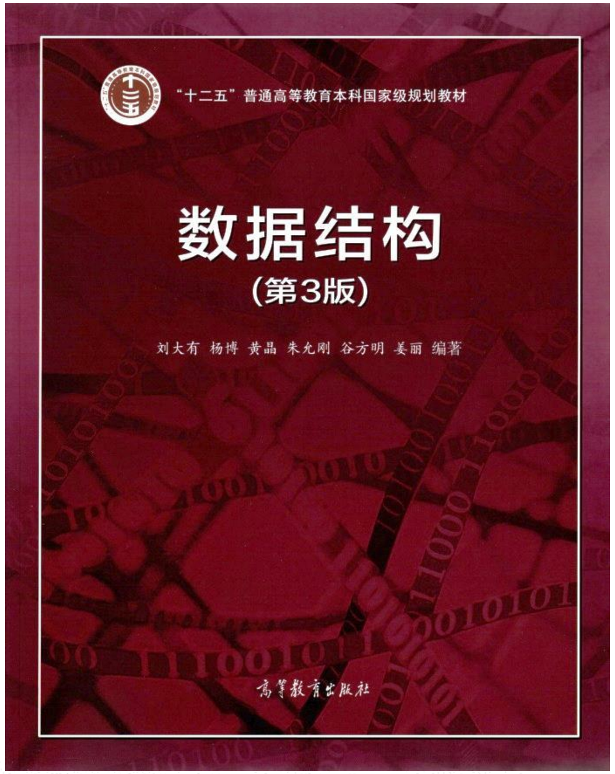
计算机学院王湘浩班
2024级



拓扑排序和关键路径

- 拓扑排序
- 关键路径

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2025.5

zhuyungang@jlu.edu.cn

毛啸
麻省理工学院17级本科/21级硕士
斯坦福大学22级博士生
2016年NOI全国中学生信息学奥赛决赛第1名
2017年IOI世界中学生信息学奥赛银牌
2022年ICPC国际大学生程序设计竞赛全球总决赛冠军
国际顶级会议FOCS 2021最佳学生论文奖

我深知我写代码非常容易出错，经常调错调半天。

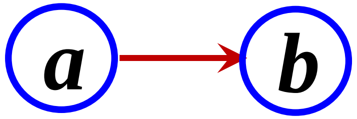
当你试图解决一个问题时，应该先独立思考。如果实在没有思路，那么应该去一点一点的读别人的题解，而不是一次性都读完，尽可能确保能有更多的部分是你自己做出来的。之后仔细思考一下，为什么你会想不出来依赖于题解解决的那些部分。Think twice, code once。

拓扑排序——动机

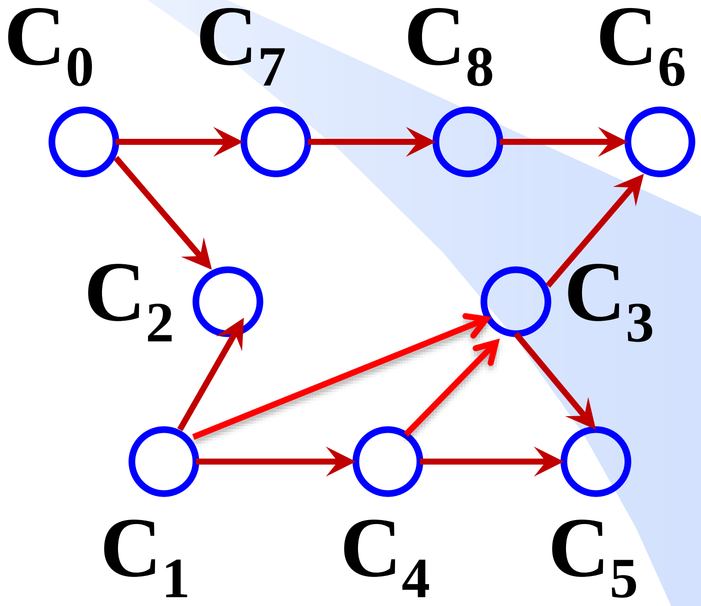
A

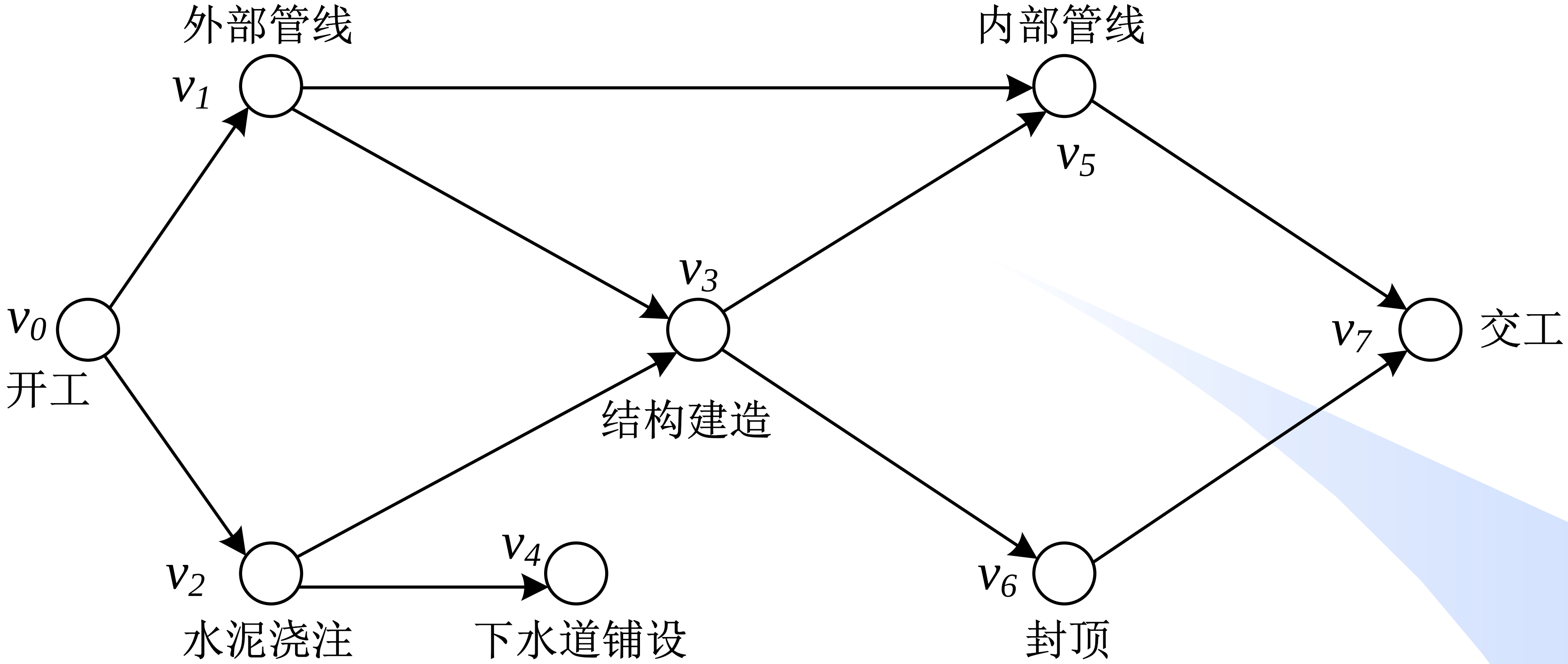
- 一个任务（例如一个工程）通常可以被分解成若干个子任务，要完成整个任务就可以转化为完成所有的子任务。
- 在某些情况下，各子任务之间有序，要求一些子任务必须先于另外一些子任务被完成。
- 各任务之间的先后关系可以用有向图来表示。
- 例：计算机专业学生的学习就是一个任务，每一门课程的学习就是整个任务的一个子任务。其中有些课程要求先修课程，有些则不要求。这样在有的课程之间有先后关系，有的课程可以并行地学习。

