

Министерство образования и науки Российской Федерации
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

На правах рукописи
УДК 532.546-3:536.42

Новиков Алексей Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАСТЕ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОКОЛОСКВАЖИННОЙ ЗОНЫ**

Выпускная квалификационная работа магистра
Направление подготовки 010900
«Прикладная математика и физика»
Магистерская программа 010922
«Фундаментальная и прикладная геофизика»

Заведующий кафедрой _____ к.т.н. Негодяев С.С.

Научный руководитель _____ к.т.н. Гайдуков Л.А.

Автор выпускной квалификационной работы _____ Новиков А.В.

Москва — 2016

Содержание

Введение	4
Обозначения	11
Глава 1. Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред	13
1.1 Конфигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.	13
1.2 Тезоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.	15
1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.	16
1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.	17
1.5 Закон сохранения энергии. Второе начало термодинамики. . . .	19
1.6 Постановка задачи	21
1.6.1 Гидродинамика	21
1.6.2 Термодинамика	24
Глава 2. Аналитические и численные методы решения задач неизотермической фильтрации.	25
2.1 Метод функций Грина	25
2.1.1 Метод Фурье разделения переменных	25
2.1.2 Проблемы сходимости рядов	28
2.1.3 Случай многофазной многокомпонентной фильтрации . .	29
2.2 Метод контурных интегралов	30
2.2.1 Общий подход	30
2.2.2 Пример	32
2.3 Метод конечных объёмов	33
2.3.1 Основа метода	33
2.3.2 Схема для законов сохранения массы при двухфазной двухкомпонентной фильтрации	35
2.3.3 Схема для уравнения баланса энергии	37
2.3.4 Численное решение СЛАУ	37
2.3.5 Расчёт граничных ячеек и обсуждение граничных условий	38
2.4 Распределение дебита вдоль ствола скважины	39

Глава 3. Неизотермическая фильтрация флюида к несовершенным скважинам.	41
3.1 Виды несовершенств	41
3.1.1 Повреждение ОЗП	42
3.1.2 Перфорация	43
3.1.3 Скважина, несовершенная по степени вскрытия	45
3.2 Теплоперенос при фильтрации к несовершенной скважине . . .	46
3.2.1 Случай совершенной скважины	46
3.2.2 Случай несовершенной скважины	48
Глава 4. Результаты расчётов.	51
4.1 Особенности расчёта	51
4.2 Верификация расчёта	51
4.3 Вклад различных эффектов в температурную аномалию на забое	52
4.4 Влияние несовершенства ОЗП на динамику забойной температуры. Определение характеристик ОЗП.	55
4.5 Влияние вторичного вскрытия на динамику забойной температуры.	58
Выводы	62
Список использованных источников	64

Введение

Традиционно расчёт фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах проводят пренебрегая изменением температуры среды. Во-первых, потому, что изменения температуры при фильтрации крайне малы, и не оказывают сколько-нибудь заметного влияния на свойства среды. Во-вторых, для записи температурных данных необходимы высокоточные датчики, которые получили широкое распространение лишь в последнее десятилетие. В-третьих, при дополнительном расчёте теплопереноса возникает необходимость указания большого количества характеристик (как компонентов среды, так и задачи в целом), значения которых неизвестны, либо известны с весьма плохой точностью. В этой связи, модели неизотермической фильтрации при гидродинамическом моделировании месторождений остаются не у дел.

Тем не менее существует ряд задач, в которых привлечение термодинамики насыщенной пористой среды позволяет определить некоторые *эксплуатационные характеристики пласта*. Речь идет о измерении *давления, дебита и температуры* в стволе скважины и последующей совместной интерпретации этих данных на основе соответствующих моделей массо- и теплопереноса. Такие исследования носят название *термогидродинамических*, и подразделяются на два вида:

- измерение параметров вдоль ствола скважины;
- измерение параметров во времени на определённой глубине.

Первый тип исследования относится к стандартным *геофизическим* исследованиям, проводимым на этапе освоения и эксплуатации скважин. Их результатом является определение следующих характеристик пласта:

- выявление работающих пластов;
- определение интервалов притока;
- оценка состава флюида, определение интервалов притока воды, нефти и газа;
- определение дебита, обводнённости, коэффициента продуктивности;
- определение пластового давления и температуры.

Результаты исследований по второму типу представляют особую ценность, т.к. позволяют определить динамические характеристики эксплуатируемых пластов. Широко распространённой техникой являются, так называемые, *гидродинамические исследования* (ГДИ). Этот метод позволяет, на основе интерпретации кривых восстановления уровня (КВУ), кривых восстановления давления (КВД), определить проницаемость пласта, суммарный скин-фактор, продуктивность скважины, которая, в свою очередь, является основным показателем работы скважины. Тем не менее, метод не даёт никаких более подробных сведений о структуре околоскважинной зоны пласта (ОЗП), тогда как с гидродинамической точки зрения эта область представляет наибольший интерес.

Начиная с первичного вскрытия пласта, когда происходит проникновение фильтрата бурового раствора, формируется сложная структура ОЗП, в результате чего, меняются и её фильтрационно-ёмкостные свойства (ФЕС). На этапе заканчивания, пласт прошивается системой перфорационных каналов, которая существенно меняет картину течения в ОЗП. Эти и другие технологические процедуры серьёзным образом усложняют моделирование многофазного притока к скважине.

Для определения структуры ОЗП, в последнее время начинают применяться *термогидродинамические исследования* (ТГДИ) скважин [17, 19, 20, 35], основа которых была заложена ещё более полувека тому назад Э.Б. Чекалюком [6]. Эти исследования основаны на моделях неизотермической фильтрации, с помощью которых рассчитывается забойная температура. Они используются для интерпретации промысловых данных, дополняя развитую технику интерпретации ГДИ.

Поскольку рассматриваемые исследования основаны на интерпретации нестационарных данных, принципиальным моментом здесь является скорость процесса. Давление очень быстро реагирует на изменение режима добычи и не позволяет получить информацию о ОЗП. В свою очередь, скорость основных тепловых процессов существенно ниже, что даёт возможность использовать ТГДИ для исследования ОЗП.

На пути прогресса распространения этой методики долгое время стояла недостаточная разрешающая способность температурных датчиков. Современные же устройства позволяют определять температуру с точностью до 0,0001 К, что является достаточным для идентификации даже незначительных изменений температурного фона в стволе скважины.

Тем не менее стоит отметить, что непосредственное применение ТГДИ на практике возможно лишь при наличии соответствующего оборудования и его правильной установки, проведении исследований тепловых PVT свойств флюида и породы, определённых системах заканчивания скважины, вкупе с другими геофизическими и промысловыми исследованиями.

В представленной работе, посвящённой математическому моделированию процессов, лежащих в основе ТГДИ, сделан упор на рассмотрение фазовых переходов происходящих при работе нефтяной скважины ниже давления насыщения, учёта системы вторичного вскрытия (перфорационных каналов) при исследовании динамики забойной температуры.

В Главе 1 представлены основные соотношения механики и термодинамики насыщенных пористых сред. Произведён последовательный вывод уравнений для рассматриваемой модели. В Главе 2 ...

Обзор литературы

Подробный вывод и описание законов сохранения и определяющих соотношений механики и термодинамики насыщенной пористой среды можно найти в [5]. Описание процессов тепло- и массо- переноса в многофазных многокомпонентных средах представлено в [3, 7]. Основные задачи фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах рассмотрены в [1, 2]. Модели неизотермической фильтрации представлены в [6, 8]. Уравнения состояния и расчёт констант фазового равновесия и PVT хар-к многофазной многокомпонентной углеводородной смеси рассмотрены в [28].

Математической моделью задач тепло- и массопереноса в пористых средах, как правило, является смешанная задача для системы нелинейных уравнений в частных производных. Для однородной прямоугольной области области задача массопереноса имеет аналитическое решение через функцию Грина [10]. Применение функций Грина для расчёта притока к скважинам произвольной геометрии рассмотрено в [38]. В [36] метод применяется к интерпретации ГДИ и обсуждаются вопросы суммирования рядов. Распространение метода на случай многофазной фильтрации можно найти в [37]. В радиальном случае проблема суммирования ряда, отмеченная в [1], до сих пор не решена. Решение задач методом функций Грина в неоднородных областях представляет большие трудности.

Зачастую, как в аналитических, так и в численных рассмотрениях пре-

небрегается зависимостью PVT характеристик континуумов от температуры (расщепление по физическим процессам). Несмотря на это, уравнение баланса энергии в случае многофазной фильтрации имеет сложный вид, его решение в общем виде неизвестно. В случае однофазной фильтрации и в пренебрежение теплопроводностью уравнение имеет гиперболический вид и имеет аналитическое решение [6, 19]. В работе [39] задача решается аналитически посредством расщепления на гиперболическое (конвекция, фазовые переходы, эф-т Джоуля-Томпсона, адиабатика) и параболическое (теплопроводность) уравнения.

Основным подходом при решении рассматриваемых задач является использование численных методов решения уравнений в частных производных [11]. Численные методы, схемы и варианты аппроксимаций уравнений фильтрации подробно рассмотрены в [12–14]. Различные разностные схемы решения многофазных постановок описаны в [16]. Используемый в данной работе, метод конечных объёмов, подробно описан в [15].

Как уже было отмечено, структура ОЗП сложна. Подробное изложение воздействия различных технологических и геологических процессов на пласт, в целом, и на ОЗП, в частности, представлено в [25]. Исследованию процессов формирования и разрушения структуры ОЗП, их математическому моделированию посвящена работа [30]. Корреляции для геометрического скина, отвечающего за перфорационные каналы, представлены в [26] и основаны также на численных расчётах.

Классическим пособием по ГДИ является книга Р. Эрлагера [27]. Современная техника интерпретации ГДИ основана на аналитическом решении уравнения пьезопроводности с использованием различных интегральных преобразований (Фурье, Лапласа и его модификаций). Подробности можно найти в [24]. Основным результатом классического исследования ГДИ является оценка производительности скважины. Приближённые методы определения коэффициента продуктивности, скин-фактора, основы узлового анализа (nodal analysis) скважин описаны в [29].

Метод *термозондирования* пласта был впервые представлен Э.Б. Чекалюком и назван его именем. Он представлен в [6] наряду с другими приложениями термометрии и тепловыми методами воздействия на пласт. Метод прост и легок в использовании. Недостатком является то, что он учитывает лишь эф-т Джоуля-Томпсона. Модели неизотермической фильтрации подробно описываются в [8], где основной упор сделан на исследование методов термозавод-

нения. Дальнейшее развитие ТГДИ связано с А.Ш. Рамазановым [17], Р.А. Валиуллиным [23]. В работе [21] эф-т Джоуля-Томпсона исследуется экспериментально. Непосредственное использование нестационарных термограмм в комплексе с ГДИ обсуждается в [22].

Современные исследования тесно связаны с использованием различных численных симуляторов, позволяющих применять ТГДИ для достаточно сложных моделей многофазной фильтрации. В статье [19] представлены примеры интерпретации промысловых данных ТГДИ и получены характеристики ОЗП, также рассмотрены некоторые простейшие модели учёта ствола скважины. В работе [18] рассмотрено аналитическое решение для кусочно-однородной области (ОЗП и пласт) с учётом разгазирования нефти. Сопряжённая модель скважина-пласт-горные породы представлена в [20], где, в комбинации с другими исследованиями, применяется ТГДИ для определения профилей притока и ФЕС каждого из интервалов перфорации.

Актуальность работы

Представленная работа является актуальной и имеет непосредственное приложение в области промысловых и геофизических исследований скважин.

На текущий момент ГДИ входят в перечень обязательных исследований скважин как на этапе освоения, так и при последующей эксплуатации. Результатом этих исследований, кроме всего прочего, являются промысловые данные по температуре с забоя скважины, измеренные с хорошей точностью. В настоящий момент эти данные практически ни как не используются, либо используются не достаточно эффективно при интерпретации ГДИ. В то время как, в работах [6, 17, 19, 20, 22, 23, 35] представлена методика интерпретации этих данных, позволяющая получить дополнительную информацию о ОЗП и профилях притока многопластовой системы, которую не может быть найдена в результате ГДИ. Метод имеет условное название ТГДИ. Эта информация позволит лучше понимать структуру ОЗП, позволит повысить достоверность и, как следствие, эффективность планируемых методов увеличения нефтеотдачи (МУН).

К тому же, в последнее время резко возрос интерес к третичным МУН, основу которых составляют тепловые методы поддержания энергии пласта, изменения его физико-химических свойств. Такая тенденция напрямую связана с проблемами разработки так называемых трудноизвлекаемых месторожде-

ний углеводородов. Очевидно, что при моделировании фильтрации и, непосредственно, МУН на таких месторождениях за основу должна уже браться модель неизотермической фильтрации, учитывающая различные физико-химические процессы происходящие в пласте. В таких условиях, роль, представленных в данной работе исследований ОЗП, возрастает.

Научная новизна

В отличие от упомянутых выше работ, разработанные в данной статье термогидродинамические модели учитывают совместное влияние на динамику поля температуры и давления в пласте $T(t, r)$, $P(t, r)$ следующих параметров, процессов и эффектов: разнонаправленный эффект Джоуля-Томсона при совместной фильтрации различных флюидов, адиабатическое расширение, фазовый переход флюидов в пласте при работе на давлении ниже давления насыщения, наличие зоны поражения пласта с измененными ФЕС, вторичное вскрытие пласта системой перфорационных каналов. Проведенное в работе исследование позволяет определить информативность данных динамики забойной температуры для определения параметров околоскважинной зоны в более интересном с практической точки зрения случае – многофазная фильтрация к скважине с вторичным вскрытием.

Апробация

Данная работа была представлена на следующих конференциях:

- 58-ая научная конференция Московского физико-технического института, Долгопрудный, 23-28 ноября, 2015 г.
- Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений, Уфа, 7-9 апреля 2015 г.

Представленная работа отобрана для технической сессии конференции Общества инженеров нефтегазовой промышленности (SPE):

- Гайдуков Л.А., Новиков А.В., Посвянский Д.В. Исследование термогидродинамических процессов при многофазной фильтрации флюидов к скважине в техногенно-измененном пласте со вторичным вскрытием с целью определения параметров околоскважинной зоны. SPE-181964 //

Российская нефтегазовая техническая конференция и выставка SPE.
24-26 октября 2016. Москва.

Обозначения

Здесь и далее будем обозначать индексом с заглавной буквой $A = \{F, G, S\}$ эффективные характеристики соответствующего континуума, со строчной $a = \{f, g, s\}$ – истинные характеристики.

Нижними индексами $\{w, e\}$ будем обозначать значение величины на забое скважины и контуре пласта соответственно.

Верхний индекс “ θ ” означает равновесную составляющую физической величины, в то время как “ dis ” – диссипативную составляющую.

Обозначения и операторы:

\mathbb{E}^3 трёхмерное евклидово пространство,

κ_A отсчётная конфигурация континуума A ,

$\chi(t)$ текущая конфигурация системы,

∇_κ градиент в переменных \mathbf{X} ,

∇ градиент в переменных \mathbf{x} ,

\otimes тензорное умножение,

ε абсолютный антисимметричный тензор 3-го ранга Леви-Чивита,

\mathbf{n} вектор единичной нормали к поверхности,

Общие характеристики среды:

\mathbf{X}_A радиус-вектор материальной точки континуума A в отсчётной конфигурации,

\mathbf{x} радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации,

\mathbf{v} вектор скорости материальной точки континуума A ,

\mathbf{w}_A в зависимости от контекста: либо диффузионная скорость (относительно центра масс среды), либо скорость движения флюида A относительно скелета S ,

\mathbf{F}_A градиент деформаций (дисторсия) среды A ,

ϕ_A объёмная доля континуума A ,

ϕ пористость среды,

S насыщенность среды нефтью (жидкой фазой),

ρ плотность массы,

q_A объёмная интенсивность перехода массы вещества в континуум A ,

Характеристики напряжённого состояния:

\mathbf{t} вектор напряжений,

$\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений Коши,

\mathbf{b} плотность массовых сил,

\mathbf{b}^{int} объёмная сила взаимодействия континуумов,

Термические характеристики:

θ температура среды,

r плотность внешних источников,

r^{int} скорость объёмного теплообмена между континуумами,

h_A поверхностный приток тепла,

\mathbf{q} вектор теплового потока,

e плотность полной энергии,

u плотность внутренней энергии,

η плотность энтропии,

ψ плотность свободной энергии,

δ диссипация энергии,

Глава 1

Основы механики и термодинамики насыщенных пористых сред

Насыщенная пористая среда – совокупность твёрдого деформируемого скелета и флюида, насыщающего этот скелет. Под *флюидом* понимается смесь жидкостей и газов, способная перемещаться внутри порового пространства скелета. Для описания совместного движения скелета и флюида используется *гипотеза суперпозиции континуумов*, которая предполагает что в каждой точке пространства находится и скелет, и флюид.

Флюид, в свою очередь, может быть многофазным и многокомпонентным. Здесь и далее будем отождествлять понятие *компоненты* с химическим веществом, входящим в состав флюида. *Фазой* будем называть термодинамически равновесное состояние вещества, качественно отличное от других равновесных состояний того же вещества.

Подробное изложение законов сохранения, построение определяющих соотношений для таких систем можно найти в [2, 4–6]. Вопросы динамики многофазных сред описаны в [7].

Здесь и далее, для простоты, будем рассматривать флюид, состоящий из двух компонент, которые могут находиться в двух фазах (жидкой и газообразной) – *бинарную смесь*. В данной главе будут представлены законы сохранения, основные определяющие соотношения такой системы. Как результат будут получены математические модели процессов массо- и теплопереноса в пористых средах.

1.1 Конфигурации. Градиент деформации. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения сплошной среды.

Материальная точка или *элементарный объём* – объём сплошной среды, пренебрежимо малый по сравнению с размерами рассматриваемой задачи, но, при том, достаточный для того чтобы можно было проводить по нему осреднение. Дальнейшее рассмотрение будет проводится именно для таких объёмов.

Обозначим $\kappa_A \in \mathbb{E}^3$ – область, которую занимают частицы скелета ($A=S$)

или флюида ($A=F, G$) в момент времени $t = 0$. Область κ_A в дальнейшем будем называть *отсчётной (начальной) конфигурацией* скелета или флюида соответственно. Область $\chi(t) \in \mathbb{E}^3$, занятую в момент времени $t > 0$ частицами скелета и флюида, назовём *актуальной* или *текущей конфигурацией*. Отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ будем называть деформацией континуума A .

Здесь и далее предполагается, что области $\kappa_A, \chi(t)$ – регулярны, отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$ – кусочно-гомеоморфны и дифференцируемы. Тогда существуют взаимнооднозначные дифференцируемые связи:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \chi(t), \quad \mathbf{X}_A \in \kappa_A, \quad (1.1)$$

которые называются *законами движения* материальных точек скелета и флюида.

