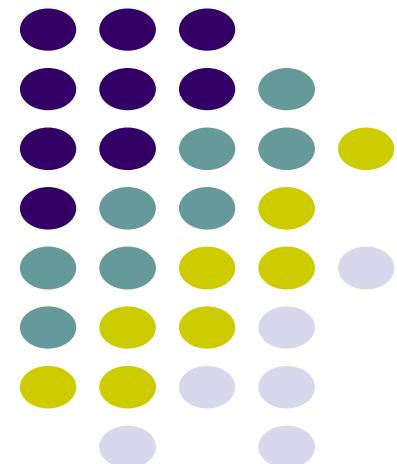


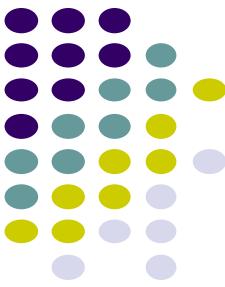
L8：递归

吉林大学计算机学院

谷方明

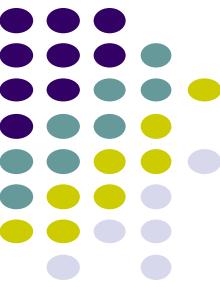
fmgu2002@sina.com





学习目标

- 理解递归的定义
- 利用递归求解问题
- 理解递归的实现机制
- 能够消递归
- 掌握记忆化搜索
- 了解递归与分治法
- 掌握递归树和主定理



例1：引入

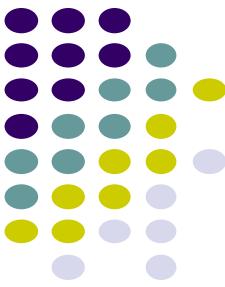
□ 从前有座山，山上有座庙，庙里有一个老和尚在给小和尚讲故事，故事里说，**从前有座山，山上有座庙，庙里有一个老和尚在给小和尚讲故事，故事里说，.....**



```
void story() {  
    printf("从前有座山，山里有座庙，庙里有一个老和尚在给小  
和尚讲故事，故事里说，");
```

```
    story();  
}
```

```
int main() {  
    story();  
}
```



如何终止

```
#define MAX 10000
```

```
void story(int n)
```

```
{
```

```
    if(n < MAX){
```

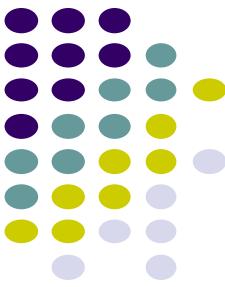
```
        printf("从前有座山， 山里有座庙， 庙里有一个老和尚在给小和  
尚讲故事， 故事里说， ");
```

```
        story( n+1 );
```

```
}
```

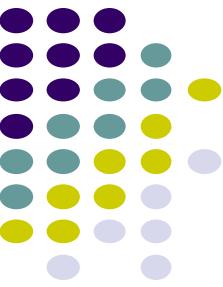
```
    else printf("都讲%d遍了！ 你烦不烦哪？ \n",MAX);
```

```
}
```



递归的定义

- 如果一个对象部分地**包含自身**，或者**利用自身定义自身**的方式来定义或描述，则称这个**对象是递归的**；
- 递归构成：递归定义+递归出口(终止条件)
- 如果一个过程**直接或间接地调用自身**，则称这个过程是一个**递归过程**。直接递归和间接递归



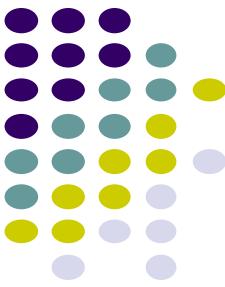
例2

□ 自然数集合的定义

- ✓ 1 是自然数；
- ✓ 若 s 是自然数，则 $s + 1$ 也是自然数； (+1: 后继)

□ 数列的定义

- ✓ $a_{n+1} = a_n + d$
- ✓ $a_1 = 1$



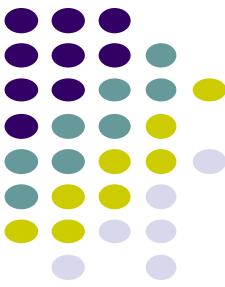
递归求解问题

□ 递归是一种重要的问题求解工具

- ✓ 魔法

□ 适用条件

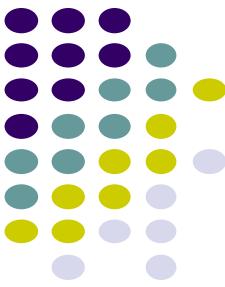
- ✓ 问题的定义是递归的；
- ✓ 问题涉及的数据结构是递归的；
- ✓ 问题的解法满足递归性质(与问题规模n有关)



1、问题的定义是递归的

□ 例：阶乘 $n! = 1 * 2 * \dots * n$

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * (n - 1)! & n > 0 \end{cases}$$



$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * (n - 1)! & n > 0 \end{cases}$$

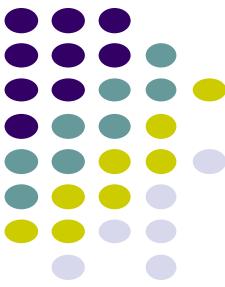
long long Fac (long long n)

{

 if (n==0) return 1;

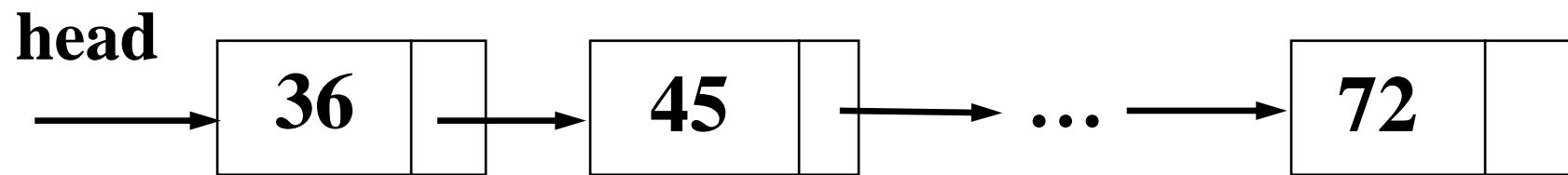
 else return n * Fac (n-1);