计算机专业部分课程的先后关系



课程代号	课程名称	先修课程
C_0	高等数学	无
C_1	程序设计基础	无
C_2	离散数学	C_0,C_1
C_3	数据结构	C_1,C_4
C_4	C++语言	C_1
C_5	编译原理	C_3,C_4
C_6	操作系统	C_3,C_8
C_7	大学物理	C_0
C_8	计算机原理	C_7

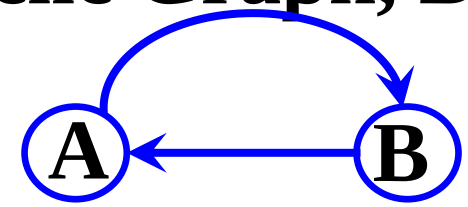




例：建楼工程示意图，图中V_3 必须在V_1和V_2被完成后才能开始；V_4必须在V_2被完成后才能开始；V_5必须在V_1和V_3被完成后才能开始；V_6必须在V_3被完成后才能开始；V_5和V_6最后被完成时才能说整个工程可以交工。

AOV网

- **AOV网**：在有向图中，**顶点表示活动**（或任务），有向边表示活动（或任务）间的先后关系，称这样的有向图为**AOV网(Activity On Vertex Network)**。
- 在AOV网络中，如果活动V_i必须在活动V_j之前进行，则存在有向边 $V_i \rightarrow V_j$.
- AOV网络中**不能出现有向回路**，即有向环。在AOV网络中如果出现了有向环，则意味着某项活动应以自己作为先决条件，此图表示的任务是不可行的。即AOV网是一个有向无环图（Directed Acyclic Graph, DAG）



拓扑排序——动机

A

- **拓扑序列：** 就是把AOV网中的所有顶点排成一个线性序列，若AOV网中存在有向边 $V_i \rightarrow V_j$ ，则在该序列中，V_i必位于V_j之前。

在拓扑序列中，先进行的任务一定在后进行的任务的前面。按照拓扑序列完成各子任务，就可以顺利完成整个任务。

- **拓扑排序：** 构造AOV网的拓扑序列的过程被称为拓扑排序。
- 如果通过拓扑排序能将有向图的所有顶点都排入一个拓扑序列中，则该有向图中必定不含环；相反，若不能把所有顶点都排入一个拓扑序列，则说明有向图中存在环。

A

拓扑排序算法基本步骤：

① 从图中选择一个入度为0的顶点并输出。

② 从图中删除该顶点及该顶点引出的所有边。

③ 执行①②，直至所有顶点已输出，或图中剩余顶点入度均不为0（说明存在环，无法继续拓扑排序）。

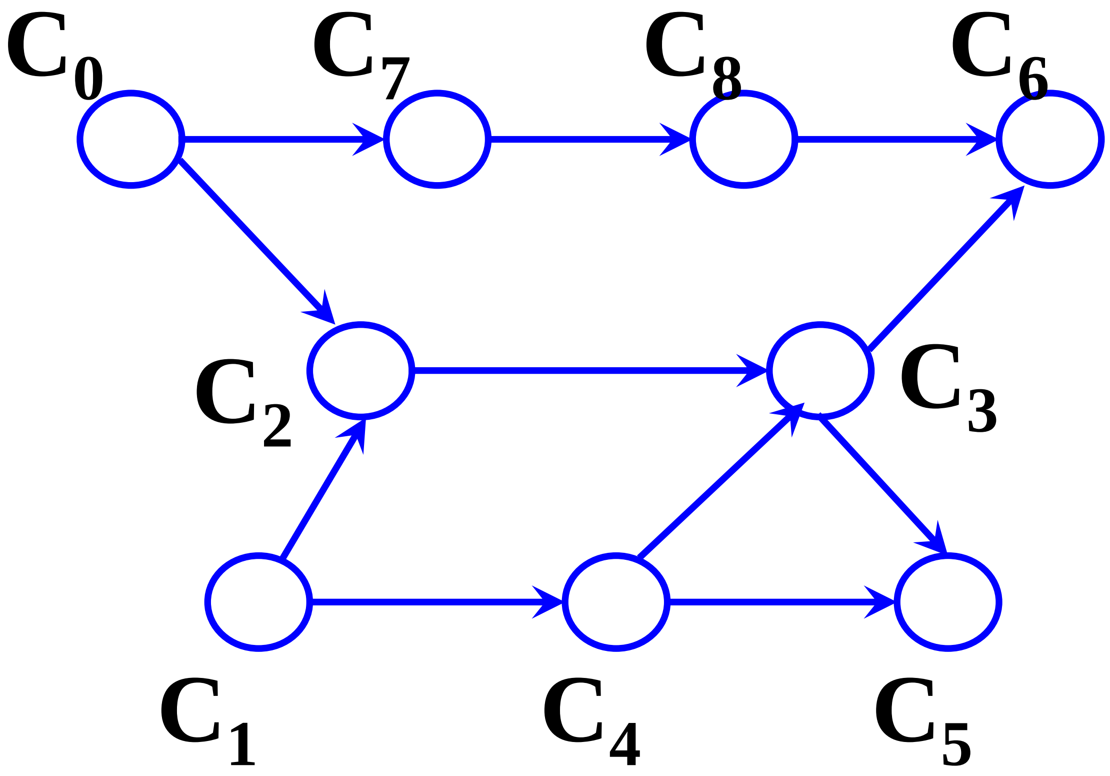
对于任何无环的AOV网，其顶点均可排成拓扑序列，其拓扑序列未必唯一。

Kahn. Topological sorting of large networks. *Communications of the ACM*, 1962, 5 (11): 558–562.