Возьмём дифференциал от (1.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{X}_A \cdot (\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{x}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_A^T = \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{X}, \\ \mathbf{F}_A(\mathbf{X}, t) &= [\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{x}(\mathbf{X}_A, t)]^T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{F}_A – тензор второго ранга, называемый *градиентом деформации (дисторсией)* континуума A .

Для градиента деформаций \mathbf{F}_A справедлива *теорема Коши о полярном разложении*, которая позволяет представить деформацию элемента $d\mathbf{X}_A$ как комбинацию растяжения (сжатия) и вращения как жесткого целого:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{U}_A = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{R}_A, \quad (1.3)$$

где \mathbf{R}_A – ортогональный тензор второго ранга, называемый *тензором поворота*, $\mathbf{U}_A, \mathbf{V}_A$ – симметричные положительной определённые тензоры второго ранга, называемые *правым и левым тензорами растяжения*. Разложение (1.19) единственно.

Частной производной закона движения (1.1) по времени является *вектор скорости материальной точки*:

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_A, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_A}. \quad (1.4)$$

Здесь и далее точкой будем обозначать *материальную производную по времени* (при постоянном \mathbf{X}_A).

Описание характеристик материальной точки функциями от \mathbf{X}_A носит на-

звание *материального* или *лагранжевого описания среды*, а радиус-вектор \mathbf{X}_A носит название *материальной* или *лагранжевой переменной*. Если же характеристики представляются функциями \mathbf{x} , то такой подход называется *пространственным* или *эйлеровым описанием среды*, переменная \mathbf{x} – *пространственной* или *эйлеровой переменной*.

1.2 Тензоры деформаций. Уравнение совместности скоростей и деформаций.

Для того чтобы охарактеризовать деформации континуума вводятся специальные меры – *тензоры конечных деформаций*. Наиболее употребительными являются *тензоры Коши-Грина* \mathbf{E}_A и *Альманзи* \mathbf{A}_A :

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_A^T \cdot \mathbf{F}_A - \mathbf{I}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_A^{-1T} \cdot \mathbf{F}_A^{-1}). \quad (1.6)$$

Представляя градиент деформаций (1.2) через вектор перемещений $\mathbf{u}_A = \mathbf{x}_A - \mathbf{X}_A$, подставляя в (1.5) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим *тензор малых деформаций* \mathbf{e}_A :

$$\mathbf{e}_A = \frac{1}{2} \left((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right), \quad (1.7)$$

где в принятых допущениях: $\nabla_\kappa \simeq \nabla$.

Величины $\mathbf{F}_A(\mathbf{X}_A, t)$ и $\mathbf{v}_A(\mathbf{X}_A, t)$ являются первыми производными отображения $\kappa_A \rightarrow \chi(t)$. Предполагая отображение (1.1) кусочно дважды непрерывно-дифференцируемым, получим соотношение:

$$\dot{\mathbf{F}}_A = (\nabla_\kappa \otimes \mathbf{v}_A)^T, \quad (1.8)$$

называемое *уравнением совместности скоростей и деформаций*.

1.3 Пористость. Эффективная и истинная плотности. Закон сохранения масс.

Для описания доли пустот в твёрдом скелете используется скалярная величина $\phi(\mathbf{x}, t)$ – *пористость*, определяемая выражением:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V(\mathbf{x}, t)} \int_{V(\mathbf{x})} \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t) dV, \quad (1.9)$$

где интеграл берётся по элементарному объёму $V(\mathbf{x})$, $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}, t)$ – индикаторная функция скелета.

Наряду с пористостью введём понятия *объёмных долей* флюидов в объёме среды ϕ_F, ϕ_G . Для них справедливо соотношение: $\phi_F + \phi_G = \phi_S$, где $\phi_S \equiv \phi$.

Насыщенностью пористой среды флюидом A называется величина:

$$S_A = \frac{\phi_A}{\phi}, \quad 0 \leq S_A \leq 1, \quad S_F + S_G = 1. \quad (1.10)$$

Здесь и далее будем считать: $S \equiv S_F, 1 - S = S_G$.

Масса пористого насыщенного тела β равна:

$$m(\beta) = \int_{\chi(\beta, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \sum_{A=\{F, G, S\}} \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.11)$$

$$\rho_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(\mathbf{x}, t) \rho_a(\mathbf{x}, t), \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.12)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\rho_A(\mathbf{x}, t)$ – *осреднённые (эффективные) плотности* насыщенной пористой среды и континуума A , $\rho_a(\mathbf{x}, t)$ – *истинные плотности* континуума A .

В предположении, что обмен массой между континуумами отсутствует, запишем *локальный закон сохранения массы континуума* в форме Лагранжа:

$$\rho_{\kappa_A} = \rho_A |\det \mathbf{F}_A|, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.13)$$

где ρ_{κ_A} , ρ_A – плотности массы континуума A в отсчётной и актуальной конфигурациях.

Взяв материальную производную от интегралов в (1.11), получим *локальное уравнение баланса массы континуума A в форме Эйлера*:

$$\dot{\rho}_A + \rho_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.14)$$

или в дивергентной форме:

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_x + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = 0, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.15)$$

Выражения (1.13), (1.14), (1.15) справедливы при отсутствии химических (фазовых) превращений. В противном случае необходимо писать в правой части соответствующие интенсивности переходов q_A :

$$\left. \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \right|_x + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = q_A, \quad A = \{F, G, S\}. \quad (1.16)$$

1.4 Напряжения. Законы сохранения импульса и момента импульса.

Силу, действующую континуум A в объёме тела β , представим в виде суммы объёмных массовых сил, объёмных сил взаимодействия континуумов и контактных сил:

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{f}_A^b + \mathbf{f}_A^{int} + \mathbf{f}_A^c = \int_{\chi(\beta, t)} \rho_A \mathbf{b}_A dV + \int_{\chi(\beta, t)} \mathbf{b}_A^{int} dV + \oint_{\partial\chi(\beta, t)} \mathbf{t}_A dS, \quad (1.17)$$

где $\mathbf{b}_A(\mathbf{x}, t)$ – плотность внешней массовой силы, \mathbf{b}_A^{int} – плотность сил, действующих на континуум A со стороны остальных континуумов в элементарном объёме, \mathbf{t}_A – контактная сила, действующая на континуум A извне области χ со стороны того же континуума.

Для объёмных сил взаимодействия предполагаются:

$$\mathbf{b}_F^{int} + \mathbf{b}_G^{int} + \mathbf{b}_S^{int} = 0. \quad (1.18)$$

Сила \mathbf{t}_A называется *вектором парциальных напряжений* континуума A , задаётся на поверхности и является функцией координат и ориентации поверхности (*постулат Коши*): $\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n})$. Для вектора \mathbf{t}_A справедлива *фундаментальная теорема Коши*:

$$\mathbf{t}_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.19)$$

где тензор $\boldsymbol{\sigma}_A$ называется *тензором эффективных (парциальных) напряжений Коши* для континуума A . Для тензора $\boldsymbol{\sigma}_A$ справедливо выражение:

$$\boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma}_a(\mathbf{x}, t), \quad (1.20)$$

где $\sigma_a(\mathbf{x}, t)$ – тензор истинных напряжений Коши для континуума A .

Используя (1.19) и теорему Гаусса-Остроградского запишем законы сохранения импульса и момента импульса для континуума A в виде:

$$\int_{\chi(\beta, t)} \left(\frac{\partial(\rho_A \mathbf{v}_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \otimes \rho_A \mathbf{v}_A - \sigma_A^T) - \rho_A \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_A^{int} \right) dV = 0, \quad (1.21)$$

$$\int_{\chi(\beta, t)} \left[\mathbf{r} \times \left(\frac{\partial(\rho_A \mathbf{v}_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \otimes \rho_A \mathbf{v}_A - \sigma_A^T) - \rho_A \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_A^{int} \right) + \varepsilon : \sigma_A \right] dV = 0, \quad (1.22)$$

где ε – тензор Леви-Чивита. Подставляя (1.21) в (1.22) получим:

$$\sigma_A = \sigma_A^T. \quad (1.23)$$

Для выполнения закона сохранения момента импульса (1.22) необходимо и достаточно выполнения (1.23).

Выражения (1.21), (1.22) справедливы, если можно пренебречь вкладом квадрата пульсаций скорости в действующую силу и момент силы. В противном случае в законах сохранения необходимо записывать пульсационные и моментные напряжения.

Используя (1.16), запишем закон сохранения для континуума A в виде:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_A + q_A \mathbf{v}_A - \nabla \cdot \sigma_A = \rho_A \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_A^{int}. \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) называется *уравнением движения континуума A* .

Сила взаимодействия, тензор напряжений и объёмная доля представляются в виде:

$$\mathbf{b}_A^{int} = \mathbf{b}_A^0 + \mathbf{b}_A^{dis}, \quad \sigma_A = \sigma_A^0 + \sigma_A^{dis}, \quad \phi_A = \phi_A^0 + \phi_A^{dis}, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.25)$$

где \mathbf{b}_A^0 , σ_A^0 , ϕ_A^0 и \mathbf{b}_A^{dis} , σ_A^{dis} , ϕ_A^{dis} – равновесные и диссипативные значения силы взаимодействия, тензора напряжений и объёмной доли. При этом имеем: $\mathbf{b}_A^0 = \sigma_a \cdot \nabla(\phi_A)$. Для \mathbf{b}_A^{dis} формулируются определяющие соотношения, которые приводят к закону Дарси.

Суммируя (1.24) по всем континуумам $A = \{F, G, S\}$, получим:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \left(\sum_A (\mathbf{w}_A \otimes \rho_A \mathbf{w}_A) - \boldsymbol{\sigma} \right) = \rho \mathbf{b}, \quad (1.26)$$

$$\rho = \sum_A \rho_A, \quad \rho \mathbf{v} = \sum_A \rho_A \mathbf{v}_A, \quad \rho \mathbf{b} = \sum_A \rho_A \mathbf{b}_A \quad (1.27)$$

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A, \quad \sum_A \rho_A \mathbf{w}_A = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_A \boldsymbol{\sigma}_A, \quad (1.28)$$

где ρ – плотность среды, $\rho \mathbf{v}$ – среднемассовая (барицентрическая) скорость, \mathbf{w}_A – относительные (диффузионные) скорости континуума A , $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор полных напряжений среды.

1.5 Закон сохранения энергии. Второе начало термодинамики.

Для описание теплопереноса в рассматриваемой системе воспользуемся гипотезой о *локальном термодинамическом равновесии*, которая предполагает, что внутри каждого элементарного объёма среды все континуумы находятся в состоянии термодинамического равновесия. Считается, что при малых скоростях движения флюидов и высокой теплопроводности, использование гипотезы оправдано. В таком случае можно ввести понятие *температуры* $\theta(\mathbf{x}, t)$ для материальной точки \mathbf{x} в момент времени t .

Запишем скорость подвода тепла к континууму A в объёме тела β :

$$Q_A = \int_{\chi(\beta, t)} (\rho_A r_A + r_A^{int}) dV + \oint_{\partial\chi(\beta, t)} h_A dS, \quad (1.29)$$

где r_A – *плотность внешних* (по отношению к континууму A) *объёмных источников тепла*, h_A – *поверхностный приток тепла*, r_A^{int} – *скорость объёмного теплообмена*.

Величины r_A^{int} , h_A во многом аналогичны характеристикам напряженного состояния \mathbf{b}_A^{int} , \mathbf{t}_A . Для r_A^{int} справедливо соотношение:

$$r_F^{int} + r_G^{int} + r_S^{int} = 0, \quad (1.30)$$

а для h_A справедлива *фундаментальная теорема Фурье-Стокса*:

$$h_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.31)$$

где $\mathbf{q}_A(\mathbf{x})$ – вектор теплового потока.

Запишем закон баланса энергии в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\beta,t)} \rho e dV = \sum_A \left[\int_{\chi(\beta,t)} (\rho_A \mathbf{b}_A \cdot \mathbf{v}_A) dV + \oint_{\partial\chi(\beta,t)} (\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{v}_A) dS \right] + \int_{\chi(\beta,t)} (\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r) dV \quad (1.32)$$

$$\rho e = \sum_A \rho_A e_A, \quad e_A = u_A + \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A}{2}, \quad \mathbf{q} = \sum_A \mathbf{q}_A, \quad (1.33)$$

$$\rho r = \sum_A \rho_A r_A, \quad A = \{F, G, S\}, \quad (1.34)$$

где e_A – плотность полной энергии системы, u_A – плотность внутренней энергии. В выражении (1.32) слева стоит материальная производная от полной энергии тела β – внутренней и кинетической, справа стоит мощность внешних сил и суммарная скорость подвода тепла.

Используя (1.16), (1.24) получим *приведённое уравнение баланса энергии* в виде:

$$\sum_A \left[\rho_A \dot{u}_A + q_A \left(u_A - \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A}{2} \right) \right] = \sum_A \left[\mathbf{b}_A^{int} \cdot \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\sigma}_A : (\nabla \otimes \mathbf{v}_A) \right] + \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r, \quad (1.35)$$

где \mathbf{w}_A – скорость материальной точки континуума A относительно скелета S .

Для формулировки второго начала термодинамики введём понятие плотности *энтропии* континуума A – η_A . Введение понятия энтропии позволяет верным образом учесть направление термодинамических процессов, а также ввести понятие необратимых процессов. Между тем второе начало термодинамики будет использовано далее для построения определяющих соотношений насыщенной пористой среды.

Запишем *второе начало термодинамики* в интегральном виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\beta,t)} \sum_A \rho_A \eta_A dV \geq \int_{\chi(\beta,t)} \frac{\rho r}{\theta} dV + \oint_{\partial\chi(\beta,t)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dS. \quad (1.36)$$

Преобразуем (1.36) и запишем в дифференциальном виде:

$$\theta \sum_A [\rho_A \dot{\eta}_A + q_A \eta_A] - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0, \quad (1.37)$$

$$\delta_M = \theta \sum_A [\rho_A \dot{\eta}_A + q_A \eta_A] - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r, \quad \delta_T = \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta}, \quad (1.38)$$

$$\delta_M + \delta_T \geq 0, \quad (1.39)$$

где δ_M имеет смысл *механической (внутренней) диссипации*, а δ_T – *термической диссипации*, связанной с теплопроводностью среды.

Запишем (1.37) через *плотность свободной энергии* $\psi_A = u_A - \theta \eta_A$. Для этого воспользуемся (1.8), (1.35), (1.25), получим:

$$\begin{aligned} - \sum_A \left[\rho_A \left(\dot{\psi}_A + \eta_A \dot{\theta} \right) + q_A \left(\psi_A - \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A}{2} \right) + \boldsymbol{\sigma}_a : (\nabla \otimes \phi_A^0 \mathbf{w}_A) \right] + \\ + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}_S^{-1T}) : \dot{\mathbf{F}}_S + \delta_f + \delta_T \geq 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_A \boldsymbol{\sigma}_A, \quad \delta_f = \sum_A [\boldsymbol{\sigma}_A^{dis} : (\nabla \otimes \mathbf{w}_A) + \mathbf{b}_A^{dis} \cdot \mathbf{w}_A], \quad (1.41)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор полных напряжений среды, δ_f – *диссипация фильтрации*. Выражение (1.41) носит название – *вторая форма приведённого неравенства Клаузиуса-Дюгема*.

1.6 Постановка задачи

1.6.1 Гидродинамика

Запишем математическую модель двухкомпонентной (нефть, газ) $\{O, G\}$ двухфазной (жидкость, газ) $\{l, g\}$ фильтрации флюида в пласте. Уравнения баланса массы для компонент (1.15) в таком случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\phi S_o C_{Ol} \rho_l + \phi S_g C_{Og} \rho_g] + \operatorname{div} [C_{Ol} \rho_l \mathbf{w}_l + C_{Og} \rho_g \mathbf{w}_g] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} [\phi S_o C_{Gl} \rho_l + \phi S_g C_{Gg} \rho_g] + \operatorname{div} [C_{Gl} \rho_l \mathbf{w}_l + C_{Gg} \rho_g \mathbf{w}_g] &= 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где массовые доли компонентов в фазах C_{Ol} , C_{Og} , C_{Gl} , C_{Gg} примем равными:

$$\begin{aligned} C_{Ol} &= \frac{\rho_O^{STC}}{\rho_O^{STC} + \rho_G^{STC} Rs(p)}, \quad C_{Og} = 0, \\ C_{Gl} &= \frac{\rho_G^{STC} Rs(p)}{\rho_O^{STC} + \rho_G^{STC} Rs(p)}, \quad C_{Gg} = 1, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где ρ_O^{STC} , ρ_G^{STC} – плотность нефти и газа в стандартных условиях, $Rs = Rs(p)$ – газосодержание нефти.

Будем использовать следующие уравнения состояния для фаз:

$$\rho_l = \frac{\rho_O^{STC} + \rho_G^{STC} Rs(p)}{B_l(p)}, \quad \rho_g = \frac{\rho_G^{STC}}{B_g(p)}, \quad (1.44)$$

где $B_l = B_l(p)$, $B_g = B_g(p)$ – объёмные коэффициенты жидкой и газовой фаз соответственно. Здесь мы рассматриваем газированную жидкость, нефть в газовой фазе не содержится.

Будем рассматривать фильтрацию по закону Дарси:

$$\mathbf{w}_l = -\frac{\mathbb{K}k_{rl}}{\mu_l} \nabla p, \quad \mathbf{w}_g = -\frac{\mathbb{K}k_{rg}}{\mu_g} \nabla p, \quad (1.45)$$

где $\mathbb{K} = k_x(r)\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + k_y(r)\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + k_z(r)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ – тензор проницаемости, k_{ro} , k_{rg} – относительные фазовые проницаемости жидкой и газовой фаз, μ_l , μ_g – вязкости фаз.

Выражения для $k_x(r)$, $k_y(r)$, $k_z(r)$:

$$k_x = k_y \equiv k(r) = \begin{cases} k, & r \geq r_d, \\ k_d, & r_w \geq r > r_d \end{cases} \quad (1.46)$$

$$k_z \equiv \text{const}. \quad (1.47)$$

Примем что $S_o \equiv S$, $S_g = 1 - S$, тогда подставляя (1.43), (1.44) в (1.42) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{mS}{B_l} \right) &= \text{div} \left(\frac{k k_{rl}}{\mu_l B_l} \nabla p \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m(1-S)}{B_g} + \frac{mS Rs}{B_l} \right) &= \text{div} \left(\frac{k k_{rg}}{\mu_g B_g} \nabla p + \frac{k k_{rl} Rs}{\mu_l B_l} \nabla p \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Уравнения (1.48) представляют собой систему из двух нелинейных уравнений в частных производных 2-го порядка по p , 1-го по S . Её решение устой-

чиво при условии:

$$\frac{dB_l}{dp} < B_g \frac{dR_s}{dp}. \quad (1.49)$$

Для системы (1.48) поставим начальное условие в виде:

$$p|_{t=0} = p_0, \quad S|_{t=0} = S_0, \quad (1.50)$$

граничное условие на подошве Γ_b и кровле Γ_t пласта:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\Gamma_b} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\Gamma_t} = 0, \quad (1.51)$$

граничное условие на контуре питания r_e :

$$p|_{r=r_e} = p_0, \quad S|_{r=r_e} = S_0. \quad (1.52)$$

Поверхность скважины Γ разобьём на две: $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_{np}$ – перфорированную и неперфорированную. На поверхности Γ_{np} поставим условие непротекания:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{np}} = 0, \quad (1.53)$$

где \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности. На поверхности Γ_p будем рассматривать *контроль по давлению*:

$$p|_{\Gamma_p} = f(t), \quad (1.54)$$

а также *контроль по дебиту*:

$$A \frac{kk_{rl}}{\mu_l B_l} \nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_p} = Q_l(\mathbf{r}, t), \quad (1.55)$$

где A – перфорированная площадь, $Q_l = Q_l(\mathbf{r}, t)$ – дебит жидкости.

