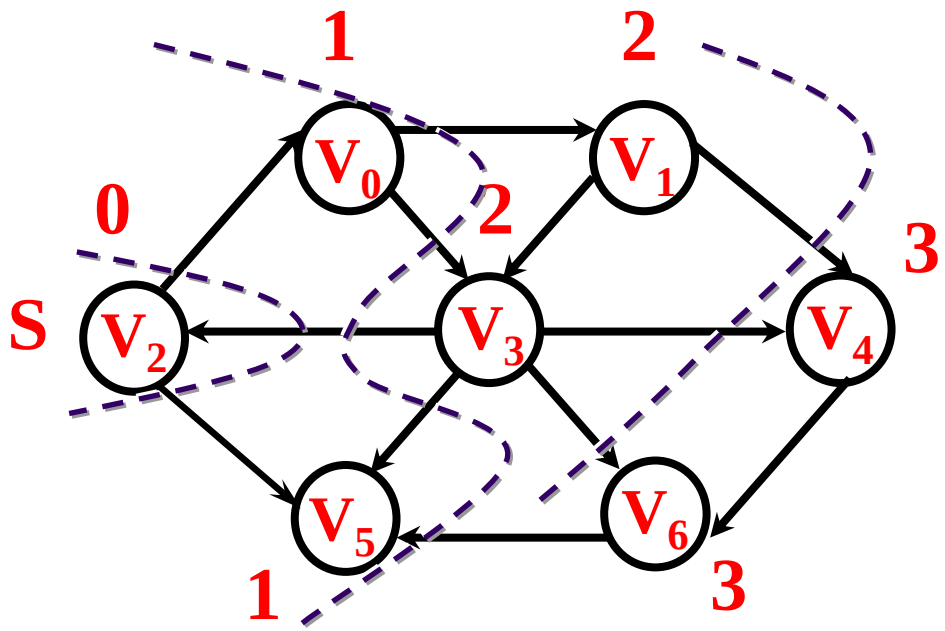
①访问初始顶点S，即令 $D_S = 0$.

②从S出发，找最短路径为1的顶点，即S的所有邻接顶点w，令 $D_w=D_S+1$

③从上步的顶点w出发，找最短路径为2的顶点，即w未被访问的邻接顶点v，令$D_v=D_w+1$

④继续上述过程，直至处理完所有顶点。

BFS

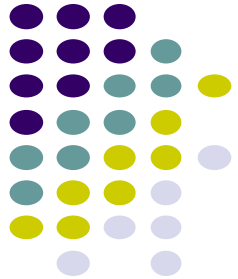


- 访问顶点的次序与对图进行广度优先遍历**BFS**的次序是一致的;

算法实现

- 图采用邻接表存储；
- 用队列保存待处理顶点；
- 使用数组**dist[ ]**存储最短路径值。
  - ✓ 源点初始化为0，其它初始为-1.
  - ✓ 当dist[i] 从 -1 变为非负时，表示从源点到i的最短路径已求完
- 为找到最短路径，可用**path[ ]**存储从源点到顶点 i 的最短路上 i 之前的顶点（多种方法）。

算法描述

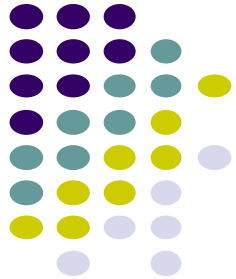


算法**ShortestPath(v)**

/*计算从顶点v到其他各顶点的最短路径*/

S1[初始化]

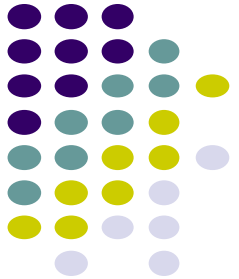
```
    CREATEQueue(Q) .   /* 创建一个队列 */
    for( i =1 ; i <= n ; i ++){
          path[i] = -1; dist[i] = -1.
    }
    dist[v] = 0 ;
    Q.insert(v)；
```



S2[求从顶点v到其他各顶点的最短路径]

```
while ( ！ Q.empty() ) {
    u = Q.delete() ;                    /* 队头顶点u出队 */
    for( p = Head[u].adjacent ; p ; p = p->link ){
        k =  p -> VerAdj ;
        if (dist[k] == -1) {
            Q.insert(k);// u未访问的邻接顶点入队
            dist[k] = dist[u] + 1; path[k] = u;   }
    }
}
```

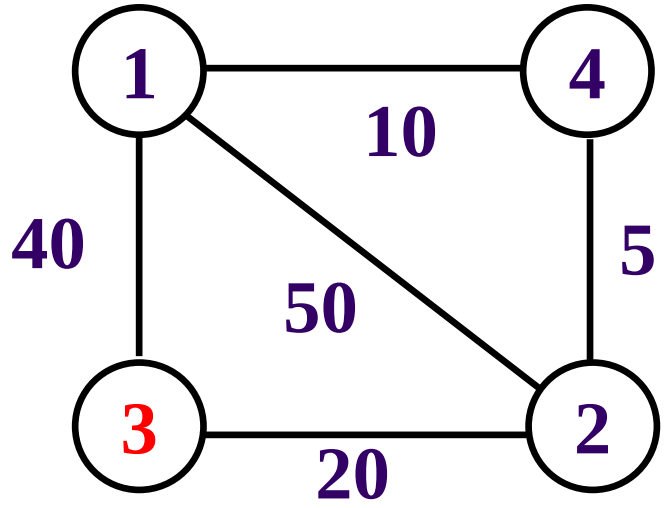
算法分析



- 邻接表：在最短路径的计算中，一个顶点入队出队各一次，时间复杂性为**O(n)**；而对每个顶点，都要对它的边链表进行遍历，其遍历邻接表的开销为**O(e)**，于是整个算法的时间复杂性为**O(n+e)**。

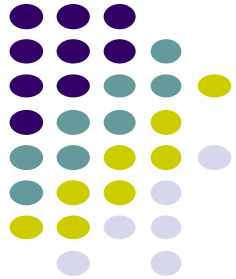
- 邻接矩阵：**$O(n^2)$**

2. 权图（非负）



- 从源点开始，按广度优先扩展;
  - ✓ 失败! 权值只更新一次
- **允许权值多次更新，**按广度优先扩展;
  - ✓ 失败！原因：盲目扩展，没利用当前的最短路信息
- 一种思想：选择未求完最短路的点中当前最短路径最小的点扩展

