



MODULO

MATEMÁTICAS BÁSICAS

**ARACELLY MAHECHA
JORGE ELIECER RONDON DURAN**

**UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS
BOGOTÁ 2006**

COMITÉ DIRECTIVO

Jaime Alberto Leal Afanador
Rector

Gloria Herrera
Vicerrectora Académica y de Investigación

Roberto Salazar Ramos
Vicerrector de Medios y Mediaciones Pedagógica

Maribel Córdoba Guerrero
Secretaria General

MÓDULO
MATEMÁTICAS BÁSICAS
SEGUNDA EDICIÓN

© Copyright
Universidad Nacional Abierta y a Distancia

ISBN

2007
Bogotá, Colombia

TABLA DE CONTENIDO

	Pag.
PRESENTACION.....	10
INTRODUCCION GENERAL.....	11
PROPOSITOS.....	11
OBJETIVOS.....	12
METODOLOGIA Y CREDITOS ACADEMICOS.....	12
CONTENIDO PROGRAMATICO	
UNIDAD DIDACTICA UNO: Aritmética y Álgebra.....	13
CAPITULO 1: ARITMETICA.....	14
Introducción.....	14
Autoevaluacion Inicial.....	14
1. CONJUNTOS Y NUMEROS.....	16
1.1. Conjuntos.....	16
1.1.1. Operaciones entre conjuntos.....	18
1.1.2. Propiedades de operaciones con conjuntos.....	22
1.2. Números.....	23
1.2.1. Números naturales.....	25
1.2.2. Números enteros.....	26
1.2.3. Números racionales.....	26
1.2.3.1. Números fraccionarios.....	26
1.2.3.2. Suma y resta de fraccionarios.....	27

	PAG
1.2.3.3. Multiplicación de racionales.....	33
1.2.3.4. División de fraccionarios.....	34
1.2.3.5. Números decimales.....	36
1.2.3.5.1. Fracción decimal.....	36
1.2.3.5.2. Operaciones con los números decimales.....	37
1.2.3.5.3. Clase de números decimales.....	40
1.2.4. Números reales.....	42
1.2.5. Propiedades de los números.....	43
1.2.6. Valor absoluto.....	46
AUTOEVALUACION 1 Conjuntos y números.....	47
1.2.7. Potenciación.....	48
1.2.7.1. Propiedades de la potenciación.....	50
1.2.7.2. Clases de potencias.....	53
AUTOEVALUACION 2 Potenciación.....	53
1.2.8. Radicación.....	54
1.2.8.1. Clases de raíces.....	55
1.2.8.2. Propiedades de los radicales.....	56
AUTOEVALUACION 3 Radicación.....	57
1.2.9. Logaritmación.....	58
1.2.9.1. Propiedades de los logaritmos.....	61
AUTOEVALUACION 4 Logaritmos.....	62

	PAG
1.2.10. Números complejos.....	62
1.2.10.1. Operaciones con números complejos.....	64
AUTOEVALUACION 5 Números complejos.....	66
CAPITULO 2: ALGEBRA.....	67
Introducción.....	67
Autoevaluacion Inicial.....	67
2. ALGEBRA.....	68
2.1. Expresiones algebraicas.....	68
2.1.1. Adición ó suma de expresiones algebraicas.....	70
2.2. Signos de agrupación.....	73
2.3. Multiplicación.....	77
2.4. División.....	80
2.5. Productos notables.....	87
2.5.1. Binomios.....	88
2.5.1.1. Binomio de newton.....	92
2.5.1.2. Triangulo de pascal.....	93
2.5.1.3. Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.....	94
2.5.1.4. Producto de dos binomios.....	95
AUTOEVALUACION 6 Productos notables.....	97
2.6. Cocientes notables.....	97

	PAG
2.7. Factorización.....	100
2.7.1. Factor común.....	100
2.7.2. Diferencia de cuadrados perfectos.....	105
2.7.3. Trinomios.....	106
2.7.3.1. Trinomio cuadrado perfecto.....	106
2.7.3.2. Trinomio de la forma $(x^2 + bx + c)$.....	109
2.7.3.3. Trinomio de la forma $(ax^2 + bx + c)$.....	112
2.7.4. Suma o diferencia de cubos perfectos.....	115
AUTOEVALUACION 7 Factorización.....	116
2.8. Máximo común divisor.....	117
2.8.1. Máximo común divisor de monomios.....	118
2.8.2. Máximo común divisor de polinomios.....	119
2.9. Mínimo común múltiplo.....	121
2.9.1. Mínimo común múltiplo de monomios.....	122
2.9.2. Mínimo común múltiplo de polinomios.....	123
AUTOEVALUACION 8 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.....	124
2.10. Fracciones algebraicas.....	125
2.10.1. Reducción de fracciones.....	126
2.10.2. Fracciones con monomios.....	126
2.10.3. Fracciones con polinomios.....	127
2.11. Operaciones con fracciones.....	128

	PAG
2.11.1. Suma de fracciones.....	128
2.11.2. Resta de fracciones.....	131
2.11.3. Multiplicación de fracciones.....	132
2.11.4. División de fracciones.....	134
2.12. Fracciones complejas.....	135
AUTOEVALUACION 9 Facciones algebraicas.....	137
UNIDAD DIDACTICA DOS: Razones – Proporciones y Geometria.....	138
CAPITULO 3: RAZONES Y PROPORCIONES.....	139
3. RAZONES Y PROPORCIONES.....	139
3.1. Razones.....	139
3.1.1. Razón aritmetica.....	139
3.1.2. Razón geometrica.....	140
3.2. Proporciones.....	140
3.2.1. Cuarta proporcional.....	142
3.2.2. Transposición de términos.....	143
AUTOEVALUACION 10 Razones y proporciones.....	143
3.3. Reparto proporcional.....	145
3.3.1. Reparto proporcional directo simple.....	145
3.3.2. Reparto proporcional directo compuesto.....	156
3.3.3. Reparto proporcional inverso simple.....	158
AUTOEVALUACION 11 Proporciones.....	162

	PAG
3.4. Porcentaje.....	163
AUTOEVALUACION 12 Porcentaje.....	167
CAPITULO 4: GEOMETRIA.....	168
4. GEOMETRIA.....	168
Introducción.....	168
Concepto de geometría.....	168
4.1. Geometría plana.....	169
4.2. Clasificación de las rectas.....	171
4.2.1. Rectas paralelas.....	171
4.2.2. Rectas perpendiculares.....	172
4.2.3. Rectas oblicuas.....	172
4.3. Polígonos.....	172
4.3.1. Elementos de los polígonos.....	172
4.3.2. Clases de ángulos.....	174
4.3.2.1. Según su posición.....	174
4.3.2.2. Según su medida.....	175
4.3.3. Clases de polígonos.....	175
4.3.3.1. Polígonos convexos y concavos.....	176
4.3.3.2. Angulo interior de un polígono regular.....	177
4.4. El Triángulo.....	179
4.4.1. Líneas y puntos notables de un triángulo.....	180

	PAG
4.4.2. Area y perímetro del triángulo.....	181
4.4.3. Teorema de Pitágoras.....	183
4.5. El Cuadrilátero.....	185
4.5.1. Area de los cuadriláteros.....	186
4.5.2. Area de un polígono regular.....	186
4.6. La Circunferencia y el Círculo.....	187
4.6.1. Circunferencia.....	187
4.6.2. Círculo.....	187
4.6.3. Líneas notables de la circunferencia.....	188
4.6.4. Area y perímetro del círculo.....	188
4.6.5. Sector circular.....	189
4.6.6. Segmento circular.....	189
4.6.7. Corona circular.....	190
AUTOEVALUACION 13 Geometría plana.....	190
4.7. Geometría espacial.....	191
4.7.1. Diedros.....	191
4.7.1.1. Clases de diedros.....	192
4.7.2. Poliedros.....	192
4.7.2.1. El prisma.....	193
4.7.2.1.1. Area del prisma.....	194
4.7.2.1.2. Volúmen del prisma.....	194

	PAG
4.7.2.2. La pirámide.....	195
4.7.2.2.1. Area de la pirámide.....	195
4.7.2.2.2. Volúmen de la pirámide.....	196
4.7.2.3. El cilindro.....	196
4.7.2.3.1. Area del cilindro.....	197
4.7.2.3.2. Volumen del cilindro.....	197
4.7.2.4. El cono.....	197
4.7.2.4.1. Volumen de un cono.....	198
4.7.2.5. La esfera.....	198
4.7.2.5.1. Area de la esfera.....	198
4.7.2.5.2. Volumen de la esfera.....	199
AUTOEVALUACION 14 Geometría espacial.....	199
INFORMACION DE RETORNO.....	201
GLOSARIO DE TERMINOS.....	224
BIBLIOGRAFIA.....	228
CUADRO DE RESUMEN DE FORMULAS.....	229

PRESENTACION

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Hoy en día ninguno puede pensar que la obtención de un diploma o un título le asegura un sitio en la comunidad del conocimiento. En lo siguiente, todos los seres humanos tendremos que persistir en nuestra formación o capacitación a lo extenso de la vida. Esta exigencia ha obligado a dar un nuevo enfoque al proceso educativo y poner la importancia en el desarrollo de las cualidades y habilidades del estudiante para que aprenda a aprender, aprenda a hacer, aprenda a estar y, sobre todo, aprenda a ser.

De ahí que en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia-UNAD, hayamos emprendido una extensa reforma del número y programas de las carreras, así como de los contenidos programáticos a fin de ajustarlos a los requerimientos de la sociedad del saber.

Uno de los reclamos más frecuentes de los docentes que orientan los cursos de Matemáticas, en los primeros semestres de las carreras universitarias, es la casi nula preparación que los alumnos que vienen de terminar sus estudios secundarios muestran en dicho campo.

Tal vez el menos culpable de esta situación es el propio estudiante si consideramos la improvisación, en los contenidos y en la metodología de la enseñanza de la matemática, a la que se ve sometido a lo largo de sus estudios realizados en el bachillerato. Para tratar de igualar a estos jóvenes, tan complejos en sus conocimientos, se hace necesario incluir el curso electivo de matemáticas básicas como un puente entre los conocimientos adquiridos en la educación media y el inicio de la educación superior.

El saber de estos problemas en la Universidad me han alentado a escribir este módulo, cuyas cualidades fundamentales son las siguientes:

1. El empleo de un lenguaje fácil y cómodo para el lector.
2. Trabajos fácilmente realizables que conllevan a la asimilación del concepto matemático deseado.
3. El desarrollo de las diferentes temáticas incluye diversos ejemplos, con el fin de ahondar adecuadamente y pensar en sus diversas aplicaciones.
4. Habrá gran cantidad de ejercicios debidamente escogidos que buscan motivar al estudiante a obtener con su propio desarrollo una adecuada

comprensión de los contenidos y un efectivo manejo de las operaciones matemáticas.

5. Se encontrara con un apropiado número de formulas, gráficos y figuras que ayudan a visualizar los conceptos.
6. Al término de cada capítulo aparece un TALLER con ejercicios teóricos. Este taller persigue, entre otras cosas, evitar que tanto el docente como el estudiante tengan que ir a distintos textos a buscar ejercicios.

Como lo exprese anteriormente, el modulo esta encaminado a desarrollar contenidos matemáticos básicos. En este sentido puede ser empleado en cursos de mayor nivel como Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, el Cálculo, las Ecuaciones Diferenciales, la Estadística y otras áreas del conocimiento.

Los nuevos módulos proveen al alumno las herramientas indispensables para enfrentar los desafíos que se le plantearan en su vida profesional, el rápido desarrollo científico y tecnológico.

INTRODUCCION GENERAL:

En el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ha sido complicado para el estudiante, ya que durante toda su vida se le ha sembrado temor hacia ellas, generando con esto su rechazo y desmotivación para aprenderlas.

En vista de la importancia de este curso académico y teniendo en cuenta que algunos estudiantes que ingresan a la Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD, son personas que generalmente hace tiempo terminaron sus estudios secundarios, sea diseñado un texto con la didáctica necesaria para que sus contenidos sean aprendidos teniendo en cuenta los fundamentos básicos del aprendizaje autónomo, de tal manera que facilite el proceso de aprendizaje.

El curso académico electivo de Matemáticas Básicas, esta ubicado dentro de los cursos básicos del campo disciplinar, debido a la gran importancia que tiene como base para la formación del futuro profesional, ya que es necesario para poder afrontar cursos de mayor complejidad y como herramienta para resolver problemas en cualquier campo del saber.

PROPOSITOS:

Dentro de los propósitos del curso se tiene que el estudiante identifique los principios de las Matemáticas Básicas, para que los aprendientes de los diferentes programas académicos que oferta la UNAD, activen y fortalezcan sus conocimientos previos. Otra intencionalidad importante es que los estudiantes clasifiquen las diferentes operaciones matemáticas, teorías, axiomas, definiciones y propiedades, con el fin de que puedan comprenderlas y emplearlas cuando así se requieran.

Por ultimo todo lo anterior nos conlleva a que el estudiante sea un factor determinante en la solución de problemas en el campo de la ciencia, tecnología e ingeniería, con los conocimientos debidamente adquiridos del curso académico.

OBJETIVOS:

Los objetivos del curso se pueden dividir en dos:

Generales:

- a) Proporcionar y reforzar al estudiante los conocimientos básicos mínimos en matemáticas, que debe poseer un estudiante de nivel superior.
- b) Desarrollar en el estudiante un sentido matemático que le permita enfrentar con seguridad y criterio situaciones que exijan matemática.
- c) Capacitar al estudiante para que logre destreza en la manipulación de la Aritmética, Álgebra, Geometría y Razones y Proporciones.
- d) Plantear, resolver e interpretar situaciones donde se tenga que aplicar la matemática básica.

Específicos:

- a) Que los estudiantes conozcan, describan y manejen claramente los conceptos, clases, operaciones y propiedades de los conjuntos numéricos, números, potenciación, radicación, logaritmicación, a través del estudio teórico y el análisis de casos modelos.
- b) Identificar y desarrollar las expresiones algebraicas, polinomios, Factorización, productos y cocientes notables, M.C.D y M.C.M.
- c) Desarrollar habilidades para operar y simplificar expresiones racionales.
- d) Representación clara del concepto de punto y la línea, polígonos, figuras geométricas en el plano y en el espacio.
- e) Tengan claridad y habilidad en el cálculo de perímetro, área y volumen de las diferentes figuras geométricas en el plano y el espacio.

UNIDAD DIDACTICA UNO

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

CAPITULO 1

ARITMETICA

INTRODUCCION:

Siempre que emprendemos una empresa que requiere nuestra mejor atención y empeño, como el estudio del presente modulo, es conveniente revisar las bases y recorrer rápidamente el camino avanzado. Por eso este primer capitulo incluye un somero repaso de la teoría básica de conjuntos y números; lo que nos dará, además de conocimientos renovados de lo estudiado en la infancia, un mismo idioma para establecer una verdadera comunicación con el estudiante.

AUTOEVALUACION INICIAL

Con el fin de hacer un diagnóstico sobre el conocimiento que usted tiene sobre las temáticas relacionadas con la aritmética, a continuación lo invitamos para que resuelva la siguiente evaluación. Con este ejercicio, se pretende que usted haga una reflexión sobre lo que conoce acerca de esta temática y lo que quisiera aprender.

En caso que sienta que no puede contestar esta evaluación, no se preocupe que al abordar la temática encontrará respuesta a todas sus inquietudes. Por eso es importante que al terminar el capítulo vuelva a resolver esta evaluación y nuevamente haga una reflexión sobre lo que aprendió.

1. Sean los conjuntos:

A. = $\{ x / x \text{ es un número entero entre } 5 \text{ y } 10 \}$

B. = $\{ x / x \text{ es un número entero entre } 4 \text{ y } 8 \}$

Hallar: $A \cup B$, $A \cap B$

2. Defina con sus propias palabras: números naturales, números enteros, números racionales y números reales. De un ejemplo de cada uno de estos tipos de números.

Hallar el resultado de :

3. $\frac{9}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2}$

4. $\frac{5}{3} - \frac{7}{9} + 4$

5. $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$

6. $\frac{6}{5} \div \frac{4}{9}$

7. Calcular los $\frac{3}{8}$ de 16.000

Hallar:

8. $5^2 \times 5^7 \times 5^3 \times 5$

9. $7^8 \div 7^3$

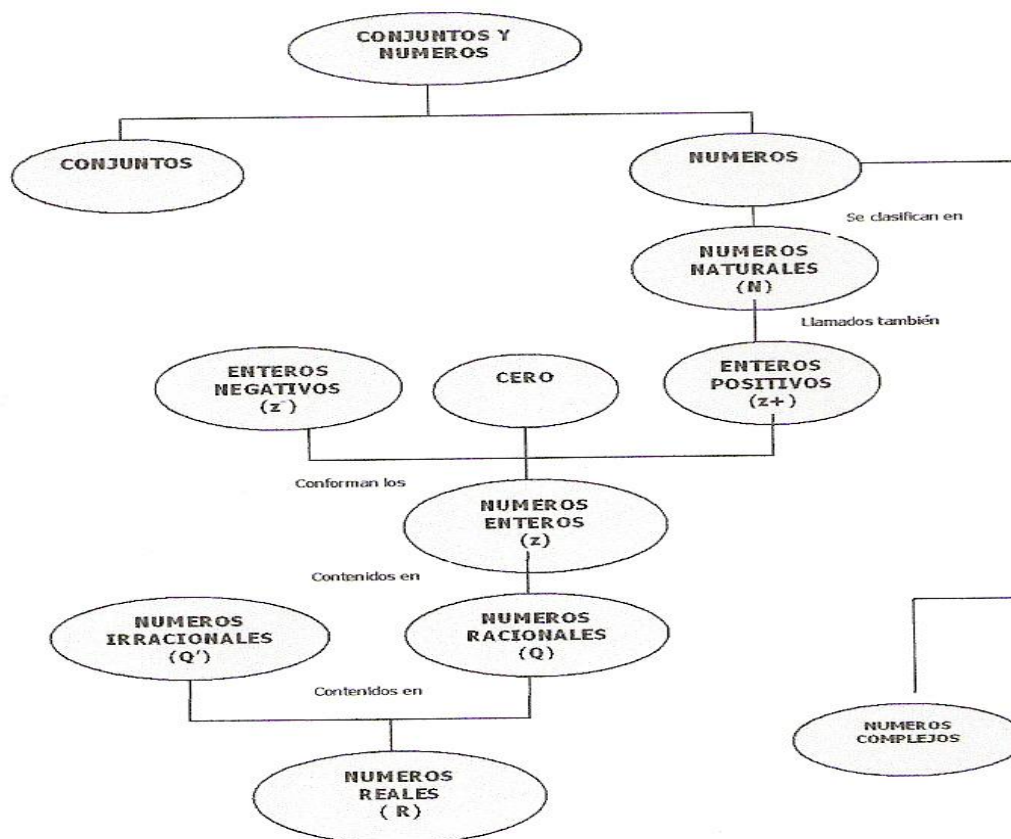
10. $\left(\left((9)^2\right)^3\right)^0$

11. 2^{-6}

12. $\sqrt[3]{1331}$

13. $\text{Long}_5 625$

1. CONJUNTOS Y NUMEROS:



Para abordar las temáticas de aritmética, álgebra y geometría, es necesario tener muy claros los conceptos básicos sobre las diferentes operaciones que se pueden realizar con los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales.

1.1 CONJUNTOS:

Los conjuntos se pueden comparar como una colección, reunión ó lista de objetos que comparten una cierta característica que los diferencia de otros. Están conformados por un grupo de objetos llamados elementos.

Se pueden enumerar de dos formas:

- Por **extensión** cuando se detallan todos los integrantes, por ejemplo el conjunto de vocales del alfabeto castellano:

$$N = \{ a, e, i, o, u \}$$

Esto significa que el conjunto N está compuesto por los elementos a, e,

i, o, u exclusivamente. En este caso se puede decir que el elemento a

pertenece al conjunto N; ó diciéndolo matemáticamente: $a \in N$

Entonces el símbolo \in **significa pertenencia.**

Análogamente se podría decir que: $h \notin N$, o sea que “el elemento h no

Pertenece al conjunto N”.

El símbolo \notin **indica no pertenencia.**

- Por **comprensión** es otra forma de enumerar los conjuntos, dónde se diferencia un conjunto de otro por la característica única que agrupa sus elementos. En este caso la característica sería:

$$N = \{x / x \text{ es una vocal del alfabeto castellano}\}$$

Se lee: N es el conjunto de los elementos equis tales que (o que cumplen la condición que) equis es una vocal del alfabeto castellano.

Cuando un conjunto tiene un número infinito de elementos (se llama conjunto infinito) no se pueden contar, es imposible describirlo por extensión, razón por la cual se hace necesario hacerlo por comprensión, por ejemplo el conjunto de los números racionales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Supongamos el conjunto que describo por comprensión es:

$$P = \{x / x \text{ es un número impar menor que } 30\}$$

Esto equivale al conjunto de elementos x que cumplen la condición de ser número impares menores que treinta.

Entonces para nombrar este conjunto por extensión sería:

$$P = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 \} .$$

Se podría decir que $11 \in P$, pero $6 \notin P$

☺

Para nombrar los conjuntos siempre se usan las letras mayúsculas, en este caso **P**, mientras que los elementos se denotan con las letras minúsculas.

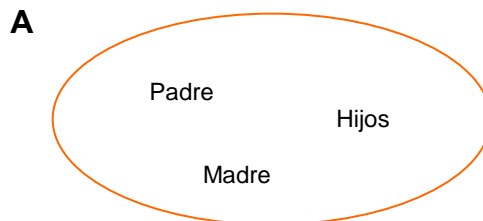
2. Si se tiene el conjunto $M = \{\text{padre, madre, hijos}\}$, por comprensión sería:

$$M = \{ x / x \text{ es un miembro de la familia } \}$$

1.1.1. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

Ya se tiene conocimiento sobre como nombrar los conjuntos, ahora es importante recordar las diferentes operaciones que se pueden realizar con los conjuntos. Para facilitar este proceso, se acude los diagramas de Venn-Euler, mediante el cual se puede dar una idea mas clara de los conjuntos.

El conjunto M anteriormente mencionado se puede representar en el diagrama de Venn-Euler de la siguiente manera:



Antes de iniciar con las diferentes operaciones que se realizan con los conjuntos, es importante recordar las **comparaciones** entre conjuntos:

- **Un conjunto es igual a otro** cuando tienen los mismos elementos, por ejemplo los conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5\} \text{ y } B = \{5, 3, 1\},$$

Se dice que $A = B$, por que tienen los mismos elementos, sin importar el orden de los elementos.

Por otro lado, se puede decir que $\{1, 3, 5, 3, 1\} = \{1, 3, 5, 5, 3\}$ por que tienen los mismos elementos, aunque se repitan algunos de sus elementos.

- **Contenencia:** Dados los conjuntos:

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \text{ y}$$

$$N = \{a, e, i, o, u\}$$

Se aprecia que todos los elementos del conjunto **N** están también dentro del conjunto **M**, entonces se dice que **N** es un subconjunto de **M** o también que **N** esta contenido en **M** y se denota como: $N \subset M$

En el caso de los conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{5, 3, 1\}$$

Se puede decir que $A \subset B$, y $B \subset A$, entonces se llega a la conclusión que si dos conjuntos son iguales cada uno es subconjunto del otro.

- **Suma:**

La más sencilla de las operaciones entre conjuntos es la **adición o unión**, a través de la cual se obtiene un nuevo conjunto con los elementos de cada uno de los conjuntos que se están uniendo. Esta operación se representa con el operador \cup

Si se tienen los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

La suma de estos dos conjuntos es:

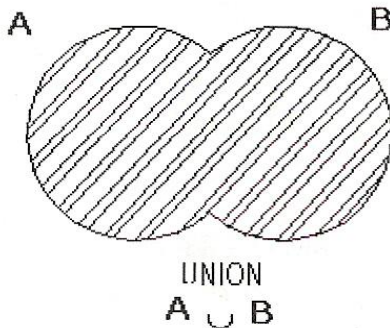
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, i, o, u\}$$



En la adición o unión de conjuntos, el conjunto resultado es igual a los elementos comunes y no comunes

Los elementos comunes, en este caso a, e, solamente se colocan una vez.

A través del diagrama de Venn la suma se representa de la siguiente manera:



• **Intersección:**



La Intersección de dos o más conjuntos es el grupo de los elementos que son comunes a tales conjuntos

Esta operación se representa por el símbolo



Siguiendo con el ejemplo anterior, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y

$B = \{a, e, i, o, u\}$, **intersección** igual a:

$$A \cap B = \{a, e\}$$

Por que los elementos **a, e** se encuentran en los dos dos conjuntos.

Mediante diagramas de Venn la operación de **intersección** se representan así:



Existe un conjunto llamado **Universal (U)**. Este representa el total de elementos que pueden componer un conjunto.

Por ejemplo si se tienen los conjuntos

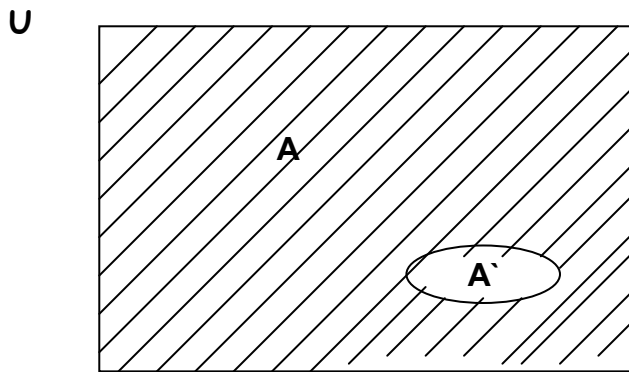
$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ y

$A = \{a, e, i, o, u\}$

El **conjunto complemento de A** denominado **A'** (A prima) equivale al conjunto de elementos que pertenecen al conjunto **Universal** y que no pertenecen al conjunto **A**, entonces:

$$A' = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$$

El conjunto Universal se representa por un rectángulo en el diagrama de Venn, dentro del cual están todos los subconjuntos:



Conjunto unitario: Cuando un conjunto tiene un solo elemento se llama conjunto **unitario**.

Conjunto vacío: Se refiere al conjunto que no contiene elementos y se representa mediante la letra griega Φ , y por extensión se representa así:

{ }, sin elementos, por ejemplo si:

$M = \{ 1,3,5,7,9 \}$ y $N = \{ 2,4,6,8 \}$ la intersección es:

$M \cap N = \Phi$ por que los dos conjuntos no tienen elementos comunes.

1.1.2. PROPIEDADES DE OPERACIONES CON CONJUNTOS:

• **CONMUTATIVIDAD:** La unión y la intersección de conjuntos cumple la ley **conmutativa**, esto es:

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$$

• **ASOCIATIVIDAD:** La unión y la intersección de conjuntos cumplen la ley **asociativa**, esto es:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

• **DISTRIBUTIVIDAD:** La intersección es **distributiva** con relacion a la unión, y la unión es distributiva con relación a la intersección, esto es:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Sean los conjuntos:

$$U = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8 \}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4,5\}$$

$$B = \{1, 2,3\}$$

$$C = \{4, 6,8\}$$

Hallar: $(A \cup B)$; $(B \cup C)$; $(C \cup A)$; $(B \cap C)$; $(C \cap A)$; B'

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4,5\}$$

$$(B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$(C \cup A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,8\}$$

$$(B \cap C) = \emptyset \text{ (CERO) por que no tienen elementos comunes}$$

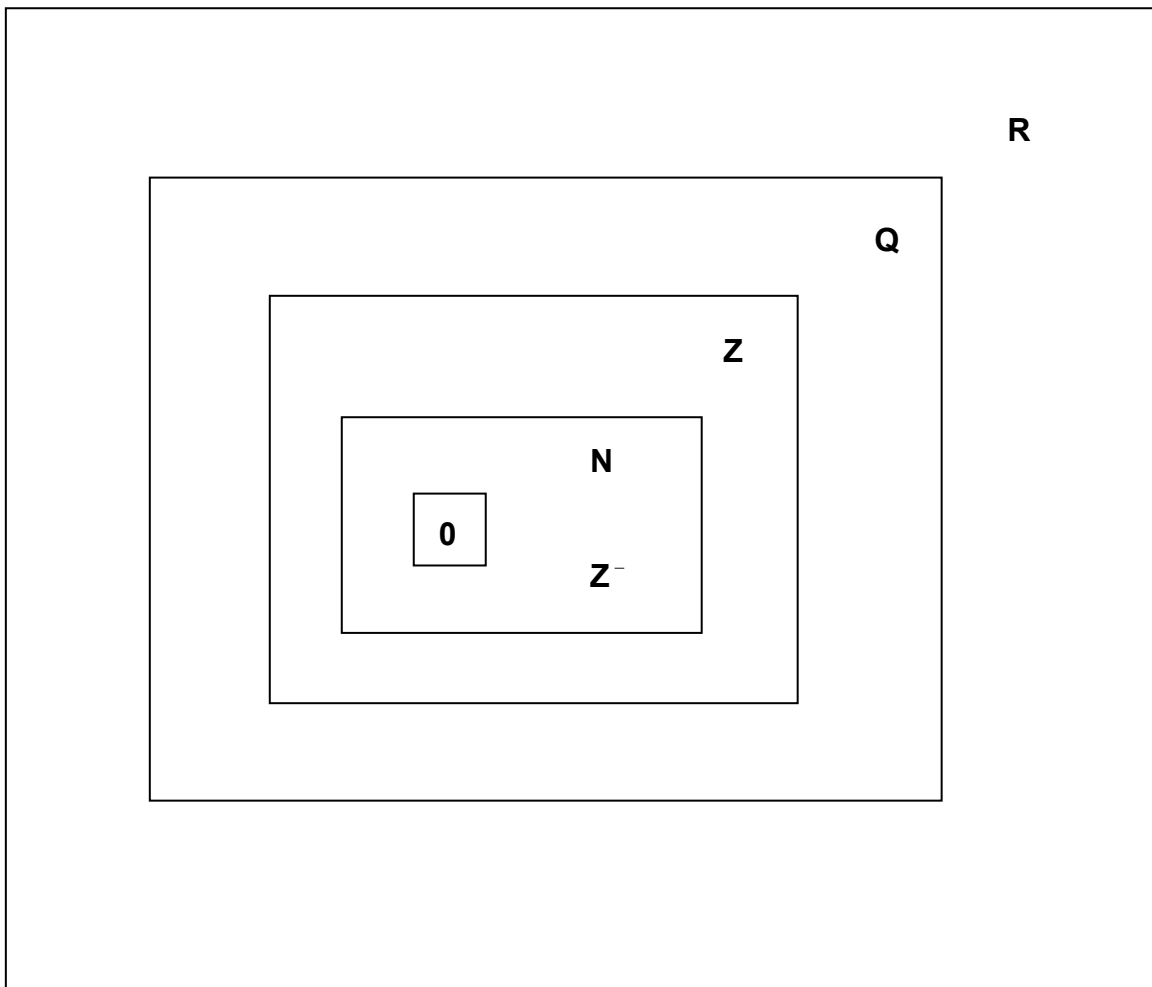
$$(C \cap A) = \{4\}$$

$B' = \{4, 5, 6, 7,8\}$ (o sea que B' es igual a los elementos que están en U pero no esten en B).