1.6.2 Термодинамика

Запишем финальное уравнение баланса энергии (1.35) в виде:

$$c_t \frac{\partial \theta}{\partial t} + qL - \tilde{c}\eta \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{c}\mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \widetilde{c\varepsilon\mathbf{v}} \cdot \nabla p = \operatorname{div} \left(\tilde{\lambda} \nabla \theta \right), \quad (1.56)$$

$$c_t = \phi(S\rho_l c_l + (1-S)\rho_g c_g) + (1-\phi)\rho_s c_s,$$

$$\tilde{c}\eta = \phi(S\rho_l c_l \eta_l + (1-S)\rho_g c_g \eta_g),$$

$$\tilde{c}\mathbf{v} = \phi(S\rho_l c_l \mathbf{v}_l + (1-S)\rho_g c_g \mathbf{v}_g),$$

$$\widetilde{c\varepsilon\mathbf{v}} = \phi(S\rho_l c_o \varepsilon_l \mathbf{v}_o + (1-S)\rho_g c_g \varepsilon_g \mathbf{v}_g),$$

$$\tilde{\lambda} = \phi(S\lambda_l + (1-S)\lambda_g) + (1-\phi)\lambda_s.$$

Уравнение (1.56) – линейное уравнение в частных производных, второго порядка относительно θ . Однако при расчёте его коэффициенты меняются во времени от шага к шагу, т.к. они являются результатом решения сменанной задачи (1.48), (1.50), (1.51), (1.53), (1.54) либо задачи (1.48), (1.50), (1.51), (1.53), (1.55).

Для уравнения (1.56) будем рассматривать начальное условие вида:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad (1.57)$$

граничное условие на подошве Γ_b и кровле Γ_t пласта:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{\Gamma_b} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{\Gamma_t} = 0, \quad (1.58)$$

граничное условие на контуре:

$$\theta|_{r=r_e} = \theta_0. \quad (1.59)$$

Граничное условие на неперфорированной поверхности скважины Γ_{np} :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{np}} = 0. \quad (1.60)$$

Граничное условие на перфорированной поверхности Γ_p будет обсуждаться в Главе 2.

Глава 2. Аналитические и численные методы решения задач неизотермической фильтрации.

2.1 Метод функций Грина

Метод функций Грина означает представление решения смешанной (краевой) задачи для дифференциального уравнения в частных производных в виде ряда по собственным функциям дифференциального оператора в определенной области с определёнными граничными условиями [10]. Это означает, что сам вид собственных функции дифференциального оператора зависит от формы области и граничных условий.

Ниже будет рассмотрено применение метода к уравнению пьезопроводности, уравнению Пуассона в прямоугольной однородной области [38]. Будет показана методика использования метода в задачах многофазной многокомпонентной фильтрации.

2.1.1 Метод Фурье разделения переменных

Рассмотрим область $G \subset \mathbb{E}^3$ евклидова пространства, представляющую собой прямоугольный параллелепипед: $G = \{0 \leq x \leq s_x, 0 \leq y \leq s_y, 0 \leq z \leq s_z\}$, окружённую кусочно-гладкой границей $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_b \cup \Gamma_t$, где Γ_t – грань $z = s_z$, Γ_b – грань $z = 0$, Γ_s – все остальные грани параллелепипеда.

Рассмотрим уравнение пьезопроводности в области G :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} p) + F(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

где $\kappa = \frac{k}{\mu m \beta}$ – коэффициент пьезопроводности, k – проницаемость, m – пористость, β – полная сжимаемость, $F = \frac{Q(\mathbf{r}, t)}{m \beta}$ – функция источника, $Q(\mathbf{r}, t)$ – объёмный расход флюида. Зададимся начальным условием:

$$p|_{t=0} = p_0, \quad (2.2)$$

граничными условиями:

$$p|_{\Gamma_s} = p_0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\Gamma_t, \Gamma_b} = 0, \quad (2.3)$$

что соответствует поддержанию постоянного давления p_0 на контуре и непро-

теканию через кровлю и подошву.

Таким образом задача (2.1), (2.2), (2.3) – смешанная задача для неоднородного параболического уравнения с переменными коэффициентами.

Применим метод Фурье для решения задачи (2.1), (2.2), (2.3), а именно будем искать её решение в виде:

$$p(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

где X_k – ортонормальная система собственных функций дифференциального оператора $L = -\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad})$.

Получим вид функций T_k , умножим (2.1) на X_k скалярно:

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\partial p}{\partial t} X_k d\mathbf{r} &= \frac{d}{dt} \int_G p X_k d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} (p, X_k) = \\ &= -(Lp, X_k) + (F, X_k) = -\lambda_k (p, X_k) + (F, X_k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где λ_k – собственные значения L , соответствующие собственным функциям X_k . Здесь использовался факт, что оператор L – эрмитов. Из (2.4) имеем:

$$(p, X_k) = T_k. \quad (2.6)$$

Тогда из 2.5 получим уравнение на T_k :

$$T'_k = -\lambda_k T_k + (F, X_k), \quad (2.7)$$

$$T_k|_{t=0} = (p_0, X_k), \quad (2.8)$$

решением которого будет:

$$\begin{aligned} T_k(t) &= ((p_0, X_k) + (F, X_k) *) e^{-\lambda_k t} = \\ &= e^{-\lambda_k t} \int_G p_0(\mathbf{r}) X_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_0^t \int_G F(\mathbf{r}', t') X_k(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' e^{-\lambda_k(t-t')} dt', \end{aligned} \quad (2.9)$$

где символом ”*” обозначена свёртка. Вынося начальные условия в функцию источника F , решением (2.9) будет, как известно, свёртка F и фундаментального решения дифференциального оператора – $e^{-\lambda_k t}$.

Решение (2.4) предстанет в виде:

$$p(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\mathbf{r}) ((p_0, X_k) + (F, X_k) *) e^{-\lambda_k t} \quad (2.10)$$

В случае, если $p_0 = \text{const}$ то её можно вычесть и получить выражение при $p_0 = 0$. Меняя местами суммирование и интегрирование, получим:

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_G \int_0^t F(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') dt' d\mathbf{r}', \quad (2.11)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\mathbf{r}) X_k(\mathbf{r}') e^{-\lambda_k(t-t')}, \quad (2.12)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$ – функция мгновенного точечного источника или функция Грина.

Систему собственных функций оператора L выберем так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (2.3):

$$\sqrt{\frac{8}{s_x s_y s_z}} \sin\left(\frac{\pi n_x x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{s_y}\right) \cos\left(\frac{\pi n_z z}{s_z}\right) \quad (2.13)$$

Функция Грина G примет вид:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \frac{8}{V} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \chi_{n_x, n_y, n_z} e^{-\lambda_{n_x, n_y, n_z}(t-t')} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \chi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z, x', y', z') &= \sin\left(\frac{\pi n_x x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{s_y}\right) \cos\left(\frac{\pi n_z z}{s_z}\right) \cdot \\ &\cdot \sin\left(\frac{\pi n_x x'}{s_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y'}{s_y}\right) \cos\left(\frac{\pi n_z z'}{s_z}\right), \\ \lambda_{n_x, n_y, n_z} &= \kappa \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{s_x^2} + \frac{n_y^2}{s_y^2} + \frac{n_z^2}{s_z^2} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $V = s_x s_y s_z$ – объём параллелепипеда.

В стационарном случае будем иметь:

$$p(\mathbf{r}) = \int_G Q(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.16)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{8k}{V\mu} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{\chi_{n_x, n_y, n_z}}{\lambda_{n_x, n_y, n_z}}$$

$$\lambda_{n_x, n_y, n_z} = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{s_x^2} + \frac{n_y^2}{s_y^2} + \frac{n_z^2}{s_z^2} \right)$$

2.1.2 Проблемы сходимости рядов

К сожалению ряды (2.11), (2.16) – условно сходящиеся. Это означает, что их частичные суммы плохо сходятся и необходимо огромное количество итераций для получения результата с приемлемой точностью.

Вопросы сходимости этих рядов и методы их суммирования рассмотрены в [36], [37]. Там же предложен метод Эвальда для суммирования этих рядов. Метод впервые был предложен для суммирования подобных рядов в физике твёрдого тела. Опишем вкратце этот метод для стационарного случая.

В выражении для функции Грина (2.16) производится следующее преобразование:

$$\frac{1}{\lambda_{n_x, n_y, n_z}} = \int_0^{\xi_c} \exp(-\lambda_{n_x, n_y, n_z} \xi) d\xi + \int_{\xi_c}^{\infty} \exp(-\lambda_{n_x, n_y, n_z} \xi) d\xi. \quad (2.17)$$

Плохо сходящийся ряд, который содержит первый интеграл, суммируется в пространстве Фурье с помощью формулы Пуассона, которая в данном случае позволит посчитать ряд:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{s_x} \sum_{n_x=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n_x^2 \xi}{s_x^2}\right) \sin\left(\frac{\pi n_x x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_x x'}{s_x}\right) = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\pi\xi}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x - x' + 2is_x)^2}{4\xi}\right) - \exp\left(-\frac{(x + x' + 2is_x)^2}{4\xi}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

который сходится по i гораздо лучше.

Ряд содержащий второй интеграл суммируется напрямую, его скорость сходимости достаточно хорошая. Таким образом можно посчитать плохо сходящиеся ряды вида (2.16), за приемлимое время.

2.1.3 Случай многофазной многокомпонентной фильтрации

Метод может быть использован для расчёта многофазной многокомпонентной фильтрации, необходимо лишь привести соответствующие уравнения к уравнению Пуассона (здесь, также для простоты, рассмотрим стационарный случай, обобщение на нестационарный случай (2.11) получается без труда).

Это можно осуществить используя *функцию Христиановича* (*generalized pseudopressure function*) [3]. Запишем закон сохранения массы для каждой компоненты:

$$\operatorname{div} \sum_{\alpha=1}^k \frac{k_{\alpha} \rho_{\alpha} l_{i\alpha}}{\mu_{\alpha}} \nabla p = Q_i, \quad \sum_{i=1}^n l_{i\alpha} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha = \overline{1, k}, \quad (2.19)$$

где i обозначает компоненту, α – фазу, $l_{i\alpha}$ – массовая доля i -ой компоненты в α -ой фазе, Q_i – массовый источник. Суммируя (2.19) по всем компонентам, получим:

$$\operatorname{div} \sum_{\alpha=1}^k \frac{k_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\mu_{\alpha}} \nabla p = Q. \quad (2.20)$$

Введём функцию Христиановича для отдельной компоненты и для всего флюида в следующей форме:

$$H_i = \int \sum_{\alpha=1}^k \frac{k_{\alpha} \rho_{\alpha} l_{i\alpha}}{\mu_{\alpha}} dp + C, \quad H = \int \sum_{\alpha=1}^k \frac{k_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\mu_{\alpha}} dp + C. \quad (2.21)$$

Тогда уравнения (2.19), (2.20) могут быть записаны в виде:

$$\nabla^2 H_i = Q_i, \quad \nabla^2 H = Q, \quad (2.22)$$

т.е. в виде уравнения Пуассона.

Однако необходимо ещё получить давление из преобразований (2.21), которые являются функциями следующих неизвестных: $\{s_{\alpha}, l_{i\alpha}\}$, s_{α} – насыщенности. Чтобы избавиться от этих зависимостей введём понятие *компонентного фактора* Γ_i :

$$\Gamma_i = \frac{\sum_{\alpha=1}^k \frac{k_{\alpha} \rho_{\alpha} l_{i\alpha}}{\mu_{\alpha}}}{\sum_{\alpha=1}^k \frac{k_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.23)$$

который постоянен вдоль линий тока в стационарном случае:

$$\nabla \Gamma_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.24)$$

В двухфазном случае (газожидкостная смесь) (2.24) может быть записано в виде:

$$\frac{k_g \rho_g \mu_l}{k_l \rho_l \mu_g} = \frac{l_i - \Gamma_i}{\Gamma_i - g_i} = \dots = \frac{l_{n-2} - \Gamma_{n-2}}{\Gamma_{n-2} - g_{n-2}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.25)$$

где нижние индексы $\{l, g\}$ обозначают жидкую и газовую фазы соответственно, l_i, g_i – массовая доля i -ого компонента в жидкой и газовой фазах. В случае, когда мы знаем компонентный фактор Γ_i , мы можем решить (2.25) и определить $\{s_l, l_1, \dots, l_{n-2}\}$ как функции давления p . Подставляя их в (2.21) получим забойное давление.

2.2 Метод контурных интегралов

Как известно краевая задача для уравнения Пуассона может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма II-го рода. В определённых случаях в уравнении остаётся лишь интеграл по контуру, который при некоторых предположениях может быть посчитан аналитически.

Ниже будет представлен общий подход *метода контурных интегралов* для решения уравнения Пуассона, а также пример расчёта забойного давления в скважине.

Подробное применение метода, а также более серьезное рассмотрение *метода граничных элементов* в применении к задачам фильтрации представлено в [33]. В статье [32] предлагается новый подход для расчёта индекса скважины (well index) на основе метода контурных интегралов при полноценном гидродинамическом моделировании на неструктурированной сетке для скважин произвольной геометрии.

2.2.1 Общий подход

Рассмотрим дифференциальное уравнение в виде:

$$\mathcal{L}(p) = -\sigma, \quad (2.26)$$

где \mathcal{L} – самосопряжённый дифференциальный оператор, σ – функция источника внутри области. Будем решать его в области Ω , окружённой кусочно-

гладкой границей $\Gamma = \Gamma_w \cup \Gamma_i$. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка вида:

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2(a_{ij}p)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(b_i p)}{\partial x_i} + cp, \quad (2.27)$$

В [31] показано, что для такого оператора \mathcal{L} верна *вторая формула Грина*, записанная в общей форме:

$$\int_{\Omega} [u\mathcal{L}(v) - v\mathcal{L}(u)] d\omega = \int_{\Gamma} \mathbb{A} [u\nabla v - v\nabla u] \vec{n} d\gamma, \quad (2.28)$$

где u, v – произвольные достаточно гладкие функции, $\mathbb{A} = a_{ij}$.

Введём функцию Грина пустого пространства - G , удовлетворяющую уравнению:

$$\mathcal{L}(G) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, \quad (2.29)$$

где \mathbf{x}' – точечный источник, место где решение уходит в бесконечность.

Тогда запишем (2.28) для функций p, G :

$$\int_{\Omega} [p\mathcal{L}(G) - G\mathcal{L}(p)] d\omega = \int_{\Gamma} \mathbb{A} [p\nabla G - G\nabla p] \cdot \mathbf{n} d\gamma. \quad (2.30)$$

Уточним оператор \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(p) = \nabla(\mathbb{K}\nabla p). \quad (2.31)$$

Из (2.30) получим:

$$c(\mathbf{x}')p(\mathbf{x}') = \int_{\Gamma} [p(\mathbf{x})F_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - q_n(\mathbf{x})G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\gamma + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x})G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\omega, \quad (2.32)$$

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\mathbb{K}\nabla G \cdot \mathbf{n}, \quad (2.33)$$

$$q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\mathbb{K}\nabla p \cdot \mathbf{n}, \quad (2.34)$$

где $c(\mathbf{x}') = \frac{\theta}{2\pi}$, где θ имеет смысл угла под которым видна область Ω внутри

замыкания, и $\theta = 0$ вне замыкания:

$$c(\mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}' \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \frac{\theta}{2\pi} & \mathbf{x}' \in \Gamma \\ 0 & \mathbf{x}' \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (2.35)$$

В случае отсутствия объёмных источников (за исключением скважины) выражение (2.32) упрощается и принимает вид:

$$c(\mathbf{x}')p(\mathbf{x}') = \int_{\Gamma} [p(\mathbf{x})F_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - q_n(\mathbf{x})G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\gamma. \quad (2.36)$$

2.2.2 Пример

Рассмотрим двумерный случай - квадратную область со скважиной в центре. На границе зададим постоянное давление. Распишем для начала G и F_n в 2D:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{-\ln R}{2\pi\sqrt{K_x K_y}}, \quad F_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}}{2\pi\sqrt{K_x K_y}R^2}, \quad (2.37)$$

$$R = \sqrt{\frac{(x - x')^2}{K_x} + \frac{(y - y')^2}{K_y}}, \quad (2.38)$$

где R – расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{x}' с учётом анизотропии.

Для простоты примем, что $K_x = K_y \equiv K$. Поставим точку \mathbf{x}' в центр скважины, т.е. вне области. Тогда выражение (2.36) предстанет в виде:

$$0 = I_w + I_i, \quad (2.39)$$

$$I_w = \int_0^{2\pi r_w} \left(p_w \frac{-r_w}{2\pi K R^2} - q_w \frac{-\ln R}{2\pi K} \right) d\gamma = -p_w + q_w \frac{r_w \ln(r_w^2/K)}{2K}, \quad (2.40)$$

$$I_i = 8 \int_0^{L/2} \left(p_i \frac{L/2}{2\pi K R^2} - q_i \frac{-\ln R}{2\pi K} \right) d\gamma = p_i + q_i \frac{L (\ln(L^2/(2K)) + \pi/2 - 2)}{\pi K}. \quad (2.41)$$

Принимая, что:

$$q_w = \frac{QB}{2\pi r_w h}, \quad q_i = -\frac{QB}{Lh}, \quad (2.42)$$

получим выражение:

$$p_i - p_w = \frac{QB}{2\pi Kh} \left(\pi - 4 + \ln \frac{L^4}{4K\sqrt{K}r_w} \right). \quad (2.43)$$

2.3 Метод конечных объёмов

При моделировании флюидодинамики нефтяных пластов широкое распространение получил *метод конечных объёмов* или *finite volume method* (FVM).

В основе метода лежит, отличная от метода конечных разностей, техника представления расчётной сетки. Если в методе конечных разностей расчётная область представляется в виде конечного числа узлов (node), образующих сетку, то в FVM область представляется как множество расчётных ячеек (cell). Значения неизвестных величин в ячейках отождествляются с соответствующими значениями в их центрах. Эти значения, как мы увидим ниже, есть ни что иное как среднее по объёму всей ячейки.

