L2：算法时空效率分析

吉林大学计算机学院
谷方明
fmgu2002@sina.com

学习目标

- 熟练掌握算法时间效率分析的基本方法
  - ✓ 事后统计方法
  - ✓ 事前估算方法
- 掌握算法空间效率分析的基本方法

- 了解时空效率的扩展：时空积分
- 理解均摊代价

算法的有效性

- 数据结构分析的实质就是算法分析。
  - ✓ 数据结构的优劣是由实现其运算的算法体现的

- 算法的有效性（满足资源限制）
  - ✓ 时间效率：算法执行所耗费的时间
  - ✓ 空间效率：算法执行所占用的存储量
  - ✓ 能耗
  - ✓ ……

记录程序执行的时间

- #include <ctime>
- ……
- time_t start,end;
- start=clock();
- …… /*待测算法代码*/
- end=clcok();

- printf(“%d\n”,difftime(end,start));

事后分析法

- 事后分析：编写程序，记录算法执行的时间
  - ✓ 这是一种统计方法，也称事后统计。
- 优点：直观；
- 缺点
  - ✓ 编写程序费时。
  - ✓ 依赖计算机硬件和软件等环境因素。同一算法在不同机器上执行时间不一定相同。时间的测试结果还取决于编写算法的语言、运行的操系统等。
  - ✓ 测试数据设计困难。测试数据如何选择？
- 用途：验证（结论或猜想）

事前分析

- **事前分析：不编程序，直接分析算法。**
  - 这是一种估算方法，也称事前估算。
  - 可利用事后统计验证。

算法的执行时间估算

- 算法的执行时间就是构成算法的所有语句的执行时间之和
  - ✓ 语句的执行时间 = 语句频率 × 语句执行一次的时间
  - ✓ 语句频率是指该语句在一个算法中重复执行的次数，一般与循环语句有关。
  - ✓ 语句可理解为操作、运算等，根据需要选择

例：计算1+2+3+……+n的值

- 方法一: 累加法

```
sum=0
for(i=1;i<=n;i++)
    sum+=i;
```

- 累加法 的执行时间：
  - ✓ 赋值=1+ (1 + n) + n = 2n + 2
  - ✓ 比较=1 + n
  - ✓ 加法=n + n =2n

例：计算1+2+3+……+n的值

- 方法二: 高斯公式法

  sum=n*(n+1)/2

- 公式法的执行时间：
  - 赋值= 1
  - 加法= 1
  - 乘法= 1
  - 除法= 1

累加法的执行时间：

赋值 = 2n + 2
比较 = 1 + n
加法 = 2n

度量1:所有语句执行时间之和

- 优点：不用编程
- 缺点：
  - ✓ 语句众多，计算繁琐；
  - ✓ 度量难以比较；
  - ✓ 依然受平台因素影响。

语句的执行时间 = 语句频率 × 语句执行一次的时间。

语句频率：由算法直接确定，与所用机器无关，独立于程序设计语言。

语句执行一次时间：依赖机器、程序设计语言、编译程序等环境因素

平台无关（两种模型）

- **理想计算模型**
  - ✓ 一台通用计算机(理想情况下)
  - ✓ 机器指令顺序执行，每次一条指令；
  - ✓ 做任一简单的事情都恰好花费1个时间单元
  - ✓ 无限内存，存取时间恒定

- **基本运算的时间囿界于常数 u**
  - ✓ 用上界u 估算

求和两种算法的比较

- 累加法的语句频率之和=5n+3

赋值 = 2n + 2
比较 = 1 + n
加法 = 2n

- 公式法的语句频率之和=4

赋值= 1
加法= 1
乘法= 1
除法= 1

度量2: 所有语句频率之和

- **一个算法的执行时间定义为的所有语句的频率之和，记为t(n)**
  - 其中：n表示问题规模（区分：输入数据规模）

- **特点**
  - 优点：由算法直接确定，不依赖于机器
  - 缺点：计算依然繁琐

度量3: 时间复杂度(时间复杂性)

- 基本运算：算法中起主要作用且花费时间最多的运算。

- 时间复杂度:算法执行的基本运算的次数；一般用T(n)表示。
  - 其中，n表示问题的规模。

例：计算1+2+3+……+n的值

算法S(*n* . sum)

S1.[初始化]

sum=0

S2.[比较]

for(i=1; i<=n; i++)

sum = sum + i

算法S的基本运算：加法

时间复杂度 T(n)=n

算法G(n . sum)