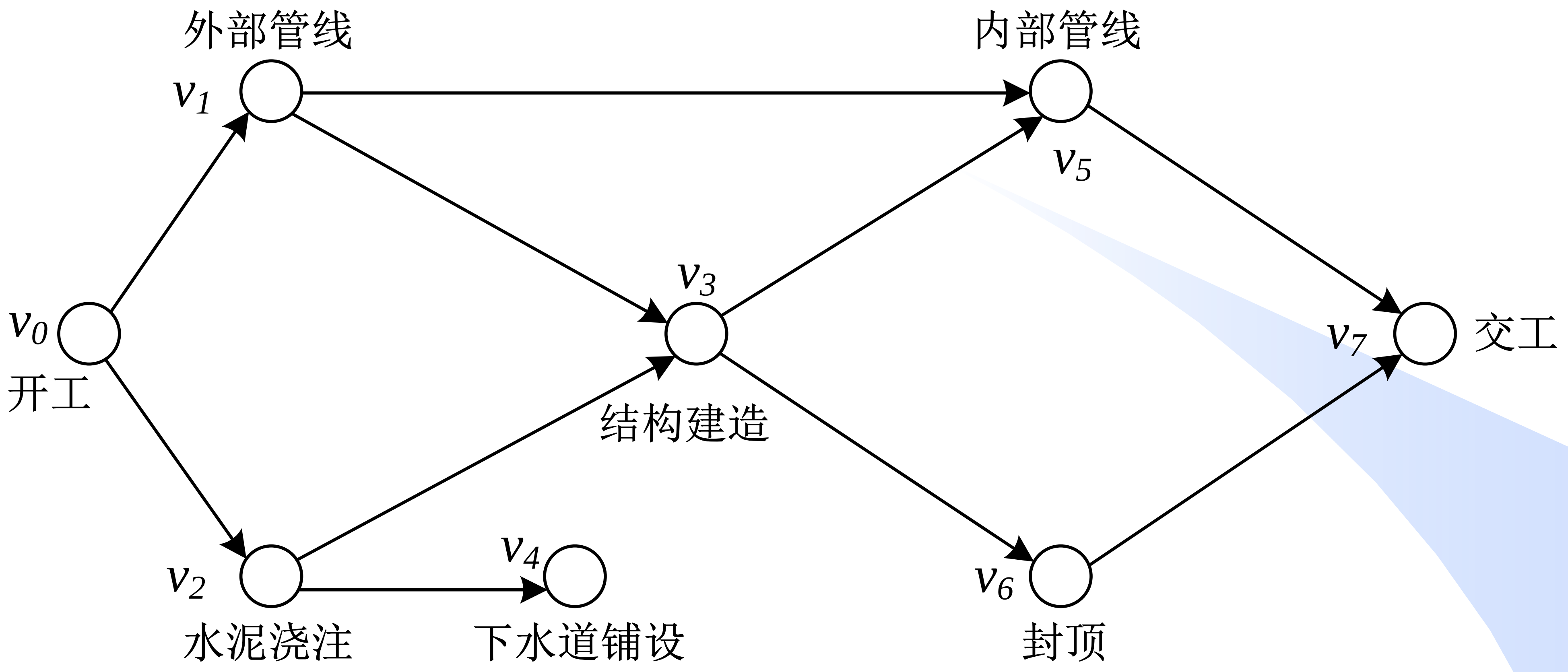
例：对下图进行拓扑排序，得到的拓扑序列为

$C_0, C_1, C_2, C_4, C_3, C_5, C_7, C_8, C_6$

或 $C_0, C_7, C_8, C_1, C_4, C_2, C_3, C_6, C_5$ 等



A



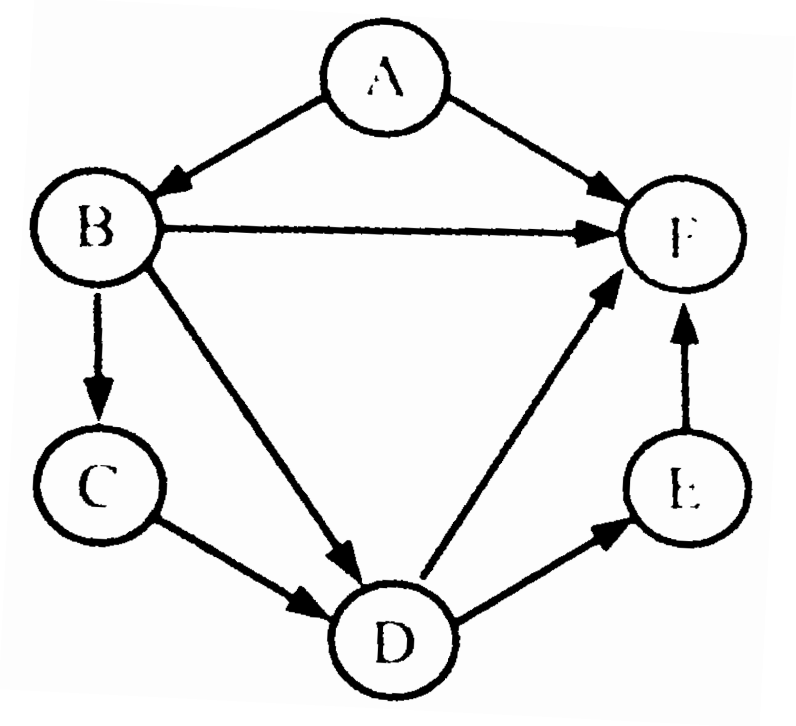
$V_0,V_1,V_2,V_4,V_3,V_5,V_6,V_7$ 和
$V_0,V_2,V_4,V_1,V_3,V_6,V_5,V_7$ 均是上图的拓扑序列。

课下思考

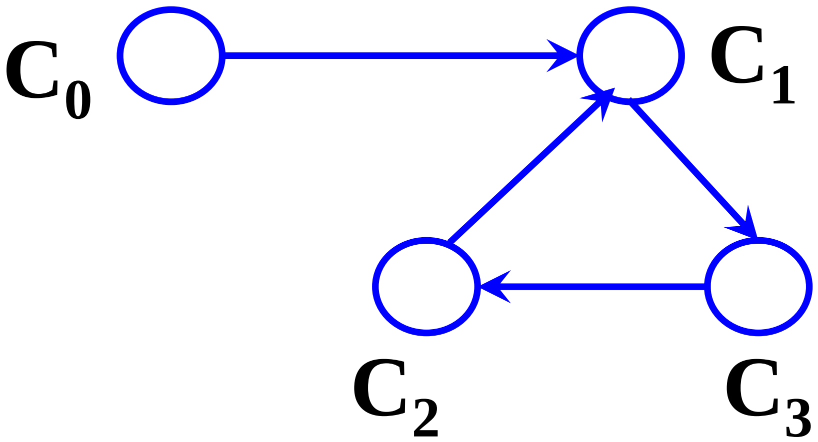
A

给定如下有向图，该图的拓扑序列的个数为______【2021年考研题全国卷】

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



拓扑排序判断有向图中是否含有环



拓扑排序的实现——准备工作

A

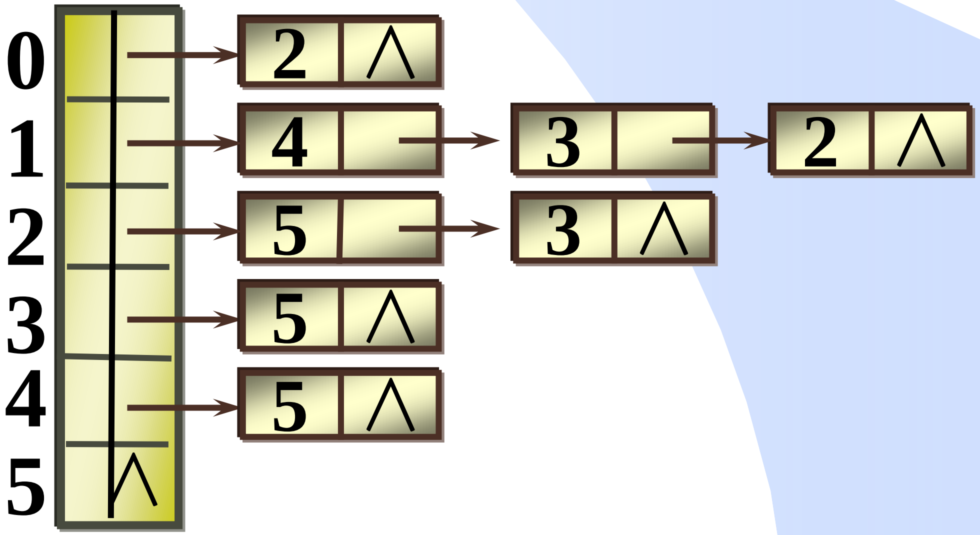
- 假定AOV网以邻接表的形式存储。为实现拓扑排序算法，事先需好两项准备工作：
- 建立一个数组InDegree[ ]：InDegree[*i*]为顶点*i*的入度；
- 建立一个栈存放入度为0的顶点：每当一个顶点的入度为0，就将其压栈；每次找入度为0的顶点时，就弹栈。

课下思考：用队列可以么？

回顾：求每个顶点的入度

A

```
void getInDegree(Vertex Head[], int n, int InDegree[]){
    for(int i=0; i<n; i++)
        InDegree[i]=0;
    for(int i=0; i<n; i++) //用i扫描每个顶点
        for(Edge* p=Head[i].adjacent; p!=NULL; p=p->link)
            InDegree[p->VerAdj]++;
}
```

