

Министерство образования и науки Российской Федерации
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

На правах рукописи
УДК 532.546-3:536.42

Новиков Алексей Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАСТЕ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОКОЛОСКВАЖИННОЙ ЗОНЫ**

Выпускная квалификационная работа магистра
Направление подготовки 010922
«Фундаментальная и прикладная геофизика»

Заведующий кафедрой _____ к.т.н. Негодяев С.С.

Научный руководитель _____ Торопов К.В.

Студент-дипломник _____ Новиков А.В.

Содержание

Введение	3
Обозначения	4
Глава 1. Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред	6
1.1 Кофигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.	6
1.2 Тезоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.	8
1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.	9
1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.	10
1.5 Закон сохранения энергии. Второе начало термодинамики. . . .	12
1.6 Определяющие уравнения.	14
Глава 2. Неизотермическая фильтрация флюида к несовершенным скважинам.	15
Глава 3. Аналитические и численные методы решения задач неизотермической фильтрации.	16
Список использованных источников	17

Введение

Традиционно расчёт фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах проводят пренебрегая изменением температуры среды. Во-первых, потому, что изменения температуры при фильтрации крайне малы, и не оказывают сколько-нибудь заметного влияния на свойства среды. Во-вторых, для записи температурных данных необходимы высокоточные датчики, которые получили широкое распространение лишь в последнее десятилетие. В-третьих, при дополнительном расчёте теплопереноса возникает необходимость указания большого количества характеристик (как компонентов среды, так и задачи в целом), значения которых неизвестны, либо известны с весьма плохой точностью. В этой связи, модели неизотермической фильтрации при гидродинамическом моделировании месторождений остаются не у дел.

Тем не менее существует ряд задач, в которых привлечение термодинамики насыщенной пористой среды позволяет определить некоторые эксплуатационные характеристики пласта. Речь идет о измерении *давления, дебита и температуры* в стволе скважины и последующей совместной интерпретации этих данных на основе соответствующих моделей массо- и теплопереноса. Такие исследования носят название *термогидродинамических*, и подразделяются на два вида:

- измерение параметров вдоль ствола скважины;
- измерение параметров во времени на определённой глубине.

Обозначения

Здесь и далее будем обозначать индексом с заглавной буквой $A = \{F, G, S\}$ эффективные характеристики соответствующего континуума, со строчной $a = \{f, g, s\}$ – истинные характеристики.

Верхний индекс “ θ ” означает равновесную составляющую физической величины, в то время как “ dis ” – диссипативную составляющую.

Обозначения и операторы:

\mathbb{E}^3 трёхмерное евклидово пространство,

κ_A отсчётная конфигурация континуума A ,

$\chi(t)$ текущая конфигурация системы,

∇_κ градиент в переменных \mathbf{X} ,

∇ градиент в переменных \mathbf{x} ,

\otimes тензорное умножение,

ε абсолютный антисимметричный тензор 3-го ранга Леви-Чивита,

\mathbf{n} вектор единичной нормали к поверхности,

Общие характеристики среды:

\mathbf{X}_A радиус-вектор материальной точки континуума A в отсчётной конфигурации,

\mathbf{x} радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации,

\mathbf{v} вектор скорости материальной точки континуума A ,

\mathbf{w}_A в зависимости от контекста: либо диффузионная скорость (относительно центра масс среды), либо скорость движения флюида A относительно скелета S ,

\mathbf{F}_A градиент деформаций (дисторсия) среды A ,

ϕ_A объёмная доля континуума A ,

ϕ пористость среды,

S насыщенность среды нефтью (жидкой фазой),

ρ плотность массы,

q_A объёмная интенсивность перехода массы вещества в континуум A ,

Характеристики напряжённого состояния:

\mathbf{t} вектор напряжений,

$\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений Коши,

\mathbf{b} плотность массовых сил,

\mathbf{b}^{int} объёмная сила взаимодействия континуумов,

Термические характеристики:

θ температура среды,

r плотность внешних источников,

r^{int} скорость объёмного теплообмена между континумами,

h_A поверхностный приток тепла,

\mathbf{q} вектор теплового потока,

e плотность полной энергии,

u плотность внутренней энергии,

η плотность энтропии,

ψ плотность свободной энергии,

δ диссипация энергии,

Глава 1

Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред

Насыщенная пористая среда – совокупность твёрдого деформируемого скелета и флюида, насыщающего этот скелет. Под *флюидом* понимается смесь жидкостей и газов, способная перемещаться внутри порового пространства скелета. Для описания совместного движения скелета и флюида используется *гипотеза суперпозиции континуумов*, которая предполагает что в каждой точке пространства находится и скелет, и флюид.

