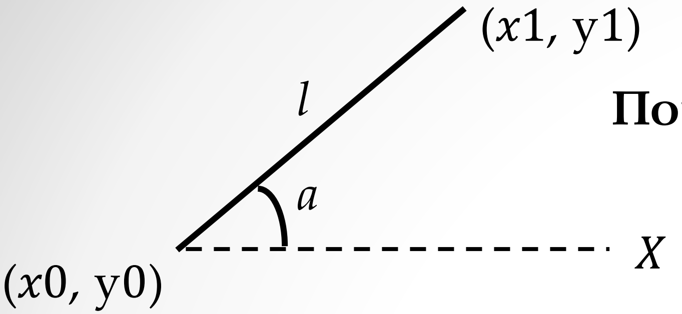
Компьютерная графика

Практическое занятие 2. Каркасная модель трехмерного тела

Хачумов М.В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры информационных технологий

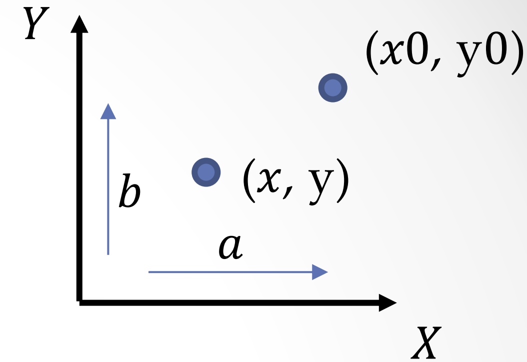
Плоские преобразования



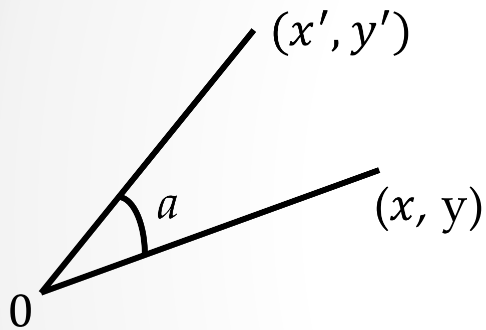
Поворот относительно X

$$x1 = x0 + l\cos\alpha;$$
$$y1 = y0 + l\sin\alpha\,.$$

Сдвиг



$$[x_0 \;\; y_0] = [x \;\; y] + [a \;\; b]$$

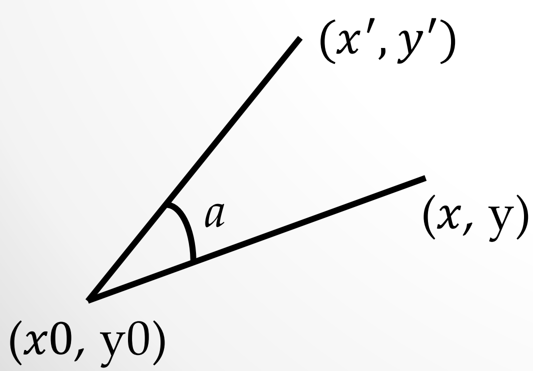


Поворот относительно 0

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad [x' \; y'] = [x \; y]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Если необходимо осуществить поворот на угол *a* относительно произвольной точки, то производиться сдвиг в начало координат, поворот на угол *a* и возврат в исходную точку

Поворот относительно X0



$$[x' \; y'] = [x_0 \;\; y_0] + [x - x_0 \quad y - \; y_0]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

$$x' = x_0 + (x - x_0)\cos(\alpha) - (y - y_0)\sin(\alpha)$$
$$y' = y_0 + (x - x_0)\sin(\alpha) + (y - y_0)\cos(\alpha)$$

Сложное произведение

В сложных случаях, когда поворот совмещается с другими преобразованиями, хорошо бы представить весь этот набор операций в виде матричного произведения

$$[x'\ y'] = [x\ y]V;\ \ V = V_1 \cdot V_2 \dots V_n$$

Какие операции можно выразить произведением матриц 2x2?