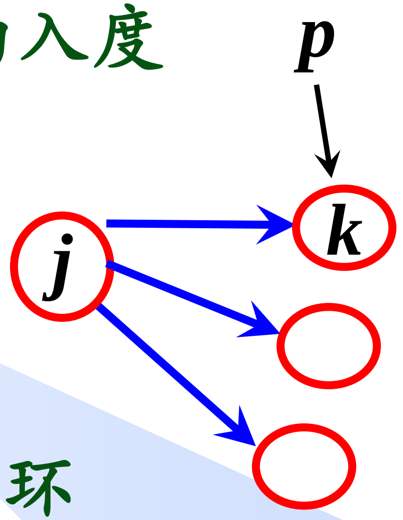


InDegree

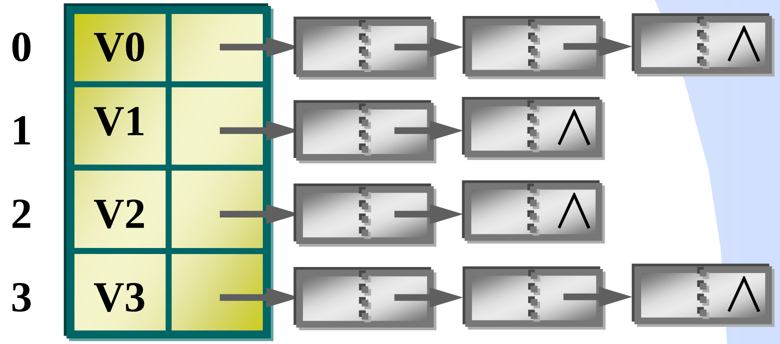
0	1	2	3	4	5

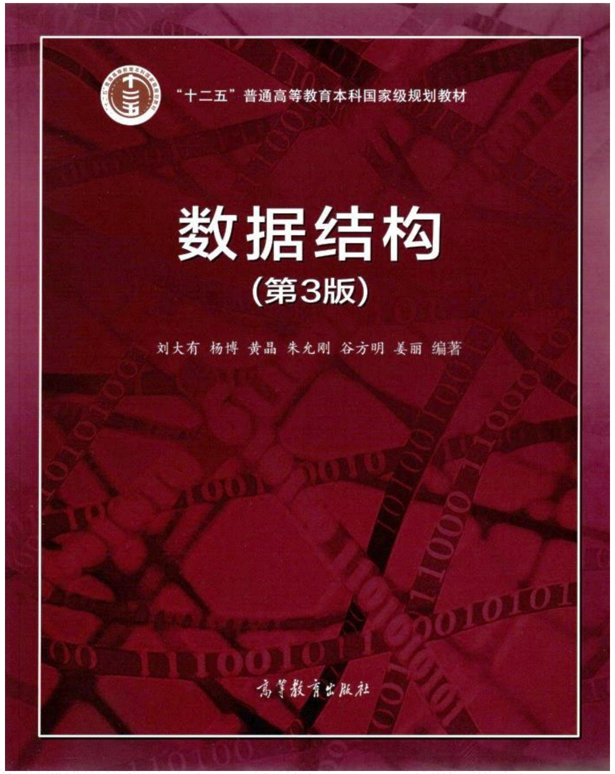
B

```
bool TopoOrder(Vertex Head[], int n){
    int InDegree[N]; Stack<int> s;
    getInDegree(Head, n, InDegree);  //求每个顶点的入度
    for(int i=0; i<n; i++)   //入度为0的顶点进栈
        if(InDegree[i]==0) s.PUSH(i);
    for(int i=0; i<n; i++){  //按拓扑序输出n个顶点
        if(s.Empty()) return false;
        //尚未输出n个顶点就没有入度为0的顶点了, 说明有环
        int j=s.POP(); printf("%d ",j);//选出1个入度为0的顶点输出
        for(Edge *p=Head[j].adjacent; p!=NULL; p=p->link){
            //删除j和j引出的边, 其效果是j的邻接顶点的入度减1
            int k=p->VerAdj; InDegree[k]--; //顶点k的入度减1
            if(InDegree[k]==0) s.PUSH(k);
        }
    }
    return true;
}
```



时间复杂度为$O(n+e)$





图的拓扑排序与关键路径

- 拓扑排序
- **关键路径**

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2025.5

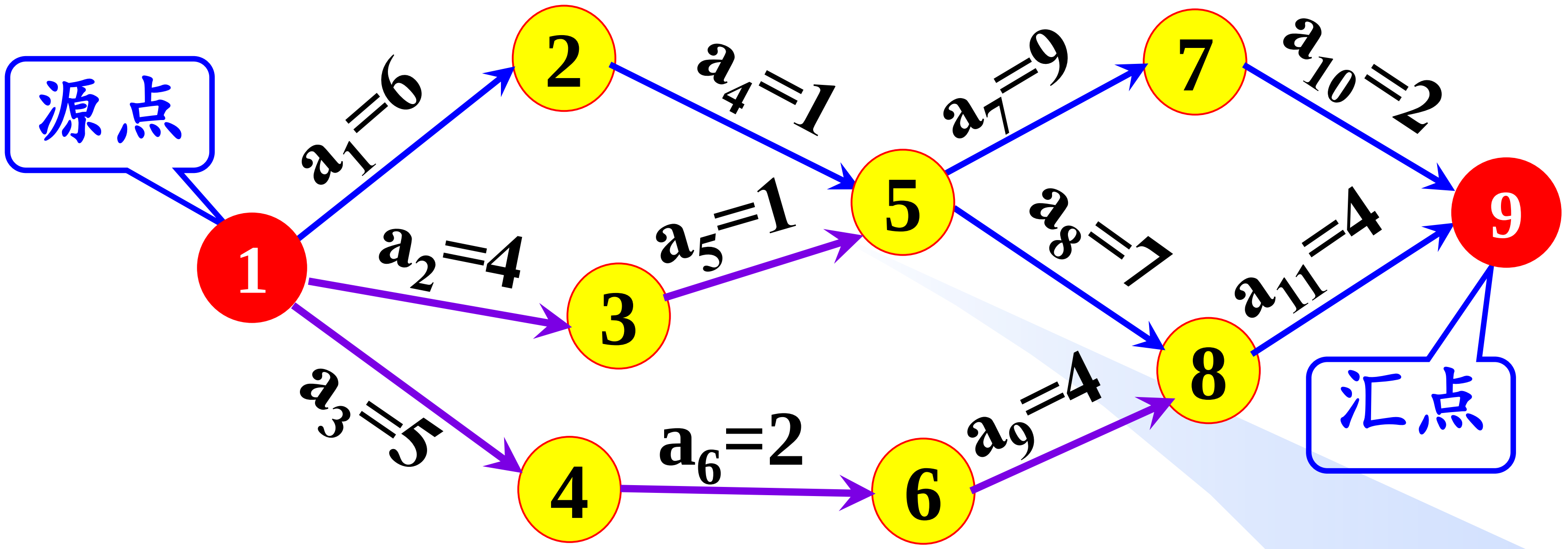
zhuyungang@jlu.edu.cn

关键路径

A

- AOV网(Activity On Vertex):顶点表示活动或任务(Activity),有向边表示活动（或任务）间的先后关系。
- AOE网(Activity On Edges):有向边表示活动或任务(Activity)，用边上的权值表示活动的持续时间，顶点称为事件(Event):表示其入边的任务已完成，出边的任务可开始的状态。

[例] 某工程



- 源点：表示整个工程的开始(入度为0).
- 汇点：表示整个工程的结束(出度为0).