Особенностью метода является то, что он оперирует к интегральным законам сохранения искомых величин. Это несколько сокращает спектр его применения, однако делает его предпочтительным для применения к решению соответствующих законов. Численная схема, получающаяся в результате использования метода является *консервативной* относительно соответствующего закона сохранения.

В этой связи, метод получил широкое распространение при расчётах механики жидкости и газа, механики твёрдого тела. Ниже будет изложен сам метод и его непосредственное использование для решения поставленных уравнений (1.48), (1.56). Подробное изложение основ метода и его приложений к решению гиперболических уравнений представлено в [15]. Использование метода для задач фильтрации описано в [12]. Там же приведены конкретные численные схемы и варианты аппроксимации потоков, используемые при гидродинамическом моделировании фильтрации.

2.3.1 Основа метода

Рассмотрим закон сохранения вектора величин \mathbf{q} в следующей форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{F} = 0, \quad (2.44)$$

где \mathbb{F} – матрица потоков соответствующих величин \mathbf{q} . Как можно видеть вид рассматриваемого уравнения (2.44) полностью соответствует виду закона сохранения массы (1.15) в подходе Эйлера.

Уравнению (2.44) соответствует *интегральная форма закона сохранения* величины \mathbf{q} :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{q} dV + \oint_{\partial\Omega} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.45)$$

где $\Omega \in \mathbb{E}^3$ – рассматриваемая область, $\partial\Omega$ – её граница, \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности $\partial\Omega$.

В дальнейшем будем использовать цилиндрическую систему координат, хотя все приведённые ниже выкладки можно легко обобщить на другие СК. Имеем:

$$\mathbb{F} = (\mathbf{F}_r \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_z), \quad (2.46)$$

где \mathbf{F}_r , \mathbf{F}_φ , \mathbf{F}_z – векторы потоков вдоль соответствующих направлений.

Рассмотрим ячейку Ω_{ijk} , индекс i соответствует радиальной координате, j – аксиальной, k – вертикальной. В этом случае, интегрируя закон (2.46) по времени, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{ijk}} (\mathbf{q}(r, \varphi, z, t^{n+1}) - \mathbf{q}(r, \varphi, z, t^n)) dV = \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi, z, t) r_{i+\frac{1}{2}} d\varphi dz dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{i-\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi, z, t) r_{i-\frac{1}{2}} d\varphi dz dt + \\ &+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r, \varphi_{j+\frac{1}{2}}, z, t) dr dz dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{j-\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r, \varphi_{j-\frac{1}{2}}, z, t) dr dz dt + \\ &+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{k+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r, \varphi, z_{k+\frac{1}{2}}, t) r dr d\varphi dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{k-\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r, \varphi, z_{k-\frac{1}{2}}, t) r dr d\varphi dt, \quad (2.47) \end{aligned}$$

где индекс n соответствует шагам по времени, а различные индексированные $\partial\Omega$ обозначают поверхности ячейки Ω_{ijk} при соответствующей координате.

Введём обозначения вида:

$$S_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{F}_r^+ = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi, z, t) r_{i+\frac{1}{2}} d\varphi dz dt, \quad (2.48)$$

$$S_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_r^- = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{i-\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi, z, t) r_{i-\frac{1}{2}} d\varphi dz dt, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{q}_{ijk}^n = \frac{1}{V_{ijk}} \int_{\Omega_{ijk}} \mathbf{q}(r, \varphi, z, t^n) dV. \quad (2.50)$$

Соответственно можно видеть, что \mathbf{q}_{ijk}^n представляет собой среднее значение величин \mathbf{q} в ячейке Ω_{ijk} в момент времени t^n , $S_{i+\frac{1}{2}}$ – площадь поверхности $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2}}$, $S_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{F}_r^+$ – средний поток через поверхность $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2}}$ за время $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$.

Подставляя принятые обозначения в (2.47), получим:

$$\mathbf{q}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{q}_{ijk}^n = \frac{\Delta t^n}{V_{ijk}} \left[S_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{F}_r^+ - S_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_r^- + S_{j+\frac{1}{2}} \mathbf{F}_\varphi^+ - S_{j-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_\varphi^- + S_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{F}_z^+ - S_{k-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_z^- \right]. \quad (2.51)$$

Удобнее записать (2.51) в форме:

$$\mathbf{q}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{q}_{ijk}^n = \frac{\Delta t}{V_{ijk}} \sum_{\beta} S_{ijk,\beta} \mathbf{F}_{ijk,\beta}, \quad (2.52)$$

где индекс в сумме пробегает следующие значения: $\beta = \{i \pm 1jk, ij \pm 1k, ijk \pm 1\}$, $S_{ijk,\beta}$, $\mathbf{F}_{ijk,\beta}$ – площадь поверхности и средний поток между ячейками ijk , β .

Выражение (2.52) представляет собой численную схему метода конечных объёмов для трёхмерной системы законов сохранения вида (2.44). Эта схема и будет в дальнейшем применена для решения рассматриваемых уравнений.

2.3.2 Схема для законов сохранения массы при двухфазной двух-компонентной фильтрации

Здесь и далее будем рассматривать *двухточечную аппроксимацию потоков* или *two-point flux approximation* (TFPA). Запишем численную схему для

уравнений (1.48) на основе (2.52):

$$H_{ijk}^{(1)n+1} = \left(\frac{\phi(p)S}{B_l(p)} \right)_{ijk}^{n+1} - \left(\frac{\phi(p)S}{B_l(p)} \right)_{ijk}^n + \frac{\Delta t^n}{V_{ijk}} \sum T_{ijk,\beta} \frac{p_{ijk}^{n+1} - p_\beta^{n+1}}{\Delta x_{ijk,\beta}} \left(\frac{k_{rl}(S)}{\mu_l B_l(p)} \right)_s^{n+1}, \quad (2.53)$$

$$H_{ijk}^{(2)n+1} = \left(\frac{\phi(p)(1-S)}{B_g(p)} + \frac{\phi(p)SRs(p)}{B_l(p)} \right)_{ijk}^{n+1} - \left(\frac{\phi(p)(1-S)}{B_g(p)} + \frac{\phi(p)SRs(p)}{B_l(p)} \right)_{ijk}^n + \frac{\Delta t^n}{V_{ijk}} \sum T_{ijk,\beta} \frac{p_{ijk}^{n+1} - p_\beta^{n+1}}{\Delta x_{ijk,\beta}} \left(\frac{k_{rg}(S)}{\mu_g B_g(p)} + \frac{k_{rl}(S)Rs(p)}{\mu_l B_l(p)} \right)_s^{n+1}, \quad (2.54)$$

где $\Delta x_{ijk,\beta}$ – расстояние между центрами ячеек ijk и β . Межблочные проводимости $T_{ijk,\beta}$ аппроксимируются как среднее гармоническое [12]:

$$T_{ijk,\beta} = \frac{k_{ijk}k_\beta S_{ijk,\beta}}{k_{ijk}\Delta x_\beta + k_\beta\Delta x_{ijk}}(\Delta x_{ijk} + \Delta x_\beta), \quad (2.55)$$

где Δx_{ijk} – размер ячейки в соответствующем направлении (направление задаётся расположением соседа β).

ОФП представляют собой сильные нелинейности (как зависимости насыщенности S), для которых хорошо себя зарекомендовала аппроксимация *вверх по потоку* [12]:

$$s = \begin{cases} ijk, & p_{ijk}^n \geq p_\beta^n, \\ \beta, & p_{ijk}^n < p_\beta^n. \end{cases} \quad (2.56)$$

Затем схема (2.53) линеаризуется по Ньютону. Пусть $\mathbf{H}_{ijk}^{n+1} = (H_{ijk}^{(1)n+1}, H_{ijk}^{(2)n+1})$ – сеточная вектор-функция из двух компонент, $\mathbf{H}_{ijk}^{n+1} = \mathbf{H}(W^{n+1})$, где $W^{n+1} = \{p_{ijk}^{n+1}, S_{ijk}^{n+1}, p_\beta^{n+1}, S_\beta^{n+1}\}$. Напомним, что $\beta = \{i \pm 1jk, ij \pm 1k, ijk \pm 1\}$. Тогда запишем разложение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_{ijk}^{l+1}}{\partial p_{ijk}^{l+1}} \Big|_{W^l} \delta p_{ijk}^{l+1} + \sum_\beta \frac{\partial \mathbf{H}_{ijk}^{l+1}}{\partial p_\beta^{l+1}} \Big|_{W^l} \delta p_\beta^{l+1} + \\ + \frac{\partial \mathbf{H}_{ijk}^{l+1}}{\partial S_{ijk}^{l+1}} \Big|_{W^l} \delta S_{ijk}^{l+1} + \sum_\beta \frac{\partial \mathbf{H}_{ijk}^{l+1}}{\partial S_\beta^{l+1}} \Big|_{W^l} \delta S_\beta^{l+1} = -\mathbf{H}_{ijk}^l, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где l – индекс итераций, $\delta p^{l+1} = p^{l+1} - p^l$, $\delta S^{l+1} = S^{l+1} - S^l$.

Подобная схема записывается для каждой внутренней ячейки, затем замыкается подобными выражениями для граничных ячеек (будет обсуждено ниже), и, наконец, составляется СЛАУ относительно всех $\{\delta p_{ijk}^{l+1}, \delta S_{ijk}^{l+1}\}$.

Данная система решается итерационно до достижения определённой точности, потом проводится расчёт температуры, затем рассчитывается следующий шаг по времени.

2.3.3 Схема для уравнения баланса энергии

Для расчёта уравнения баланса энергии (1.56) была использована комбинированная, полностью неявная, схема метода конечных объёмов и схема Кранка-Николсона [11] для конвективных членов. Полученная итоговая численная схема имеет вид:

$$H_{ijk}^{(3)n+1} = c_{tijk}^{n+1} \left(\theta_{ijk}^{n+1} - \theta_{ijk}^n \right) + \Delta t^n \sum_{\beta} \left(a_{ijk,\beta}^{n+1} + \frac{(\tilde{\lambda}S)_{ijk,\beta}^{n+1}}{V_{ijk}} \right) \frac{\theta_{ijk}^{n+1} - \theta_{\beta}^{n+1}}{\Delta x_{ijk,\beta}} - \Delta t^n f_{ijk}^{n+1}, \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} f_{ijk}^{n+1} &= \tilde{c}\eta_{ijk}^{n+1} \frac{p_{ijk}^{n+1} - p_{ijk}^n}{\Delta t^n} - q_{ijk}^{n+1} L - \sum_{\beta} b_{ijk,\beta}^{n+1} \frac{p_{ijk}^{n+1} - p_{\beta}^{n+1}}{\Delta x_{ijk,\beta}}, \\ q_{ijk}^{n+1} &= \frac{(\phi S \rho_l)_{ijk}^{n+1} - (\phi S \rho_l)_{ijk}^n}{\Delta t^{n+1}} + \sum_{\beta} \frac{p_{ijk}^{n+1} - p_{\beta}^{n+1}}{\Delta x_{ijk,\beta}} T_{ijk,\beta} \left(\frac{k_{rl}}{\mu_l B_l} \right)_s, \\ a_{ijk,\beta}^{n+1} &= \max \left(0, \text{sign}(x_{ijk} - x_{\beta}) \widetilde{c\epsilon v}_{x_{ijk,\beta}} \right), \\ b_{ijk,\beta}^{n+1} &= \max \left(0, \text{sign}(x_{ijk} - x_{\beta}) \widetilde{c\epsilon v}_{x_{ijk,\beta}} \right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

где q_{ijk}^{n+1} – интенсивность фазовых переходов, $T_{ijk,\beta}$ определяется выражением (2.55), величины $\widetilde{c\epsilon v}_{x_{ijk,\beta}}$, $\widetilde{c\epsilon v}_{x_{ijk,\beta}}$ аппроксимируются как средневзвешенные значения между ячейками ijk и β .

Поскольку уравнение (1.56) – линейное, решение по схеме (2.58) находится за одну итерацию.

2.3.4 Численное решение СЛАУ

В написанном расчётном модуле использовалось несколько вариантов солверов СЛАУ.

При решении одно- и двумерных задач, линейная система сводилась к блочно-диагональному виду и решалась прогонкой. Для схемы (2.57) блок имел размер 2×2 в одномерном случае, и $2n_z \times 2n_z$ в двумерном, где n_z

– размер сетки по оси z . Для схемы (2.58) 1×1 в одномерном, $n_z \times n_z$ – в двумерном.

Безусловным преимуществом прогонки является скорость вычислений. Однако для подробных двумерных сеток это преимущество нивелируется. Уже при $n_z \sim 10$ скорость расчёта блочно-диагональной прогонки сравнима со скоростью расчёта итерационными методами.

Итерационные методы применялись для решения двумерных и трёхмерных задач. Среди методов использовались методы крыловского подпространства – GMRES, BiCGStab. Среди предобуславливателей – ILU(0), ILU(1), ILU(2), ILUT(t, n).

Несмотря на широкое использование обычной неполной факторизации (ILU) в некоторых случаях, с большими градиентами краевых условий (во времени), солвер не мог достичь заданной точности, и, как результат решение расходилось. Повышение порядка ILU факторизации не приносила успеха. В этом отношении предобуславливатель ILUT является более подходящим вариантом, который можно регулировать в зависимости от изменения условий.

У солверов наблюдались характерные особенности. Сходимость GMRES ухудшалась во времени при постоянном однотипном предобуславливании. BiCGStab расходился при больших возмущениях на границах.

В качестве предобуславливателей и солверов использовалась сторонняя библиотека "Paralution", распространяющаяся по лицензии GPLv2. Использовалась параллельная реализация библиотеки (OpenMP), т.е. расчёт производился в несколько потоков (до 12) на этапе решения СЛАУ.

2.3.5 Расчёт граничных ячеек и обсуждение граничных условий

Для расчёта границ в методе вводились так называемые фиктивные ячейки (ghost cell) нулевого размера вдоль оси, ортогональной границе. С помощью этих ячеек составлялась разностная схема для граничных условий (1.51), (1.53), (1.54), (1.55) и (1.58), (1.59).

Для системы (1.48) схемы для граничных условий также были подвергнуты линеаризации по Ньютону и, затем, итерационному решению в полной замкнутой СЛАУ. Поскольку система (1.48) первого порядка по нефтенасыщенности S , для неё были поставлены условия лишь на одной границе вдоль каждой оси:

$$S|_{r=r_e} = S_0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (2.60)$$

где S_0 – начальная нефтенасыщенность. Тогда как на другой границе значения нефтенасыщенности было линейно интерполировано.

Аналогичная процедура применялась и для температуры на перфорированной поверхности скважины, поскольку постановка граничного условия для подобной задачи представляет особые трудности.

2.4 Распределение дебита вдоль ствола скважины

При расчёте с граничным условием (1.55) (контроль по дебиту) известен лишь суммарный дебит, а его распределение вдоль ствола подлежит определению.

В основе используемого в данной работе метода распределения дебита лежит *модель ствола скважины бесконечной проводимости*. Это означает, что дебит распределяется так, чтобы давление во всех граничных перфорированных ячеек было едино. Данная модель также распространяется и на вторичное вскрытие (каналы).

Рассмотрим функционал $H = H(q_1, q_2, \dots, q_K)$:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K-1} (p_{k+1} - p_k)^2, \quad (2.61)$$

где суммирование проходит по всем перфорированным ячейкам.

Необходимо найти условный минимум функционала (2.61) при условии:

$$\sum_{k=0}^K q_k = Q. \quad (2.62)$$

Условие (2.62) эквивалентно сокращению колва аргументов q_k на один.

Линеаризуем давление:

$$p_k = p_k^0 + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \Delta q_i, \quad (2.63)$$

и подставим его в (2.61).

Потребуем равенства всех частных производных H по $\{q_1, \dots, q_{K-1}\}$ нулю (необходимое условие локального экстремума). Получим систему линейных

уравнений относительно $\{q_1, \dots, q_{K-1}\}$:

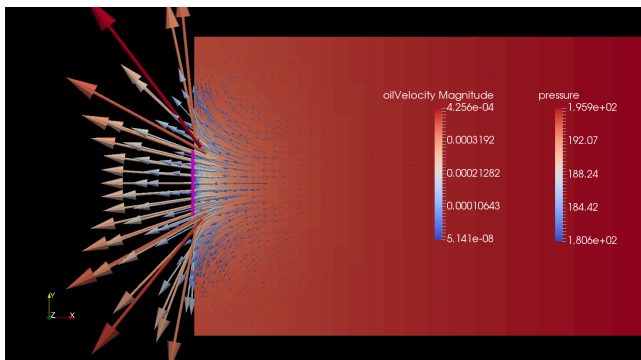
$$\sum_{i,k=1}^{K-1} \left(\frac{\partial p_{k+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial p_{k+1}}{\partial q_j} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right) \Delta q_i = - \sum_{k=1}^{K-1} (p_{k+1}^0 - p_k^0) \left(\frac{\partial p_{k+1}}{\partial q_j} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right). \quad (2.64)$$

Последовательность нахождения распределения такова:

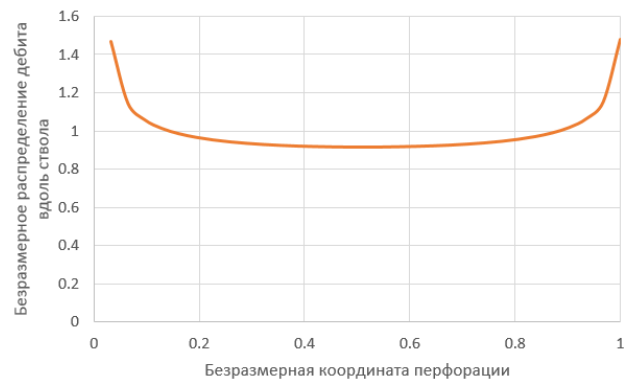
1. Задаётся равномерное распределение дебитов $\{q_1, \dots, q_K\}$.
2. Производится решение задачи.
3. В случае, если функционал (2.61) больше некоторого наперёд заданного значения производится его минимизация итерационно, пока не будет достигнута определённая точность.
4. Производится переход к следующему временному слою. Перераспределение дебита будет производиться если функционал (2.61) значительно возрастет.

Таким образом (2.64) решается на каждом шаге по времени, когда (2.61) не удовлетворяет наперёд заданной точности. При этом для однофазной нефти задача распределения дебита (минимизация функционала) решается за одну итерацию, т.к. система линейна. В двухфазной постановке распределение дебита производится итерационно, поверх итераций численной схемы.

На Рис. 1 представлена некоторая постановка скважины с неполным вскрытием и посчитанное установившееся распределение дебита отнесённое к равномерному.



(а) Постановка задачи с выделенной перфорированной областью



(б) Распределение дебита вдоль ствола

Рис. 1. Распределение дебита для скважины, частично вскрывающей пласт.