G1.[公式]

sum = n*(n+1)/2 ▌

算法G的基本运算：除法

T(n) = 1

例 A是一个含有*n*个实数的数组，给出求A之最大和最小元素的算法

算法SM (A, *n* . max,min)

SM1[初始化]

max =min =A[1];

SM2[比较]

for(*i*=2 ; i <= *n* ; i++) {

if (A[*i*]> max) max = A[*i*];

if (A[*i*]< min) min = A[*i*]; } ▌

算法SM的基本运算:元素的比较

时间复杂度为T(n)=2(*n*-1)。

例 实数数组R由n个元素组成，给定一个实数K，试确定K是否为R的元素。

算法F (R, *n*, *K*. *i*)

F1 [初始化]

i = 1;

F2 [比较]

while ($i \le n$){

if (R[i]==K) return;

i = i+1 ;} ▌

算法F的基本运算是关键字比较，

最少比较次数：1，最大比较次数：n

定义

设一个领域问题的规模为n，D_n是该领域问题的所有输入的集合，任一输入$I \in D_n$，$P(I)$是I出现的概率，且满足$\sum P(I)=1$，$T(I)$是算法在输入I下所执行的基本运算次数。定义算法的**期望复杂度**为：

$$E(n)=\sum\{P(I)*T(I)\}$$

该算法的**最坏复杂度**为：

$$W(n)=\max\{T(I)\}$$

该算法的最好复杂度为：

$$B(n)=\min\{T(I)\}$$

上例中，设q($0 \le q \le 1$)为K在R中的概率

R[1]	R[2]	R[3]	R[4]	R[5]	R[6]	R[7]	R[8]
5	20	12	7	30	40	25	16

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{q}$$

$$\begin{cases} K=R[i] & q/n \\ K!=R[i] & 1-q \end{cases}$$

通过计算我们可以得到算法F的期望复杂度为

$$E(n)=\sum\{P(I)*T(I)\}$$

$$=\underbrace{(q/n)*1+(q/n)*2+\ldots+(q/n)*n}_{n\text{项}}+\underbrace{(1-q)*n}_{1\text{项}}$$

$$=q(n+1)/2+(1-q)n$$

如果已知K在R中，即$q=1$，则有

$$E(n)=(n+1)/2$$

由算法F很容易看出该算法的最坏复杂度为

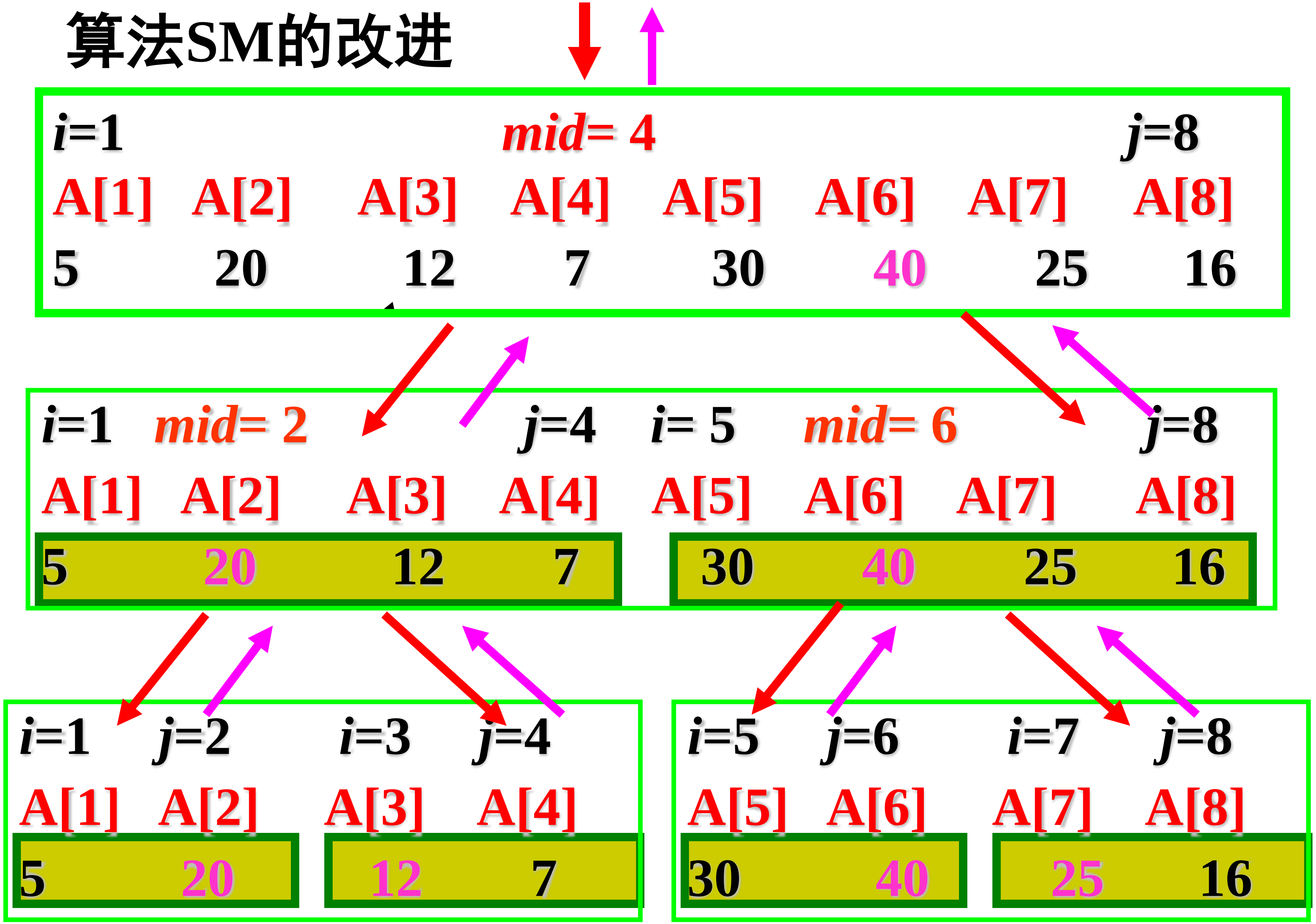
$$W(n)=\max\{T(I)|\ 1\leq I\leq n+1\}=n$$