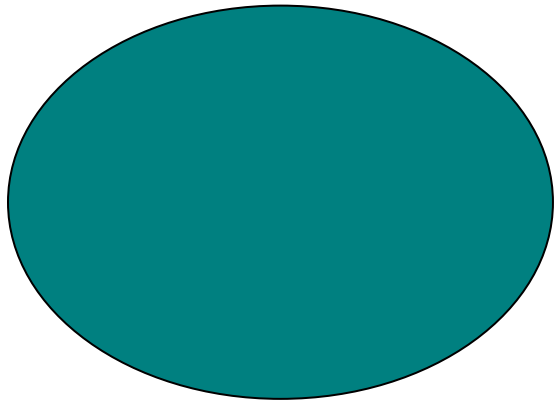
Dijkstra算法

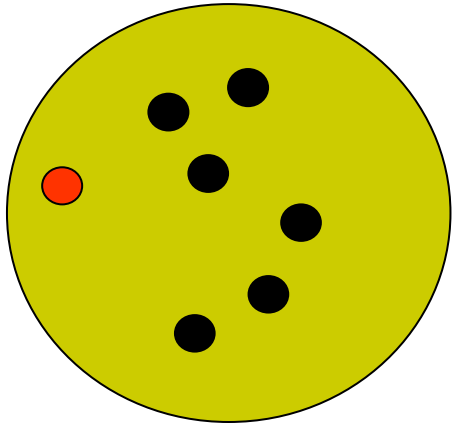


- 把图中所有顶点分成两组，第一组：已求完最短路径的顶点；第二组：未求完最短路径的顶点。
- 每次从第二组中选择当前最短路径最小的点处理，逐个把第二组的顶点加到第一组。

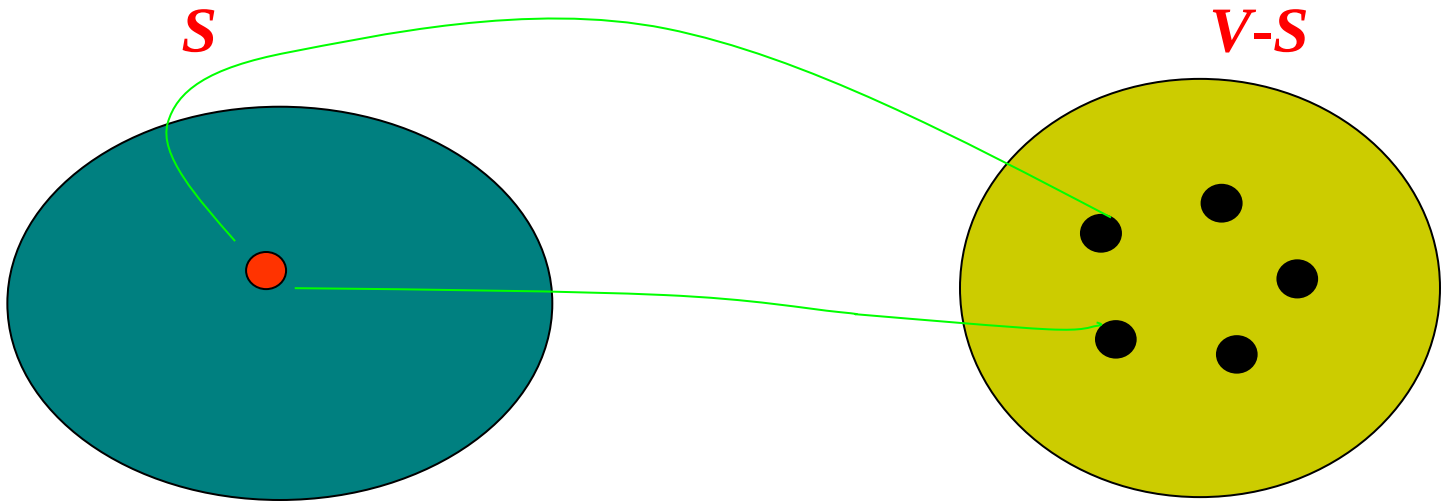
具体操作

- 设数组D，D_i表示当前找到的源点v_0到v_i的最短路径长度。
- 设S是已求得最短路径的顶点集合。
- 初始时：　$S=\{\}$，$D_0=0$，　$D_i=+\infty$