}



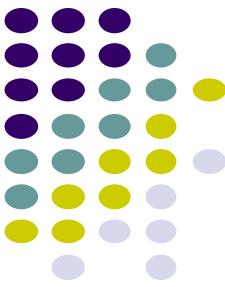
2、问题涉及的数据结构是递归的

例：单链表



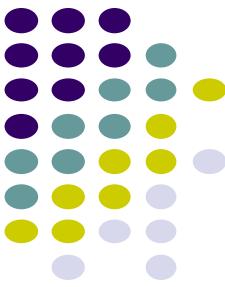
单链表的递归定义：

- (1) 空指针是一个单链表(空单链表);
- (2) 包含一个非空结点，该结点的指针域指向一个单链表。



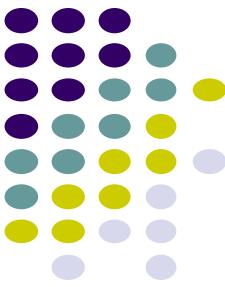
打印单链表的所有数据

```
void print (Node *p)
{
    if (p == NULL) return;
    else {
        printf("%d\n", p → data) ;
        print (p → next) ;
    }
}
```



打印单链表最后一个数据

```
void findLast (Node * f ) {  
    if ( f == NULL) return;  
    if ( f →next == NULL )  
        printf("%d\n", f → data) ;  
    else findLast ( f →next ) ;  
}
```

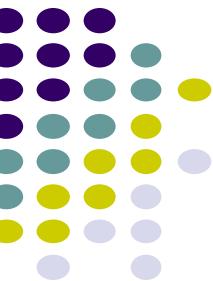


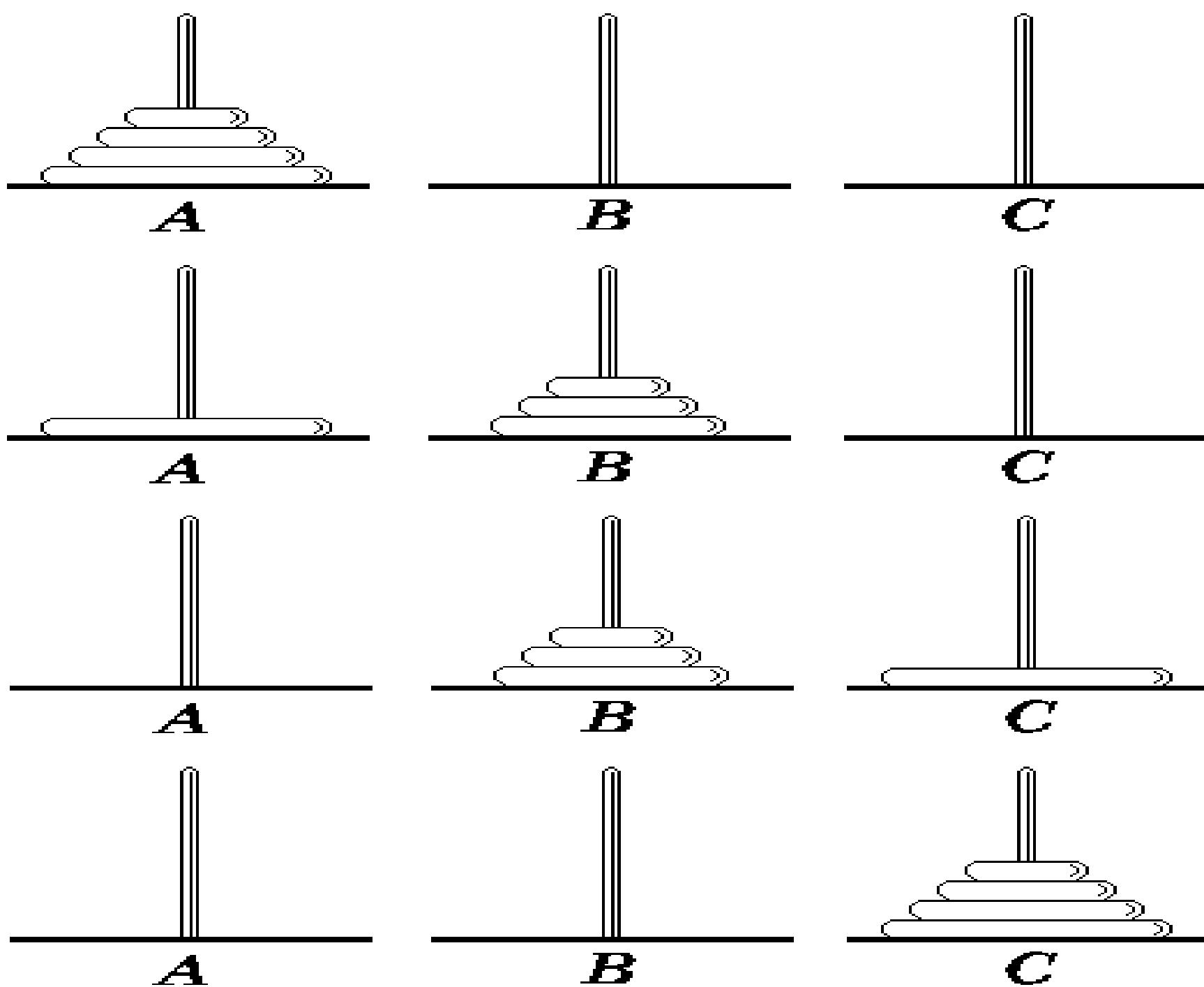
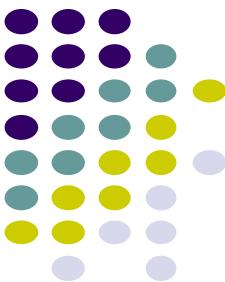
3、问题的解法满足递归性质

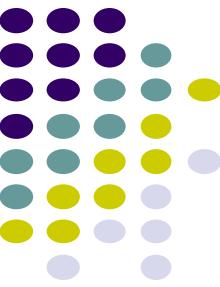
口 例：汉诺塔(Tower of Hanoi)问题

在世界中心贝拿勒斯（印度北部）的圣庙里，一块黄铜板上插着三根宝石针。印度教的主神梵天创世时，在其中一根针上从下到上地穿好了由大到小的64片金片，这就是所谓的汉诺塔。不论白天黑夜，总有一个僧侣在按照下面的法则移动这些金片：一次只移动一片，不管在哪根针上，小片必须在大片上面。