Глава 3. Неизотермическая фильтрация флюида к несовершенным скважинам.

В данной главе будут описаны виды несовершенств скважины, рассматриваемые в представленной работе. Будут описаны методики расчёта дополнительного гидродинамического сопротивления (скин-фактора) применяемые в нефтяной практике. Затем будет представлено аналитическое решение простейшей модели неизотермической фильтрации, рассмотрено влияние описанных несовершенств на динамику забойной температуры, метод термозондирования пласта. Будет представлено сравнение расчётов с рассматриваемой аналитикой.

3.1 Виды несовершенств

В ходе бурения, освоения и эксплуатации скважины различные технологические процессы воздействуют на ОЗП. В результате её ФЕС меняются. Отличие притока скважины от притока, рассчитанного по формуле Дююи учитывают, вводя *скин-фактор* s :

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu B \left(\ln \frac{r_e}{r_w} + s \right)} \quad (3.1)$$

Понятие скин-фактора достаточно расплывчато, на него списывают любое отличие от выражения (3.1), зачастую не уточняя чем то или иное дополнительно фильтрационное сопротивление (или даже проводимость) вызвано. Предполагается, что скин-фактор аддитивен. В общем виде можно его представить как [29]:

$$s = s_d + s_p + s_{pp} + s_{turb} + s_o + s_s + \dots, \quad (3.2)$$

где

- s_d – скин эф-т вследствие повреждения породы,
- s_p – скин эф-т из-за перфорации,
- s_{pp} – скин эф-т вследствие частичного проникновения скважины в пласт,

- s_{turb} – скин эф-т вследствие турбулентности или скин, зависящий от темпа отбора,
- s_o – скин-эффект вследствие наклона скважины,
- s_s – скин-эффект, возникающий вследствие стимуляции, применения различных МУН.

С формальной точки зрения, каждый из перечисленных выше скин-факторов – упрощение модели фильтрации и её сведение к случаю радиальной притока. В данной работе будут рассмотрены лишь первые три фактора (s_d , s_p , s_{pp}) из перечисленных, обуславливающие несовершенство скважины, в явной математической поставке, без каких-либо упрощений.

3.1.1 Повреждение ОЗП

В процессе бурения скважины происходит загрязнение ОЗП фильтратом бурового раствора. В дальнейшем повреждение ОЗП может произойти при проведении геофизических и промысловых исследований, установке и цементировании эксплуатационной колонны, освоении и заканчивании скважины. На Рис. 2 представлена типичная структура ОЗП. В ней выделяют внешнюю/внутреннюю фильтрационные корки, зону проникновения фильтрата.

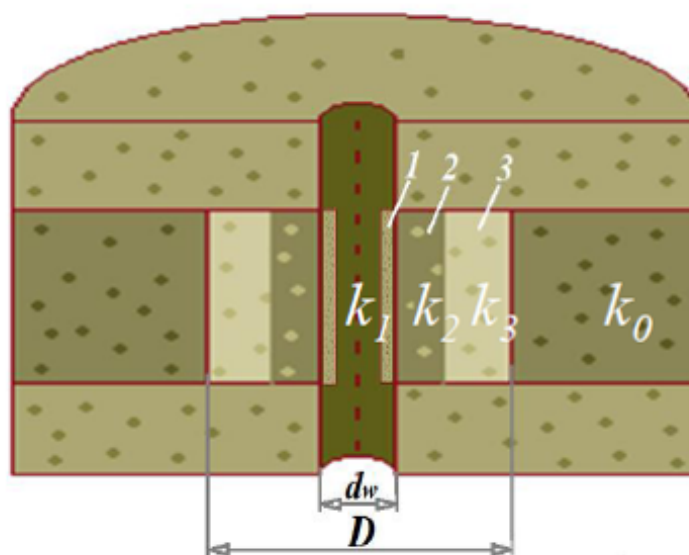


Рис. 2. Структура ОЗП, образующаяся в результате различных технологических операций. Выделяют: 1 – внешняя фильтрационная корка, 2 – внутренняя корка (зона кольматации), 3 – зона проникновения фильтрата.

Тем не менее, без особой нужды, при моделировании притока к скважины не рассматривают такую сложную структуру ОЗП. Обычно считают, что вокруг скважины есть кольцевая область с ухудшенной проницаемостью $k_d \leq k$, см. Рис 3.

При таком подходе скин-фактор s_d , отвечающий за повреждение породы, можно найти из выражения:

$$s_d = \left(\frac{k}{k_d} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_d}{r_w} \right). \quad (3.3)$$

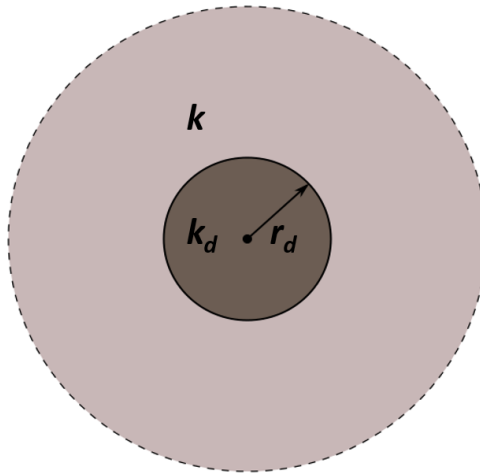


Рис. 3. Рассматриваемая модель ОЗП, обладает ухудшенной проницаемостью $k_d \leq k$.

3.1.2 Перфорация

В конструкцию большинства скважин входит обсадная колонна, которая цементируется с внешней стороны. Для вызова притока в такой схеме используется *вторичное вскрытие* продуктивных горизонтов. Одним из наиболее распространённых методов вторичного вскрытия является применение кумулятивных зарядов, которые устанавливают по спирали и спускают на глубину. Результатом их использования являются перфорационные каналы (ПК), которые прошивают обсадную колонну, цемент и часть ОЗП. На Рис. 17 изображена характерная схема ПК на забое скважины.

В результате в ОЗП, области с наибольшим градиентом давления в пласте, течение существенно отличается от радиального, т.к приток теперь сосредотачивается у боковых поверхностей каналов.

Тем не менее, для такого типа перфорации, в [26] приведены корреляции скин-фактора s_p , в зависимости от длины каналов L_p , угла фазировки θ , рас-

стояния по глубине между каналами h , радиуса перфорационного отверстия r_p , могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 s_p &= s_H + s_V + s_{wb}, \\
 s_H &= \ln \left(\frac{r_w}{r_{we}} \right), \quad r_{we} = \begin{cases} \frac{L_p}{4}, & \theta = 0, \\ \alpha_\theta(r_w + L_p), & \theta \neq 0, \end{cases} \\
 s_V &= 10^a \left(\frac{h}{L_p} \sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{zz}}} \right)^{b-1} \left(\frac{r_p}{2h} \left(1 + \sqrt{\frac{k_{zz}}{k_{xx}}} \right) \right)^b, \\
 s_{wb} &= c_1(\theta) \exp \left(c_2(\theta) \frac{r_w}{L_p + r_w} \right),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

где корреляции для величин α_θ , a , b , c_1 , c_2 можно найти непосредственно в [26], k_{xx} и k_{zz} – проницаемости пласта в вертикальном и горизонтальном направлениях.

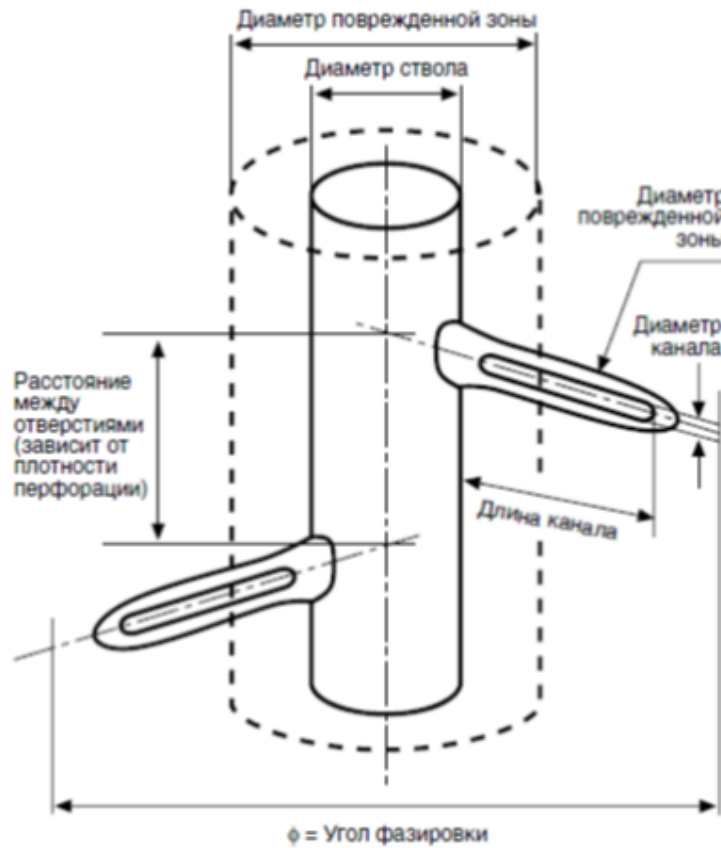


Рис. 4. Характерная схема расположения ПК.

Корреляции (3.4) найдены также с использованием явного численного расчёта соответствующих постановок. Ниже будет представлено сравнение численного расчёта, проводимого в текущей работе, постановки с каналами

по представленным корреляциям.

3.1.3 Скважина, несовершенная по степени вскрытия

С точки зрения терминологии, представленной например в [2], несовершенства скважины разделяют на два типа: скважина несовершенная по *характеру* и *степени* вскрытия. Характер вскрытия был рассмотрен в двух предыдущих пунктах. Степень вскрытия частично рассмотрена в предыдущем пункте. Однако с методологической точки зрения следует рассмотреть отдельно случай частичного проникновения скважины в пласт, неполного его вскрытия. В данном примере считается что скважина вскрыта в некотором интервале глубин, не содержащим всю мощность пласта, полностью по всему диаметру.

Впервые выражение для притока к гидродинамически несовершенной по степени вскрытия скважине получил М. Маскет [9] методом изображений. Затем И.А. Чарный [1] получил выражение для дополнительного гидродинамического сопротивления:

$$s_{pp} = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1 \right) \ln \frac{4h}{r_w} - \frac{\phi(\bar{h})}{2\bar{h}}, \quad (3.5)$$

$$\phi(\bar{h}) = \ln \frac{\Gamma(0.875\bar{h})\Gamma(0.125\bar{h})}{\Gamma(1 - 0.875\bar{h})\Gamma(1 - 0.125\bar{h})},$$

где $\bar{h} = \frac{h_p}{h}$ – доля вскрытой мощности пласта, $\Gamma(n)$ – гамма-функция Эйлера.

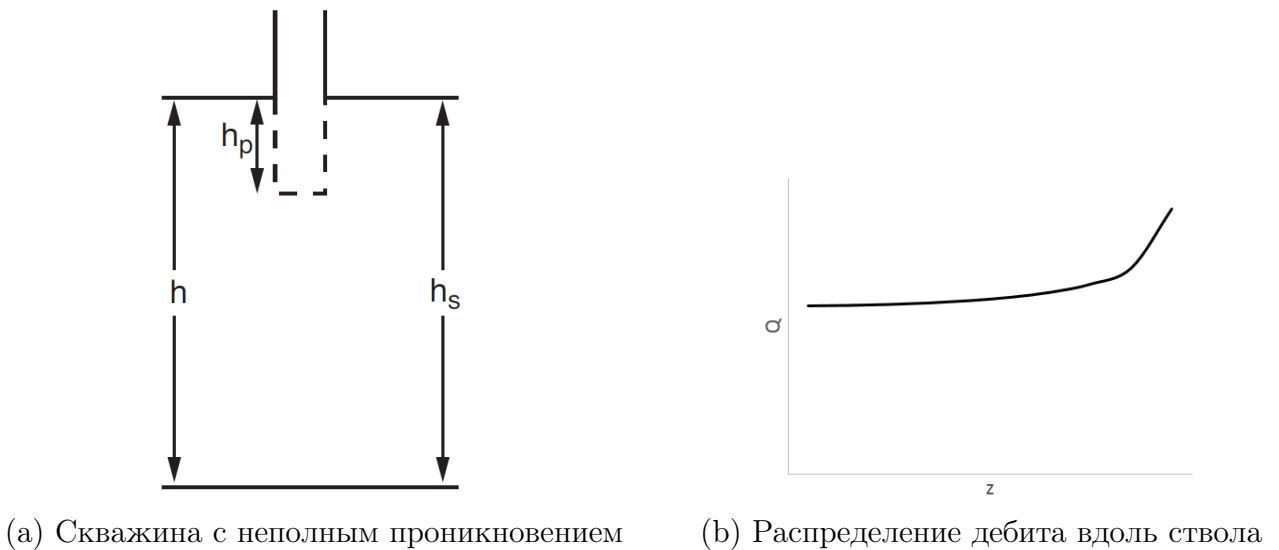


Рис. 5. Распределение дебита для несовершенной скважины.

Отдельным интересным вопросом при расчёте скважины, неполностью

вскрывшей пласт (как, впрочем, и каналов), является распределение дебита вдоль перфорированной части. На Рис. 5b показано установившееся распределение дебита вдоль перфорированной части ствола, при условии постоянства давления вдоль ствола. Постановка изображена на Рис. 5а.

3.2 Теплоперенос при фильтрации к несовершенной скважине

Выше были рассмотрены основные виды несовершенств скважины, рассматриваемые в данной работе, а также представлены приближённые формулы для расчёта дополнительного гидродинамического сопротивления, возникающего в результате данных несовершенств. Подобное рассмотрение возможно лишь в однофазном случае, хотя и для случая многофазной фильтрации некоторые авторы приводят аналитические выражения. Рассмотрим влияние этих несовершенств на поведение забойной температуры [19].

3.2.1 Случай совершенной скважины

Для начала установим выражение для забойной температуры для притока к совершенной скважине. Пренебрегая теплопроводностью запишем уравнение баланса энергии в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(r, t) \frac{\partial T}{\partial r} = -\varepsilon u(r, t) \frac{\partial p}{\partial r} + \eta^* \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$u(r, t) = -c \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad c = \frac{c_o \rho_o}{c_t}, \quad c_t = \phi \rho_o c_o + (1 - \phi) \rho_s c_s, \quad \eta^* = \phi c \eta, \quad (3.7)$$

где $u(r, t)$ – скорость конвективного теплопереноса, ε – коэффициент Джоуля-Томпсона нефти, η – коэффициент адиабатического расширения нефти, c_t – теплоёмкость пористой насыщенной среды.

Уравнение (3.6) учитывает конвективный перенос тепла, а также изменение температуры вследствие *баротермического эффекта*, т.е. изменения температуры вследствие изменения давления. По сути баротермический эффект включает в себе эф-т Джоуля-Томпсона и адиабатическое расширение флюида. В уравнении пренебрежено теплопроводностью, т.к. на небольших временах (далее будет уточнено) теплопроводность не даёт существенного вклада в изменение температуры, в сравнение с другими эффектами.

Замыкая уравнение (3.6) начальным и граничным условиями:

$$T(r, 0) = T_0, \quad T(r_e, t) = T_0, \quad (3.8)$$

получим, что (3.6), (3.8) – смешанная задача для гиперболического уравнения в кольце, обладающая аксиальной симметрией.

Решение задачи (3.6), (3.8) можно получить методом характеристик. Имеем:

$$T(r(t, r_1), t) = T_0 + \varepsilon [p(r_1, 0) - p(r(t, r_1), t)] + (\varepsilon + \eta^*) \int_0^t \frac{\partial p(r(\tau, r_1), \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.9)$$

$$\frac{dr}{dt} = u(r, t), \quad r(0) = r_1, \quad (3.10)$$

Далее необходимо найти зависимость $p = p(r, t)$. Примем, для простоты, что флюид и скелет – несжимаемы, давление устанавливается мгновенно:

$$p = \begin{cases} p_0, & t = 0, \\ p(r), & t > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

где p_0 – начальное пластовое давление, $p(r)$ – стационарное распределение давления:

$$p(r) = p_w + \frac{\Delta p \ln \frac{r}{r_w}}{\ln \frac{r_e}{r_w}} = p_w + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_w}, \quad (3.12)$$

где $\Delta p = p_e - p_w$ – депрессия на пласт, Q – объёмный дебит нефти.

Тогда подставляя (3.12) в (3.10), получим скорость конвективного переноса и уравнение характеристик:

$$u(r, t) = -\frac{cQ}{2\pi rh} = -c \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{\ln \frac{r_e}{r_w}}, \quad (3.13)$$

$$r = \sqrt{r_1^2 - \frac{cQ}{\pi h} t} = \sqrt{r_1^2 - 2c \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{\ln \frac{r_e}{r_w}} t}. \quad (3.14)$$

Финальное выражение для забойной температуры получим в виде:

$$T(r_w, t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon Q}{2\pi\sigma} \left[\ln \frac{r_T}{r_w} - d \ln \frac{r_e}{r_T} \right] = \frac{\varepsilon \Delta p}{\ln \frac{r_e}{r_w}} \left[\ln \frac{r_T}{r_w} - d \ln \frac{r_e}{r_T} \right], & t \leq t_{st}, \\ \varepsilon \Delta p = \frac{\varepsilon Q}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_e}{r_w}, & t > t_{st}, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$r_T = \sqrt{r_w^2 + \frac{cQ}{\pi h} t}, \quad \sigma = \frac{kh}{\mu}, \quad d = \frac{\eta^*}{\varepsilon}, \quad t_{st} = \frac{\pi h r_e^2}{cQ}, \quad (3.16)$$

где r_T имеет смысл радиуса зондирования пласта, σ – проводимость, t_{st} – время выхода температуры на стационар.

Зачастую параметр d мал и член, отвечающий за адиабатику, опускают. Тогда имеем:

$$T(r_w, t) = \frac{\varepsilon Q}{4\pi\sigma} \ln \left[1 + \frac{cQ}{\pi h r_w^2} t \right] \approx \frac{\varepsilon Q}{4\pi\sigma} \left[\ln \frac{cQ}{\pi h r_w^2} + \ln t \right], \quad (3.17)$$

где правое выражение записано в предположении, что $t \gg \frac{\pi h r_w^2}{cQ}$.

В координатах $(\ln t, T)$ зависимость в правой части (3.17) будет представлена прямой, коэффициент наклона которой будет обратно пропорционален проводимости σ . Это выражение очень похоже на аналогичное выражение для давления при исследовании ГДИ, для него применимы аналогичные методы интерпретации данных.

3.2.2 Случай несовершенной скважины

Тут под несовершенством понимается ухудшенные ФЕС ОЗП, а также перфорацию. Суммарный скин-фактор будет равен: $s = s_1 + s_2$, где скин s_1 ответственен за перфорацию, а s_2 – за повреждение ОЗП.

