微积分作业

AI

吉林大学公共数学教学与研究中心

2021年9月

第一次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 则函数 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域是(　　).

(A) $[-a,1-a]$;　　(B) $[a,1-a]$;　　(C) $[a,1+a]$;　　(D) $[-a,1+a]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ x^2, & x<0, \end{cases}$ $g(x)=5x-4$, 则 $f[g(0)]=($　　$)$.

(A) 0　　(B) -4;　　(C) 16;　　(D) -16.

3. 在 $(-\infty,0)$ 上,下列函数中无界函数是(　　).

(A) $y=2^x$;　　(B) $y=\arctan x$;　　(C) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;　　(D) $y=\dfrac{1}{x}$.

4. 已知数列 $\{x_n\}$, 则下列命题正确的是(　　).

(A) 如果 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛;　(B) 如果 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛;

(C) 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必有界;　(D) 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必单调.

5. 设数列 $\{a_n\}(a_n>0, n=1,2,\cdots)$ 满足 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$, 则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C>0$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在;　　(D) 无法确定 $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}$ 是否存在.

二、填空题

1. 设 $f(x)=2x+3$, 则 $f[f(x)-3]=$______________.

2. 将复合函数 $y=a^{\sin\sqrt{x^2+1}}$ 分解成简单函数为 ______________________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 为______________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$______________.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^3}{n^2+1}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{\cos n}{n}+\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n\right]=$______________.

三、计算题

1. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$, 求 $f(\cos x)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$.

4. 求 $\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

四、证明题

设 $x_1=\sqrt{6}, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}, n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求之.

第二次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 已知 $f(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$, 则必有(　　).

(A) $k\geqslant 0$;　(B) $k>0$;　(C) $k=0$;　(D) $k<0$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (　　).

(A) 均存在; (B) 均不存在; (C) 至少有一个存在; (D) 都存在或都不存在.

3. 设对任意 x 总有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[h(x)-g(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$(　　).

(A) 存在且一定为 0;　(B) 存在且一定不为 0;

(C) 一定不存在;　(D) 不一定存在.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$, 则(　　).

(A) $a=b=1$;　(B) $a=b=-1$;　(C) $a=-1, b=1$;　(D) $a=1, b=-1$.

5. 当 $x\to\infty$ 时, $y=x\cos x$ 是(　　).

(A) 无穷大; (B) 无界函数但不是无穷大; (C) 有界函数; (D) 无穷小.

6. 当 $x\to 0$ 时,下列与 x^2 同阶的无穷小是(　　).

(A) $1-\mathrm{e}^x$;　(B) $\ln(1-x^3)$;　(C) $\arcsin(3x^2)$;　(D) $1-\cos(x^2)$.

二、填空题

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2$, 则 $k=$____________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x+2b, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续,则 $a=$______, $b=$______.

3. $x=0$ 是 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的____________间断点.(选填“跳跃”,“可去”,“无穷”,“震荡”)

4. $x = 0$ 是函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的____________间断点.(选填“跳跃”,“可去”,“无穷”,“震荡”)

5. 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 是 x 的____________阶无穷小.

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-4x+2}{3x-4x\sqrt{x}+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{2^x-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

四、证明题　证明方程 $2^x=x^2$ 在 $(-1,1)$ 内必有实根.

第三次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 并且 $f'(x_0)=3$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-h)-f(x_0)}=(\qquad)$.

(A) $-\dfrac{1}{3}$; (B) -3; (C) $\dfrac{1}{3}$; (D) 3.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处$(\qquad)$.

(A) 不连续; (B) 连续但不可导;

(C) 可导但导数不连续; (D) 可导且导数连续.

3. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右导数均存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 点一定$(\qquad)$.

(A) 可导; (B) 可微; (C) 间断; (D) 连续.

4. 设 $y=f(\ln x), f(u)$ 为可导函数,则 $\mathrm{d}y=(\qquad)$.

(A) $f'(\ln x)\mathrm{d}x$; (B) $f'(\ln x)\ln x\mathrm{d}x$; (C) $f'(\ln x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}(\ln x)$; (D) $f'(\ln x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

5. 设 $y=x+\sin x$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时,$(\qquad)$.