僧侣们预言，当所有的金片都从梵天穿好的那根针上移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，而梵塔、庙宇和众生也都将同归于尽。



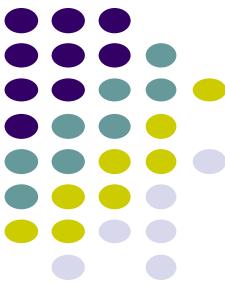




解决规模为n的汉诺塔

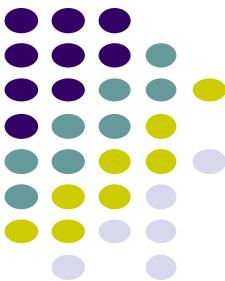
- 即将 n 个金片 从 **A** 移到 **C** 利用 **B**

- 第一步： 将 $n-1$ 个金片从 **A** 移到 **B** 利用 **C**；
- 第二步： 将第 n 个金片从 **A** 移到 **C**；
- 第三步： 将 $n-1$ 个金片从 **B** 移到 **C** 利用 **A**；



汉诺塔的实现

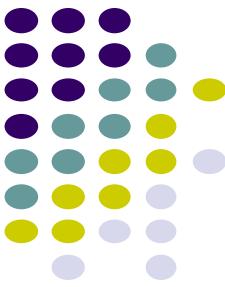
```
void hanoi (int n, char a, char b, char c)
{
    if(n>0){
        hanoi(n-1,a,c,b);
        printf("%c -> %c\n", a , c );
        hanoi(n-1,b,a,c);
    }
}
```



证明：所述方法移动的步数最少

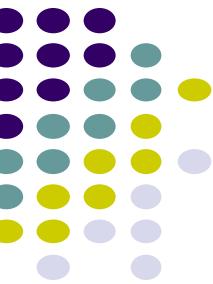
- 数学归纳法
- 当 $n=1$ 时，所述方法只要1步完成，步数最少。
- 设当 $n=k$ 时，所述方法移动的步数最少。

当 $n=k+1$ 时，必然要出现一种局面：最大的盘子在**A**柱上，其它 k 个盘子在**B**柱上，**C**柱为空。根据假设，所述方法把**A**上 k 个盘子利用**C**柱移动到**B**柱的步数最少；最大的盘子移动到**C**上需要1步；所述方法把**B**柱上的 k 个盘子利用**A**柱移动到**C**柱的步数也最少，因此所述方法在 $k+1$ 个盘子的情况下移动步数最少。



移动的最少步数 f_n

- 移动的最少步数 f_n 形成一个数列
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + 1 + f_{n-1}$
- 解得： $f_n = 2^n - 1$
- $f_{64} = 1.84467440 \times 10^{19}$
- 假设每秒移动1次，超过5800亿年



课堂练习

□ 输入一个整数，用递归算法将整数倒序输出。

□ $x^n = x \times x \times \dots \times x$ (n 个 x 连乘)

✓ $x^n = x^{n-1} \times x$

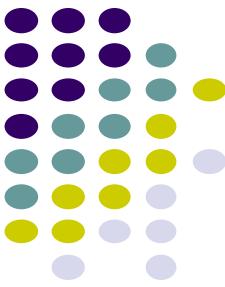
✓ $x^n = x^{n/2} \times x^{n/2}$ n是偶数

$= x^{n/2} \times x^{n/2} \times x$ n是奇数

□ $\text{gcd}(a, b)$

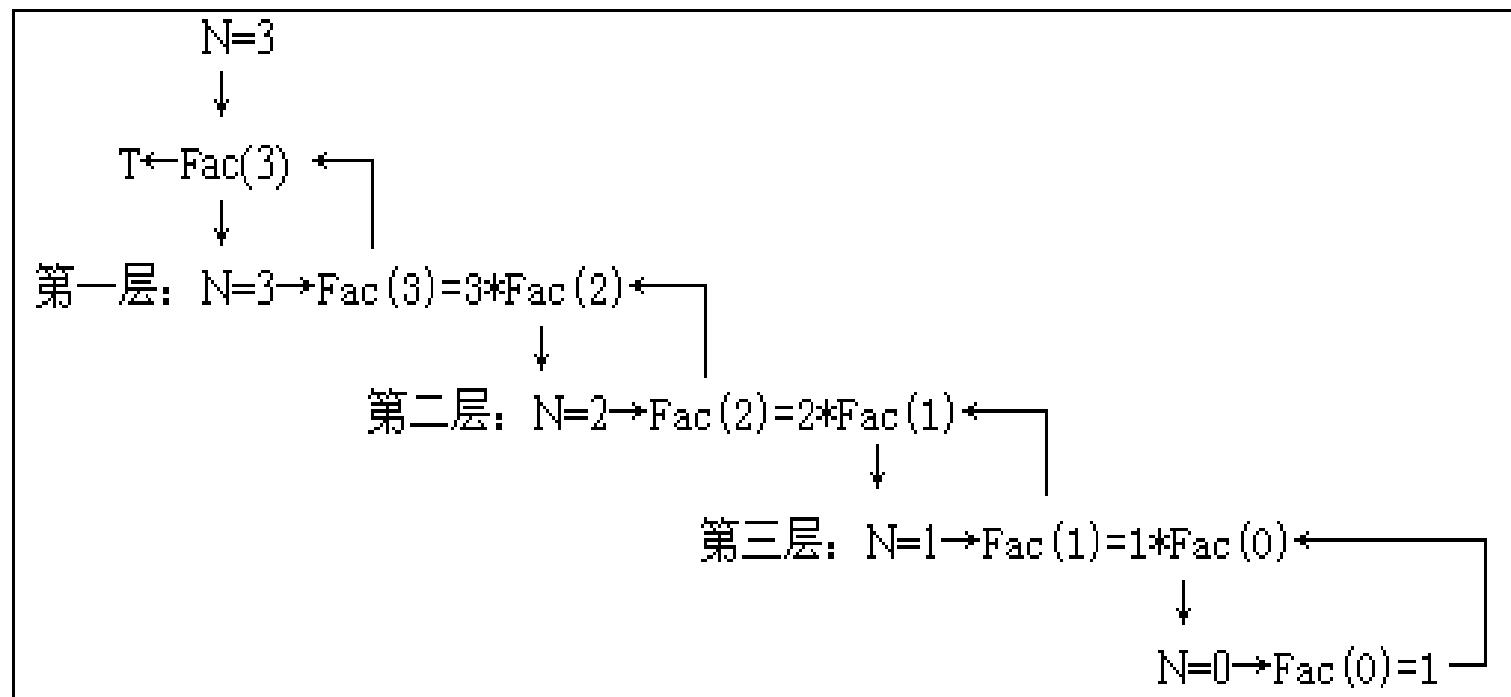
✓ $\text{gcd}(a,b) = \text{gcd}(b, a \% b)$

