2

Lógica y cálculo proposicional

Objetivos

- Identificar las clases de proposiciones que se pueden encontrar en un enunciado.
- Analizar los enunciados para la elaboración de las tablas de verdad.
- Traducir proposiciones del lenguaje verbal a variables lógicas y viceversa.
- Identificar si un argumento es válido o inválido, así como demostrar su validez.
- Comprender los principios de las operaciones del cálculo proposicional y sus aplicaciones.

2.1 Introducción

Lógica es un término que deriva del griego λοφνεη o λοφικος (logiké o logikós), que a su vez proviene de λογος (logos), que significa **razón**. La lógica se considera una ciencia formal cuyo objeto de estudio son los distintos principios de demostración que permitan comprobar que una afirmación pueda ser considerada como válida.

La metodología de trabajo de la lógica consiste en examinar la validez o la invalidez de una afirmación mediante la aplicación de una sistematización en los argumentos y, por ende, de un análisis de su estructura lógica, sin tener en cuenta el contenido de lo que se ha argumentado ni considerar siquiera el lenguaje utilizado, y sin contemplar el estado de realidad del contenido.

La lógica se aplica en muy diversas áreas. En ingeniería es de gran utilidad en la electrónica, para el diseño de circuitos mediante compuertas lógicas, y en programación, para el diseño de programas que requieren la unión de operadores lógicos. En administración, porque esta hace uso de los conocimientos organizados para dar solución a problemas reales. En derecho, su aplicación se conoce como "lógica jurídica", considerada un método de investigación para entender a la ciencia del derecho, que obtiene su principal fuente del conocimiento en la razón y no de la experiencia.

Bertrand Arthur William Russell, filósofo, lógico, matemático y escritor británico, realizó aportaciones innovadoras a los fundamentos de las matemáticas y al desarrollo de la lógica formal contemporánea, así como a la filosofía analítica. Sus aportaciones a las matemáticas incluyen el descubrimiento de la paradoja Russell, la defensa del logicismo (la visión acerca de que las matemáticas son, en algún sentido significativo, reducibles a la lógica formal), la introducción a la teoría de los tipos y el perfeccionamiento y la divulgación de la lógica de primer orden o cálculo de predicados de primer orden. Se le considera, junto con Kurt Gödel, como uno de los dos logicistas más destacados del siglo XX.

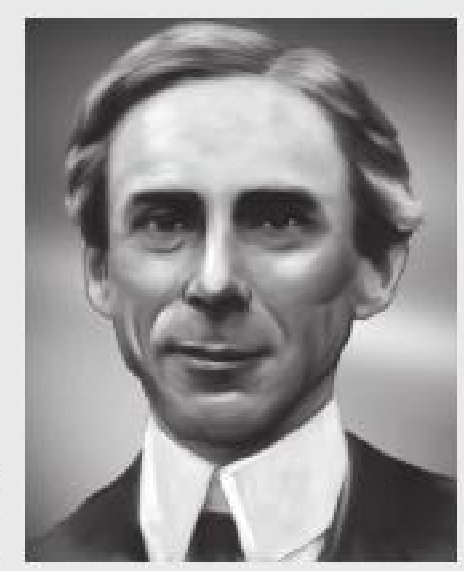

Figura 2.1 Bertrand Arthur William Russell (1872-1970).

2.2 Proposiciones y operadores lógicos

La proposición: características y estructura

Una proposición o enunciado constituye una oración que tiene un valor de verdad, es decir, puede ser verdadera o falsa, pero no ambas. La proposición es uno de los elementos fundamentales en lógica.

Si la oración es una pregunta, una orden, carece de sentido o es muy imprecisa, entonces no puede ser clasificada como verdadera o falsa, y por tanto no puede ser una proposición.

Ejemplo

¿Cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones?

1. La Tierra es plana.
2. $3 + 6 = 8$.
3. La temperatura del núcleo del Sol es de 6 000 °C.
4. $x + y = 24$.
5. ¿Vas a la tienda?
6. Toma tu medicina.
7. La selección mexicana ganará mañana la copa mundial.

Solución

- Las oraciones 1 y 2 son proposiciones, ya que pueden tomar un valor verdadero o falso.
- En estos momentos no es posible determinar la certeza o falsedad de la oración 3; sin embargo, en principio, sí puede determinarse si es verdadera o falsa, por tanto también se considera una proposición.
- La 4 es una oración, pero no una proposición, ya que es verdadera o falsa dependiendo de los valores de x y y en determinado momento.
- La oración 5 es una pregunta, no una proposición.
- La oración 6 es una orden, pero no una proposición.
- La oración 7 es una proposición que puede ser verdadera o falsa, pero debemos esperar hasta mañana para saber su valor de verdad.

