7
UNIDAD

# Lógica simbólica



## Propósitos

- Distinguir entre diferentes tipos de proposiciones.
- Identificar la función de las conectivas lógicas.
- Operar el lenguaje de la lógica proposicional.
- Aplicar las tablas de verdad para comprobar la verdad o falsedad de proposiciones.

Figura 7.1

**Gottfried Wilhelm Leibniz.** Filósofo alemán (1646-1716).

## Introducción

La lógica simbólica que vamos a estudiar en esta unidad también se conoce como lógica matemática. A veces, por oposición a la lógica tradicional o aristotélica, también se le llama lógica moderna, ya que sus primeros intentos inician a mediados del siglo XIX.

### *Representantes*

El personaje más significativo de la lógica matemática es G. W. Leibniz, ya que fue el primero en proponer un lenguaje simbólico y universal. Además, Leibniz pretendía manejar la lógica como un cálculo y para eso intentó simbolizar los argumentos algebraicamente y representarlos geométricamente por medio de diagramas.

Los precursores más destacados de esta renovación de la lógica fueron George Boole y Augusto de Morgan. En 1847, el primero publicó su obra *El análisis matemático de la lógica* y el segundo, *Lógica formal*. En ambas obras se mostraban intentos leibnizianos de manejar la lógica como cálculo.

El representante principal de este movimiento fue Gottlob Frege, a quien todos consideraron como el fundador de la lógica matemática. Su obra principal, *La conceptografía*, se publicó en 1879. La obra más amplia de lógica simbólica: *Principia mathematica*, fue escrita por Bertrand Russell y Alfred Whitehead. Dicha obra fue publicada en 1910-1913.

### *Características*

Según I. M. Bochenski, los rasgos que caracterizan a esta forma de la lógica son los siguientes:

1. La lógica se maneja como un cálculo, es decir, las reglas de las operaciones se refieren únicamente a la forma de los signos.
2. En esta lógica, primero se construye un sistema puramente formal y después se interpreta en el lenguaje ordinario.
3. Las leyes se formulan en lenguaje artificial. Dicho lenguaje consiste en símbolos muy similares a los matemáticos.

### *Cálculo lógico*

La lógica matemática, de acuerdo con las características mencionadas, debe entenderse como un cálculo, es decir, como una serie de operaciones que se realizan con determinado grupo de signos.

El cálculo lógico es un sistema que consta de:

1. Un grupo de signos lógicos.
2. Un grupo de reglas para operar con dichos signos.

En consecuencia, en esta unidad estudiaremos básicamente:

1. Los elementos del cálculo, es decir, los símbolos con que vamos a operar.
2. Las reglas que nos indicarán las operaciones que podemos hacer con dichos símbolos.

## Objeto de estudio

La lógica simbólica, al igual que la lógica general, tiene como objeto de estudio el razonamiento, con el fin de encontrar métodos para distinguir los razonamientos válidos de los no válidos.

Las partes principales de la lógica matemática son la **lógica proposicional** y la **lógica cuantificacional**. En la primera se estudian los razonamientos, considerando a cada proposición como unidad simple. En la segunda parte se determina la estructura y los elementos de cada proposición.

# 7.1 Símbolos de la lógica proposicional

Una de las obras de Shakespeare, *La tragedia de Ricardo III*, comienza con el siguiente pasaje (en la persona de Gloster):



> Ya el invierno de nuestra desventura se ha transformado en glorioso estío por este sol de York y todas las nubes que pesaban sobre nuestra casa yacen sepultas todas en las hondas entrañas del Océano.

Este pasaje se puede analizar desde distintos puntos de vista (el literario, el informativo, el expresivo, etc.); pero cuando se analiza con la lógica proposicional, en él y en cualquier otro grupo de expresiones lingüísticas, solamente interesa descubrir dos tipos de entidades: **enunciados** y **conectivas**.

> Al hablar de **conjunciones** nos referimos a cualquier partícula o expresión que sirva de enlace entre dos proposiciones (o enunciados).