Флюид, в свою очередь, может быть многофазным и многокомпонентным. Здесь и далее будем отождествлять понятие *компоненты* с химическим веществом, входящим в состав флюида. *Фазой* будем называть термодинамически равновесное состояние вещества, качественно отличное от других равновесных состояний того же вещества.

Подробное изложение законов сохранения, построение определяющих соотношений для таких систем можно найти в [2, 4–6]. Вопросы динамики многофазных сред описаны в [7].

Здесь и далее, для простоты, будем рассматривать флюид, состоящий из двух компонент, которые могут находиться в двух фазах (жидкой и газообразной) – *бинарную смесь*. В данной главе будут представлены законы сохранения, основные определяющие соотношения такой системы. Как результат будут получены математические модели процессов массо- и теплопереноса в пористых средах.

1.1 Кофигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.

Материальная точка или *элементарный объём* – объём сплошной среды, пренебрежимо малый по сравнению с размерами рассматриваемой задачи, но, при том, достаточный для того чтобы можно было проводить по нему осреднение. Дальнейшее рассмотрение будет проводится именно для таких объёмов.

Обозначим $\kappa_A \in \mathbb{E}^3$ – область, которую занимают частицы скелета ($A=S$)

или флюида ($A=F, G$) в момент времени $t = 0$. Область κ_A в дальнейшем будем называть *отсчётной (начальной) конфигурацией* скелета или флюида соответственно. Область $\chi(t) \in \mathbb{E}^3$, занятую в момент времени $t > 0$ частицами скелета и флюида, назовём *актуальной* или *текущей конфигурацией*. Отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ будем называть деформацией континуума A .

Здесь и далее предполагается, что области $\kappa_A, \chi(t)$ – регулярны, отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ – кусочно-гомеоморфны и дифференцируемы. Тогда существуют взаимнооднозначные дифференцируемые связи:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \chi(t), \quad \mathbf{X}_A \in \kappa_A, \quad (1.1)$$

которые называются *законами движения* материальных точек скелета и флюида.

Возьмём дифференциал от (1.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{X}_A \cdot (\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{x}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_A^T = \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{X}, \\ \mathbf{F}_A(\mathbf{X}, t) &= [\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t)]^T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{F}_A – тензор второго ранга, называемый *градиентом деформации (дисторсией)* континуума A .

Для градиента деформаций \mathbf{F}_A справедлива *теорема Коши о полярном разложении*, которая позволяет представить деформацию элемента $d\mathbf{X}_A$ как комбинацию растяжения (сжатия) и вращения как жесткого целого:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{U}_A = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{R}_A, \quad (1.3)$$

где \mathbf{R}_A – ортогональный тензор второго ранга, называемый *тензором поворота*, $\mathbf{U}_A, \mathbf{V}_A$ – симметричные положительной определённые тензоры второго ранга, называемые *правым и левым тензорами растяжения*. Разложение (1.19) единственно.

Частной производной закона движения (1.1) по времени является *вектор скорости материальной точки*:

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_A, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_A}. \quad (1.4)$$

Здесь и далее точкой будем обозначать *материальную производную по времени* (при постоянном \mathbf{X}_A).

Описание характеристик материальной точки функциями от \mathbf{X}_A носит на-

звание *материального* или *лагранжевого описания среды*, а радиус-вектор \mathbf{X}_A носит название *материальной* или *лагранжевой переменной*. Если же характеристики представляются функциями \mathbf{x} , то такой подход называется *пространственным* или *эйлеровым описанием среды*, переменная \mathbf{x} – *пространственной* или *эйлеровой переменной*.