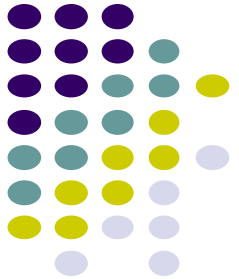


- 第一次操作，$S=\{v_0\}$，若v_0到v_i有边，则D_i更新为边上的权值；v_0到v_i无边，则D_i仍为$+\infty$。



- 每次求最短路径，就是在$V-S$中找具有最小D值的顶点v_k，将v_k加入集合S，然后对$v_i \in V-S$，修改D_i

Dijkstra算法描述-自然语言



①设s为初始顶点, $D_s=0$且$\forall$ i≠ s，$D_i=+\infty$

②在未求完的顶点中选择D_v最小的顶点v，访问v，令 S[v]=1。

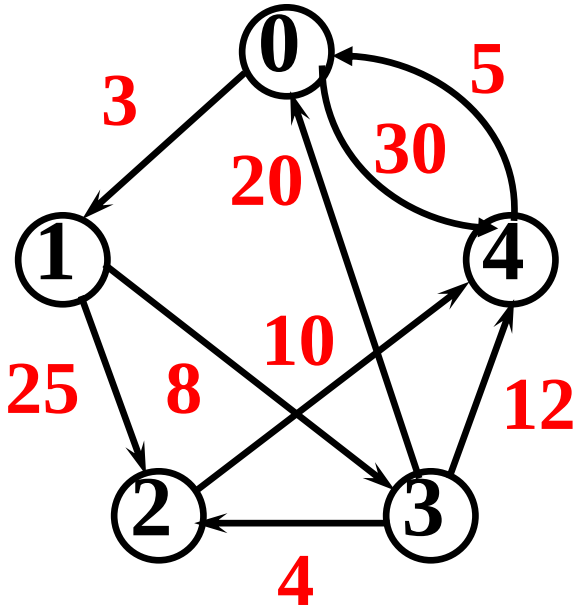
③依次考察v的邻接顶点w，若

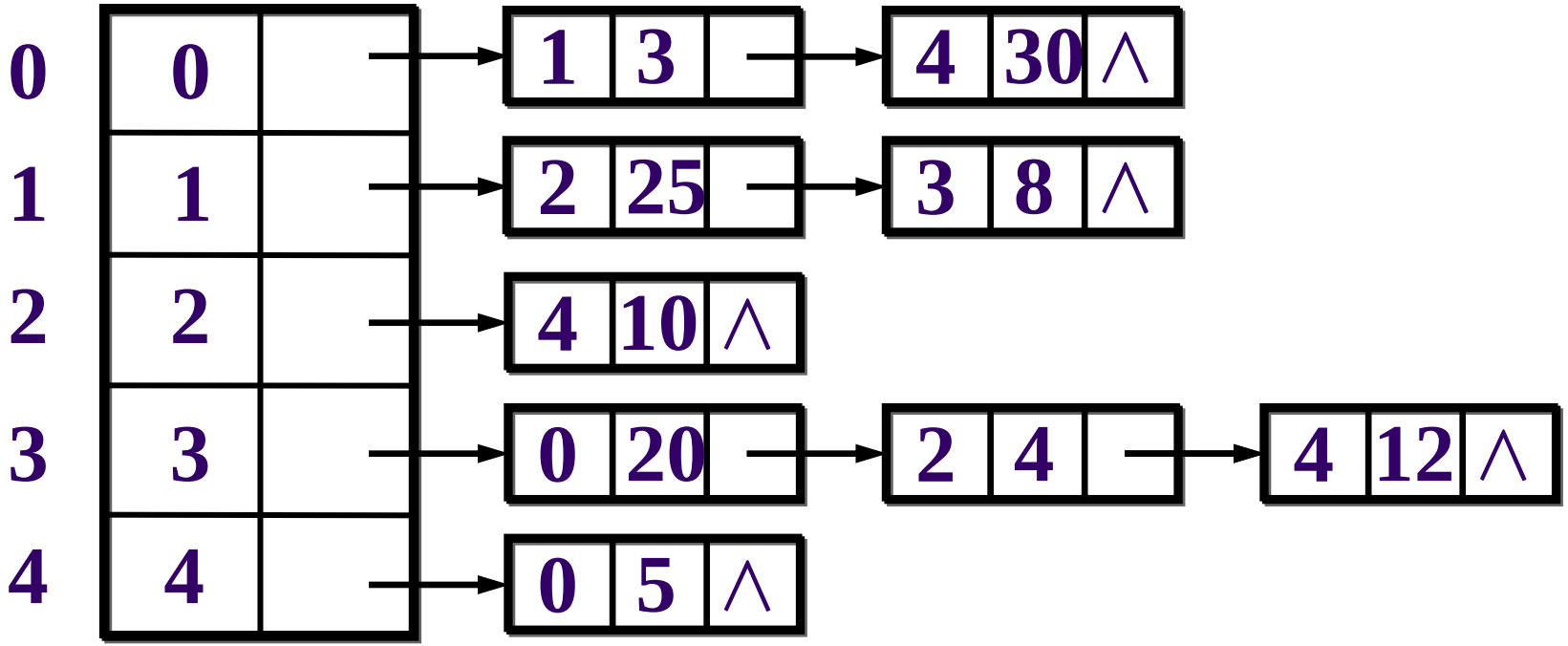
D_v + weight(<v,w>) < D_w ，

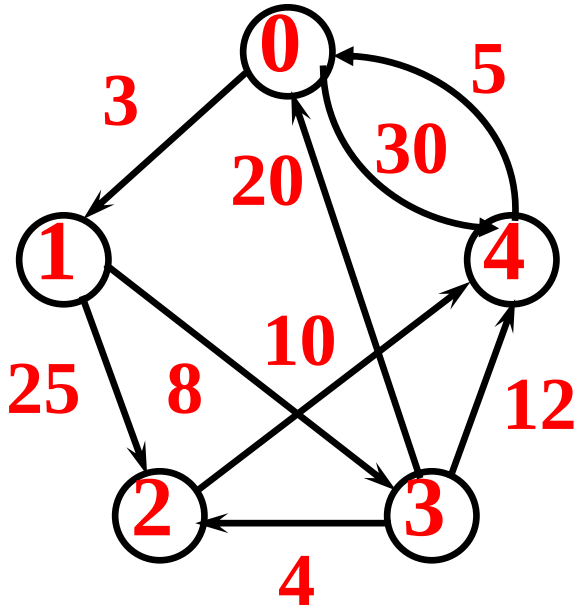
则使$D_w = D_v$ + weight(<v,w>) 。

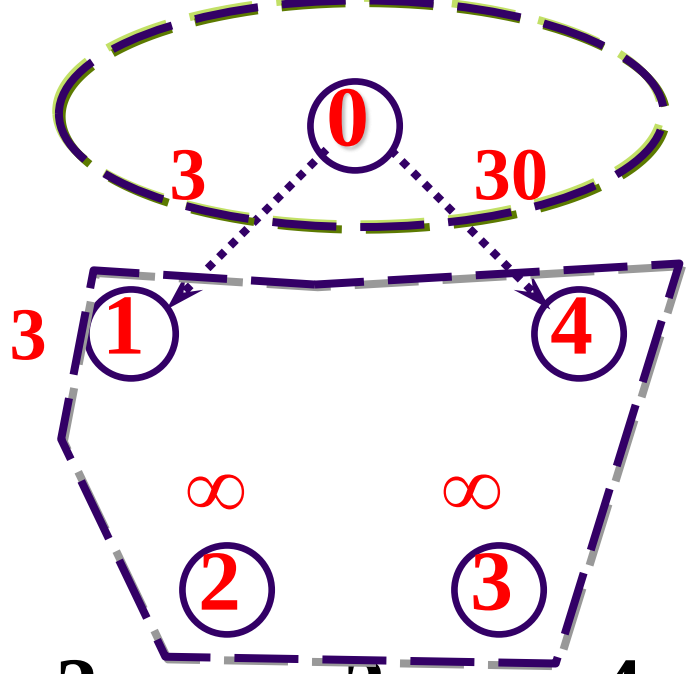
④重复② ③ ，直至所有顶点被访问。

运行示例


0
1