1.2. NUMEROS:

Al considerarse los conjuntos como una colección de elementos con cierta característica que lo diferencian de los demás, los diferentes grupos numéricos:

Reales, Racionales, Enteros y Naturales son catalogados como conjuntos, de tal manera que pueden representarse mediante el diagrama de Venn – Euler.



$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Donde:

N representa los números **Naturales**

Z los números **Enteros**

Q números **Racionales**

R números **Reales**

En este diagrama se representa $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (el conjunto de los números **Naturales** están contenidos en los **Enteros** y a su vez, el conjunto de los **Enteros** están contenidos en los **Racionales** y estos últimos están contenidos en los **Reales**.)

A continuación se definirán cada uno de estos tipos de números, empezando por los Naturales.

1.2.1. NUMEROS NATURALES:

Matemáticamente se denota al conjunto de los números con la letra \boxed{N} , Tal que:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$$

Con estos números se pueden realizar operaciones como suma, multiplicación y potenciación.

Los números Naturales tienen como subconjuntos los números pares, impares y primos.

- **Números Pares:** Se refiere a los números que son divisibles por dos $\boxed{2}$, es decir que se pueden dividir exactamente por $\boxed{2}$ por ejemplo son el 2, 4, 6, 8, 10, 12....

- **Números Impares:** son los números que son indivisibles por 2, es decir que no se pueden dividir por 2, ejemplo 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.....

- **Números Primos:** se dice que un número es primo si no tiene mas divisores que él mismo y la unidad, por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,ya que:

2 únicamente se puede dividir por sí mismo $2 \div 2 = 1$ y por la unidad $2 \div 1 = 2$, es decir no se puede dividir por ningún otro número

$31 \div 31 = 1$ y por la unidad $31 \div 1 = 31$ no hay ningún otro número que divida exactamente a este número.

$41 \div 41 = 1$ y por la unidad $41 \div 1 = 41$ no hay ningún otro número que divida exactamente a este número.

Es importante observar que el único **número par primo** es el $\boxed{2}$

1.2.2. NUMEROS ENTEROS:

Existe otro tipo de números, los **Enteros (Z)**. Este conjunto de números está compuesto por los **enteros positivos (Z^+)** (que son los mismos Naturales), por los **enteros negativos (Z^-)** y por el **cero (0)**. Con los números enteros se pueden realizar las mismas operaciones planteadas en los Naturales mas la resta.

1.2.3 NUMEROS RACIONALES:

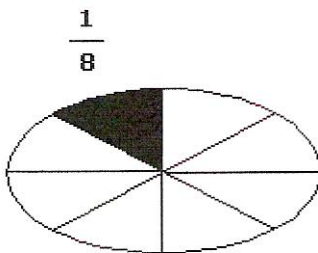
A los números racionales se le conoce como conjunto Q, esta conformado por el cociente de números enteros. Todos los enteros pueden ser escritos como números racionales divididos por uno (1) por ejemplo $\frac{9}{1}$, $\frac{-7}{1}$ es decir que

$$N \subset Z \subset Q$$

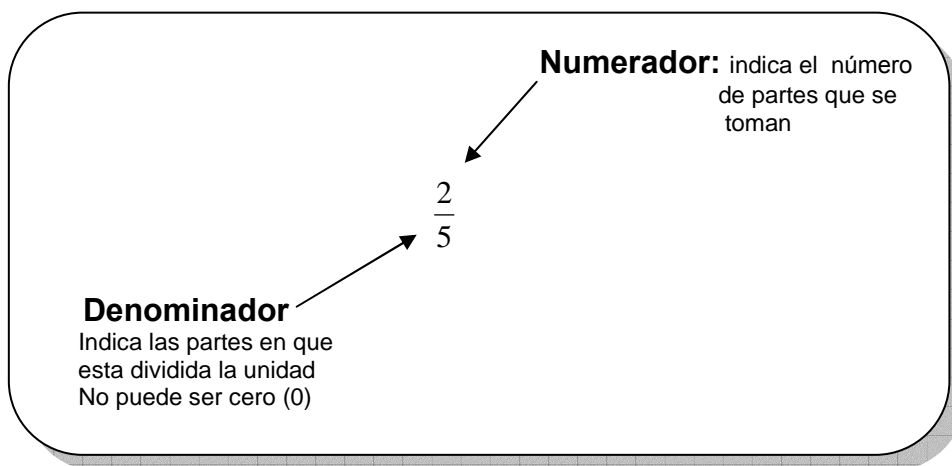
1.2.3.1. Números Fraccionarios:

En diversas situaciones de la vida cotidiana es necesario trabajar con trozos de cosas como por ejemplo media pera, medio kilo de azucar, un cuarto de arroba de yuca, y un cuarto de terreno de un lote, entre otras, estos son los Números Fraccionarios.

Por ejemplo, la siguiente figura se dividió en ocho (8) partes y se tomó una parte (la sombreada) esto equivale a decir: $\frac{1}{8}$ donde el (1) representa al **numerador** (o sea las partes que se toman) y el ocho (8) **el denominador** (las partes en que esta dividida la unidad).



Otro ejemplo de un número fraccionario es cuando un pan se divide en cinco (5) partes, **denominador** y se seleccionan 2 de estas porciones, **numerador**; este fraccionario se representa de la siguiente forma:



1.2.3.2. Suma y resta de fraccionarios: si se tiene la siguiente suma de números fraccionarios.

$$\underbrace{\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Denominadores Iguales}}} = \boxed{\frac{4+8+1}{3}} = \frac{13}{3}$$

Se observa que todos los denominadores tienen el mismo número (3) o sea que las fracciones son **homogéneas**. Para la suma y resta de este tipo de fracciones se deja el mismo denominador (3) y se suman o restan los numeradores, de acuerdo con la operación planteada.

Ejemplos:

$$\frac{5}{4} + \frac{8}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = \frac{5+8+1-6}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{9}{3} = \frac{4+8+2-9}{3} = \frac{5}{3}$$

Existe otro tipo de fraccionarios, son los que tienen los denominadores diferentes. Este tipo de fraccionarios se denominan **No Homogéneos**.

Para llevar a cabo las operaciones de suma o resta de fraccionarios no homogéneos se debe primero hallar un denominador común para todas las fracciones y luego si realizar la operación de suma y resta de los numeradores. Veamos el siguiente ejemplo.

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{5} + \frac{5}{6}$$

Denominadores Diferentes

Como se trata de fraccionarios no homogéneos porque sus denominadores son diferentes **3, 5 y 6** se procede a hallar un denominador común, que divida exactamente a los tres denominadores.



Una manera facil para hallar el denominador común, es a través del mínimo común múltiplo m.c.m. el cual consiste en Dividir cada uno de los números dados Por su menor divisor y continuar con los cocientes hasta que todos los cocientes sean uno (1).

El m.c.m. es el producto de todos los divisores primos.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 5 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Al analizar los denominadores 3, 5 y 6 podemos darnos cuenta que el menor divisor de estos tres números es 2, por lo tanto se divide el 6 por este número dando como resultado 3. Los otros números 3 y 5 como no son divisibles por 2 se dejan igual. Por esta razón en la segunda fila aparecen 3, 5 y 3, la cual se divide por 3 dando como resultado 1,5 y 1, la cual a su vez se divide por 5 hasta llegar a 1,1 y 1.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

El m.c.m. se obtiene al multiplicar cada uno de los divisores primos 2.3.5 dando Resultado 30. Esto significa que 30 es el menor múltiplo de 3,5 y 6 y por tal razón, divide exactamente a estos números.

🔄 Repasemos...

La multiplicación puede ser representada
 Por: El signo (x), por un (•) o por un par
 de paréntesis () ()

El m.c.m, **(30)** se deja como el denominador común para todas las fracciones.
 Para hallar cada uno de los numeradores se procede de la siguiente manera:
**el m.c.m. se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones
 dadas (3,5,6) y se multiplican por sus respectivos numeradores.**

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{5} + \frac{5}{6} = \frac{(30 \div 3) \cdot 8 + (30 \div 5) \cdot 7 + (30 \div 6) \cdot 5}{30} = \frac{80 + 42 + 25}{30} = \frac{149}{30}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Operar:

$$1) \frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{11}{60}$$

Como los denominadores son diferentes, se hallan el denominador común:

5	15	60		2
5	15	30		2
5	15	15		3
5	5	5		5
1	1	1		

$$\text{m.c.m} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Entonces el denominador común es (60). Para encontrar los términos de los numeradores respectivos se divide 60 entre cada uno de los denominadores de las fracciones y se multiplican por sus respectivos numeradores.

$$\frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{11}{60} = \frac{(60 \div 5) \cdot 7 + (60 \div 15) \cdot 8 + (60 \div 60) \cdot 11}{60} = \frac{84 + 32 + 11}{60} = \frac{127}{60}$$

2) $\frac{31}{6} - \frac{25}{8}$

El m.c.m de 6 y 8:

6	8	2		2
3	4	2		2
3	2	2		2
3	1	3		3
1	1			

$$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

El m.c.m. se deja como denominador común y los términos de los numeradores se forman dividiendo el 24 entre cada uno de los denominadores de las fracciones y multiplicándolos por los respectivos numeradores. La única diferencia entre la suma y la resta es que los términos de los numeradores se restan o se suman de acuerdo a la operación planteada.

$$\frac{31}{6} - \frac{25}{8} = \frac{(24 \div 6) \cdot 31 - (24 \div 8) \cdot 25}{24} = \frac{124 - 75}{24} = \frac{49}{24}$$

3) $\frac{7}{20} + \frac{49}{16} - \frac{11}{5}$

20	16	5		2
10	8	5		2
5	4	5		2
6	2	5		2
5	1	5		5
1	1	1		

$$\text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 80$$

4) $9 - \frac{31}{6} + \frac{49}{12}$

Recordando que todo número entero se puede convertir en Racional si se le coloca como denominador el número **uno (1)**, la operación se plantea así:

$$\frac{9}{1} - \frac{31}{6} + \frac{49}{12}$$

1	6	12	2
1	3	6	2
1	3	3	3
1	1	1	

m.c.m. = $2^2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$$\frac{9}{1} - \frac{31}{6} + \frac{49}{12} = \frac{(12 \div 1) \cdot 9 - (12 \div 6) \cdot 31 + (12 \div 12) \cdot 49}{12} = \frac{108 - 62 + 49}{12} = \frac{95}{12}$$

5) $6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 1$

Para poder realizar esta operación se tienen que convertir los números enteros a Racionales quedando de la siguiente manera:

$$\frac{6}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}$$

1	2	3	1	2	1	2
1	1	3	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	

m.c.m. = $2 \cdot 3 = 6$

$$\frac{6}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} =$$

$$\frac{(6 \div 1) \cdot 6 - (6 \div 2) \cdot 1 + (6 \div 3) \cdot 1 - (6 \div 1) \cdot 2 + (6 \div 2) \cdot 1 - (6 \div 1) \cdot 1}{6} = \frac{36 - 3 + 2 - 12 + 3 - 6}{6} =$$

$$\frac{20 \div 2}{6 \div 2} = \frac{10}{3}$$

Recordando la simplificación de fracciones, la cual Consiste en dividir tanto el numerador como del de Nominador por un mismo número, en este caso el Número 2

6) Operar los siguientes números racionales

$$5 + 4\frac{7}{8} + \frac{1}{3}$$

Este número se denomina **Mixto por que consta de una parte entera (4)** y un número fraccionario (7/8). Para poder desarrollar la operación es necesario convertir este mixto en número fraccionario. Esto se logra multiplicando el denominador de la fracción (8) por el número entero (4) y a este resultado se le suma el numerador de la fracción (7). El resultado de esta operación $8 \times 4 + 7 = 39$ se deja como numerador de la nueva fracción y como denominador se deja el que tiene la fracción o sea (8).

Una vez hecha la conversión del Mixto a racional, queda:

$$\frac{5}{1} + \frac{39}{8} + \frac{1}{3}$$

1	8	3	2
1	4	3	2
1	2	3	2
1	1	3	3
1	1	1	

$$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

1.2.3.3. Multiplicación de racionales:

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$$

Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican los numeradores entre sí, en este caso $(4 \times 7) = 28$ y los denominadores también se multiplican entre sí $(5 \times 3) = 15$

7) Realizar

$$\frac{7}{8} \times \frac{16}{21} = \frac{112}{168} = \frac{(112 \div 2)}{(168 \div 2)} = \frac{56}{84} = \frac{(56 \div 2)}{(84 \div 2)} = \frac{28}{42} = \frac{(28 \div 2)}{(42 \div 2)} = \frac{14}{21} = \frac{(14 \div 7)}{(21 \div 7)} = \frac{2}{3}$$

En este ejercicio se observa que al multiplicar los numeradores (7×16) el resultado es 112 y al multiplicar los denominadores (8×21) el resultado es 168. Pero tanto el numerador como el denominador son divisibles por (2), es decir se pueden dividir por (2), entonces se divide por este número, dando como resultado 56/84, estos a su vez se pueden dividir por (2) dando como resultado 28/42 y así se sigue dividiendo sucesivamente hasta cuando ya no se puedan dividir por ningún otro número, es decir obtener una fracción irreducible

8)

$$\frac{5}{6} \times \frac{9}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 9 \times 7}{6 \times 7 \times 3} = \frac{315}{126} = \frac{(315 \div 3)}{(126 \div 3)} = \frac{105}{42} = \frac{(105 \div 3)}{(42 \div 3)} = \frac{35}{14} = \frac{(35 \div 7)}{(14 \div 7)} = \frac{5}{2}$$

Es importante recordar algunas reglas de la divisibilidad:

- Un número es divisible por 2 cuando termina en número par o en cero
- Un número es divisible por 3 cuando al sumar las cifras que conforman el número da un múltiplo de 3. Ejemplo 315 es divisible por 3 porque al sumar $3+1+5 = 9$ y este número es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 5 cuando termina en 5 o en cero.

$$9) \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times 20 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{20}{1} = \frac{1 \times 1 \times 20}{4 \times 5 \times 1} = \frac{20}{20} = \frac{(20 \div 20)}{(20 \div 20)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$10) \quad 3 \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} \times 2 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{7} \times \frac{2}{1} = \frac{14}{14} = 1$$

$$11) \quad \text{Calcular } \frac{5}{6} \text{ de } 42$$

La palabra **de** indica **multiplicación**

$$\frac{5}{6} \times \frac{42}{1} = \frac{210}{6} = \frac{(210 \div 2)}{(6 \div 2)} = \frac{105}{3} = \frac{(105 \div 3)}{(3 \div 3)} = \frac{35}{1} = 35$$

$$12) \quad \text{Hallar los } \frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} \text{ de } 30$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{30}{1} = \frac{2 \times 4 \times 30}{3 \times 5 \times 1} = \frac{240}{15} = \frac{(240 \div 15)}{(15 \div 15)} = \frac{16}{1} = 16$$

1.2.3.4. División de Fraccionarios:

Ejemplo:

$$\frac{8}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$$

Uno de los métodos para dividir dos fraccionarios es Multiplicar el primer fraccionario, en este caso $8/5$ por el recíproco del segundo. Este recíproco se logra Invertiendo el numerador y el denominador, o sea que Si se tiene $3/2$, su recíproco será $2/3$.

$$13) \quad \frac{9}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{36}{24} = \frac{(36 \div 2)}{(24 \div 2)} = \frac{18}{12} = \frac{(18 \div 2)}{(12 \div 2)} = \frac{9}{6} = \frac{(9 \div 3)}{(6 \div 3)} = \frac{3}{2}$$

$$14) \quad 8 \div \frac{9}{5} = \frac{8}{1} \times \frac{5}{9} = \frac{40}{9}$$

15) $\frac{7}{9} \div 6 = \frac{7}{9} \div \frac{6}{1} = \frac{7}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{54}$

16) $\frac{8}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{\frac{9}{\frac{2}{3}}}$

Extremo

Medios

Extremo

Teniendo en cuenta que un fraccionario siempre indica division, es decir si se tienen $\frac{8}{9}$ significa que 8 se tiene que dividir por 9, un fraccionario dividido por otro tambien se puede colocar uno sobre otro, en este caso **$\frac{8}{9}$ sobre $\frac{2}{3}$** .

$$\frac{8}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{8}{\cancel{9}^3}}{\frac{2}{\cancel{3}_3}} = \frac{8 \times 3}{9 \times 2} = \frac{24}{18} = \frac{(24 \div 6)}{(18 \div 6)} = \frac{4}{3}$$

Este tipo de operación se efectúa por el método **PRODUCTO DE EXTREMOS**, como es el caso (8×3) sobre **PRODUCTO DE MEDIOS** (9×29) .

$$17) \quad \frac{16}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{16}{\frac{7}{\frac{3}{4}}} = \frac{16 \times 3}{7 \times 4} = \frac{48}{28} = \frac{(48 \div 4)}{(28 \div 4)} = \frac{12}{7}$$

$$18) \quad 12 \div \frac{7}{6} = \frac{12}{1} \div \frac{7}{6} = \frac{12}{\frac{7}{6}} = \frac{12 \times 6}{1 \times 7} = \frac{72}{7}$$

$$19) \quad \frac{7}{6} \div 5 = \frac{7}{6} \div \frac{5}{1} = \frac{7}{\frac{6}{1}} = \frac{7 \times 1}{6 \times 5} = \frac{7}{30}$$

1.2.3.5. Números Decimales:

Dentro del conjunto de números racionales, se encuentra un conjunto numérico que es importante analizarlo y corresponde a los números decimales. Todos hemos escuchado la palabra decimal y globalizamos el concepto a números como 0,32, 1,25, 7,4 y 3,25 entre otros. En esta parte se pretende dar un formalismo matemático a este sistema numérico que es muy aplicado en todas las áreas del conocimiento.

Para hablar de números decimales, es pertinente recordar qué es un racional y especialmente los números fraccionarios, ya que todo número fraccionario se puede escribir como número decimal.

1.2.3.5.1. Fracción decimal: se refiere a toda fracción, cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, como por ejemplo:

$\frac{8}{10}$ También se puede representar como 2×10^{-1} ,

$\frac{57}{100}$ También se puede representar como 57×10^{-2}

$\frac{5}{1000}$ También se puede representar como 5×10^{-3}

El número decimal que se obtiene de una fracción decimal se halla de la siguiente forma: se coloca el numerador que tiene la fracción decimal, colocándole una coma (,) o un punto (•) a su derecha, luego esta coma o punto se corre hacia la izquierda cuantos ceros tenga el denominador, por ejemplo:

$\frac{8}{10}$ Se coloca el numerador (8,) y como el denominador (10) tiene un solo cero, se cuenta una sola cifra hacia la izquierda, partiendo del (8), entonces el número decimal queda:

0,8

$\frac{17}{100}$ Se deja el numerador (17) y como el denominador tiene dos ceros, se cuentan dos cifras hacia la izquierda colocándose la respectiva coma. 0,17

$$\frac{56}{1000}$$

Lo mismo que en el caso anterior, se deja el numerador (56) y se corren hacia la izquierda tres cifras, porque el denominador tiene

tres (3) ceros : 0,056

$$\frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{7}{100} = 0,07$$

$$\frac{9}{1000} = 0,009$$

$$\frac{85}{1000} = 0,085$$

1.2.3.5.2. OPERACIONES CON LOS NUMEROS DECIMALES:

Las operaciones que se pueden realizar con este tipo de números son iguales a las que se hacen con los enteros

• Suma:

Se colocan los sumandos unos debajo de los otros, de tal forma que las comas o puntos decimales queden en columna. Se realiza la operación en forma similar a los enteros, colocando en el total la coma de manera que coincida con la columna de las comas.

Ejemplo:

Realizar la siguiente suma:

Columna de las
comas

↓

$$\begin{array}{r}
 0,19 \\
 3,81 \\
 0,723 \\
 \underline{0,1314} \\
 4,8544
 \end{array}$$

• **Resta:** se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de tal forma que las comas de los decimales queden en columna y se realiza la operación igual que con los números enteros. Ejemplo

$$\begin{array}{r} 539,72 \\ - 11,184 \\ \hline \end{array}$$

Cuando el minuendo o el sustraendo tienen diferentes número de cifras decimales, se pueden completar con ceros, por ejemplo 539,72 tiene dos cifras decimales, mientras 11,184, entonces se le coloca un cero a 539,72 para igualarlos.

$$\begin{array}{r} 539,720 \\ - 11,184 \\ \hline 528,536 \end{array}$$

• **Multiplicación:** Para multiplicar dos decimales o un entero por un decimal, se multiplican como si fueran enteros, corriéndose, en el producto, de la derecha a la izquierda tantas cifras tengan el multiplicando y el multiplicador.

$$\begin{array}{r} 14,35 \\ \times 8,34 \\ \hline 5740 \\ 4305 \\ 11480 \\ \hline 119,6790 \end{array}$$

Se corren cuatro cifras a la izquierda porque cada uno de los factores tiene dos cifras decimales.

• **División:** Para dividir números decimales, si no son homogéneos, es decir si no tienen el mismo número de cifras decimales, se selecciona el término que tenga mayor número de cifras decimales y se multiplican los dos términos (dividendo y divisor) por la unidad seguida del número de ceros igual al número de cifras decimales que tiene el de mayor número. Luego si se realiza la división de la misma forma que en los números enteros y que ya a esta altura del curso se debe dominar.

Ejemplo: Dividir

$$0,5 \div 0,001$$

$$0,5 \times 1000 = 500$$

$$0,001 \times 1000 = 1$$

Como estos números no son homogéneos, se procede a transformarlos en homogéneos, para esto se selecciona el que mayor número de decimales tiene, en este caso 0,001 este número tiene tres cifras decimales y se procede a multiplicar los dos términos (dividendo y divisor) por la unidad con el número de ceros equivalente a las tres cifras decimales es decir por 1000.

Recordando que para multiplicar por 10, 100, 1000, ... se corre la coma hacia la derecha tantas veces indica el número de ceros, por ejemplo si es por 100 se corren dos cifras, si es por 1000 se corren tres cifras.

Ahora se realiza la división común y corriente: $500 \div 1 = 500$

Ejemplo: Dividir:

$$99 \div 0,0003$$

Se convierte a homogéneos y el mayor número de decimales tiene 4 cifras, entonces los dos, tanto dividendo como divisor se multiplican por 10000.

$$99 \times 10000 = 990000$$

$$0,0003 \times 10000 = 3$$

Ahora si se procede a realizar la división con números enteros:

$$990000 \div 3 = 330000$$

1.2.3.5.3. Clase de números decimales:

- **Decimales exactos:** Son aquellos que provienen de una fracción, cuya división es exacta.

Ejemplos:

$$\frac{2}{4} = 0,5$$

porque al efectuar la división su residuo es cero

$$\frac{12}{40} = 0,3$$

- **Decimales periódicos:** Son aquellos que provienen de una fracción, que al hacer la división presenta un residuo que se repite infinitas veces.

Por ejemplo : $\frac{2}{9}$ origina un decimal periódico.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ \hline 0,222 \end{array}$$

Se puede observar en la división que el residuo siempre va ha ser el número 2.

Entonces 0.222... es un decimal periódico, el número que se repite es el dos.

0,3434343... Es un decimal periódico, donde el número que se repite es el 34.

5,13213213213... Es un decimal periódico, cuyo valor que se repite es el 132



Cuando los números decimales periódicos no tienen fin, existe una manera de escribirlos en forma simplificada y es colocándole una rayita encima a los números que se repiten.

Ejemplos:

$0, \overline{8}$ La rayita encima del ocho, indica que este se repite infinitas veces.

$0, \overline{87}$ Indica que el 87 se repite infinitas veces.

$7, \overline{524}$ Indica que el 524 se repite infinitas veces.

• **Decimal mixto:** Es aquel que tiene una parte exacta y una parte periódica.

Veamos algunos ejemplos:

0, 8333.... En este número la parte exacta es el 8 y la parte periódica es el 3.

7,99555... En este numero la parte exacta es el 99 y la parte periodica es el 5.

0, 763494949.... En este número la parte exacta es el 763 y la parte periódica el 49.

Cabe anotar que los anteriores números se pueden escribir también de la siguiente forma:

$$0, 83333... = 0, 8\bar{3}$$

$$7,99555... = 7, 99\bar{5}$$

$$0,7634949... = 0, 763\overline{49}$$

• **Decimales no periódicos:** Son números que provienen de una fracción racional, que al hacer la división, el residuo en cada paso de está es diferente. Estos decimales tienen gran importancia por las características especiales que tienen, lo cual se puede estudiar en un curso de Topología. Por ahora lo primordial es conocer este conjunto numérico.

Algunos ejemplos de este tipo de decimales son:

0,12345....

2,3467214

0,123132452856....

Como se puede observar, estos números **No** tienen una secuencia de repetición.

Dos números irracionales que merecen ser destacados son:

Número $\pi \cong 3,141592654.....$, se define como la relación de :

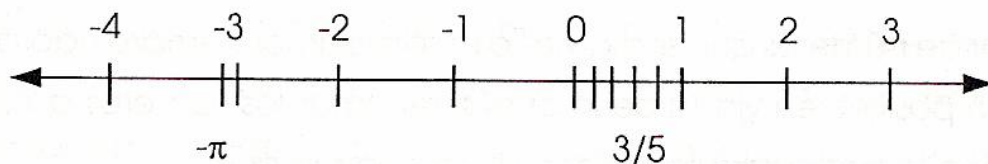
$\frac{\text{Longitud de la Circunferencia (L).}}{\text{Diámetro (D)}}$

Este número es utilizado para la medición de ángulos en el sistema hexadecimal, o sea los radianes, donde se sabe que $\pi = 180^\circ$ o sea media vuelta a un círculo.

Número $e = 2,71828183....$ usando como base de los logaritmos naturales o Neperianos.

1.2.4 NUMEROS REALES:

En general los números reales son todos los que hemos estudiado hasta el momento. Una de las principales características de los números reales es la de poder ser graficados en una recta. Esta es la recta real y esta constituida por puntos los cuales representan un número real que puede ser racional o irracional (estos últimos, se refieren a los que tienen un número infinito de decimales, por ejemplo, el número $\pi \cong 3,14159....$, por este motivo no es considerado fraccionario. Los números irracionales se denotan con la letra (Q')



En la gráfica, las líneas verticales representan cada uno de los enteros, que se muestran en la parte superior, los de la izquierda son los enteros negativos (Z^-) y los de la derecha son los enteros positivos (Z^+), las flechas que se observan en los extremos indican que la recta se extiende hasta el infinito en ambos sentidos. Es importante resaltar que también se pueden representar los números racionales (Q), por ejemplo $3/5$, es decir se divide la unidad en cinco partes y se toman tres (3) partes de esta. Los números irracionales también pueden ser mostrados en la recta real, con la salvedad que deben ser aproximados a un número decimal finito, en el presente ejemplo $-\pi$ es aproximadamente -3,14.

1.2.5. PROPIEDADES DE LOS NUMEROS:

Para que las matemáticas logaran entenderse unos con otros hubo necesidad de proponer ciertas reglas mínimas de manipulación de los números y símbolos para poder operarlos, esta forma estricta de comunicación de sus conocimientos permitió un sólido desarrollo de esta ciencia y de otras que la usan como herramienta, por ejemplo la física. A continuación describiremos las propiedades o reglas básicas de las que hablamos para las operaciones de la suma y la multiplicación.

- **UNICIDAD:** Para todo par de números que sumamos o multiplicamos siempre habrá un solo resultado posible, en virtud de lo cual si tenemos los números a,b,c y d (que pueden tomar cualquier valor real) se cumple que:

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$



En álgebra la multiplicación de dos variables se puede escribir mediante un punto ($a \bullet b$) o simplemente colocándolas juntas (ab), para evitar confundir el operador “por” (\times) con la letra equis.

Veamos un ejemplo:

$$\frac{8}{4} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} = 0.5$$

Por lo que,

$$2 + 0.5 = \frac{8}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad 2.5 = \frac{10}{4}$$

Por analogía:

$$2 \bullet 0.5 = \frac{8}{4} \bullet \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{8}{8}$$

• CONMUTATIVA:

Si a y b son números reales, se cumple que:

$a + b = b + a$ (El orden de los sumandos no altera la suma)

$ab = ba$ (El orden de los factores no altera el producto)

• ASOCIATIVA:

Las operaciones de suma y multiplicación se realizan siempre entre dos números a la vez, así si queremos sumar los números 1,3 y 5 sumamos primero dos de ellos y más adelante sumamos el tercero al resultado, una posible forma de hacerlo sería: $1 + 3 = 4$, y $4 + 5 = 9$, pero podríamos empezar haciendo $1 + 5 = 6$ y después $6 + 3 = 9$ para obtener el mismo resultado.

Análogamente con la multiplicación primero haríamos $1 \times 3 = 3$ y luego $3 \times 5 = 15$ pero es equivalente a: $1 \times 5 = 5$ y $5 \times 3 = 15$. A esta característica de los reales se le llama propiedad asociativa, por lo tanto, con a, b y c reales se cumple que:

$$(a+b)+c = a + (b + c)$$

$$(ab) c = a (bc)$$

• MODULOS DE LA SUMA Y LA MULTIPLICACION:

Cuando a una cantidad real se le suma cero (0), el resultado es la misma cantidad, por lo tanto, **el numero cero (0) se conoce como el módulo de la suma.**

Por ejemplo: $75 + 0 = 75$; $15 + 0 = 15$; $27 + 0 = 27$

En **la multiplicación el modulo es el uno (1)**, porque al multiplicar un numero real por uno (1) se obtiene el mismo numero.

