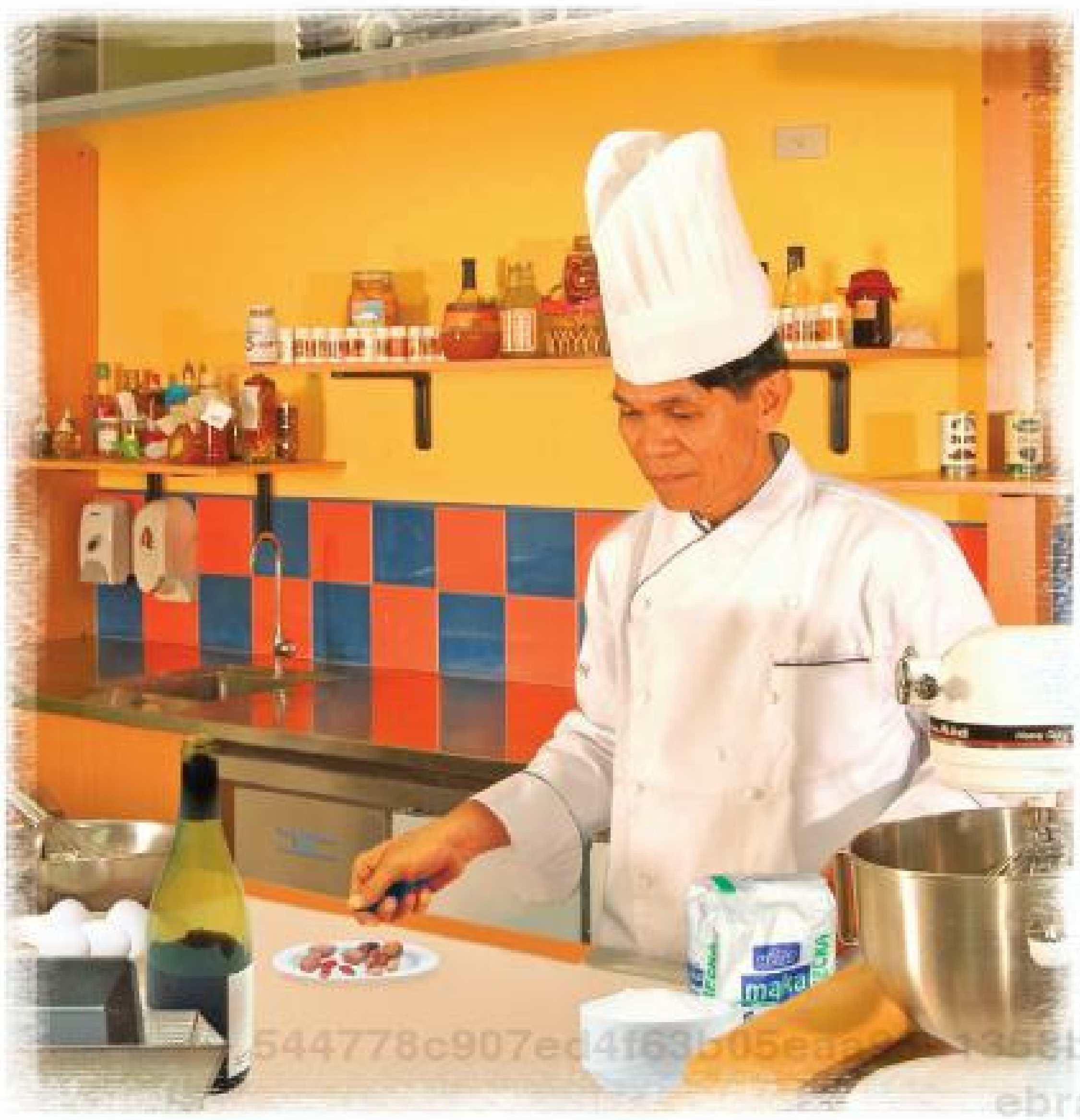
Lógica



Gracias a que la lógica define un lenguaje, se aplica en toda actividad de la vida cotidiana. Analicemos el siguiente ejemplo:

Para una boda, próxima a realizarse, al chef Mauricio Lombardi se le encomienda la labor de preparar la torta, la cual debe quedar deliciosa y ser suficiente para que alcance para los 100 invitados. Para elaborar la torta, el chef realiza el siguiente procedimiento lógico:

- *Revisa su alacena y nota que le faltan algunos productos, por ello debe decidir entre: ir de compras al supermercado o solicitar por teléfono el pedido a domicilio.*
- *Una vez reunidos los ingredientes empieza a seguir cada uno de los pasos que dice la receta, hasta obtener la deliciosa torta tan deseada.*

