微积分AIII

第一次作业

学院______________ 班级______________ 姓名______________ 学号____________

一、单项选择题

1. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 则 $\oint_L (x+y)^2 \mathrm{d}s = (\qquad)$.

(A) $2\pi a^2$; (B) $2\pi a^3$; (C) πa^4; (D) $2\pi a^4$.

2. 设 Γ 为螺旋线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 在 $0\leqslant t\leqslant \pi$ 上的一段.则 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z)\mathrm{d}s = (\qquad)$.

(A) $\sqrt{2}(\pi+\pi^2)$; (B) $\pi+\pi^2$; (C) $\pi+\dfrac{\pi^2}{2}$; (D) $\sqrt{2}\left(\pi+\dfrac{\pi^2}{2}\right)$.

3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$, Σ_1 为 Σ 在第一卦限中的部分, 则有$(\qquad)$.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$; (B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$;

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$; (D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$.

4. 设 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,则 $\oint_\Gamma 3xy\mathrm{d}s = (\qquad)$.

(A) $-\pi R^3$; (B) $-2\pi R^3$; (C) πR^3; (D) $2\pi R^3$.

5. 密度为 1 的均匀圆柱面 $x^2+y^2=1, 0\leqslant z\leqslant 3$ 对于直线 $x=y=z$ 的转动惯量为 $(\qquad)$.

(A) 7π; (B) 24π; (C) 18π; (D) 6π.

二、填空题

1. 设 L 为以 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 为顶点的三角形的周界, 则 $\oint_L (x+y)\mathrm{d}s =$ ______________.

2. 设 Σ 为 Oyz 平面上的圆域 $y^2+z^2\leqslant 1$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} [x+(y^2+z^2)]\mathrm{d}S =$ ______________.

3. 设 Σ 为平面 $\dfrac{x}{2}+y+z=1$ 在第一卦限的部分,则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}(x+2y+2z+4)\mathrm{d}S=$ ______________.

4. 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 Oxy 平面及柱面 $z=R+\dfrac{x^2}{R}$ 之间的面积为______________.

5. 设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 在 $0\leqslant z\leqslant h$ 之间的部分,则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=$ ______________.

三、计算题

1. 计算 $\displaystyle\oint_{\Gamma}(\sqrt{2y^2+z^2}+y^2)\mathrm{d}s$, 其中闭曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $y=x$ 的交线.

2. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分,计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$.

3. 计算 $y=\sqrt{x}, x=1$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积和表面积.

4. 求密度分布均匀的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)(z\leqslant 2)$ 的质心.

第二次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 L 是椭圆 $4x^2+y^2=8x$ 的正向边界, 则曲线积分 $\oint_L \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=(\qquad)$.

(A) 2π; (B) π; (C) 1; (D) 0.

2. 设曲线 Γ 为从原点 $(0,0,0)$ 到点 $(1,1,1)$ 的线段,则将第二型曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化为第一型曲线积分为( ).

(A) $\int_\Gamma (P+Q+R)\mathrm{d}s$; (B) $\frac{1}{3}\int_\Gamma (P+Q+R)\mathrm{d}s$;

(C) $\sqrt{3}\int_\Gamma (P+Q+R)\mathrm{d}s$; (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}\int_\Gamma (P+Q+R)\mathrm{d}s$.

3. 当 $x>0,y>0$ 时, $\frac{(x+ay)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x+y)^2}$为某函数的全微分, 则 $a=(\qquad)$.

(A) -1; (B) 0; (C) 2; (D) 1.

4. 设曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0)=0$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=(\qquad)$.

(A) 1; (B) $\frac{3}{4}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{3}{8}$.

5. 设曲线 $L: f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第II象限内的点 M 和第IV 象限内的点 N, Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧,则下列积分小于零的是( ).

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$; (B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$; (C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$; (D) $\int_\Gamma f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$.

二、填空题

1. 设 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到点 $B(-1,1)$, 再沿直线到点 $C(0,2)$ 的曲线, 则 $\int_L y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=$____________.

2. 设 L 为$x^2+(y-1)^2=4$ 正向一周, 则 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}=$____________.

3. 设 L 为封闭折线 $|x|+|x+y|=1$ 正向一周, 则 $\oint_L x^2y^2\mathrm{d}x-\cos(x+y)\mathrm{d}y=$

______________.

4. 设 L 为以 $A(1,0),B(0,1)$ 及 $C(-1,0)$ 为顶点的三角形的正向边界曲线, 则 $\oint_L |y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y=$______________.

5. 一质点在变力 $\boldsymbol{F}=\left(\dfrac{y}{3},-x,x+y+z\right)$ 的作用下, 从 $A(1,0,0)$ 沿直线运动到 $B(3,3,4)$. 则力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功为______________.