1.2 Тензоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.

Для того чтобы охарактеризовать деформации континуума вводятся специальные меры – *тензоры конечных деформаций*. Наиболее употребительными являются *тензоры Коши-Грина* \mathbf{E}_A и *Альманзи* \mathbf{A}_A :

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_A^T \cdot \mathbf{F}_A - \mathbf{I}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_A^{-1T} \cdot \mathbf{F}_A^{-1}) . \quad (1.6)$$

Представляя градиент деформаций (1.2) через вектор перемещений $\mathbf{u}_A = \mathbf{x}_A - \mathbf{X}_A$, подставляя в (1.5) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим *тензор малых деформаций* \mathbf{e}_A :

$$\mathbf{e}_A = \frac{1}{2} \left((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right) , \quad (1.7)$$

где в принятых допущениях: $\nabla_\kappa \simeq \nabla$.

Величины $\mathbf{F}_A(\mathbf{X}_A, t)$ и $\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t)$ являются первыми производными отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$. Предполагая отображение (1.1) кусочно дважды непрерывно-дифференцируемым, получим соотношение:

$$\dot{\mathbf{F}}_A = (\nabla_\kappa \otimes \mathbf{v}_A)^T , \quad (1.8)$$

называемое *уравнением совместности скоростей и деформаций*.

1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.

Для описания доли пустот в твёрдом скелете используется скалярная величина $\phi(\mathbf{x}, t)$ – *пористость*, определяемая выражением:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V(\mathbf{x}, t)} \int_{V(\mathbf{x})} \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t) dV, \quad (1.9)$$

где интеграл берётся по элементарному объёму $V(\mathbf{x})$, $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t)$ – индикаторная функция скелета.

Наряду с пористостью введём понятия *объёмных долей* флюидов в объёме среды ϕ_F, ϕ_G . Для них справедливо соотношение: $\phi_F + \phi_G = \phi_S$, где $\phi_S \equiv \phi$.

Насыщенностью пористой среды флюидом A называется величина:

$$S_A = \frac{\phi_A}{\phi}, \quad 0 \leq S_A \leq 1, \quad S_F + S_G = 1. \quad (1.10)$$

Здесь и далее будем считать: $S \equiv S_F$, $1 - S = S_G$.

Масса пористого насыщенного тела β равна:

$$m(\beta) = \int_{\chi(\beta, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \sum_{A=\{F, G, S\}} \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.11)$$

$$\rho_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(\mathbf{x}, t) \rho_a(\mathbf{x}, t), \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.12)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\rho_A(\mathbf{x}, t)$ – *осреднённые (эффективные) плотности* насыщенной пористой среды и континуума A , $\rho_a(\mathbf{x}, t)$ – *истинные плотности* континуума A .

В предположении, что обмен массой между континуумами отсутствует, запишем *локальный закон сохранения массы континуума* в форме Лагранжа:

$$\rho_{\kappa A} = \rho_A |\det \mathbf{F}_A|, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.13)$$

где $\rho_{\kappa A}$, ρ_A – плотности массы континуума A в отсчётной и актуальной конфигурациях.

Взяв материальную производную от интегралов в (1.11), получим *локальное уравнение баланса массы континуума A в форме Эйлера*:

$$\dot{\rho}_A + \rho_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.14)$$

или в дивергентной форме:

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_x + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = 0, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.15)$$

Выражения (1.13), (1.14), (1.15) справедливы при отсутствии химических (фазовых) превращений. В противном случае необходимо писать в правой части соответствующие интенсивности переходов q_A :

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_x + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = q_A, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.16)$$

1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.

Силу, действующую континуум A в объёме тела β , представим в виде суммы объёмных массовых сил, объёмных сил взаимодействия континуумов и контактных сил:

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{f}_A^b + \mathbf{f}_A^{int} + \mathbf{f}_A^c = \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A \mathbf{b}_A dV + \int_{\chi(\beta, t)} \mathbf{b}_A^{int} dV + \oint_{\partial\chi(\beta, t)} \mathbf{t}_A dS, \quad (1.17)$$

где $\mathbf{b}_A(\mathbf{x}, t)$ – плотность внешней массовой силы, \mathbf{b}_A^{int} – плотность сил, действующих на континуум A со стороны остальных континуумов в элементарном объёме, \mathbf{t}_A – контактная сила, действующая на континуум A извне области χ со стороны того же континуума.