Como ves, la **lógica** nos proporciona formas de razonamiento correcto y tiene aplicación en las demás ramas del saber:

- En *filosofía*, es básica para determinar la validez de un razonamiento, utilizando las proposiciones adecuadas, que nos facilita el lenguaje de la lógica.
- En *matemáticas*, sirve para demostrar teoremas e inferir resultados que puedan ser aplicados en investigaciones, utilizando el lenguaje de la lógica y sus reglas o leyes.
- En *computación*, es necesaria para la construcción, revisión y aplicación de programas, utilizando en su lenguaje lógico y el sistema binario.
- En general, la lógica se aplica en la vida cotidiana, ya que cualquier trabajo o actividad que una persona realice, tiene un procedimiento lógico y un razonamiento que utiliza **proposiciones**.

Proposiciones

Una **proposición** es, como llamamos en español, una oración sencilla.

El lenguaje de la lógica maneja proposiciones. Estas pueden ser:

P
V
F

- **Categóricas.** Si de ellas puedo decir que son verdaderas o son falsas.

Ejemplo

- Sea **p** la proposición: "La pila de mi teléfono celular se descargó".

Podemos verificar si es verdad o no.

- **Simples.** Son las más sencillas de las proposiciones, se refieren a expresiones o conceptos y no tienen términos de enlace.

Ejemplo

Sea la proposición simple **p:** "El cuadro quedó muy lindo".

Es una proposición simple, pues expresa una idea corta y clara.

- **Compuestas.** Son dos o más proposiciones simples ligadas por una palabra que llamamos conectivo lógico o conector lógico.

El valor de verdad de la proposición compuesta está dado por el valor de verdad de las proposiciones que la forman.

Ejemplo

Sea la proposición: "7 pertenece al conjunto de los números enteros y es par".

En ella hay dos proposiciones simples que llamaremos **p** y **q**, así:

p: "$7 \in \mathbb{Z}$**",** **q:** "7 es un número par", que se une con "y", para formar la proposición compuesta **p** y **q:** "$7 \in \mathbb{Z}$, y 7 es un número par" por construcción idiomática diremos "7 pertenece al conjunto de los números enteros y es par".

El origen de ...

Los inicios de la lógica se atribuyen a Aristóteles (384 – 322 a.C.).

La palabra **lógica** proviene del término griego logos, que significa discurso, argumentación, y que entraña otros significados como son idea, razón o palabra. La lógica formal traza los principales patrones de uso de los argumentos al abstraer el contenido de estos (estoicos y Aristóteles).

Tablas de verdad

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, es necesario probar el valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Al analizar el valor de verdad de una proposición simple, contamos con dos posibilidades: es verdadera o es falsa. Si la proposición **p** es verdadera, entonces su negación es falsa y viceversa.

La negación de una proposición "**p**" es la proposición que se obtiene anteponiendo la frase "No es cierto que", "Es falso que", o bien insertando la palabra "no" a la proposición dada. La negación de **p** se escribe **~p.**

Ejemplo

Sea **p:** "El sábado pasado fui a cine"

~p: "No es cierto que el sábado pasado fui a cine" (**figura 1**).

P	~P
V	F
F	V

Figura 1

Con dos proposiciones simples, tenemos cuatro posibilidades para analizar: que ambas sean verdaderas, que la primera sea verdadera y la segunda falsa, que la primera sea falsa y la segunda verdadera o que las dos sean falsas.

Dadas las proposiciones simples **p**, **q**, tenemos las posibilidades que observamos en la tabla de la **figura 2**.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Figura 2

En general, una proposición compuesta de **n** proposiciones simples, contará con 2^n posibilidades de combinación de verdadero y falso.

Saberes Matemáticos

El **valor de verdad de una proposición** es determinar si ésta es verdadera o falsa.

Las proposiciones simples se unen a través de **los conectivos lógicos** para formar proposiciones compuestas.

Los conectivos lógicos son: conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación o condicional ($\Rightarrow$), doble implicación o bicondicional ($\Leftrightarrow$)

Los conectivos lógicos

Las palabras que sirven para unir proposiciones y simples formar compuestas, se llaman conectivos lógicos.

Los principales conectivos lógicos son:

- ✓ **Conjunción:** simbolizada con $\wedge$ (una uve hacia abajo) y significa "**y**" en español.
- ✓ **Disyunción:** simbolizada con $\vee$ (una uve) y significa "**o**" en español.
- ✓ **Implicación** ó **condicional:** simbolizada con $\Rightarrow$ (una flecha o vector de cola a izquierda) y significa "**entonces**" en español.
- ✓ **Doble implicación** ó **bicondicional:** simbolizada $\Leftrightarrow$ (una flecha o vector de doble cabeza) y significa "equivale" en español o "**si y solo si**" en matemática.