2
3
4
3
5
20
30
25
8
10
12
4

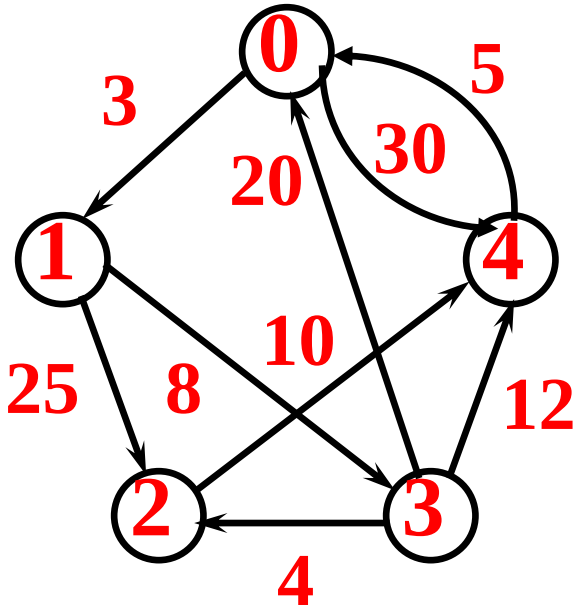

0
1
2
3
4
0
1
2
3
4
1 3
4 30 ∧
2 25
3 8 ∧
4 10 ∧
0 20
2 4
4 12 ∧
0 5 ∧

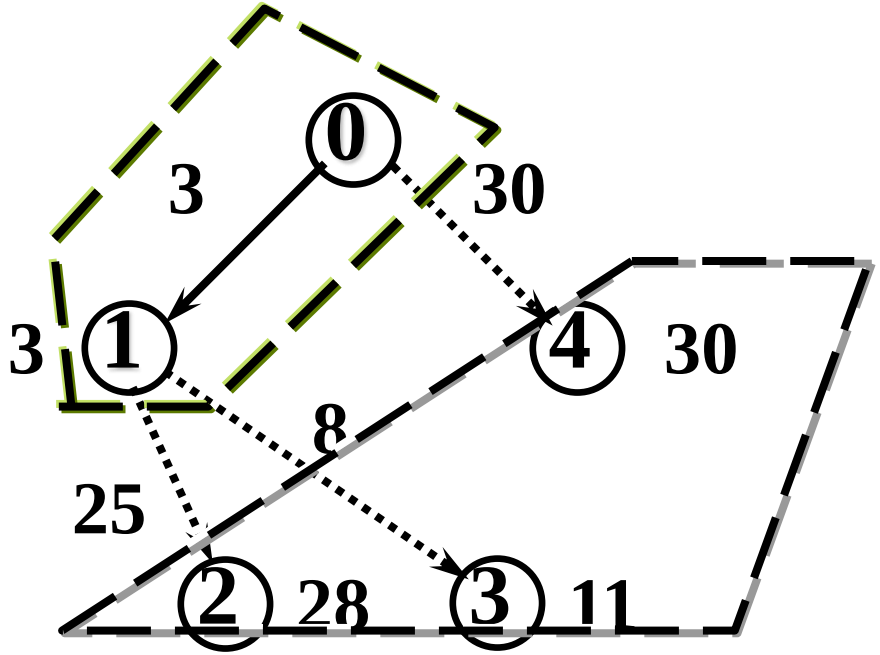




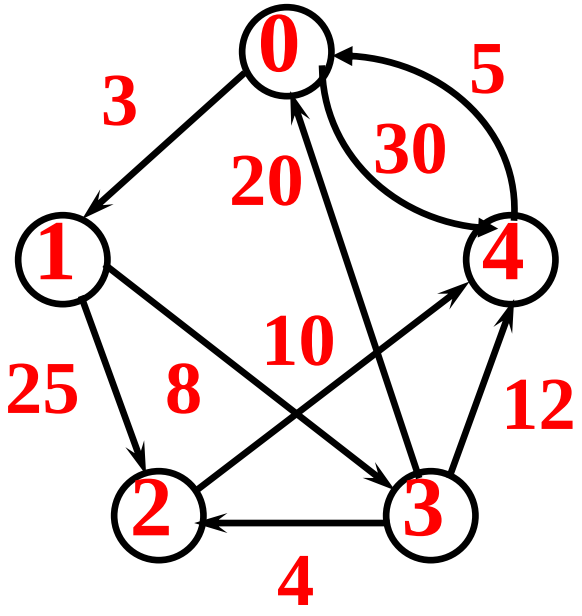
	0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
dist	0	∞	∞	∞	∞
path					

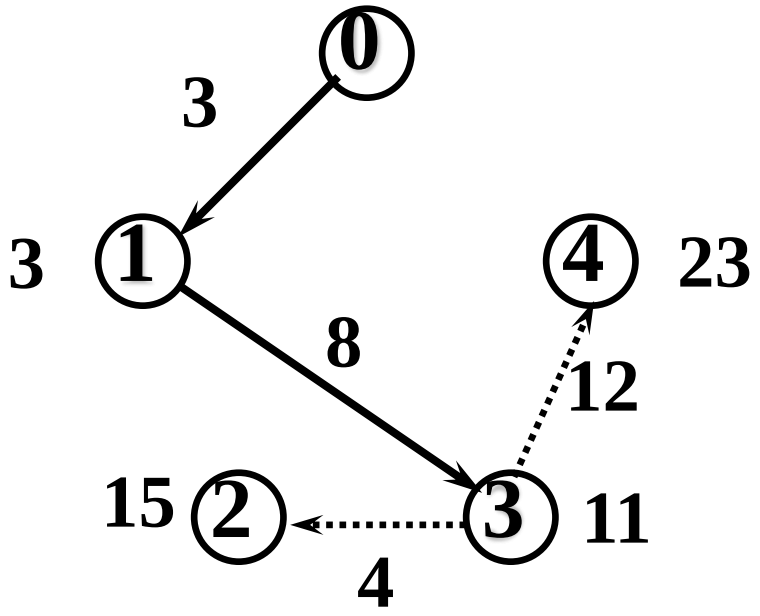
	0	1	2	3	4
s	1	0	0	0	0
dist	0	3	∞	∞	30
path		v_0			v_0



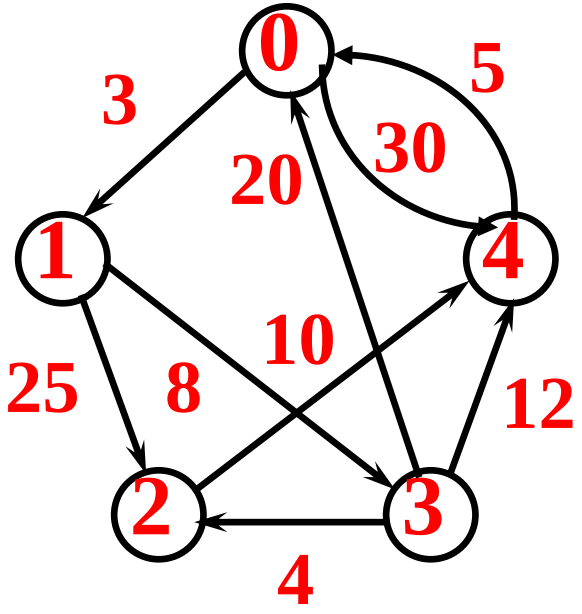


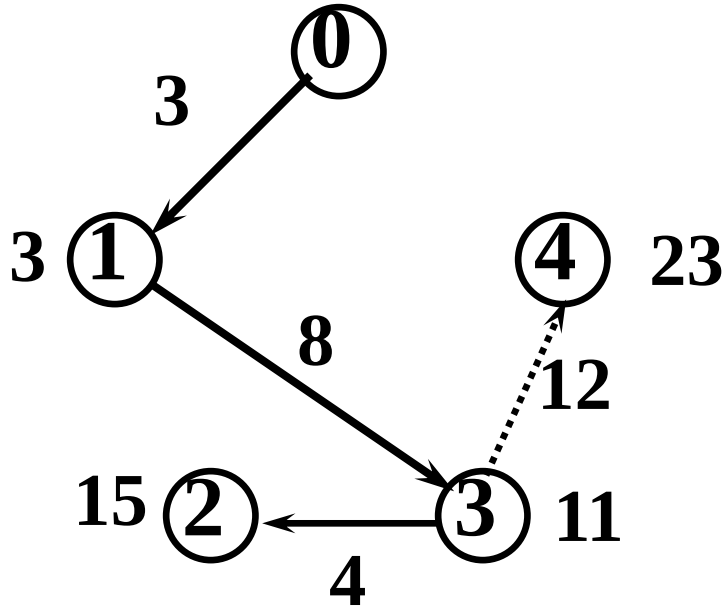
	0	1	2	3	4
s	1	1	0	0	0
dist	0	3	28	11	30
path		v_0	v_1	v_1	v_0