(A) $\mathrm{d}y|_{x=0}$ 与 Δx 是等价无穷小; (B) $\mathrm{d}y|_{x=0}$ 与 Δx 是同阶无穷小;

(C) $\mathrm{d}y|_{x=0}$ 是比 Δx 高阶的无穷小; (D) Δx 是比 $\mathrm{d}y|_{x=0}$ 高阶的无穷小.

二、填空题

1. 曲线 $y=x+\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 处的切线方程是______________.

2. 设 $y=\log_x a(a>0)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______________.

3. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0)=$ ______________, $f^{(n)}(0)=$ ______________.

4. 设 $f(x)=x^2\cos x$, 则 $f^{(50)}(0)=$ ______________.

5. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续, $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导,则 $\varphi(a)=$ ______________.

三、计算题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x)+1, & x>0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

2. 已知方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定函数 $y=y(x)$, 求 y''.

3. 求 $y=(1+x^2)^{\sin x}$ 的导数.

4. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处具有连续的导数,且 $f'(1)=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos\sqrt{x})$.

四、证明题

设函数 $f(x)$ 对任何实数 a,b 有 $f(a+b)=f(a)f(b)$, 且 $f'(0)=1$. 试证 $f'(x)=f(x)$.

第四次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 $f(x)=x(x+1)(2x+1)(3x-1)$, 则 $f'(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 内有(　　)个实根.

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x)\neq 0$, 则使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(\xi\in(a,b))$ 成立的 ξ 的个数为(　　).

(A) 惟一的一个;　(B) 零个;　(C) 两个;　(D) 至少三个.

3. 下列各极限都存在,能用洛必达法则求的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$;　(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arccot} x}$;　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-ax-b}{1-\sqrt{1-x^2}}=1$, 则(　　).

(A) $a=-1,b=1$;　(B) $a=-1,b=-1$;

(C) $a=1,b=-1$;　(D) $a=1,b=1$.

5. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$, 则当 $n>2$ 时, $f^{(n)}(0)=($　　$)$.

(A) $\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$,　(B) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$,　(C) $\dfrac{(-1)^n n!}{n-2}$,　(D) $\dfrac{(-1)^n}{n-2}$,

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ______________.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x=$ ______________.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$ ______________.

4. 若 $\alpha>0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=$ ______________.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\ln(1-bx)}=1$, 则 $b=$ ______________.

三、计算题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2)}{x-\sin x}$.

5. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-x^2)}{x^3}$.

四、证明题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=1$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $3f(\xi)+(\xi-1)f'(\xi)=0$.

第五次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数,且 $f''(x)>0$, 则下列不等式中正确的是(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$;　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$;　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

2. 设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(x)>0, f''(x)<0$, 则在点 x_0 处,当 $\Delta x>0$ 时,有(　　).

(A) $\Delta y>\mathrm{d}y<0$;　(B) $\mathrm{d}y>\Delta y>0$;　(C) $\Delta y>\mathrm{d}y>0$;　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

3. 设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''-2y'+4y=0$, 若 $f(x_0)>0$, 且 $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 (　　).

(A) 取得极大值;　　(B) 取得极小值;

(C) 某邻域内单调增加;　　(D) 某邻域内单调减少.

4. 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$(　　).

(A) 有且仅有水平渐近线;　　(B) 有且仅有竖直渐近线;

(C) 既有水平渐近线,也有竖直渐近线;　　(D) 既无水平渐近线, 也无竖直渐进线.

二、填空题

1. 函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的单调增加区间为______________.

2. 曲线 $y=x+x^{\frac{5}{3}}$ 的上凹区间是______________.

3. 要做一圆锥形漏斗,其母线长为 20 厘米, 要使漏斗体积最大, 其高为______________厘米.

4. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线为______________.

5. 曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的曲率为______________.

三、计算题

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定,求 $y = y(x)$ 的驻点,并判断它是否为极值点.

2. 求函数 $y = |x^2 - 5x + 4| + x$ 在 $[-5, 6]$ 上的最大值和最小值.

3. 试确定常数 k 的值, 使曲线 $y = k(x^2 - 3)^2$ 在拐点处的法线通过坐标原点.

4. 在平面上通过点 $P(4, 9)$ 引一条直线, 要使它在两个坐标轴上的截距都为正, 且其和为最小, 求这直线方程.