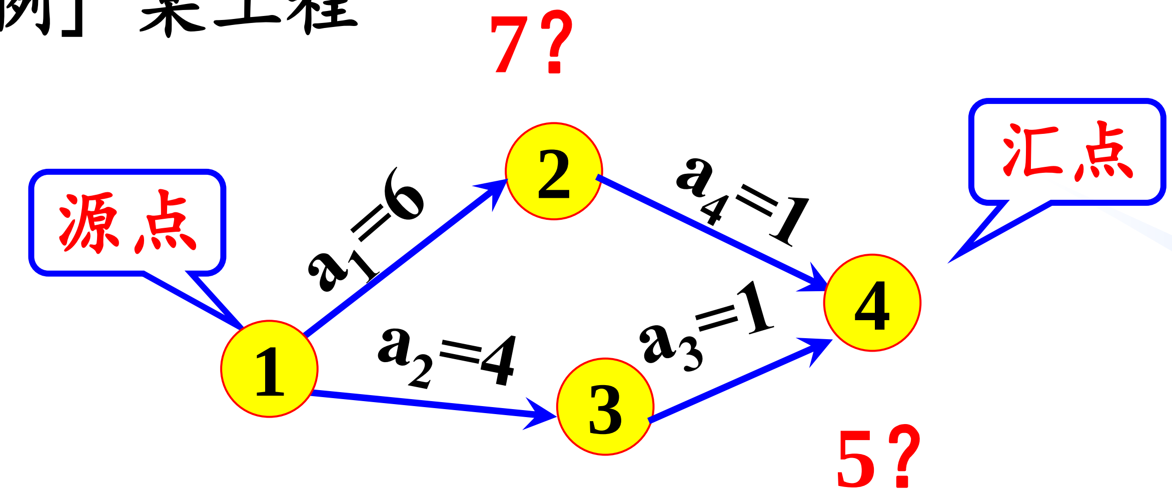
- ✓ 完成整个工程至少需要多少时间?
- ✓ 哪些活动不能延期，否则将会影响整个工程进度?
- ✓ 在不整个工程进度的情况下，哪些活动可以适当延期?

A

- 在AOE网络中，有些活动可以并行进行，但有些活动必须顺序进行。
- 从源点到各个顶点，以至从源点到汇点的路径可能不止一条。这些路径的长度也可能不同。
- 只有各条路径上所有活动都完成了，整个工程才算完成。
- 因此，完成整个工程所需的最短时间取决于从源点到汇点的最长路径长度（路径上的各边权值之和，即在这条路径上所有活动的持续时间之和）。这条最长路径就称为关键路径(Critical Path)。

A

[例] 某工程



完成工程所需的最短时间?

- 关键路径：从源点到汇点的最长路径。
- 关键活动：关键路径上的活动。

与关键活动有关的量

A

① 事件 v_j 的最早发生时间 $ve(j)$

② 事件 v_j 的最迟发生时间 $vl(j)$

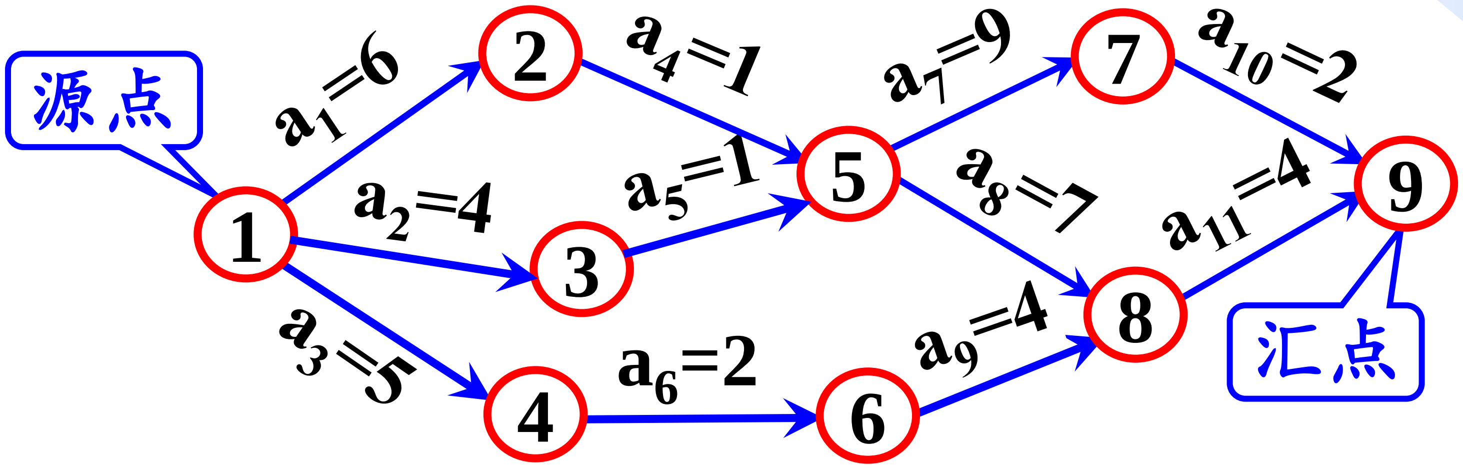
③ 活动 a_i 的最早开始时间 $e(i)$

④ 活动 a_i 的最迟开始时间 $l(i)$

① 事件v_j的最早发生时间 $ve(j)$

A

从源点 v_1 到 v_j 的最长路径的长度。显然有$ve(1)=0$

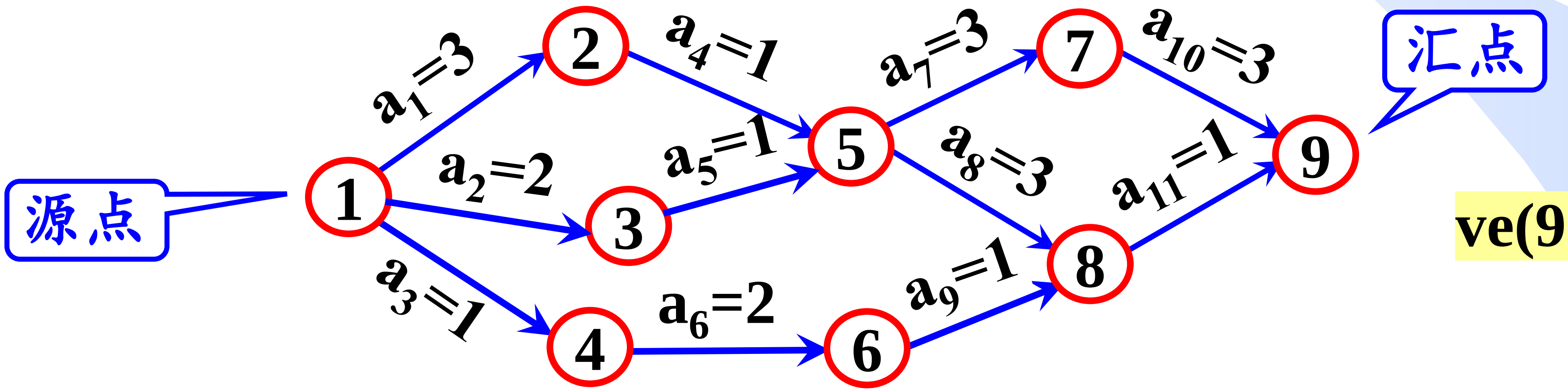


汇点的最早开始时间就是完成整个工程所需的最短时间

② 事件v_j的最迟发生时间 $vl(j)$

A

在整个工程不推迟的前提下，事件v_j允许的最迟开始时间，等于$ve(n)$减去v_j到v_n的最长路径长度，其中v_n为汇点，$vl(n)= ve(n)$。

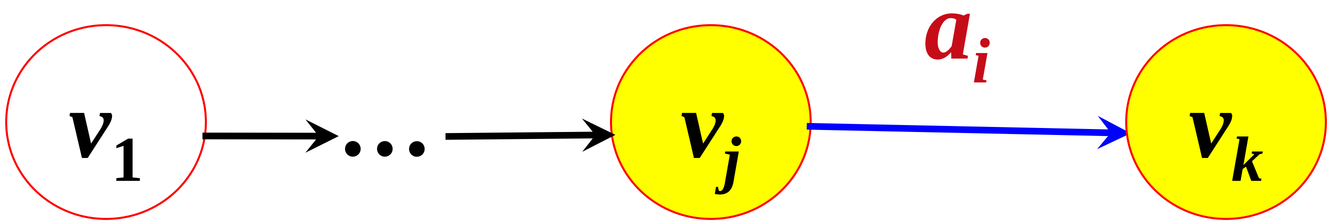


ve(9)=10

③ 活动a_i的最早开始时间 $e(i)$

A

设活动 a_i 在有向边 $v_j \rightarrow v_k$ 上，则$e(i) = ve(j)$.

