Теория вероятностей и статистика в Машинном Обучении

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. КОМБИНАТОРИКА
2. Определение вероятности
3. Условные вероятности. Формула Байеса.

Комбинаторика

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий расположения объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть совершены.

Задачи, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов совершения каких либо действий - *к о м б и н а т о р н ы е.*

Терминология: р а з м е щ е н и я

п е р е с т а н о в к и

с о ч е т а н и я

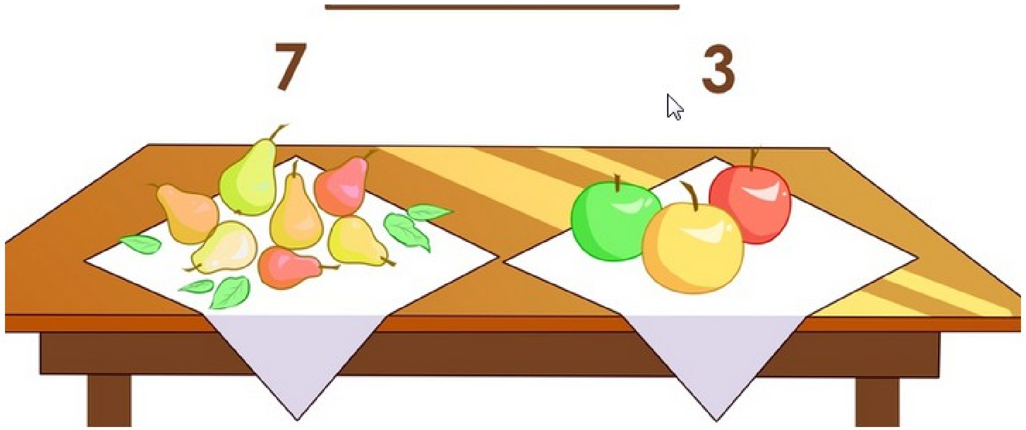
Правило суммы и правило произведения

Правило суммы. *Пусть требуется выполнить одно из каких-либо m действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то выполнить одно из этих m действий можно $\underline{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}$ способами.*

Правило произведения. *Пусть требуется выполнить какие-либо m действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то все m действий могут быть выполнены $\underline{n_1 n_2 \cdots n_m}$ способами.*

Задачи на правило суммы

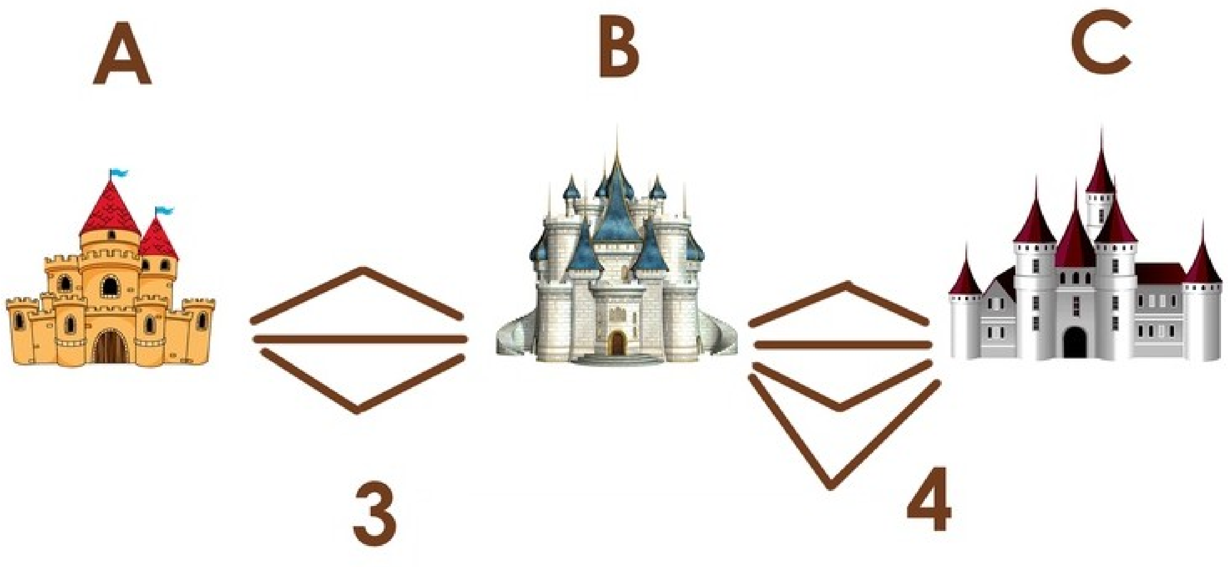
На столе лежат 3 яблока и 7 груш разных сортов. Сколькими способами можно взять один фрукт?