Ejemplos: $7 \times 1 = 7$; $58 \times 1 = 58$; $999 \times 1 = 999$

• INVERSO ADITIVO Y MULTIPLICATIVO:

Se conoce como inverso aditivo se refiere al número que sumando con su opuesto da como resultado cero (0).

Ejemplos:

$7 + (-7) = 0$, entonces el inverso aditivo de 7 es -7 .

$-68 + 68 = 0$ entonces el inverso aditivo de -68 es 68.

El inverso multiplicativo o reciproco se refiere al numero que multiplicado por su respectivo reciproco se obtiene como producto el numero uno (1) o la unidad.

Ejemplos:

$7 \times \frac{1}{7} = 1$; entonces el reciproco de 7 es $\frac{1}{7}$ o también $\frac{1}{7}$ es el reciproco de 7.

Una manera de presentar los recíprocos es con el exponente negativo (-) por ejemplo:

El recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$ porque $2 \times \frac{1}{2} = 1$, la otra forma de expresarlo es

$$3 \times 2^{-1} = 1.$$

El recíproco de 7 es $\frac{1}{7}$ porque $7 \times \frac{1}{7} = 1$ o también $7 \times 7^{-1} = 1$.

El recíproco de $\frac{6}{5}$ es $\frac{5}{6}$ porque $\frac{6}{5} \times \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} = 1$.

• DISTRIBUTIVA:

Cuando necesitamos hacer una multiplicación complicada, como por ejemplo 6×26 lo más fácil (en caso de no conocer de memoria la tabla del veintiséis) es descomponer uno de los números así:

$26 = 20 + 6$ y luego multiplicar cada uno de los nuevos sumandos por 6 así: $(20 \times 6) + (6 \times 6)$ lo que nos facilita la labor. El resultado final será $120 + 36 = 156$. La propiedad que nos permite hacer lo anterior es precisamente la propiedad distributiva, en la cual si a, b y c son reales:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

Esta propiedad nos enseña la forma correcta de “romper” paréntesis, siempre debemos tener en cuenta que se debe multiplicar al factor único (a en nuestro caso) por todos los sumandos el paréntesis, sin excepción.

Por ejemplo:

$$54 (2/27 + 5/2) = 54 (2/27) + 54 (5/2) = 4 + 135 = 139$$

1.2.6. VALOR ABSOLUTO:

El valor absoluto es una propiedad asociada a cada número que se denota por $|x|$, donde x es cualquier número real. Para poder comprender mejor la propiedad de valor absoluto lo mejor es utilizar algunos ejemplos:

$$|-7| = +7$$

$$|+5| = +5$$

$$\left|+\frac{3}{4}\right| = +\frac{3}{4}$$

$$|0| = 0$$

$$|+7-10| = +3 \text{ (Se hace primero la operación dentro del valor absoluto).}$$

En síntesis el valor absoluto le asigna el valor positivo correspondiente a cualquier número, sea positivo o negativo. Al cero (que no es positivo ni es negativo) le asigna el cero (0).

Como el conjunto de los Reales involucra a los conjuntos N , Z , Q , Q^- entonces las operaciones que se pueden realizar con este tipo de conjuntos son: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

Como se supone que a esta altura, las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) ya han sido estudiadas y asimiladas, a continuación solamente se trabajarán las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación).

AUTOEVALUACION 1: CONJUNTOS Y NUMEROS

1. Diga cuál de los siguientes conjuntos es un conjunto vacío?

a- $\{0\}$

b- $\{\}$

c- ϕ

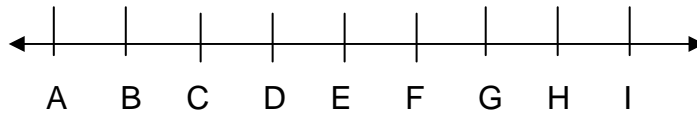
d- $\{\phi\}$

2. Basándose en la recta siguiente conteste:

a- ¿Cuántos números enteros hay entre A y F?

b- ¿Qué número es la mitad entre C y G?

c- ¿Qué número representa un tercio entre B y H?



3. Sean a, b, c y d números reales:

¿Es $a+3=b+3$?

¿Es $3.b = b.3$?

4. ¿Qué propiedad o propiedades justifican los siguientes enunciados?

a- $(8+10)+24=8+(10+24)$

b- $7(2+3)=7(3+2)$

5. Usando las propiedades descritas en el capítulo halle:

$(31 \times 7) + (31 \times 3)$

$15 (3/5 + 2/3)$

6. ¿Cuales de los siguientes enunciados son verdaderos?

$$a- | +5 | + | -2 | = 7$$

$$b- | +5 | - | -5 | = 10$$

$$c- | +5 | + | -5 | = 2 \bullet | +5 |$$

$$d- | -3 + -6 | = 9$$

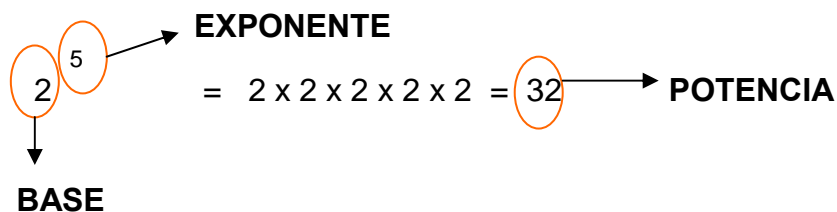
$$e- - | +8 - 4 | = 4$$

Por ultimo demuestre mediante diagramas de Venn que:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.2.7. POTENCIACION:

La potenciación es una operación que simplifica la multiplicación, ya que se puede decir que la potenciación es una multiplicación sucesiva. Esta operación es útil para abordar temas como la suma y resta de fraccionarios y simplificación, entre otras, por lo tanto es necesario tener muy claro el concepto de potenciación.



BASE: Se refiere al número que se multiplica por si mismo, en este caso **2**

EXPONENTE: Es el número de veces que se repite (o que se multiplica) la base, en este caso **5**

POTENCIA: Es el resultado de multiplicar la base tantas veces indica el exponente, en el ejemplo, **32**

Veamos otros ejemplos de potenciación:

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$$

$$b^5 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$$

Matemáticamente la potenciación se representa:

$$a^n = p$$

a = **BASE**. Número que se multiplica por si mismo.

n = **EXPONENTE**. Las veces que se multiplica la base por si misma.

p = **POTENCIA**. Es el resultado de la operación.

-) **Potencia de base positiva**. Cuando la base es positiva y el exponente positivo, la potencia es positiva. Es el caso de los ejemplos anotados anteriormente. A continuación se relacionan otros ejemplos:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$$

$$12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^3 = 1728 \quad [\text{comprobar los resultados}]$$

-) **Potencia de base negativa**. Cuando la base es negativa, se presenta dos casos:

- Si el exponente es **PAR**, la potencia es positiva.

Ejemplos

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

$$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^4 = 625$$

- Si el exponente es **IMPAR**, la potencia es negativa.

Ejemplos

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

$$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^5 = -3125$$

-) Potencia de exponentes negativo:

Cuando el exponente es negativo, aplicamos el recíproco para desarrollar la operación.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$$

Se debe tener cuidado con el manejo de los signos negativos, el paréntesis indica que el número está afectado por el signo, veamos los siguientes casos:

$$(-7)^2 = 49, \text{ mientras que } -7^2 = -49$$

1.2.7.1. PROPIEDADES DE LA POTENCIACION:

• **Potencia de exponente cero:** Toda base cuyo exponente es cero (0), la potencia es la unidad (1).

$$3^0 = 1$$

Ejemplos:

$$x^0 = 1$$

$$36^0 = 1$$

• **Potencia de exponente uno:** Toda base cuyo exponente es la unidad, tiene como potencia, la misma cantidad. (Ley modulativa de la potencia).

$$3^1 = 3$$

Ejemplos

$$57^1 = 57$$

$$x^1 = x$$

• **Potencia de bases iguales:** cuando se tienen dos o mas bases iguales multiplicándose entre si, se operan, dejando la misma base y sumando los exponentes.

$$3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^6 = 3^{3+5+6} = 3^{14}$$

Ejemplos:

$$7^4 \cdot 7^3 \cdot 7^1 = 7^{4+3+1} = 7^8$$

$$z^a \cdot z^b \cdot z^c = z^{a+b+c}$$

• **Potencia de un producto:** cuando se tiene un producto de varios términos, elevados al mismo exponente, se expresa como producto de cada uno de los términos elevados al mismo exponente.

$$(4 \cdot 7 \cdot 9)^3 = 4^3 \cdot 7^3 \cdot 9^3$$

$$(x \cdot y \cdot z)^b = x^b \cdot y^b \cdot z^b$$

• **Potencia de un cociente:** para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes

$$3^8 \div 3^5 = 3^{8-5} = 3^3$$

Ejemplos:

$$15^7 \div 15^4 = 15^{7-4} = 15^3 = 3375$$

$$3^6 \div 3^1 = 3^{6-1} = 3^5$$

$$C^7 \div C^5 = C^{7-5} = C^2$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\left(\frac{y^a}{y^b}\right) = y^{a-b}$$

• **Potencia de una potencia:** Cuando una potencia esta elevada a otra potencia, la potencia tiene como base, la base de la potencia y como exponente el producto de los exponentes.

$$((3^4)^3) = 3^{4 \times 3} = 3^{12}$$

Ejemplos:

$$(((5^3)^5)^2) = 5^{3 \times 5 \times 2} = 5^{30}$$

$$(z^a)^b = z^{ab}$$

$$(((7^5)^4)^3) = 7^{5 \times 4 \times 3} = 7^{60}$$

• **Potencia de un exponente negativo:** Como vimos antes, cuando el exponente es negativo, se aplica el reciproco o inverso multiplicativo.

Ejemplos:

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

1.2.7.2. CLASES DE POTENCIAS:

Existen dos tipos de potencias especiales, que se identifican según su base.

• **Potencia Base Decimal:** es toda aquella potencia cuya base es 10.

Ejemplos:

$$10^2 = 100$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

• **Potencia Base Natural:** se refiere a toda aquella potencia cuya base es el número e. Conocido como el número de Euler ($e \cong 2,71828182.....$)

Ejemplos:

$$e^1 = e$$

$$e^3 = 20,08553$$

AUTOEVALUACION 2: POTENCIACION

Realizar las siguientes operaciones:

1) 9^0

2) -5^1

3) $(-5)^4$

4) $(-3)^2 + (-2)^3$

5) $(x^2 x^4)^3$

6) $(y^3 z^4)^5$

7) $\left(\frac{2^2 5^{-3}}{2^4 5^{-7}}\right)^3$

$$8). \quad (3^{-2} + [2^3 + 4^2] - 10^0)$$

$$9) \quad 5^3 + \frac{4^2}{3^{-2}} - (-7^{-2})$$

$$10) \quad \left[\frac{x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{y^{-3}z^{-4}3^4} \right]^2$$

1.2.8. RADICACION:

Es una operación inversa a la potenciación y consiste en hallar la **base**, conociendo el exponente y la potencia.

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

Entonces, para conocer la base se acude a la radicación $\sqrt[3]{343} = 7$ donde:

$\boxed{3}$ es el **Índice** de la raíz (en la potenciación es el exponente)

$\boxed{343}$ es el **radicando** (este número corresponde a la potencia en el caso de potenciación)

$\boxed{7}$ es la raíz cúbica (3) de 343 (en la potenciación corresponde a la base)

Matemáticamente la radicación se puede expresar así:

$$\sqrt[n]{r} = m$$

n = Índice, el cual es un número entero positivo, mayor o igual a 2.

r = Radicando, es la cantidad a la cual se le va a extraer la raíz n-esima. Esta cantidad puede ser positiva o negativa, según el caso.

m = La raíz n -ésima de r , este valor puede ser positivo, negativo o los dos, según el caso.

Entonces la expresión $\sqrt[n]{r} = m$ también se puede expresar como: $m^n = r$

1.2.8.1. CLASE DE RAICES:

- **Raíces de índice par: ($r = \text{par}$)**

Las raíces de índice **par** tienen solución para números reales (radicando) mayores o iguales a cero. $r \geq 0$ en este caso la solución es doble, es decir una es positiva y la otra negativa.

Ejemplos:

$$\sqrt{25} = \pm 5, \text{ porque } (+5)^2 = 25 \text{ y } (-5)^2 = 25$$

$$\sqrt{36} = \pm 6, \text{ porque } (+6)^2 = 36 \text{ y } (-6)^2 = 36$$



Cuando el índice es dos (2) no se escribe, porque se asume que este es el mínimo que existe.

Ejemplos:

$$\sqrt{625} = 25$$

$$\sqrt[4]{4096} = 8$$

Cuando el radicando es negativo la solución NO es real, este tipo de solución se le ha llamado **IMAGINARIA**, la cual se estudiará más adelante.

- **Raíces de índice impar: ($r = \text{impar}$)**

Las raíces de índice impar tienen solución para cualquier número real $r \in \mathbb{R}$. La solución depende de signo del radicando. Si el radicando es positivo, la

solución es positiva, pero si el radicando es negativo, la solución es negativa. Lo anterior indica que la solución de raíces de índice impar es única.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{729} = +9 \text{ porque: } 9^3 = 729$$

$$\sqrt[5]{-7776} = -6 \text{ porque: } (-6)^5 = -7776$$

1.2.8.2. PROPIEDADES DE LOS RADICALES:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

(es decir, un radical se puede presentar de dos formas: **con el**

símbolo de la radicación $\sqrt{}$ o simplemente **el radicando con exponente fraccionario**, donde el numerador corresponde al exponente que tiene el radicando y el denominador al índice de la raíz.

Por ejemplo $\sqrt[5]{25^2}$ puede representarse también como $25^{\frac{2}{5}}$; donde (2) es el exponente que tiene el radicando y (5) es el subíndice de esta raíz.

Ejemplos:

$$\sqrt[7]{8^2} = 8^{\frac{2}{7}}$$

$$\sqrt[6]{9^5} = 9^{\frac{5}{6}}$$

$\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ En este caso como podemos observar el radicando 3 no tiene exponente, se supone que es uno (1).

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{25} \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$$

OJO:

$$\sqrt{a+b} \text{ Es diferente } \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- $\boxed{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}}$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$$

- $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$ porque $a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{8^5} = 8 \text{ Porque } 8^{\frac{5}{5}} = 8^1 = 8$$

$$\sqrt[3]{5^3} = 5 \text{ Porque } 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

AUTOEVALUACION 3: RADICACION

Realice los siguientes ejercicios:

1) $\sqrt[3]{543}$

2) $\sqrt[3]{0}$

3) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

4) $\sqrt[5]{-256}$

5) $\sqrt{\frac{1}{25}}$

6) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$

7) $\sqrt{-16} + \sqrt[4]{-16}$

8) $\frac{5}{\sqrt[3]{-125}}$

9) $\sqrt[4]{x^4 y^2 z^6}$

10) $\sqrt[5]{\frac{1}{y^2}}$

1.2.9. LOGARITMACION:

Es otra de las operaciones inversa a al potencia y consiste en hallar el **exponente**, conociendo la base y la potencia.

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

Como en la logaritmación lo que se halla es el exponente, en el ejemplo anterior queda: **Log**₇ **343** = **3** (logaritmo en base 7 de 343 es igual a 3).

La forma general de representar la logaritmación es:

$$\text{Log}_a x = y$$

Es lo mismo que decir:

$$a^y = x$$

Donde:

a = Base del logaritmo, es un número mayor que cero, pero diferente de uno,

$a > 0$, y $a \neq 1$. Cuando a equivale a 10 se le llama **logaritmo decimal** y se representa **Log**. Así mismo, cuando a vale e (Número de Euler) se le llama **logaritmo natural o neperiano** y se representa **Ln**.

x = Número al que se le extrae logaritmo. Este número x siempre será

positivo $x > 0$. Esto nos indica que el **logaritmo de números negativos NO EXISTEN**, al igual que el logaritmo de cero o de un numero complejo.

y = Es el logaritmo, o sea el exponente al que se eleva a para ser igual a x

Este es positivo si x es mayor que uno ($x > 1$), y es negativo si x esta entre cero y uno ($0 < x < 1$).

Es importante recordar que el símbolo $>$ indica mayor que y el símbolo $<$ indica menor que, por ejemplo $5 > 3$ (indica que 5 es mayor que 3) y $7 < 10$ (indica que 7 es menor que 10).

Ejemplos:

$$\text{Log}_2 64 = 6 \text{ porque } 2^6 = 64$$

$$\text{Log}_5 25 = 2 \text{ porque } 5^2 = 25$$

$$\text{Log}_4 16 = 2 \text{ porque } 4^2 = 16$$

$$\text{Log}_a b = 4 \text{ porque } a^4 = b$$

• **Logaritmos decimales:** se caracterizan por tener la base 10

$$\text{Log}_{10} 10 = 1 \text{ porque } 10^1 = 10$$

$$\text{Log}_{10} 100 = 2 \text{ porque } 10^2 = 100$$

$$\text{Log}_{10} 10000 = 4 \text{ porque } 10^4 = 10000 \text{ y así sucesivamente.}$$

$$\text{Log}_{10} 1 = 0 \text{ porque } 10^0 = 1 \text{ (recordemos que la potencia de una base elevada}$$

al exponente cero (0) es igual a 1).

Es de aclarar que en los **Logaritmos Decimales** no es necesario colocar la base, se sobreentiende que es diez (10), entonces se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\text{Log } x = y$$

$$\text{Log } 1 = 0$$

$$\text{Log } 10 = 1$$

$$\text{Log } 1000 = 3$$

$$\text{Log } \frac{1}{10} = -1 . \text{ Como podemos observar en este caso el } \mathbf{\text{logaritmo es}}$$

Negativo porque la base $\frac{1}{10}$ esta entre cero y uno.

$$\text{Log } \frac{1}{100} = -2$$

• **Logaritmo Natural:**

Como ya se había dicho anteriormente, cuando la base de un logaritmo es el número e , se le conoce como **logaritmo natural**, se puede escribir :

$$\text{Log}_e x \text{ o } \text{Ln}(x)$$

Ejemplos:

Utilizando la calculadora, hallar el logaritmo de los siguientes números:

$$\text{Ln } 1 = 0$$

$$\text{Ln } 2 = 0,69314$$

$$\text{Ln } 20 = \quad (\text{completar})$$

$$\text{Ln } 0,5 = \quad (\text{completar})$$

1.2.9.1. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS:

→ Logaritmo de uno es igual a cero: $\text{Log } 1 = 0$

→ Logaritmo de la base: $\text{Log}_n n = 1$ Ejemplo: $\text{Log}_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$

→ Logaritmo de un producto: $\text{Log}_a PQ = \text{Log}_a P + \text{Log}_a Q$

Ejemplo:

$$\text{Log}_2 (8 \times 64) = \text{Log}_2 8 + \text{Log}_2 64 = 3 + 6 = 9$$

→ Logaritmo de un cociente: $\text{Log}_a \frac{P}{Q} = \text{Log}_a P - \text{Log}_a Q$

Ejemplo:

$$\text{Log}_5 \left(\frac{125}{25} \right) = \text{Log}_5 125 - \text{Log}_5 25 = 3 - 2 = 1$$

\downarrow
3

\downarrow
2

Porque $5^3 = 125$ y Porque $5^2 = 25$

AUTOEVALUACION 4: LOGARITMACION

- 1) $\text{Log}_4 64$
- 2) $\text{Log}_2 32$
- 3) $\text{Log}_5 125$
- 4) $\text{Log}_3 \frac{1}{9}$
- 5) $\text{Log } 20$
- 6) $\text{Log } 10 + \text{Log } 1000$
- 7) $\text{Log } 50 - \text{Log } 70$
- 8) $\text{Ln } 10$
- 9) $\text{Ln } 100$
- 10) $\text{Ln } 1 + \text{Ln } (\frac{1}{2})$

1.2.10 NUMEROS COMPLEJOS:

Para hablar de los números complejos, es necesario primero estudiar los números imaginarios, lo cual haremos a continuación:

- **Números imaginarios:**

Los números imaginarios son aquellos que se obtienen de las raíces de números negativos, cuando el índice es par. Por ejemplo el valor de $\sqrt{-9}$ no tiene solución en los reales, ya que **NO** existe un número real que al elevarlo a la dos (2) se obtenga -9, o sea : $x^2 = -9$ no tiene solución en los reales.

Para dar solución a este tipo de operaciones, los matemáticos han encontrado un sistema de numeración llamados **LOS IMAGINARIOS**, los cuales sirven para obtener la raíz par de un número negativo.

Los principios fundamentales de los números imaginarios son:

$$\boxed{\sqrt{-1} = i} \quad \boxed{-1 = i^2}$$

Analicemos ahora como es el comportamiento de las potencias del número imaginario.

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} = i \\ i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 &= (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -1i = -i \end{aligned}$$

Para resolver un radicando negativo el índice par, se procede de la siguiente forma:

Si se tiene $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4 \cdot i = 4i$ porque la raíz de 16 es 4 y $\sqrt{-1} = i$.

$\sqrt{-45} = \sqrt{45 \cdot (-1)} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot (-1)}$ Porque 45 se puede descomponer en $9 \cdot 5$, nueve tiene raíz exacta que es 3 mientras que 5 no tiene raíz exacta entonces queda dentro del radical. Así mismo, $\sqrt{-1} = i$, entonces el resultado es $3\sqrt{5}i$

Numeros Complejos:

Los números complejos son de la forma:

$$\boxed{a + bi} \text{ donde:}$$

a y b = parte real, i = parte imaginaria

Los siguientes son números complejos:

$$7 + 8i \quad -4 + 5i \quad 7i \quad 1 - i \quad -4 - 5i \quad 10 + 8i$$



Todo número complejo tiene su conjugado, el cual es el mismo número pero con el signo contrario en la parte imaginaria.

Numero	Conjugado
$20 - 8i$	$20 + 8i$
$14 + 7i$	$14 - 7i$
$-13 - 3i$	$-13 + 3i$

1.2.10.1. OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS:

→ **Suma:** Dos o más números complejos se suman operando termino a término.

Ejemplos

$$(4 + 8i) + (5 + 6i) = (4+5) + (8i+6i)$$

Se suman las partes reales entre si y las imaginarias entre si.

$$(7-9i) + (10+10i) = (7+10) + (-9i+10i) = 17 + 1i$$

→ **Resta:** Se opera igual que la suma, solo que en este caso es restando.

Ejemplos:

$$(7+8i) - (12+5i) = (7-12) + (8i-5i) = -5 + 3i$$

$$(7-4i) - (14-8i) = (7-14) + (-4i+8i) = -7 + 4i$$

$$(-15-7i) - (-7-3i) = (-15+7) + (-7i+3i) = -8 - 4i$$

Me permito recordarles que cuando se suma o resta signos iguales, se realiza una suma y se deja el mismo signo, mientras que si se tienen signos contrarios, se restan y se deja el signo del numero mayor.

Del resultado anterior, se puede observar que la suma ó resta de números complejos, origina otro número complejo.

→**Multiplicación:** La operación se hace de la siguiente manera:

$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo:

$$(5+3i) \cdot (4+7i) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 7i + 3i \cdot 4 + 3i \cdot 7i = 20 + 35i + 12i + 21i^2 = 20 + 47i + 21i^2$$

Recordemos que $i^2 = -1$

$$\text{Entonces: } (5+3i) \cdot (4+7i) = 20 + 47i - 21 = -1 + 47i$$

Ejemplo:

$$(-3-8i) \cdot (2 - 4i) = -3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-4i) + (-8i) \cdot 2 + (-8i) \cdot (-4i) = -6 + 12i - 16i + 32i^2$$

$$(-3-8i) \cdot (2 - 4i) = -6 - 4i + 32i^2 = -6 - 4i - 32 = -38 - 4i$$

Como se observar, la multiplicación de números complejos origina otro complejo.

→**División:** Para dividir números complejos, se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. Veamos:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+db) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos:

$$\frac{3+5i}{3-2i} = \frac{3+5i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{9+6i+15i+10i^2}{9-6i-6i-4i^2} = \frac{9+21i-10}{9+4} = \frac{-1+21i}{13}$$

$$\frac{1-8i}{2+i} = \frac{1-8i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i-16i+8i^2}{4-i^2} = \frac{2-17i-8}{4+1} = \frac{-6-17i}{5} = \frac{1}{5}(-6-17i)$$

AUTOEVALUACION 5: NUMEROS COMPLEJOS

Efectuar las siguientes operaciones:

1) $i^4 =$

2) $i^5 =$

3) $\sqrt{-36} =$

4) $\sqrt{-50}$

5) $\sqrt{-98} - \sqrt{-162} =$

6) $\sqrt{-25} + \sqrt{-36} =$

7) El conjugado de $(-5+4i)$ es:

Realizar las operaciones indicadas:

8) $(a+bi) + (x-yi)$

9) $(-5i+3) - (8+3i)$

10) $(3-8i) \div (4+2i)$

11) $i \cdot (3-i)$

CAPITULO 2

ÁLGEBRA

INTRODUCCION:

Estudiar matemáticas es como hacer un repaso por la historia de la humanidad, sobretodo por las formas de organizar los pensamientos que han usado nuestros ancestros. Medir y contar fueron las primeras actividades matematicas del hombre primitivo. Haciendo marcas en los troncos de los arboles lograban, estos primeros pueblos, la medicion del tiempo y el conteo del numero de animales que poseian; asi fue que surgio la Aritmética. El origen del Álgebra es posterior. Pasaron cientos de siglos para que el hombre alcanzara un concepto abstracto del número, base fundamental para la formación de la ciencia algebraica. El álgebra es, por lo tanto, una de estas “formas de pensar” de las que hablamos, y es el primer gran paso para generalizar procesos matematicos. De ahora en adelante podremos estar preparados para dar respuestas a problemas más grandes, para los cuales anteriormente deberíamos hacer largos y desgastantes procesos de solución.

AUTOEVALUACION INICIAL

Así como en el capítulo anterior, lo invitamos a desarrollar esta evaluación, con el propósito de que establezca qué tanto sabe sobre la temática que se va a tratar y así se motive para aprender las temáticas que crea no domina.

1. Simplificar: $-\{-[-(a+b-c)]\}-\{+[-(c-a+b)]\}+\{-[-a+(-b)]\}$
2. Multiplicar: $(3a^2-2a^2+5a-2)\times(2a^2+4a-3)$
3. Dividir: $(6+x^2+5x)\div(x+2)$

Escribir por simple inspección el resultado de:

4. $(1-4ax)^2$
5. $(5a+x)^3$

6. $\frac{9-a^2}{3-a^2}$

Factorizar:

7. $a^2+a-ab-b$

8. $1-4c+4c^2$

9. $7b^2+6b^4-20$

10. Reducir a su más simple expresión: $\frac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$

11. Simplificar: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

2. ALGEBRA:

Es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible. Al igual que para jugar un partido de basketball es necesario saber cuáles son las Reglas del juego, para el entendimiento del álgebra es necesario conocer las reglas que se deben cumplir como por ejemplo, no se puede factorizar si no se sabe como sumar o restar términos semejantes, no se puede simplificar si no se tiene conocimiento sobre la factorización. A continuación se hace una síntesis de las principales pautas para el desarrollo del álgebra.

2.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Las expresiones algebraicas son combinaciones de números y letras unidos por las operaciones fundamentales del álgebra. Estas expresiones están formadas por:

⇒ **Términos:** Los cuales están compuestos por el **signo**, **coeficiente** (generalmente la parte numérica), **base** y **exponente**. Así por ejemplo, en el término

$5x^2$, el signo, aunque no esta escrito, se sobreentiende que es positivo

(+), el coeficiente es 5, la base es x y el exponente es 2.



Dos o más términos son semejantes cuando **tienen igual Base e igual exponente.**

Ejemplos:

⇒ Los siguientes términos son semejantes porque todos tienen como base

x y como exponente el 2 .

Veamos,

$$2x^2, 5x^2, 8x^2, x^2, -10x^2$$

Los signos de los cuatro (4) primeros son positivos y el del último es negativo, los coeficientes de estos términos son: 2, 5, 8, 1 y -10 respectivamente.

Cabe recordar que cuando la base no tiene ningún coeficiente, como es nuestro caso x^2 , se sobreentiende que este es **1**.

⇒ Si se tienen los siguientes términos:

$$3x, 2y^2, 5y, 9x, 7x^2, 10x^2, 6x, 8y$$

Los términos semejantes son:

$$\underbrace{3x, 9x, 6x}$$

$$\underbrace{7x^2, 10x^2}$$

$$\underbrace{5y, 8y}$$

$$\underbrace{2y^2} \text{ no tiene otro término semejante}$$

Una expresión algebraica puede definirse como la unión de términos algebraicos a través de las operaciones fundamentales del álgebra como son la adición (suma) y la sustracción (resta).

Por ejemplo: $5x^2 + 3y + 8$

2.1.1. ADICION O SUMA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Toda expresión algebraica ligadas por los signos $\boxed{+}$ y $\boxed{-}$ se llama **Suma Algebraica**.



Para desarrollar la suma algebraica de dos o más términos primero se buscan los términos semejantes y luego se suman o restan los coeficientes (dependiendo de la operación indicada) .

Por ejemplo, La suma de:

$$\overbrace{3x + 5y + 1} \text{ y } \overbrace{2x - 3y + 8} = \underbrace{3x + 5y + 1 + 2x - 3y + 8} \text{ Los terminos semejantes de}$$

esta expresión son:

$\Rightarrow 3x + 2x =$ Se suman los coeficientes $(3+2)=5$ y se deja la misma base (x); entonces la expresión queda reducida a:

$$\Rightarrow \boxed{5x}$$

$$\Rightarrow 5y - 3y = (5-3) y = \boxed{2y}$$

$$1+8 = \boxed{9}$$

El total de esta suma algebraica es $\boxed{5x+2y+9}$

EJERCICIOS RESUELTOS

Realizar las siguientes operaciones:

1. $7a + 2a + 5a = (7+2+5)a = 14a$

2. $-4b - 9b = (-4-9)b = -13b$

Recordemos que en una suma algebraica:

☺ REPASEMOS.....

En la suma algebraica, cuando los términos tienen el mismo signo, se suman y se deja el mismo signo.

Entonces: $-4 - 9 = -13$

☺ REPASEMOS.....

En la suma algebraica, cuando los términos tienen diferentes signos, se restan y se deja el signo que tenga el número mayor.