## Los enunciados y los conectivos

Las proposiciones se definen de una de estas dos maneras:

> **1.** Son expresiones que contienen afirmaciones (o negaciones).
>
> **2.** Son expresiones cuyo contenido se puede calificar como verdadero o falso.



En el fragmento que se cita en el apartado **Símbolos de la lógica proposicional** hay dos enunciados, los cuales, en términos sencillos, son:

**A.** Nuestra desventura ya se transformó en dicha.

**B.** Nuestros sufrimientos ya terminaron.

> Aun cuando son las proposiciones las que nos interesan, sin embargo, preferimos emplear la palabra **enunciados** porque son éstos el medio a través del cual aquéllas se hacen presentes.

**Conectivos.** Con este nombre se designa al nexo o enlace entre dos enunciados. En el pasaje anterior, hay un conectivo, a saber, “y”, el cual sirve de enlace entre los enunciados **A** y **B**.

Los conectivos lógicos principales son:

**1.** Y (conjunción).

**2.** O (disyunción inclusiva).

**3.** O… o (disyunción exclusiva).

**4.** Si… entonces (condicional).

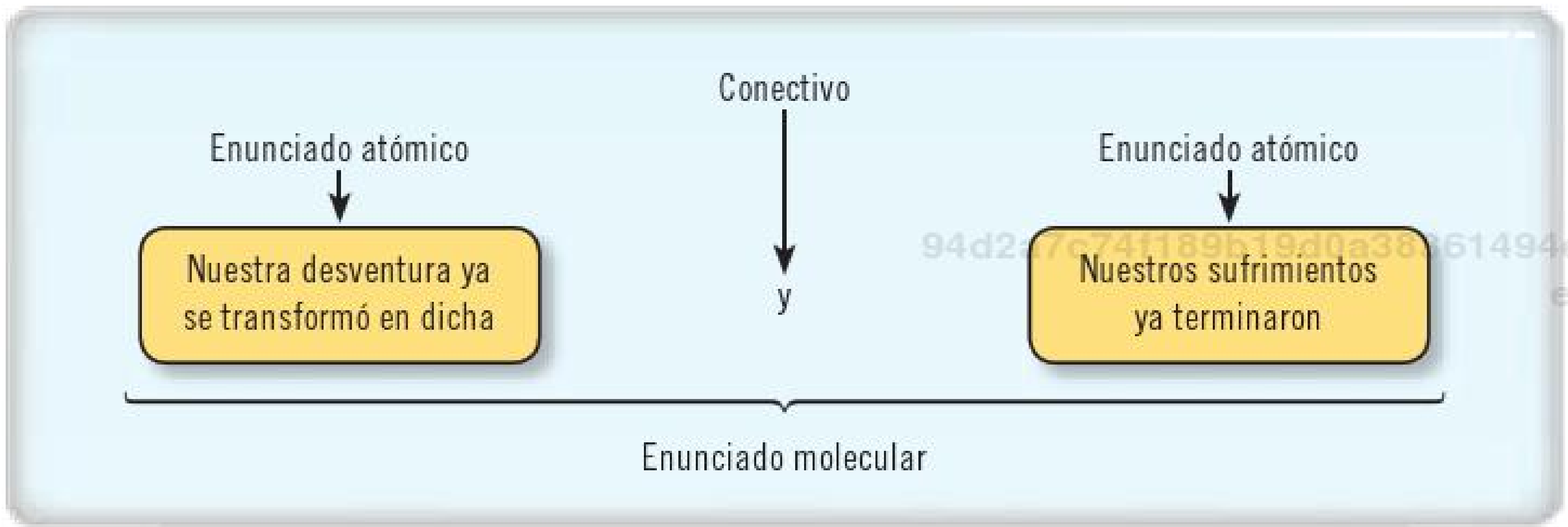
**5.** Si y sólo si (bicondicional).

**6.** No (negación).

> En lugar de conectivos, también se emplean estos nombres: conectivas, términos de enlace, nexos, partículas lógicas, etcétera.