7+3=10

Задачи на правило произведения

Известно, что из города A до города B можно добраться по одной из 3 дорог.
При этом из города B до города C можно добраться по одной из 4 дорог.
Сколько существует способов добраться из города A в город C, проходя через город B?



3*4=12

Формулы комбинаторики

Перестановки
Используются все элементы
Порядок элементов важен

$$P_n = n!$$

Размещения
Используются не все элементы
Порядок элементов важен

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетания
Используются не все элементы
Порядок элементов не важен

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

С повторениями

Без повторений

Комбинации без повторений

academy

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из n различных элементов. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Назовем множество, состоящее из k элементов, *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число от 1 до k, причем различным элементам множества соответствуют разные числа.

Размещениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

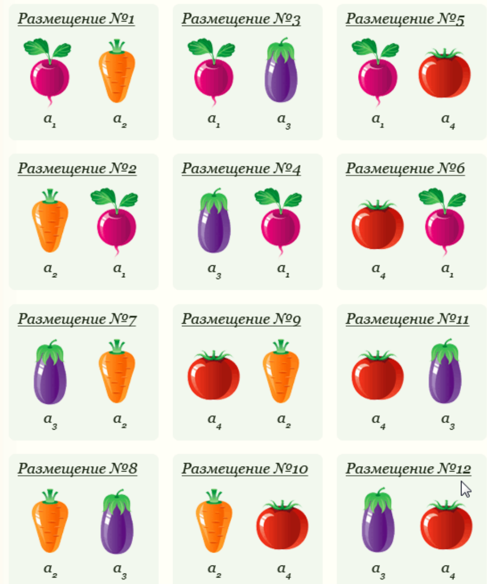
Размещения

Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

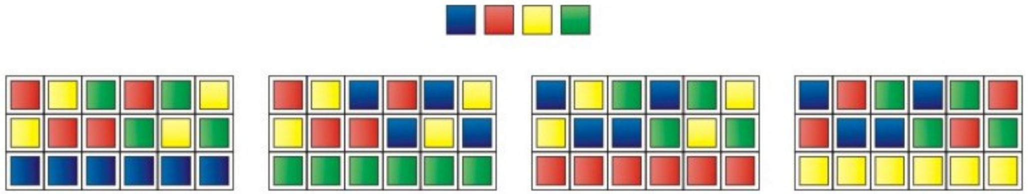
Группы с одинаковым набором элементов расположенных в разном порядке считаются разными.

1. Дано 4 предмета, размещения по 2 позициям: $A^2_4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$



2. Дано 4 цвета, размещения по 3 позициям:

$$A^3_4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{24}{1} = 24$$



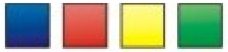
Размещения (варианты размещения четырех предметов по трем ячейкам)

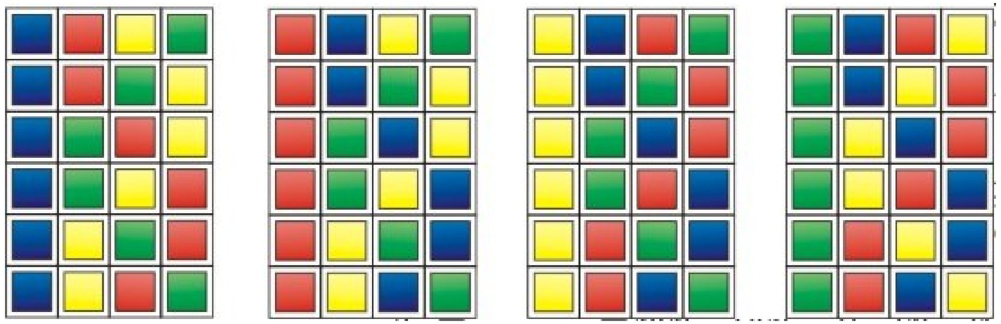
Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n, т. е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

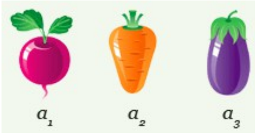
Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

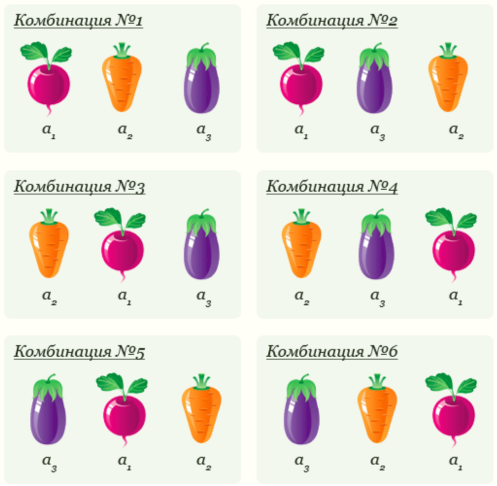




4!