Первоначально будет зондирована ОЗП с проводимостью $\sigma_1 = \frac{k_d h}{\mu}$. Скин-фактор при этом будет равен: $s = s_1$. Соответствующее выражение для температуры имеет вид:

$$T(r_w, t) = \frac{\varepsilon Q}{4\pi\sigma_1} \left[\ln \frac{cQ}{\pi h r_w^2} + \ln t + 2s_1 \right], \quad r_T < r_d. \quad (3.18)$$

Когда же радиус зондирования превысит размер ОЗП: $r_T \geq r_d$. Проводимость будет равна: $\sigma_2 = \frac{k h}{\mu}$, скин – $s = s_1 + s_2$. Для скин-фактора s_2 верно

выражение (3.3). Выражение для температуры предстанет в виде:

$$T(r_w, t) = \frac{\varepsilon Q}{4\pi\sigma_2} \left[\ln \frac{cQ}{\pi h r_w^2} + \ln t + 2s_1 + 2s_2 \right], \quad r_T \geq r_d. \quad (3.19)$$

В координатах $(\ln t, T)$ выражения (3.18), (3.19) будут иметь вид прямой:

$$T = A + B \ln t, \quad (3.20)$$

$$A_1 = B_1 \left[\ln \frac{cQ}{\pi h r_w^2} + 2s_1 \right], \quad B_1 = \frac{\varepsilon Q}{4\pi\sigma_1}, \quad (3.21)$$

$$A_2 = B_2 \left[\frac{A_1}{B_1} + 2s_2 \right], \quad B_2 = \frac{\varepsilon Q}{4\pi\sigma_2}, \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

Прямые изображены на Рис. 6:

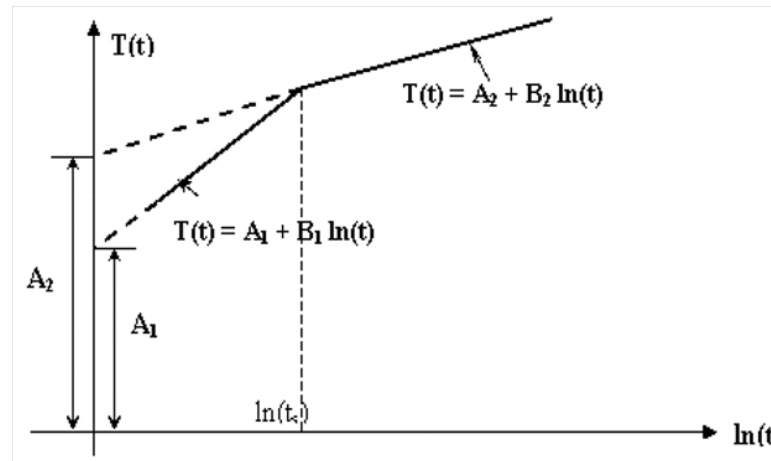


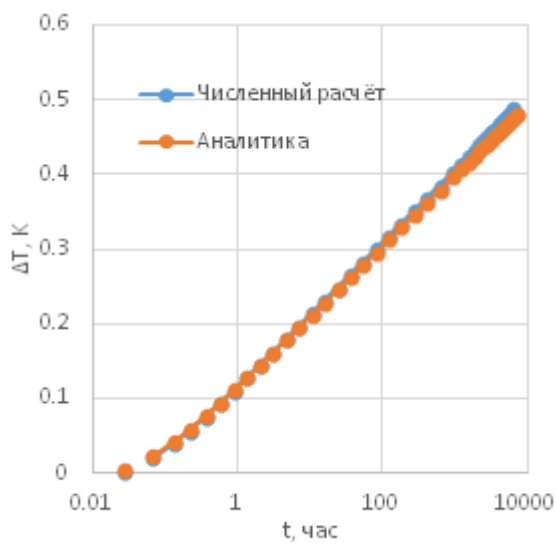
Рис. 6. График для забойной температуры в осях $(\ln t, T)$. Первый участок соответствует зондированию ОЗП, второй – зондированию пласта.

Результатом этого рассмотрения является нахождение проницаемостей k_d , k ОЗП и пласта и скин-факторов s_1 , s_2 , ответственных за перфорацию и повреждение ОЗП, из графика забойной температуры при выходе на режим. Этот метод носит название – *метод термозондирования Э.Б. Чекалюка* [6].

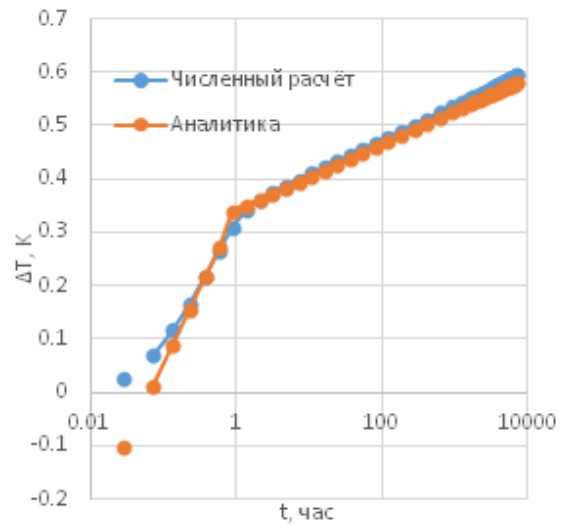
Тут стоит отметить, что метод имеет существенные ограничения по применению. Во-первых, метод рассматривает лишь однофазную фильтрацию. Во-вторых, характерное время когда $r_T = r_d$ составляет несколько часов. Этот период времени, часто лежит в области эффекта влияния ствола скважины (ВСС), который может существенно повлиять на динамику температуры, особенно когда датчик находится на некотором удалении от забоя скважины. Поэтому метод может быть использован лишь в ограниченном круге

примеров, в качестве первого приближения.

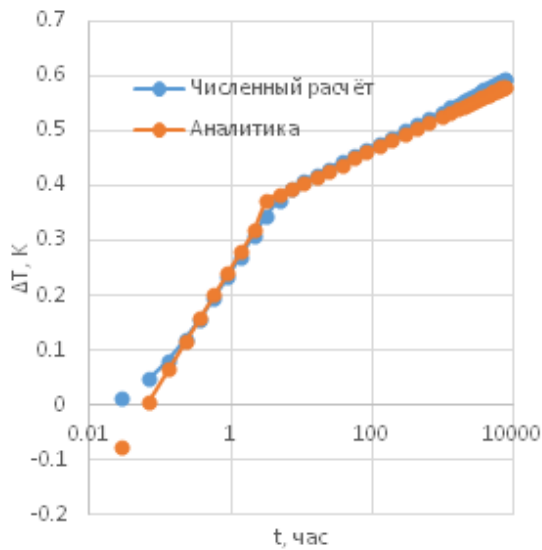
На Рис. 7 представлено сравнение аналитики (3.17), (3.20) с численным расчётом:



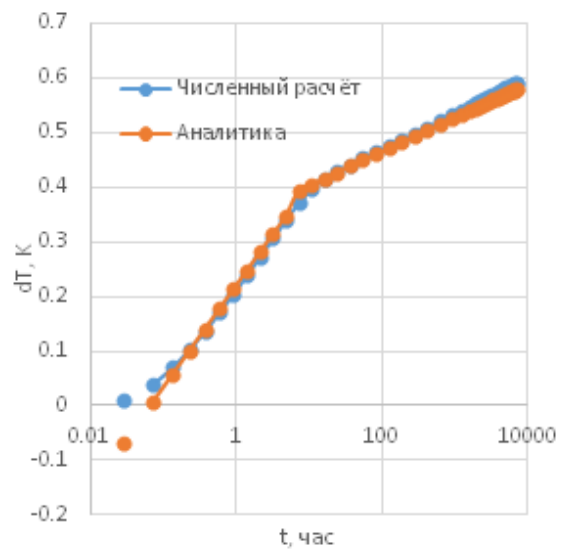
(a) Совершенная скважина



(b) Несовершенная скважина с параметрами:
 $s_2 = 5, r_d = 0.2$



(c) Несовершенная скважина с параметрами:
 $s_2 = 5, r_d = 0.4$



(d) Несовершенная скважина с параметрами:
 $s_2 = 5, r_d = 0.6$

Рис. 7. Сравнение аналитического и численного расчёта для совершенной и несовершенной скважины при различных размерах ОЗП.

Глава 4. Результаты расчётов.

4.1 Особенности расчёта

Основные результаты представленной работы были получены с использованием расчётного модуля, разработанного в ходе выполнения работы. За основную модель была принята модель двухфазной двухкомпонентной неизо-термической трёхмерной фильтрации в пласте с ухудшенными ФЕС ОЗП, прошитом системой перфорационных каналов, с фазовыми переходами. За математическую модель принята смешанная задача для системы из двух дифференциальных уравнений (1.48), (1.50), (1.51), (1.53), (1.54) либо (1.48), (1.50), (1.51), (1.53), (1.55) и дифференциального уравнения (1.56) с условиями (1.57), (1.58), (1.59), (1.60) коэффициенты которого определяются решением системы на каждом временном шаге. В модели предполагается независимость PVT-свойств флюида и пласта от температуры, также независимость тепловых PVT-свойств от давления.

Для решение поставленной задачи были использованы численные схемы (2.53), (2.58) метода конечных объёмов для гидродинамической системы и комбинированная схема для уравнения баланса энергии. Схема для гидродинамической части задачи была подвергнута линеаризации по Ньютону, решение системы было получено в результате соответствующих итераций. Уравнение баланса энергии – линейно, его решение находилось за одну итерацию.

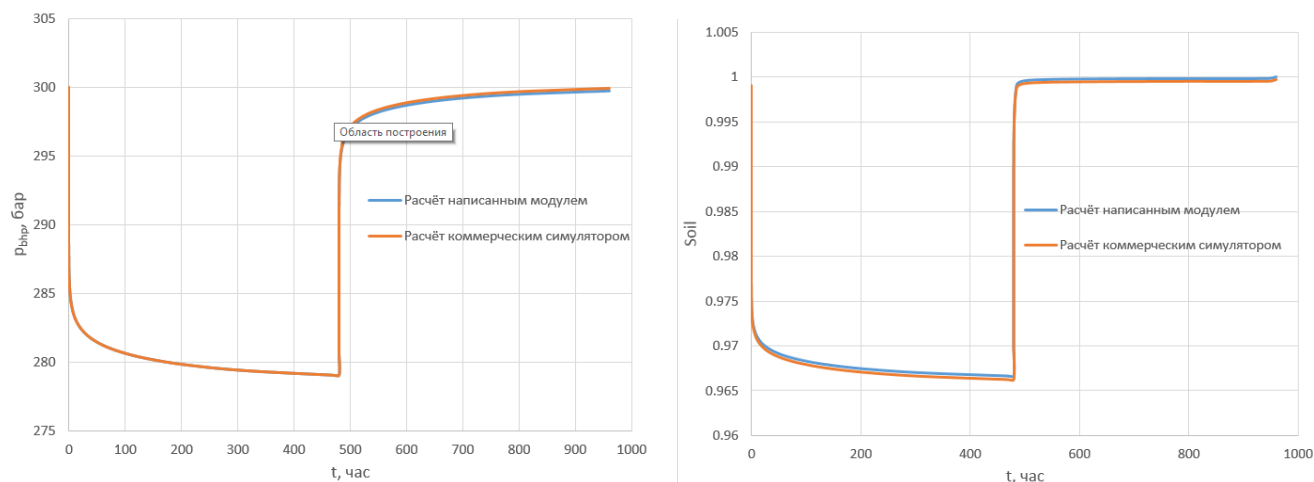
Решение задачи производилось последовательно: на каждом шаге по времени решалась итерационно гидродинамическая часть, затем решалось уравнение баланса энергии. В качестве расчётной сетки была выбрана регулярная сетка в цилиндрической системе координат, логарифмически сгущающаяся к скважине. Каналы задавались специальными вырезами ячеек, при этом сетка оставалась регулярной.

4.2 Верификация расчёта

Проведённый расчёт был верифицирован с привлечением коммерческого гидродинамического симулятора пласта, всех известных полуаналитических аналитических решений для данной задачи.

На Рис. 8 представлено сравнение результатов расчётов гидродинамической части задачи. Как можно увидеть результаты расчётов написанного модуля полностью совпадают с результатом коммерческого симулятора.

Использована следующая постановка: двухфазная двухкомпонентная фильтрация с фазовыми переходами, запуск с постоянным дебитом $Q = 100 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$, затем остановка на КВД без ВСС $Q = 0 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$.



(а) Сравнение забойных давлений.

(б) Сравнение нефтенасыщенности.

Рис. 8. Сравнение расчёта двухфазной постановки с расчётом коммерческим симулятором. Запуск с постоянным дебитом $Q = 100 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$, затем остановка на КВД без ВСС $Q = 0 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$.

Выше уже было представлено сравнение расчётов модулем с доступной аналитикой. А именно, на Рис. 17 было представлено сравнение расчёта системы перфорационных каналов с указанной аналитикой [26]. На Рис. 7 было проиллюстрировано совпадение расчёта забойной температуры модуля с аналитическими выражениями из [6], [19] в однофазной постановке. Также на Рис. 1, 5 представлены распределения дебита вдоль ствола скважины, которые также полностью совпадают с расчётом коммерческим симулятором в модели ствола бесконечной проводимости.

Все вышеуказанные сравнения и примеры, а также многие другие результаты работы указывают на достоверность результатов расчёта разработанного комплекса программ.

4.3 Вклад различных эффектов в температурную аномалию на забое

Температурную аномалию на забое составляют следующие эффекты: разнонаправленный эффект Джоуля-Томпсона от нефти и газа, эффект адиабатического расширения нефти и газа, теплота фазового перехода, конвектив-

ный и кондуктивный перенос тепла. Рассмотрим влияние этих эффектов на динамику забойной температуры.

На Рис. 9 представлен вклад каждого (кроме теплопроводности, $\tilde{\lambda} = 0$) из эффектов в полную температурную аномалию для некоторой синтетической постановки – выход на режим, затем остановка на КВД. Рассмотрим подробно этот пример. Из Рис. 9 видно, что основные эффекты обеспечивающие наибольший вклад в температурную аномалию – эффект Джоуля-Томпсона нефти, теплота фазового перехода, конвективный перенос тепла (хорошо просматривается на графике полной температуры при остановке скважины).

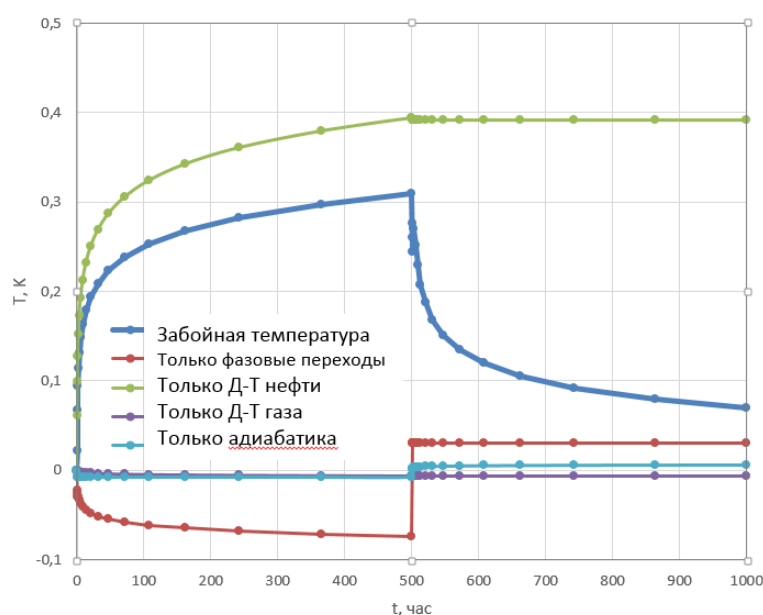
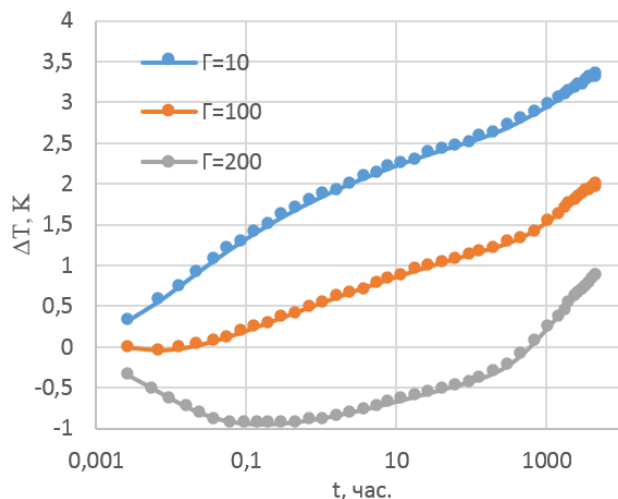
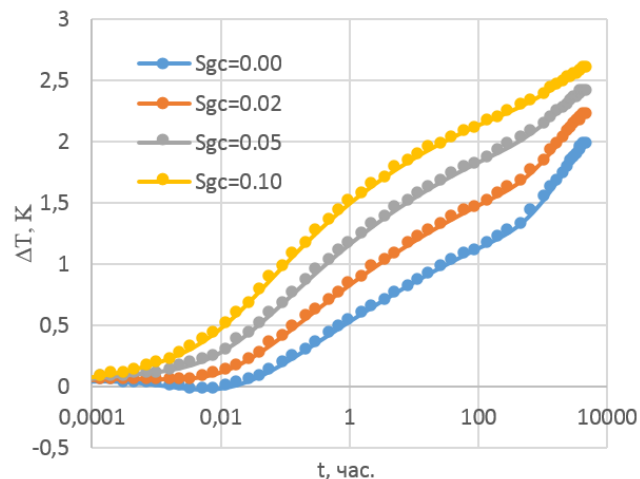


Рис. 9. Вклад различных термодинамических эффектов в температурную аномалию на забое.

Все указанные процессы (кроме фазовых переходов) имеют составляющие от жидкой и газовой фаз, которые, в свою очередь, могут вносить вклад в общую температуру с разными знаками. Так, например, известно, что в типичных пластовых условиях коэффициент Джоуля-Томпсона для нефти положителен, а для газа отрицателен. Таким образом, в зависимости от газового фактора, ОФП и PVT хар-к флюидов эф-т Джоуля-Томпсона может приводить как к положительной температурной аномалии, так и к отрицательной. На Рис. 10 представлены соответствующие кривые для нескольких значений газового фактора. Расчёты показывают, что отрицательная температурная аномалия может иметь место лишь при огромных значениях газового фактора ($\Gamma \sim 100$), на практике такие случаи встречаются редко.



(а) Температурная аномалия вследствие эффекта Джоуля-Томпсона, при различных газовых факторах нефти.



(б) Температурная аномалия вследствие эффекта Джоуля-Томпсона, при величинах критической газонасыщенности.

Рис. 10. Зависимость эффекта Джоуля-Томпсона от различных величин.