Por ejemplo $5 - 8 = -3$ porque como tienen diferentes signos, es decir uno es

$\boxed{+}$ y el otro $\boxed{-}$, se restan y el resultado en este caso es 3 y el signo del número mayor absoluto es $\boxed{-}$

$$3. \quad 8x^2 + 2x^2 - 6x - x^2 = (8 + 2 - 6 - 1)x^2 = 3x^2$$

$$4. \quad \frac{1}{5}c^3 + \frac{7}{5}c^3 - \frac{2}{5}c^3 = \frac{(1 + 7 - 2)}{5}c^3 = \frac{6}{5}c^3$$

☺ REPASEMOS.....

En la suma de fraccionarios homogéneos (tienen el mismo denominador), se suman sus numeradores y se deja el mismo denominador.

$$5. \quad \frac{3}{4}a^{m+1} - \frac{7}{4}a^{m+1} + \frac{11}{4}a^{m+1} - \frac{9}{4}a^{m+1} = \frac{(3 - 7 + 11 - 9)}{4}a^{m+1} = -\frac{2}{4}a^{m+1} = -\frac{1}{2}a^{m+1}$$

$$6. \quad \frac{1}{2}b^{n-1} + \frac{2}{3}b^{n-1} - \frac{7}{6}b^{n-1} + \frac{1}{2}b^{n-1} - b^{n-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6} + \frac{1}{2} - 1\right)b^{n-1}$$

☺ REPASEMOS.....

Para realizar una suma de fraccionarios No homogéneos, (diferentes denominadores), se halla el denominador común, el cual se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y este resultado se multiplica por su respectivo numerador.

Entonces:

$$\frac{((6 \div 2)1 + (6 \div 3)2 - (6 \div 6)7 + (6 \div 2)1 - (6 \div 1)1)}{6} b^{n-1} = \frac{(3+4-7+3-6)}{6} b^{n-1} = \frac{-3}{6} b^{n-1} = \frac{-1}{2} b^{n-1} = -\frac{1}{2} b^{n-1}$$

$$7. a^4b - a^3b^2 + a^2b - 8a^4b - a^2b - 8 + a^3b^2 - 7a^3b^2 - 7 + 21a^4b - a^3 + 48$$

Los terminos semejantes son:

$$\Rightarrow a^4b - 8a^4b + 21a^4b = (1 - 8 + 21)a^4b = 14a^4b$$

$$\Rightarrow -a^3b^2 + a^3b^2 - 7a^3b^2 = (1 - 1 - 7)a^3b^2 = -7a^3b^2$$

$$\Rightarrow a^2b - a^2b = (1 - 1)a^2b = 0a^2b = 0$$

$$\Rightarrow -a^3 \text{ No hay otro termino semejante}$$

$$\Rightarrow -8-7+48 = 33$$

$$\text{Entonces: } 14a^4b - 7a^3b^2 + 0 - a^3 + 33 = \boxed{14a^4b - 7a^3b^2 - a^3 + 33}$$

$$8. x^{a+2} - 5x^{a+1} - 6x^a - x^{a+3} + 8x^{a+1} - 10$$

Los términos semejantes son:

$$\Rightarrow x^{a+2} \text{ No tiene otro terminos semejantes}$$

$$\Rightarrow -5x^{a+1} + 8x^{a+1} = (-5 + 8)x^{a+1} = 3x^{a+1}$$

$$\Rightarrow -6x^a \text{ No tiene otro término semejante}$$

$$\Rightarrow -x^{a+3} \text{ No tiene otro término semejante}$$

$$\Rightarrow -10 \text{ No tiene otro término semejante}$$

$$\text{El resultado es: } \boxed{x^{a+2} + 3x^{a+1} - 6x^a - x^{a+3} - 10} \text{ Al ordenar en forma decreciente,}$$

de acuerdo al exponente se obtiene

$$\boxed{-x^{a+3} + x^{a+2} + 3x^{a+1} - 6x^a - 10}$$

2.2. SIGNOS DE AGRUPACION:

Existen diferentes signos de agrupación o paréntesis que se emplean para indicar como un todo las cantidades contenidas en estos: los más usados son:

Paréntesis (),

Corchete [],

La llave { }.

⇒ Por ejemplo: $3y + (x+y)$ significa que a la expresión $3y$ se le suma $(x+y)$ entonces:

$$3y + (x+y) = 3y + x+y = 4y +x.$$

Para hallar el resultado es necesario eliminar el paréntesis y para ello es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

☺ REPASEMOS.....

Cuando un paréntesis esta precedido por el signo (+), se dejan las cantidades que están dentro del paréntesis con el mismo signo

⇒ Ejemplo:

$$2x + (5y -7x) = \text{como al paréntesis le antecede el signo } \boxed{+}, \text{ las}$$

cantidades que estan dentro de este quedan iguales:

$$= 2x + 5y -7x \text{ Agrupando términos semejantes queda: } =-5x+5y$$

☺ REPASEMOS.....

Cuando un paréntesis esta precedido por el signo (-), las cantidades que están dentro del paréntesis cambian de signo al eliminar dicho paréntesis.

⇒ Ejemplo:

$4x^2 - (2x - 6x^2 + 7x)$ Como el paréntesis está precedido por el signo $-$ todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

$$4x^2 - 2x + 6x^2 - 7x = 10x^2 - 9x$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Simplificar suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $7x + [x - (2x + y)]$

En este ejercicio se tienen que destruir dos paréntesis, para esto es necesario ir destruyendo paréntesis por paréntesis, empezando por el más interno (el que está contenido dentro del otro), entonces el proceso es el siguiente:

⇒ Destrucción del paréntesis más interno $()$ y como éste está precedido del signo $-$, todos los términos contenidos en éste cambian, entonces:

$$7x + [x - 2x - y]$$

⇒ Luego se destruye el otro paréntesis $[]$, en este caso está precedido por el signo $+$, por lo tanto todos sus términos conservan el mismo signo

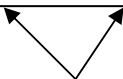
$$7x + x - 2x - y$$

Y por último se reducen los términos semejantes, entonces el resultado es

$$6x - y$$

2. $5b - [(b - c) - (b + c)]$

En este ejercicio, también se tienen dos tipos de signos de agrupación $[]$ y $()$ se pueden destruir al tiempo, porque no está uno dentro del otro, sino que están al mismo nivel entonces:

$$5b - [(b - c) - (b + c)] = 5b - [b - c - b - c]$$


Se observa que en el primero de estos paréntesis () no aparece ningún signo que preceda a este paréntesis, pero cuando esto sucede tácitamente se sobreentiende que es $+$, entonces los términos (b-c) quedan con el mismo signo, mientras que el segundo paréntesis () está precedido por el signo negativo razón por la cual sus términos cambian de signo.


Ahora se procede a eliminar el segundo signo de agrupación [] y como este está precedido por el signo $-$ todos sus términos cambian, así:

$$5b - [(b - c) - (b + c)] = 5b - [b - c - b - c] = 5b - b + c + b + c$$


Por último se reducen los términos semejantes:

$$5b - b + c + b + c = 5b + 2c$$

3. $m + \{(-2m + n) - (-m + n - p) + m\}$



Los signos de agrupación () están contenidos dentro de { }. Los dos () están al mismo nivel, es decir no está contenido uno en el otro, razón por la cual se pueden destruir simultáneamente.

$$m + \{(-2m + n) - (-m + n - p) + m\} = m + \{-2m + n + m - n + p + m\}$$


Ahora se destruye la llave quedando:

$$m - 2m + n + m - n + p + m$$

Por último se reducen los términos semejantes

$$m + p$$

$$4. \quad 2x - (-4x+y) - \{-[-4x+(y-x)-(-y+x)]\}$$

Es este caso hay tres signos de agrupación que son (), { } y [].

Inicialmente se pueden destruir los parentesis (), porque el primero esta libre y los otros dos son los más internos:

$$2x - (-4x+y) - \{-[-4x+(y-x)-(-y+x)]\} = 2x + 4x - y - \{-[-4x+y-x+y-x]\}$$

Ahora se destruye []

$$2x + 4x - y - \{-[-4x+y-x+y-x]\} = 2x + 4x - y - \{4x - y + x - y + x\}$$

Luego la llave { }

$$2x + 4x - y - \{-[-4x+y-x+y-x]\} = 2x + 4x - y - 4x + y - x + y - x$$

y por último se reducen los términos semejantes

$$2x + 4x - y - 4x + y - x + y - x = y$$

$$5. \quad -\{-[-(m+n-p)]\} - \{+[-(p-m+n)]\} + \{-[-m+(-n)]\}$$

Empezando por los paréntesis más internos ():

$$-\{-[-(m+n-p)]\} - \{+[-(p-m+n)]\} + \{-[-m+(-n)]\} =$$

$$-\{-[-m-n+p]\} - \{+[-p+m-n]\} + \{-[-m-n]\} =$$

Ahora se destruyen los corchetes [] :

$$-\{-[-m-n+p]\} - \{+[-p+m-n]\} + \{-[-m-n]\} =$$

$$-\{m+n-p\}-\{-p+m-n\}+\{m+n\}=$$

Luego se eliminan las llaves $\{ \}$:

$$-\{m+n-p\}-\{-p+m-n\}+\{m+n\}= -m-n+p+p-m+n+m+n$$

Y por último se reducen los términos semejantes

$$-m+n+2p$$

2.3. MULTIPLICACION:

La multiplicación algebraica es una operación que al igual que en la aritmética, tiene por objeto hallar el producto de dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador. Para representar una multiplicación se usan los signos de

$\boxed{\times}$, $\boxed{\bullet}$ ó $\boxed{() ()}$, generalmente en álgebra se usan las dos últimas.

Por ejemplo, la siguiente multiplicación se puede representar como:

$$6x^3 \times 5x^8 \text{ ó } 6x^3 \bullet 5x^8 \text{ ó } (6x^3) (5x^8)$$

La forma para solucionar esta multiplicación es:

⇒ Multiplicar los signos de estos factores, en este caso, $6x^3 \bullet 5x^8$ vemos que ambos son positivos (+) , porque en ninguno aparece el signo y cuando esto sucede se sobreentiende que es $\boxed{+}$

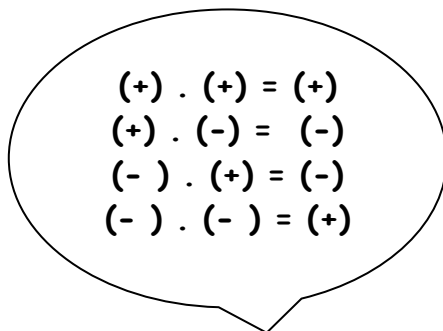
⇒ Luego multiplicar los coeficientes $6 \bullet 5 = \boxed{30}$

⇒ Luego multiplicar las bases, recordando las propiedades de la potenciación

$$x^3 \cdot x^8 = x^{3+8} = \boxed{x^{11}}$$

⇒ Entonces el resultado es $\boxed{30x^{11}}$

Es importante recordar las reglas de los signos:


$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \\ (-) \cdot (+) &= (-) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \end{aligned}$$

⇒ Ejemplo: Realiza la siguiente operación:

$$(3a^3) (-7a^2)$$

Primero se multiplican los signos en este caso:

$$(+)(-) = -$$

Luego se multiplican los coeficientes:

$$(3)(7) = 21$$

En seguida las bases

$$(a^3)(a^2) = a^5$$

Entonces el resultado es

$$\boxed{-21a^5}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver $(-4m^5)(12m)$

Primero se multiplican los signos en este caso:

$$(-)(+) = -$$

Luego se multiplican los coeficientes:

$$(4)(12) = 48$$

En seguida las variables

$$(m^5)(m) = m^{5+1} = m^6$$

Entonces el resultado es

$$\boxed{-48m^6}$$

2. Multiplicar: $(-x^a)(-x^{a+1})$

Primero se multiplican los signos en este caso:

$$(-)(-) = +$$

Luego se multiplican los coeficientes:

$$(1)(1) = 1$$

Recordemos que cuando no aparece coeficientes se sobreentiende que es 1

Enseguida se multiplican las bases. Recordemos que cuando se multiplican potencias con bases iguales, se deja la misma base y se suman los exponentes $(x^a) (x^{a+1}) = x^{a+a+1} = x^{2a+1}$

Entonces el resultado es

$$x^{2a+1}$$

3. Realizar la siguiente operación $\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right) \left(-\frac{3}{5}a^2x^4y\right)$

Primero multiplicación de signos: $(+) (-) = -$

Luego se multiplican los coeficientes: recordamos que para multiplicar números fraccionarios, se multiplican los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores

$$\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \text{Simplificado} = \frac{2}{5}$$

Enseguida multiplicación de las bases: $x^2y^3 \cdot a^2x^4y = x^{2+4}y^{3+1}a^2 = x^6y^4a^2$

Entonces el resultado es:

$$-\frac{2}{5}x^6y^4a^2$$

4. Efectuar la siguiente operación: $(3a^2) (-a^3b) (-2x^2a)$

Se multiplican los signos, en este caso son tres entonces se multiplica el primero por el segundo y el resultado de este se multiplica por el tercero:

$(+) \cdot (-) = -$ y ahora este resultado se multiplica por el signo del tercero

$$(-) \cdot (-) = +$$

Resumiendo:

$$(+) (-) (-) = +$$

Luego se multiplican los coeficientes

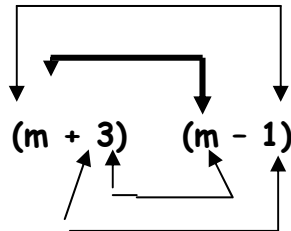
$$(3) (1) (2) = 6$$

Enseguida las bases $(a^2) (a^3 b) (x^2 a) = a^{2+3+1} bx^2 = a^6 bx^2$

Entonces el resultado es $6a^6 bx^2$

5. Multiplicar: $(m + 3) (m - 1)$.

En este caso se multiplican los dos términos del primer factor $(m + 3)$ por los términos del segundo factor $(m - 1)$, entonces:



$$\begin{aligned} (m + 3) (m - 1) &= m \cdot m - m \cdot (1) + 3 \cdot m - 3 \cdot (1) = \\ m^2 - m + 3m - 3 &= \end{aligned}$$

$m^2 + 2m - 3$

2.4. DIVISION :

Antes de iniciar la división algebraica, es necesario repasar las reglas de los signos:

$$\begin{aligned} (+) \div (+) &= (+) \\ (+) \div (-) &= (-) \\ (-) \div (+) &= (-) \\ (-) \div (-) &= (+) \end{aligned}$$

También es importante recordar cuales son las partes de una division

Si se tiene $28 \div 7 = 4$

⇒ 28 es el **dividendo** , o sea la cantidad que ha de dividirse

⇒ 7 es el **divisor**, se refiere a la cantidad que divide

⇒ 4 es el **cociente**, resultafo que se obtiene al realizar la

⇒ 0 es el **residuo**, en este caso es cero porque la division es exacta, es decir si una division es exacta, su residuo es cero (0)

REPASEMOS.....

Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se coloca como exponente la diferencika entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Realizar $a^8 \div a^3 = a^{8-3} = a^5$

2. Dividir $24 a^7 \div 6 a^2$

Para llevar a cabo esta division algebraica primero se dividen los signos, luego coeficientes y por ultimo las bases.

Primero se dividen los signos

$$(+) (+) = +$$

Luego se dividen los coeficientes

$$24 \div 6 = 4$$

En seguida se dividen las bases

$$a^7 \div a^2 = a^{7-2} = a^5$$

El resultado de sta division es:

$$4 a^5$$

3. Dividir $(x^3 + x - 4x^2) \div x$

En este caso se divide cada uno de los terminos del dividendo por el divisor asi:

$$x^3 \div x = x^{3-1} = \boxed{x^2}$$

$x \div x = x^{1-1} = x^0 = \boxed{1}$ recordando que la potencia de cualquier base elevada al exponente cero (0) es igual a uno (1)

$$-4x^2 \div x = -4x^{2-1} = \boxed{-4x}$$

Entonces el resultado es: $x^2 + 1 - 4x$ ordenando queda $x^2 - 4x + 1$

Otra forma de presentar esta division es:

$$\frac{x^3}{x} = \boxed{x^2}$$

$$\frac{x}{x} = \boxed{1}$$

$$\frac{-4x^2}{x} = \boxed{-4x}$$

El resultado es: $x^2 - 4x + 1$

4. Dividir: $(a - 20 + a^2) \div (a - 4)$

Para dividir dos polinomios es necesario los siguientes pasos, los cuales son similares a los de una division aritmetica.

⇒ Se ordenan los polinomios colocando una de las letras en orden descendentes de sus exponentes:

$$a^2 + a - 20 \quad | \quad a - 4$$

⇒ El primer termino del dividendo (a^2) se divide por el primer termino del divisor (a) y el resultado de este corresponde al tprimer termino del cociente:

$$\boxed{a^2} + a - 20 \quad | \quad \boxed{a} - 4$$

$$a^2 \div a = a$$

Entonces

$$\begin{array}{r} \boxed{a^2} + a - 20 \quad | \quad \boxed{a} - 4 \\ \underline{a} \\ a \end{array}$$

⇒ Se multiplica el primer termino del cociente (a) por cada uno de los terminos del divisor y este producto se resta de cada uno de los terminos semejantes del dividendo.

$$\begin{array}{r} a^2 + a - 20 \quad | \quad a - 4 \\ \underline{-a^2 + 4a} \\ 0 + 5a - 20 \end{array}$$

Porque $a \cdot a = a^2$ este vañlor se le resta al primer término del dividendo

$a \cdot (-4) = -4a$ este valor se le resta al segundo término.

⇒ El primer término del nuevo dividendo se divide por el divisor y se repite las operaciones de multiplicar el cociente por el divisor y restarle este producto al dividendo.

$$\begin{array}{r} a^2 + a - 20 \quad | \quad a - 4 \\ \underline{-a^2 + 4a} \\ 0 + 5a - 20 \\ \underline{- 5a + 20} \\ 0 \end{array}$$

Porque $5 \cdot a = 5a$ este valor se le resta al nuevo dividendo

$5 \cdot (-4) = -20$ valor que tambien se le resta al dividendo.

⇒ Se repite la operación hasta que el residuo es cero o no se puede dividir mas.

5. Dividir $2a^3 - 2 - 4a$ entre $2 + 2a$

Paso 1 organización:

$$2a^3 - 4a - 2 \overline{) 2a + 2}$$

Es importante resaltar que en el dividendo, el exponente con mayor exponente es a^3 , le seguira en orden descendente a^2 , pero en este caso no existe, razon por la cual se colocaa un cero (0) en el espacio que le corresponderia. Asi mismo, comom se ordeno el dividendo tambien se ordenan los terminos del divisor.:

Paso 2:

$$\begin{array}{r} 2a^3 + 0 - 4a - 2 \overline{) 2a + 2} \\ -2a^3 - 2a^2 \\ \hline 0 - 2a^2 - 4a - 2 \end{array}$$

Porque

$$2a^3 \div 2a = 2a^2$$

$a^2 \cdot 2a = 2a^3$ Este valor se le resta al primer termino del dividendo

$a^2 \cdot 2 = 2a^2$ Este se le resta al segundo termino (0) del dividendo

Paso 3, 4 y 5

$$\begin{array}{r}
 2a^3 + 0 - 4a - 2 \quad \Big| \quad 2a + 2 \\
 \underline{-2a^3 - 2a^2} \qquad \qquad \quad a^2 - a + 1 \\
 0 - 2a^2 - 4a - 2 \\
 \underline{2a^2 + 2a} \\
 0 - 2a - 2 \\
 \underline{+ 2a + 2} \\
 0
 \end{array}$$

6. Dividir $\frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2$ entre $a - \frac{2}{5}b$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2 \quad \Big| \quad a - \frac{2}{5}b \\
 \underline{-\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}ab} \qquad \qquad \quad \frac{1}{3}a \\
 0 + \frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2
 \end{array}$$

Porque $\frac{1}{3}a^2 \div a = \frac{1}{3}a$

$\frac{1}{3}a \cdot a = \frac{1}{3}a^2$ este valor se le resta al primer termino del dividendo

$$\frac{1}{3}a \cdot \left(-\frac{2}{5}b\right) = -\frac{2}{15}ab \text{ valor que se le resta al segundo termino del dividendo}$$

REPASEMOS.....

Para multiplicar fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador

Al realizar la suma de estos términos:

REPASEMOS.....

Para sumar o restar fraccionarios no homogéneos primero se halla el denominador común y luego se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y este resultado se multiplica por su respectivo numerador

$$\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0$$

$\frac{7}{10}ab + \frac{2}{15}ab$ Como se trata de fraccionarios no homogéneos, se busca el denominador común, en este caso ese denominador es 30

$$\frac{((30 \div 10) 7ab + (30 \div 15) 2)ab}{30} = \frac{(21 + 4) ab}{30} = \frac{25}{30} ab \text{ simplificado:}$$

$$\frac{((30 \div 10) 7ab + (30 \div 15) 2)ab}{30} = \frac{25 \div 5}{30 \div 5} ab = \frac{5}{6} ab$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2 \quad \left| \quad a - \frac{2}{5}b \right. \\
 \hline
 -\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}ab \qquad \frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b \\
 \hline
 0 \quad + \frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2 \\
 \\
 - \frac{5}{6}ab + \frac{1}{3}b^2 \\
 \hline
 0 \qquad 0
 \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Realizar las siguientes divisiones:

1. $(m^2 - mn) \div (m)$
2. $(4a^8 - 10a^6 - 5a^4) \div (2a^3)$
3. $(x^4 - x^6 - 2x - 1) \div (x^2 - x - 1)$
4. $(3m^3n - 5mn^3 + 3n^4 - m^4) \div (m^2 - 2mn + n^2)$
5. $\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{36}xy - \frac{1}{6}y^2 \right) \div \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \right)$

2.5. PRODUCTOS NOTABLES:

Los productos notables son productos que satisfacen algunas reglas y su resultado puede ser hallado por simple inspección, sin tener que realizar la operación, lo que agiliza cualquier operación.

2.5.1 BINOMIOS:

El binomio es un polinomio que consta de dos terminos, como: $a + b$, $x - y$,

$$\frac{b^3}{5} - \frac{7mx^7}{14a^2b}$$

Recordando que $a^2 = a \cdot a$ es decir que la base a se repite las veces que indica el exponente, en este caso en 2 veces, entonces:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$



“El cuadrado de la suma de dos cantidades $(a+b)^2$ es igual al cuadrado del primer termino (a^2), mas dos veces el primero por el segundo ($2ab$), mas el segundo al cuadrado (b^2)”

EJERCICIOS RESUELTOS

Hallar por simple inspección:

$$1. (5 + m)^2 = (5)^2 + 2 \cdot 5 \cdot m + (m)^2 =$$

$$25+10m+m^2$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer termino} = (5)^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\text{Dos veces el primero por el segundo} = 2 \cdot 5 \cdot m = 10m$$

$$\text{Cuadrado del segundo termino} = (m)^2 = m \cdot m = m^2$$

$$2. (4xy^2 + 3xy^3)^2 = (4xy^2)^2 + 2 \cdot (4xy^2) \cdot (3xy^3) + (3xy^3)^2$$

$$(4xy^2 + 3xy^3)^2 = \boxed{16x^2 y^4 + 24 x^2 y^5 + 9x^2 y^6}$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer termino} = (4xy^2)^2 = 4^2 x^2 y^{2 \cdot 2} = 4^2 x^2 y^2 = 16 x^2 y^4$$

$$\text{Dos veces el primero por el segundo} = 2 \cdot (4xy^2) \cdot (3xy^3) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y^2 y^3 = 24x^2 y^5$$

$$\text{Cuadrado del segundo termino} = (3xy^3)^2 = 3^2 x^2 y^{3 \cdot 2} = 9x^2 y^6$$

Cuando se trata del cuadrado de la diferencia de dos cantidades $(a - b)^2$, el resultado es el siguiente :

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

La única diferencia con el cuadrado de la suma de dos cantidades es el signo del segundo termino, que en este caso es negativo (-) entonces:



“El cuadrado de la diferencia de dos cantidades $(a - b)^2$ es igual al cuadrado del primer termino (a^2) , **menos** dos veces el primero por el segundo $(2ab)$, mas el segundo al cuadrado (b^2) ”

Hallar por simple inspección:

$$3. (x - 7)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = \boxed{x^2 - 14x + 49}$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer termino} = (x)^2 = x \cdot x = x^2$$

$$\text{Dos veces el primero por el segundo} = 2 \cdot x \cdot 7 = 14x$$

$$\text{Cuadrado del segundo termino} = (7)^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

$$4. (4a - 3b)^2 = (4a)^2 - 2(4a) \cdot (3b) + (3b)^2 =$$

$$\boxed{16a^2 - 24ab + 9b^2}$$

Hasta ahora se ha trabajado en cuadro se la suma de dos cantidades

$(a \pm b)^2$, ahora analizaremos el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, entonces:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

“El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo del primer termino (a^3) mas el triplo del cuadrado del primer termino multiplicado por el segundo ($3a^2b$), mas el triplo del primer termino multiplicado por el cuadrado del segundo ($3ab^2$), mas el segundo termino al cubo (b^3)”

Es importante resaltar que el primer termino inicia con el exponente tres (a^3), en el segundo termino este termino desciende un numero (a^2) y aparece el segundo termino (b), en el tercero sigue descendiendo el primer termino (a) y el segundo continua creciendo (b^2) y en el cuarto el primer termino del binomio desaparece y el segundo llega hasta (b^3).

$$5. (3n + 5m)^3 = (3n)^3 + 3(3n)^2 \cdot (5m) + 3(3n) \cdot (5m)^2 + (5m)^3 =$$

$$(3n + 5m)^3 = \boxed{27n^3 + 135n^2m + 225nm^2 + 125m^3}$$

Explicación:

Cubo del primer termino: $(3n)^3 = 3^3n^3 = 27n^3$

Tripo del cuadrado del primer termino por el segundo:

$$3(3n)^2 \cdot (5m) = 3 \cdot 3^2 \cdot n^2 \cdot 5m = 135n^2m$$

Tripo del primer termino por el cuadrado del segundo:

$$3(3n) \cdot (5m)^2 = 3 \cdot 3 \cdot n \cdot 5^2 \cdot m^2 = 225nm^2$$

$$\text{Cubo del segundo termino} = (5m)^3 = 5^3 m^3 = 125m^3$$

$$6. (4a + 3)^3 = (4a)^3 + 3(4a)^2(3) + 3(4a)(3)^2 + (3)^3 =$$

$$\boxed{64a^3 + 144a^2 + 108a + 27}$$

Explicación:

$$\text{Cubo del primer termino: } (4a)^3 = 4^3 a^3 = 64a^3$$

Triplo del cuadrado del primer termino por el segundo:

$$3(4a)^2(3) = 3 \cdot 4^2 \cdot a^2 \cdot 3 = 144a^2$$

Triplo del primer termino por el cuadrado del segundo:

$$3(4a)(3)^2 = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot 3^2 = 108a$$

$$\text{Cubo del segundo termino} = (3)^3 = 3^3 = 27$$

$$7. (t - 4)^3 = t^3 - 3(t^2)(4) + 3(t)(4^2) - 4^3 = \boxed{t^3 - 12t^2 + 48t - 64}$$

Explicación:

$$\text{Cubo del primer término: } t^3$$

$$\text{Triplo del cuadrado del primer termino por el segundo: } 3 \cdot t^2 \cdot 4 = 12t^2$$

$$\text{Triplo del primer termino por el cuadrado del segundo: } 3 \cdot t \cdot 4^2 = 48t$$

$$\text{Cubo del segundo termino} = 4^3 = 64$$

Se observa que la única diferencia entre el cubo de la suma de un binomio $(a + b)^3$ y el cubo de la diferencia de un binomio $(a - b)^3$ son los signos, porque en la suma todos los términos son positivos, mientras que en la diferencia se combinan, es decir, el primero es positivo, el segundo negativo, el tercero positivo y el último negativo.

Matemáticamente, la forma general de un producto notable se puede expresar como:

$$(a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b) \text{ n veces.}$$

El producto de estas bases se puede resumir así: $(a+b)^n$ $n \in \mathbb{Z}^+$ Esto significa que n puede tomar los valores : **0, 1 , 2, 3**

La expresión $(a+b)^n$ se ve como un binomio elevado a la n , lo que indica que los productos notables son **BINOMIOS** con exponente n .

Entonces cuando:

- $n = 0$ $(a+b)^0 = 1$ Por definición de potencias
- $n = 1$ $(a+b)^1 = (a + b)$ Propiedad de la potenciación.
- $n = 2$ $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$
- $n = 3$ $(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pero qué pasa si n tiene valores superiores a estos?

Para dar solución a estos casos se puede acudir a dos métodos: **Binomio de Newton y el Triángulo de Pascal.**

2.5.1.1. BINOMIO DE NEWTON:

BINOMIO DE NEWTON

Dado el binomio $(a+b)^n$

- El número de términos del polinomio es de $n+1$
- El primer término del polinomio será a^n
- El último término del polinomio será b^n
- Cuando el binomio tiene signo positivo, todos los términos del polinomio serán positivos.
- Si el signo del binomio es negativo, los signos del polinomio van intercalados, empezando por el signo positivo.

Por ejemplo $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

- El número de terminos del polinomio será igual a $n+1 = 3 + 1 = 4$
- El primer término del polinomio será a^3
- El último término del polinomio será b^3

La formula general, conocida como la **LEY DEL BINOMIO**, descubierta por Newton es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \bullet 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \bullet 2 \bullet 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$(a-b)^n$ = Igual que el caso anterior, solo que los signos van intercalados, iniciando con positivo.

Ejemplos: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^{4-1}b + \frac{4(4-1)}{1*2} a^{4-2}b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1*2*3} a^{4-3}b^3 + b^4$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

En el ejemplo podemos observar que a medida que el exponente del primer término va disminuyendo desde el valor de n, el exponente del segundo término del Binomio va aumentando desde cero hasta n.

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^{5-1}y + \frac{5(5-1)}{1*2} x^{5-2}y^2 - \frac{5(5-1)(5-2)}{1*2*3} x^{5-3}y^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1*2*3*4} x^{5-4}y^4 - y^5$$

Desarrollando y simplificando:

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

2.5.1.2. TRIANGULO DE PASCAL:

Una forma fácil para obtener **LOS COEFICIENTES** del polinomio, es utilizando el triángulo de pascal. El triángulo se construye de la siguiente manera:

n = 1	1	$(a+b)^0$
n = 1	1 1	$(a+b)^1$
n = 2	1 2 1	$(a+b)^2$
n = 3	1 3 3 1	$(a+b)^3$
n = 4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4$
n = 5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5$
n = 6	1 6 15 20 15 6 1	$(a+b)^6$

Los términos del triángulo se obtienen, a partir de la tercera fila, sumando términos de la fila superior inmediata.