3!



Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k равно

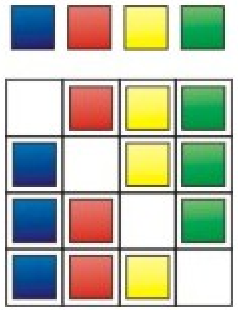
$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}.$$

При этом $C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}.$$

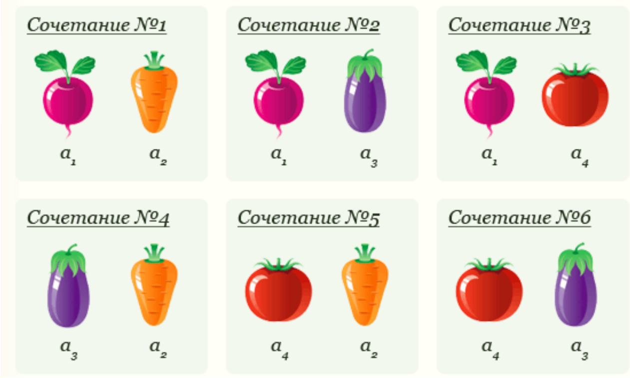
Число сочетаний из n по k – это число способов, которыми можно из n предметов выбрать k, порядок которых неважен.

$$C^3_4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$



Сочетания (неупорядоченные размещения)

$$C^2_4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$$



Комбинации с повторениями

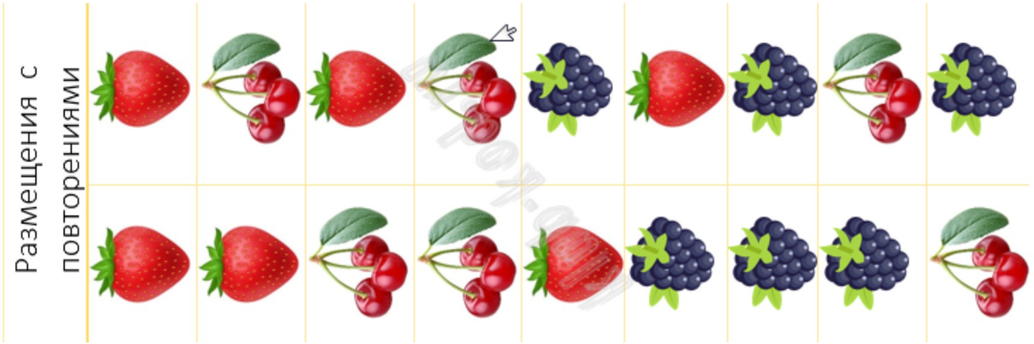
Размещения с повторениями

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{A}_n^k = n^k.$$

Число размещений с повторениями из 3 элементов по 2: $3^2=9$



Перестановки с повторениями

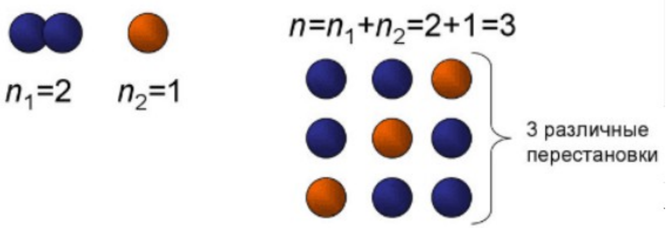
Число перестановок с повторениями: $\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Перестановками с повторениями называются соединения из генеральной совокупности, каждое из которых содержит n элементов, среди которых элемент

a1 повторяется n1 раз,
a2 повторяется n2 раз,
. . . .
an повторяется nk раз

n1 + n2 + … + nk = n

и которые отличаются друг от друга только порядком расположения различных элементов.



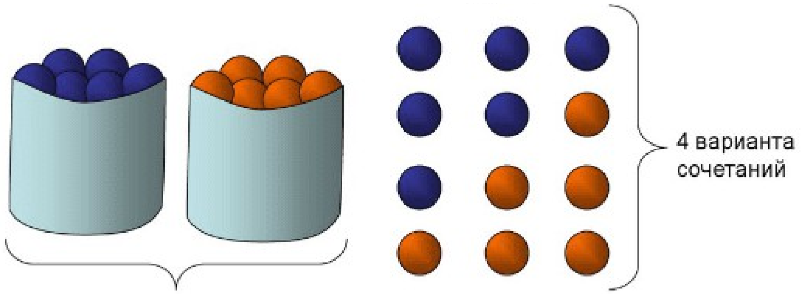
$$\overline{P}_{3=2+1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Сочетания с повторениями