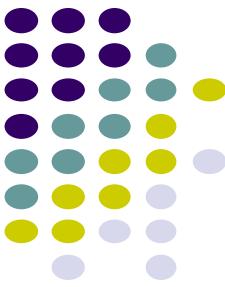
✓ $\text{gcd}(a,0) = a$



递归的执行过程

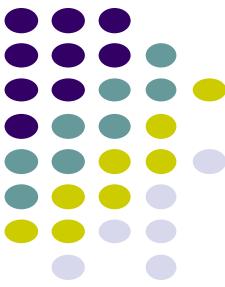
□ 以阶乘为例



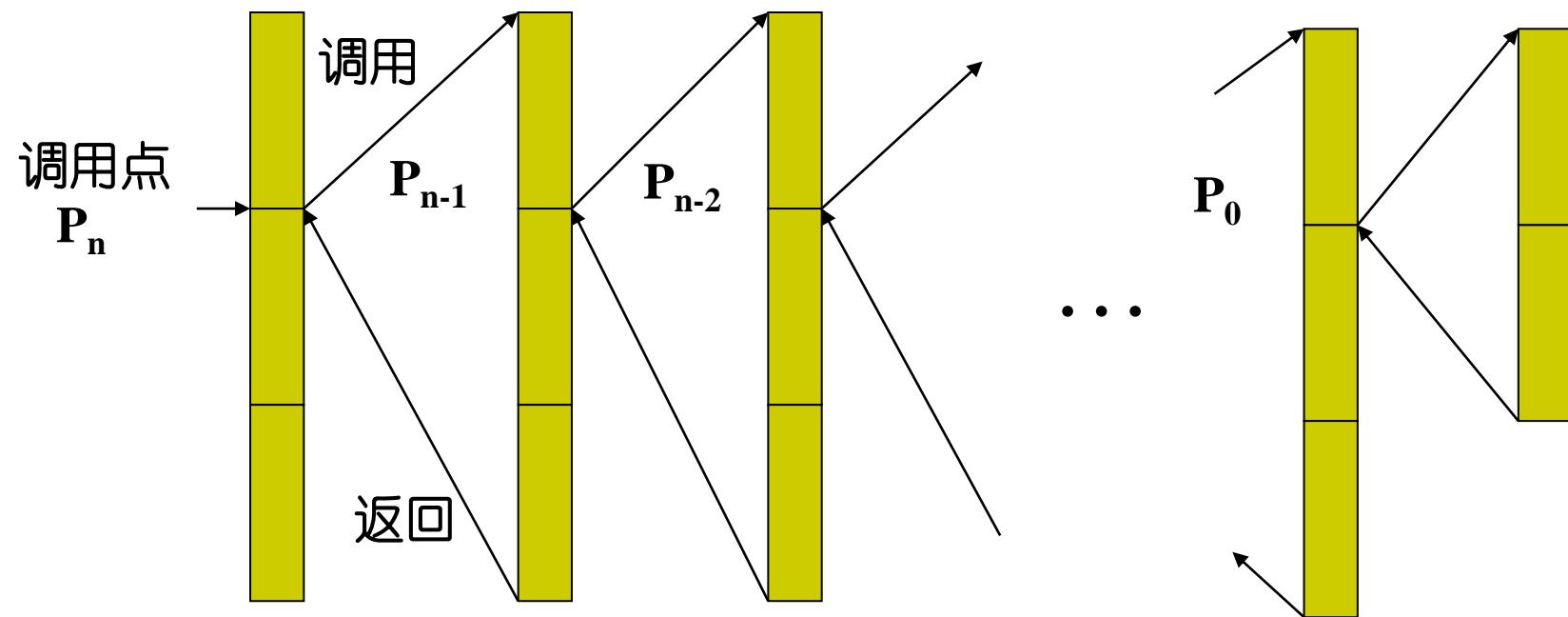


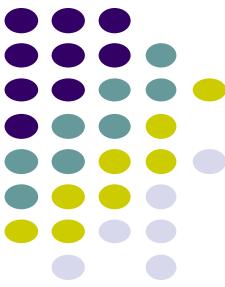
递归过程分递推和回归两个阶段

- 在递推阶段，把较复杂问题（规模为n）的求解推到比原问题简单的问题（规模小于n）来求解。
 - ✓ 例：求 $n!$ 转化为求 $(n-1)!$,依次类推，直至计算到 $n=0$ 时；在递推阶段，必须有终止的情况。
- 在回归阶段，当获得最简单问题的解后，逐级返回，依次得到稍复杂问题的解。
 - ✓ 例如知道 $0! = 1$ ，可以得到 $1! = 1$, $2! = 2$, ..., 直到 $n!$



- main() f(n) f(n-1) f(1) f(0)





递归的实现

□ 为保证递归或函数调用执行正确，系统使用 **栈**来管理实现。

□ 调用（进层）

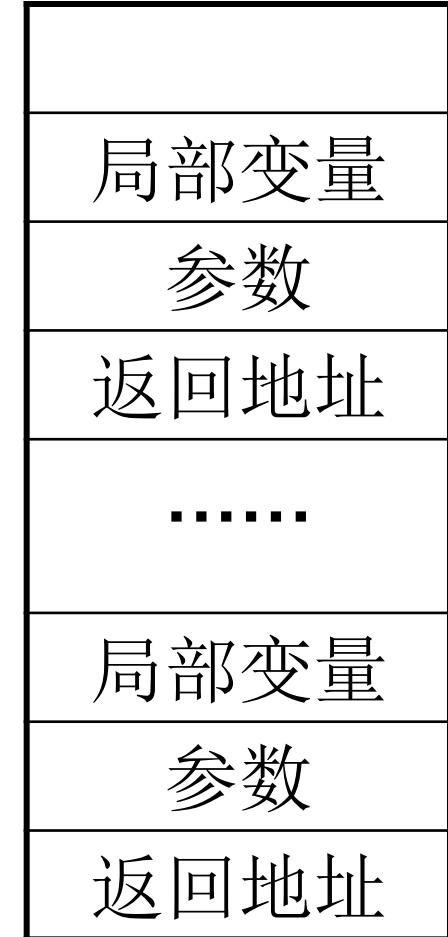
- ✓ 保存本层参数和返回地址
- ✓ 分配空间，参数传递
- ✓ 程序转移到被调函数入口

