

Министерство образования и науки Российской Федерации  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»  
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

На правах рукописи  
УДК 532.546-3:536.42

Новиков Алексей Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАСТЕ  
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОКОЛОСКВАЖИННОЙ ЗОНЫ**

Выпускная квалификационная работа магистра  
Направление подготовки 010922  
«Фундаментальная и прикладная геофизика»

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ к.т.н. Негодяев С.С.

Научный руководитель \_\_\_\_\_ Торопов К.В.

Студент-дипломник \_\_\_\_\_ Новиков А.В.

# Содержание

Введение	3
Обозначения	4
Глава 1. Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред	5
1.1 Кофигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды. . . . .	5
1.2 Тезоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций. . . . .	7
1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс. . . . .	8
1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.	9
1.5 Закон сохранения энергии. . . . .	11
Список использованных источников	12

# Введение

# Обозначения

Индексы:

$A = \{F, G, S\}$  индекс континуума,

$\mathbb{E}^3$  трёхмерное евклидово пространство,

$\kappa_A$  отсчётная конфигурация континуума  $A$ ,

$\chi(t)$  текущая конфигурация системы,

$\mathbf{X}_A$  радиус-вектор материальной точки континуума  $A$  в отсчётной конфигурации,

$\mathbf{x}$  радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации,

$\nabla_\kappa$  градиент в переменных  $\mathbf{X}$ ,

$\nabla$  градиент в переменных  $\mathbf{x}$ ,

$\otimes$  тензорное умножение,

$\rho_A$  эффективная плотность массы континуума  $A$ ,

$\rho_a$  истинная плотность массы континуума  $a$ ,

$\boldsymbol{\sigma}_A$  тензор эффективных (парциальных) напряжений Коши для континуума  $A$ ,

$\boldsymbol{\sigma}_a$  тензор истинных напряжений Коши для континуума  $A$ ,

$\boldsymbol{\varepsilon}$  абсолютный антисимметричный тензор 3-го ранга Леви-Чивита,

# Глава 1

## Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред

Насыщенная пористая среда – совокупность твёрдого деформируемого скелета и флюида, насыщающего этот скелет. Под *флюидом* понимается смесь жидкостей и газов, способная перемещаться внутри порового пространства скелета. Для описания совместного движения скелета и флюида используется *гипотеза суперпозиции континуумов*, которая предполагает что в каждой точке пространства находится и скелет, и флюид.

Флюид, в свою очередь, может быть многофазным и многокомпонентным. Здесь и далее будем отождествлять понятие *компоненты* с химическим веществом, входящим в состав флюида. *Фазой* будем называть термодинамически равновесное состояние вещества, качественно отличное от других равновесных состояний того же вещества.

Подробное изложение законов сохранения, построение определяющих соотношений для таких систем можно найти в [2, 4–6]. Вопросы динамики многофазных сред описаны в [7].

Здесь и далее, для простоты, будем рассматривать флюид, состоящий из двух компонент, которые могут находиться в двух фазах (жидкой и газообразной) – *бинарную смесь*. В данной главе будут представлены законы сохранения, основные определяющие соотношения такой системы. Как результат будут получены математические модели процессов массо- и теплопереноса в пористых средах.

### 1.1 Кофигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.

*Материальная точка* или *элементарный объём* – объём сплошной среды, пренебрежимо малый по сравнению с размерами рассматриваемой задачи, но, при том, достаточный для того чтобы можно было проводить по нему осреднение. Дальнейшее рассмотрение будет проводится именно для таких объёмов.

Обозначим  $\kappa_A \in \mathbb{E}^3$  – область, которую занимают частицы скелета ( $A=S$ )

или флюида ( $A=F, G$ ) в момент времени  $t = 0$ . Область  $\kappa_A$  в дальнейшем будем называть *отсчётной (начальной) конфигурацией* скелета или флюида соответственно. Область  $\chi(t) \in \mathbb{E}^3$ , занятую в момент времени  $t > 0$  частицами скелета и флюида, назовём *актуальной* или *текущей конфигурацией*. Отображения  $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$  будем называть деформацией континуума  $A$ .