Conjunción

Es el conectivo lógico que une las proposiciones simples **p**, **q** para formar la proposición compuesta **p** $\wedge$ **q.** La conjunción se asocia con el cumplimiento de requisitos, de tal modo que ésta es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones simples son verdaderas.

Si una de las proposiciones simples es falsa, entonces **p** $\wedge$ **q** es falsa.

El valor de verdad podemos observarlo en la **figura 3.**

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figura 3

Disyunción

Es el conectivo lógico que une las proposiciones simples **p**, **q** para formar la proposición compuesta **p** $\vee$ **q.** Asociamos la disyunción con la "**elección**" o la "**escogencia**" de tal modo que ésta es falsa únicamente cuando las dos proposiciones simples son falsas. En cualquier otro caso la disyunción es verdadera.

Dadas las proposiciones simples **p**, **q**, el valor de verdad de sus posibilidades se condensa en la tabla de la **figura 4.**

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figura 4

Ejemplo

En las votaciones para elegir representante del curso, debes escoger si votas por el candidato **A** o por el candidato **B.**

Implicación ó condicional ($\Rightarrow$)

Es el conectivo lógico que une las proposiciones simples **p**, **q** para formar la

proposición compuesta **"p $\Rightarrow$ q"**, que leemos: "si **p** entonces **q**".

Asociamos la implicación con la relación "causa – efecto"; **p** se le llama causa o antecedente, y **q** se llama efecto o consecuente. Significa que si ocurre **p**, entonces, ocurre **q.**

Observa detenidamente la tabla de verdad de la **figura 5** y concluye cuándo **"p$\Rightarrow$q"** es verdadera y cuándo es falsa.

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Figura 5

Curiosidades

En cierta ocasión, **Bertrand Russell** estaba especulando sobre enunciados condicionales del tipo: "Si llueve las calles están mojadas" y afirmaba que de un enunciado falso se puede deducir cualquier cosa. Alguien que le escuchaba le interrumpió con la siguiente pregunta: "Quiere usted decir que si 2 + 2= 5 entonces usted es el Papa".

Russell contestó afirmativamente y procedió a demostrarlo de la siguiente manera:

"Si suponemos que 2 + 2 = 5, entonces estará de acuerdo que si restamos 2 de cada lado obtenemos 2 = 3. Invirtiendo la igualdad y restando 1 de cada lado, da 2 = 1.

Como el Papa y yo somos dos personas y 2 = 1 entonces el Papa y yo somos uno, luego yo soy el Papa".

Bertrand Russell, filósofo y matemático inglés (1872-1970), fue uno de los iniciadores de la lógica matemática con sus **Principia Mathematica**, en colaboración con Whitehead.

Ejemplo

Dada la proposición compuesta: "Si un triángulo es equiángulo, entonces, sus ángulos interiores tienen igual medida", analizar su valor de verdad.

Sea **p** la proposición "Un triángulo es equilátero".

y sea **q** la proposición "Los ángulos interiores de un triángulo son iguales".

Analicemos su valor de verdad:

"Un triángulo es equilátero".

Esta proposición solo es falsa cuando **p** sea verdadera y **q** sea falsa.

Verifica con la tabla las cuatro posibilidades.

Doble implicación o bicondicional

Es el conectivo lógico que une las proposiciones simples **p**, **q** para formar la proposición compuesta **"p ⇔ q"**, que leemos: "si **p** entonces **p**" (**figura 6**).

La proposición compuesta **"p ⇔ q"** puede descomponerse en dos implicaciones de sentido contrario, esto es: **"p ⇒q ∧ q ⇒ p"** verificando en una tabla de verdad concluiremos que la doble implicación **"p ⇔ q"** es verdadera cuando ambas proposiciones simples **p, q** son verdaderas y cuando ambas proposiciones simples son falsas, en los otros casos **"p ⇔ q"** es falsa. Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas.

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Figura 6

Ejemplo

$p \vee q \equiv q \vee p$. Verifica que sus tablas de verdad son iguales.

- **Tautología.** Es una proposición cuya tabla de verdad es siempre verdadera sin importar la falsedad o verdad de las proposiciones que la componen.
- **Contradicción.** Es una proposición cuya tabla de verdad es siempre falsa sin importar la falsedad o verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo

- Un triángulo es equilátero, si y solamente si, cada uno de sus ángulos interiores mide 60º.
- Sean las proposiciones: p: 1 < 3 q: 5 < 15 r: 20 < 60

Formemos la proposición compuesta: "Si **1 < 3**, entonces, **5 < 15** y si **5 < 15,** entonces, **20 < 60**, si y solo si, **1 < 3** ó **20 < 60**"

Al verificar el valor de verdad de la proposición compuesta por tres proposiciones simples, ya sabemos que contamos con ocho posibilidades.