时间复杂度小结

- 优点：计算简化
- 缺点：
  - ✓ 精度下降
  - ✓ T(n) 的解析式有时难以确定（导致开放问题）

- 度量1-度量3：计算在简化，精度在下降
  - ✓ 度量1：所有语句的执行时间之和
  - ✓ 度量2：所有语句的频率之和
  - ✓ 度量3：基本运算的次数

算法SM的改进



i=1
mid= 4
j=8
A[1] A[2] A[3] A[4] A[5] A[6] A[7] A[8]
5 20 12 7 30 40 25 16
i=1
mid= 2
j=4
i= 5
mid= 6
j=8
A[1] A[2] A[3] A[4] A[5] A[6] A[7] A[8]
5 20 12 7
30 40 25 16
i=1
j=2
i=3
j=4
A[1] A[2] A[3] A[4]
5 20
12 7
i=5
j=6
i=7
j=8
A[5] A[6] A[7] A[8]
30 40
25 16

算法BS（算法SM的改进）

算法BS（A , i , j . fmax , fmin）

/* 在数组A的第i个元素到第j个元素之间寻找最大和最小元素，已知$i \le j$ */

BS1 [递归出口]

```
if (i == j ) {fmax = fmin = A[i]; return; }
if (i == j – 1) {
    if (A[i] < A[j])  fmax = A[j], fmin = A[i];
    else  fmax = A[i], fmin = A[j];
    return; }
```

BS2 [取中值]

mid = (*i*+*j*)/2 ;

BS3 [递归调用]

BS（A，*i*，*mid*. gmax，gmax）；

BS（A，*mid*+1，*j*. hmax，hmin）；

BS4 [合并]

fmax = max(gmax，hmax);

fmin = min(gmin，hmin);

如果算法BS的基本运算为元素的比较，则BS对不同的输入A[i]到A[j]都有相同的基本运算次数。设T(n)表示其基本运算次数，则根据算法BS的递归过程，有如下的递归表达式：

$$T(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ 1 & n=2\\ T(\lfloor n/2 \rfloor)+T(\lceil n/2 \rceil)+2 & n>2\end{cases}$$

- T(n)的解析式难以获得。
- 特殊情况： ***n*=2*ᵏ*** （ ***k***是正整数 ）

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\times T(n/2)+2 \\
&= 2\times(2\times T(n/4)+2)+2 \\
&= 4\times T(n/4)+4+2 \\
&\cdots \qquad\qquad \cdots \\
&= 2^{k-1}\times T(2)+\sum_{i=1}^{k-1}2^{i} \\
&= 2^{k-1}+2^{k}-2 \\
&= \frac{3}{2}n-2
\end{aligned}
$$

算法SM 和 BS的时间效率比较

- 时间复杂度： $\frac{3}{2}n - 2 < 2(n-1)$

猜想：算法BS可能优于算法SM，就时间效率而言

- 课后习题：算法BS的时间复杂度 T(n) ≤ 5n/3 -2.