Здесь и далее предполагается, что области  $\kappa_A, \chi(t)$  – регулярны, отображения  $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$  – кусочно-гомеоморфны и дифференцируемы. Тогда существуют взаимнооднозначные дифференцируемые связи:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \chi(t), \quad \mathbf{X}_A \in \kappa_A, \quad (1.1)$$

которые называются *законами движения* материальных точек скелета и флюида.

Возьмём дифференциал от (1.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{X}_A \cdot (\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{x}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_A^T = \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{X}, \\ \mathbf{F}_A(\mathbf{X}, t) &= [\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t)]^T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{F}_A$  – тензор второго ранга, называемый *градиентом деформации (дисторсией)* континуума  $A$ .

Для градиента деформаций  $\mathbf{F}_A$  справедлива *теорема Коши о полярном разложении*, которая позволяет представить деформацию элемента  $d\mathbf{X}_A$  как комбинацию растяжения (сжатия) и вращения как жесткого целого:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{U}_A = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{R}_A, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{R}_A$  – ортогональный тензор второго ранга, называемый *тензором поворота*,  $\mathbf{U}_A, \mathbf{V}_A$  – симметричные положительной определённые тензоры второго ранга, называемые *правым и левым тензорами растяжения*. Разложение (1.19) единственно.

Частной производной закона движения (1.1) по времени является *вектор скорости материальной точки*:

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_A, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_A}. \quad (1.4)$$

Здесь и далее точкой будем обозначать *материальную производную по времени* (при постоянном  $\mathbf{X}_A$ ).

Описание характеристик материальной точки функциями от  $\mathbf{X}_A$  носит на-

звание *материального* или *лагранжевого описания среды*, а радиус-вектор  $\mathbf{X}_A$  носит название *материальной* или *лагранжевой переменной*. Если же характеристики представляются функциями  $\mathbf{x}$ , то такой подход называется *пространственным* или *эйлеровым описанием среды*, переменная  $\mathbf{x}$  – *пространственной* или *эйлеровой переменной*.

## 1.2 Тензоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.

Для того чтобы охарактеризовать деформации континуума вводятся специальные меры – *тензоры конечных деформаций*. Наиболее употребительными являются *тензоры Коши-Грина*  $\mathbf{E}_A$  и *Альманзи*  $\mathbf{A}_A$ :

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_A^T \cdot \mathbf{F}_A - \mathbf{I}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_A^{-1T} \cdot \mathbf{F}_A^{-1}) . \quad (1.6)$$

Представляя градиент деформаций (1.2) через вектор перемещений  $\mathbf{u}_A = \mathbf{x}_A - \mathbf{X}_A$ , подставляя в (1.5) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим *тензор малых деформаций*  $\mathbf{e}_A$ :

$$\mathbf{e}_A = \frac{1}{2} \left( (\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right) , \quad (1.7)$$

где в принятых допущениях:  $\nabla_\kappa \simeq \nabla$ .

Величины  $\mathbf{F}_A(\mathbf{X}_A, t)$  и  $\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t)$  являются первыми производными отображения  $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ . Предполагая отображение (1.1) кусочно дважды непрерывно-дифференцируемым, получим соотношение:

$$\dot{\mathbf{F}}_A = (\nabla_\kappa \otimes \mathbf{v}_A)^T , \quad (1.8)$$

называемое *уравнением совместности скоростей и деформаций*.

### 1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.

Для описания доли пустот в твёрдом скелете используется скалярная величина  $\phi(\mathbf{x}, t)$  – *пористость*, определяемая выражением:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V(\mathbf{x}, t)} \int_{V(\mathbf{x})} \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t) dV, \quad (1.9)$$

где интеграл берётся по элементарному объёму  $V(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t)$  – индикаторная функция скелета.

Наряду с пористостью введём понятия *объёмных долей* флюидов в объёме среды  $\phi_F, \phi_G$ . Для них справедливо соотношение:  $\phi_F + \phi_G = \phi_S$ , где  $\phi_S \equiv \phi$ .

*Насыщенностью* пористой среды флюидом  $A$  называется величина:

$$S_A = \frac{\phi_A}{\phi}, \quad 0 \leq S_A \leq 1, \quad S_F + S_G = 1. \quad (1.10)$$

Здесь и далее будем считать:  $S \equiv S_F, 1 - S = S_G$ .