**Enunciados atómicos y moleculares.** Se llaman atómicos (simples) los enunciados que no tienen conectivos. Si en un enunciado intervienen uno o más conectivos, entonces dicho enunciado se llama molecular (o compuesto).

Los ejemplos anteriores, A y B, son enunciados atómicos, pero si los enlazamos con un conectivo, resulta un enunciado molecular. Ejemplo:






## *Símbolos*

Hay símbolos tanto para enunciados o proposiciones como para conectivos.

1. Como símbolos de enunciados simples se emplean las letras minúsculas del alfabeto, sobre todo las consonantes; de manera que, al ver letras como éstas:

   p, q, v, s

   de inmediato sabemos que cada una de ellas está representando a un enunciado, que puede ser cualquiera. A estas letras también se les llama variables enunciativas o letras enunciativas, porque sus valores son enunciados o proposiciones. Se llaman variables enunciativas porque pueden ser sustitutas por cualquier enunciado.



2. La simbología de los conectivos es la siguiente:

| Conectivos | Símbolos |
|---|---|
| y | & |
| o | $\vee$ |
| o - o | $\veebar$ |
| Si — entonces | $\rightarrow$ |
| Si y sólo si | $\leftrightarrow$ |
| No, no es verdad que | $\neg$ |

Para simbolizar determinadas proposiciones (en concreto) utilizaremos letras mayúsculas.

Además de los símbolos anteriores, también se emplean otros signos que se llaman **signos de puntuación** o **signos de agrupamiento**, y son los siguientes:

| | | |
|---|---|---|
| ( ) | [ ] | { } |
| Paréntesis | corchetes | llaves |

El paréntesis se emplea para separar un enunciado de otro, o bien, para precisar el alcance de un conectivo; por ejemplo, en el caso de esta expresión:

$$p \rightarrow q \vee r$$

Su sentido puede ser éste "$(p \rightarrow q) \vee r$", o este otro "$p \rightarrow (q \vee r)$", lo cual se hace claro recurriendo a un paréntesis.

El corchete (o paréntesis rectangular) se emplea para separar miembros de una expresión en los cuales ya hay paréntesis.

La llave se emplea para separar miembros de una expresión, en los cuales ya hay paréntesis y corchetes.

A los símbolos de los conectivos también se les llama **constantes lógicas**, porque representan el mismo valor.

Al hacer la traducción del lenguaje natural al lenguaje de la lógica proposicional, lo primero que se debe hacer es precisar los enunciados atómicos y sendas letras que los representen.

### Ejemplificación

Veamos ahora algunos ejemplos de lecturas de todos los símbolos ya mencionados.

Sea (hablando de una colmena):

1. H: Las celdas de los panales son habitaciones.
2. A: Las celdas de los panales son almacenes.
3. R: Las abejas son reinas.
4. O: Las abejas son obreras.
5. F: Las abejas son fabricantes de miel.

Empleando los símbolos de los conectivos, los signos de puntuación y los cinco símbolos (H, A, R, O, F) de enunciados atómicos, podemos hacer la siguiente simbolización:

| El enunciado... | Es una... | Se simboliza... | La lectura de la expresión simbólica es... |
|---|---|---|---|
| **1.** Las celdas de los panales son habitaciones o son almacenes. | Disyunción inclusiva | $H \vee A$ | hache o a |
| **2.** Las celdas de los panales, son habitaciones y son almacenes. | Conjunción | $H \,\&\, A$ | hache y a |
| **3.** Las abejas no son reinas. | Negación | $\neg R$ | no erre |
| **4.** Si las abejas son reinas entonces no son obreras. | Condicional | $R \rightarrow \neg O$ | si erre, entonces no O |
| **5.** Las celdas de los paneles o son habitaciones o son almacenes. | Disyunción exclusiva | $H \veebar A$ | o hache o a |
| **6.** Las abejas son reinas, sí y sólo si no son obreras. | Bicondicional | $R \leftrightarrow \neg O$ | erre si y sólo si no O |
| **7.** Si las abejas no son obreras, entonces son reinas o no son fabricantes de miel. | Condicional | $\neg O \rightarrow (R \vee \neg F)$ | si no O, entonces erre o no efe |
| **8.** Las celdas de los panales son habitaciones o son almacenes, sí y sólo si, si las abejas son fabricantes de miel, entonces son obreras. | Bicondicional | $[H \vee A] \leftrightarrow [F \rightarrow O]$ | hache o a, si y sólo si, si efe entoces O |
| **9.** Si las celdas de los panales son habitaciones o son almacenes, entonces las abejas son reinas o son fabricantes de miel. | Condicional | $[H \vee A] \rightarrow [R \vee F]$ | si hache o a, entonces erre o efe |