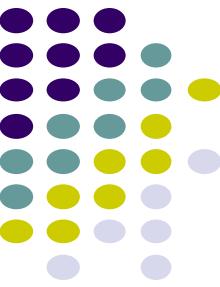
□ 返回（退层）

- ✓ 保存计算结果
- ✓ 释放空间，恢复上层参数
- ✓ 依照返回地址转移

活动记录k

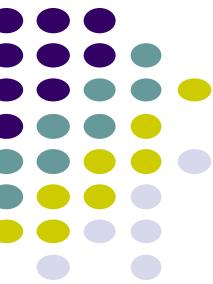
活动记录1





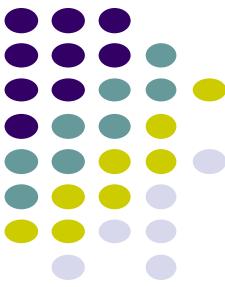
消递归

- 递归由系统的工作栈管理实现；因此，使用递归解题简洁；
- 但有些情况下，要实现递归与非递归的转换
 - ✓ 系统空间栈崩溃（64K）
 - ✓ 不是所有的语言都支持递归（升级前的FORTRAN）
 - ✓ 提高程序的效率（函数调用和返回代价略大）

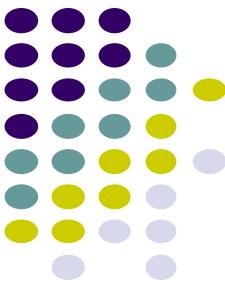


消递归原理

- 简单的，直接使用循环结构代替
 - ✓ 尾递归：递归发生在最后一步；
 - ✓ 例：阶乘
- 更多的，要基于栈的方式，按照递归机制模拟
 - ✓ 方法一：规则法
 - ✓ 方法二：技巧法



```
void hanoi_1(int n,int a,int b,int c){  
    int t,addr;  
    top=0;  
L1: if(n>0){  
    push(n,a,b,c); push(2); n--;t=b;b=c;c=t;  
    goto L1;  
L2:printf("%d->%d\n",a,c);  
    push(n,a,b,c);push(3); n--;t=a;a=b;b=t;  
    goto L1;  
}  
L3: if(top){  
    pop(addr); pop(n,a,b,c);  
    if(addr==2) goto L2;  
    else if(addr==3) goto L3;  
}
```



使用转换技巧

Hanoi (n , a , b , c)



问题分解

Hanoi (n-1, a, c, b)

MOVE (a, c) => Hanoi (1, a, b, c)

Hanoi (n-1, b, a, c)

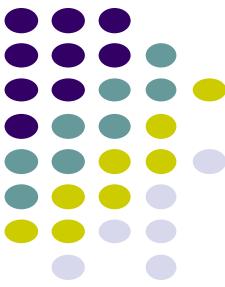


消递归压栈

S \Leftarrow (n-1, b, a, c) .

S \Leftarrow (1, a, b, c) .

S \Leftarrow (n-1, a, c, b) .



汉诺塔非递归

算法HI(n)

HI1[建立堆栈]

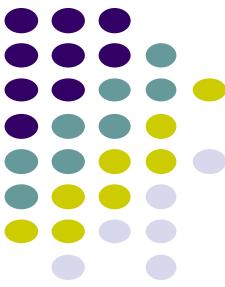
 CREATEStack (S)

HI2[堆栈初始化]

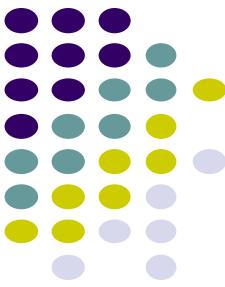
 S \leftarrow (n, a, b, c)

HI3[利用栈实现递归]

```
  while( ! StackEmpty(S) ) {  
    (n,a,b,c)  $\leftarrow$  S;  
    if (n == 1) MOVE ( a, c );  
    else {   S $\leftarrow$ (n-1, b, a, c);  
          S $\leftarrow$ (1, a, b, c);  
          S $\leftarrow$ (n-1, a, c, b) ; } }
```



```
void hanoi_2(int n,int a,int b,int c){  
    top=0;  
    push(n,a,b,c);  
    while(top){  
        pop(n,a,b,c);  
        if(n==1) printf("%d->%d\n",a,c);  
        else{  
            push(n-1,b,a,c);  
            push(1,a,b,c);  
            push(n-1,a,c,b);  
        }  
    }  
}
```