Clasificación de las proposiciones

Antes de clasificar las proposiciones, es preciso considerar cómo representarlas para luego hacer referencia a estas en diversas expresiones lógicas.

En matemáticas, las letras $x, y, z, \ldots$ se utilizan para representar variables que pueden ser reemplazadas con números, las cuales pueden ser combinadas con diversos operadores, como: $+, -, \times, \div$.

Por su parte, en lógica las letras $p, q, r, \ldots$ se usan para representar variables proposicionales, esto es, variables que pueden ser reemplazadas por proposiciones simples.

Así, es posible utilizar una proposición haciendo referencia solo a la variable proposicional utilizada.

En lógica se pueden encontrar dos clases de proposiciones: simples o atómicas y compuestas o moleculares.

EJEMPLO

Si se tiene la siguiente proposición: "La Tierra es plana", esta se puede representar eligiendo una variable proposicional, digamos "*p*". De este modo, la proposición simple quedaría representada de la siguiente forma: "*p*: La Tierra es plana".

Proposiciones simples o atómicas

Las proposiciones simples o atómicas son aquellas que están estructuradas por una única oración. Para su representación, a la proposición se le asigna una variable proposicional.

EJEMPLO

p: El oro es un metal precioso.
q: Hoy es martes.
r: Benito Juárez nació en Oaxaca.
s: Rodolfo Neri Vela fue el primer astronauta mexicano.

Supóngase que se quiere negar alguna proposición simple, denotada como "$\sim$"; entonces, si se quiere decir que "Hoy no es martes", se puede escribir "$\sim q$", haciendo referencia a la variable proposicional elegida.

Proposiciones compuestas o moleculares

Las proposiciones compuestas o moleculares son aquellas que están estructuradas por dos o más proposiciones simples unidas por operadores lógicos, tales como $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, entre otros. En el caso de las proposiciones compuestas, a cada proposición simple que la forma se le puede asignar una variable proposicional.

EJEMPLO

a) Pitágoras era griego y geómetra.
b) El sentido de la calle es hacia el norte o hacia el sur.
c) Si salgo tarde, entonces no visitaré a la abuela.
d) Iré al cine si y solo si tú pagas las palomitas.

Al leer cualquiera de las proposiciones compuestas anteriores, es posible observar a simple vista que todas ellas están formadas por dos proposiciones simples.

Al analizar el inciso a), se comprueba que esta proposición compuesta está estructurada por las proposiciones simples:

p: Pitágoras era griego.
q: Pitágoras era geómetra.

Al combinar ambas proposiciones se utiliza el operador lógico "$\wedge$", que se estudiará más adelante. Dicha proposición compuesta se puede representar como: "*p* y *q*", haciendo referencia a las variables proposicionales utilizadas.

Es importante destacar que, en ocasiones, los operadores están presentes de manera implícita dentro de la oración.

EJEMPLO

Sea la siguiente oración

Si estudio, triunfaré en la vida.

En primera instancia, esta parece una proposición simple, pero si se observa con mayor detalle, se nota que tiene dos verbos: estudiar y triunfar, lo que indica que tiene más de una proposición simple; por tanto, se trata de una proposición compuesta. En este caso el operador implícito es ***entonces***, y se puede expresar de la siguiente manera:

Si estudio, entonces triunfaré en la vida.

Esto permite destacar que no siempre se "descubren" a primera vista los operadores en una proposición compuesta.

Traducción del lenguaje natural al simbólico y del lenguaje simbólico al natural

Antes de estudiar cómo traducir del lenguaje natural al simbólico y viceversa, primero se define cada uno de estos lenguajes.

Lenguaje natural

Por lengua natural se entiende a la lengua utilizada normalmente (lengua materna) en una comunidad de individuos para la comunicación entre ellos. Es decir, el lenguaje que hablamos en nuestra vida cotidiana, que en nuestro caso es el español.

Lenguaje simbólico

La lógica cuenta con un sistema de símbolos construido en especial para lograr precisión y operatividad. La lógica se expresa, pues, en un lenguaje artificial. El lenguaje de la lógica es, además, un lenguaje formal constituido por símbolos.

Al simbolizar un lenguaje lo que se persigue es, básicamente, sencillez, claridad y exactitud. Pues, en este caso, es más sencillo y resulta más claro y exacto representar las cosas mediante símbolos.