Practico

- Aplica las tablas a la siguiente proposición compuesta:

$$[(p \wedge q) \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$$

► Función proposicional

Sea U el conjunto de los números reales y en él consideremos la expresión **q:** $"x+7=18"$

Tal como está expresada no es posible saber si es verdadera o falsa, es decir, no se le puede asignar un valor de verdad porque existe una variable "x", que puede ser sustituida por cualquier número real.

Es necesario tener información sobre cuánto vale x.

Por lo tanto, de la expresión $"x+7=18"$ no puede afirmarse si es verdadera o falsa, porque si $x=3$, $"x+7=18"$ se vuelve una proposición falsa, pero si $x=11$ $"x+7=18"$ ya es una proposición verdadera.

A la letra "x" de la expresión anterior se le conoce como "*variable*".

Una expresión que contenga variables y que después, al sustituirla por constantes determinadas, se convierta en proposición, recibe el nombre de "*función proposicional*". En símbolos una *función proposicional* se representa: "$p(x)$".

Si $\mathbf{p}(x)$ es una función proposicional definida sobre un conjunto determinado U, entonces los elementos de ese conjunto que hacen que la función proposicional sea verdadera forman un conjunto especial llamado el "*conjunto de verdad de p(x)*".

Ejemplo

Enunciado

- Sea $\mathbf{p}(x)$: $x+1<5$, una función proposicional definida sobre el conjunto de los números naturales. Hallar el conjunto de verdad de $p(x)$.

Solución

La función proposicional $\mathbf{p}(x)$: $x+1<5$, $\forall x \in \mathbb{N}$ tiene el conjunto de verdad de $\mathbf{p}(x)$ es $\{\ldots -,1\ 0, 1, 2, 3\}$

El valor 4 no pertenece al conjunto solución porque x es estrictamente menor que $4 \in \mathbb{N}$. Si $x=4$ la desigualdad $x+1<5$ no se cumple y, por tanto, $p(4)$ es falsa. Por tal razón, 4 no pertenece al conjunto de verdad.

► Cuantificadores

Los cuantificadores se utilizan para transformar funciones proposicionales en proposiciones. Veamos el cuantificador universal y el cuantificador existencial.

► Cuantificador universal ($\forall$)

Los **cuantificadores** son palabras que indican la cantidad de elementos de un conjunto (todos los elementos, ninguno de los elementos o algún elemento) que cumplen una determinada condición o característica. En lógica, los cuantificadores determinan para las funciones proposicionales simples o compuestas asociadas a un conjunto U, que el conjunto de verdad no es vacío, es todo U o es vacío.

Saberes Matemáticos

En la **conjunción** $(\wedge)$ solo hay un valor verdadero: cuando ambas proposiciones simples son verdaderas.

En la **disyunción** $(\vee)$ solo hay un valor falso: cuando ambas proposiciones simples son falsas.

En la **implicación** o **condicional** $(\Rightarrow)$ solo hay un valor falso: cuando la proposición p (causa) es verdadera y la proposición q (consecuencia) es falsa.

La **equivalencia, doble implicación o bicondicional** $(\Leftrightarrow)$ tiene solo dos verdaderas: cuando ambas proposiciones simples son verdaderas y cuando ambas proposiciones simples son falsas.

Ejemplo

"Todos los estudiantes aprobaron el curso".

Aquí la condición de "aprobar el curso" fue cumplida por la totalidad de los estudiantes.

Simbólicamente: $(\forall x)\, \mathbf{p}(x)$, se lee: "Para todo x, es válida $\mathbf{p}(x)$" en este caso, x es elemento, $\mathbf{p}(x)$ es la función proposicional y el conjunto U corresponde a todos los estudiantes del curso. Significa que $(\forall x)\, \mathbf{p}(x)$, es verdadera si todos los estudiantes aprobaron el curso y será falsa si al menos un estudiante perdió el curso.

Cuantificador existencial $(\exists)$

Indica que las funciones proposicionales simples o compuestas son cumplidas por algún elemento del conjunto U al que están asociadas, esto es, que al menos un elemento de U cumple la condición.

Saberes Matemáticos

Los cuantificadores indican la cantidad de elementos que cumplen una condición. En lógica los cuantificadores son el **universal** o "para todo **x**" $(\forall x)$ y el **existencial** o "existe por lo menos un **x**" $(\exists x)$.