## 7.2 Tablas de verdad

Las tablas de verdad tienen mucha importancia dentro de la lógica proposicional porque son instrumentos para demostrar la validez de los argumentos que dicha lógica maneja.

> El conectivo que está fuera del paréntesis es el que indica si el enunciado es una conjunción, disyunción, etc. Si fuera del paréntesis están la negación y otro conectivo, predomina este último.

> Las tablas de verdad son una exposición gráfica de todos los valores de verdad que puede tener un enunciado extensional.

Para entender esta definición es conveniente recordar lo que son los valores de verdad y tener un concepto preciso de los enunciados extensionales.

### *Valores de verdad*



Los valores de verdad son las dos propiedades que puede tener cualquier enunciado, considerando que dicho enunciado o es verdadero o es falso; pero no ambas cosas.



> Aquí se hablará siempre de dos valores de verdad, porque creemos, o es verdadero o es falso; pero algunos lógicos opinan que puede haber otros valores de verdad. La lógica defendida por tales pensadores se llama **lógica polivalente**.

Ejemplos:

**C.** N: Hay satélites naturales.

**D.** A: Hay satélites artificiales.

Cada uno de los enunciados o es verdadero o es falso. Así pues, los valores de verdad son dos: el valor verdad y el valor falsedad, a los cuales representaremos respectivamente con las letras V y F.

### *Enunciados extensionales*

Cualquier enunciado atómico o es verdadero o es falso, y el tener uno u otro valor depende de su propio contenido; pero tratándose de un enunciado molecular, la situación es diferente y pueden presentarse dos casos:

> A los enunciados extensionales también se les llama **funciones de verdad**, porque sus valores veritativos son una función de la verdad de los componentes.



**Caso 1.** Hay algunos enunciados moleculares cuya verdad o falsedad depende de los valores de verdad de sus enunciados simples como del conectivo que enlaza a dichos enunciados simples. De tales enunciados moleculares se dice que son extensionales. Por ejemplo, el valor veritativo de "N & A" depende del valor veritativo que se asigne al enunciado atómico N y al enunciado atómico A.

**Caso 2.** Hay otros enunciados compuestos en los cuales su valor veritativo no depende de la verdad o falsedad de los componentes. A tales enunciados no se les llama **extensionales**.

Ejemplo:

**E.** Me duele la cabeza porque estuve estudiando durante cuatro horas.

Es posible que el enunciado simple anterior sea verdadero o no lo sea.

### *Definición de conectivos*

Dado que en los enunciados extensionales el valor veritarivo depende no solamente del valor veritativo de los componentes, sino también del conectivo que enlaza a los enunciados simples, vamos a definir a cada uno de los conectivos.

La definición de cada conectivo se encuentra en su propia tabla de verdad, en la cual se detallan gráficamente los distintos valores que va tomando el enunciado molecular, según las diferentes maneras en que se combinan los valores veritativos de los enunciados simples.

**Conjunción.** El símbolo de la conjunción es "&", y su definición es la tabla de verdad siguiente.

| N | A | N & A |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Cada enunciado simple, por separado, sólo tiene dos posibilidades, ser V o F; pero cuando se combinan los valores de dos enunciados simples resultan cuatro posibilidades:

1. VV
2. VF
3. FV
4. FF

De esta definición se desprende que:

La conjunción es verdadera únicamente cuando sus dos enunciados componentes son verdaderos. En los demás casos, la conjunción es falsa.