Como ejercicio obtenga los términos para $n = 7, 8, 9, 10$

Ejemplos:

→ Hallar el polinomio resultante de: $(p-q)^4$ utilizando el triángulo de pascal.

$(p-q)^4$. Los coeficientes para $n = 4$ son: 1, 4, 6, 4, 1 entonces. Los exponentes de p van disminuyendo uno a uno desde 4, mientras que los exponentes de q van aumentando desde cero hasta 4. Como el signo del binomio es negativo, los signos de la respuesta se van alternando.

$$(p - q)^4 = 1 p^4 q^0 - 4 p^3 q^1 + 6 p^2 q^2 - 4 p^1 q^3 + 1 p^0 q^4 = \boxed{p^4 - 4p^3q + 6p^2q^2 - 4pq^3 + q^4}$$

$$\Rightarrow (2x + 4)^5$$

Los coeficientes para $n = 5$ son: 1, 5, 10, 10, 5, 1

Entonces:

$$1(2x)^5 4^0 + 5(2x)^4 4^1 + 10(2x)^3 4^2 + 10(2x)^2 4^3 + 5(2x)^1 4^4 + 1(2x)^0 4^5 =$$

$$\boxed{32x^5 + 320x^4 + 1280x^3 + 2560x^2 + 2560x + 1024}$$

2.5.1.3. PRODUCTO DE SUMA POR DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES:

$$\boxed{(a + b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

La suma de dos cantidades $(a+b)$ multiplicada por la diferencia de estas mismas cantidades $(a-b)$, es igual al cuadrado del primer término $(a)^2$ menos el cuadrado del segundo término $(b)^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

Escribir por simple inspección el resultado de las siguientes expresiones.

$$8. (2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - (1)^2 = \boxed{4x^2 - 1}$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer término: } (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$$

$$\text{Cuadrado del segundo término: } 1^2 = 1$$

$$9. (6m^2 - a^2m)(6m^2 + a^2m) = (6m^2)^2 - (a^2m)^2 = \boxed{36m^4 - a^4m^2}$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer término} = (6m^2)^2 = 6^2m^4 = 36m^4$$

$$\text{Cuadrado del segundo término} = (a^2m)^2 = a^{2 \cdot 2} m^2 = a^4m^2$$

2.5.1.4. PRODUCTO DE DOS BINOMIOS:

Si se tiene:

$$(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = \boxed{x^2 + 8x + 15}$$

Con este ejemplo nos podemos dar cuenta que en lugar de realizar toda la multiplicación se puede obtener el resultado aplicando la siguiente regla:

Cuando se tiene el producto de dos binomios, de la forma $(x+a)(x+b)$, el resultado es igual al producto del primer término de cada uno de los factores, en este caso $(x)(x) = x^2$, mas la suma algebraica de los segundos términos de cada uno de los factores $(3+5=8)$, multiplicada por la raíz cuadrada del resultado anterior $(\sqrt{x^2} = x)$, mas la multiplicación de los segundo términos de los factores $((3)(5) = 15)$.

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver por simple inspección los siguientes ejercicios:

$$10. (x+5)(x-2) = \boxed{x^2 + 3x - 10}$$

Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios $x \bullet x = x^2$

Suma algebraica de los dos segundos términos de los binomios multiplicada por la raíz cuadrada del resultado anterior $(5-2)x = 3x$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios $(5 \bullet -2) = -10$

$$11. (a-6)(a-5) = \boxed{a^2 - 11a + 30}$$

Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios $a \bullet a = a^2$

Suma algebraica de los dos segundos términos de los binomios multiplicada por la raíz cuadrada del resultado anterior $(-6 -5)a = -11a$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios $(-6 \bullet -5) = 30$

$$12. (m^6+7) (m^6 -9) = \boxed{m^{12} -2m^6 -63}$$

Explicación:

Multiplicación de los primero términos de cada uno de los binomios $m^6 \bullet m^6 = m^{6+6} = m^{12}$

Suma algebraica de los dos segundos términos de los binomios multiplicada por la raíz cuadrada del resultado anterior $(7-9) m^6 = -2m^6$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios $(7 \bullet -9) = -63$

$$13. (xy^2 -3) (xy^2 +4) = \boxed{x^2y^4 +xy^2 -12}$$

Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios $xy^2 \bullet xy^2 =$

$$x^{1+1} y^{2+2} = x^2 y^4$$

Suma algebraica de los dos segundos términos de los binomios multiplicada por la raíz cuadrada del resultado anterior $(-3+4)xy^2 = 1xy^2 = xy^2$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios $(-3 \bullet 4) = -12$

AUTOEVALUACION 6: PRODUCTOS NOTABLES

Desarrollar los siguientes binomios por el método de Binomio de Newton.

1. $(p - q)^3$

2. $(a + 3)^3$

3. $(5x - 3y)^4$

4. $[(x - 2) - y]^3$

Desarrollar los siguientes potencias por el método del triángulo de pascal.

5. $(t - 4)^3$

6. $(2t + 3s)^4$

7. $[(x - 1) - (y - 2)]^3$

8. $(x - 3y)^5$

Resolver los siguientes ejercicios por simple inspección

9. $(a + 2)(a + 7)$

10. $(m + 8)(m - 8)$

11. $(m^2 + 4)(m^2 - 4)$

2.6. COCIENTES NOTABLES:

Al igual que los productos notables, existen cocientes que cumplen reglas fijas y que su resultado puede ser escrito por simple inspección, sin realizar toda la operación.

$$\rightarrow \frac{a^2 - 4}{a + 2} = a - 2 \text{ porque } (a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$$

Recordando ..

Para probar una división se multiplican el divisor por el cociente y a este producto se le suma el residuo. El resultado de esta operación debe ser igual al dividendo.

De este ejemplo se puede concluir que la diferencia de los cuadrados de dos términos, en este caso $(a^2 - 4)$, dividida por la suma de las cantidades $(a + 2)$ es igual a la diferencia de las cantidades.

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

En este caso la diferencia de los cuadrados de dos términos dividida por la diferencia de las cantidades es igual a la diferencia de las cantidades.

$$\rightarrow \frac{25m^2 - 36n}{5m - 6n} = 5m + 6n$$

Ahora analizaremos el siguiente ejercicio

$$\rightarrow \frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

Como se observa, los dos términos del numerador están elevados al exponente 5 y como denominador están las bases de éste numerador.

En este caso el primer término del cociente (o resultado de esta división) es igual al primer término de las bases elevado a un grado menos del que tiene el numerador (x^4), mas el mismo termino elevado a un grado menos multiplicado por el segundo término (x^3y), mas el primer término con un grado menos multiplicado por el segundo término aumentado en un grado (x^2y^2), mas el primer término elevado al exponente (1) por la segunda base elevado al siguiente grado (xy^3), mas el segundo término elevado a un grado inferior del dividendo (y^4).

De este ejemplo se puede concluir que:

La diferencia de potencias iguales, ya sean pares o impares se puede dividir por la suma o diferencia de sus bases y el resultado se empieza por un grado menos de las potencias del dividendo, el siguiente término va descendiendo de grado y el segundo término va aumentando hasta completar un grado menos del dividendo.

$$\longrightarrow \frac{m^6 - 64}{m+2} = m^5 - (m^4)(2) + (m^3)(2^2) - (m^2)(m^3) + m \cdot 2^4 - 2^5$$

$$\text{Organizando} \quad = m^5 - 2m^4 + 4m^3 - 8m^2 + 16m - 32$$

Es de resaltar que cuando el denominador es una suma, los signos se combinan, es decir el primer término de este resultado es positivo, el segundo negativo, el tercero positivo y así sucesivamente. Cuando el numerador es una diferencia todos los signos del resultado son positivos.

Para el caso de suma de potencias impares se puede proceder de la misma manera que lo planteado anteriormente, porque esta suma es siempre divisible por la suma o diferencias de sus bases.

REPASEMOS...

- La **diferencia** de potencias iguales, ya sean **pares** o **impares**, es siempre divisible por la **diferencia** de sus bases $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$

$$\text{ó } \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

- La **diferencia** de potencias iguales **pares** es siempre divisible por la **suma** de las bases $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$

- La **suma** de las potencias iguales **impares** es siempre divisible por la **suma** de las bases $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$

- La suma de las potencias iguales **pares NUNCA** es divisible por la **suma** ni por la **diferencia** de las bases.

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \text{no es una división exacta}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

$$1. \frac{8X^3 - 27Y^3}{2X + 3Y} = (2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 6xy + 9y^2$$

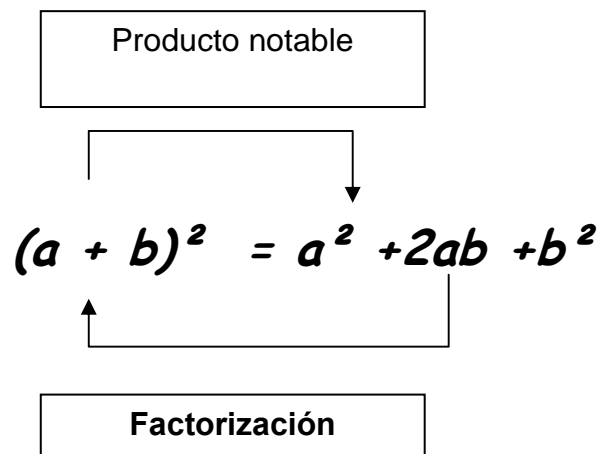
$$2. \frac{a^6 + b^6}{a + b} = \text{no se puede realizar porque la suma de potencias pares no}$$

son divisibles por la suma o diferencia de sus bases.

2.7. FACTORIZACION:

Consiste en presentar un polinomio en factores. La Factorización es el paso contrario a los productos notables. Este proceso es muy útil para simplificar fracciones.

Para llevar a cabo una factorización es necesario aprender ciertas reglas, las cuales están relacionadas con los productos notables.



O sea que en la factorización se parte del resultado de un producto notable $(a^2+2ab+b^2)$ para llegar a $(a + b)^2$.

A continuación se relacionan los casos más importantes de factorización:

2.7.1. FACTOR COMUN:

Sea

$$x^2 + 2x$$

En esta expresión algebraica se observa que x está en los dos términos, o sea que es común. Para llevar a cabo una factorización de este tipo, se selecciona el término común con el menor exponente, en este caso x , luego este término se coloca como coeficiente de un paréntesis $x ()$. Dentro del paréntesis se coloca el resultado de dividir cada uno de los términos dados por el factor común, $(x^2 + 2x) \div x = x + 2$, entonces la factorización queda:

$$x(x + 2)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $m^2 + 5mn + 3m = m(m + 5n + 3)$

Explicación:

La letra m es contenida en m^2 ; en $5mn$ y en $3m$ y la de menor exponente es m .

El resultado de dividir $m^2 \div m = m$

$$5mn \div m = 5n$$

$$3m \div m = 3$$

2. $2a^2b + 6ab^2 = 2ab(a + 3b)$

Explicación:

Cuando existen coeficientes numéricos es necesario descomponerlos, en este caso $2 = 2 \cdot 1$ y $6 = 3 \cdot 2$, entonces

$$2a^2b + 6ab^2 = 2a^2b + 3 \cdot 2ab^2$$

2

está en los dos términos

a

es común y es la de menor exponente

b también es común y es el de menor exponente

Entonces el factor común es $2ab$

Los términos que van dentro del paréntesis son:

$$2a^2b \div 2ab = a$$

$$3 \bullet 2ab^2 \div 2ab = 3b$$

$$3. \ x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$$

Explicación:

La letra x está en todos los tres términos y es la de menor exponente entonces este es el factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis son:

$$x^3 \div x = x^2$$

$$x^2 \div x = x$$

$$x \div x = 1$$

$$4. \ 15c^3 + 20c^2 - 5c = 5c(3c^2 + 4c - 1)$$

Explicación:

Descomponiendo los números: $15 = 5 \bullet 3$

$$20 = 5 \bullet 2^2$$

$$5 = 5 \bullet 1$$

De lo anterior se observa que el número 5 está contenido en (15, 20 y 5) entonces 5 es un factor común.

Con relación a las letras, la c está en todos los términos y es la de menor exponente. Entonces el factor común es $5c$

Los términos que van dentro del paréntesis:

$$15c^3 \div 5c = 3c^2$$

$$20c^2 \div 5c = 4c$$

$$5c \div 5c = 1$$

$$5. a^{24} - a^{18} + a^{15} - a^{10} + a^6 - a^3 = a^3 (a^{21} - a^{15} + a^{12} - a^7 + a^3 - 1)$$

Explicación:

La letra a esta en todos los términos pero la de menor exponente es a^3 , entonces este es el factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis:

$$a^{24} \div a^3 = a^{21}$$

$$a^{18} \div a^3 = a^{15}$$

$$a^{15} \div a^3 = a^{12}$$

$$a^{10} \div a^3 = a^7$$

$$a^6 \div a^3 = a^3$$

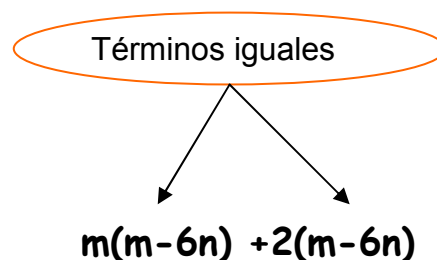
$$a^3 \div a^3 = 1$$

$$6. m^2 - 6mn + 2m - 12n$$

En este caso no hay un término que esté común en todos, porque por ejemplo m esta en los tres primeros términos pero no está en el último, mientras que n esta en el segundo y cuarto, entonces se pueden agrupar en dos paréntesis.

$$(m^2 - 6mn) + (2m - 12n)$$

Ahora cada una de estas agrupaciones se factorizan independientemente:



Como se observa, el término $(m-6n)$ está en los dos términos, entonces se coloca como factor común y al igual que en los ejemplos anteriores, cada uno de estos términos se divide por el factor común con el fin de hallar los términos que están dentro del paréntesis:

$$m(m-6n) \div (m-6n) = m$$

$$2(m-6n) \div (m-6n) = 2$$

Entonces la factorización queda: $(m-6n)(m+2)$

$$7. \quad a + a^2 - ab^2 - b^2$$

Es de aclarar que la agrupación se puede hacer de diferentes maneras, por ejemplo:

$$(a - b^2) + (a^2 - ab^2)$$

Ahora se factorizan cada uno de estos términos en forma independiente:

El primer término $(a - b^2)$ no tiene ningún término común, entonces se deja igual.

El segundo término $(a^2 - ab^2)$ tiene como factor común a , entonces esta factorización queda $a(a - b^2)$

$$(a - b^2) + a(a - b^2).$$

La expresión $(a - b^2)$ está en los dos términos o sea que es el factor común y los términos que van dentro el paréntesis son:

$$(a - b^2) \div (a - b^2) = 1$$

$$a(a - b^2) \div (a - b^2) = a$$

Entonces la factorización completa queda $(a - b^2)(1 + a)$

$$8. \quad x + y^2 - 2mx - 2my^2$$

Agrupando:

$$(x + y^2) - (2mx + 2my^2)$$

Recordando que para la eliminación de un paréntesis, si está precedido por el signo negativo (-), todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

En este caso, al agrupar el segundo término este queda precedido por el signo negativo, entonces se le hizo el cambio de signos a todo lo que estaba dentro del paréntesis, por eso $-2mx$ queda convertido en $2mx$ y $-2my^2$ se convierte en $+2my^2$

Ahora se factorizan independientemente cada uno.

$$(x + y^2) - 2m(x + y^2)$$

El factor $(x + y^2)$ está común en los dos términos, entonces es el común.

Los términos que van dentro del paréntesis son:

$$(x + y^2) \div (x + y^2) = 1$$

$$2m(x + y^2) \div (x + y^2) = 2m$$

Entonces la factorización queda:

$$(x + y^2) (1 - 2m)$$

2.7.2 DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS:

$$a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$$

El proceso para esta factorización consiste en extraerle la raíz cuadrada a cada uno de los términos de la diferencia de cuadrados ($a^2 - b^2$), o sea que las raíces son: $(a$ y $b)$, y la suma de estas raíces $(a + b)$ se multiplica por la diferencia de las raíces $(a - b)$

EJERCICIOS RESUELTOS

9. Factorizar: $81 - m^2$

$$\begin{array}{ccc} 81 & - & m^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 9 & & m \end{array} \quad \boxed{\text{Raíces}}$$

Luego la suma de estas raíces se multiplican por la diferencia de las raíces.

$$\boxed{(9 + m)(9 - m)}$$

10. $25x^2y^4 - 169$

$$\begin{array}{ccc} 25x^2y^4 & - & 169 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 5xy^2 & & 13 \end{array}$$

Entonces el resultado de esta factorización es: $\boxed{(5xy^2 + 13)(5xy^2 - 13)}$

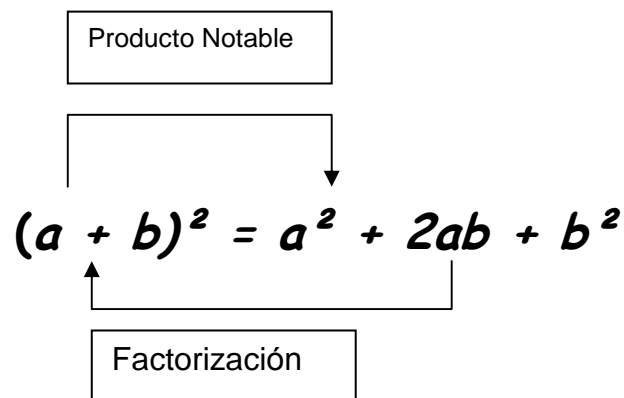
2. 7. 3 TRINOMIOS:

El trinomio es un polinomio que consta de tres terminos, como: $a + b + c$, $x^2 - 5x + 6$. Cuando se tiene un trinomio, lo primero que se verifica es si tiene un factor común y si lo tiene se realiza de la misma manera que se trabajó

anteriormente, pero si no tiene ningún factor común, se puede llevar a cabo el siguiente proceso:

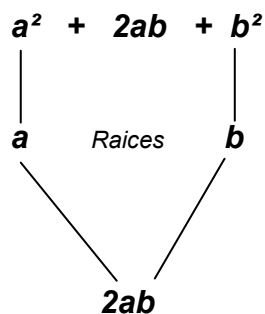
2.7.3.1. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:

Recordando los productos notables:

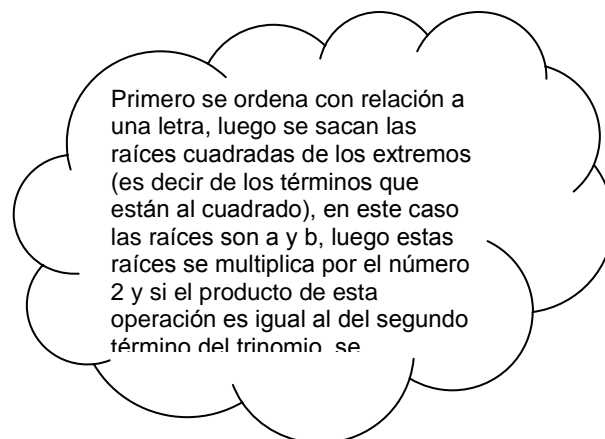


En el trinomio cuadrado perfecto se parte de $a^2 + 2ab + b^2$ para llegar a $(a + b)^2$

La forma de establecer si se trata de un trinomio cuadrado perfecto es:



Duplo del producto de las raíces



$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

11. Factorizar:

$$b^4 + 1 + 2b^2$$

Primero se ordenan con relación a la letra b, quedando:

$$b^4 + 2b^2 + 1$$

Ahora se sacan las raíces de los extremos, estas son (b^2 y 1)

Luego se halla el duplo de la multiplicación de estas dos raíces:

$2 \bullet b^2 \bullet 1 = 2b^2$ Este producto es igual al segundo término del trinomio, con esto se comprueba que es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es igual a la suma de las raíces elevadas al cuadrado.

$$(b^2 + 1)^2$$

12. Factorizar $x^2 - 12x + 36$

Ya está ordenado, ahora se verifica si es un trinomio cuadrado perfecto. Se hallan las raíces de los extremos, en este caso son (x y 6) y el producto de estas raíces se multiplica por dos (2) $x \bullet 6 \bullet 2 = 12x$, este último valor se compara con el segundo término del trinomio y se verifica que es igual. Sin embargo, el signo de este segundo término es negativo, razón por la cual la factorización queda como la diferencia de las raíces elevada al cuadrado.

$$(x - 6)^2$$

13. Factorizar $\frac{1}{25} + \frac{25a^4}{36} - \frac{a^2}{3}$

Ordenando queda:

$$\frac{1}{25} - \frac{a^2}{3} + \frac{25a^4}{36}$$

Las raíces de los extremos son: $\left(\frac{1}{5} \text{ y } \frac{5a^2}{6} \right)$

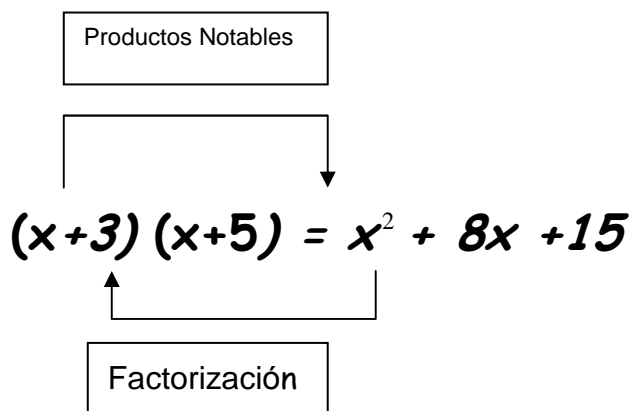
Ahora el producto de estas dos raíces se multiplica por dos (2) $\frac{1}{5} \bullet \frac{5a^2}{6} \bullet 2 =$
 $= \frac{1}{5} \bullet \frac{5a^2}{6} \bullet \frac{2}{1} = \frac{10a^2}{30} = \frac{a^2}{3}$ este valor se compara con el segundo

término del trinomio y se verifica que es igual, razón por la cual la factorización es la diferencia de las raíces elevadas al cuadrado (diferencia porque el segundo término del trinomio tiene signo negativo (-).

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{5a^2}{6} \right)^2$$

2.7.3.2. TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$:

Recordando:



Si se va a factorizar la expresión $x^2 + 8x + 15$ se procede de la siguiente manera:

x

do

x

(x

(5)

EJERCICIOS RESUELTOS

14. Factorizar: $m^2 + 5m + 6$

$$m^2 + 5m + 6 = (m + 3)(m + 2)$$

Explicación:

El trinomio está ordenado. No se trata de un trinomio cuadrado perfecto, porque el último término (6) no tiene raíz exacta, entonces la raíz del primer término (m) se coloca en dos factores, luego se halla un par de números que multiplicados den (+6) (último término del trinomio) y sumados algebraicamente

den (+5) (coeficiente del segundo término del trinomio). Esta pareja de números es (3 y 2), porque $3 \bullet 2 = 6$ y $3 + 2 = 5$ Esta pareja de números (6 , 2) se reparten en los factores antes relacionados.

15. Factorizar: $b^2 - 9b + 20$

$$b^2 - 9b + 20 = (b - 5) (b - 4)$$

Explicación:

No se trata de un trinomio cuadrado perfecto porque el primer término si tiene raíz exacta (b) pero el último término del trinomio (20) no tiene raíz exacta. Entonces la raíz del primer término se reparte en dos factoes (b) (b), luego se busca una pareja de números que multiplicados den +20 (último término del trinomio) y sumados den +9 (coeficiente del segundo término del trinomio).

Las parejas que al multiplicarlas dan +20 son: (5 •4); (-5 •-4); (2 •10); (-2 • -10); (20 • 1); (-20 •-1)

De estas parejas se selecciona aquella donde la suma de un valor de (-9).

Esta pareja es (-5 • -4) porque $-5 \bullet -4 = 20$ y $-5 -4 = -9$

Esta pareja de números se reparten en los dos factors (b -4) (b -5)

16. $-2x -35 +x^2$

Ordenando:

$$x^2 -2x -35 = (x -7) (x +5)$$

Explicación:

La raíz del primer término es x , el cual se distribuye en cada uno de los paréntesis $(x \quad) (x \quad)$.

Las parejas que multiplicadas dan el tercer término (-35) son:

$(7 \bullet -5); (-7 \bullet 5); (35 \bullet -1); (-35 \bullet 1);$

De estas parejas se selecciona aquella cuya suma algebraica es igual al coeficiente del segundo término (-2)

Entonces la pareja es $(-7 \bullet 5)$, esta pareja se distribuyen en los paréntesis inicialmente planteados $(x - 7) (x + 5)$

17. $a^4 - 60 - 11a^2$

Ordenando

$$a^4 - 11a^2 - 60 = (a^2 + 4) (a^2 - 15)$$

Explicación

La raíz del primer término (a^4) es a^2 , la cual se reparte en los dos paréntesis $(a^2 \quad) (a^2 \quad)$.

Las parejas que multiplicadas dan (-60) son: $(-2 \bullet 30); (-4 \bullet 15); (-10 \bullet 6); (-60 \bullet 1); (-20 \bullet 3); (-5 \bullet -12); (2 \bullet -30); (4 \bullet -15); (10 \bullet -6); (20 \bullet -3); (5 \bullet 12)$

De estas parejas se selecciona aquella cuya suma algebraica es igual a (-11) .

Esta pareja es $(4 \bullet -15)$. Esta pareja se distribuye en los paréntesis antes relacionados.

2.7.3.3. TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$:

La única diferencia que hay en este caso y el anterior, es en los coeficientes del primer término del trinomio, mientras que en caso anterior era uno (1) , ahora es un número diferente a uno (1) .

Por ejemplo:

$$5m^2 + 13m - 6$$

En este caso el coeficiente es 5, entonces este número no tendría raíz exacta, por lo tanto se recurre a la siguiente estrategia:

Se multiplican todos los términos del trinomio por el coeficiente del primer término:

$$(5) \bullet 5m^2 + 13(5)m - 6 \bullet (5)$$

$$25m^2 + 13(5)m - 30$$

El proceso siguiente es similar al anterior caso, donde se plantea que la raíz del primer término, en este caso de $(25m^2)$ es $(5m)$, esta raíz se distribuye en dos paréntesis $(5m \quad) (5m \quad)$

Ahora se busca la pareja de números multiplicados den (-30) y sumados algebraicamente den $(+13)$ (es de aclarar que en el segundo término se tiene en cuenta el valor original, es decir no se multiplica por (5) sino que se deja planteado para no confundirnos).

Las pareja que multiplicadas dan (-30) son:

$$(-2 \bullet 15); (-6 \bullet 5); (-10 \bullet -3); (-30 \bullet 1); (2 \bullet -15); (6 \bullet -5); (10 \bullet -3); (30 \bullet -1)$$

De estas parejas se selecciona la que sumada algebraicamente de 13 es $(-2 \bullet 15)$, entonces con esta pareja se completa los paréntesis relacionados anteriormente, quedando así: $(5m - 2) (5m + 15)$

Pero como se había multiplicado el trinomio por (5) , ahora se tiene que dividir por el mismo número, para no cambiar la expresión. $\frac{(5m - 2)(5m + 15)}{5}$

Para facilitar esta división se puede factorizar el denominador, de tal manera que divida exactamente a los factores del numerador.

Entonces 5 se puede factorizar en $5 \bullet 1$ y el factor $(5m - 2)$ se divide por (1) y el otro factor $(5m + 15)$ por (5)

$$\underline{(5m - 2)(5m + 15)} = (5m - 2)(m + 3)$$

Entonces el resultado de factorizar $5m^2 + 13m - 6 = (5m - 2)(m + 3)$

EJERCICIOS RESUELTOS

18. $12a^2 + 7a - 10$

Se multiplica todos los términos del trinomio por el coeficiente del primer término (12), recordando que en el segundo término, no se efectúa la multiplicación, sino que se deja planteada.

$$144a^2 + 7(12)a - 120$$

La raíz del primer término se distribuye en los dos paréntesis $(12a \quad)(12a \quad)$
 Ahora se busca la pareja de números que al multiplicarlos den (-120) y que sumados den (7).

Las diferentes parejas que multiplicadas dan (-120) son:

$(-2 \bullet 60); (-4 \bullet 30); (-8 \bullet 15); (-24 \bullet 5); (-10 \bullet 12); (-20 \bullet 6); (-40 \bullet 3); (-120 \bullet 1);$
 $(2 \bullet -60); (4 \bullet -30); (8 \bullet -15); (24 \bullet -5); (10 \bullet -12); (20 \bullet -6); (40 \bullet -3); (120 \bullet -1)$

De estas parejas se selecciona $(-8 \bullet 15)$ porque al sumar estos términos da (7)

Ahora se completan los factores inicialmente planteados con esta pareja

$$(12a - 8)(12a + 15)$$

Pero como se había multiplicado el trinomio por (12), ahora se procede a dividir los anteriores factores por este número. Este número puede colocarse en factores, tratando que cada uno de los factores del numerador sea divisible por

los factores del denominador. En este caso los factores pueden ser $4 \bullet 3$ porque $(12a - 8)$ es divisible por 4, mientras que $(12a + 15)$ es divisible por 3

$$\frac{(12a - 8)(12a + 15)}{4 \bullet 3} = (3a - 2)(4a + 5)$$

Entonces el resultado de factorizar $12a^2 + 7a - 10 = (3a - 2)(4a + 5)$

19. $35x^2 - 24x + 4$

Se multiplican todos los términos del trinomio por 35 que es el coeficiente del primer término

$$35 \bullet 35x^2 - 24(35)x + 4 \bullet 35$$

$$1225x^2 - 24(35)x + 140$$

La raíz del primer término es $35x$, la cual se reparte en los dos paréntesis

$$(35x \quad) (35x \quad)$$

Las parejas de números que multiplicadas dan 140 son:

$(2 \bullet 70)$; $(-2 \bullet 70)$; $(4 \bullet 35)$; $(-4 \bullet -35)$; $(-14 \bullet -10)$; $(14 \bullet 10)$; $(28 \bullet 5)$; $(-28 \bullet -5)$; $(140 \bullet 1)$;

De esta parejas la que sumada algebraicamente da -24 es $(-14 \bullet -10)$

Esta pareja se reparte en los paréntesis inicialmente planteados

$$(35x - 14)(35x - 10)$$

Ahora estos factores se dividen por 35 que podría ser $7 \bullet 5$

$$\frac{(35x - 14)(35x - 10)}{7 \bullet 5} = (5x - 2)(7x - 2)$$

Entonces la factorización de $35x^2 - 24x + 4 = (5x - 2)(7x - 2)$

2.7.4 SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS:

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

La suma de dos cubos perfectos ($a^3 + b^3$) es igual a la suma de las raíces ($a+b$) multiplicadas por la primera raíz elevada al cuadrado, menos la primera por la segunda mas la segunda al cuadrado ($a^2 - ab + b^2$)

Ejemplo:

$$64x^3 + 125y^3$$

$$\begin{array}{ccc} 64x^3 & + & 125y^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4x & & 5y \end{array}$$

Raíces cúbicas

Ahora la suma de estas raíces ($4x + 5y$) se multiplica por la primera raíz al cuadrado menos la primera por la segunda raíz, más la segunda al cuadrado:

$$(4x + 5y) ((4x)^2 - (4x)(5y) + (5y)^2) = (4x + 5y) (16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

Cuando se trata de diferencia de cubos, la única diferencia respecto a la suma es que el primer factor corresponde a la diferencia de las raíces y en el segundo factor todos los términos son positivos.