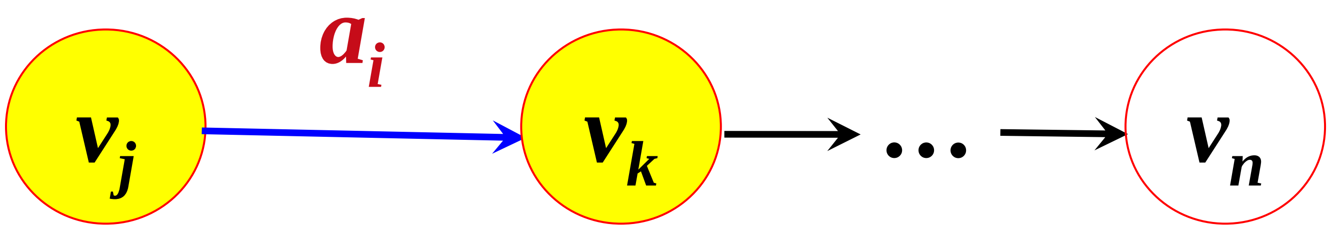


A

④ 活动a_i的最迟开始时间 $l(i)$

不会引起时间延误的前提下，活动a_i允许的最迟开始时间。设活动a_i在有向边$<v_j, v_k>$上, 则

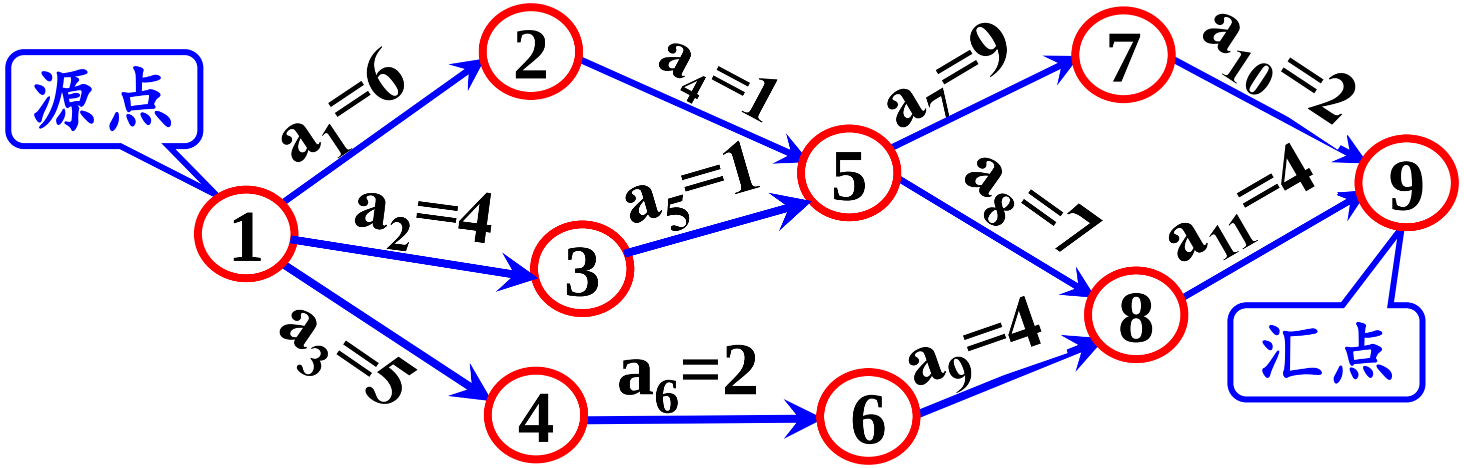
$$l(i) = vl(k) - weight(j, k)$$



关键路径与关键活动

A

- **关键活动：** 活动的最早开始时间等于活动的最迟开始时间，即 $l(i)=e(i)$.
- **关键路径：** 由关键活动组成的路径，亦即源点到汇点的最长路径，可能不止一条。



求关键活动的步骤

A

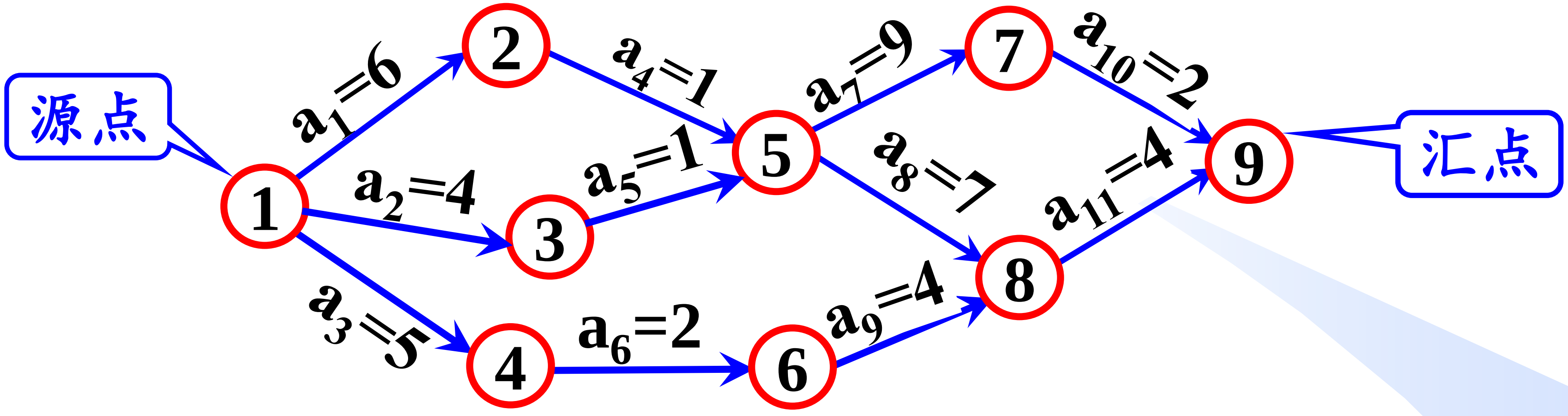
① 对AOE网求各顶点v_j的最早发生时间 $ve(j)$;

② 求各顶点 v_j 的最迟发生时间$vl(j)$;

