

Министерство образования и науки Российской Федерации
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

На правах рукописи
УДК 532.546-3:536.42

Новиков Алексей Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАСТЕ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОКОЛОСКВАЖИННОЙ ЗОНЫ**

Выпускная квалификационная работа магистра
Направление подготовки 010922
«Фундаментальная и прикладная геофизика»

Заведующий кафедрой _____ к.т.н. Негодяев С.С.

Научный руководитель _____ Торопов К.В.

Студент-дипломник _____ Новиков А.В.

Содержание

Введение	3
Обозначения	4
Глава 1. Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред	5
1.1 Кофигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.	5
1.2 Тезоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.	7
1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.	7
1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.	9
Список использованных источников	10

Введение

Обозначения

Индексы:

$A = \{F, S\}$ индекс континуума,

\mathbb{E}^3 трёхмерное евклидово пространство,

κ_A отсчётная конфигурация континуума A ,

$\chi(t)$ текущая конфигурация системы,

\mathbf{X} радиус-вектор материальной точки в отсчётной конфигурации,

\mathbf{x} радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации,

∇_κ градиент в переменных \mathbf{X} ,

∇ градиент в переменных \mathbf{x} ,

\otimes тензорное умножение,

ρ_A эффективная плотность массы континуума A ,

ρ_a истинная плотность массы континуума a ,

Глава 1

Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред

Насыщенная пористая среда – совокупность твёрдого деформируемого скелета и флюида, насыщающего этот скелет. Под *флюидом* понимается смесь жидкостей и газов, способная перемещаться внутри порового пространства скелета. Для описания совместного движения скелета и флюида используется *гипотеза суперпозиции континуумов*, которая предполагает что в каждой точке пространства находится и скелет, и флюид.

Флюид, в свою очередь, может быть многофазным и многокомпонентным. Здесь и далее будем отождествлять понятие *компоненты* с химическим веществом, входящим в состав флюида. *Фазой* будем называть термодинамически равновесное состояние вещества, качественно отличное от других равновесных состояний того же вещества. Подробное изложение законов сохранения, построение определяющих соотношений для таких систем можно найти в [2, 4–6]. Здесь же, для простоты, будем рассматривать флюид состоящий из одной компоненты, которая может находиться в двух фазах – жидкой и газообразной.

В данной главе будут представлены законы сохранения, основные определяющие соотношения такой системы. Как результат будут получены математические модели процессов массо- и теплопереноса в пористых средах.

1.1 Кофигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.

Материальная точка или *элементарный объём* – объём сплошной среды, пренебрежимо малый по сравнению с размерами рассматриваемой задачи, но, при том, достаточный для того чтобы можно было проводить по нему осреднение. Дальнейшее рассмотрение будет проводится именно для таких объёмов.

Обозначим $\kappa_A \in \mathbb{E}^3$ – область, которую занимают частицы скелета ($A=S$) или флюида ($A=F, G$) в момент времени $t = 0$. Область κ_A в дальнейшем будем называть *отсчётной (начальной) конфигурацией* скелета или флюида

соответственно. Область $\chi(t) \in \mathbb{E}^3$, занятую в момент времени $t > 0$ частицами скелета и флюида, назовём *актуальной* или *текущей конфигурацией*. Отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ будем называть деформацией континуума A .

Здесь и далее предполагается, что области κ_A , $\chi(t)$ – регулярны, отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ – кусочно-гомеоморфны и дифференцируемы. Тогда существуют взаимнооднозначные дифференцируемые связи:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \chi(t), \quad \mathbf{X}_A \in \kappa_A, \quad (1.1)$$

которые называются *законами движения* материальных точек скелета и флюида.

Возьмём дифференциал от (1.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{X}_A \cdot (\nabla_\kappa \otimes \mathbf{x}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_A^T = \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{X}, \\ \mathbf{F}_A(\mathbf{X}, t) &= [\nabla_\kappa \otimes \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t)]^T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{F}_A – тензор второго ранга, называемый *градиентом деформации (дисторсией)* континуума A .

Для градиента деформаций \mathbf{F}_A справедлива *теорема Коши о полярном разложении*, которая позволяет представить деформацию элемента $d\mathbf{X}_A$ как комбинацию растяжения (сжатия) и вращения как жесткого целого:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{U}_A = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{R}_A, \quad (1.3)$$

где \mathbf{R}_A – ортогональный тензор второго ранга, называемый *тензором поворота*, \mathbf{U}_A , \mathbf{V}_A – симметричные положительной определённые тензоры второго ранга, называемые *правым и левым тензорами растяжения*. Разложение (1.21) единственно.