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

AUTOEVALUACION 7: FACTORIZACIÓN

Factorice hasta donde sea posible:

1. $c^2 - 25$

2. $2a^3 + 8a$

3. $3m^3 - 6m^2 + 15m$

4. $x^2 + 49$

5. $27 - x^3y^3$

6. $4b^2 - 4b - 24$

7. $y^3 - 2y^2 + y - 2$

8. $a^2b^2 - 16$

9. $m^2 - 4m + 3$

10. $18a^3 - 8a$

2.8. MAXIMO COMUN DIVISOR:

Quando se analizó el **común divisor** en los números racionales, veíamos que este era aquel que podía ser dividido exactamente por los números de los denominadores de las fracciones.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$$

15

Por ejemplo: el común denominador es , ya que este número puede ser dividido por

3

 y por

5

. Este principio también se cumple

para expresiones algebraicas.

El **Factor Común o Divisor Común** de dos o más expresiones algebraicas, es una expresión que puede dividir en forma exacta a las expresiones dadas.

Sean las expresiones: $10a^4b^3$, $5a^2b^4$, $20ab$.

El divisor común es la expresión: $5ab$, ya que las expresiones $10a^4b^3$, $5a^2b^4$, $20ab$ se pueden dividir exactamente por $5ab$:

$$10 a^4b^3 \div 5ab = 2a^3b^2$$

$$5 a^2b^4 \div 5ab = ab^3$$

$$20ab \div 5ab = 4$$

2.8.1. MAXIMO COMUN DIVISOR DE MONOMIOS (M C D):

Para obtener el **M C D** de monomios, primero se determina el comun divisor de los coeficientes, luego se identifican las bases comunes; seleccionando las de menor exponente.

Recordar que uno (1) es el mínimo comun denominador de cualquier expresión.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el M C D de las siguientes expresiones: $25x^4y$, $20x^2y^3$, $15xa^3$

El M C D es: $5x$. Porque el común divisor de los coeficientes 25, 20, 15 es 5 y la única base común (que esta presente en todos los términos) es x y esta es la de menor exponente.

2. Cual será el M C D de: $12a^4b^3$, $15b^2c^4$, $20a^3b^4c^2$

Al descomponer estos tres coeficientes:

$$12 = 4 \cdot 3$$

$$15 = 5 \cdot 3$$

$$20 = 4 \cdot 5$$

Se observa que no hay un factor común.

Con relación a las bases se observa que b está común en los tres términos, pero la de menor exponente es b^2 , entonces el divisor común es b^2 .

2.8.2. MAXIMO COMUN DIVISOR DE POLINOMIOS:

Para hallar el MCD de polinomios, hay dos caminos:

—> Primero: factorizando los polinomios para obtener factores.

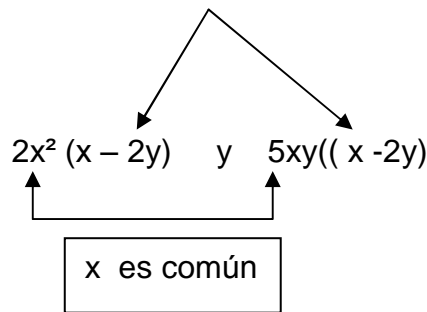
—> Segundo: por divisiones sucesivas.

Para obtener el MCD por factorización, primero se descomponen los polinomios en sus factores primos, el MCD será el producto de los factores comunes con su menor exponente.

⇒ Hallar el MCD de: $2x^3 + 4x^2y$ y $5x^2y - 10xy^2$

Factorizamos cada uno de estos términos: $2x^2(x - 2y)$ y $5xy(x - 2y)$

El MCD es: $x(x - 2y)$ porque: Comunes



x está en los dos términos y es la de menor exponente
 $(x - 2y)$ está presente en los dos términos.

⇒ Hallar el MCD de: $2x^2 + 2x - 4$, $2x^2 - 8x + 6$, $2x^3 - 2$

Factorizando: $2x^2 + 2x - 4 = \frac{(2x)^2 + 2(2x) - 8}{2}$

$$= \frac{(2x + 4) + (2x - 2)}{2} = \boxed{(x + 2)(2x - 2)}$$

$$2x^2 - 8x + 6 = \frac{(2x)^2 - 8(2x) + 12}{2} = \frac{(2x - 6) + (2x - 2)}{2} = \boxed{(x - 3)(2x - 2)}$$

$$2x^3 - 2 = 2(x^3 - 1) = 2(x - 1)(x^2 + x + 1) = \boxed{(2x - 2)(x^2 + x + 1)}$$

Ahora se buscan los factores comunes con el menor exponente, este es:

$(2x - 2)$

Entonces el MCD es: $\boxed{(2x - 2)}$

- Cuando los polinomios **NO se pueden factorizar**, el MCD se calcula por medio de divisiones sucesivas. En este caso se ordenan los polinomios respecto a la misma letra y se divide el polinomio de mayor grado en el de menor grado. Cuando los dos tienen el mismo grado, cualquiera puede ser el dividendo. Si la división es exacta, el divisor será el M C D, pero cuando la división no es exacta, se divide el primer divisor por el primer residuo, luego por el segundo residuo y así sucesivamente, hasta que la división sea exacta.

⇒ Ejemplo: Hallar el MCD de los polinomios: $12y^2 + 8y + 1$ y $2y^2 - 5y - 3$

Se hace la primera división:

$12y^2 + 8y + 1 \div 2y^2 - 5y - 3 = 6$ porque al dividir el primer término del dividendo por el divisor se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 12y^2 + 8y + 1 \quad | \quad 2y^2 - 5y - 3 \\
 \underline{-12y^2 + 30y + 18} \quad \swarrow \searrow \quad 6 \\
 0 + 38y + 19
 \end{array}$$

y el residuo es $38y + 19$

Ahora: el de mayor grado es el divisor, entonces se divide este término por el residuo que es de menor valor.

$$\begin{array}{r}
 2y^2 - 5y - 3 \quad | \quad 38y + 19 \\
 \underline{-2y^2 - y} \quad \quad (2/38)y \\
 0 - 6y - 3
 \end{array}$$

El nuevo residuo es $-6y - 3$ se simplifica dividiendo todo el término por (-3) ,

Entonces queda $(-6y - 3) \div (-3) = 2y + 1$

Nuevamente el divisor se divide por el residuo

$$\begin{array}{r}
 38y + 19 \quad | \quad -6y - 3 \\
 \underline{-38y - 19} \quad \quad -\left(\frac{38}{6}\right) \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

El residuo es cero (0)

Entonces el MCD será: $2y + 1$

2.9. MINIMO COMUN MULTIPLO:

Para hablar el Mínimo Común Múltiplo, es pertinente analizar de los Múltiplos Comunes, los cuales son cantidades que pueden ser divisibles por las cantidades dadas. Por ejemplo si tenemos las cantidades $3, 6, 9$, estos números tendrán como Múltiplos comunes: $9, 18, 27$ como se observa, hay gran cantidad de múltiplos comunes, pero para un estudio matemático, lo que se requiere es el **Mínimo**, para lo cual le hace el análisis pertinente.

El Mínimo Común Múltiplo MCM, de dos o más expresiones algebraicas, es una expresión que puede ser divisible exactamente por las expresiones dadas. EL MCM contiene el menor coeficiente numérico y la base con el menor grado de todos los múltiplos que posee las expresiones dadas.

2.9.1. MINIMO COMUN MULTIPLO DE MONOMIOS:

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo de monomios, primero se descomponen los términos en factores primos. Luego se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, el producto de estos será el M C M.

Ejemplo: Hallar el MCM de las siguientes expresiones $2x$, $6x^2y$, $12y^3$

Descomponiendo los coeficientes en factores primos:

$$2 = 2 \bullet 1$$

$$6 = 2 \bullet 3$$

$$12 = 2^2 \bullet 3$$

Entonces las expresiones quedan $2x$, $2 \bullet 3x^2y$, $2^2 \bullet 3y^3$

Ahora se toman los factores comunes y no comunes con el **mayor exponente** de cada uno de estos términos:

$$2^2 \bullet 3x^2y^3 = 12x^2y^3$$

Entonces el MCM es

Ejemplo: Cual es el MCM de: $5a^4b$, $10b^3c$, $20a^2c^2$

Descomponiendo los coeficientes en factores primos:

$$5 = 5 \bullet 1$$

$$10 = 5 \bullet 2$$

$$20 = 5 \bullet 2^2$$

Las expresiones quedan:

$$5a^4b, 5 \bullet 2b^3c, 5 \bullet 2^2a^2c^2$$

El Mínimo Común Múltiplo es: $5 \bullet 2^2 a^4 b^3 c^2$

Entonces el MCM es: $20a^4b^3c^2$

2.9.2. MINIMO COMUN MULTIPLO DE POLINOMIOS:

Para conocer el MCM de polinomios, la regla es similar que lo hecho para monomios. Es necesario resaltar la importancia que tiene el hecho de dominar los casos de factorización, ya que es la herramienta fundamental para resolver problemas de mínimo común múltiplo.

Ejemplo Hallar el MCM de los siguientes polinomios $3ax - 6a$, $bx^2 - 4bx + 4b$

Factorizando los polinomios por separado:

$$3ax - 6a = 3a(x-2)$$

$bx^2 - 4bx + 4b = b(x^2 - 4x + 4)$ pero como $(x^2 - 4x + 4)$ es un trinomio cuadrado perfecto, la factorización completa queda:

$$b(x - 2)^2$$

Ahora se seleccionan los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$3ab(x - 2)^2$$

Entonces el MCM de las expresiones es:

$$3ab(x - 2)^2$$

Ejemplo: Determinar el MCM de $5a^3 - 40$, $a^2 - 4$

Factorizando cada uno de estos términos:

$5a^3 - 40 = 5(a^3 - 8)$ pero como la factorización de $(a^3 - 8)$ es $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$, la factorización completa es:

$$5(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

$$a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$$

Los factores comunes y no comunes con su mayor exponente son:

$$5(a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a + 2)$$

Entonces el MCM de las expresiones es:

$$5(a - 2)(a + 2)(a^2 + 2a + 4)$$

Recordar que el MCM es una expresión que divide exactamente a cada una de las expresiones dadas.

AUTOEVALUACION 8: MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN
MULTIPLO

Hallar el MCD de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3a^2x, 7a^3x^3, 12b^2x^2$
2. $16a^2b, 20bc^2, 30x^2y^2$
3. $24pq^3, 16p^3, 28p^4q^2, 40qxp$
4. $x^3 + 27, 2x^2 - 2x - 24, x^4 + x^3 - 6x^2$
5. $3p^2 - 6p, 3p^3 - 6p^2, p^2q - 2pq, p^3 - p^2 - 2p$
6. $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6, x^3 + x^2 - x + 2$

Hallar el MCM de las siguientes expresiones algebraicas:

7. $12x^3, 18xy^2, 30y^3$
8. $5a^2, 7ab^2, 9ax^3, 10b^3x^2$
9. $x^2 + 2x, x^3 - 2x^2, x^2 - 4$
10. $(a - 2)^2, a^2 - 4, (a - 2)^3$
11. $x^3 - 9x + 5x^2 - 45, x^4 + 2x^3 - 15x^2$

2.10. FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Las fracciones algebraicas son expresiones donde el numerador y el denominador son monomios o polinomios, aclarando que el denominador debe ser diferente de cero. La expresión puede ser: **entera** cuando el denominador tiene solo valores numéricos, **mixta** si consta de una parte entera y una parte fraccionaria y **racional** si el denominador tiene parte literal.

Entera: $\frac{a + b}{2}$

Mixta: $x + \frac{3 + y}{x}$

Racional: $\frac{3x - 2y}{x - y}$

Hay algunos aspectos de las fracciones que son importantes resaltar:

→ Una Fracción es positiva, si tanto el numerador como denominador tiene el mismo signo.

$$\frac{a}{b}, \frac{-a}{-b}$$

→ Una fracción es negativa, si el numerador y denominador tienen signos distintos.

$$\frac{-a}{b}, \frac{a}{-b}$$

→ Cuando el numerador y denominador de una fracción se multiplica o divide por la misma cantidad, la fracción **NO** se altera.

2.10.1. REDUCCION DE FRACCIONES:

Reducir una fracción, es llevarla a una fracción irreducible sin que su valor cambie; es decir, no hay mas factores que sean divisibles entre sí, por lo tanto una fracción irreducible, no se puede simplificar más.

2.10.2. FRACCIONES CON MONOMIOS:

Para simplificar fracciones cuyos términos son monomios, se divide el numerador y denominador por los factores comunes, hasta obtener una fracción irreducible.

Ejemplo:

Simplificar $\frac{6a^3b^2}{2ab^4}$

Para hallar el factor común de los dos términos (numerador y denominador) es necesario descomponerlos:

$$\frac{6a^3b^2}{2ab^4} = \frac{3 \cdot 2a^3b^2}{2ab^4}$$

Entonces los términos comunes con su menor exponente son: $2ab^2$

Ahora cada uno de los términos (numerador y denominador) se simplifica, es decir se divide por el factor común:

Ejemplo:

$$\frac{6a^3b^2/2ab^2}{2ab^4/2ab^2} = \frac{3a^2}{b^2} \quad \text{Esta fracción es irreducible.}$$

Ejemplo: simplificar: $\frac{15x^4y^3z^2}{12y^2z^3p}$

Descomponiendo los dos términos:

$$\frac{15x^4y^3z^2}{12y^2z^3p} = \frac{5 \cdot 3x^4y^3z^2}{2^2 \cdot 3y^2z^3p}$$

Los factores comunes con su menor exponente son: $3y^2z^2$

Ahora cada uno de los términos se divide por el factor común:

$$\frac{15x^4y^3z^2 / 3y^2z^2}{12y^2z^3p / 3y^2z^2}$$

$$\frac{5x^4y}{47}$$

Fraccion irreducible.

FRACCIONES CON POLINOMIOS:

Para simplificar fracciones cuyos terminos son polinomios, se descompone en factores primos cada polinomio y se simplifican aquellos que son comunes.

Ejemplo:

Simplificar: $\frac{6x^3}{12x^4 - 6x^2y}$

Para simplificar es necesario factorizar los términos que se puedan, en este caso el denominador. Entonces esta fracción queda:

$$\frac{6x^3}{12x^4 - 6x^2y} = \frac{6x^3}{6x^2(2x^2 - y)} \quad \text{simplificando queda: } \frac{x}{2x^2 - y}$$

Ejemplo:

Simplificar: $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

Aquí se factorizan los dos términos de la fracción

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} \quad \text{simplificando queda } \frac{a-b}{a+b}$$

2.11. OPERACIONES CON FRACCIONES:

La parte que a continuación vamos a estudiar son las operaciones con fracciones, para esto es conveniente recordar los aspectos estudiados con números racionales y especialmente números fraccionarios, ya que las operaciones con fracciones siguen las mismas reglas aritméticas que éstos números.

2.11.1. SUMA DE FRACCIONES:

Para sumar fracciones, primero se debe simplificar aquellos que se puedan reducir, luego se busca el común denominador, para luego realizar las operaciones que permitan terminar la operación.

En el caso de monomios, se busca el MCM de los denominadores, luego éste se divide por cada denominador, cada resultado se multiplica por su correspondiente numerador, finalmente se hace la suma, siguiendo los principios estudiados para la suma de polinomios.

Ejemplo:

Realizar la siguiente operación: $\frac{x-2}{6} + \frac{3x+2}{3}$

El MCM es: 6 Este número se deja como denominador de común y para hallar los numeradores, el denominador común (6) se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y el resultado se multiplica por sus respectivos numeradores:

$$\frac{x-2}{6} + \frac{3x+2}{3} = \frac{(6 \div 6)(x-2) + (6 \div 3)(3x+2)}{6} = \frac{(x-2) + (6x+4)}{6} = \frac{x-2+6x+4}{6} = \boxed{\frac{7x+2}{6}}$$

Ejemplo:

Operar: $\frac{x-2}{4a^2b} + \frac{2x-3}{12ab^2}$

Recordando que para hallar el denominador común se seleccionan los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, entonces se descomponen para facilitar el proceso:

$$\frac{x-2}{4a^2b} + \frac{2x-3}{12ab^2} = \frac{x-2}{2^2a^2b} + \frac{2x-3}{2^2 \bullet 3ab^2}$$

Entonces el denominador común de estas dos fracciones es: $2^2 \bullet 3a^2b^2 = 12a^2b^2$

Ahora para hallar los términos del numerador, se divide este denominador común por cada uno de los denominadores de las fracciones y se multiplica por sus respectivos numeradores:

$$\frac{x-2}{4a^2b} + \frac{2x-3}{12ab^2} = \frac{(12a^2b^2 \div 4a^2b)(x-2) + (12a^2b^2 \div 12ab^2)(2x-3)}{12a^2b^2} =$$

$$\frac{(3b)(x-2) + (a)(2x-3)}{12a^2b^2} =$$

$$\frac{(3bx-6) + (2ax-3a)}{12a^2b^2} = \boxed{\frac{3bx-6b+2ax-3a}{12a^2b^2}}$$

Cuando los denominadores son polinomios, éstos se factorizan y se busca el común denominador, el procedimiento es similar al caso anterior.

Ejemplo:

Operar: $\frac{2}{3x+3} + \frac{4}{2x-2}$

Antes de iniciar la operación es importante verificar si las fracciones se pueden simplificar, en este caso, la segunda fracción se puede simplificar:

$$\frac{4}{2x-2} = \frac{4}{2(x-1)} = \frac{2}{x-1}$$

Entonces las fracciones quedan:

$$\frac{2}{3x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Ahora si se procede a hallar el denominador común, pero para esto es necesario factorizar los denominadores. En este caso el denominador del primer fraccionario es el único que se puede factorizar, entonces:

$$\frac{2}{3x+3} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{x-1}$$

El denominador común de estas dos fracciones es: $3(x+1)(x-1)$. Ahora se procede de la forma anterior, este denominador se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y luego se multiplica por su respectivo numerador:

$$\frac{\left[\frac{3(x+1)(x-1)}{3(x+1)} \cdot 2 \right] + \left[\frac{3(x+1)(x-1)}{(x-1)} \cdot 2 \right]}{3(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1) \cdot 2 + 3(x+1) \cdot 2}{3(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x-2+6x+6}{3(x+1)(x-1)} = \boxed{\frac{8x+4}{3(x+1)(x-1)}}$$

Ejemplo:

Operar: $\frac{x}{x^2-4} + \frac{2x}{x^2-x-2}$

Factorizando los denominadores, para el primero diferencia de cuadrados y para el segundo trinomio de la forma x^2+bx+c

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$$

El factor común es: $(x+2)(x-2)(x+1)$ Entonces:

$$\frac{\left\{ \left[\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} \right] (x) + \left[\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} \right] (2x) \right\}}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x) + (x+2)(2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 2x^2 + 4x}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{3x^2 + 5x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

2.11.2. RESTA DE FRACCIONES:

Para restar fracciones, el procedimiento es similar al de la suma, solo que el signo de la operación es negativo lo cual se debe operar con cuidado en la destrucción de paréntesis, recordando que cuando un paréntesis está precedido por el signo (-) todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

Ejemplo

Operar: $\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2x}{x^2 - x - 2}$

Las operaciones son las mismas que en la suma, pero el signo afecta la segunda parte del proceso.

$$\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{\left[\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} \right] (x) - \left[\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} \right] (2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x) - (x+2)(2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{(x^2 + x) - (2x^2 + 4x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{x^2 + x - 2x^2 - 4x}{(x+2)(x-2)(x+1)} =$$

$$\frac{-x^2 - 3x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

Otra forma de presentar esta fracción es colocándole el signo a toda la fracción, por lo tanto los signos del numerador quedan positivos.

$$-\frac{x^2 + 3x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

2.11.3. MULTIPLICACION DE FRACCIONES:

La multiplicación de fracciones es similar ala multiplicación de números fraccionarios, numerador por numerador y denominador por denominador. La fracción obtenida se debe simplificar si es posible.

Ejemplo

Operar: $\frac{3x^2}{2y^2} \bullet \frac{5xy}{10y^2z}$

Se realiza la multiplicación numerador por numerador y denominador por denominador:

$$\frac{3x^2}{2y^2} \bullet \frac{5xy}{10y^2z} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x \cdot y}{2 \cdot 10 \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot z} \quad \text{simplificando: } \frac{3x^3}{4y^3z} \quad \text{Quedo en la}$$

fracción irreducible.

Ejemplo:

Operar: $\frac{2x^2-3y}{x-2} \bullet \frac{x^3+4}{y-1}$

La operación se realiza multiplicando los numeradores, como se hace para polinomio, igual los denominadores.

Recordando la multiplicación de polinomios:

$$\frac{(2x^2 - 3y) + (x^3 + 4y)}{(x - 2)(y - 1)}$$

$$\frac{2x^2 - 3y}{x - 2} \cdot \frac{x^3 + 4}{y - 1} = \frac{(2x^2 - 3y)(x^3 + 4)}{(x - 2)(y - 1)} = \frac{2x^5 + 8x^2 - 3x^3y - 12y}{xy - x - 2y + 2}$$

La fracción resultante no se puede simplificar.

Ejemplo.

Operar: $\left(y - \frac{5x}{2}\right) \cdot \left(2 + \frac{y-1}{x}\right)$

Como observamos son fracciones mixtas, para lo cual se debe primero convertirlas en fracciones racionales y luego si multiplicarlas. Es importante recordar que un número entero se pueden convertir en fracciones colocándole como denominador el número (1).

$$\left(y - \frac{5x}{2}\right) = \left(\frac{y}{1} - \frac{5x}{2}\right) = \frac{2y - 5x}{2}$$

$$\left(2 + \frac{y-1}{x}\right) = \left(\frac{2}{1} + \frac{y-1}{x}\right) = \frac{2x + y - 1}{x}$$

Como las dos fracciones son racionales, ahora si se pueden multiplicar.

$$\frac{(2y-5x)}{2} \cdot \frac{(2x+y-1)}{x} = \frac{4xy + 2y^2 - 2y - 10x^2 - 5xy + 5}{2x} = \frac{2y^2 - 10x^2 - 2y - xy + 5}{2x}$$

2.11.4. DIVISION DE FRACCIONES:

Como en la división hay un dividendo y un divisor, la operación se realiza multiplicando el dividendo por el recíproco de divisor.

Ejemplo

Operar: $\left(\frac{6ab}{3z^2} \right) \div \left(\frac{2xz}{2y} \right)$

El recíproco del divisor $\frac{2xz}{2y}$ es: $\frac{2y}{2xz}$

Entonces se multiplica el dividendo por este recíproco

$$\frac{6ab}{3z^2} \cdot \frac{2y}{2xz} = \frac{12aby}{6xz^3} = \boxed{\frac{2aby}{xz^3}}$$

Otra forma de realizar una división es:

$$\begin{array}{l} \frac{6ab}{3z^2} \\ \hline \frac{2xz}{2y} \end{array} = \text{Producto de } \mathbf{extremos} \text{ sobre producto de } \mathbf{medios}$$

$$= \frac{6ab \cdot 2y}{3z^2 \cdot 2xz} = \frac{12aby}{6xz^3} = \boxed{\frac{2aby}{xz^3}}$$

2.12. FRACCIONES COMPLEJAS:

Las fracciones complejas son aquellas donde el numerador, denominador o los dos tiene fracciones algebraicas.

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{x}{y}}{2}, \quad \frac{\frac{3 + \frac{a}{b}}{\frac{x}{y} - \frac{2}{a}}}{1}$$

son algunos ejemplos de fracciones complejas.

Si se observa, se puede deducir que una fracción compleja no es mas que la división indica de dos fracciones.

Las fracciones de este tipo, no se pueden operar de dicha forma, por lo cual se requiere un método de simplificarlas para poder realizar operaciones entre ellas.

Para SIMPLIFICAR fracciones complejas, se operan las fracciones del numerador y denominador por separado con los resultados de éstas, se hace la división.

Ejemplo:

Simplificar la fracción: $\frac{2 - \frac{a}{x}}{x + \frac{1}{a}}$

Se operan independientemente el numerador y el denominador

Numerador: $2 - \frac{a}{x} = \frac{2}{1} - \frac{a}{x} = \boxed{\frac{2x - a}{x}}$

Denominador: $x + \frac{1}{a} = \frac{x}{1} + \frac{1}{a} = \boxed{\frac{ax + 1}{a}}$

La nueva fracción queda:

$$\frac{\frac{2x-a}{x}}{\frac{ax+1}{a}} = \frac{a \cdot (2x-a)}{x \cdot (ax+1)} = \frac{2ax - a^2}{ax^2 + x} \quad \text{Aplicando los productos de extremos}$$

sobre productos de medios o la famosa “**Ley de la Oreja**”

Ejemplo:

$$\text{Simplificar: } \frac{a-x+\frac{1}{x}}{2-\frac{x-1}{x+1}}$$

Se realizan las operaciones planteadas en el numerador y denominador en forma independiente:

$$\text{Numerador } a-x+\frac{1}{x} = \frac{a}{1} - \frac{x}{1} + \frac{1}{x} = \boxed{\frac{ax-x^2+1}{x}}$$

$$\text{Denominador: } 2-\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x+2-x+1}{x+1} = \boxed{\frac{x+3}{x+1}}$$

La nueva fracción será:

$$\frac{\frac{ax-x^2+1}{x}}{\frac{x+3}{x+1}} = \frac{(x+1)(ax-x^2+1)}{(x)(x+3)} = \frac{ax^2-x^3+x+ax-x^2+1}{x^2+3x} =$$

$$\frac{ax^2-x^2-x^3+ax+x+1}{x^2+3x}$$

AUTOEVALUACION 9: FRACCIONES ALGEBRAICAS

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\frac{15a^4b^3}{3a^5z^2}$

2. $\frac{17axt}{5bp}$

3. $\frac{20yz}{35zw}$

4. $\frac{5a^5t^3}{2t^6a^2b}$

6.
$$\frac{\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}}{\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x - \frac{x-3}{x+2}}}$$

7.
$$\frac{\frac{x-2}{x} - \frac{y+3}{y}}{4 - \frac{3-x}{1 - \frac{x-2}{2 + \frac{2}{x}}}}$$

UNIDAD DIDACTICA DOS

RAZONES- PROPORCIONES Y GEOMETRÍA

CAPITULO 3

RAZONES Y PROPORCIONES

3. RAZONES Y PROPORCIONES:

3.1. RAZONES:

Las razones son comparaciones entre dos cantidades, de acuerdo al tipo de comparación, se presentan dos clases de razones: **razones aritméticas y razones geométricas.**

3.1.1. RAZONES ARITMÉTICAS:

Sea: $7 - 3 = 4$

La razón aritmética, llamada también razón por diferencia, consta de un antecedente, en este caso (7) y un consecuente (3). Es decir, 7 excede en 4 a 3 .

Matemáticamente se representa: $a - b = c$ y significa que a excede a b en la cantidad c . Esta razón indica cuanto el antecedente excede al consecuente.

Como se observa, esta **razón aritmética se representa por el signo menos.**

3.1.2. RAZON GEOMETRICA:

Sea:

$$\frac{12}{4} = 3$$

Significa que la relación entre 12 y 4 es 3, es decir que (12) contiene (3) veces a (4).



La **razón geométrica** se expresa en forma de fracción, donde el antecedente es el numerador y el consecuente es el denominador, por lo tanto la razón geométrica tiene las mismas propiedades que los números fraccionarios.

Matemáticamente la razón geométrica se representa como:

$$\frac{a}{b} = c$$

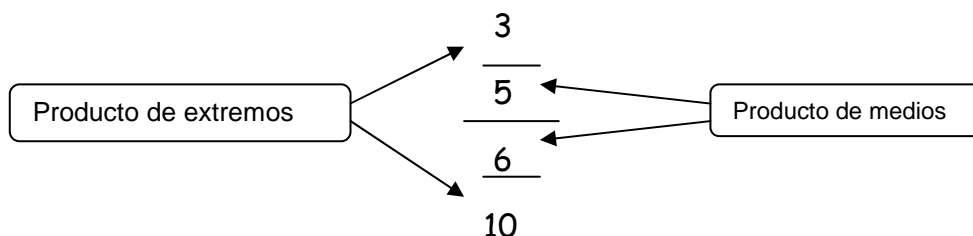
En la razón \boxed{a} contiene \boxed{c} veces a \boxed{b} . La Razón geométrica, llamada también razón por cociente, indica cuantas veces el antecedente contiene al consecuente. **La razón geométrica se representa por una división.**

3.2. PROPORCIONES:

Dada la proporción $\boxed{\frac{3}{5} = \frac{6}{10}}$ significa que la razón $\frac{3}{5}$ se esta comparando con la razón $\frac{6}{10}$

En estas también se identifican el antecedente, en este caso $(\frac{3}{5})$ y el consecuente $(\frac{6}{10})$

Para comprobar esta proporción es necesario que el producto de los extremos sea igual a los medios entonces:



El producto de los extremos es igual a $3 \cdot 10 = 30$ y el producto de los medios es igual a $5 \cdot 6 = 30$, entonces se comprueba que es una proporción.