③ 根据各顶点ve和vl值，求出各活动 a_i 的最早开始时间$e(i)$和最迟开始时间$l(i)$，若 $e(i)= l(i)$，则a_i是关键活动。

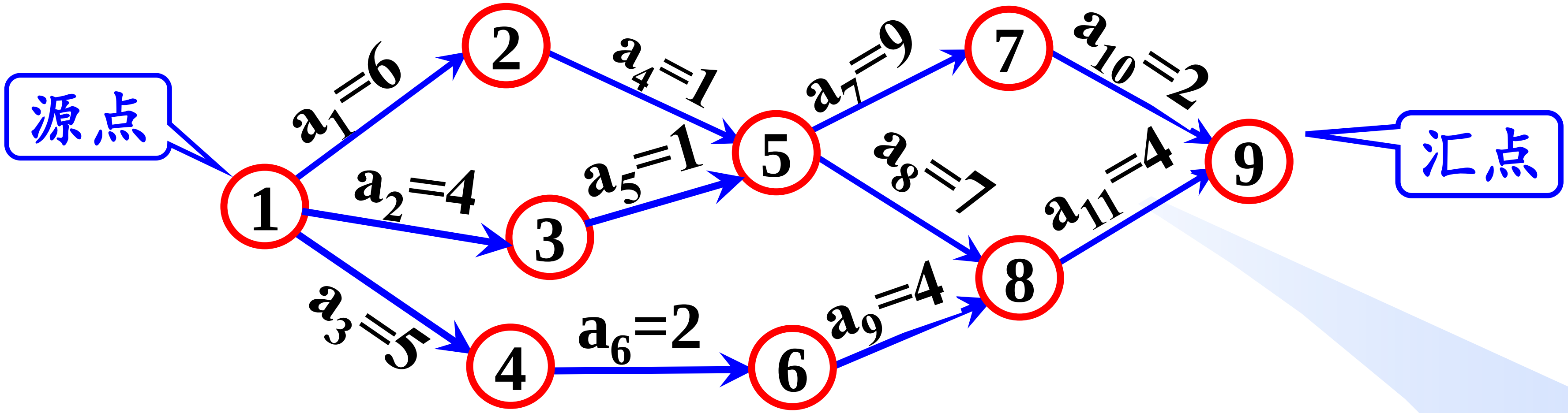
例：求下图的关键活动和关键路径

A



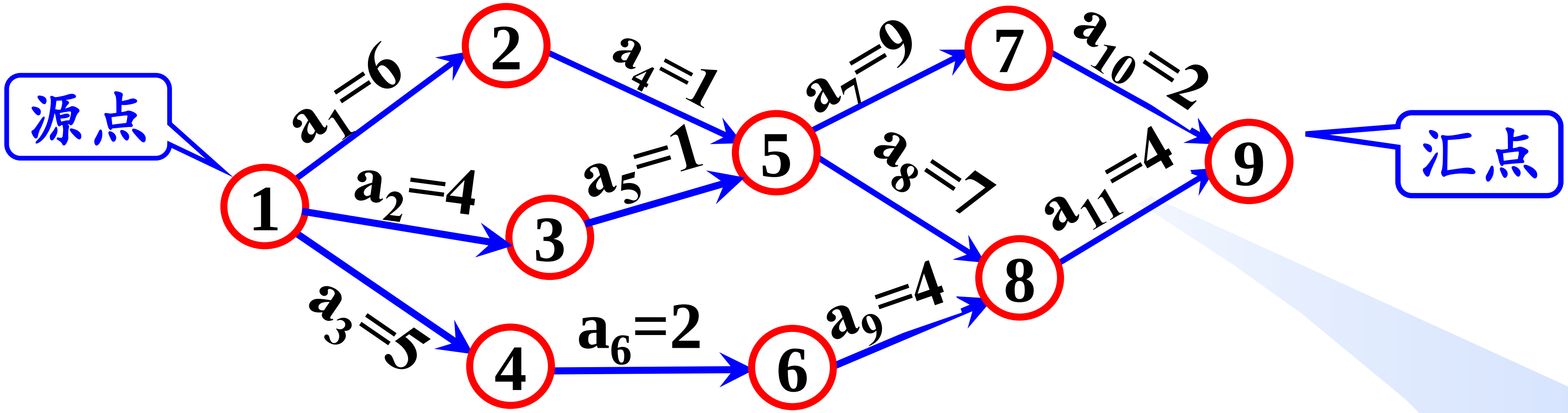
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ve									
vl									

例：求下图的关键活动和关键路径



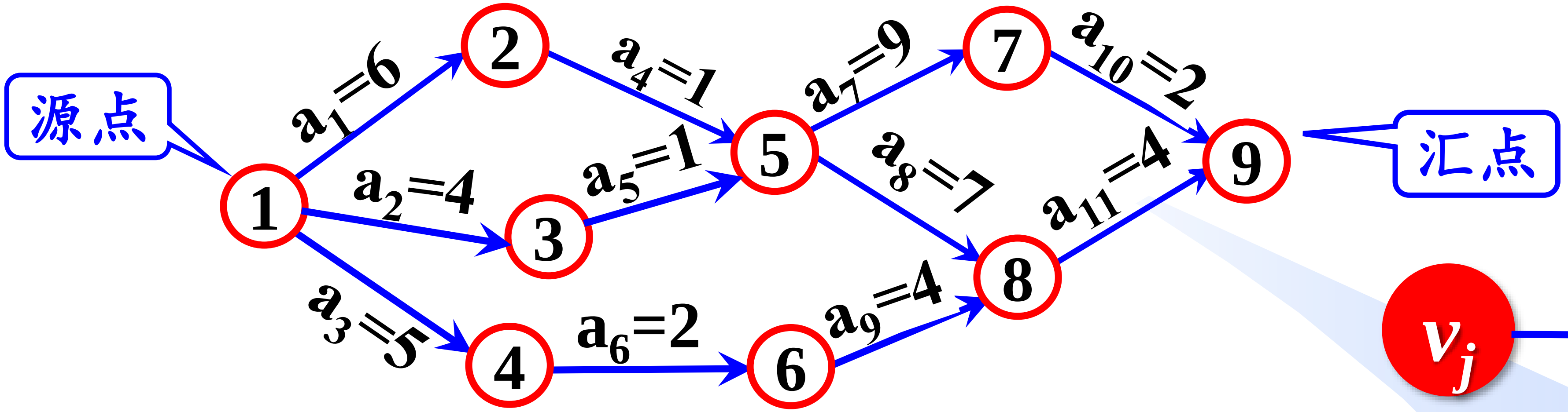
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ve	0	6	4	5	7	7	16	14	18
vl									

例：求下图的关键活动和关键路径

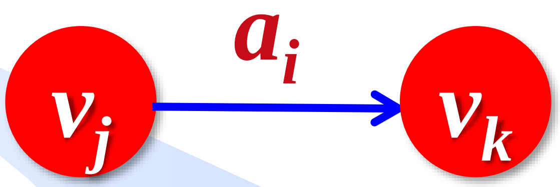


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ve	0	6	4	5	7	7	16	14	18
vl	0	6	6	8	7	10	16	14	18