函数的比较

- 记f(n)=O(g(n))当且仅当存在正常数C 和 n_0，使得对任意的$n \geq n_0$，有 $f(n) \leq Cg(n)$.
- 记f(n)= Ω(g(n))当且仅当存在正常数C 和 n_0，使得对任意的$n \geq n_0$，有 $f(n) \geq Cg(n)$.
- 记f(n)= Θ $(g(n))$ 当且仅当存在正的常数 C_1， C_2和 n_0，使得对任意的 $n \geq n_0$，有 $C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$ 。

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \text{ 且 } f(n) = \Omega(g(n))$$

- 记f(n)= o$(g(n))$当且仅当 f(n)=O(g(n)) 且$f(n) \neq \Theta(g(n))$

大O表示法

- **例如：可以把f(n) = 1000n 记为 O(n^2)**
  - ✓ 虽然 n 较小时，1000 n 要比 n^2 大，但 n^2 以更快的速度增长，随着 n 的增大，n^2最终将更大. 在这一情况下，n=1000 是转折点。
- **f(n)=O(g(n))表示f(n)的增长率小于等于g(n)的增长率。这种记法称为大O表示法。一般说“大O…”，有时也说“至多…级（阶）的”**
  - ✓ 写成 1000n < n^2 这样的形式意义不明确；大O表示法更能突出**相对增长率**；

n → ∞的增长率

问题规模	1	logn	n	n^2
1	1	1	1	1
10	1	4	10	100
100	1	7	100	10000
1000	1	10	1000	1000000
10000	1	13	10000	100000000
100000	1	16	100000	10000000000
1000000	1	19	1000000	1000000000000

- 例 $f(n) = 3n - 2$ 是 $O(n)$.

证明： 由大O的定义，存在$C = 3$，$n_0 = 1$，使得对任意的 $n \ge n_0$ ，有

$$3n - 2 \le 3n \quad 即\ f(n) \le Cg(n) .$$

- 例 $f(n) = 3\log_2 n + \log_2\log_2 n$ 是 $O(\log_2 n)$

证明： 由大O的定义，存在$C = 4$， $n_0 = 2$，使得对任意的 $n \ge n_0$ ，有

$$3\log_2 n + \log_2\log_2 n \le 4\log_2 n \quad 即\ f(n) \le Cg(n) .$$

度量4：渐进时间复杂度

- 将时间复杂度 $T(n)$记为 $O(g(n))$，称为渐进时间复杂度；
  - ✓ 表明：$T(n)$的一个上界是g(n);

- 渐进时间复杂度O(g(n))表示的是n趋于无穷时的状况；关注的是函数的增长率。

大O的性质

- 定理1.1 若 $A(n)=a_m n^m+\ldots+a_1 n+a_0$ 是关于n的m次多项式，则

$$A(n)= O(n^m)$$

  - ✓ 多项式函数的阶取决于幂最高项，与其系数和其它较低阶项无关

- **性质：若$f_1(n)=O(g_1(n))$，$f_2(n)=O(g_2(n))$，则**

  (1) $f_1(n)+f_2(n)=O(\max\{g_1(n)，g_2(n)\})$

  (2) $f_1(n)\times f_2(n)=O(g_1(n)\times g_2(n))$

  - ✓ O(g(n))在 =右侧 表示 以g(n)为上界的函数集合

渐进时间复杂度小结

- 利用大O的性质，计算简化，精度下降
- 算法运行时间分析因TAOCP而流行；大O等记号是Knuth首倡；实际尚无统一规定，许多人在使用Θ()更愿用O()；建议O()尽量接近Θ()。

算法的阶

- $O(1)$ 表示算法的时间复杂度为一常数.
- $O(\log n)$、 $O(n)$、$O(n^2)$、$O(n^3)$、$O(n^m)$ 和 $O(2^n)$ 分别表示算法时间复杂度的阶至多为对数、线性、平方、立方、多项式和指数阶的，其中常数 $m \geq 1$.

$$O(1) < O(\log_2 \log_2 n) < O(\log_2 n) < O(n)$$

$$< O(n \log_2 n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$$

P=NP?