Для объёмных сил взаимодействия предполагаются:

$$\mathbf{b}_F^{int} + \mathbf{b}_G^{int} + \mathbf{b}_S^{int} = 0. \quad (1.18)$$

Сила \mathbf{t}_A называется *вектором парциальных напряжений* континуума A , задаётся на поверхности и является функцией координат и ориентации поверхности (*постулат Коши*): $\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n})$. Для вектора \mathbf{t}_A справедлива *фундаментальная теорема Коши*:

$$\mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.19)$$

где тензор $\boldsymbol{\sigma}_A$ называется *тензором эффективных (парциальных) напряжений Коши* для континуума A . Для тензора $\boldsymbol{\sigma}_A$ справедливо выражение:

$$\boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma}_a(\mathbf{x}, t), \quad (1.20)$$

где $\sigma_a(\mathbf{x}, t)$ – тензор истинных напряжений Коши для континуума A .

Используя (1.19) и теорему Гаусса-Остроградского запишем законы сохранения импульса и момента импульса для континуума A в виде:

$$\int_{\chi(\beta, t)} \left(\frac{\partial(\rho_A \mathbf{v}_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \otimes \rho_A \mathbf{v}_A - \sigma_A^T) - \rho_A \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_A^{int} \right) dV = 0, \quad (1.21)$$

$$\int_{\chi(\beta, t)} \left[\mathbf{r} \times \left(\frac{\partial(\rho_A \mathbf{v}_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \otimes \rho_A \mathbf{v}_A - \sigma_A^T) - \rho_A \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_A^{int} \right) + \boldsymbol{\varepsilon} : \sigma_A \right] dV = 0, \quad (1.22)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор Леви-Чивита. Подставляя (1.21) в (1.22) получим:

$$\sigma_A = \sigma_A^T. \quad (1.23)$$

Для выполнения закона сохранения момента импульса (1.22) необходимо и достаточно выполнения (1.23).

Выражения (1.21), (1.22) справедливы, если можно пренебречь вкладом квадрата пульсаций скорости в действующую силу и момент силы. В противном случае в законах сохранения необходимо записывать пульсационные и моментные напряжения.

Используя (1.16), запишем закон сохранения для континуума A в виде:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_A + q_A \mathbf{v}_A - \nabla \cdot \sigma_A = \rho_A \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_A^{int}. \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) называется *уравнением движения континуума A* .

Сила взаимодействия, тензор напряжений и объёмная доля представляются в виде:

$$\mathbf{b}_A^{int} = \mathbf{b}_A^0 + \mathbf{b}_A^{dis}, \quad \sigma_A = \sigma_A^0 + \sigma_A^{dis}, \quad \phi_A = \phi_A^0 + \phi_A^{dis}, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.25)$$

где \mathbf{b}_A^0 , σ_A^0 , ϕ_A^0 и \mathbf{b}_A^{dis} , σ_A^{dis} , ϕ_A^{dis} – равновесные и диссипативные значения силы взаимодействия, тензора напряжений и объёмной доли. При этом имеем: $\mathbf{b}_A^0 = \sigma_a \cdot \nabla(\phi_A)$. Для \mathbf{b}_A^{dis} формулируются определяющие соотношения, которые приводят к закону Дарси.

Суммируя (1.24) по всем континуумам $A = \{F, G, S\}$, получим:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \left(\sum_A (\mathbf{w}_A \otimes \rho_A \mathbf{w}_A) - \boldsymbol{\sigma} \right) = \rho \mathbf{b}, \quad (1.26)$$

$$\rho = \sum_A \rho_A, \quad \rho \mathbf{v} = \sum_A \rho_A \mathbf{v}_A, \quad \rho \mathbf{b} = \sum_A \rho_A \mathbf{b}_A \quad (1.27)$$

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A, \quad \sum_A \rho_A \mathbf{w}_A = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_A \boldsymbol{\sigma}_A, \quad (1.28)$$

где ρ – плотность среды, $\rho \mathbf{v}$ – среднемассовая (барицентрическая) скорость, \mathbf{w}_A – относительные (диффузионные) скорости континуума A , $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор полных напряжений среды.