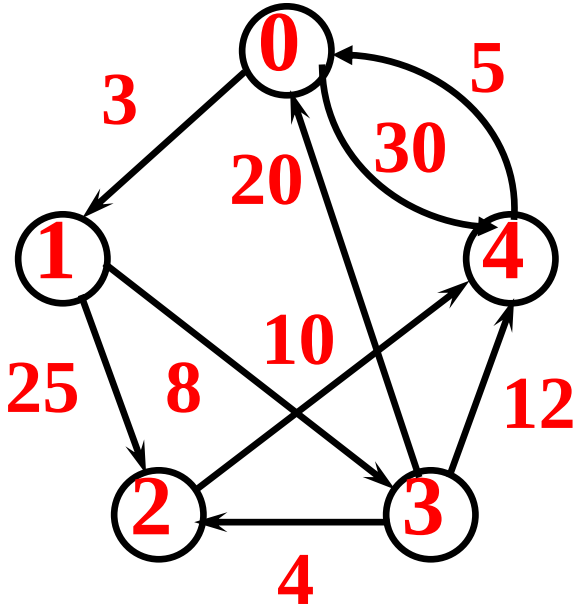


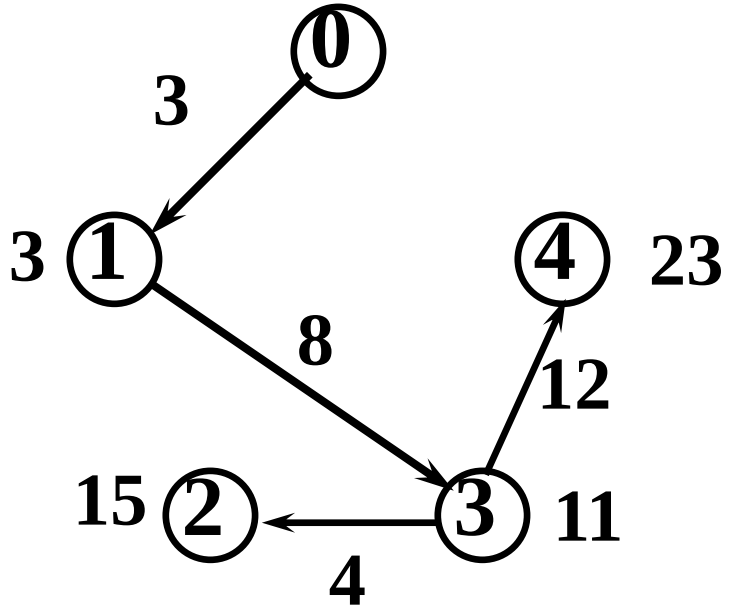
	0	1	2	3	4
s	1	1	0	1	0
dist	0	3	15	11	23
path		v_0	v_3	v_1	v_3





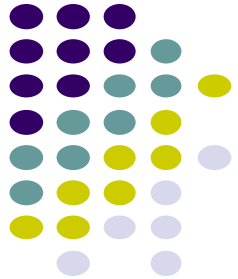
	0	1	2	3	4
s	1	1	1	1	0
dist	0	3	15	11	23
path		v_0	v_3	v_1	v_3





	0	1	2	3	4
s	1	1	1	1	1
dist	0	3	15	11	23
path		v_0	v_3	v_1	v_3

Dijkstra算法实现



算法DShortestPath(*v*)

/* 计算v到其他各顶点的最短路径 */

D1[初始化]

```
for( i =1 ; i <= n ; i ++){
        path[i] = -1; dist[i] = max;
        s[i] = 0; // 数组s[ i ] 记录 i 是否已计算完
 }
 dist[v] = 0;
```

D2[求从v到其他各顶点的最短路径]

```
for( j =1 ; j < n ; j ++){
        mindist = max; //循环:确定即将被访问的顶点u
        for( i =1 ; i <= n ; i ++)
            if ( dist[i] < mindist  && s[i] == 0 )
             { mindist = dist[i] ;  u = i ;}
        s[u] = 1.
        for( p = Head[u].adjacent ; p ; p = p->link ){
             k =  p -> VerAdj ;
              if (  dist[u] + cost(p) < dist[k] )  //松弛
                 { dist[k] ← dist[u] + cost(p) ;  path[k] = u; }
         }
}
```

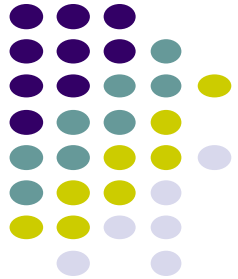
算法分析

- 时间复杂性：在**Dijkstra**算法中，循环扫描被访问顶点的边链表，时间复杂性为$O(d_u)$（d_u为顶点u的邻接顶点个数）；循环扫描顶点表求最小**dist**，时间复杂性为$O(n)$；循环体要被执行n次，因此整个算法的时间复杂性为

$$O(\sum_{i=0}^{n-1}(n+d_i)) = O(n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} d_i) = O(n^2 + e)$$

- 与存储方式无关；与边数无关

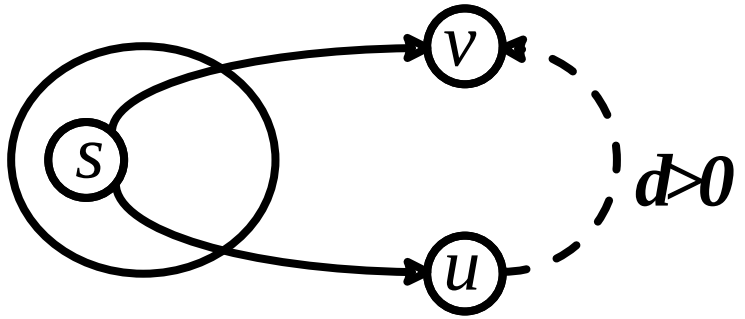
Dijkstra算法的正确性



- **定理6.4 Dijkstra算法可以按照非递减次序依次得到各顶点的最小路径长度。**

- **建议分开证：**
  - ✓ 算法得到的路径值是各顶点的最小路径长度；
  - ✓ 算法得到的路径值是按非递减次序得到的。

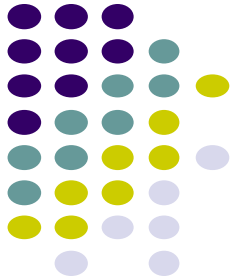
证明1:算法得到的路径值是各顶点的最小路径长度



反证法

- 分析算法可知：D_i是从s出发，仅经由S中的点得到的最短路径值。
- 假设选择v点，但D_v不是s到v的最短路径值
- 取s到v的一条最短路径，令u为这条路径上第一个不在S中的点，$D_u + d < D_v$。由于权值非负，$d \geq 0$，从而$D_u < D_v$
- 但选择v扩展而未选择u，则 $D_v \leqslant D_u$，矛盾