四、证明题

1. 证明：当 $x > 0$ 时,$1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > \sqrt{1 + x^2}$.

2. 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-2\sqrt{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

第六次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 下列命题错误的是(　　).

(A) 如果 $f(x)$ 在区间 I 上的某个原函数为常数, 则在 I 上 $f(x)=0$;

(B) 如果 $f(x)$ 在区间 I 上不连续, 则 $f(x)$ 在 I 上必无原函数;

(C) 如果 $f(x)$ 的某个原函数为零, 则 $f(x)$ 的所有原函数均为常数;

(D) 如果 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 是连续函数.

2. 已知 $f'(x)=g'(x), x\in\mathbf{R}$, 则有(　　).

(A) $f(x)=g(x)$;　　(B) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'$;

(C) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=\mathrm{d}\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)$;　(D) $f(x)=g(x)+C$.(C 为任意常数)

3. 下列各组函数中, 同一函数的原函数的是(　　).

(A) e^{2x+1} 与 $2\mathrm{e}^{x+1}$;　　(B) $\sin^2 x$ 与 $\cos^2 x$;

(C) $\cos 2x$ 与 $2\cos^2 x$;　(D) $2\sqrt{x+1}$ 与 $\sqrt{x^2+1}$.

4. 若 $F'(x)=f(x)$, 则 $\int f(2x)\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\frac{1}{2}F(2x)+C$;　(B) $F(2x)+C$;　(C) $\frac{1}{2}F(x)+C$;　(D) $F(x)+C$.

5. 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$, 则 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$;　　(B) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$;

(C) $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$;　　(D) $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

二、填空题

1. $\int(2^x+\log_2 x)\mathrm{d}x=$______________.

2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$______________.

3. $\int \tan^3 x \sec^4 x \mathrm{d}x =$ ______________.

4. 已知 $f'(\mathrm{e}^x) = x\mathrm{e}^{-x}$, 且 $f(1) = 0$. 则 $f(x) =$ ______________.

5. 已知 $f(x)$ 有连续的导数,则 $\int [f(x) + xf'(x)] \mathrm{d}x =$ ______________.

三、计算题

1. $\int \arcsin x \mathrm{d}x$.

2. $\int \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$.

3. $\int \dfrac{x+\sin x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$.

4. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x.$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ \cos x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

7. $\int \frac{2}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

第七次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的(　　).

(A) 必要条件;　(B) 充分必要条件;　(C) 充分条件;　(D) 既非充分也非必要条件.

2. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^4 x}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$,

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$, 则有(　　).

(A) $N<P<M$;　(B) $M<P<N$;　(C) $N<M<P$;　(D) $P<M<N$.

3. 已知 $F'(x)=f(x)$, 则 $\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t=$ (　　).

(A) $F(x)-F(a)$;　(B) $F(t)-F(a)$;　(C) $F(x+a)-F(2a)$;　(D) $F(t+a)-F(2a)$.

4. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t,\ g(x)=x^4+x^5$, 则当 $x\to 0$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小;　(B) 低阶无穷小;　(C) 等价无穷小;　(D) 同阶但非等价无穷小.

5. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可微函数,则下列函数中以 T 为周期的函数是(　　).

(A) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$;　(B) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$;　(C) $\int_0^x f'(t^2)\mathrm{d}t$;　(D) $\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$.

二、填空题

1. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})=$ ______________.

2. $\int_0^{\pi}\cos^8\frac{x}{2}\mathrm{d}x=$ ______________.

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $f(x)=3x^2-x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$ ______________.

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin[(x-t)^2]\mathrm{d}t=$ ______________.

三、计算题

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\mathrm{d}t}{x^3}$.

3. $\int_0^2 [x]\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

4. 已知 $f(0)=1, f(2)=2, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x<0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

四、证明题

已知 $f'(x)$ 连续,且当 $x \geqslant 0$ 时, 恒有 $f'(x) > 0$,证明当 $0 < a < b$ 时,

$$\int_a^b t f(t) \mathrm{d} t > \frac{1}{2}\left[b \int_0^b f(t) \mathrm{d} t - a \int_0^a f(t) \mathrm{d} t\right].$$