Matemáticamente, la proporción se define como una comparación entre dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Donde: $\frac{a}{b}$ es el antecedente y $\frac{x}{y}$ es el consecuente.

En la razón expresada, \boxed{a} y \boxed{y} son los extremos, \boxed{b} y \boxed{x} son los medios.

Otra forma de expresar una razón es $a : b :: x : y$ Lo que se lee:
 a es a b , como x es a y .

$\begin{array}{c} \text{medios} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a : b :: x : y \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{extremos} \end{array}$

Propiedad Fundamental

En toda proporción el producto de los extremos es igual al productos de los medios.

Ejemplo:

$$a \cdot y = b \cdot x$$

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$$

También se puede escribir $\frac{7}{8}$ Es una proporción porque:

$$\frac{14}{8}$$

El producto de los extremos $4 \cdot 14 = 56$ y el producto de medios es $7 \cdot 8 = 56$

3.2.1. CUARTA PROPORCIONAL: Se refiere al valor de uno de los términos de una proporción, cuando se conocen tres de ellos.

Por ejemplo, si se quiere hallar la cuarta proporcional de la siguiente proporción

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$

Se aplica la ley fundamental: **Productos de medios es igual a productos de extremos.**

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$

$$\longrightarrow 6 \cdot x = 4 \cdot 9 \text{ entonces } 6x = 36.$$



"En una ecuación como la anterior, para hallar el valor de la incógnita x , se dividen los dos términos de la igualdad por el coeficiente de la incógnita.

Teniendo en cuenta lo anterior, para encontrar el valor de la incógnita, se dividen los dos términos por (6) porque es el coeficiente que acompaña la incógnita.

Entonces, $\frac{6x}{6} = \frac{36}{6}$ al simplificar da como resultado

$$x = 6$$

Matemáticamente, $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ siendo **a, b, c**, conocidos, entonces x será la cuarta proporcional.

→ Ejemplo: Hallar el valor de x de la siguiente proporción: $\frac{9}{x} = \frac{3}{8}$

Aplicando la ley fundamental: productos de medios es igual al producto de extremos:

$3 \cdot x = 9 \cdot 8$ queda: $3x = 72$, dividiendo los dos términos por 3 (coeficiente de la incógnita):

$$\frac{3x}{3} = \frac{72}{3} \quad \text{Entonces: } x = 24$$

3.2.2. TRANSPOSICION DE TERMINOS: Esta propiedad permite escribir la proporción de diferente forma, sin que se pierda la igualdad.

Por ejemplo, la proporción:

$$\frac{1}{7} = \frac{3}{21} \quad \text{Se puede escribir de las siguientes formas: } \frac{1}{3} = \frac{7}{21} \quad \text{ó} \quad \frac{3}{1} = \frac{21}{7}$$

Matemáticamente $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se puede escribir:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	ó	$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$	ó	$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	ó	$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$
-----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------

AUTOEVALUACIÓN 10: RAZONES Y PROPORCIONES

En las siguientes razones, identificar el antecedente y el consecuente:

1. $a - b = c$

2. $12 - 4 = 8$

3. $25 - 4 = 21$

4. $\frac{12}{4} = 3$

5. $\frac{20}{5} = 4$

En las razones dadas, identificar el valor del término que falta.

6. $x - 5 = 4$

7. $38 - x = 29$

8. $\frac{x}{5} = 10$

9. $\frac{84}{x} = 7$

En las siguientes proporciones, cual es el valor de la x.

10. $\frac{7}{2} = \frac{x}{6}$

11. $\frac{x}{4} = \frac{8}{12}$

Expresar en dos o más formas, las siguientes proporciones sin que pierdan su equivalencia.

12. $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

13. $\frac{5}{12} = \frac{45}{108}$

3.3. REPARTO PROPORCIONAL:

El reparto proporcional consiste en la distribución de cierta cantidad en partes, las cuales pueden tener diferentes valores, según las siguientes clases de reparto:

- ❖ Reparto proporcional directo simple
- ❖ Reparto proporcional directo compuesto
- ❖ Reparto proporcional inverso simple
- ❖ Reparto proporcional inverso compuesto

3.3.1. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO SIMPLE:

Existen dos formas para resolver problemas de este tipo: factor constante y por proporciones.

Factor constante:

Por ejemplo. Si se desea repartir \$56.000 entre niños de 3, 5, 6 años de edad, con la condición que a mayor edad, le corresponde mayor cantidad de dinero, entonces se procede de la siguiente forma:

1. Se suman las partes entre las cuales se van a repartir $3 + 5 + 6 = 14$

2. Se divide la cantidad a repartir entre la suma de las partes $\$ 56.000 \div 14 = \$ 4.000$
3. Cada parte se multiplica por el resultado de la división anterior $3 \cdot 4.000 = 12.000$, $5 \cdot 4.000 = 20.000$, $6 \cdot 4.000 = 24.000$

Lo anterior indica que:

El niño de 3 años recibirá \$ 12.000

El de 5 años \$20.000 y

El de 6 años \$24.000



"En términos generales, en el **reparto proporcional directo simple** hay una sola serie de datos para hacer el reparto, de tal manera que al número más grande le corresponda la mayor cantidad

Si se quiere repartir la cantidad A en x , y , z partes, entonces:

1. Se suman las partes entre las cuales se van a repartir $x + y + z = w$
2. Se divide la cantidad a repartir entre la sumas de las partes: $A \div w = p$.
3. Luego cada parte x , y , z se multiplica por p .

Cada uno de los productos indican cuanto le corresponde a cada parte.

Proporciones:

Volviendo al ejemplo anterior, donde se desea repartir \$ 56.000 entre niños de 3, 4, 6 años de edad, con la condición que a mayor edad, mayor cantidad, por el método de proporciones se resuelve de la siguiente forma:

1. También se suman las partes: $3 + 5 + 6 = 14$

2. Se plantea las proporciones

$$\frac{a}{3} = \frac{56.000}{14} ; \frac{b}{5} = \frac{56.000}{14} \quad \frac{c}{6} = \frac{56.000}{14}$$

Donde a, b, c son las incógnitas que se van a despejar

3. Se aplica la cuarta proporcional a cada una de estas proporciones:

$$a \cdot 14 = 56.000 \cdot 3 \text{ Resolviendo queda: } 14a = 168.000$$

$$b \cdot 14 = 56.000 \cdot 5 \text{ Resolviendo queda } 14b = 280.000$$

$$c \cdot 14 = 56.000 \cdot 6 \text{ Resolviendo queda } 14c = 336.000$$

4. Por último se hallan los valores de cada una de las incógnitas:

$$14a = 168.000 \text{ Dividiendo por el coeficiente de la incógnita: } \frac{14a}{14} = \frac{168.000}{14}$$

$$\text{Entonces } a = 12.000$$

$$14b = 280.000 \text{ Dividiendo por el coeficiente de la incógnita: } \frac{14b}{14} = \frac{280.000}{14}$$

$$\text{Entonces } b = 20.000$$

$$14c = 336.000 \text{ Dividiendo por el coeficiente de la incógnita: } \frac{14c}{14} = \frac{336.000}{14}$$

$$\text{Entonces } c = 24.000$$

En términos generales, para desarrollar problemas por el método de proporciones, se realiza lo siguiente:

Siendo A la cantidad a repartir

1. Se suman las partes: $x + y + z = w$

2. Se plantean las proporciones: $\frac{a}{x} = \frac{A}{w}$; $\frac{b}{y} = \frac{A}{w}$; $\frac{c}{z} = \frac{A}{w}$

3. Se aplica la cuarta proporcional así: $a \cdot w = A \cdot x$ $b \cdot w = A \cdot y$

$$c \cdot w = A \cdot z$$

4. Se hallan los valores de las incógnitas.

El resultado es el mismo independientemente del método que se trabaje.

A través de los años se ha oído decir que la **Regla de Tres** es una herramienta muy valiosa que facilita la resolución de sencillos problemas de la vida cotidiana. Esta herramienta precisamente se basa en las proporciones, razón por la cual a continuación se plantean algunos ejercicios que pueden ser solucionados aplicando esta estrategia.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Veintitrés (23) Metros cuadrados de baldosín cuestan \$299.000.
¿Cuánto cuestan 5 metros cuadrados?.

Para la solución de este tipo de problemas, se colocan las columnas de acuerdo con las variables con que se está trabajando, en este caso metros y precios. Esta es una regla de tres directa porque entre **más** metros **más** es el valor (reparto proporcional directo simple), entonces se plantea de la siguiente forma.

Metros	\$
23	299.000
↓	↓
5	x

Por ser directa se plantea la proporción: $\frac{23}{5} = \frac{299.000}{x}$

Aplicando la cuarta proporcional $23 \cdot x = 5 \cdot 299.000$ Resolviendo:

$$23x = 1.495.000$$

Para hallar la incógnita se dividen los dos términos por el coeficiente de la incógnita:

$$\frac{23x}{23} = \frac{1.495.000}{23}$$

Entonces $x = 65.000$

Esto significa que los cinco (5) metros cuadrados de baldosín valen \$65.000.

2. Se sabe que para la elaboración de 20 latas de duraznos se gastan 10 kilogramos de duraznos. ¿Cuántos kilogramos de duraznos cabe en cada una de las latas?

Las variables son Latas y Kilogramos de duraznos y es directamente proporcional porque entre **más** latas **más** kilogramos de duraznos.

Latas	Kilos de Duraznos
20	10
↓	↓
1	x

La proporción es $\frac{20}{1} = \frac{10}{x}$

Resolviendo:

$$20 \cdot x = 10 \cdot 1 \quad \text{entonces: } 20x = 10$$

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita: $\frac{20x}{20} = \frac{10}{20}$

$$\text{Se obtiene } x = \frac{1}{2}$$

Significa que en cada lata caben $\frac{1}{2}$ kilogramos de duraznos.

3. El valor de un dólar en pesos Colombianos es de \$2.800. ¿Cuántos dólares se puede comprar con \$ 1.400.000?

Es una proporción directa porque entre **más** dólares **más** pesos colombianos se necesitan. Las variables son: dólares y pesos colombianos.

Dollar	\$
1	2.800
↓	↓
x	1.400.000

La proporción es: $\frac{1}{x} = \frac{2.800}{1.400.000}$

Resolviendo: $x \cdot 2.800 = 1.400.000 \cdot 1$ entonces $2.800x = 1.400.000$

Hallando el valor de la incógnita $\frac{2.800x}{2.800} = \frac{1.400.000}{2.800}$

Entonces: $x = 500$

Significa que con \$ 1.400.000 se pueden comprar US \$ 500 (dólares)

4. Teniendo en cuenta que un kilogramo equivale a 1000 gramos, ¿A cuántos gramos equivalen 158 Kilogramos?

Es directa porque entre más kilogramos más gramos.

Kilogramos	Gramos
1	1000
↓	↓
158	x

La proporción es: $\frac{1}{158} = \frac{1.000}{x}$

Resolviendo: $x \cdot 1 = 158 \cdot 1000$ Entonces: $\frac{x}{1} = \frac{158.000}{1}$

$$X = 158.000$$

Significa que 158 Kilogramos equivalen a 158.000 gramos.

5. Con frecuencia se escucha decir que un auto va a cierta velocidad, es el caso, cuando se va a 80 kilómetros por hora (Km/hr) equivale a decir que el auto corre 80 kilómetros en (1) hora. Con esta relación se puede hallar otros datos como por ejemplo:

Si un auto va a la velocidad de 80 km/hr. ¿Cuántas horas se gastarán para recorrer 360 kilómetros?

Es directa entre **más** horas **más** kilómetros se recorrerán

Kilómetros	Horas
80	1
↓	↓
360	x

La proporción es: $\frac{80}{360} = \frac{1}{x}$

Resolviendo: $x \cdot 80 = 360 \cdot 1$; entonces $80x = 360$

Hallando la incógnita $\frac{80x}{80} = \frac{360}{80}$ entonces $x = \frac{360}{80}$

Simplificando $x = \frac{36}{8} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$

Esto significa que para recorrer 360 kilómetros se gastan 4.5 horas

5. Otro ejemplo podría ser si un vehículo va a 120 km/hora (recorre 120 kilómetros en 1 hora), hallar los kilómetros recorridos en 5 horas.

Kilómetros	Horas
120	1
↓	↓
x	5

La proporción es $\frac{120}{x} = \frac{1}{5}$

Resolviendo: $x \cdot 1 = 120 \cdot 5$ entonces $x = 600$

Es decir en cinco (5) horas se recorren 600 kilómetros.

7. También es muy usual escuchar que el interés de un préstamo es al tanto por ciento, por ejemplo al 3% mensual, esto equivale a decir que por cada \$ 100 de capital se cobraran \$ 3 de interés, en un mes, Por eso si se quiere saber cuánto tengo que pagar por concepto de intereses por un préstamo de \$ 5.000.000, al 3% mensual, se haría lo siguiente:

(\$) capital	(\$) interés
100	3
↓	↓
5.000.000	x

La proporción es: $\frac{100}{5.000.000} = \frac{3}{x}$

Resolviendo $x \cdot 100 = 5.000.000 \cdot 3$ Entonces: $100x = 15.000.000$

Hallando la incógnita $\frac{100x}{100} = \frac{15.000.000}{100} = 150.000$

Esto significa que por el préstamo de \$ 5.000.000 se tienen que pagar \$ 150.000 de intereses mensuales.

8. Cuando se dice que en un grupo de 25 estudiantes, el 40% son mujeres, significa que los 25 estudiantes (o total del grupo) son el 100% y con esta relación se puede establecer cuantas son mujeres de ese grupo:

Número de estudiantes	%
25	100
↓	↓
x	40

La proporción es: $\frac{25}{x} = \frac{100}{40}$.

Resolviendo $x \cdot 100 = 40 \cdot 25$ Entonces: $100x = 1000$

Hallando la incógnita $\frac{100x}{100} = \frac{1000}{100}$ Entonces $x = 10$

Significa que de los 25 estudiantes 10 son mujeres y el resto ($25 - 10 = 15$) son hombres.

9. En la producción de 200 avisos publicitarios, se dañaron 30. ¿Qué porcentaje de pérdidas se tuvo? Tenga en cuenta que los 200 avisos son el total o sea el 100%.

Avisos publicitarios	%
200	100
↓	↓
30	x

La proporción es: $\frac{200}{30} = \frac{100}{x}$.

Resolviendo $x \cdot 200 = 30 \cdot 100$ Entonces $200x = 3000$

Hallando la incógnita $\frac{200x}{200} = \frac{3000}{200}$ Entonces $x = 15$

Es decir el porcentaje de pérdidas es del 15%

10. La formulación para la elaboración de mortadela es la siguiente:

Carne de res	50%
Carne de cerdo	30%
Grasa de cerdo	20%

Si se va a realizar una producción de 300 kilogramos de mortadela. ¿Qué cantidad de materia prima tengo que adquirir?. Recuerde que la producción total es de 300 kilogramos y este sería el 100%.

Carne de res

Kilogramos	%
300	100
x	50

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{50} \quad \text{Resolviendo}$$

$$x \cdot 100 = 50 \cdot 300 \quad \text{Entonces } 100x = 15.000$$

$$\text{Hallando la incógnita} \quad \frac{100x}{100} = \frac{15.000}{100} = 150$$

La cantidad de carne de res es de 150 kg.

Carne de cerdo:

Kilogramos	%
300	100
x	30

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{30} \quad \text{Entonces} \quad \frac{100x}{100} = \frac{9000}{100}$$

Hallando la incógnita $x = 90$ Kg de carne de cerdo

Grasa de cerdo

Kilogramos	%
300	100
x	20

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{20} \quad \text{Entonces } 100x = 6000$$

Despejando la incógnita $x = 60$ Kg de grasa de cerdo.

Entonces la materia prima necesaria para la elaboración de 300 kilogramos de mortadela es:

150 kilogramos de carne de res, 90 kilogramos de carne de cerdo y 60 kilogramos de grasa de cerdo.

11. El costo total de la elaboración de un vaso de yogurt es de \$150. ¿En cuanto se tiene que vender cada vaso para obtener una utilidad del 20%?

Como el costo total es de \$150, este equivale al 100%, para obtener un 20% de utilidad se tendría que hallar el 120% (100% del costo + el 20% de utilidad).

(\$)	%
150	100
x	120

Proporción $\frac{150}{x} = \frac{100}{120}$

Resolviendo $100x = 120 \cdot 150$ Entonces $\frac{100x}{100} = \frac{18.000}{100}$ Entonces $x = 180$

Para obtener una utilidad del 20%, cada vaso se tendrá que vender en \$180.

En los anteriores ejemplos se aplicó la regla de tres directa, porque todas las variables tenían una relación directamente proporcional como: entre **más** dólares se tenga **más** es la cantidad de pesos colombianos; entre **mayor** sea la velocidad **mayor** es el número de kilómetros recorridos y entre **más** cantidad de producción **mayor** es cantidad de materia prima, entre otros.

3.3.2. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO COMPUESTO:

Partiendo del siguiente ejemplo:

12. Para el pago de una nómina, se debe repartir \$2.500.000 entre tres empleados, cuyos tiempos de trabajo son:

José: 25 días, 6 horas por día

Alberto: 20 días, 8 horas por día

Mario: 22 días, 7 horas por día

¿Cuánto debe recibir de salario cada uno?

Al igual que en caso del reparto proporcional directo simple, estudiado anteriormente, existen dos métodos para el desarrollo de estos problemas: factor constante y por proporciones.

Factor Constante:

Primero: Se determina el tiempo completo de trabajo así:

José: 25 días x 6 horas/día = 150 horas

Alberto: 20 días x 8 horas/día = 160 horas

Mario: 22 días x 7 horas/día = 154 horas

Total = 464 horas

Segundo: Se determina el factor constante: $2.500.000 \div 464 = 5.387,9$

Tercero: Se multiplica el factor constante por el número de horas trabajadas por cada uno.

José: 150 horas x 5387,9 = 808.185

Alberto: 160 horas x 5387,9 = 862.064

Mario: 154 horas x 5387,9 = 829.736,6

Es decir que a José se le pagan \$ 808.185; a Alberto \$ 862.064 y a Mario \$ 829.736,6.

Método por proporciones:

Partiendo del mismo ejemplo anterior,

Primero: Al igual que el método anterior, se determina el número total de horas: 454

Segundo: Se establece la proporción así: x para José, y para Alberto y z para Mario, entonces:

$$\text{José: } \frac{x}{150} = \frac{2.500.000}{464}$$

$$\text{Alberto: } \frac{y}{160} = \frac{2.500.000}{464}$$

$$\text{Mario } \frac{z}{154} = \frac{2.500.000}{464}$$

Tercero: Se aplica la cuarta proporcional:

$$\rightarrow \frac{x}{150} = \frac{2.500.000}{464} \quad \text{Donde } x \cdot 464 = 2.500.000 \cdot 150$$

$$\text{Entonces } \frac{464x}{464} = \frac{375000000}{464} = \boxed{808.189,66}$$

$$\rightarrow \frac{y}{160} = \frac{2.500.000}{464} \quad \text{Donde: } y \cdot 464 = 2.500.000 \cdot 160$$

$$\frac{464y}{464} = \frac{400000000}{464} = \boxed{862.068,9}$$

Entonces

$$\rightarrow \frac{z}{154} = \frac{2.500.000}{464} \quad \text{Donde: } z \cdot 464 = 2.500.000 \cdot 154$$

$$\text{Entonces: } \frac{464z}{464} = \frac{385000000}{464} = \boxed{829.741.38}$$

Si se comparan los resultados por los dos métodos, se observa que son similares.



En términos generales, el reparto proporcional compuesto se presenta cuando hay dos o mas series de datos para la realización de dicho reparto.

En éste tipo de reparto, también a las partes **mayores** les corresponde las cantidades **mayores**.

3.3.3 REPARTO PROPORCIONAL INVERSO SIMPLE:

Partiendo del siguiente ejemplo:

Si se quiere repartir \$54.000 entre tres niños de 5, 7, 9 años de edad, donde el niño que tenga **menos** edad recibirá **mayor** cantidad de dinero.

Primero: Se aplica el recíproco de las partes: $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

Segundo: se multiplica los denominadores: $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$

Tercero: se divide el producto por cada denominador: $\frac{315}{5} = 63, \frac{315}{7} = 45, \frac{315}{9} = 35$

Cuarto: se suman los cocientes: $63 + 45 + 35 = 143$

Quinto: se plantean las proporciones.

- Para el de 5 años: $\frac{143}{63} = \frac{54.000}{x}$ Entonces: $x = 23.790.209$
- Para el de 7 años: $\frac{143}{45} = \frac{54.000}{y}$ Entonces: $y = 16.993,007$
- para el de 9 años: $\frac{143}{35} = \frac{54.000}{z}$ Entonces: $z = 13.216.783$



En términos generales, el reparto proporcional inverso se caracteriza porque a la parte más pequeña, le corresponde la mayor cantidad y viceversa.

Cuando se tiene que realizar un reparto proporcional inverso se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

Si la cantidad a repartir es A, en las partes x, y, z entonces:

Primero: Se aplica el recíproco a las partes $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$

Segundo: Se multiplican los denominadores: $x \cdot y \cdot z = p$

Tercero: El producto se divide por cada denominador: $\frac{p}{x} = c_1, \frac{p}{y} = c_2, \frac{p}{z} = c_3$

Cuarto: Se suman los cocientes: $c_1 + c_2 + c_3 = k$. La cantidad k será la que se reparte proporcionalmente a los c_1, c_2, c_3

Quinto: Se plantea la proporción. $\frac{K}{C_1} = \frac{A}{x}, \frac{K}{C_2} = \frac{A}{y}, \frac{K}{C_3} = \frac{A}{z}$

Lo mismo que en la regla de tres directa también existe la regla de tres inversa, la cual se basa en proporción inversa.

Los tipos de problemas que se pueden resolver con esta herramienta son por ejemplo, calcular la cantidad de hombres que se deben contratar para la realización de una obra, ya que entre **más** hombres **menos** tiempo se gasta. También es el caso que entre **mayor** velocidad de un automóvil **menos** es el tiempo que se gasta para llegar de un lugar a otro.

A continuación se plantea algunos ejemplos.

EJERCICIOS RESUELTOS

13. Cinco (5) operarios realizan una obra en 8 días. ¿Cuántos operarios se necesitarán para elaborar la obra en 4 días?

En este caso entre **más** operarios **menos** días, entonces se trata de una regla de tres inversa.

En este problema el planteamiento es el mismo que en la regla de tres directa, pero la proporción es diferente.

Obreros	Días
5	8
↑	↓
x	4

Proporción: $\frac{X}{5} = \frac{8}{4}$

Resolviendo $4 \cdot x = 8 \cdot 5$ Entonces $4x = 40$

Despejando la incógnita $\frac{4X}{4} = \frac{40}{4}$ Entonces $x = 10$

Esto significa que para hacer la obra en cuatro (4) días se necesitan 10 obreros, es decir entre menos días se necesitan más obreros.

14. Un auto va a una velocidad de 100 kilómetros por hora (km/hr), gastando 3 horas para llegar de una ciudad a otra. ¿Cuánto tiempo gasta en llegar a la misma ciudad si eleva la velocidad a 150 (km/hr)?

En este caso, entre **mayor** sea la velocidad del auto, **menor** es el tiempo que gasta, entonces se trata de una regla de tres inversa.

Velocidad km/hr	Tiempo horas
100	3
↑	↓
150	x

Proporción: $\frac{150}{100} = \frac{3}{x}$

Resolviendo $150 \cdot x = 100 \cdot 3$ entonces $150x = 300$

Despejando incógnitas: $\frac{150x}{150} = \frac{300}{150}$ Entonces $x = 2$

Significa que al aumentar la velocidad se reduce el tiempo a 2 horas

Con estas bases ya se pueden solucionar problemas sencillos de cualquier índole, por lo tanto es necesario que se resuelven algunos que tengan que ver con el quehacer diario de cada uno de los estudiantes, para que este aprendizaje sea significativo, es decir relacionar esta temática con la realidad.

AUTOEVALUACIÓN 11: PROPORCIONES

1. Se quiere repartir una herencia de \$26.000.000 entre cuatro hijos, en relación directa a la edad de cada uno, las cuales son: 5, 8, 10, 14 años. ¿Cuánto le correspondería a cada hijo?
2. El director de una compañía para estimular a sus empleados, decide repartir \$500.000 entre cinco empleados, en relación inversa a las faltas obtenidas, las cuales fueron: Jorge tuvo 5, Alberto tuvo 9 y Fabián tuvo 7 faltas. ¿Cuanto le corresponderá a cada uno de los empleados?
3. Un ingeniero de producción, tiene \$4.600.000 para repartir en tres grupos de trabajadores, A, B,C. La cantidad a repartir debe ser de acuerdo a la cantidad de tiempo trabajado en horas. El grupo A 19 días, utilizando 7 horas/día-; el grupo B trabajo 18 días, utilizando 8 horas/día y el grupo C lo hizo en 21 días, con 6 horas/día. ¿Cuanto deberá recibir cada grupo por el trabajo realizado?
4. Al fallecer el señor Fructuoso Calducho, en el testamento se estipuló que la herencia equivalente a \$120.000.000, debería ser repartida de tal forma que al hijo de menor edad le correspondería la parte más alta de dicha herencia. Los hijos del señor Calducho son: Nancy de 10 años, José de 15 años,

Katty de 12 años y Marlene de 25 años. ¿Cuanto dinero le corresponde a Katty y a Nancy?.

3.4. PORCENTAJE:

El concepto de porcentaje es muy utilizado en problemas de la vida diaria, por ejemplo si se quiere hallar el 20% de 5.000, significa que 5.000 se divide en cien (100) partes y de ellas se toman 20.

Para resolver este tipo de problemas se puede a través de la regla de tres directa antes vista, teniendo en cuenta que 5.000 es el 100%.

5000	100%
x	20%

Ahora se plantea la proporción:

$$\frac{5000}{x} = \frac{100}{20}$$

$$100x = 100.000$$

$x = 1.000$ Esto significa que el 20% de 5.000 es igual a 1.000

Ejemplo 1. En la repartición de una lotería, el ganador debe pagar como impuestos el 30% del premio, el cual fue de \$5.000.000 ¿Cuánto recibirá realmente el ganador?

El total del premio es de \$5.000.000 Entonces este valor es el 100%, para hallar los impuestos que se deben pagar se plantea la regla de tres: si \$5.000.000 es el 100%, ¿a cuanto equivale el 30%?

\$	%
5.000.000	100
x	30

La proporción es: $\frac{5.000.000}{x} = \frac{100}{30}$

$$100x = 150.000.000$$

$$x = 1.500.000$$

Significa que el ganador tiene que pagar \$1.500.000 por impuestos, entonces lo que le queda del premio es: el valor del premio total menos lo que debe pagar de impuestos.

$$\$5.000.000 - \$ 1.500.000 = \$3.500.000$$

Ejemplo 2: El vendedor de una compañía recibió \$ 250.000 como porcentaje por concepto de 10% por ventas, ¿De cuánto fueron las ventas del vendedor?

Se plantea: Si \$ 250.000 equivalen al 10%, ¿a cuantos (\$) equivalen el 100%?

\$	%
250.000	10
x	100

Proporción: $\frac{250.000}{x} = \frac{10}{100}$

$10x = 25.000.000$; $x = 2.500.000$

Las ventas del vendedor fueron de \$ 2.500.000.

Ejemplo 3: En las compras de artículos para hogar, la señora María obtiene el 5% de descuento por pago en efectivo. Las compras sumaron \$725.000 ¿De cuanto fue el descuento?

Las compras equivalen al 100%, entonces se plantea: si \$725.000 son el 100%, ¿A cuánto equivale el 5%?

\$	%
725.000	100
x	5

Proporción: $\frac{725.000}{x} = \frac{100}{5}$

$100x = 3.625.000$; $x = 36.250$

Significa que el descuento por las compras es de \$ 36.250

Ejemplo 4: La Empresa Comestibles San José, compró galletas a \$74 la unidad. ¿A como debe venderlas para obtener una utilidad del 40%?

Entonces: si \$74 es el 100%, ¿cuánto es el 40%?

\$	%
74	100
x	40

Proporcion: $\frac{74}{x} = \frac{100}{40}$

$100x = 2960$; $x = 29.60$

Entonces, para tener una utilidad del 40% debe venderlas a % 74 (costo), mas \$29.6 (utilidad del 40%) = \$103.6 cada paquete.

Ejemplo 5: Una compañía de sistemas electrónicos vende microships a \$250.000. Estos microships fueron comprados a \$165.000 ¿Cuál es el porcentaje de ganancia?

Si los \$165.000 son el 100%, ¿a qué porcentaje equivalen los \$250.00?

\$	%
165.000	100
250.000	x

$$\frac{165.000}{250.000} = \frac{100}{x}$$

Proporcion: $\frac{165.000}{250.000} = \frac{100}{x}$

$165.000x = 25.000.000$; $x = 151.5\%$

Entonces como el costo es del 100% y la neta es del 151.5%, la utilidad es la diferencia entre estos dos valores: $151.5 - 100 = 51.5\%$

AUTO EVALUACIÓN 12: PORCENTAJE

1. En la producción de tornillos, una compañía vende el producto a \$48.5 obteniéndose una ganancia del 18%.
 - a.- ¿De cuanto es la ganancia?
 - b.- ¿Cuánto gana la compañía por la venta de 1.246 tornillos?

2. El señor Jimmy K trabaja en ventas, recibiendo 12% de bonificación. En un pago le dieron \$759.000.00 por ventas.
 - a.- ¿De cuanto fue la venta realizada por Jimmy?
 - b.- Si Jimmy K vende \$7.326.200 ¿Qué cantidad recibirán Jimmy por dicha venta?

3. En la elaboración de un saborizante, se requiere preparar 1.200 kg, la mezcla debe tener el 1.3% de ácido ascórbico y 0.045 de bicarbonato.
 - a.- ¿Qué cantidad de ácido ascórbico y de bicarbonato se requiere para preparar la mezcla?
 - b.- Si se modifica la mezcla de tal forma que para 50Kg, se adiciona 0.24 Kg. de ácido ascórbico y 1.35 kg. De bicarbonato. ¿Cuanto de ácido y de bicarbonato se requiere para preparar una mezcla de 650 kg., de saborizante.