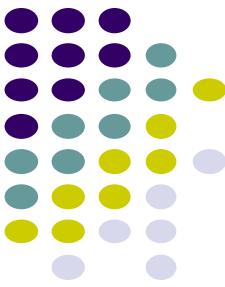


递归的效率

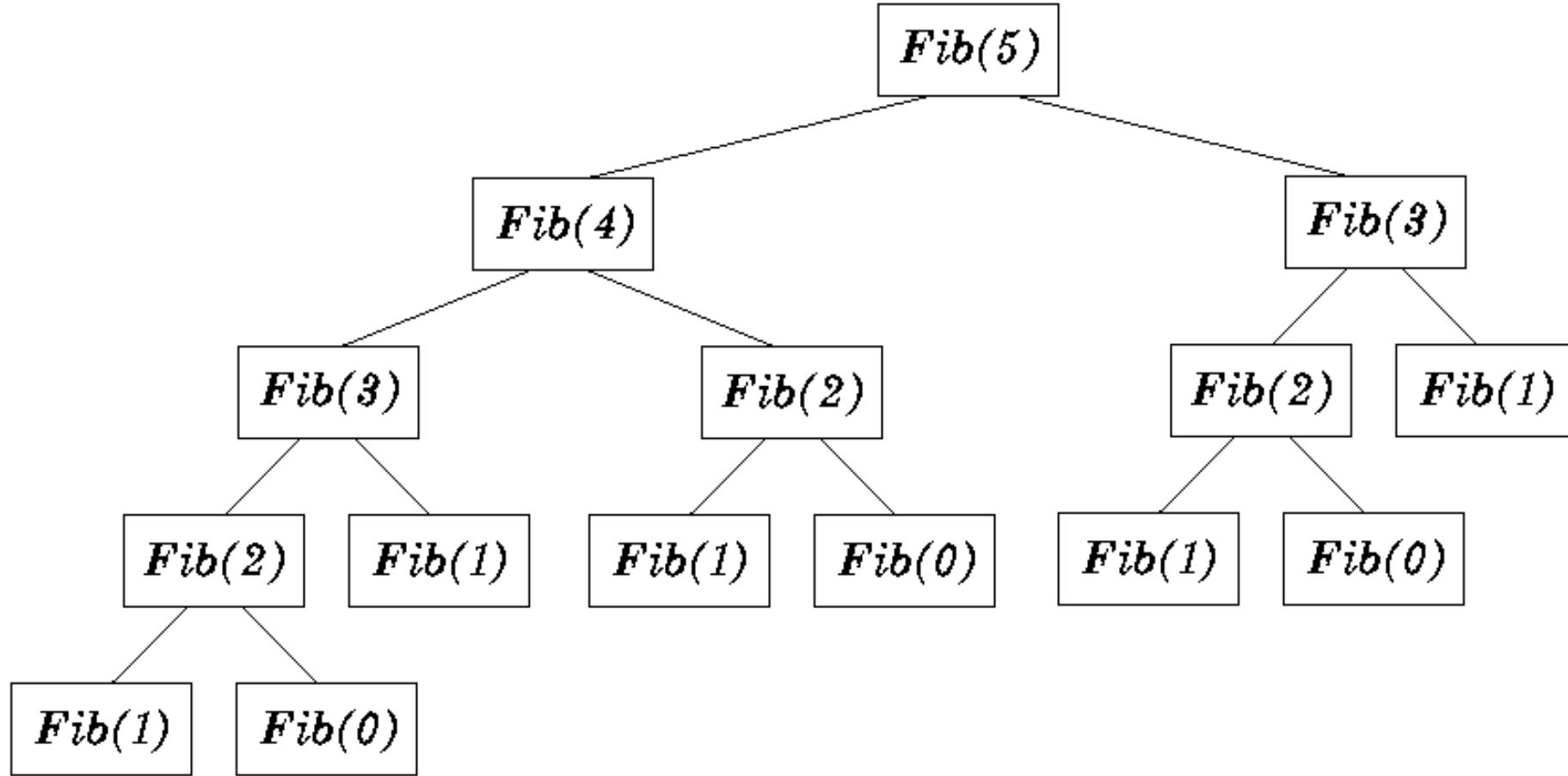
- 递归方法在解决某些问题时是最直观、最方便的方法，但未必是高效的方法。
- 例 斐波那契数列

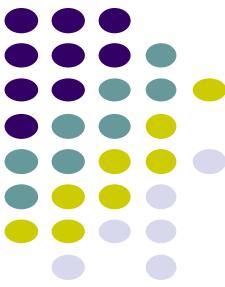
假定一对大兔子每一个月可以生一对小兔子，而小兔子出生后两个月就有生殖能力。问从一对大兔子开始，一年后能繁殖成多少对兔子？

$$Fib(n) = \begin{cases} n, & n = 0, 1 \\ Fib(n - 1) + Fib(n - 2), & n > 1 \end{cases}$$



```
long Fib ( long n ) {  
    if ( n <= 1 ) return n;  
    else return Fib (n-1) + Fib (n-2); }
```





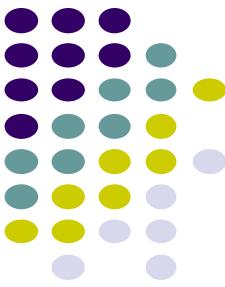
效率：相同子问题的重复计算

- 斐波那契数列的递归调用树，调用次数 $O(2^k)$

- 使用循环迭代法，只需要 $O(n)$

```
long long f1 = 1, f2 = 0, f = 0;  
for ( int i=2; i<=n; i++ ) { f=f1+f2; f2=f1; f1=f; }
```

- 当 $n = 35$ 时，斐波那契数迭代函数需进行33次加法，而递归函数需
要进行**185万**次函数调用！



原理：用空间换时间

```
long Fib ( long n ) {  
    if ( n <= 1 ) return n;  
    else return Fib (n-1) + Fib (n-2); }
```

int f[MAXN];//初始化为-1.

long fibo (long n)

{

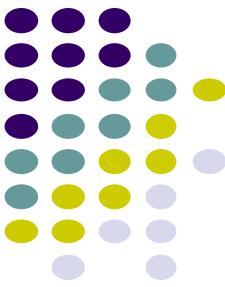
 if(f[n]>=0) return f[n];

 if (n <= 1) return f[n]=n;

 else return f[n]=fibo(n-1)+fibo(n-2) ;

}

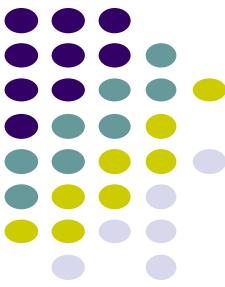
□ 记忆化搜索



递归和分治法

- 分治法的基本设计思想（分而治之）

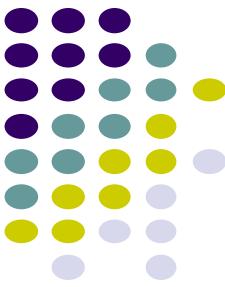
1. **分解**: 将原问题分解为若干个**规模较小、相互独立、与原问题形式相同的子问题**。
 2. **治理**: 求解各个子问题。
 3. **合并**: 将子问题的解合并构成原问题的解。
- 子问题与原问题形式相同，只是规模较小，可以用**递归方法**解决
 - 适用条件：能有效的分解和合并。



例：用分治法求n个数中的最大值

□ 设计策略

- ✓ 分解：中间划分，形成左右两个相同子问题；
- ✓ 治理：递归求解两个子问题；
- ✓ 合并：左右两个子问题的结果的最大值就是原问题的最大值。



例：用分治法求n个数中的最大值

□ 算法描述(ADL-C)

算法RangeMax (A, i, j, ma)

RM1. [递归出口]

```
if(i>=j) return ma = A[i];
```

RM2. [分治]