Si con los enunciados **C** y **D** hacemos este otro:

**F.** N & A

Entonces, este enunciado será verdadero únicamente cuando N y A sean ambos, verdaderos.

**Disyunción inclusiva.** El símbolo de la disyunción inclusiva es "∨" y su definición es la tabla de verdad siguiente.

| N | A | N ∨ A |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Observando dicha tabla vemos que la disyunción inclusiva es verdadera en todos los casos, menos cuando los dos enunciados componentes sean falsos.



En consecuencia, el enunciado:

**G.** N ∨ A

Solamente será falso cuando tanto N como A sean falsos.

**Disyunción exclusiva.** El símbolo de la disyunción exclusiva es "∨" y su definición es la tabla de verdad siguiente.

| N | A | N ∨ A |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

La disyunción inclusiva se satisface cuando se cumplen las dos alternativas, o por lo menos una.
La disyunción exclusiva se satisface únicamente cuando una de las dos alternativas se cumple y la otra no.

De acuerdo con dicha tabla podemos decir que la disyunción exclusiva es verdadera cuando sus dos enunciados componentes tienen valores veritativos diferentes, es decir, uno verdadero y otro falso.

**H.** N ∨ A

Será verdadero cuando N y A no sean ambos verdaderos ni ambos falsos.

**Condicional.** El símbolo del condicional es "→" y su definición es la tabla de verdad siguiente. Un condicional consta de dos enunciados: el antecedente y el consecuente. En la tabla de verdad siguiente, N es el antecedente y A es el consecuente.

| N | A | N → A |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

Observando dicha tabla vemos que el condicional es verdadero en todos los casos menos cuando siendo el antecedente verdadero, el consecuente es falso.

Por consiguiente, el enunciado:



**I.** $N \rightarrow A$

Únicamente será falso en el caso de que, siendo N verdadero, A sea falso.

**Bicondicional.** El símbolo del bicondicional es "↔" y su definición es la tabla de verdad siguiente.

| N | A | N ↔ A |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

De dicha tabla se desprende que el bicondicional es verdadero cuando los dos enunciados componentes son verdaderos o falsos.

Por consiguiente, el enunciado:

**J.** $N \leftrightarrow A$



Es verdadero cuando N y A simultáneamente sean verdaderos, o simultáneamente sean falsos.

**Negación.** La negación afecta a un solo enunciado (simple o compuesto). El símbolo de la negación es "¬" y su definición es la tabla de verdad siguiente.

El efecto de la negación es invertir el valor veritativo del enunciado al cual afecta.

| N | ¬N |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

De acuerdo con dicha tabla la negación es verdadera cuando el enunciado que afecta es falso y viceversa.

Por consiguiente, el enunciado:

**K.** $\neg N$

Es verdadero si N es falso y será falso si N es verdadero.

Conociendo la definición de los conectivos, podemos construir la tabla de verdad de cualquier fórmula de enunciado. Para explicar este proceso tomaremos como base la siguiente fórmula:



$$(r \rightarrow s) \vee (s \rightarrow t)$$

**Paso 1**

Escribamos la fórmula:

$$(r \rightarrow s) \vee (s \rightarrow t)$$

a la izquierda ponemos las variables (letras) de la fórmula. En este caso son tres:

$$r, s, t$$

Así tenemos ya el encabezado:

| r | s | t | $(r \rightarrow s) \vee (s \rightarrow t)$ |
|---|---|---|---|

> En una tabla de verdad hay hileras horizontales e hileras verticales. A las primeras las llamaremos **renglones** y a las segundas **columnas**.

> En una fórmula las letras son minúsculas porque son variables, es decir, pueden representar a cualquier enunciado.