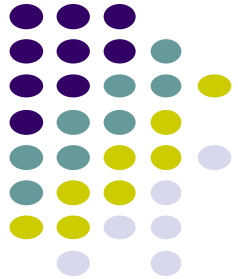
证明2:算法得到的路径值是按非递减次序得到的



数学归纳法

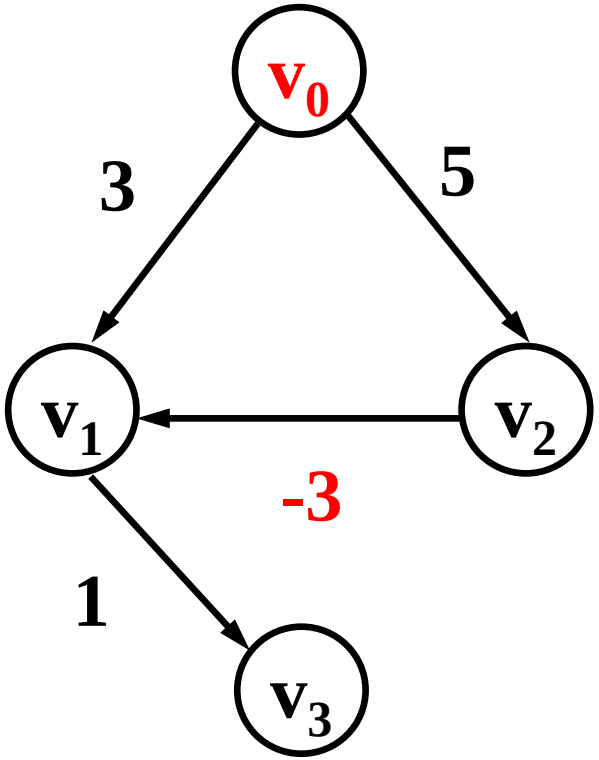
- 基础步骤
  - ✓ $D_S=0$
- 归纳步骤: 设$D_S \le D_1 \le D_2 \le \ldots \le D_k$，往证$D_k \leqslant D_{k+1}$。 $D_{k+1}= D_i + weight<i,k+1>$。
  - ✓ i=k时，显然成立
  - ✓ i<k时，先扩展k，后扩展k+1，也有$D_k \leqslant D_{k+1}$

Dijkstra算法小结

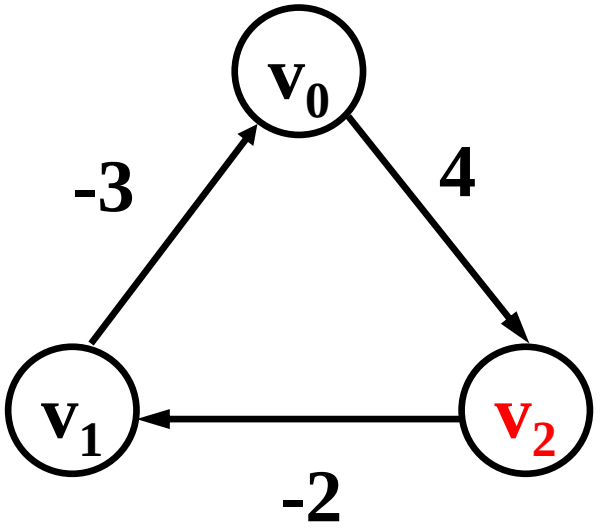


- 基于点的方法。
- 又称标记法。
- 松弛操作 **relax(u,v)**：
  - ✓ 若 D_u+weight(<u,v>) < D_v ， 则 $D_v = D_u$+ weight(<u,v>)
- 三角不等式：**δ(s,v) ≤ δ(s,u) + w(u,v)**
- 时间复杂度：**$O(n^2)$**
  - ✓ 堆优化：mlogn
- 适用条件：权值非负

负权边和负环

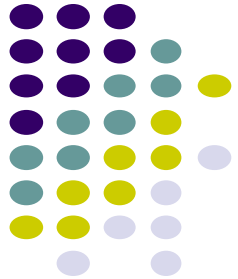


带负权边的图：
Dijkstra算法失效



带负环的图：最短路径的定义失效（怎么办?）

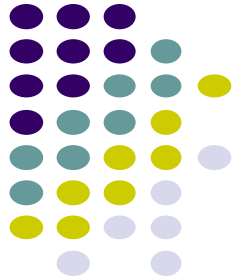
基于边的方法



- **松弛操作relax(u,v)：对有向边<u,v>，**
  - ✓ if d[v] > d[u] + w(u,v) then d[v] ← d[u] + w(u,v) 。
  - ✓ 否则，不做任何操作（已满足三角不等式）

- **基于边的方法：任取图中的一条有向边，如果能松弛，就松弛；重复做下去，直到没有边能再被松弛。**
  - ✓ 关键在于取边的方法

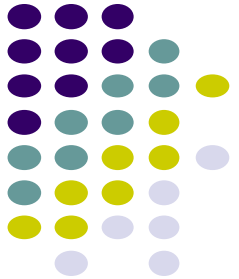
Bellman-Ford算法思想



- 对边集执行 n 遍松弛。
  - ✓ n = |V|，即图的顶点数
  - ✓ 一遍松弛：对边集的每条边都执行一次松弛操作；

- 如果第 n 遍还有边可被松弛，则判定图中存在负环；否则，已求出最短路径

Bellman-Ford算法描述



1. 初始化：

for each vertex v∈V(G) do d[v]←+∞； d[s] ←0;

2. 迭代求解：（运行|V|-1次）

```
for i=1 to |V|-1 do
    for each edge <u,v> ∈ E(G) do
        relax(u,v);
```

3. 检验负权回路：

```
for each edge（u,v）∈ E(G) do
    if d[v] > d[u] + w(u,v) then Exit false;
Exit true;
```