Por este motivo, la simbolización del lenguaje lógico permite examinar con mayor facilidad las formas del pensamiento y sus leyes.

Traducir

Trabajar con proposiciones requiere la aptitud de poder traducirlas del lenguaje natural al simbólico (también denominada traducción simbólica) y viceversa.

En el apartado anterior vimos cómo representar proposiciones mediante variables proposicionales, las cuales pueden ser reemplazadas por proposiciones simples, lo cual constituye una traducción simbólica de dichas proposiciones.

Para traducir proposiciones compuestas, primero se eligen las variables proposicionales necesarias con base en las proposiciones simples involucradas, además de los respectivos operadores lógicos que las relacionan.

En muchas ocasiones, elegimos las variables proposicionales de tal manera que hagan alusión al contenido mismo de la proposición.

NOTA

Aunque en la próxima sección se estudiarán los operadores lógicos con más detalle, aquí se pueden utilizar algunos de los ya vistos de una manera informal.

EJEMPLO

Si se tiene la proposición simple: "Miguel Hidalgo es el padre de la Patria", es posible escoger las variables proposicionales *m* para hacer alusión a "Miguel Hidalgo" y *p* para "padre de la Patria".

También es posible hacer lo mismo para las proposiciones compuestas.

EJEMPLO

Hacer la traducción lógica de la proposición compuesta:

Miss Universo es atractiva e inteligente.

En primera instancia, se puede observar que la proposición en cuestión está constituida por las proposiciones simples:

a: Miss Universo es atractiva.

i: Miss Universo es inteligente.

por lo que $a \wedge i$ es su traducción lógica.

Pero, no solo se requiere traducir del lenguaje natural al simbólico; en muchas ocasiones también se requiere hacer una traducción del lenguaje simbólico al natural.

EJEMPLO

Sean las proposiciones simples:

g: Guadalajara gana el campeonato.

a: América gana el campeonato.

Y se desea traducir las siguientes proposiciones al lenguaje natural:

1. $g \wedge \sim a$
2. $\sim g \wedge a$
3. $\sim g$
4. $\sim a$

Solución

1. Guadalajara gana el campeonato y América no gana el campeonato.
2. Guadalajara no gana el campeonato y América gana el campeonato.
3. Guadalajara no gana el campeonato.
4. América no gana el campeonato.

Cuando se vean más a fondo los operadores lógicos, entonces se podrán traducir proposiciones compuestas constituidas por más de dos proposiciones simples.

Operadores lógicos

Los operadores lógicos son aquellos símbolos que permiten decidir qué valor de verdad tiene una proposición.

El valor de verdad de una proposición simple puede ser verdadero o falso, y los únicos operadores lógicos que se pueden utilizar en estas proposiciones son la negación y la doble negación.

El valor de verdad de una proposición compuesta es verdadero o falso y depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la estructuran, las cuales están combinadas por operadores lógicos.

Ahora, se definen y analizan los operadores lógicos, incluyendo su tabla de verdad; aunque algunos de estos ya se mencionaron en el apartado anterior.

Negación ($\sim$)

La negación de cualquier proposición p será falsa cuando se niegue una proposición verdadera y será verdadera cuando se niegue una proposición falsa.

Algunas formas de la negación son: no, nunca, ni, jamás, es falso, no es cierto, no ocurre, de ninguna forma, por nada de, en lo absoluto, entre otras. La tabla de verdad de la negación se muestra en la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Tabla de verdad de la negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

EJEMPLO

p: El acusado dice la verdad.

$\sim p$: El acusado no dice la verdad.

En este caso, $\sim p$ también se puede traducir como: "no es cierto que el acusado dice la verdad" o "es falso que el acusado dice la verdad".

Doble negación

Si la negación de cualquier proposición p verdadera es falsa, entonces cuando se vuelve a negar será nuevamente verdadera; en caso contrario, si la negación de una proposición falsa es verdadera, al volverse a negar esta será falsa de nuevo.

La tabla de verdad de la doble negación se representa en la tabla 2.2, donde se observa que $\sim(\sim p)$ y p tienen los mismos valores de verdad. Entonces, la doble negación de una proposición es igual a la proposición original.

Tabla 2.2 Tabla de verdad de la doble negación

p	$\sim(\sim p)$
V	F
F	V

Algunas formas de la doble negación son: no es cierto que no, no ocurre que no, no es falso que, no es cierto que no ocurre que, no es cierto que jamás, etcétera.

EJEMPLO

p: El acusado dice la verdad.

$\sim p$: El acusado no dice la verdad.

