Теория вероятностей и статистика в Машинном Обучении

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Комбинаторика
2. Определение вероятности
3. Условные вероятности. Формула Байеса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

academy

Случайное событие A, связанное с опытом S, — это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта S, причем заранее, до проведения опыта, неизвестно, произойдет оно или нет.

С каждым опытом обязательно связаны два события — <u>достоверное</u> и <u>невозможное</u>, которые обозначаются особенно.

Достоверным событием, связанным с опытом S, называется такое событие Ω, которое обязательно произойдет в результате опыта S.

Невозможным событием, связанным с опытом S, называется такое событие $\varnothing$, которое обязательно не произойдет в результате опыта S.

Примеры: 1) *Опыт* подбрасывание монеты (исходы – выпадение орла, выпадение решки)

A — выпадение «орла», B — выпадение «решки»

Ω — выпадение «орла» или «решки» (достоверное событие),

$\varnothing$ — невыпадение ни «орла», ни «решки» (невозможное событие).

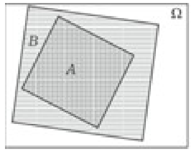
2) Подбрасывание игральной кости (исходы – A1, A2 , A3 , A4 , A5 , A6)

Вероятность наступления события характеризует меру возможности наступления этого события при проведении опыта.

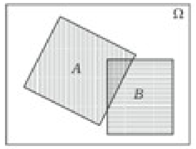
Операции над событиями

(связанными с одним и тем же опытом S)

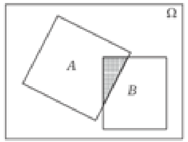
Событие A *влечет за собой* событие B (или событие A *вложено* в событие B), если каждое появление события A сопровождается появлением события B. Это обозначается как $A \subseteq B$. События A и B называются *эквивалентными*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эквивалентность обозначается так: $A = B$.



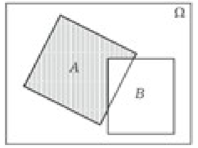
Объединением событий A и B называется событие $A \cup B$, которое наступает всегда, когда наступает либо событие A, либо событие B (либо одновременно и A, и B).



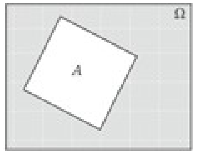
Пересечением событий A и B называется событие $A \cap B$, которое наступает всегда, когда события A и B наступают одновременно.



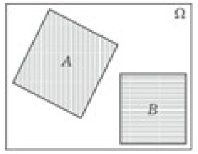
Дополнением события B до события A (или *разностью событий A и B*) называется событие $A \setminus B$, которое наступает всегда, когда наступает событие A и при этом не наступает событие B.



Противоположным событию A называется событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (читается «не A»), которое наступает всегда, когда событие A не наступает.



События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$, т. е. если в результате опыта события A и B не могут наступить одновременно.

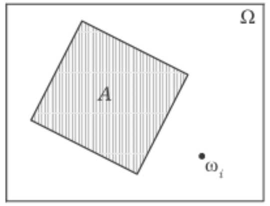


Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \neq j$), и их объединение эквивалентно достоверному событию ($H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$).

Диаграммы Венна — Эйлера

Случайное событие ω, связанное с опытом S, которое невозможно представить как объединение более простых событий, связанных с тем же опытом, называется *элементарным событием*.

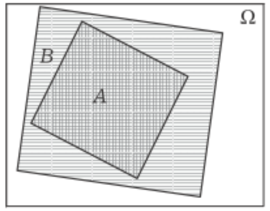
A



На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, элементарные события ω_i — точками внутри области, соответствующей Ω. При этом любому случайному событию A будет соответствовать некоторая геометрическая фигура внутри области, соответствующей Ω (заштрихованная фигура).

Невозможному событию ∅ соответствует пустое множество (т. е. не соответствует никакая фигура на диаграмме).

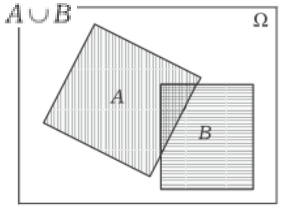
Событие A влечет за собой событие B



б)

Событие A влечет за собой событие B, если все элементарные события, входящие в A, входят и в B

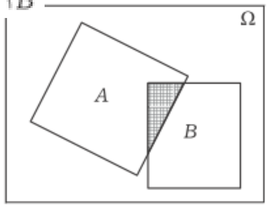
Объединение $A \cup B$



в)

Объединение $A \cup B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, влекущих, по крайней мере, одно из событий A или B

Пересечение $A \cap B$

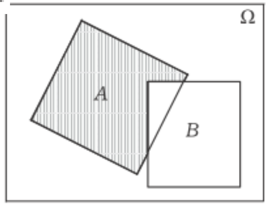


г)

Пересечение $A \cap B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, влекущих одновременно оба события A и B

Диаграммы Венна — Эйлера

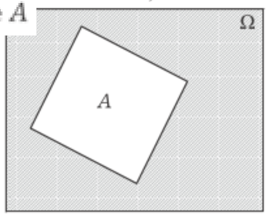
Дополнение $A \setminus B$



д)