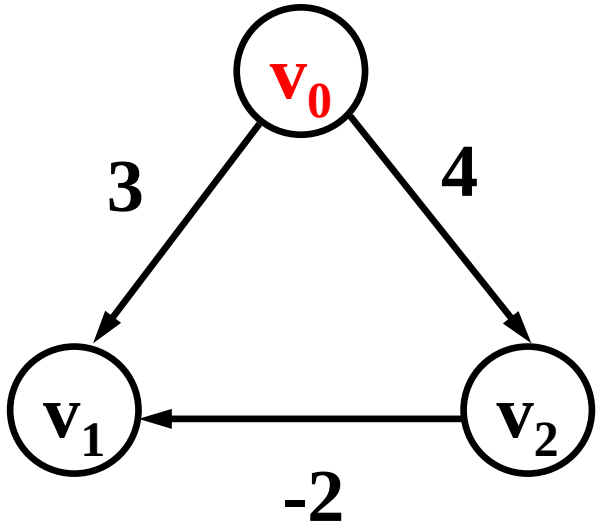
例1：带负权边的图

0	1	2
0	∞	∞

0	1	2
0	3	4

→

0	1	2
0	2	4



E = { <0, 1>,
<0, 2>, <2, 1> }

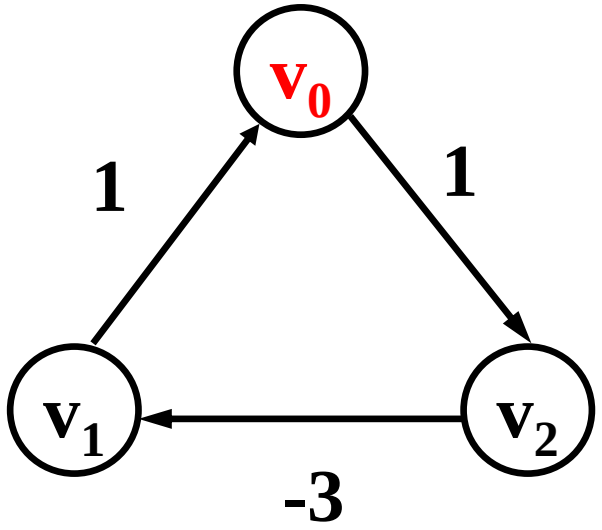
例2： 带负环的图

0	1	2
0	∞	∞

0	1	2
0	-2	1

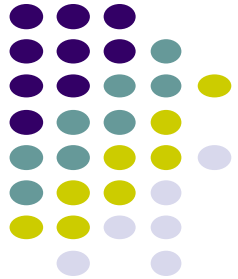
0	1	2
-1	-2	1

0	1	2
-1	-3	0



E = { <0, 2>,
<1, 0>, <2, 1> }

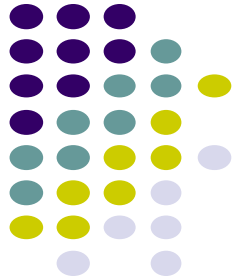
Bellman-Ford算法的正确性



- 图的任意一条最短路径既不能包含负权回路，也不会包含正权回路，因此最多包含n-1条边；

- 从源点s可达的所有顶点如果存在最短路径，则这些最短路径构成一个以s为根的最短路径树。

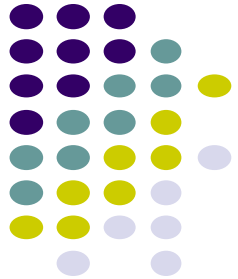
- Bellman-Ford算法的n遍迭代松弛，就是按每个顶点距离s的层次（最短路径树上的层次，不是原图的层次），逐层生成最短路径树的过程。



- 对边集进行第 1 遍松弛的时候，生成了从s出发，层次至多为1的那些树枝，也就是说，找到了与s至多有1条边相连的那些顶点的最短路径；

- 对边集进行第2遍松弛的时候，生成了第2层次的树枝，就是说找到了从s出发经过2条边相连的那些顶点的最短路径……

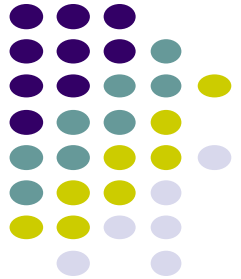
- 因为最短路径最多只包含n-1 条边，所以最多需要循环 n - 1 次。



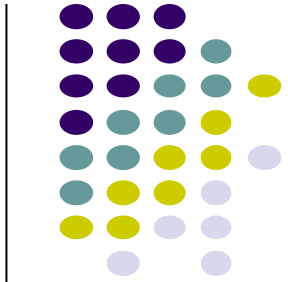
- 如果没有负权回路，由于最短路径树的高度最多只能是 n - 1，所以最多经过 n - 1遍松弛操作后，所有从s可达的顶点必将求出最短距离。如果 d[v]仍保持 +∞，则表明从s到v不可达。

- 如果有负权回路，那么第 n 遍松弛操作仍然会成功，这时，负权回路上的顶点不会收敛。

Bellman-Ford算法描述（ADL-C）



```
算法Bellmanford(s)
/*求单源最短路， s为源点，有负环false，否则true*/
B1[初始化]
    for( i = 1; i <= n ; i ++ ) d[i] = INF;
    d[s] = 0;
```



B2[迭代求解]

```
for( i = 1; i <= n-1 ; i ++ )
    for(u = 1; u <= n; u++)
        for( p = head[u].adjacent; p ; p = p->link){
            v =  p -> VerAdj ;
             if (  dist[u] + cost(p) < dist[v] )  //松弛
                    dist[v] = dist[u] + cost(p) ;
        }
```

B3 [判负环]

```
for(u = 1; u <= n; u++)
    for( p = head[u].adjacent; p ; p = p->link)
        v =  p -> VerAdj ;
        if (  dist[u] + cost(p) < dist[v] )
            return false;
return true;
```

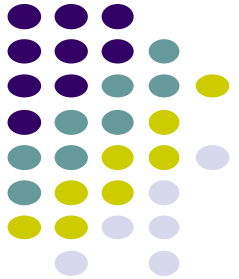
- 时间复杂性O(n * e)

Bellman-Ford算法小结

- 基于边的方法；
- 能处理负权边、判负环；
- 时间复杂度O(n*e)

- 优点是简单；缺点是效率略低。

Bellman-Ford算法的基本优化



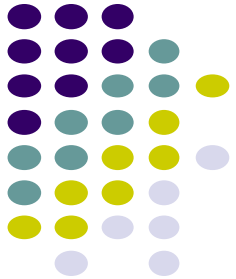
- 思想：如果在某一遍迭代中，松弛操作未执行，说明该遍迭代所有的边都没有被松弛。此后，边集中所有的边肯定都不会再被松弛，从而提前结束迭代过程。

- 设计算法时，引入松弛标识**relaxed**来实现

基本优化的算法描述

```
B2[迭代求解，引入松弛标识]
  for( i = 1; i <= n-1 ; i ++ ){
        relaxed = false;
        for(u = 1; u <= n; u++)
           for( p = head[u].adjacent; p ; p = p->link)
              v =  p -> VerAdj ;
                if (  dist[u] + cost(p) < dist[v] ) { //松弛
                       dist[v] = dist[u] + cost(p) ;
                        relaxed= true;
                }
       if (!relaxed)  break;
}
```