$\sim(\sim p)$: No es cierto que el acusado no dice la verdad.

Por tanto: el acusado dice la verdad.

Conjunción ($\wedge$)

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta $p \wedge q$, solo será verdadera cuando las dos proposiciones lo sean.

Algunas formas de la conjunción son: y, además de, también, así como, pero, e, entre muchas otras.

Además, la conjunción es conmutativa, es decir:

$$p \wedge q = q \wedge p$$

La tabla de verdad de la conjunción se muestra en la tabla 2.3.

Tabla 2.3 Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO

p: El acusado es pobre.
q: El acusado es honesto.
$p \wedge q$: El acusado es pobre, pero honesto.
r: El helio es más liviano que el aire.
s: El helio es explosivo.
$r \wedge s$: El helio es más liviano que el aire y es explosivo.

Disyunción inclusiva ($\vee$)

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta $p \vee q$ solo será falsa cuando las dos proposiciones lo sean.

Algunas formas de la disyunción inclusiva son: o, o bien, u, entre otras.

La disyunción también es conmutativa, es decir:

$$p \vee q = q \vee p$$

La tabla de verdad de la disyunción inclusiva se muestra en la tabla 2.4.

Este operador se denomina inclusivo, precisamente porque es verdadero, aun cuando se cumplen las dos disyuntivas.

Tabla 2.4 Tabla de verdad de la disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO

r: Lloverá en la tarde.
s: Saldrá el Sol.
$r \vee s$: Lloverá en la tarde o saldrá el Sol.

Disyunción exclusiva ($\oplus$)

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta $p \oplus q$ solo será falsa cuando las dos proposiciones tuvieren el mismo valor de verdad.

Se denomina disyunción exclusiva porque se tiene que elegir una de cualquiera de las dos disyuntivas, pero no ambas.

Algunas formas de la disyunción exclusiva son: o, o bien, u, o… o, entre otras.

La disyunción exclusiva es conmutativa, es decir:

$$p \oplus q = q \oplus p$$

La tabla de verdad de la disyunción exclusiva se muestra en la tabla 2.5.

Tabla 2.5 Tabla de verdad de la disyunción inclusiva

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO

t: Apruebas el ciclo escolar.

u: Repruebas el ciclo escolar.

$t \oplus u$: Apruebas o repruebas el ciclo escolar.

r: Estoy en Guadalajara.

s: Estoy en Monterrey.

$r \oplus s$: Estoy o en Guadalajara o en Monterrey.

Ya que, como es evidente, no es posible que una persona se encuentre en ambos lugares al mismo tiempo, por eso solo debe estar en un solo lugar.

2.3 Proposiciones condicionales

Condicional o implicación ($\Rightarrow$)

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta $p \Rightarrow q$ solo será falsa cuando p, llamado antecedente o hipótesis, sea verdadero y q, llamado consecuente o conclusión, sea falso.

Algunas formas de la condicional o implicación son: si ... entonces, se sigue, por tanto, se infiere, de ahí que, se deduce, implica, entre otras.

La condicional no es conmutativa, es decir:

$$p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p$$

La tabla de verdad de la condicional se muestra en la tabla 2.6.

Este operador tiene diversos sentidos, pero uno de los más utilizados es cuando no es posible que p sea verdadera y que, al mismo tiempo, q sea falsa. En este caso, la única posibilidad es que la condicional sea falsa.

Tabla 2.6 Tabla de verdad de la condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO

t: Llueve.

u: Me mojaré.

$t \Rightarrow u$: Si llueve, entonces me mojaré.

p: Estudio.

q: Aprobaré el ciclo escolar.

$p \Rightarrow q$: Si estudio, entonces aprobaré el ciclo escolar.

La condicional también se puede encontrar en alguna de las formas siguientes:

- Si p entonces q.
- Si p, q.
- p entonces q.
- q si p.
- p es condición suficiente para q.
- q es condición necesaria para p.
- p implica a q.

En todos los casos anteriores, p es el antecedente y q el consecuente; en otras palabras, todos se representan $p \Rightarrow q$.

Bicondicional o equivalencia ($\Leftrightarrow$)

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta $p \Leftrightarrow q$, solo será verdadera cuando ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad.

Algunas formas de la bicondicional son: si y solo si, entonces y solo entonces, es idéntico, equivale a, es equivalente a, entre otras más.

La bicondicional es conmutativa, es decir:

$$p \Leftrightarrow q = q \Leftrightarrow p$$

La tabla de verdad de la bicondicional se muestra en la tabla 2.7.