Для операции сдвига матрица 2x2 матрица не получается. Поэтому будем вводить однородные координаты и использовать матрицу 3x3.

$$[x' \ \ y' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}.$$

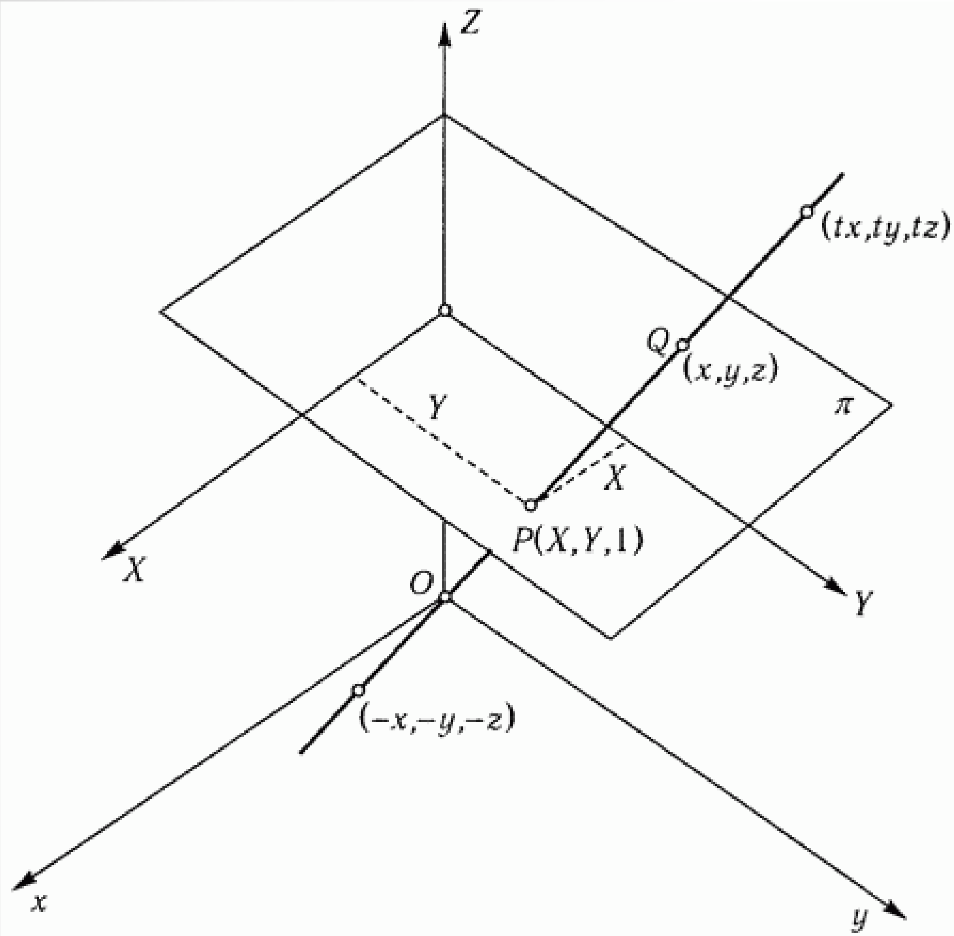
$$[x' \ \ y' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ 1]\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[x' \ \ y' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ 1] \cdot \mathrm{R}$$

Поворот + сдвиг

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

Однородные координаты



Проективная ***плоскость*** (множество однородных координат) обычно определяется как множество прямых в R^3, проходящих через начало координат.

Любая такая ***прямая*** однозначно определяется ***точкой***, не совпадающей с началом координат 0.

Пусть данная прямая проходит через точку Q с координатами (x, y, z).

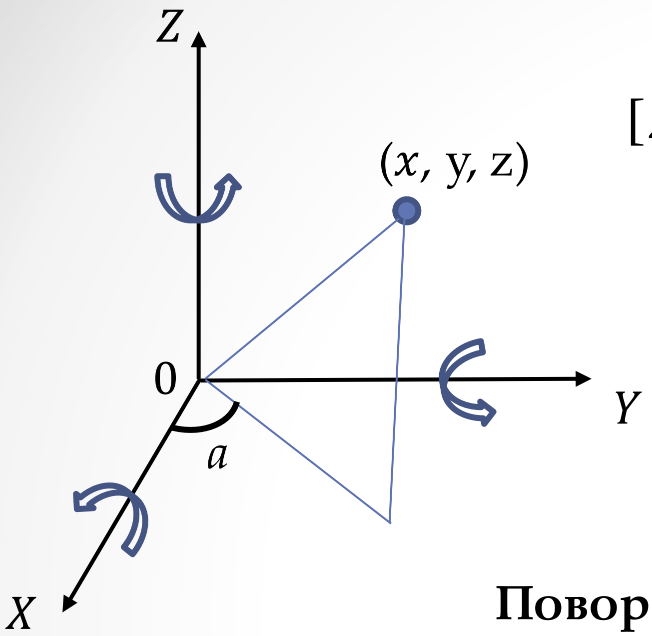
Однородные координаты соответствующей точки на проективной плоскости — это тройка чисел $(x\colon y\colon z)$, определённая с точностью до пропорциональности $(tx\colon ty\colon tz)$.