基本优化的算法分析

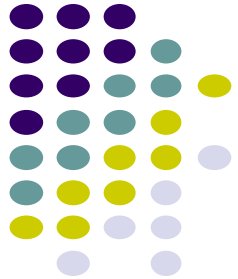


- 有研究表明，对于随机生成数据的平均情况，时间复杂度的估算公式为
  - ✓ 1.13|E|　　if |E|<|V|
  - ✓ 0.95*|E|*lg|V|　　if |E|>|V|

　　基本优化的**Bellman-Ford**算法效率和堆优化的**Dijkstra**算法效率相近。

- 在处理带负环的图时，时间复杂度仍为**O(n* e)**

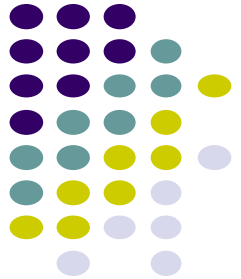
SPFA算法



- 对Bellman-Ford算法优化的关键之处在于意识到：只有那些在前一遍松弛中改变了最短路径值的点，才可能引起它们的邻接点的最短路径值的改变。
- 因此，用一个先进先出的队列来存放被成功松弛的顶点。初始时，源点s入队。当队列不为空时，取出队首顶点，对它的邻接点进行松弛。如果某个邻接点松弛成功，且该邻接点不在队列中，则将其入队。经过有限次的松弛操作后，队列将为空，算法结束。

算法实现

- 邻接表
- **queue**
- 标志数组 **mark**



SPFA

算法SPFA(v)

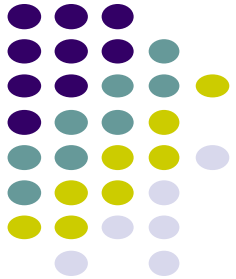
/*v为源点求单源最短路*/

S1[初始化]

```
for( i = 1; i <= n ; i ++ ) d[i] = INF;
d[v] = 0;
CreateQueue Q;
Q.insert(v);
mark[v] = 1;
```

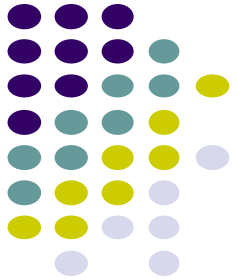
```
S2[迭代求解]
    while( ! Q.empty() ){
        u = Q.delete(); mark[u] = 0;
        for( p = head[u].adjacent; p ; p = p->link){
            k =  p -> VerAdj ;
             if (  dist[u] + cost(p) < dist[k] )  {//松弛
                dist[k] = dist[u] + cost(p) ;
                if( ! mark[k]) {Q.insert(k) ; mark[k]=1; }
            }
    }
```

分析



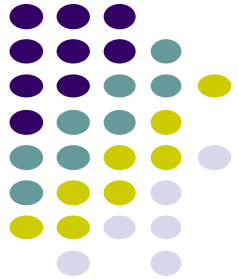
- 仅当图不存在负权回路时，SPFA能正常工作。如果图存在负权回路，由于负权回路上的顶点无法收敛，总有顶点在入队和出队往返，队列无法为空，这种情况下SPFA无法正常结束。
- 判断负权回路的方案很多
  - ✓ 记录每个结点进队次数，超过|V|次表示有负环；
  - ✓ 记录这个结点在路径中处于的位置ord[i]，每次更新的时候ord[i]=ord[x]+1，若超过|V|则表示有负环；
- SPFA的时间复杂度一般认为是 O（kE），k是常数；最坏O(VE)

总结



- 无权单源最短路使用**BFS**。
- **Dijkstra**算法是基于点的算法，常用算法，适用边权负权的单源最短路，时间复杂度$O(n^2)$。
- **Bellman-Ford**算法实现简单，时间复杂度**O(n*e)**，效率低；基本优化的**Bellman-Ford**算法相对较好；
- **SPFA**算法的期望时间复杂度**O(k*e)**，性能优秀。但如果需要判断是否存在负权回路，推荐使用基本优化的**Bellman-Ford**形式。

迷宫问题（Maze）



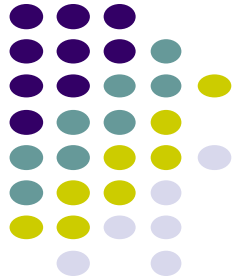
- n x m的迷宫，X代表墙，.代表空地
- 机器人起始位置sx,sy；每步走一格，上、下、左、右任意一个相邻的合法格子；
- 出口位置tx,ty
- 求机器人走出迷宫的最少步数

样例

5 X 5 迷宫

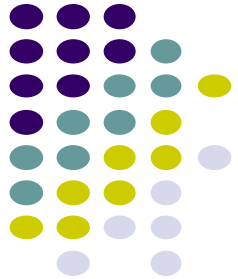
```
* * * * *
R . *O*
*  . . .*
*  . *  .*
* * * * *
```

广度优先搜索算法（BFS）



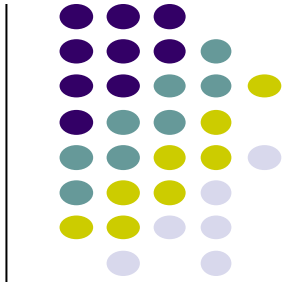
- **隐含图的广度优先搜索**
  - ✓ 状态（解）
  - ✓ 初始状态和状态扩展规则（隐含定义一个状态图）
  - ✓ 目标状态
- **适用于找最短解路径问题**
  - ✓ 最少步数、最少边数
- **如果求路径，同时要保存多条解路径。**

分析



- 机器人的初始位置(sx,sy)花费0步即可到达；
- 利用(sx,sy)，检查花费1步到达的格子；
- 利用1步到达的格子，检查花费2步到达的格子；
- ……
- 如此下去，直到到达出口位置，或能访问的格子都被访问过

- 性质：每个格子可能被多次访问；但第一次访问时是最小的花费步数；



- 步数矩阵：保存每个格子的最小花费步数，与迷宫同样大小；(sx,sy)设为0；空地设为-1；墙设为无穷大；
- 队列：按步数的大小依次保存访问过的位置；访问过的位置不再进队
- 算法结束时(tx,ty)中的步数即为所求

BFS算法核心

```
q.insert((sx,sy));map[sx][sy] = 0;
while( ! q.empty() ){
    ( x,y ) = q.delete();
    for( i = 0;i < 4; i++ ) {
        nx = x + dx[i],ny = y + dy[i];
        if( check( nx , ny ) ) {
            map[nx][ ny] = map[x][ y] + 1;
            q.insert ( (nx, ny) );
            //if (nx == tx && ny==ty) …
        }
    }
}
```

BFS算法框架

```
void bfs(){
    初始状态S入队Q.
     while(Q不空) {
          队首出队，置为当前状态S.
          if(当前状态S==目标状态T) break.

          for  each S的可扩展状态Si  do{
             if (Si满足约束条件)  Si入队
           }
      }
}
```