度量换算成真实时间

- CPU性能参数：MIPS(Million Instructions Per Second)。衡量单字长定点指令平均执行速度。常用的CPU>=100MIPS
- 10^8次CPU基本指令数 换算成 1S
  - 基本指令指的是加减乘除比较赋值等指令。
  - 位运算快 1S 执行10^9条
  - 10^6 次级别的文件输入输出 换算成 1S（通常不管）
  - 外设更慢；
- 基本运算 => 基本指令 => S

2. 算法的空间效率分析

- 类似时间效率分析

- 事后分析
- 事前估算
  - 空间度量（基本类型）
  - 空间复杂度S(n)
  - 渐进空间复杂度
  - 实际计算：字节

例

- 一段程序如下

```
int n,m;
int head[MAXN];
Int g[MAXN][MAXN];
```

- 空间复杂度是多少？
  - ✓ $S(n) = n^2 + n + 2$
  - ✓ $S(n) = O(n^2)$

3 算法时间与空间分析

- 一个算法在不同的执行时间内，它占用的内存空间量不一定相等，占用空间量*y*是时间*x*的函数，即$y=f(x)$。
- 称积分 $\int_0^t f(x)dx$ 为该算法的时空积分，其中*t*是该算法的执行时间。
- 基于时空积分，可以比较算法优劣，时空积分较小的算法较优。

例如，一个算法执行时间为30秒，前10秒算法占用60个字节，第二个10秒算法占用70个字节，最后10秒算法占用80个字节。该算法的时空分布如图所示。

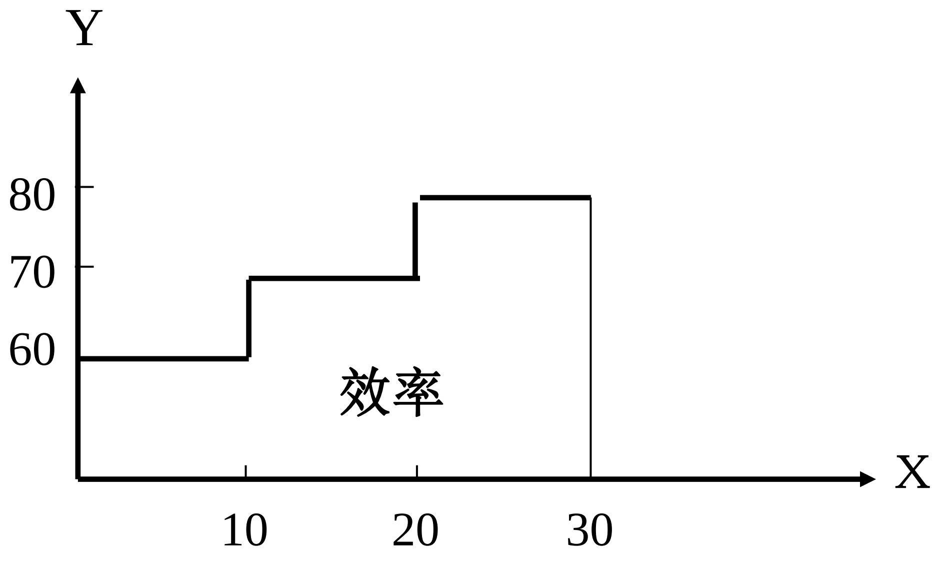
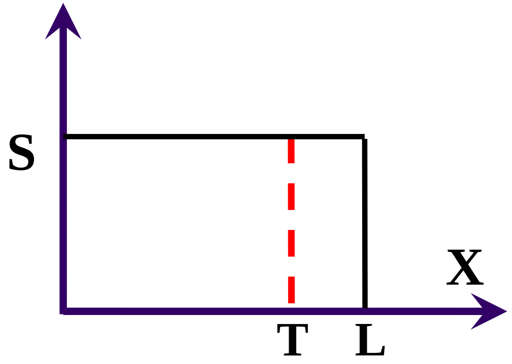