**Paso 2**



Para conocer el número de renglones, aplicamos la fórmula $2^n$, siendo $n$ el número de variables. En este caso tenemos tres variables: r, s, t; por lo tanto, $2^n = 2^3$, o sea, $2 \times 2 \times 2 = 8$. Agregamos ocho renglones, inmediatamente abajo del encabezado.

| | r | s | t | $(r \rightarrow s)$ | $\vee$ | $(s \rightarrow t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |

**Paso 3**

Debajo de cada variable anotamos una columna de valores.

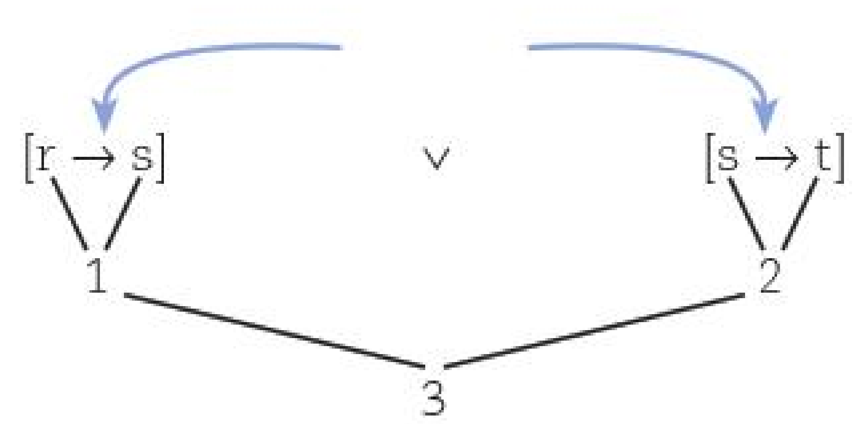


1. Se empieza por la columna que corresponde a la variable que se encuentra más a la derecha, escribimos una V y una F, alternadas, hasta completar el número de renglones (en este caso ocho).
2. La siguiente columna a la izquierda se forma escribiendo alternadamente dos veces V y dos veces F, etc., hasta llenar los reglones.
3. La columna que sigue a la izquierda se forma escribiendo alternadamente cuatro veces V, cuatro veces F, etc., hasta terminar los renglones.

| | r | s | t |
|---|---|---|---|
| 1 | V | V | V |
| 2 | V | V | F |
| 3 | V | F | V |
| 4 | V | F | F |
| 5 | F | V | V |
| 6 | F | V | F |
| 7 | F | F | V |
| 8 | F | F | F |

**Paso 4**

Para calcular los valores de los conectivos, se aplica la regla respectiva. Se empieza por los conectivos más interiores. En este caso empezaremos por los conectivos 1 y 2.



El último conectivo en ser calculado es el que está fuera de todo paréntesis. Los valores de éste son propiamente los de la fórmula molecular. Conviene numerar los conectivos para indicar el orden en que deben ser calculados.

**Paso 5**

Hecho lo anterior, la tabla de verdad está construida y muy conveniente será sombrear la columna correspondiente al conectivo principal que, en este caso es el 3. Los valores de dicha columna son propiamente los valores de la fórmula en cuestión, en este caso es:

| | r | s | t | $(r \rightarrow s)$ | $\vee$ | $(s \rightarrow t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | V | V | V | V | V | V |
| 2 | V | V | F | V | V | F |
| 3 | V | F | V | F | V | V |
| 4 | V | F | F | F | V | V |
| 5 | F | V | V | V | V | V |
| 6 | F | V | F | V | V | F |
| 7 | F | F | V | V | V | V |
| 8 | F | F | F | V | V | V |



## 7.3 Métodos de demostración

Aun cuando **argumento** y **razonamiento** no significan exactamente lo mismo, sin embargo, en esta unidad utilizaremos esas dos palabras con el mismo sentido de la segunda.



La finalidad principal de la lógica es proporcionar elementos para comprobar la validez o no validez de los razonamientos.

En esta parte de lógica matemática, en la cual no interesa la forma interna de los enunciados, los métodos que más se emplean para demostrar la validez de los argumentos son dos:

1. El método del condicional asociado.
2. El método de la demostración formal o por la aplicación de reglas de inferencias.