Например, (0:1:1)=(0:2:2).

Декартовы координаты ⟷ Однородные координаты

Проведём плоскость z=1. Тогда точке с однородными координатами $(x\colon y\colon z)$, соответствует точка на плоскости с координатами (X, Y) = $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. Обратно, точка с декартовыми координатами (X, Y) в однородных координатах запишется как (X: Y: 1).

Трехмерный случай



$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]V \qquad V = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

$$[x' \; y' \; z' \; 1] = [x \; y \; z \; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот относительно оси OZ:

$$[x \quad y \quad z] \times \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [x \; y \; z \; 1]\begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот относительно оси OY:

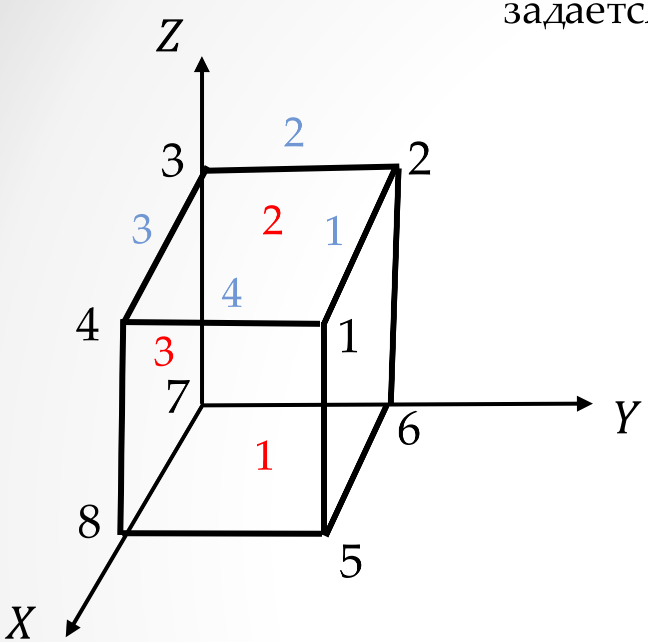
$$[x \;\; y \;\; z\,]\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Поворот относительно оси OX:

$$[x \quad y \quad z] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

Задание. Каркасная модель куба

Модель куба задается в виде набора вершин, ребер и граней. Каркас задается в виде набора вершин и ребер



Номер вершины	Координаты вершины		
	X	Y	Z
1	1	1	1
2	0	1	1
3	0	0	1
4	1	0	1
5	1	1	0
6	0	1	0
7	0	0	0
8	1	0	0

Обозначение ребер
1 (1 2) 2 (3 2) 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

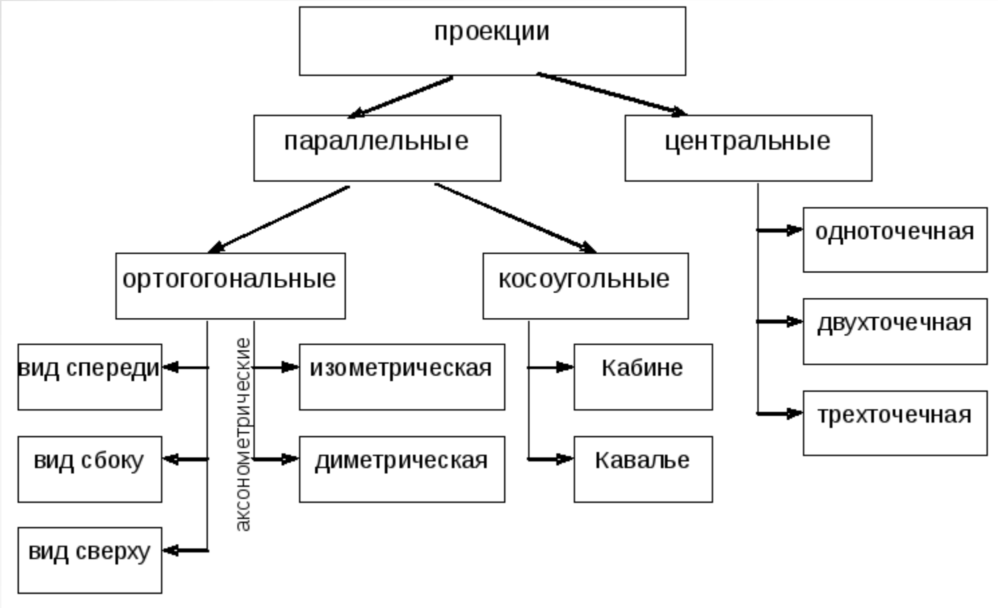
Обозначение граней
1 (5 6 7 8) 2 3 4 5 6

Мировые координаты – связаны с центром объекта наблюдения

Если куб не в центре мировых координат, то необходимо осуществить его сдвиг в центр.

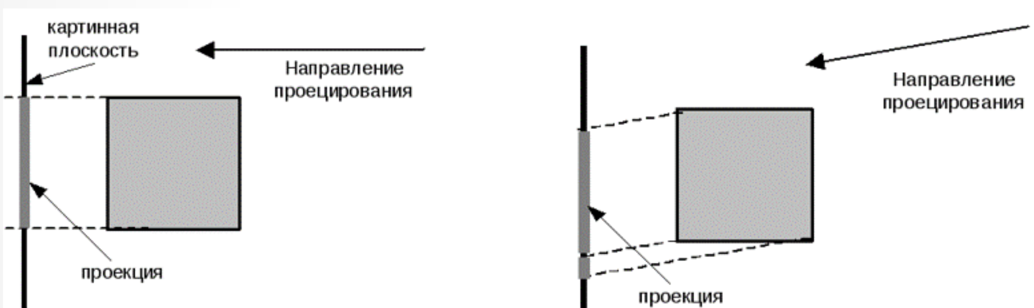
$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]V$$

Проективные преобразования



Ортографические – направления совпадают, т. е. направление проецирования является нормалью к проекционной плоскости

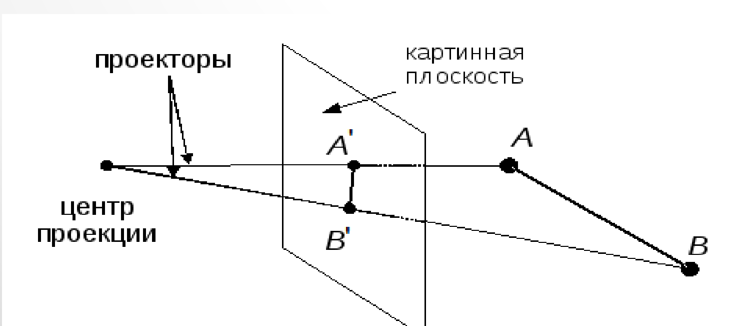
Косоугольные – направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости не совпадают

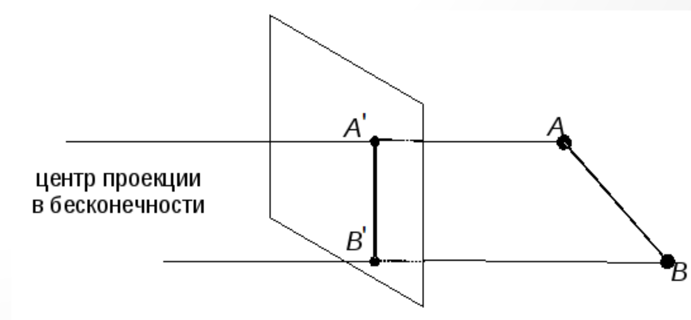


ортографические проекции

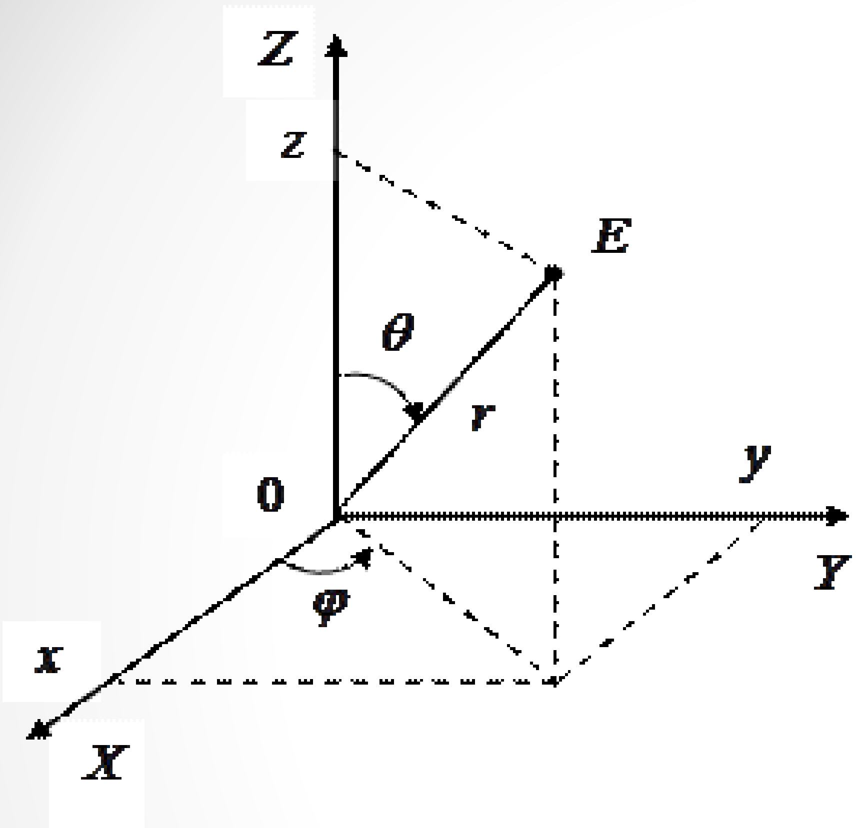
косоугольные проекции

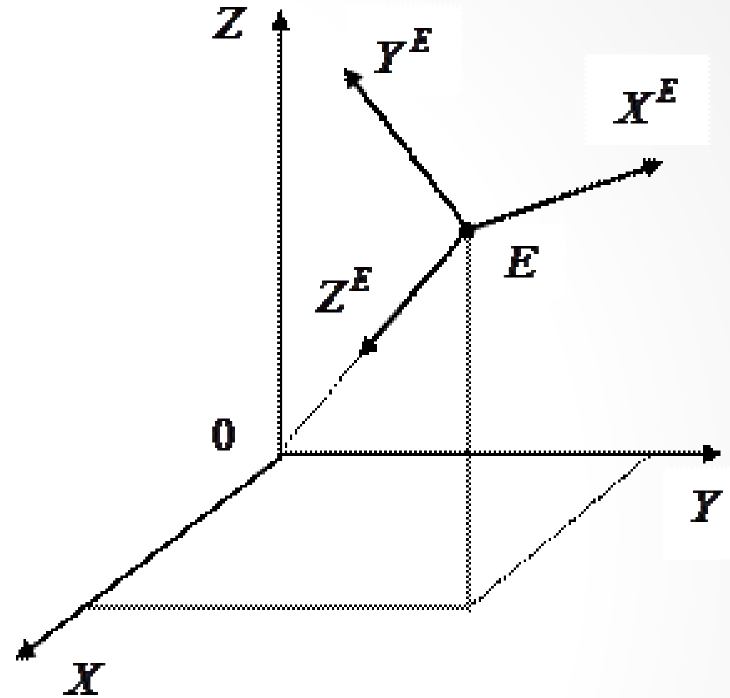
Если проекционные плоскости не перпендикулярны главным координатным осям, то такие проекции называются **аксонометрическими.**





Мировые и видовые координаты





$$E(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$V = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x_e \quad y_e \quad z_e \quad 1] = [x_w \quad y_w \quad z_w \quad 1]V$$

Перспективная проекция и переход в экранные координаты

$$\frac{P'Q}{EQ} = \frac{PR}{ER}$$

Отсюда получим

$$\frac{X}{d} = \frac{x_e}{z_e}; \qquad X = d\,\frac{x_e}{z_e}; \quad Y = d\,\frac{y_e}{z_e}$$

Мировые координаты

↓ трехмерные преобразования

Видовые координаты

↓ проецирование

Координаты проекции

↓ двумерные преобразования

Экранные координаты