1.5 Закон сохранения энергии. Второе начало термодинамики.

Для описание теплопереноса в рассматриваемой системе воспользуемся гипотезой о *локальном термодинамическом равновесии*, которая предполагает, что внутри каждого элементарного объёма среды все континуумы находятся в состоянии термодинамического равновесия. Считается, что при малых скоростях движения флюидов и высокой теплопроводности, использование гипотезы оправдано. В таком случае можно ввести понятие *температуры* $\theta(\mathbf{x}, t)$ для материальной точки \mathbf{x} в момент времени t .

Запишем скорость подвода тепла к континууму A в объёме тела β :

$$Q_A = \int_{\chi(\beta, t)} (\rho_A r_A + r_A^{int}) dV + \oint_{\partial\chi(\beta, t)} h_A dS, \quad (1.29)$$

где r_A – *плотность внешних* (по отношению к континууму A) *объёмных источников тепла*, h_A – *поверхностный приток тепла*, r_A^{int} – *скорость объёмного теплообмена*.

Величины r_A^{int} , h_A во многом аналогичны характеристикам напряженного состояния \mathbf{b}_A^{int} , \mathbf{t}_A . Для r_A^{int} справедливо соотношение:

$$r_F^{int} + r_G^{int} + r_S^{int} = 0, \quad (1.30)$$

а для h_A справедлива *фундаментальная теорема Фурье-Стокса*:

$$h_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.31)$$

где $\mathbf{q}_A(\mathbf{x})$ – вектор теплового потока.

Запишем закон баланса энергии в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\beta,t)} \rho e dV = \sum_A \left[\int_{\chi(\beta,t)} (\rho_A \mathbf{b}_A \cdot \mathbf{v}_A) dV + \oint_{\partial\chi(\beta,t)} (\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{v}_A) dS \right] + \int_{\chi(\beta,t)} (\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r) dV \quad (1.32)$$

$$\rho e = \sum_A \rho_A e_A, \quad e_A = u_A + \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A}{2}, \quad \mathbf{q} = \sum_A \mathbf{q}_A, \quad (1.33)$$

$$\rho r = \sum_A \rho_A r_A, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.34)$$

где e_A – плотность полной энергии системы, u_A – плотность внутренней энергии. В выражении (1.32) слева стоит материальная производная от полной энергии тела β – внутренней и кинетической, справа стоит мощность внешних сил и суммарная скорость подвода тепла.

Используя (1.16), (1.24) получим *приведённое уравнение баланса энергии* в виде:

$$\sum_A \left[\rho_A \dot{u}_A + q_A \left(u_A - \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A}{2} \right) \right] = \sum_A \left[\mathbf{b}_A^{int} \cdot \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\sigma}_A : (\nabla \otimes \mathbf{v}_A) \right] + \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r, \quad (1.35)$$

где \mathbf{w}_A – скорость материальной точки континуума A относительно скелета S .

Для формулировки второго начала термодинамики введём понятие плотности *энтропии* континуума A – η_A . Введение понятия энтропии позволяет верным образом учесть направление термодинамических процессов, а также ввести понятие необратимых процессов. Между тем второе начало термодинамики будет использовано далее для построения определяющих соотношений насыщенной пористой среды.