三、计算题

1. 计算 $\int_\Gamma (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为从点 $A(1,0,0)$沿圆柱螺旋线 $x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=\theta$ 到点 $B(1,0,2\pi)$ 的弧段.

2. 计算 $\int_L \left(y+\dfrac{\mathrm{e}^y}{x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\ln x\mathrm{d}y$. 其中 L 是半圆周 $x=1+\sqrt{2y-y^2}$ 上从点 $(1,0)$ 到点 $(2,1)$ 的一段弧.

3. 证明 $(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 求一个 $u(x,y)$, 并计算 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$.

4. 计算 $I=\displaystyle\int_L[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$, 其中 L 为连接点 $A(\pi,2)$ 与 $B(3\pi,4)$ 的线段之下方的任意路线从 A 到 B 方向.且该路线与 AB 所围成的面积为 2, $\varphi(y)$ 具有连续的导数.

5. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + 2y^2}$, 其中 L 为 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 的正向边界.

第三次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 Σ 是 Oxy 面上的圆域 $x^2+y^2 \leqslant 1$, 取上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = (\quad)$.

(A) $\dfrac{2\pi}{3}$; (B) $\dfrac{\pi}{2}$; (C) 0; (D) $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. 设曲面 Σ 为 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的下侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{6}$; (B) $\dfrac{1}{6}$; (C) $-\dfrac{1}{3}$; (D) $\dfrac{1}{3}$.

3. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧, 则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = (\quad)$.

(A) 0; (B) 1; (C) 2π; (D) 4π.

4. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上半部分的上侧,则下列结论不正确的是( ).

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$; (B) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;

(C) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$; (D) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.

二、填空题

1. 设 Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧,则

$$I = \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为第一型曲面积分为_________________________.

2. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的下侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ _____________.

3. 已知三元函数 $u=u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u) =$ _____________.

4. 已知向量场$\boldsymbol{A}(M)=(xz,y^4,z^2)$, , 则$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}(M)=$______________.

三、计算题

1. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

2. 已知 Σ 为空间曲面 $x^2+y^2+z^4=1(z\geqslant 0)$ 的上侧, $f(x)$ 连续.计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[x^2+yzf(x^2-y^2)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[y^2+xzf(x^2-y^2)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[z^2+xyf(x^2-y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

4. 利用Gauss公式计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases}$ $(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

5. 利用Stokes公式计算曲线积分

$$\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 Γ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

第四次作业

学院__________ 班级__________ 姓名__________ 学号__________

一、单项选择题

1. 下列命题正确的是(   ).

(A) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(B) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leqslant 1$;

(C) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的收敛性;

(D) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ 收敛.

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必收敛的级数为(   ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛,则(   ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(C) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; (D) 当 $a_n > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛.

4. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数(   ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

5. 下列级数中绝对收敛的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$;　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;　(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{n+1}$;　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

二、填空题

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ 的和 $s=$ ______________.

2. 设 $a_1=1, \lim\limits_{n\to\infty} a_n=2021$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 的和 $s=$ ______________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}=$ ______________.

4. 当 $a\in$ ______________ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 收敛.

三、解答题

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$ 的敛散性.

2. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x$,

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值;

(2) 证明对任意的常数 $\lambda > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

3. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ 的收敛性.

4. 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 敛散性.

5. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

第五次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2+a^2}$ 的收敛域为(　　).

(A) $[-1,1]$;　　(B) $(-1,1]$;　　(C) $[-1,1)$;　　(D) $(-1,1)$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径(　　).

(A) $R=2$;　　(B) $R=\dfrac{1}{2}$;　　(C) $R=\sqrt{2}$;　　(D) $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. 2^x 展开为 x 的幂级数是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\quad x\in(-\infty,+\infty)$;　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^n}{n!}\quad x\in(-\infty,+\infty)$;

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}\quad x\in(-\infty,+\infty)$;　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x\ln 2)^n}{n!}\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛,则在 $x=-2$ 处,该级数(　　).

(A) 发散;　　(B) 条件收敛;　　(C) 绝对收敛;　　(D) 收敛性不确定.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1, \end{cases}$ $s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$, 其中 $a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$, 则 $s\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$;　　(B) $-\dfrac{1}{2}$;　　(C) $\dfrac{3}{4}$;　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

二、填空题

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛区间为______________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$ 则$f^{(50)}(0)=$ ______________.

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=3$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为______________.

4. 设 $f(x)=x^2, -\pi \leqslant x \leqslant \pi, s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, 其中 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x, (n=1,2,\cdots,)$ 则 $a_3=$ ______________.