Масса пористого насыщенного тела  $\beta$  равна:

$$m(\beta) = \int_{\chi(\beta, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \sum_{A=\{F, G, S\}} \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.11)$$

$$\rho_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(\mathbf{x}, t) \rho_a(\mathbf{x}, t), \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.12)$$

где  $\rho(\mathbf{x}, t), \rho_A(\mathbf{x}, t)$  – *осреднённые (эффективные) плотности* насыщенной пористой среды и континуума  $A$ ,  $\rho_a(\mathbf{x}, t)$  – *истинные плотности* континуума  $A$ .

В предположении, что обмен массой между континуумами отсутствует, запишем *локальный закон сохранения массы континуума* в форме Лагранжа:

$$\rho_{\kappa_A} = \rho_A |\det \mathbf{F}_A|, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.13)$$

где  $\rho_{\kappa_A}, \rho_A$  – плотности массы континуума  $A$  в отсчётной и актуальной конфигурациях.

Взяв материальную производную от интегралов в (1.11), получим *локальное уравнение баланса массы континуума  $A$  в форме Эйлера*:

$$\dot{\rho}_A + \rho_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.14)$$



или в дивергентной форме:

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_x + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = 0, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.15)$$

Выражения (1.13), (1.14), (1.15) справедливы при отсутствии химических (фазовых) превращений. В противном случае необходимо писать в правой части соответствующие интенсивности переходов:

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_x + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = q_A, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.16)$$

## 1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.

*Силу*, действующую континуум  $A$  в объёме тела  $\beta$ , представим в виде суммы объёмных массовых сил, объёмных сил взаимодействия континуумов и контактных сил:

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{f}_A^b + \mathbf{f}_A^{int} + \mathbf{f}_A^c = \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A \mathbf{g}_A dV + \int_{\chi(\beta, t)} \mathbf{b}_A^{int} dV + \oint_{\partial\chi(\beta, t)} \mathbf{t}_A dS, \quad (1.17)$$

где  $\mathbf{g}_A(\mathbf{x}, t)$  – плотность внешней массовой силы,  $\mathbf{b}_A^{int}$  – плотность сил, действующих на континуум  $A$  со стороны остальных континуумов в элементарном объёме,  $\mathbf{t}_A$  – контактная сила, действующая на континуум  $A$  извне области  $\chi$  со стороны того же континуума.

Для объёмных сил взаимодействия предполагаются:

$$\mathbf{b}_F^{int} + \mathbf{b}_G^{int} + \mathbf{b}_S^{int} = 0. \quad (1.18)$$

Сила  $\mathbf{t}_A$  называется *вектором парциальных напряжений* континуума  $A$ , задаётся на поверхности и является функцией координат и ориентации поверхности (*постулат Коши*):  $\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ . Для вектора  $\mathbf{t}_A$  справедлива *фундаментальная теорема Коши*:

$$\mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.19)$$

где тензор  $\boldsymbol{\sigma}_A$  называется *тензором эффективных (парциальных) напряжений Коши* для континуума  $A$ . Для тензора  $\boldsymbol{\sigma}_A$  справедливо выражение:

$$\boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma}_a(\mathbf{x}, t), \quad (1.20)$$

где  $\sigma_a(\mathbf{x}, t)$  – тензор истинных напряжений Коши для континуума  $A$ .

Используя (1.19) и теорему Гаусса-Остроградского запишем законы сохранения импульса и момента импульса для континуума  $A$  в виде:

$$\int_{\chi(\beta, t)} \left( \frac{\partial(\rho_A \mathbf{v}_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \otimes \rho_A \mathbf{v}_A - \sigma_A^T) - \rho_A \mathbf{g}_A - \mathbf{b}_A^{int} \right) dV = 0, \quad (1.21)$$

$$\int_{\chi(\beta, t)} \left[ \mathbf{r} \times \left( \frac{\partial(\rho_A \mathbf{v}_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \otimes \rho_A \mathbf{v}_A - \sigma_A^T) - \rho_A \mathbf{g}_A - \mathbf{b}_A^{int} \right) + \boldsymbol{\varepsilon} : \sigma_A \right] dV = 0, \quad (1.22)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор Леви-Чивита. Подставляя (1.21) в (1.22) получим:

$$\sigma_A = \sigma_A^T. \quad (1.23)$$

Для выполнения закона сохранения момента импульса (1.22) необходимо и достаточно выполнения (1.23).