Además, si $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ entonces $p \Leftrightarrow q$.

Tabla 2.7 Tabla de verdad de la bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo

p: Si un polígono tiene cuatro lados, entonces es un cuadrilátero.

q: Si un polígono es un cuadrilátero, entonces tiene cuatro lados.

$p \Leftrightarrow q$: Un polígono es cuadrilátero si y solo si tiene cuatro lados.

2.4 Tablas de verdad

Aunque ya se han utilizado las tablas de verdad para obtener los valores de verdad de proposiciones simples y compuestas, aún no las hemos definido formalmente.

Una tabla de verdad, o tabla de valores de verdad, es una tabla que muestra el valor de verdad de una proposición compuesta, así como de algunos casos de proposiciones simples, cuando estas utilizan los operadores lógicos de negación y doble negación, dependiendo de los operadores lógicos usados y de los valores de verdad de las proposiciones simples involucradas.

La tabla de verdad de todos los operadores lógicos vistos antes se muestra en la tabla 2.8.

Las tablas de verdad fueron desarrolladas por el filósofo y matemático estadounidense Charles Sanders Peirce el año 1880, pero el formato más popular es el que introdujo el matemático y filósofo británico Ludwig Wittgenstein (1889-1951) en su obra *Tractatus logico-philosophicus*, publicado en 1921. Según Wittgenstein, el método de tablas de verdad sirve para determinar las condiciones de verdad de un enunciado; es decir su significado, en función de las condiciones de verdad de sus elementos atómicos. En otras palabras, la tabla de verdad nos dice en qué situaciones el enunciado es verdadero y en cuáles es falso.

Figura 2.2 Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951).

Tabla 2.8 Tabla de verdad de los operadores lógicos										
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim(\sim p)$	$\sim(\sim q)$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V

Construcción de una tabla de verdad

La importancia de las tablas de verdad radica en que gran parte del razonamiento lógico y de las relaciones entre proposiciones se pueden ilustrar a través de estas.

Para construir una tabla de verdad se efectúan los siguientes pasos:

1. Asignar variables proposicionales a cada proposición simple.
2. Obtener la traducción lógica de la proposición compuesta.
3. Obtener la cantidad de todas las combinaciones de valores de verdad de las premisas. La cantidad de valores de verdad está dado por la fórmula 2^n, donde n es la cantidad de variables proposicionales de las premisas.
   Así:

Tabla 2.9	
Núm. de variables proposicionales	Combinaciones
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
⋮	⋮
n	2^n

4. Asignar a cada variable proposicional los valores de verdad correspondientes.
5. Resolver las operaciones lógicas.

Ejemplo

Construir la tabla de verdad de la proposición compuesta:

Mi tío no vino a dormir y no fue a trabajar.

Solución

1. Asignar variables proposicionales.
   Dicha proposición está compuesta por las proposiciones simples:
   p: Mi tío no vino a dormir.
   q: Mi tío no fue a trabajar.

Continúa

2. Realizar traducción lógica.

   Como se observa, las proposiciones p y q están negadas, por lo que su traducción lógica es:

$$\sim p \wedge \sim q$$

3. Obtener la cantidad de combinaciones de valores de verdad.

   Como se tienen dos variables proposicionales, la cantidad de combinaciones de valores de verdad será:

$$2^2 = 4$$

4. Asignar valores de verdad a variables proposicionales.

   En este caso, también se incluyen los valores de verdad de las proposiciones negadas.

Tabla 2.10

p	q	$\sim p$	$\sim q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

5. Resolver las operaciones lógicas.

Tabla 2.11

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2.5 Los argumentos: premisas y conclusiones

Los razonamientos que estudia la lógica se llaman argumentos y su tarea consiste en descubrir qué es lo que hace que un argumento sea válido y constituya una inferencia correcta.

Por su parte, la inferencia es una actividad con la cual se afirma una proposición sobre otra y otras proposiciones se aceptan como punto de partida del proceso.

Un argumento es un conjunto de una o más proposiciones, la última de las cuales se denomina conclusión, mientras que las anteriores se llaman premisas.

De manera intuitiva, las premisas son la evidencia o las razones que deben convencernos de la veracidad de la conclusión, y el argumento es la concatenación de las primeras con la última.

Es habitual representar los argumentos haciendo un listado de las premisas y la conclusión, separando la última mediante una línea, como se observa a continuación:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Proposición 1}\\ \text{Proposición 2}\\ \vdots\\ \hline \text{Conclusión}\end{array}\right\}\ \text{Premisas}$$