Охлаждению также способствует разгазирование нефти, поскольку при этом поглощается тепло. Теплота фазового перехода нефть-газ – трудно определяемая величина. В статье [34] рассматриваются всевозможные фазовые переходы при фильтрации вязкой парафинистой нефти. Диапазон изменений теплоты фазового перехода – $L = -(50 \div 150) \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

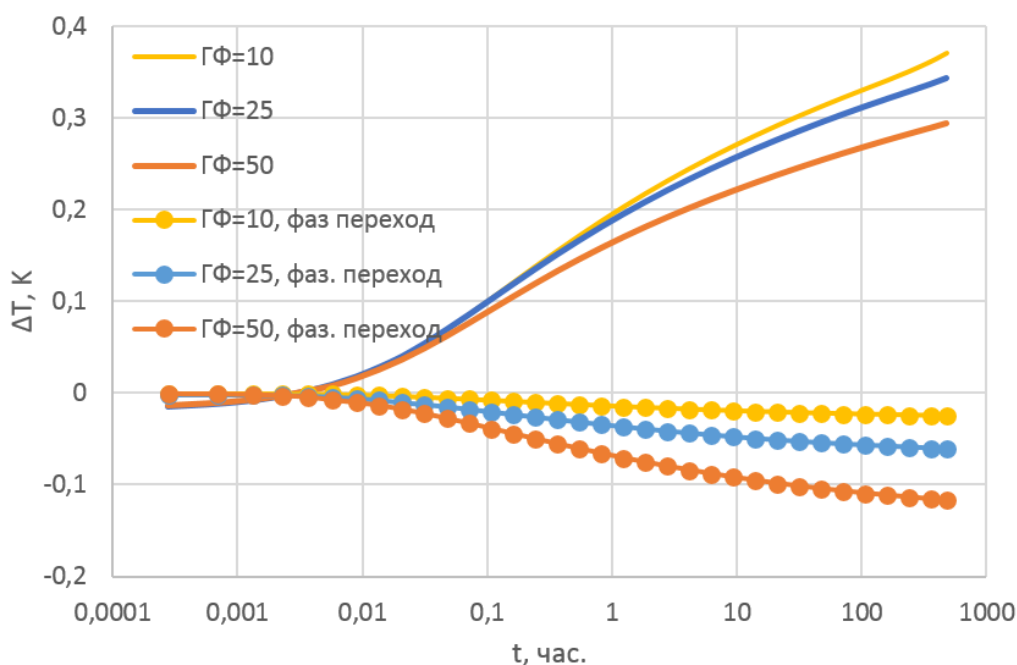


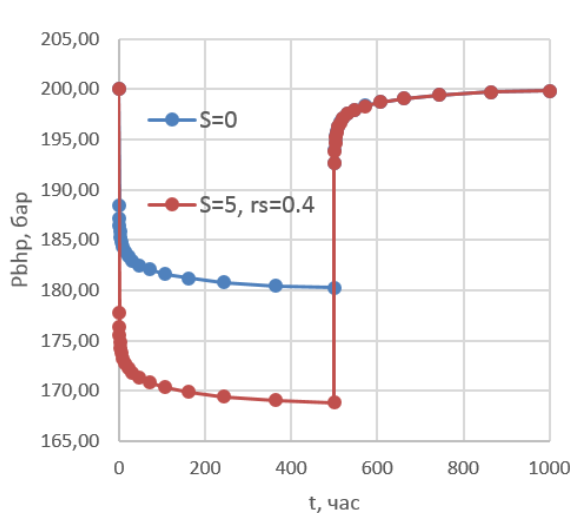
Рис. 11. Влияние поглощения тепла при фазовом переходе на динамику забойной температуры при различных газовых факторах нефти. Запуск скважины с постоянной депрессией.

На Рис. 11 представлено влияние фазовых переходов на температурную

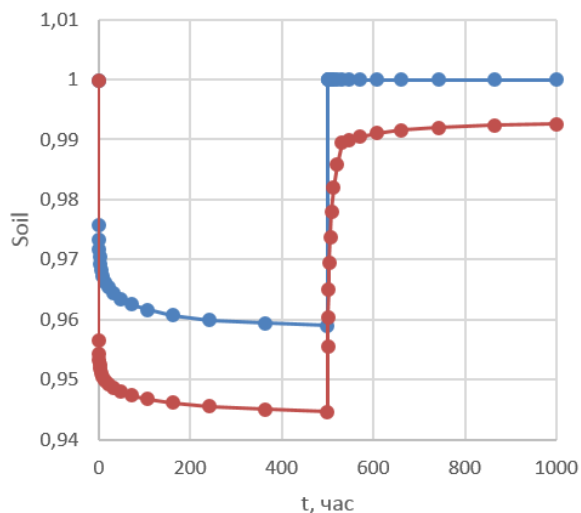
аномалию при различных газовых факторах нефти. Видно, что при $\Gamma > 25$ эффект начинает играть существенную роль.

4.4 Влияние несовершенства ОЗП на динамику забойной температуры. Определение характеристик ОЗП.

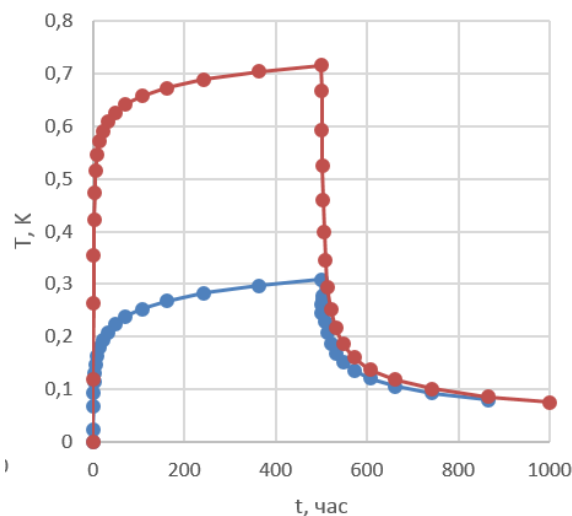
Перейдём к рассмотрению несовершенств. Как было указано выше ФЕС ОЗП претерпевают изменение вследствие различных технологических процессов. Здесь мы будем рассматривать ухудшенные ФЕС. Основной характеристикой данного эффекта является скин-фактор, который определяет дополнительное гидродинамическое сопротивление, которое получает пласт из-за этого несовершенства.



(а) Динамика забойного давления.



(б) Динамика забойной нефтенасыщенности.

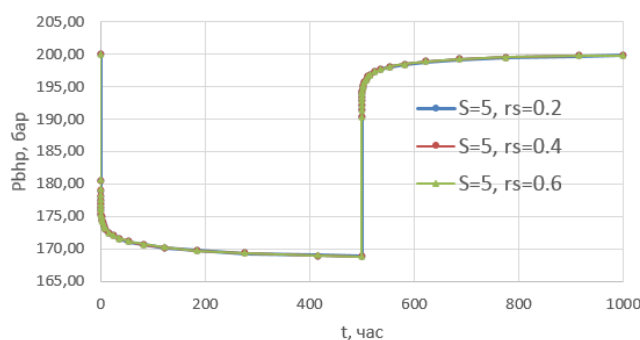


(с) Динамика забойной температуры.

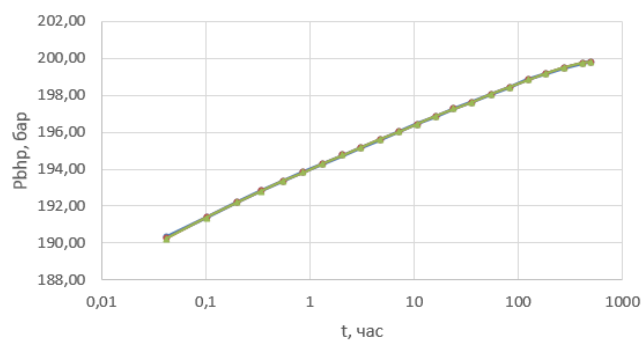
Рис. 12. Влияние ухудшенных ФЕС ОЗП на динамику различных величин. Запуск с постоянной депрессией, затем остановка на КВД. Скин ОЗП $S = 5$, размер ОЗП $r_s = 0.4$ м.

На Рис. 12 представлено влияние ухудшенных ФЕС по сравнению с ФЕС пласта. Из графиков видно влияние данного несовершенства на динамику давления, нефтенасыщенности и температуры. Очевидно, что температурная аномалия вызванная данным несовершенством прямо пропорциональна его степени, или же скин-фактору.

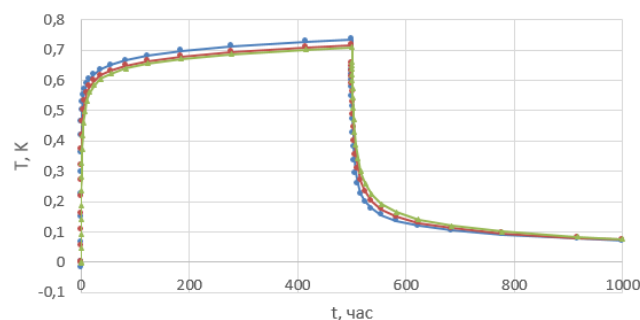
На Рис. 13 проиллюстрирован факт чувствительности забойной температуры к параметрам ОЗП (размеру проницаемости), нечувствительности давления. Путём адаптации свойств ОЗП к промысловым данным можно найти эти свойства.



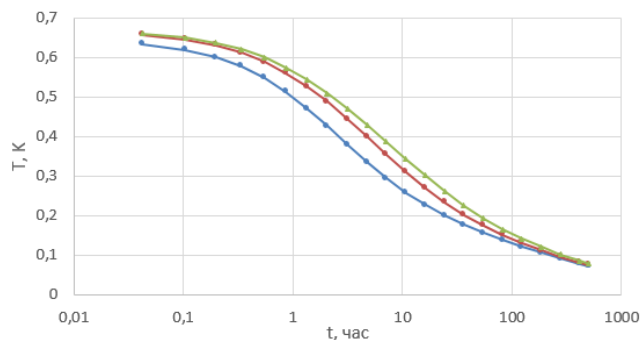
(a) График давления при различных размерах ОЗП.



(b) КВД. Отсутствие какой-либо чувствительности к размеру ОЗП.



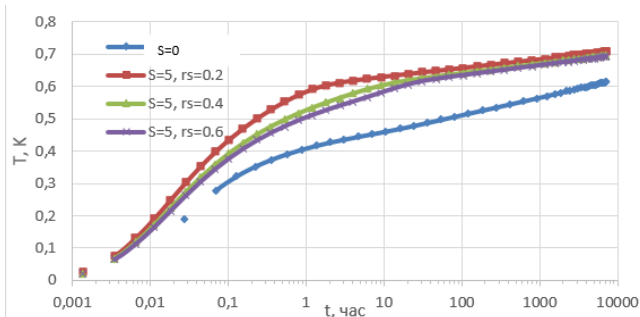
(c) График температуры при различных размерах ОЗП.



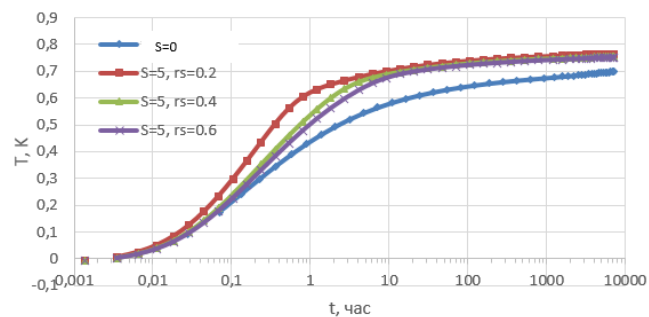
(d) Восстановление температуры. Видна чувствительность к размеру ОЗП.

Рис. 13. Чувствительность давления и температуры к изменению размера ОЗП.

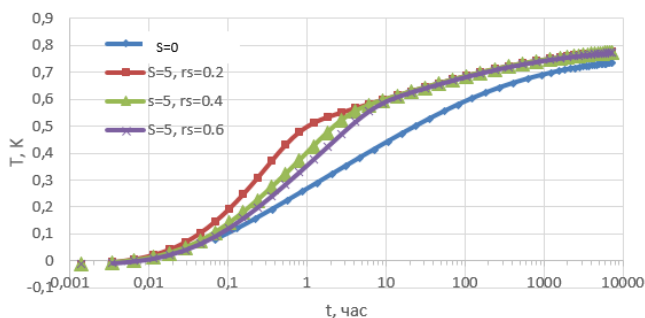
На Рис. 14 представлен анализ чувствительности модели к параметрам ОЗП при частичном вскрытии скважины для различных размеров пласта, когда течение перестаёт быть одномерным. Из графиков можно проследить время термозондирования кровли/подошвы, его изменение для различных мощностей. Также можно отметить размыв границы ОЗП при увеличении размеров ОЗП, как следствие — уменьшение точности метода.



(а) Сравнение для пласта мощностью $h = 0.1$ м.



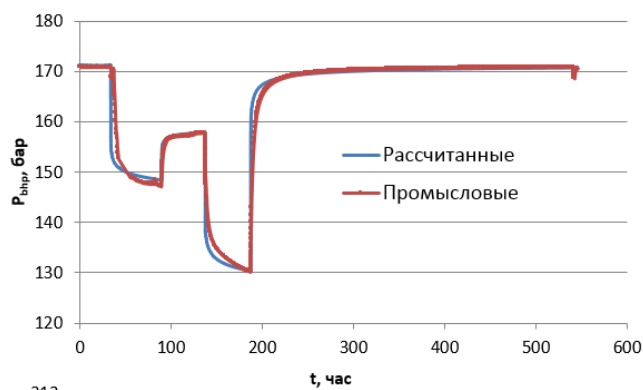
(б) Сравнение для пласта мощностью $h = 1$ м.



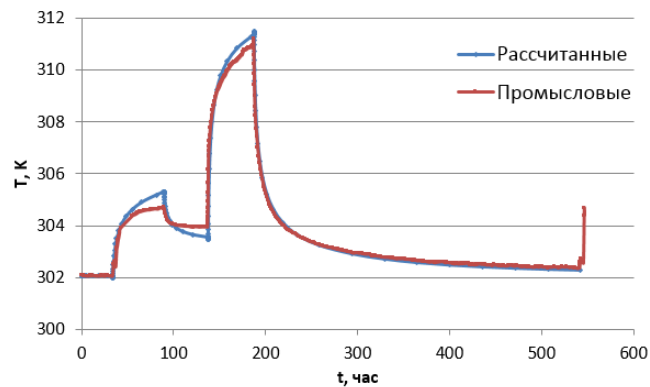
(с) Сравнение для пласта мощностью $h = 10$ м.

Рис. 14. Анализ чувствительности модели к параметрам ОЗП при частичном вскрытии скважины для различных размеров пласта.

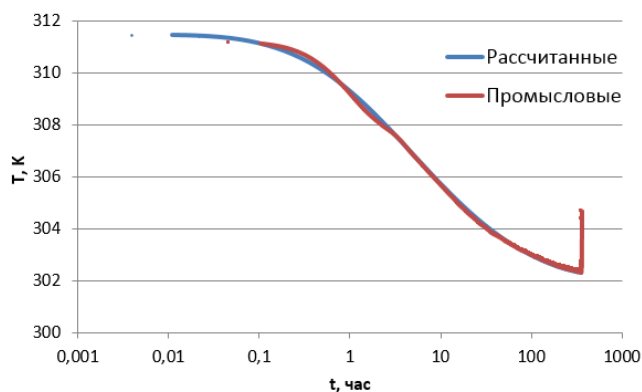
На Рис. 15 проиллюстрирована совместная интерпретация забойных давления и температуры, полученных с одного из месторождений Западной Сибири. Динамика давления воспроизведена по результатам интерпретации ГДИ. Затем были подобраны параметры термодинамической модели, произведена интерпретация ТГДИ, получены характеристики ОЗП: $S = 5.6$, $r_s = 1.2$ м, $k_s = 102.3$ мД при проницаемости пласта $k = 380$ мД. При адаптации использовалась модель двухфазной неизотермической фильтрации с фазовыми переходами. Сама адаптация производилась из условия лучшего совпадения (best matching) кривых, с последовательным приближением различных параметров.



(а) Адаптация забойного давления на основе результатов ГДИ.



(б) Адаптация забойной температуры к используемой модели.



(с) Кривая восстановления температуры.

Рис. 15. Пример интерпретации скважинных данных на основе разработанной методики.

4.5 Влияние вторичного вскрытия на динамику забойной температуры.

Каналы задавались специальными вырезами в сетке. При расчётах распределения дебита считалось что каналы имеют бесконечную проводимость (как и ствол).

На Рис. 16 представлены внешний вид сетки в прискважинной области и непосредственно каналы внутри сетки.

На Рис. 17 представлена динамика забойной температуры для каналов различной длины. Проиллюстрирована температурная аномалия во времени на трёх вежимах добычи: $p_w = 180$ бар, $p_w = 140$ бар, $p_w = 100$ бар при пластовом давлении $p_e = 200$ бар. Длина каналов задана количеством вырезанных ячеек. Каналы, как и следовало ожидать, уменьшают температурную аномалию, т.к. снижают гидродинамическое сопротивление среды.

На Рис. 18 изображена постановка задачи притока жидкости к перфорационным каналам при существующей ОЗП с пониженными ФЕС. При этом

каналы прошивают ОЗП, и приток сосредотачивается именно в этих местах. Это проиллюстрировано на Рис. 18а, где показан вид каналов в трёх измерениях, а также поле скоростей нефти. На Рис. 18б показано то же самое, только в двух измерениях – на срезе срединной плоскости пласта (совпадает с плоскостью где лежат все каналы).