图 时空分布示意图

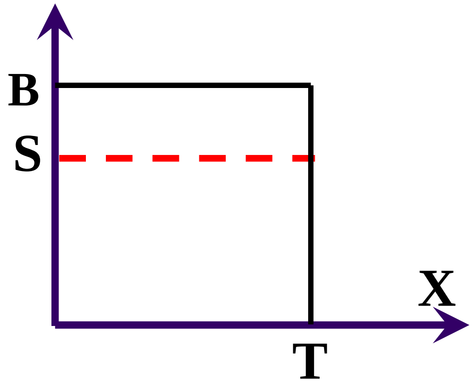
显然算法的时空积分为：

60*10+70*10+80*10=2100（字节秒）

算法SM和算法BS的时空积分比较



(a) SM 的时空图



(b) BS 的时空图

在算法BS运行过程中：

1、需保留递归所需参数，递归最深调用层数正比于 $\log_2 n$，所需存储空间为 $\log_2 n$ 的常数倍；

2、始终需要保留输入，占用空间为 n 的常数倍。

- 算法SM： 时间 $L = a \times 2(n-1)$，空间 $S \approx b \times n$;
- 算法 BS： 时间 $T \approx a \times (5n/3-2)$, $T < L$，

  空间为 $B \approx c \times \log_2 n + b \times n$, $B > S$,
- $L = T + \Delta L$ ， $B = S + \Delta B$

  $\Delta L \approx a \times [2 \times (n-1) - (5n/3-2)] = a \times n/3$， $\Delta B \approx c \times \log_2 n$.
- $W_{SM} = (T + \Delta L) \times S$ ， $W_{BS} = (S + \Delta B) \times T$
- $W_{SM} - W_{BS} = \Delta L \times S - \Delta B \times T$

  $\approx a \times b \times n^2/3 - c\log_2 n \times a(5n/3-2)$
- 当 n 较大时， $W_{SM} > W_{BS}$ ， 算法 BS 优于算法 SM

均摊代价（均摊时间复杂度）

- 均摊代价：操作序列中一个操作的平均时间复杂度。
- 摊还分析 (Amortized Analysis)：求均摊代价的过程。
- 摊还分析方法——聚合分析
  1. 估算n个操作的总代价为T(n);
  2. 每个操作的摊还代价为T(n)/n ;

例：储钱罐

- **问题描述：对储钱罐可以做两种操作：**
  1. Save()： 存进1个硬币；时间复杂度为1
  2. Draw(k) : 取k次，每次1个硬币；若k大于罐中实有硬币数，则取走罐中所有硬币；时间复杂度为k

储钱罐初始为空，对储钱罐连续做n个Save/Draw操作，求该操作序列的总时间。

操作序列的时间复杂度分析

- **Save操作的时间复杂度为1，**
- **Draw操作时间复杂度为n，**
- **n个Save/Draw操作序列的最坏时间复杂度T(n)= n*n**

操作序列的摊还分析

- n个操作中，Save操作累计最多能往储钱罐存n个硬币，全体Save操作的时间复杂度为n;
- 1次Draw操作最多能将其前Save操作存的硬币都取走，多次Draw操作最多能取走Save操作累计存的全部硬币，全体Draw操作的时间复杂度为n
- n个Save/Draw操作序列的T(n) = 2n
- 单个Save/Draw操作的均摊代价为2;

相对于Draw操作的时间复杂度n，均摊代价2能更好的表达n个操作的总代价

均摊代价小结

- 均摊代价能更好的表达一个操作序列的总代价
  - 序列中某个操作的代价高，但其均摊代价可能较低
- 相对于期望时间复杂度：均摊时间复杂度不需要概率；均摊时间复杂度保证 最坏情况下 每个操作的平均性能
- 摊还分析的常用方法：聚合分析法、会计法、势能法

总结

- 时间效率分析
  - ✓ 事后估计方法
  - ✓ 事前分析方法

    度量1：所有语句执行时间之和

    度量2：所有语句频率之和

    度量3：时间复杂度

    度量4：渐进时间复杂度

计算简化

精度下降

- 空间效率分析：类似时间效率
- 效率分析依然开放：时空积分，均摊代价

思考

- 算法的最坏时间复杂度 VS 算法的阶?
- 算法的最好时间复杂度 VS 输入规模最小 ?
- 好的算法 VS 好的计算机 ?
  - 摩尔定律
- 请尝试设想一种新的算法效率度量方式

数据结构课程的学习目标

- 熟练掌握时空效率评估（分析）
- 掌握经典的数据结构及其理论分析（工具）
- 应用数据结构求解问题
  - ✓ 选择合适的数据结构
  - ✓ 修改现有的数据结构
  - ✓ 创造新的数据结构