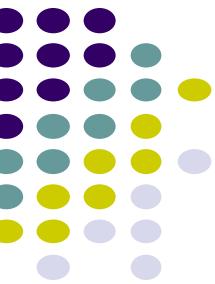
```
mid = (i + j) / 2;
```

```
RangeMax(A, i, mid, ma1);
```

```
RangeMax(A, mid+1, j, ma2);
```

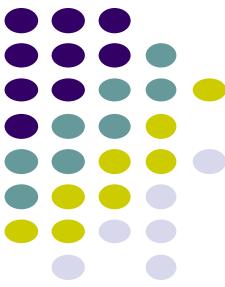
```
return ma = max(ma1,ma2);
```

时间复杂度： $T(n) = n$



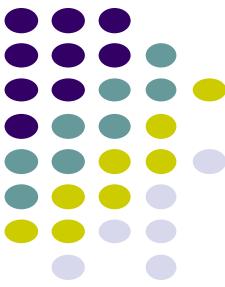
问题的划分

- 原问题可以一分为二（二分法）、一分为三、.....
- 原问题划分成多少个子问题合适?
 - ✓ 通常采取二分法，这么划分既简单又均匀。



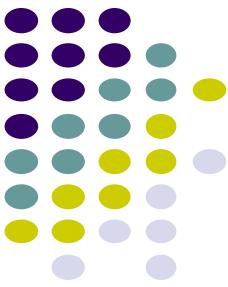
数据结构常用算法

- 枚举法
- 模拟法
- 贪心法
- 分治法
- 递归法
- 递推法
- 搜索（基本）
- 动态规划（基本）
-

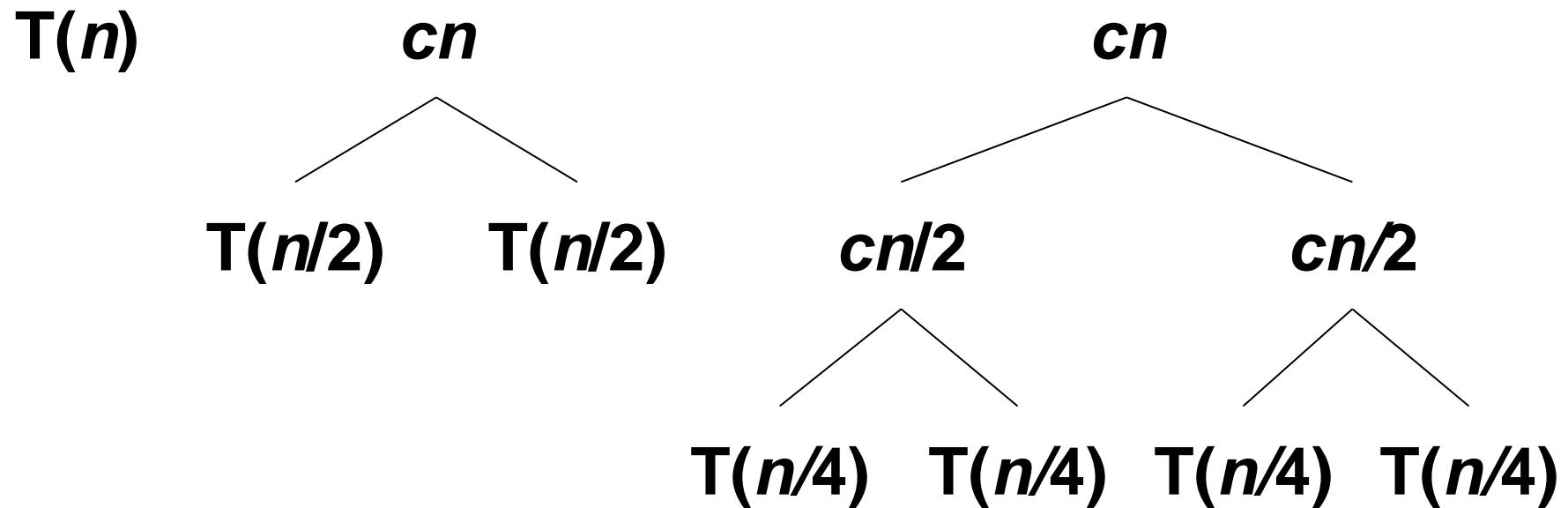


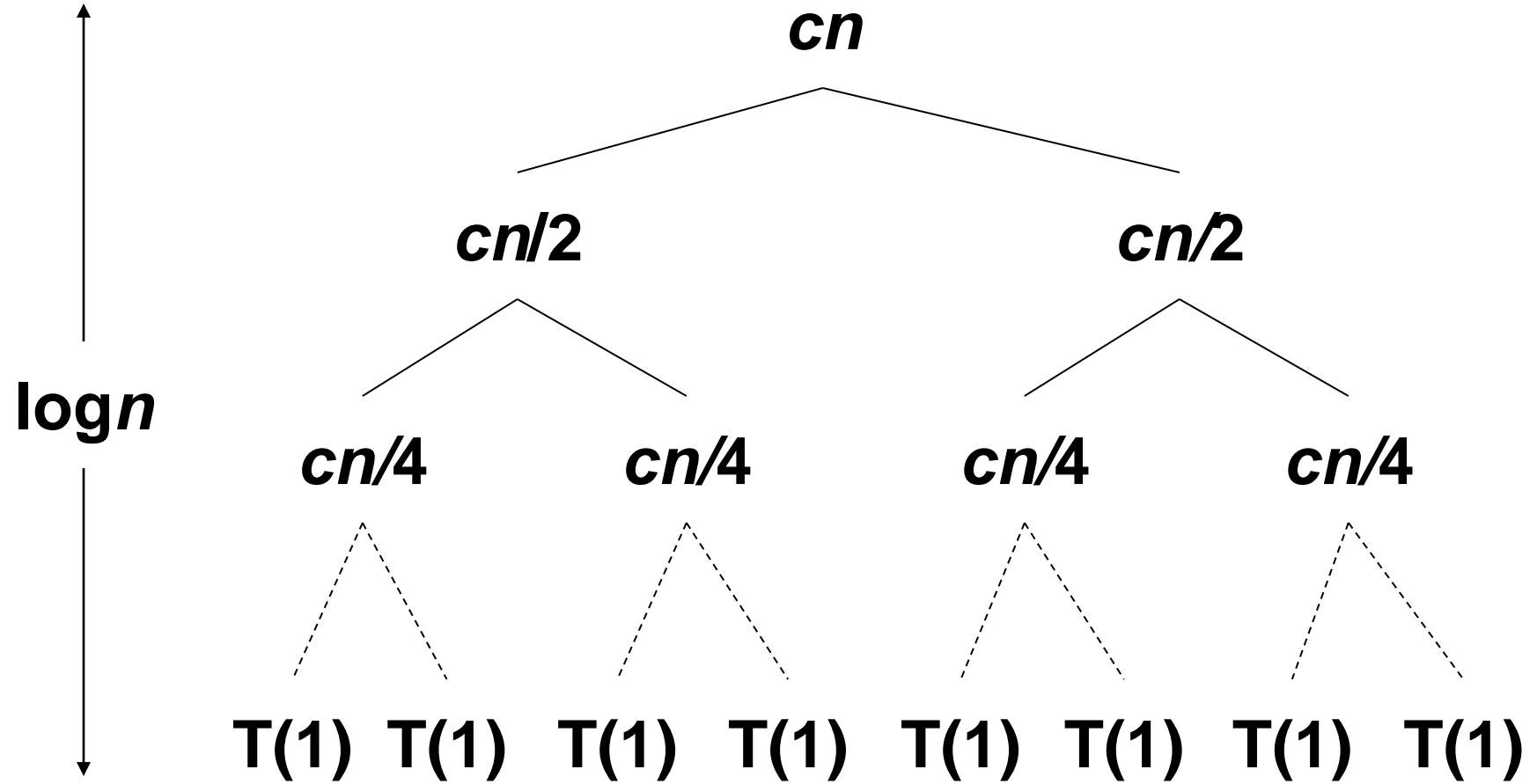
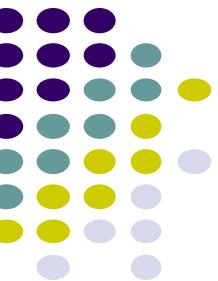
递归树方法