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}.$$



$$C^3_2 = \frac{(5-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{6} = 4$$

n=2 k=3

Задача. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

$$\overline{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

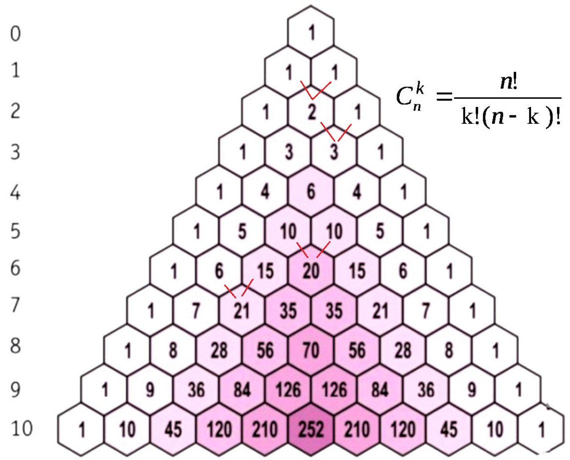
Треугольник Паскаля

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	C_0^0								
1	C_1^0	C_1^1							
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2						
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3					
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4				
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5			
6	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6		
7	C_7^0	C_7^1	C_7^2	C_7^3	C_7^4	C_7^5	C_7^6	C_7^7	
8	C_8^0	C_8^1	C_8^2	C_8^3	C_8^4	C_8^5	C_8^6	C_8^7	C_8^8

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	136	136	84	36	9	1

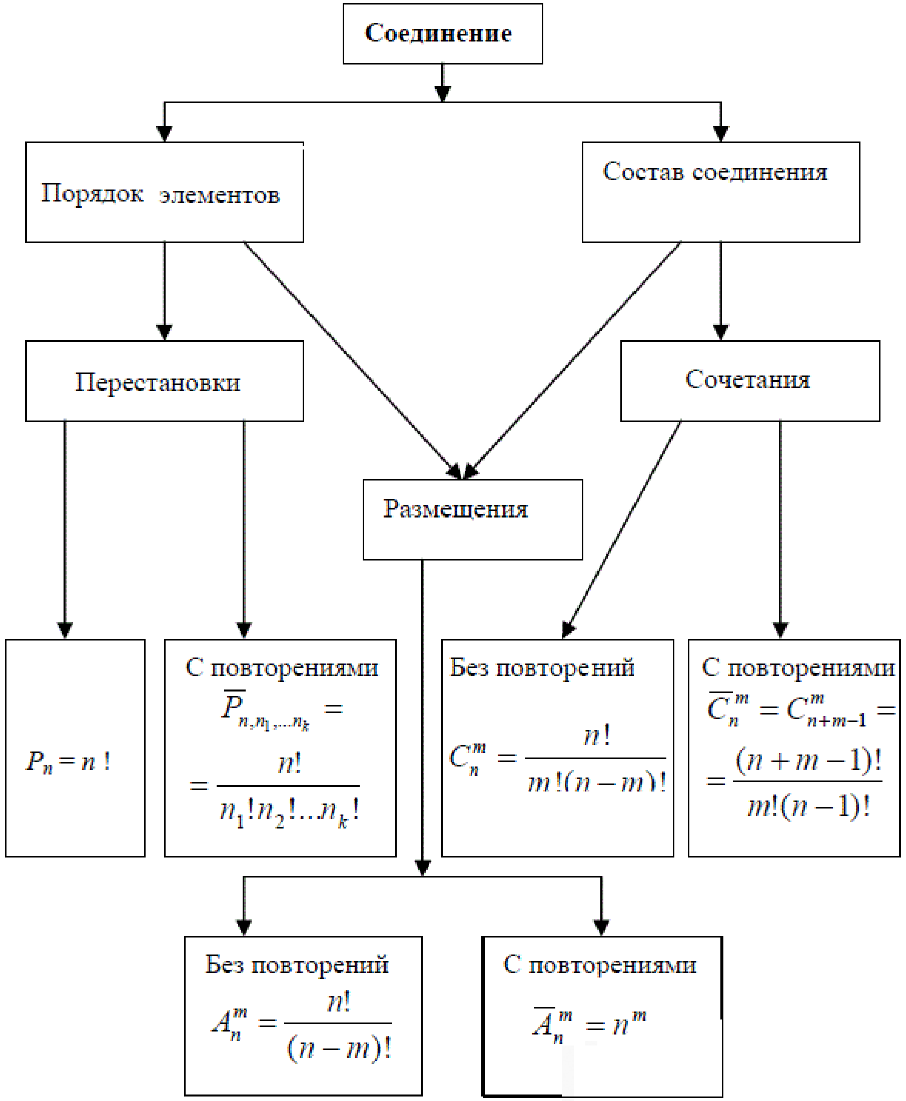
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6
\end{array}
$$



$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Сводка формул



Решение комбинаторных задач