Частной производной закона движения (1.1) по времени является *вектор скорости материальной точки*:

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_A, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_A}. \quad (1.4)$$

Здесь и далее точкой будем обозначать *материальную производную по времени* (при постоянном \mathbf{X}_A).

Описание характеристик материальной точки функциями от \mathbf{X}_A носит название *материального* или *лагранжевого описания среды*, а радиус-вектор \mathbf{X}_A носит название *материальной* или *лагранжевой переменной*. Если же

характеристики представляются функциями \mathbf{x} , то такой подход называется *пространственным* или *эйлеровым описанием среды*, переменная \mathbf{x} – *пространственной* или *эйлеровой переменной*.

1.2 Тензоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.

Для того чтобы охарактеризовать деформации континуума вводятся специальные меры – *тензоры конечных деформаций*. Наиболее употребительными являются *тензоры Коши-Грина* \mathbf{E}_A и *Альманзи* \mathbf{A}_A :

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_A^T \cdot \mathbf{F}_A - \mathbf{I}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_A^{-1T} \cdot \mathbf{F}_A^{-1}). \quad (1.6)$$

Представляя градиент деформаций (1.2) через вектор перемещений $\mathbf{u}_A = \mathbf{x}_A - \mathbf{X}_A$, подставляя в (1.5) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим *тензор малых деформаций* \mathbf{e}_A :

$$\mathbf{e}_A = \frac{1}{2} \left((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right), \quad (1.7)$$

где в принятых допущениях: $\nabla_\kappa \simeq \nabla$.

Величины $\mathbf{F}_A(\mathbf{X}_A, t)$ и $\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t)$ являются первыми производными отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$. Предполагая отображение (1.1) кусочно дважды непрерывно-дифференцируемым, получим соотношение:

$$\dot{\mathbf{F}}_A = (\nabla_\kappa \otimes \mathbf{v}_A)^T, \quad (1.8)$$

называемое *уравнением совместности скоростей и деформаций*.

1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.

Для описания доли пустот в твёрдом скелете используется скалярная величина $\phi(\mathbf{x}, t)$ – *пористость*, определяемая выражением:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V(\mathbf{x}, t)} \int_{V(\mathbf{x})} \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t) dV, \quad (1.9)$$

где интеграл берётся по элементарному объёму $V(\mathbf{x})$, $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t)$ – индикаторная функция скелета.

Наряду с пористостью введём понятия объёмных долей флюидов в объёме среды ϕ_F , ϕ_G . Для них справедливо соотношение: $\phi_F + \phi_G = \phi$.

Насыщенностью пористой среды флюидом A называется величина:

$$S_A = \frac{\phi_A}{\phi}, \quad 0 \leq S_A \leq 1, \quad S_F + S_G = 1. \quad (1.10)$$

Здесь и далее будем считать: $S \equiv S_F$, $1 - S = S_G$.

Масса пористого насыщенного тела β равна:

$$m(\beta) = \int_{\chi(\beta, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\beta, t)} \rho_F(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\chi(\beta, t)} \rho_G(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\chi(\beta, t)} \rho_S(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.11)$$

$$\rho_F(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) S(\mathbf{x}, t) \rho_f(\mathbf{x}, t), \quad (1.12)$$

$$\rho_G(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) (1 - S(\mathbf{x}, t)) \rho_g(\mathbf{x}, t), \quad (1.13)$$

$$\rho_S(\mathbf{x}, t) = (1 - \phi(\mathbf{x}, t)) \rho_s(\mathbf{x}, t), \quad (1.14)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\rho_F(\mathbf{x}, t)$, $\rho_G(\mathbf{x}, t)$, $\rho_S(\mathbf{x}, t)$ – *осреднённые (эффективные) плотности* насыщенной пористой среды, фаз флюида и скелета соответственно, $\rho_f(\mathbf{x}, t)$, $\rho_g(\mathbf{x}, t)$, $\rho_s(\mathbf{x}, t)$ – *истинные плотности* фаз флюида и скелета.

В предположении, что обмен массой между континуумами отсутствует, запишем *локальный закон сохранения массы континуума в форме Лагранжа*:

$$\rho_{\kappa_A} = \rho_A |\det \mathbf{F}_A|, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.15)$$

где ρ_{κ_A} , ρ_A – плотности массы континуума A в отсчётной и актуальной конфигурациях.