Дополнение $A \setminus B$ события B до события A состоит из всех элементарных событий, влекущих событие A и при этом не влекущих событие B

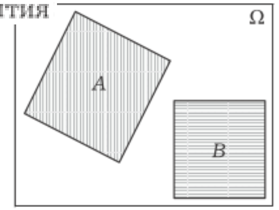
$\bar{A}$, противоположное A



е)

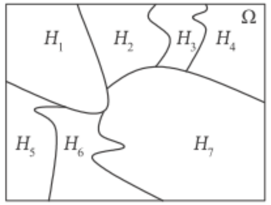
Событие $\bar{A}$, противоположное событию A, состоит из всех элементарных событий, не влекущих событие A

Несовместные события



ж)

Несовместные события не имеют общих элементарных событий



з)

Полная группа событий

Свойства операций

Коммутативность объединения событий:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Ассоциативность объединения событий:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Другие свойства объединения событий:

$$A \cup A = A, \quad A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cup \Omega = \Omega;$$

Коммутативность пересечения событий:

$$A \cap B = B \cap A.$$

Ассоциативность пересечения событий:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Другие свойства пересечения событий:

$$A \cap A = A, \quad A \cap \bar{A} = \varnothing, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap \Omega = A;$$

Противоположность достоверного и невозможного событий:

$$\bar{\Omega} = \varnothing, \quad \bar{\varnothing} = \Omega;$$

Выражение для дополнения события:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B};$$

Дистрибутивность пересечения событий относительно объединения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Правила де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ВЕРОЯТНОСТИ

academy ✖ МАИ

Если множество элементарных событий конечно, и все элементарные события ***одинаково*** *возможны, то вероятность произвольного события А вычисляется по формуле:*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{M}{N}.$$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ конечно, все элементарные события одинаково возможны

такая вероятностная схема называется *классической*.

Вероятность $\mathbf{P}(A)$ наступления события A, состоящего из M элементарных событий, входящих в Ω **=**
отношение числа M элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу N элементарных событий.

Свойства вероятности

Неотрицательность вероятности. *Для всех событий A*

$$\mathbf{P}(A) \geqslant 0.$$

Нормированность вероятности:

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Аддитивность вероятности. *Для всех событий A и B, таких что $A \cap B = \varnothing$,*

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Примеры вычисления вероятности

1. На экзамене студенту предоставляется выбор билетов: два сложных и 10 легких. Найти вероятность того, что попадется легкий билет.

A – вытаскивание легкого билета

N=10+2
M=10
P(A) = 10/12

2. Найдите вероятность того, что в группе из 30 человек есть общие дни рождения.

Найдем вероятность того, что в группе из 30 человек ни у кого нет общих дней рождений.

Вероятность совпадения дней рождения двух человек с любым днём в году: 1/365

$$1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{29}{365}\right)$$

P>0,7

УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

academy ✖ МАИ

К условиям, при которых изучалась вероятность наступления события A, добавляем *условие* наступления события B.

P (A | B) — вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло, или **условная вероятность** события A при условии B

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Свойства условной вероятности:

Неотрицательность условной вероятности. *Для всех событий A и любого события B, такого что* $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\mathbf{P}(A|B) \geqslant 0.$$

Нормированность условной вероятности. *Для любого события B, такого что* $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\mathbf{P}(\Omega|B) = 1.$$

Аддитивность условной вероятности. *Для всех событий A и C, таких что* $A\cap C = \varnothing$, *и любого события B, такого что* $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\mathbf{P}(A\cup C|B) = \mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(C|B).$$

Формулы с условной вероятностью

academy ✖ МАИ

Формула умножения вероятностей. *Если* $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

Формула полной вероятности. *Если события* $H_1, H_2, \dots, H_s \in \mathcal{S}$ *образуют полную группу и имеют положительные вероятности, то для любого события* $A \in \mathcal{S}$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2)\mathbf{P}(H_2) + \dots + \mathbf{P}(A|H_n)\mathbf{P}(H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i).$$

Формула Байеса

Формула Байеса. *Если события* $H_1, H_2, \ldots, H_s \in \mathcal{S}$ *образуют полную группу и имеют положительные вероятности, событие* $A \in \mathcal{S}$ *также имеет положительную вероятность, то*

$$\mathbf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\mathbf{P}(H_i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Примеры задач на условную вероятность

Среди сотрудников некоторого банка 23% получают высокую заработную плату. При этом 40% сотрудников банка — женщины, а 8% всех сотрудников — женщины, получающие высокую заработную плату. Проверить, существует ли в этом банке дискриминация женщин в оплате труда

A - высокая зар.плата
B – сотрудник - женщина

$P(A) = 0,23$
$P(B) = 0,4$
$P(A \cap B)=0,08$

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \cap B) / \mathbf{P}(B) =$$
$$= 0,08/0,40 = 0,20 < 0,23 = \mathbf{P}(A)$$