Ejemplo

"Algunos estudiantes del curso 4º son excelentes académicamente".

Aquí la condición de "ser excelente académicamente" es cumplida por algún, algunos o al menos un estudiante, pero no necesariamente por todos.

Simbólicamente: $(\exists\ x)\, \mathbf{p}(x)$, se lee: "Existe por lo menos o al menos un elemento x del conjunto curso 4º, que hace el papel del conjunto U, que cumple la condición $\mathbf{p}(x)$, siendo x elemento y $\mathbf{p}(x)$ condición.

Una proposición que tiene el cuantificador universal, se niega con el cuantificador existencial y viceversa. Es decir,

$$\neg(\forall x)p(x) = (\exists x)(\neg p(x)).$$

$$\neg(\exists x)p(x) = (\forall x)(\neg p(x)).$$

Ejemplo

Si **p** es la proposición "Todos los estudiantes aprobaron el curso", entonces, **~ p:** será la proposición "Por lo menos un estudiante no aprobó el curso" o "Existe al menos un estudiante que no aprobó el curso".

Si **p** es verdadera, entonces, **~ p** es falsa.

Practico

1. Dadas las proposiciones siguientes, escribe su negación, primero en el lenguaje de uso cotidiano y después es el lenguaje lógico.
   - **p**: Todos los sectores de la economía colombiana se benefician con el TLC (Tratado de Libre Comercio)
   - **q**: Por lo menos un país de América Latina no firmó el TLC.
   - **r**: Todos mis compañeros asistieron al baile de graduación.
   - **m**: Al menos un vehículo no cumplió con la norma de "pico y placa" en Bogotá.
2. Determina el conjunto de verdad de la proposición p(x): $x + 1 < 5$ sobre el conjunto de los números racionales.
3. Si q(x): $x+5 < 9$ y p(x): $x-2<4$, determina el conjunto de verdad de la proposición $(p(x) \wedge q(x))$ sobre el conjunto de los números naturales.

Indicador de logro: • *Establezco los valores de verdad de proposiciones compuestas, aplicando las tablas de los conectivos lógicos.*

Clasificar
Abstraer
Medir
Estimar
Calcular

Resuelvo en mi cuaderno

Soluciono problemas

1 Identifica las proposiciones simples que hay en la siguiente proposición compuesta:

"Un vehículo arranca cuando tiene gasolina y su batería tiene carga". Escribe esta proposición en lenguaje lógico.

2 Niega cada una de las siguientes proposiciones en lenguaje lógico.

p: "Todos los seres humanos son inteligentes"

r : "Por lo menos un estudiante no vino hoy"

t : "Todos los números primos son impares"

3 Verifica el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes, utilizando las tablas de verdad.

a. $(p \vee q) \Rightarrow p$ **b.** $q \Rightarrow (p \vee q)$

c. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ **d.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)]$

4 Escribe un enunciado de la vida cotidiana para cada una de las proposiciones p, q, y luego verifica el valor de verdad utilizando las tablas de verdad.

a. $p \wedge q$ **b.** $q \vee p$ **c.** $p \Rightarrow q$

d. $p \Leftrightarrow q$ **e.** $-p \wedge (p \vee q)$

5 Analiza y determina si la siguiente proposición compuesta:

"si $x + 8 = 5$, si y solo si, $x = -3$" es una tautología.

6 Inventa una proposición compuesta de cuatro proposiciones simples usando todos los conectivos lógicos que hemos visto.

7 Dada la proposición:

$(m \Rightarrow n) \Rightarrow [(r \vee k) \Rightarrow (d \wedge f)]$

Escribe enunciados para m, n, r, k, d y f, que tengan relación con tu vida escolar.

Establezco conexiones

1 Niega cada proposición, en lenguaje lógico:

a. Todos los animales son carnívoros.

b. Algunos animales son carnívoros y mamíferos.

c. Existe por lo menos un animal que es ciego y puede volar sin estrellarse.

d. Ningún ave es cuadrúpeda.

2 Escribe en lenguaje común las proposiciones siguientes añadiendo el cuantificador universal. Escribe luego su negación.

a. "Los hombres nacen buenos y la sociedad los corrompe" (autor: Rousseau)

b. Según Isaac Newton, dado que fuerza es el producto de la masa y la aceleración,

"Si se aumenta la masa, entonces disminuye la aceleración, si y solamente si la fuerza permanece constante".

c. "Fuerza –aceleración son inversamente proporcionales, fuerza –masa son inversamente proporcionales, entonces aceleración –masa son inversamente proporcionales.