例：求下图的关键活动和关键路径



A



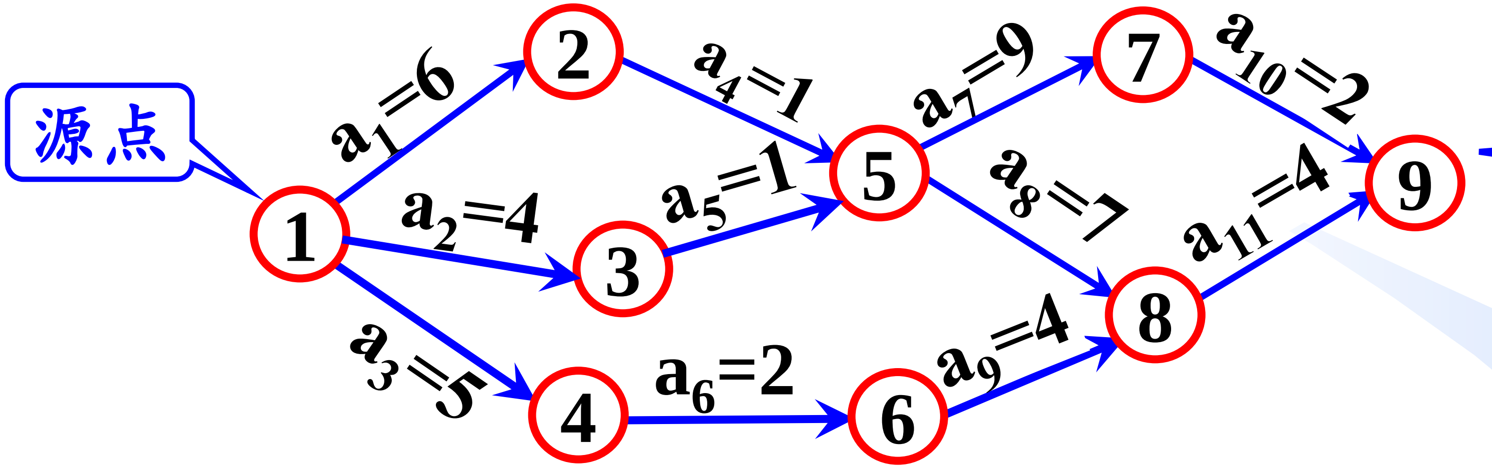
$e(i) = ve(j)$

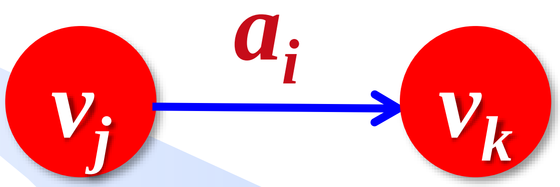
$l(i) = vl(k)\text{-}w(j,k)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ve	0	6	4	5	7	7	16	14	18
vl	0	6	6	8	7	10	16	14	18

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$e(i)$											
$l(i)$											

例：求下图的关键活动和关键路径



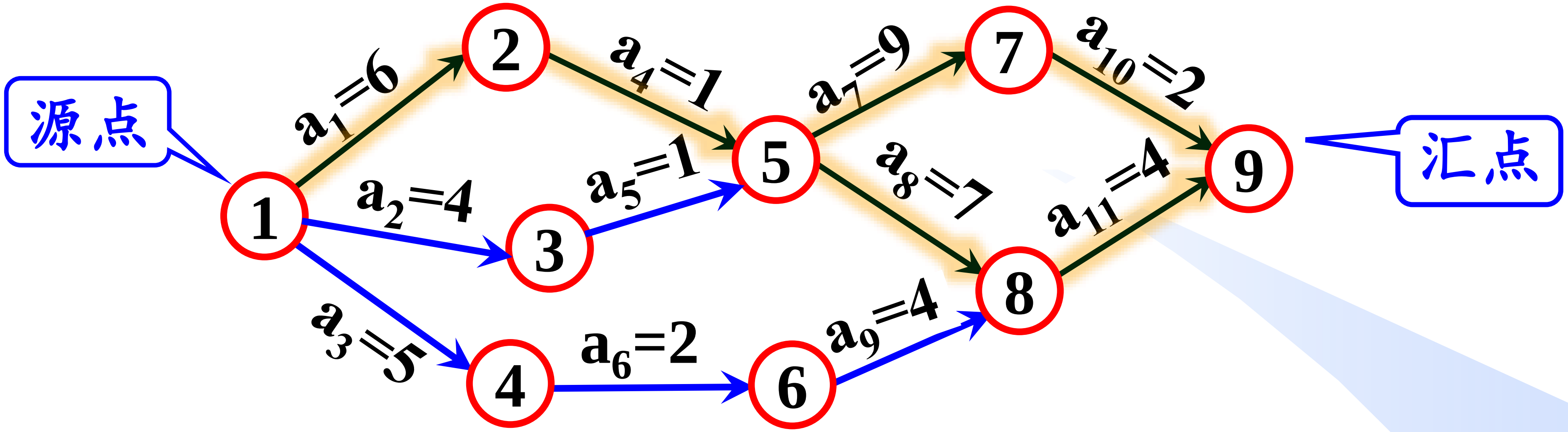


$$e(i) = ve(j)$$
$$l(i) = vl(k)-w(j,k)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ve	0	6	4	5	7	7	16	14	18
vl	0	6	6	8	7	10	16	14	18

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$e(i)$	0	0	0	6	4	5	7	7	7	16	14
$l(i)$	0	2	3	6	6	8	7	7	10	16	14

例：求下图的关键活动和关键路径



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ve	0	6	4	5	7	7	16	14	18
vl	0	6	6	8	7	10	16	14	18

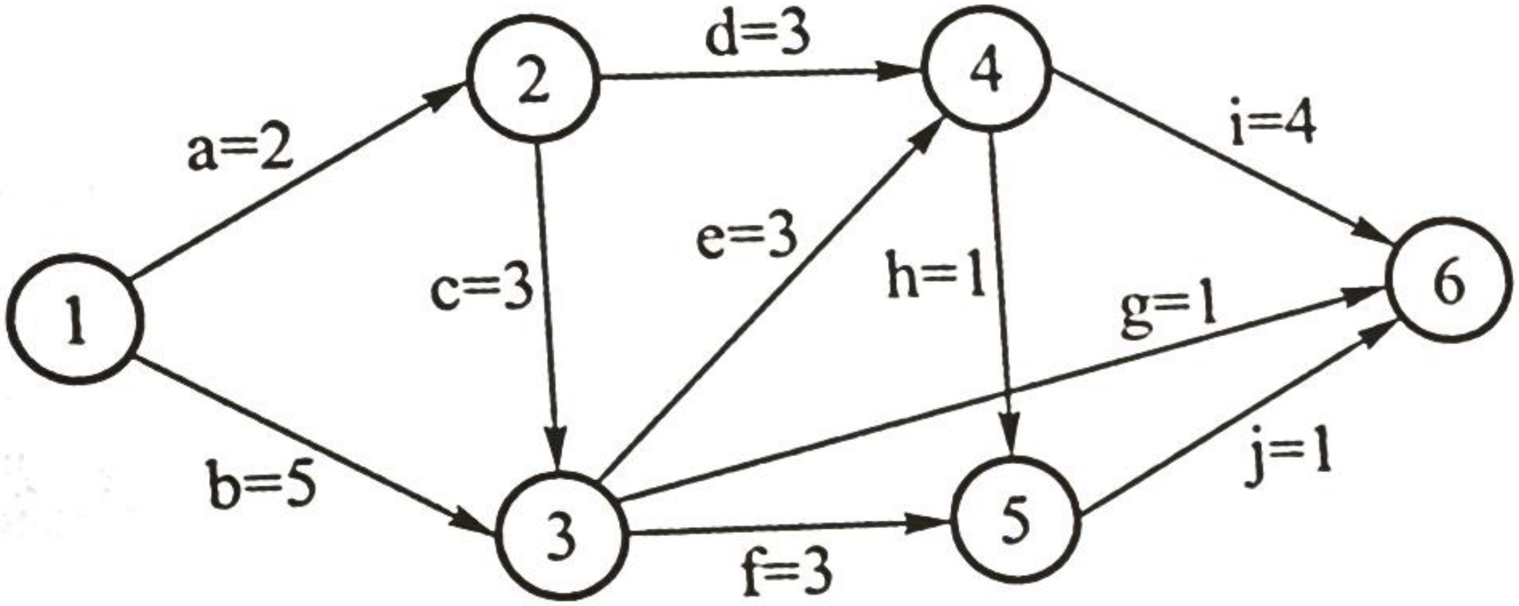
a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$e(i)$	0	0	0	6	4	5	7	7	7	16	14
$l(i)$	0	2	3	6	6	8	7	7	10	16	14

A

课下思考

下图是有10个活动的AOE网，其中时间余量最大的活动是______【2022年考研题全国卷】

A. c　　B. g　　C. h　　D. j



自愿性质OJ练习题

- ✓ POJ 2367（拓扑排序）
- ✓ POJ 1094（拓扑排序）