- 在**递归树**中，每个结点表示一个**单一子问题**的代价，每个子问题对应某次递归调用。
- 将树中每层中的代价求和，得到每层代价。
- 然后将所有层的代价求和，得到所有层次的递归调用的总代价。
- 主要用途
 - ✓ 猜测/估算递归方法的渐进上界
 - ✓ 准确计算递归方法的时间复杂度

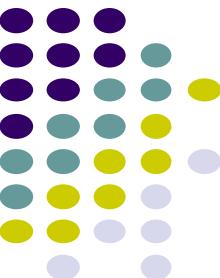


例: $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ 上界





设 $T(1)$ 是常量, $O(n)$ 用 cn (精度损失常数项) 代替,
 $T(n) \leq cn * \log n + O(n) = O(n \log n)$



□ 正确性：存在 d , n 足够大，使得 $T(n) \leq dn \log n$.

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

$$\leq 2^*d*(n/2)*\log(n/2) + cn$$

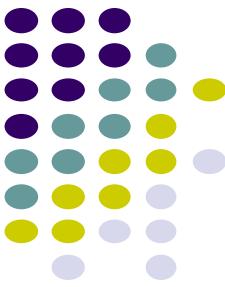
$$\leq dn \log n + (c-d)n$$

当 $d \geq c$ 时， $T(n) \leq dn \log n$

□ 代入法

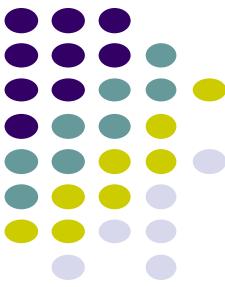
✓ 猜测解的形式（递归树等方法）

✓ 用数学归纳法等证明解是正确的



例：BS算法——递归树

- 为尽量精确易算，递归树最好是满二叉树。
- 左右子树结点最多差1，最下一层有两种情况
 - ✓ 由T(2)和T(3)构成
 - ✓ 由T(3)和T(4)构成
- 第一种情况
 - ✓ $2i + 3j = n$
 - ✓ $i + j = 2^k$
 - ✓ $T(n) = 2 + \dots + 2^k + i + 3j$
 $\leq (5/3)n - 2$



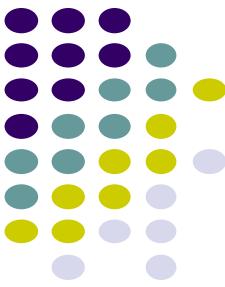
主定理 (Master Theorem)

- 令 $a \geq 1$ 和 $b > 1$ 是常数, $f(n)$ 是一个函数, $T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式:

$$T(n) = a T(n/b) + f(n)$$

可将 n/b 解释为 $\lfloor n/b \rfloor$ 或 $\lceil n/b \rceil$ 。那么:

- 有常数 $\varepsilon > 0$, 使 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- 有常数 $\varepsilon > 0$, 使 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, 且 存在 $c < 1$ 和 所有足够大的 n , 有 $af(n/b) \leq cf(n)$, 则 $T(n) = \Theta(f(n))$



例：主方法 (Master Method)

□ $T(n) = 9T(n/3) + n$

✓ $n^{\log_b a} = n^2$, $f(n) = n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, $T(n) = \Theta(n^2)$

□ $T(n) = T(3n/2) + 1$

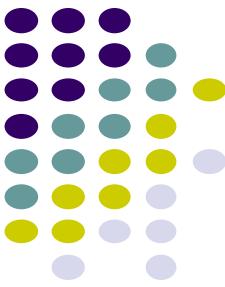
✓ $n^{\log_b a} = 1$, $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_b a})$, $T(n) = \Theta(\log n)$

□ $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$

✓ $n^{\log_b a} = O(n^{0.793})$, 取 $c = \frac{3}{4}$, 正则条件成立, $T(n) = \Theta(n\log n)$

□ $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

✓ 没有适合情况。可证明 $T(n) = \Theta(n\log^2 n)$



总结

- 递归的定义（递归定义+递归出口）
- 递归求解问题
 - ✓ 问题的定义是递归的；
 - ✓ 问题涉及的数据结构是递归的；
 - ✓ 问题的解法满足递归性质消递归
- 消递归（转换规则和**技巧**）
- 递归的效率（尾递归和记忆化搜索）
- 递归算法的时效分析工具（递归树、主定理）