Тогда, используя (1.16), запишем закон сохранения для континуума  $A$  в виде:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_A + q_A \mathbf{v}_A - \nabla \cdot \sigma_A = \rho_A \mathbf{g}_A + \mathbf{b}_A^{int}. \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) называется *уравнением движения континуума  $A$* .

Силу взаимодействия флюидов с остальными континуумами запишем в виде:

$$\mathbf{b}_A^{int} = \mathbf{b}_A^0 + \mathbf{b}_A^{dis}, \quad A = \{F, G\}, \quad (1.25)$$

где  $\mathbf{b}_A^0 = \sigma_a \cdot \nabla(S_A \phi)$  – *равновесная сила взаимодействия*, равная нулю в состоянии равновесия,  $\mathbf{b}_A^{dis}$  – *диссипативная сила взаимодействия* флюида  $A$  с остальными континуумами. Для нее необходимо сформулировать определяющие соотношения, из которые приводят к закону Дарси.

Суммируя (1.24) по всем континуумам  $A = \{F, G, S\}$ , получим:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \left( \sum_A (\mathbf{w}_A \otimes \rho_A \mathbf{w}_A) - \sigma \right) = \rho \mathbf{g}, \quad (1.26)$$

$$\rho = \sum_A \rho_A, \quad \rho \mathbf{v} = \sum_A \rho_A \mathbf{v}_A, \quad \rho \mathbf{g} = \sum_A \rho_A \mathbf{g}_A \quad (1.27)$$

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A, \quad \sum_A \rho_A \mathbf{w}_A = 0, \quad \sigma = \sum_A \sigma_A, \quad (1.28)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\rho \mathbf{v}$  – среднемассовая (барицентрическая) скорость,

$\boldsymbol{w}_A$  – относительные (диффузионные) скорости континуума  $A$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор полных напряжений среды.

## 1.5 Закон сохранения энергии.

## Список литературы

- [1] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 стр.
- [2] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. 416 с.: ил
- [3] Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1976. 335 с.
- [4] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: Издательство МФТИ, 2002. – 336 с.
- [5] Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
- [6] Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. - 238 с.
- [7] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1987 – 464 с.
- [8] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ.Лаборатория знаний, 2013.-523 с.: ил., табл. – (Серия «Основы информационных технологий»)
- [9] Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 128 стр.
- [10] Chen Zhangxin, Guanren Huan, and Yuanle Ma. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [11] LeVeque R.J. Finite volume methods for Hyperbolic problems. Cambridge University Press, 2002.

- [12] Марченко Н.А. [и др.] / Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задачи многофазной фильтрации // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2008. № 97. 17 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-97>
- [13] Рамазанов А.Ш. Теоретические основы термогидродинамических методов исследования нефтяных пластов. Автореф. дис. докт. техн. наук. - Уфа, 2004.
- [14] Рамазанов А.Ш., Паршин А.В. Температурное поле в нефтеводонасыщенном пласте с учётом разгазирования нефти // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2006. №1. URL: [http://ogbus.ru/authors/Ramazanov/Ramazanov\\_1.pdf](http://ogbus.ru/authors/Ramazanov/Ramazanov_1.pdf)
- [15] Ramazanov A.Sh., Valiullin R.A., Sadretdinov A.A., Shako V.V., Pimenov V.P., Fedorov V.N., Belov K.V. Thermal Modeling for Characterization of Near Wellbore Zone and Zonal Allocation. SPE 136256, Moscow: SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition, 2010.
- [16] Валиуллин Р.А., Рамазанов А.Ш., Хабилов Т.Р., Садретдинов А.А., Шако В.В., Сидорова М.В., Котляр Л.А., Федоров В.Н., Салимгареева Э.М. Интерпретация термогидродинамических исследований при испытании скважины на основе численного симулятора. SPE-176589-RU, Российская нефтегазовая техническая конференция SPE, 26-28 октября, 2015, Москва, Россия.
- [17] Оливье Узе, Дидье Витура, Оле Фьярэ. Анализ динамических потоков. КАППА выпуск v4.10.01 - Октябрь 2008.
- [18] Posvyanskii D.V., Gaidukov L.A., Tukhvatullina R.R. Estimating Bottom Hole Damage Zone Parameters Based on Mathematical Model of Thermo-hydrodynamic Processes // ECMOR XIV. - 2014.