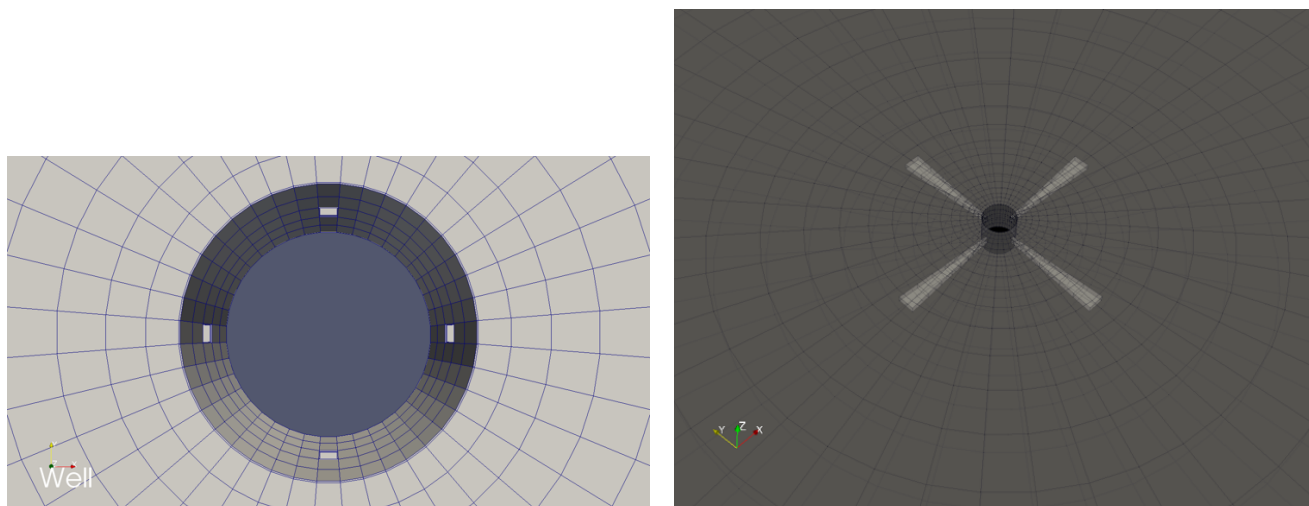
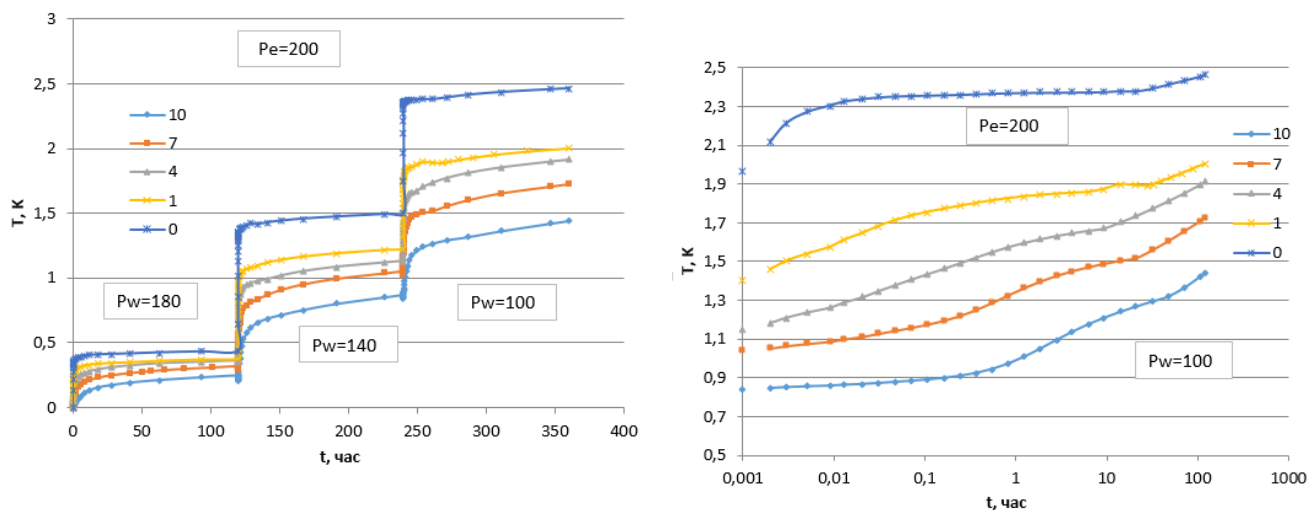


Рис. 16. Внешний вид расчётной сетки и каналов.



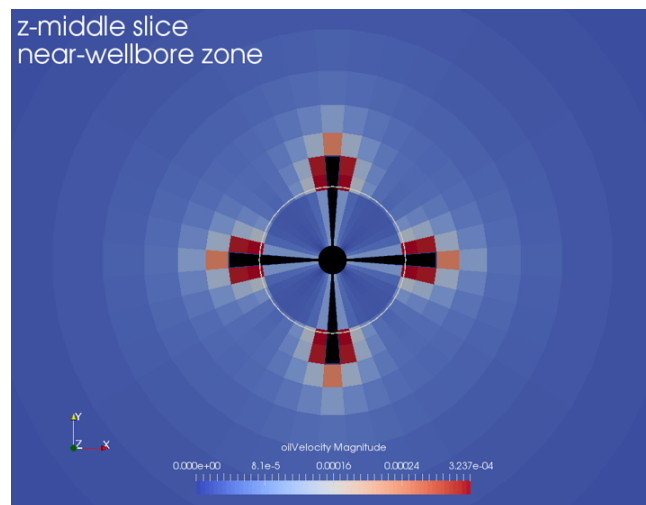
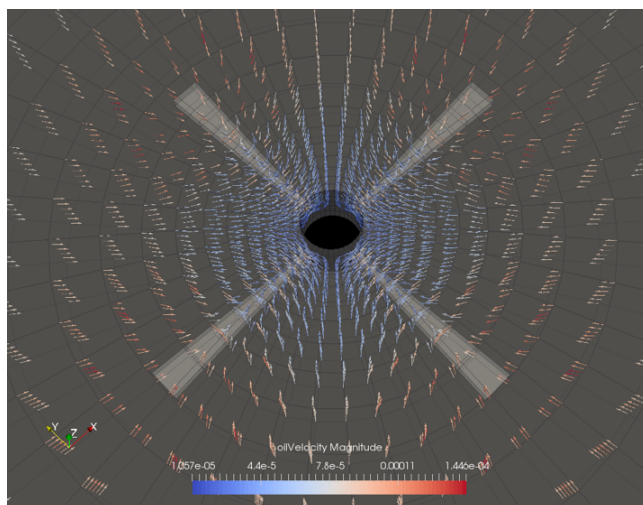
(а) Динамика забойной температуры во времени для различных длин каналов на трёх режимах: $p_w = 180$ бар, $p_w = 140$ бар, $p_w = 100$ бар при пластовом давлении $p_e = 200$ бар.

(б) Динамика забойной температуры во времени для различных длин каналов на режиме $p_w = 100$ бар при пластовом давлении $p_e = 200$ бар.

Рис. 17. Динамика забойной температуры на трёх режимах для каналов различной длины (длина – количество вырезанных ячеек).

На Рис. 19 представлена динамика забойной температуры для каналов различной длины и различных размерах ОЗП. Видно почти полное сход-

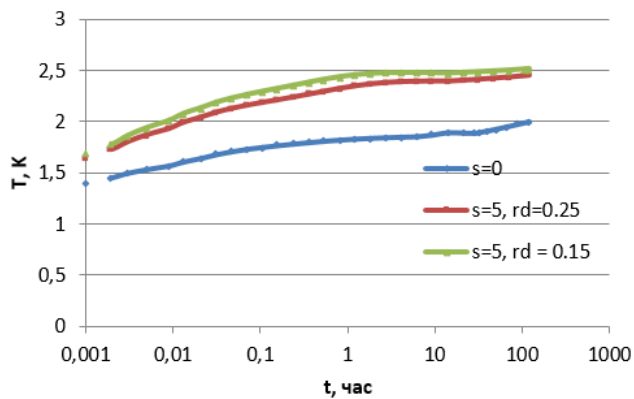
ство графиков без изменённых ФЕС ОЗП и графиков с каналами прошивающими ОЗП. Следовательно, в случае, когда каналы прошивают ОЗП динамика температуры не информативна относительно характеристик ОЗП.



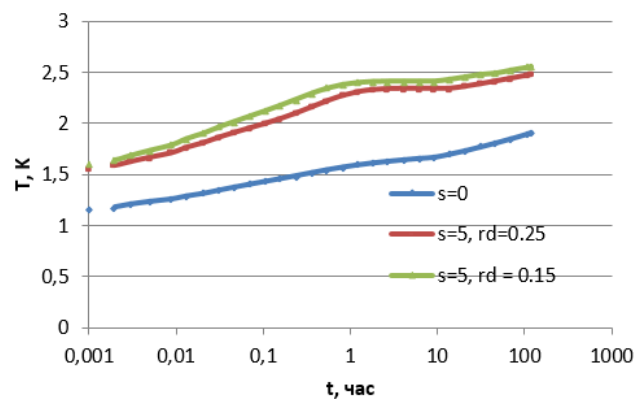
(а) Поле скоростей притока нефти к каналам прошивающим ОЗП.

(б) Амплитуда скорости фильтрации нефти при притоке к каналам.

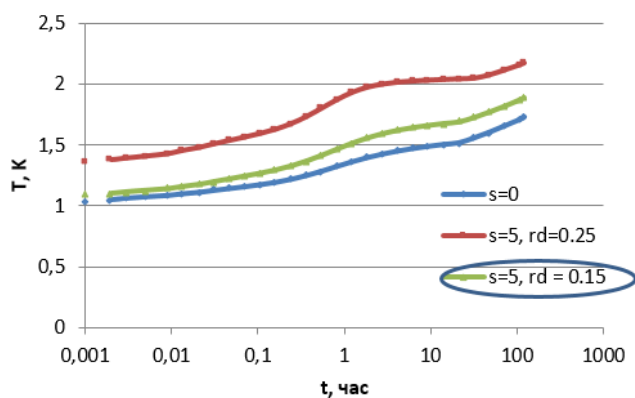
Рис. 18. Вид притока к каналам с ухудшенными ФЕС ОЗП, прошивающим ОЗП.



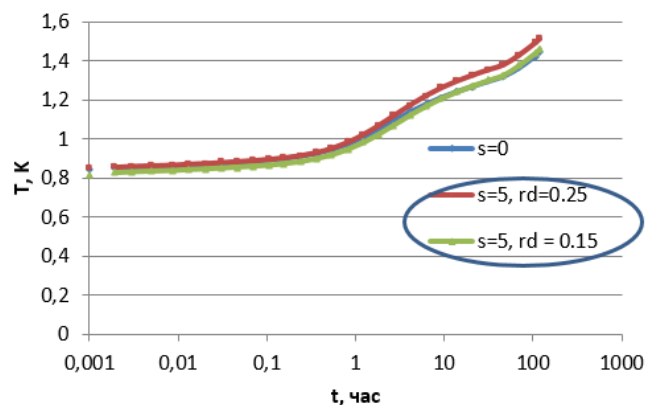
(а) Температура на режиме, приток к каналам длины 1. Каналы не прошивают ОЗП.



(б) Температура на режиме, приток к каналам длины 4. Каналы не прошивают ОЗП.



(с) Температура на режиме, приток к каналам длины 7. Для одного случая каналы прошили ОЗП.



(д) Температура на режиме, приток к каналам длины 10. Каналы прошили ОЗП в двух постановках.

Рис. 19. Динамика температуры на забое для различных длин каналов, размеров ОЗП.

Выводы

Подводя итог, можно выделить следующие результаты данной работы:

1. Был написан расчётный модуль моделирования неизотермической фильтрации в пласте в простейшем случае однофазной фильтрации. Модуль был верифицирован на имеющейся аналитике. был проведён анализ чувствительности модели к параметрам различных эффектов, составляющих температурную аномалию на забое (эф-т Джоуля-Томпсона, адиабатическое расширение, конвективный и кондуктивный перенос тепла), в некоторых постановка выделены основные эффекты, показаны пределы их доминирования.
2. Модуль был расширен для учёта ухудшенных ФЕС ОЗП. Было показано что динамика забойной температуры чувствительна к параметрам ОЗП (размер, проницаемость), тогда как давление – не чувствительно, проведено исследования влияния зарактеристик ОЗП на динамику температуры.
3. Модуль был расширен для учёта вторичного вскрытия – перфорационных каналов. Была проведена верификация полученной модели на соответствующей аналитике относительно давления. Проведено исследование влияния данного несовершенства скважины на динамику забойной температуры.
4. Проведено исследование совместного влияния несовершенств скважины (ухудшенные ФЕС ОЗП, перфорационные каналы) на динамику забойной температуры. Показано, что для случая, когда каналы прошивают ОЗП, показания температуры не информативны относительно свойств ОЗП.
5. Модуль был расширен для расчёта двухфазной двухкомпонентной неизотермической фильтрации с фазовыми переходами. Было проведён анализ чувствительности модели к теплоте фазового перехода, указаны случаи, когда данный эффект необходимо брать во внимание.
6. Написанный модуль трёхмерного расчёта двухфазной двухкомпонентной неизотермической фильтрации был применён для интерпретации

реальных скважинных данных для месторождений Западной Сибири. Были рассчитаны характеристики ОЗП соответствующих скважин.

7. Для расчёта некоторых гидродинамических постановок были использованы полуаналитические методы, представленные в работе. Метод функций Грина с алгоритмом суммирования Эвальда показал отличные характеристики производительности, в сравнении с численными аналогами. Была показана возможность применения метода для расчёта притока многофазой многокомпонентной жидкости к скважине произвольной геометрии.

Основные результаты данной работы были (будут) представлены на следующих конференциях:

- Гайдуков Л.А., Новиков А.В., Посвянский Д.В., Тухватуллина Р.Р. Математическое моделирование термогидродинамических процессов в пласте для определения структуры околоскважинной зоны. // Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений, Уфа, 7-9 апреля 2015 г.
- Гайдуков Л.А., Новиков А.В., Посвянский Д.В., Тухватуллина Р.Р. Математическое моделирование термогидродинамических процессов в пласте для определения структуры околоскважинной зоны. // 58-ая научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 23-28 ноября, 2015 г.
- Гайдуков Л.А., Новиков А.В., Посвянский Д.В. Исследование термогидродинамических процессов при многофазной фильтрации флюидов к скважине в техногенно-измененном пласте со вторичным вскрытием с целью определения параметров околоскважинной зоны. SPE-181964 // Российская нефтегазовая техническая конференция и выставка SPE. 24-26 октября 2016. Москва.

Список литературы

- [1] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 стр.
- [2] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. 416 с.: ил
- [3] Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1976. 335 с.
- [4] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: Издательство МФТИ, 2002. – 336 с.
- [5] Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
- [6] Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. - 238 с.
- [7] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1987 – 464 с.
- [8] Алишаев М.Г., Розенберг М.Д., Теслюк Е.В. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. / Под ред. Г.Г. Вахитова – М.: Недра, 1985. 271 с.
- [9] Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 628 стр.
- [10] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – изд. 4-е – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 512 с.
- [11] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ.Лаборатория знаний, 2013.-523 с.: ил., табл. – (Серия «Основы информационных технологий»)

- [12] Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 128 стр.
- [13] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 стр.
- [14] Chen Zhangxin, Guanren Huan, and Yuanle Ma. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [15] LeVeque R.J. Finite volume methods for Hyperbolic problems. Cambridge University Press, 2002.
- [16] Марченко Н.А. [и др.] / Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задачи многофазной фильтрации // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2008. № 97. 17 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-97>
- [17] Рамазанов А.Ш. Теоретические основы термогидродинамических методов исследования нефтяных пластов. Автореф. дис. докт. техн. наук. - Уфа, 2004.
- [18] Рамазанов А.Ш., Паршин А.В. Температурное поле в нефтеводонасыщенном пласте с учётом разгазирования нефти // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2006. №1. URL: http://ogbus.ru/authors/Ramazanov/Ramazanov_1.pdf
- [19] Ramazanov A.Sh., Valiullin R.A., Sadretdinov A.A., Shako V.V., Pimenov V.P., Fedorov V.N., Belov K.V. Thermal Modeling for Characterization of Near Wellbore Zone and Zonal Allocation. SPE 136256, Moscow: SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition, 2010.
- [20] Валиуллин Р.А., Рамазанов А.Ш., Хабиров Т.Р., Садретдинов А.А., Шако В.В., Сидорова М.В., Котляр Л.А., Федоров В.Н., Салимгареева Э.М. Интерпретация термогидродинамических исследований при испытании скважины на основе численного симулятора. SPE-176589-RU, Российская нефтегазовая техническая конференция SPE, 26-28 октября, 2015, Москва, Россия.

- [21] Filippov A.I, Ramazanov A.Sh. Calculation of the Thermal Field of the Throttle Element of Apparatus for Studying the Joule-Thomson Effect. - Journal of Engineering Physics, 1980, Vol.38, Issue 2, pp. 203-207.
- [22] Ramazanov A.Sh., Filippov A.I. Temperature Fields in the Case of Unsteady Flow in Porous Media. – Fluid Dynamics, 1983, vol.18, N4, pp.646-649.
- [23] Валиуллин Р.А. Термические методы диагностики нефтяных пластов и поиска скважин / Автореф. дис. докт. техн. наук. - Тверь, 1996.
- [24] Оливье Узе, Дидье Витура, Оле Фьярэ. Анализ динамических потоков. КАППА выпуск v4.10.01 - Октябрь 2008.
- [25] Civan, Faruk. Reservoir formation damage : fundamentals, modeling, assessment, and mitigation. // Gulf Professional Publishing. - 2007. - P. 1135.
- [26] Karakas M. and Tariq S. «Semi-Analytical Productivity Models for Perforated Completions», paper SPE 18271, 1988.
- [27] Р. Эрлагер мл. Гидродинамические методы исследования скважин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 512 стр.
- [28] А.И. Брусиловский. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2002, 575 с.
- [29] Мукерджи Х. Производительность скважин. Изд. 2-е доп. М., 2001. – 184 с.
- [30] Макарова А.А. Моделирование динамики изменения фильтрационных и электрических свойств околоскважинной зоны с целью оценки её загрязнения. Дисс. канд. техн. наук. РГУНГ им. Губкина, Москва – 2015.
- [31] Arfken, G.B. and Weber, H.J. 1995. *Mathematical Methods for Physicists*, fourth edition. San Diego: Academic Press.
- [32] Radek Pecher, Breaking the Symmetry with the multi-Point Well Connection Method. SPE-173302-MS. SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, 2015.
- [33] Radek Pecher, Boundary Element Simulation of Petroleum Reservoirs with Hydraulically Fractured Wells. PhD thesis. The University of Calgary, 1999.

- [34] Шарафутдинов Р.Ф. Многофронтные фазовые переходы при неизотермической фильтрации газированной парафинистой нефти. // Журн. "Прикладная механика и техническая физика", Т. 42, № 2, 2001.
- [35] Posvyanskii D.V., Gaidukov L.A., Tukhvatullina R.R. Estimating Bottom Hole Damage Zone Parameters Based on Mathematical Model of Thermo-hydrodynamic Processes. // ECMOR XIV. - 2014.
- [36] D.V. Posvyanskii, A.B. Starostin, V.S. Posvyanskii, E.S. Makarova, A.A. Vorobjev. An Application of Green Function Technique and Ewald's Algorithm for Well Test Analysis. // ECMOR XI. - 2008.
- [37] A. Korneev, A.V. Novikov, D.V. Posvyanskii, V.S. Posvyanskii. An Application of Green's Function Technique for Computing Well Inflow without Radial Flow Assumption. // ECMOR XV. – 2016.
- [38] Wolfsteiner, C., Durlofsky, L. J. and Aziz, K.: "Calculation of Well Index for Nonconventional Wells on Arbitrary Grids", Computational Geosciences, 7, 61-82, 2003
- [39] Obinna Duru, Roland N. Horne. Modeling Reservoir Temperature Transients and Matching to Permanent Downhole Gauge Data for Reservoir Parameter Estimation. 2008 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver.