Теория вероятностей и статистика в Машинном Обучении

Случайные величины

1. Определение случайной величины
2. Дискретные случайные величины
3. Их числовые характеристики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Важнейшим понятием теории вероятностей является понятие **случайной величины**, т. е. величины, которая в результате опыта может принять в зависимости от случая какое-либо значение из некоторого множества, однако заранее, до проведения опыта, невозможно сказать, какое именно значение она примет.

Случайная величина — это число, которое ставится в соответствие каждому возможному исходу опыта. Поскольку исходы опыта описываются **элементарными событиями**, случайную величину удобно рассматривать как функцию $X = X(\omega)$, определенную на пространстве элементарных событий Ω.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$ — некоторое вероятностное пространство.

Числовая функция $X(\omega)$, заданная на множестве Ω, называется *измеримой* относительно σ-алгебры $\mathcal{S}$, если для любого $x \in \mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{S}$. *Случайной величиной* называется числовая функция $X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω и измеримая относительно σ-алгебры событий $\mathcal{S}$.

Примеры

Пример Проверим, является ли число X очков, выпавших при бросании игральной кости, случайной величиной.

Пространство элементарных событий в этом случае имеет вид $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где элементарное событие ω_i состоит в том, что выпало i очков ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). В качестве σ-алгебры $\mathcal{S}$ выберем максимальную σ-алгебру, соответствующую Ω. Вероятности элементарных событий $\mathbf{P}(\omega_i) = 1/6$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Число выпавших очков X является функцией от элементарных событий, причем $X(\omega_i) = i$. При этом

$$\{X \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} = \begin{cases} \varnothing, & x < 1, \\ \{\omega_1\}, & 1 \leqslant x < 2, \\ \{\omega_1, \omega_2\}, & 2 \leqslant x < 3, \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, & 3 \leqslant x < 4, \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, & 4 \leqslant x < 5, \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, & 5 \leqslant x < 6, \\ \Omega, & x \geqslant 6, \end{cases}$$

и все эти множества принадлежат максимальной σ-алгебре $\mathcal{S}$. Поэтому число выпавших очков X является случайной величиной.

Функция распределения случайной величины

Законом распределения вероятностей случайной величины называется правило, устанавливающее соответствие между значениями этой случайной величины (или множествами значений) и вероятностями того, что случайная величина примет данное значение (или попадет в соответствующее множество).

Функцией распределения вероятностей (или, короче, *функцией распределения*) случайной величины X называется функция

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leqslant x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Монотонность функции распределения. *Функция $F(x)$ является неубывающей, т. е. для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, таких что $x_1 < x_2$,*

$$F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

Ограниченность функции распределения. *Функция $F(x)$ является ограниченной, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1,$$

при этом на концах числовой прямой

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Непрерывность функции распределения. *Функция $F(x)$ является непрерывной справа, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$F(x) = F(x+0) = \lim_{\substack{z \to x \\ z > x}} F(z).$$

Примеры функции распределения

Найдем функцию распределения случайной величины X — числа очков выпавших при бросании игральной кости.

В ероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$ и события $\{X \leqslant x\}$ для всех $x \in \mathbb{R}$. При этом $\mathbf{P}\{\omega_i\} = 1/6$, поэтому

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\} = \begin{cases} \mathbf{P}(\varnothing), & x < 1, \\ \mathbf{P}\{\omega_1\}, & 1 \leqslant x < 2, \\ \mathbf{P}\{\omega_1, \omega_2\}, & 2 \leqslant x < 3, \\ \mathbf{P}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, & 3 \leqslant x < 4, \\ \mathbf{P}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, & 4 \leqslant x < 5, \\ \mathbf{P}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, & 5 \leqslant x < 6, \\ \mathbf{P}(\Omega), & x \geqslant 6, \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1/6, & 1 \leqslant x < 2, \\ 2/6, & 2 \leqslant x < 3, \\ 3/6, & 3 \leqslant x < 4, \\ 4/6, & 4 \leqslant x < 5, \\ 5/6, & 5 \leqslant x < 6, \\ 1, & x \geqslant 6. \end{cases}$$

Дискретные случайные величины

academy

Дискретная случайная величина X — это случайная величина, принимающая значения из конечного или счетного множества.

З а к о н   р а с п р е д е л е н и я дискретной случайной величины задается чаще всего не функцией распределения, а *рядом распределения* — таблицей

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

в которой $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — р а з л и ч н ы е значения дискретной случайной величины X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — отвечающие этим значениям вероятности. Число столбцов в этой таблице может быть конечным (если соответствующая случайная величина принимает конечное число значений) или бесконечным (счетным).

Пример В лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышей. Количество и размеры выигрышей таковы:

Размер выигрыша, руб.	2000	500	100
Количество билетов	1	4	10

X	0	100	500	2000
p	0,85	0,10	0,04	0,01

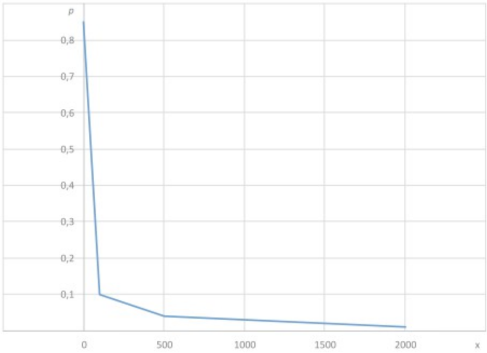

График функции распределения

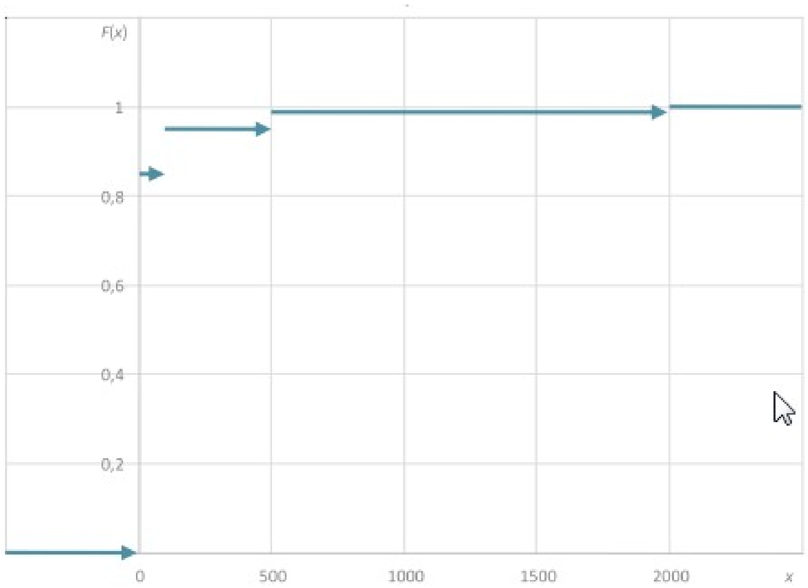

График функции распределения

Функция распределения случайной величины X имеет следующий вид:

$$F(x) = \mathrm{P}\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}85, & 0 \leqslant x < 100, \\ 0{,}85 + 0{,}10, & 100 \leqslant x < 500, \\ 0{,}85 + 0{,}10 + 0{,}04, & 500 \leqslant x < 2000, \\ 0{,}85 + 0{,}10 + 0{,}04 + 0{,}01, & x \geqslant 2000 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}85, & 0 \leqslant x < 100, \\ 0{,}95, & 100 \leqslant x < 500, \\ 0{,}99, & 500 \leqslant x < 2000, \\ 1, & x \geqslant 2000. \end{cases}$$

=

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Математическим ожиданием д и с к р е т н о й случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}(X)=\sum_i x_i p_i=\sum_i x_i \mathbf{P}\{X=x_i\},$$

Найдем **математическое ожидание индикатора события**

I_A	0	1
p	$1-\mathbf{P}(A)$	$\mathbf{P}(A)$

Поэтому математическое ожидание индикатора события A по определению равно $\mathbf{E}(I_A) = 0[1-\mathbf{P}(A)] + 1\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)$.

$$\mathbf{E}(I_A) = \mathbf{P}(A).$$

Свойства мат.ожидания

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает следующими **свойствами.**

Формула для математического ожидания константы. *Для любой неслучайной величины* $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}(c) = c.$$

Линейность математического ожидания. *Для любой дискретной случайной величины* X *и любой неслучайной величины* $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}(X).$$

Аддитивность математического ожидания. *Для любых дискретных случайных величин* X *и* Y

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Формула для математического ожидания произведения независимых случайных величин. *Для любых независимых дискретных случайных величин* X *и* Y

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Дисперсия

academy

Дисперсией случайной величины X называется число

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\{[X - \mathbf{E}(X)]^2\},$$

Формула для дисперсии константы. *Для любой неслучайной величины $c \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{Var}(c) = 0;$$

Квадратичная нелинейность дисперсии. *Для любой случайной величины X и любой неслучайной величины $c \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{Var}(cX) = c^2\mathbf{Var}(X).$$

Аддитивность дисперсии независимых случайных величин (Равенство Бьенэме). *Для любых н е з а в и с и м ы х случайных величин X и Y*

$$\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется неотрицательное значение квадратного корня из дисперсии:

$$\sigma_X = +\sqrt{\mathbf{Var}(X)}.$$