Запишем *второе начало термодинамики* в интегральном виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\beta,t)} \sum_A \rho_A \eta_A dV \geq \int_{\chi(\beta,t)} \frac{\rho r}{\theta} dV + \oint_{\partial\chi(\beta,t)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dS. \quad (1.36)$$

Преобразуем (1.36) и запишем в дифференциальном виде:

$$\theta \sum_A [\rho_A \dot{\eta}_A + q_A \eta_A] - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0, \quad (1.37)$$

$$\delta_M = \theta \sum_A [\rho_A \dot{\eta}_A + q_A \eta_A] - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r, \quad \delta_T = \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta}, \quad (1.38)$$

$$\delta_M + \delta_T \geq 0, \quad (1.39)$$

где δ_M имеет смысл *механической (внутренней) диссипации*, а δ_T – *термической диссипации*, связанной с теплопроводностью среды.

Запишем (1.37) через *плотность свободной энергии* $\psi_A = u_A - \theta \eta_A$. Для этого воспользуемся (1.8), (1.35), (1.25), получим:

$$\begin{aligned} - \sum_A \left[\rho_A \left(\dot{\psi}_A + \eta_A \dot{\theta} \right) + q_A \left(\psi_A - \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A}{2} \right) + \boldsymbol{\sigma}_a : (\nabla \otimes \phi_A^0 \mathbf{w}_A) \right] + \\ + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}_S^{-1T}) : \dot{\mathbf{F}}_S + \delta_f + \delta_T \geq 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_A \boldsymbol{\sigma}_A, \quad \delta_f = \sum_A \left[\boldsymbol{\sigma}_A^{dis} : (\nabla \otimes \mathbf{w}_A) + \mathbf{b}_A^{dis} \cdot \mathbf{w}_A \right], \quad (1.41)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор полных напряжений среды, δ_f – *диссипация фильтрации*. Выражение (1.41) носит название – *вторая форма приведённого неравенства Клаузиуса-Дюгема*.

1.6 Определяющие уравнения.

Глава 2. Неизотермическая фильтрация флюида к несовершенным скважинам.

Глава 3. Аналитические и численные методы решения задач неизотермической фильтрации.

Список литературы

- [1] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 стр.
- [2] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. 416 с.: ил
- [3] Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1976. 335 с.
- [4] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: Издательство МФТИ, 2002. – 336 с.
- [5] Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
- [6] Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. - 238 с.
- [7] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1987 – 464 с.
- [8] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ.Лаборатория знаний, 2013.-523 с.: ил., табл. – (Серия «Основы информационных технологий»)
- [9] Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 128 стр.
- [10] Chen Zhangxin, Guanren Huan, and Yuanle Ma. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [11] LeVeque R.J. Finite volume methods for Hyperbolic problems. Cambridge University Press, 2002.

- [12] Марченко Н.А. [и др.] / Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задачи многофазной фильтрации // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2008. № 97. 17 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-97>
- [13] Рамазанов А.Ш. Теоретические основы термогидродинамических методов исследования нефтяных пластов. Автореф. дис. докт. техн. наук. - Уфа, 2004.
- [14] Рамазанов А.Ш., Паршин А.В. Температурное поле в нефтеводонасыщенном пласте с учётом разгазирования нефти // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2006. №1. URL: http://ogbus.ru/authors/Ramazanov/Ramazanov_1.pdf
- [15] Ramazanov A.Sh., Valiullin R.A., Sadretdinov A.A., Shako V.V., Pimenov V.P., Fedorov V.N., Belov K.V. Thermal Modeling for Characterization of Near Wellbore Zone and Zonal Allocation. SPE 136256, Moscow: SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition, 2010.
- [16] Валиуллин Р.А., Рамазанов А.Ш., Хабилов Т.Р., Садретдинов А.А., Шако В.В., Сидорова М.В., Котляр Л.А., Федоров В.Н., Салимгареева Э.М. Интерпретация термогидродинамических исследований при испытании скважины на основе численного симулятора. SPE-176589-RU, Российская нефтегазовая техническая конференция SPE, 26-28 октября, 2015, Москва, Россия.
- [17] Оливье Узе, Дидье Витура, Оле Фьярэ. Анализ динамических потоков. КАППА выпуск v4.10.01 - Октябрь 2008.
- [18] Posvyanskii D.V., Gaidukov L.A., Tukhvatullina R.R. Estimating Bottom Hole Damage Zone Parameters Based on Mathematical Model of Thermo-hydrodynamic Processes // ECMOR XIV. - 2014.