En este apartado estudiaremos el primer método.

### *Tautologías*

El método del condicional se basa en el hecho de que un razonamiento válido puede convertirse en un condicional tautológico. Conviene pues precisar lo que son las tautologías.

Se llaman **tautologías** los enunciados en cuyas tablas de verdad, los valores veritativos correspondientes al conectivo principal son todos V.

La negación de una tautología se llama **contradicción**, por consiguiente.

**Contingencias.** Son enunciados cuyas tablas de verdad dan como resultado por lo menos una V y una F.

Así pues, para saber si un enunciado es tautología, contradicción o contingencia, es necesario construir la tabla de verdad de su fórmula correspondiente.

He aquí tres formas de enunciados con sus correspondientes tablas.

1. $r \rightarrow (r \,\&\, s)$

| r | s | | $r \rightarrow$ | $(r \,\&\, s)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | | V | V |
| V | F | | F | F |
| F | V | | V | F |
| F | F | | V | F |

2. $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$

| r | s | $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |



3. $\neg(s \vee \neg s)$

| s | $\neg$ | $(s \vee$ | $\neg s)$ |
|---|---|---|---|
| V | F | V | F |
| V | F | V | V |

Observando dichas tablas de verdad se observa lo siguiente:

1. La tabla 1 es una contingencia porque entre sus valores resultantes hay V y F.
2. La tabla 2 es una tautología porque todos sus valores resultantes son V.
3. La tabla 3 es una contradicción porque todos sus valores resultantes son F.



## Condicionales tautológicos

Cuando un enunciado tiene la forma de un condicional, entonces al hacer su tabla de verdad es posible que se presenten dos situaciones: una en que todos los valores resultantes sean V, en cuyo caso dicho condicional es tautológico, y otra en que haya V y F entre los valores resultantes.

Se llama **condicional tautológico** a aquel condicional en cuya tabla de verdad todos los valores resultantes son V.

Al condicional tautológico también se le llama **implicación**. Al bicondicional se le llama **equivalencia**.

## Condicional asociado

De lo visto en la unidad 4, a propósito del razonamiento, conviene recordar lo siguiente:

1. Todo razonamiento se puede presentar como un condicional, cuyo antecedente está formado por la conjunción de las premisas, y cuyo consecuente es la conclusión.

2. La forma de un razonamiento es válida cuando no tiene ningún ejemplo con premisas verdaderas y conclusión falsa.

De lo anterior, podemos inferir dos conclusiones:

a) De (1) se desprende que todo razonamiento va asociado con un condicional.

b) De (2) se desprende que todo razonamiento es válido cuando su condicional asociado es tautológico. Si el condicional asociado es una contingencia o una contradicción, entonces el razonamiento correspondiente no es válido.

### Aplicación

El procedimiento para demostrar la validez de un razonamiento es el siguiente:

1. Mediante la técnica de la simbolización se halla la forma del razonamiento.
2. Se construye un condicional que tenga como antecedente la conjunción de las premisas, y como consecuente la conclusión.
3. Se hace la tabla de verdad del condicional. Si éste resulta tautológico, el razonamiento es válido; en caso contrario, será inválido.



Como ejemplo, haremos la demostración del siguiente razonamiento:

1. Si nos sacamos la lotería en esta noche de Navidad, entonces comeremos pavo.
2. No comimos pavo.
3. Luego, no nos sacamos la lotería.

**Paso 1**

Para simbolizar utilizaremos:

1. L: Nos sacamos la lotería en esta noche de Navidad.
2. P: Comeremos pavo.

La forma de razonamiento es:



1. $L \rightarrow P$
2. $\neg P$
3. $\neg L$

**Paso 2**

El condicional asociado de este razonamiento es:

$$[(L \rightarrow P) \;\&\; \neg P] \rightarrow \neg L$$

**Paso 3**

La tabla de verdad correspondiente es:

| L | P | [(L → P) | & | ¬P] | → | ¬L |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | V | F |
| V | F | F | F | V | V | F |
| F | V | V | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V |