Взяв материальную производную от интегралов в (1.11), получим *локальное уравнение баланса массы континуума A в форме Эйлера*:

$$\dot{\rho}_A + \rho_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.16)$$

или в дивергентной форме:

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = 0, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.17)$$

Выражения (1.15), (1.16), (1.18) справедливы при отсутствии химических

(фазовых) превращений. В противном случае необходимо писать в правой части соответствующие интенсивности переходов:

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = q_A, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.18)$$

1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.

Силу, действующую континуум A в объёме тела β , представим в виде суммы объёмных массовых сил, объёмных сил взаимодействия континуумов и контактных сил:

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{f}_A^b + \mathbf{f}_A^{int} + \mathbf{f}_A^c = \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A \mathbf{g} dV + \int_{\chi(\beta, t)} \mathbf{b}_A^{int} dV + \oint_{\partial\chi(\beta, t)} \mathbf{t}_A dS, \quad (1.19)$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ – плотность внешней массовой силы, \mathbf{b}_A^{int} – плотность сил, действующих на континуум A со стороны остальных континуумов в элементарном объёме, \mathbf{t}_A – контактная сила, действующая на континуум A извне области χ со стороны того же континуума.

Для объёмных сил взаимодействия предполагаются:

$$\mathbf{b}_F^{int} + \mathbf{b}_G^{int} + \mathbf{b}_S^{int} = 0. \quad (1.20)$$

Сила \mathbf{t}_A называется *вектором парциальных напряжений* континуума A , задаётся на поверхности и является функцией координат и ориентации поверхности (*постулат Коши*): $\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n})$. Для вектора \mathbf{t}_A справедлива *фундаментальная теорема Коши*:

$$\mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma_A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.21)$$

где тензор σ_A называется *тензором парциальных напряжений Коши* для континуума A .

Учитывая всё выше сказанное, а также (1.16), запишем *закон сохранения импульса* для континуума A в виде:

$$\rho_A \frac{d_A \mathbf{v}_A}{dt} - \nabla \cdot \sigma_A = \rho_A \mathbf{g} + \mathbf{b}_A^{int} \quad (1.22)$$

Список литературы

- [1] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 стр.
- [2] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. 416 с.: ил
- [3] Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1976. 335 с.
- [4] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: Издательство МФТИ, 2002. – 336 с.
- [5] Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
- [6] Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. - 238 с.
- [7] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ.Лаборатория знаний, 2013.-523 с.: ил., табл. – (Серия «Основы информационных технологий»)
- [8] Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 128 стр.
- [9] Chen Zhangxin, Guanren Huan, and Yuanle Ma. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [10] LeVeque R.J. Finite volume methods for Hyperbolic problems. Cambridge University Press, 2002.
- [11] Марченко Н.А. [и др.] / Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задачи многофазной фильтрации // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2008. № 97. 17 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-97>

- [12] Рамазанов А.Ш. Теоретические основы термогидродинамических методов исследования нефтяных пластов. Автореф. дис. докт. техн. наук. - Уфа, 2004.
- [13] Рамазанов А.Ш., Паршин А.В. Температурное поле в нефтеводонасыщенном пласте с учётом разгазирования нефти // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2006. №1. URL: http://ogbus.ru/authors/Ramazanov/Ramazanov_1.pdf
- [14] Ramazanov A.Sh., Valiullin R.A., Sadretdinov A.A., Shako V.V., Pimenov V.P., Fedorov V.N., Belov K.V. Thermal Modeling for Characterization of Near Wellbore Zone and Zonal Allocation. SPE 136256, Moscow: SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition, 2010.
- [15] Валиуллин Р.А., Рамазанов А.Ш., Хабилов Т.Р., Садретдинов А.А., Шако В.В., Сидорова М.В., Котляр Л.А., Федоров В.Н., Салимгареева Э.М. Интерпретация термогидродинамических исследований при испытании скважины на основе численного симулятора. SPE-176589-RU, Российская нефтегазовая техническая конференция SPE, 26-28 октября, 2015, Москва, Россия.
- [16] Оливье Узе, Дидье Витура, Оле Фьярэ. Анализ динамических потоков. КАППА выпуск v4.10.01 - Октябрь 2008.
- [17] Posvyanskii D.V., Gaidukov L.A., Tukhvatullina R.R. Estimating Bottom Hole Damage Zone Parameters Based on Mathematical Model of Thermo-hydrodynamic Processes // ECMOR XIV. - 2014.