三、计算题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n4^n}(x+1)^{2n-1}$ 的收敛区间和收敛域.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n$ 的收敛域及和函数.

3. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开为 $(x-3)$ 的幂级数.

4. 设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

5. 将 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\pi-x)(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为正弦级数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

第六次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 微分方程 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(y^3+2xy)\mathrm{d}y=0$ 是(　　).

(A) 可分离变量的微分方程;　　(B) 齐次方程;

(C) 一阶线性方程;　　(D) 全微分方程.

2. 若 y_1,y_2 是方程 $y'=p(x)y+q(x)(q(x)\neq 0)$ 的两个解,要使 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是该方程的解, 则 α,β 应满足关系式(　　).

(A) $\alpha+\beta=1$;　　(B) $\alpha+\beta=0$;　　(C) $\alpha\beta=1$;　　(D) $\alpha\beta=0$.

3.微分方程 $y'+\dfrac{\mathrm{e}^{y^2+3x}}{y}=0$ 的通解是(　　).

(A) $2\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{y^2}=C$;　　(B) $2\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{-y^2}=C$;

(C) $2\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^{-y^2}=C$;　　(D) $\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-y^2}=C$;

4. 设曲线积分 $\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数. $f(0)=0$, 则 $f(x)=$ (　　).

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$;　　(B) $\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$;　　(C) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}-1$;　　(D) $1-\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

5. 微分方程 $(x+2y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(1)=0$ 的特解为(　　).

(A) $x+y=x^2$;　　(B) $x-y=x^2$　　(C) $x+2y=x^2$;　　(D) $x-2y=x^2$.

二、填空题

1. 微分方程 $\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x-(2y+x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=0$ 的通解为____________.

2. 已知曲线 $y=y(x)$ 经过点 $(1,\mathrm{e}^{-1})$, 且点 (x,y) 处的切线在 y 轴上的截距为 xy, 则 $y(x)=$ ____________.

3. 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且满足方程 $f(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{d}t$, 则 $f(x)=$ ____________.

4. 方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$ 的通解为____________.

5. 微分方程 $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解为______________.

三、解答题

1. 求微分方程 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的通解.

2. 求微分方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的特解.

3. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且满足方程 $f(t)=t^2+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 求 $f(t)$ 的表达式.

4. 设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x), \text{ 且 } f(0)=0,\ f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

第七次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是(　　).

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;　　(B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$;　　(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

2. 常微分方程 $y'' + y = 3x^2 + 2\sin x$ 的特解形式可设为(　　).

(A) $y^* = x(ax^2 + bx + c) + (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$;

(B) $y^* = A\sin x + B\cos x + x(ax^2 + bx + c)$;

(C) $y^* = ax^3 + bx^2 + cx + d + (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$;

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + Ax\sin x$.

3. 已知 $y_1 = \cos 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x, y_2 = \sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$ 是某二阶常系数非齐次微分方程的两个解, $y_3 = \cos 2x$ 是它所对应的齐次方程的一个解, 则该微分方程是(　　).

(A) $y'' + 4y = \sin 2x$;　　(B) $y'' + 4y = \cos 2x$;

(C) $y'' + y = \sin 2x$;　　(D) $y'' + y = \cos 2x$.

4. 方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的通解为(　　).(C_1, C_2 为任意常数.)

(A) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$;　　(B) $(C_1 + C_2x)\mathrm{e}^x$;

(C) $y = C_1x + C_2x^2$;　　(D) $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2x$.

二、填空题

1. 微分方程 $x^2y'' = 2x^2 - 1$ 的通解为______________.

2. 微分方程 $xy'' + y' = 4x$ 的通解为______________.

3. 微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解为______________.

4. 微分方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$ 的通解为______________.

5. 以 $y=2\mathrm{e}^{x}\cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程为______________.

三、计算题

1. 求微分方程 $x^2y''=(y')^2+2xy'$ 的通解.

2. 求微分方程 $y'''-8y=24x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

3. 微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{x}$ 的某一积分曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^{2}-x+1$ 在该点的切线重合. 求 $y(x)$ 的表达式.

4. 设 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^{2}x}{\mathrm{d}y^{2}}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{3}=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

5. 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶连续导数,曲线积分

$$\oint_L [y^2 f(x) + 2y\mathrm{e}^x + 2yg(x)]\mathrm{d}x + 2[yg(x) + f(x)]\mathrm{d}y = 0,$$

其中 L 为平面上任一简单封闭曲线.

(1) 求 $f(x), g(x)$, 使 $f(0) = g(0) = 0$;

(2) 计算沿任一条曲线从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 点的积分.