CAPITULO 4

GEOMETRÍA

4. GEOMETRIA:

Introducción:

Vamos a empezar nuestro capítulo de Geometría haciendo un somero recuento del proceso mental que todos hemos seguido para adquirir la idea correspondiente a cada una de las palabras **plano, punto, línea y recta**, y al mismo tiempo ver cómo nuestra intuición, fuente principal de nuestra habilidad creadora, nos permite aceptar como verdaderas unas proposiciones que por expresar relaciones puramente geométricas se llaman postulados.

CONCEPTO DE GEOMETRÍA:

La Geometría es la ciencia que ha dado bases para desarrollo de la matemática, por lo cual merece que se le de gran atención, ya que a través del análisis geométrico, se pueden comprender los principios matemáticos más relevantes.

El principio básico de la geometría es medir objetos o elementos del medio, pero como estos objetos tienen formas diversas, es necesario clasificarlos para poder estudiarlos.

El análisis geométrico se puede realizar en:

Una dimensión: en ésta solo se mide la longitud, como el largo de una calle y el alto de una persona, entre otros.

Las magnitudes de **una dimensión** tienen unidades lineales. Las más importantes son: metros (m), centímetros (cm), milímetros (mm), pies (ft) y pulgadas (in)

Dos dimensiones: aquí se miden dos longitudes, tal es el caso del largo y el ancho. El ejemplo típico es la medida de superficies o áreas de triángulos, cuadrados y circunferencias, entre otros.

Las magnitudes de **dos dimensiones** tienen unidades **cuadradas**. las mas importantes son: metros cuadrados (m^2), centímetros cuadrados (cm^2), pies cuadrados (ft^2) y pulgadas cuadradas (in^2)

Tres dimensiones: se refiere a los cuerpos que ocupan un lugar en el espacio, es decir se miden: largo, ancho y profundidad.

Las magnitudes de **tres dimensiones** tienen unidades **cúbicas**. Las mas importantes son: metros cúbicos (m^3), centímetros cúbicos (cm^3), pies cúbicos (ft^3) y pulgadas cubicas (in^3)

4.1. GEOMETRIA PLANA:

para el estudio de la geometría, se requiere del análisis de algunos conceptos básicos, que aunque se han estudiado, es conveniente repasarlos para lograr una mejor comprensión.

⇒ PLANO

REPASEMOS

Se puede decir que el plano es una superficie perfectamente lisa que se extiende indefinidamente en todas direcciones.

Existe dos axiomas:

- ❖ Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.
- ❖ Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales.

⇒ PUNTO

REPASEMOS

Se puede decir que el punto es “una señal que no tiene forma ni dimensiones pero que se ve”. Del punto existen dos axiomas:

- ❖ Por un punto pasan infinitas rectas
- ❖ Por dos puntos pueden pasar una y solo una recta

⇒ LINEA

REPASEMOS

La línea se puede definir como la sucesión de puntos y de acuerdo con la forma como estos se organizan se forma dos tipos de líneas:

- ❖ Líneas rectas: puntos secuenciales en forma colineal, es decir en filas
- ❖ Líneas curvas: la secuencia no es colineal, están colocadas una detrás de otra en cualquier orden

De las líneas se pueden hacer un estudio amplio, sin embargo el objetivo en este curso es activar los conocimientos previos, razón por la cual solo se estudiarán los aspectos más importantes.

⇒ **RECTA:**

REPASEMOS

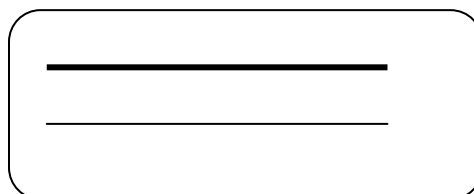
Un hilo finísimo bien estirado es una buena imagen de una parte de una recta. Pero si logramos imaginar que el hilo se extiende indefinidamente en ambos sentidos, obtenemos una imagen aproximada de la idea asociada a la palabra recta. De la recta existen tres axiomas:

- ❖ Dos rectas se pueden intersectar (cortar) a lo más en un punto. En este caso decimos que las rectas son **secantes**.
- ❖ Si dos puntos de una recta pertenecen a un mismo plano, entonces la recta está totalmente contenida en ese plano.
- ❖ Por una misma recta pasa infinito número de planos.

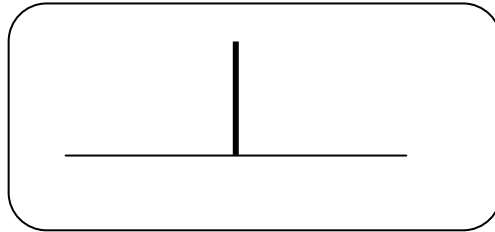
4.2. CLASIFICACION DE LAS RECTAS:

Se pueden clasificar en:

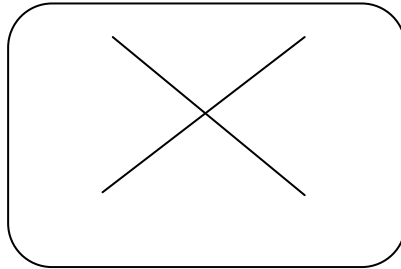
4.2.1. RECTAS PARALELAS: Son aquellas que presentan la misma inclinación. Este tipo de rectas nunca se unen.



4.2.2. RECTAS PERPENDICULARES: Se refiere a las líneas que se cortan en un punto formando un ángulo recto; es decir, un ángulo de 90° . (Grados).



4.2.3. RECTAS OBLICUAS: Son rectas que se cortan en un punto (vértice) formando un ángulo diferente al recto.



Como se observa, cuando dos o mas rectas se cortan, se originan figuras muy particulares que se analizan a continuación.

4.3. POLÍGONOS:

Los polígonos son figuras planas que se forman cuando tres o más rectas no colineales se cortan.

4.3.1. ELEMENTOS DE LOS POLIGONOS:

Estas figuras constan de los siguientes elementos:

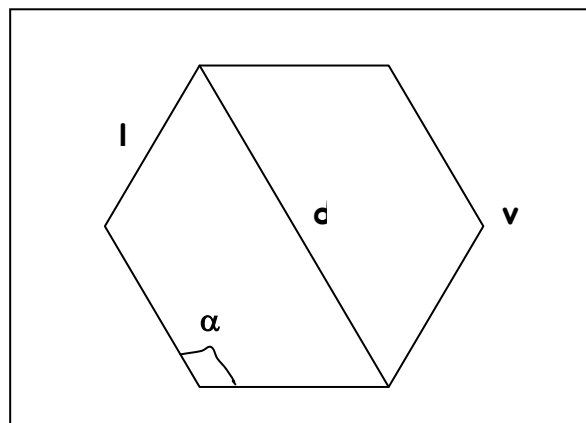
Lados: Son los segmentos de recta que se cortan. Estos segmentos permiten determinar la longitud de la figura. Según el número de lados los polígonos se clasifican en:

Triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados) y así sucesivamente.

Vértices: Se refiere a los puntos de donde se cortan los segmentos de recta. El triángulo tiene 3 vértices, el cuadrilátero tiene 4 vértices, así sucesivamente.

Ángulos: Se define como el espacio que hay entre dos rectas cuando se cortan entre si, dicho de otra manera, la abertura que se forma.

Diagonales: Son segmentos de recta que unen vértices no consecutivos. En la figura se muestra cada uno de estos elementos



Donde:

V = vértice

l = lados del polígono

d =diagonal

α= ángulos

La anterior figura se trata de un Hexágono, porque tiene 6 lados, por lo tanto tiene seis (6) vértices

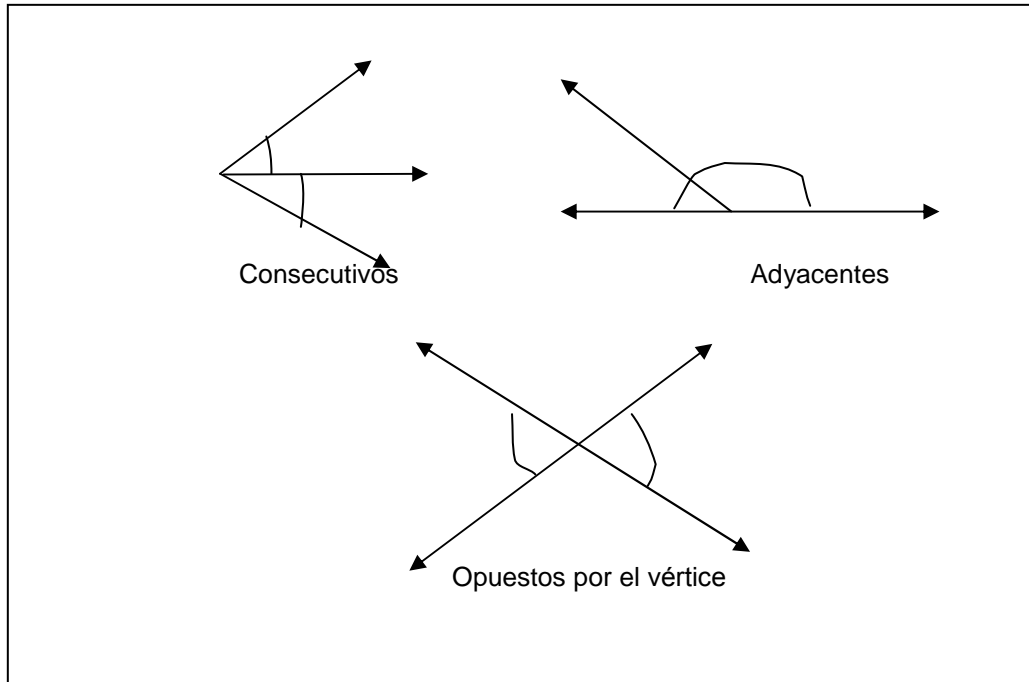
REPASEMOS.....

Los vértices de los polígonos se les nombra usando letras mayúsculas y los lados letras minúsculas.

4.3.2. CLASES DE ANGULOS:

Los ángulos se clasifican en:

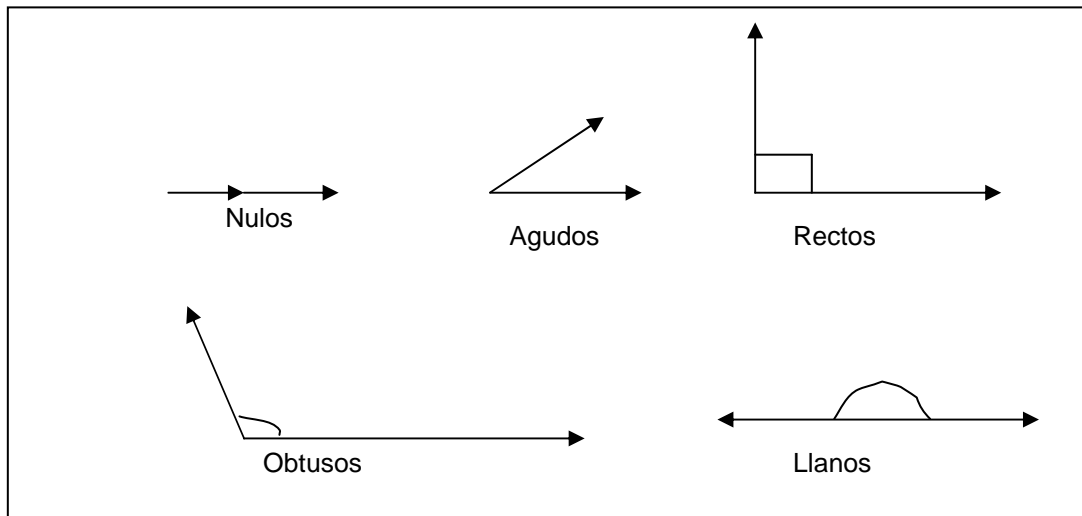
4.3.2.1. Según su posición:



REPASEMOS...

- ❖ Dos ángulos son **consecutivos** cuando están en un mismo plano, tienen el mismo vértice, un lado común y los lados no comunes quedan en distinto semiplano respecto del lado común.
- ❖ Dos ángulos son **adyacentes** cuando son consecutivos y los lados no comunes forman una línea recta. La suma de la medida de dos ángulos adyacentes es igual a 180°
- ❖ Dos ángulos son **opuestos por el vértice** si y solo se tiene el mismo vértice y los lados de uno son prolongación de los lados del otro. **Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes, es decir, tienen la misma medida**

4.3.2.2. Según su medida:



REPASEMOS....

Los ángulos:

- ☐ **Agudos** miden mas de 0° y menos de 90°
- ☐ Rectos: **son los que miden 90°**
- ☐ Obtusos **miden mas de 90° y menos de 180°**
- ☐ Llanos: **miden 180°**
- ☐ Complementarios: **son aquellos cuya suma equivale a un recto (90°)**
- ☐ Suplementarios: **son aquellos cuya suma vale dos ángulos rectos (180°)**

4.3.3. CLASES DE POLÍGONOS:

Los polígonos se clasifican de acuerdo con el número de lados en:

REPASEMOS....

♣	Triángulo	3 Lados
♣	Cuadrilátero	4 lados
♣	Pentágono	5 lados
♣	Hexágono	6 lados
♣	Heptágono	7 lados
♣	Octágono	8 lados
♣	Nonàgono	9 lados
♣	Decágono	10 lados
♣	Polígono n lados	n lados

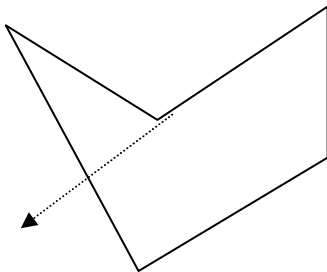
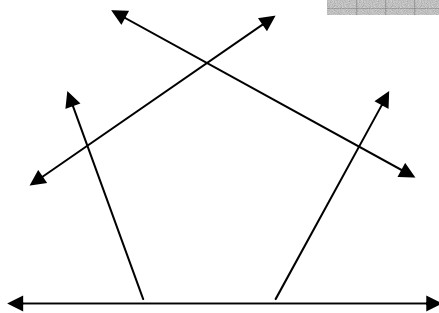
REPASEMOS.....

- ♣ Un polígono es **equilátero** si y solo si, sus **lados son congruentes, es decir, iguales**
- ♣ Un polígono es **equiángulo** si y solo si, todos sus **ángulos son congruentes**
- ♣ **Un polígono es regular** si y solo si es **equilátero** y **equiángulo**. El ejemplo mas claro de un polígono regular es el cuadrado

4.3.3.1. POLIGONOS CONVEXOS Y CONCAVOS:

REPASEMOS.....

- ♣ Un polígono es **Convexo** si los ángulos interiores son todos menores o iguales a 180° , o si al prolongar uno de sus lados no corta a ningún otro lado del polígono



REPASEMOS...

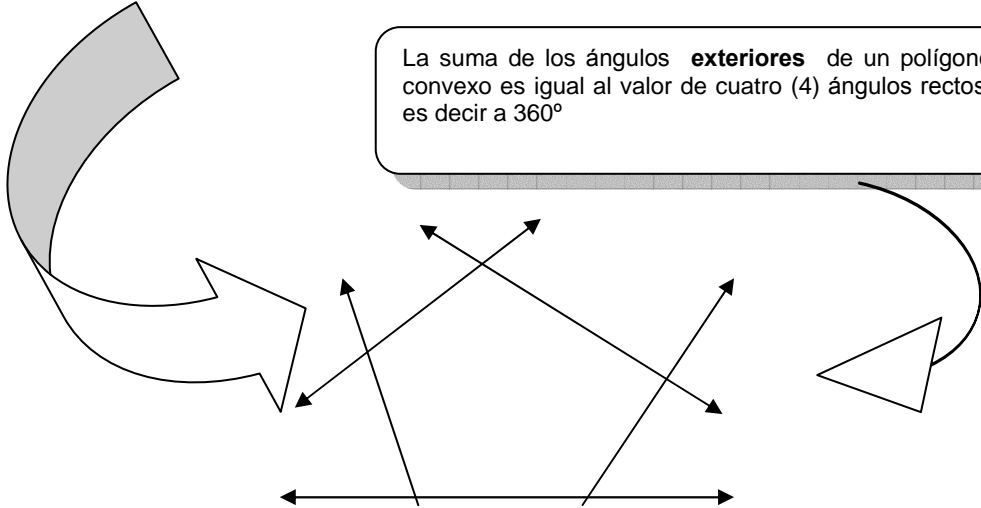
- ♣ Un polígono es **Cóncavo**, si al prolongar uno de sus lados, la prolongación corta a otro lado del polígono

La suma de los ángulos **interiores** de un **polígono convexo es igual a tantas veces** dos ángulos rectos (180) como lados tiene el polígono menos (2), es decir:

$$\text{Suma ángulos interiores} = 180 (n-2)$$

Donde n = número de lados del polígono

La suma de los ángulos **exteriores** de un polígono convexo es igual al valor de cuatro (4) ángulos rectos, es decir a 360°



⇒ Por ejemplo, si se desea averiguar la suma de los ángulos interiores de un polígono de 7 lados, se aplica:

$$\text{Suma de ángulos interiores } (\Sigma) = 180^\circ \bullet (n-2)$$

Como $n = 7$

$$\text{Suma de ángulos interiores } (\Sigma) = 180^\circ \bullet (7-2) = 180 \bullet 5 = 900^\circ$$

Esto indica que en Heptágono ($n=7$) la suma de los ángulos interiores suman 900° .

⇒ Otro ejemplo para hallar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

$$\text{Suma de ángulos interiores } (\Sigma) = 180^\circ \bullet (n-2)$$

Como $n = 3$ entonces:

$$\text{Suma de ángulos interiores } (\Sigma) = 180^\circ \bullet (3-2) = 180^\circ$$

4.3.3.2. ANGULO INTERIOR DE UN POLIGONO REGULAR:

Teniendo en cuenta que el polígono regular tiene todos sus ángulos iguales, el valor de uno de sus ángulos interiores, se obtiene dividiendo la suma de todos los ángulos por el número de lados.

Valor del ángulo interior de un polígono regular θ se obtiene así:

$$\theta = \frac{2r(n-2)}{n} = \frac{180(n-2)}{n}$$

Donde r = ángulo recto.

Por ejemplo para hallar el valor de un ángulo interno de un polígono regular de 12 lados, se procede aplicando la fórmula:

$$\theta = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(12-2)}{12} = \frac{180 \cdot 10}{12} = 150^\circ$$

Donde: $n = 12$

Entonces, el ángulo interior de un polígono regular de 12 lados mide 150°

\Rightarrow Para el caso de un hexágono, como $n = 6$, ya que el hexágono tiene 6 lados, entonces el valor de uno de sus ángulos es:

$$\theta = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180 \cdot 4}{6} = 120^\circ$$

Esto indica que en un hexágono el ángulo interior mide 120° .

⇒ En el caso de un polígono regular de 15 lados, los ángulos interiores suman:

$$\Sigma \text{ **Ángulos interiores** } = 180^\circ (15-2) = 2340^\circ \text{ y}$$

El valor del ángulo interior del polígono es:

$$\theta = \frac{180 (n-2)}{n} = \frac{180 \cdot 13}{15} = 156^\circ$$

El número de **diagonales** de un polígono es igual al semiproducto del número de lados de éste multiplicado por el número de lados menos tres (3).

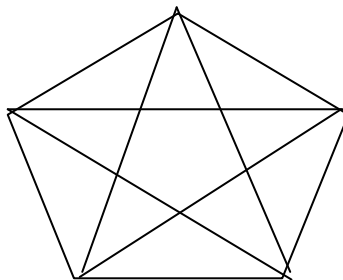
$$\text{Número de diagonales } (\delta) = \frac{n}{2} (n-3)$$

De cada vértice de un polígono, se pueden trazar tantas diagonales como lados tiene la figura menos tres, o sea: $n - 3$.

Por ejemplo si se quiere saber cuántas diagonales tiene un pentágono:

Como $n = 5$

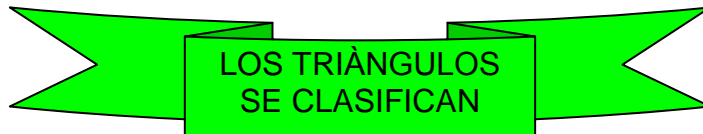
$$\delta = \frac{n}{2} (n-3) \text{ entonces } \delta = \frac{5}{2} (5-3) = 5 \text{ diagonales.}$$



Con la fundamentación anterior, se puede abordar el estudio de los polígonos más utilizados como son el triángulo y los cuadriláteros.

4.4. EL TRIÁNGULO:

El triángulo es un polígono que consta de tres lados. Por consiguiente en el triángulo se encuentran tres vértices y tres ángulos. ¿Cuántas diagonales tiene este polígono?



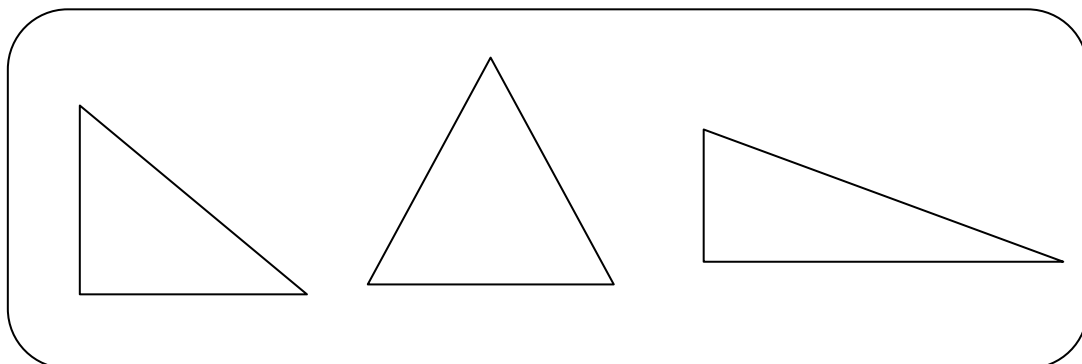
Según sus **lados**:

- ♣ **Equiláteros:** tienen todos sus lados iguales
- ♣ **Isósceles:** tiene dos lados iguales
- ♣ **Escálenos:** sus tres lados son desiguales

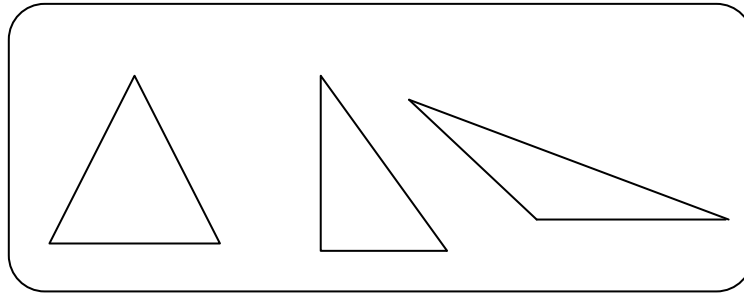
Según sus **ángulos**:

- ♣ **Acutángulos:** tiene sus tres ángulos agudos
- ♣ **Obtusángulos:** tiene un ángulo obtuso
- ♣ **Rectángulo:** tiene un ángulo recto (90°)

En los siguientes triángulos, según sus lados, identifique a que clase pertenecen:



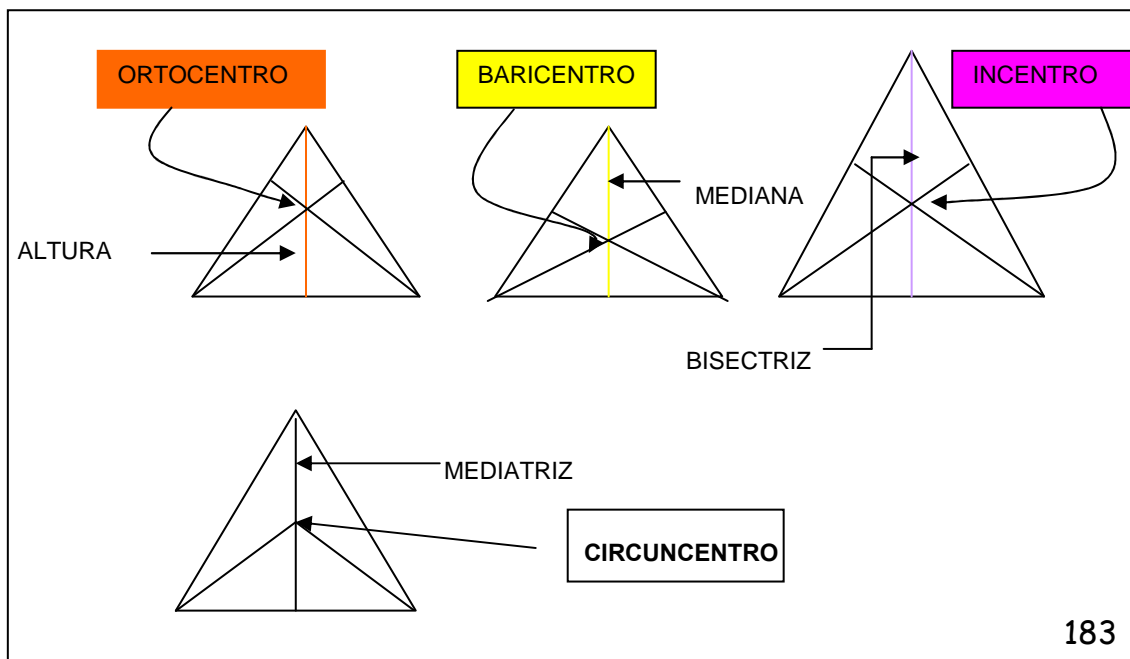
En los siguientes triángulos, según sus ángulos, identifique a que clase pertenecen.



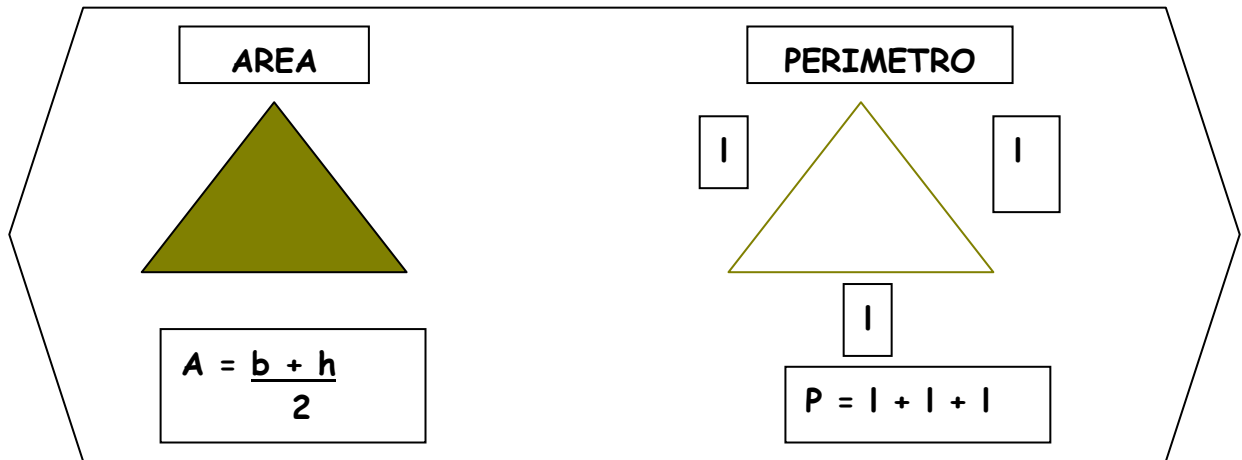
4.4.1. LINEAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIANGULO:

En todo triángulo se pueden trazar las siguientes líneas y puntos especiales:

- ♣ **Altura:** segmento perpendicular, trazado desde los vértices hasta los lados opuestos. Las tres alturas del triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.
- ♣ **Mediana:** segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro**.
- ♣ **Bisectriz:** se refiere al segmento que divide un ángulo del triángulo en dos ángulos congruentes. Las tres bisectrices se cortan en un punto llamado **incentro**.
- ♣ **Mediatriz:** de un segmento es la perpendicular levantada en el punto medio de este. Las tres meditrices se cortan en un punto llamado **circuncentro**.



4.4.2. AREA Y PERIMETRO DEL TRIANGULO:



El área se define como el resultado de medir una superficie plana de cualquier figura, mientras que el **perímetro** se refiere a la longitud del contorno de una figura.

Para hallar las áreas y perímetros, existen algunas fórmulas que son específicas para cada tipo de figura:

Específicamente para el **triángulo**, el área **es igual a la mitad de la base por la altura**.

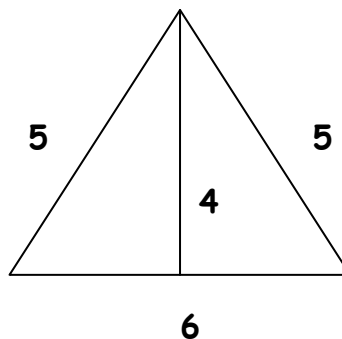
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde b = base y h = altura.

El perímetro se halla, sumando las longitudes de los lados del triángulo.

$$P = l_1 + l_2 + l_3$$

Ejercicio: Hallar el área y el perímetro del siguiente triángulo:



Area:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como $b = 6$ y $h = 4$ Entonces $A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$

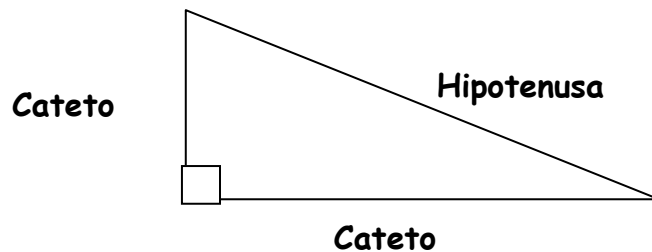
Perímetro:

$$P = l_1 + l_2 + l_3$$

Entonces $P = 6 + 5 + 5 = 16$

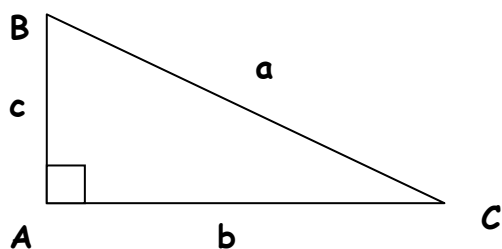
4.4.3. TEOREMA DE PITAGORAS:

En un triángulo rectángulo (cuando uno de sus ángulos es un ángulo recto o de 90°), los lados adyacentes al ángulo recto se denominan **catetos** y el lado opuesto a este ángulo recto se llama **hipotenusa**.



PITÁGORAS DEMOSTRÓ QUE:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

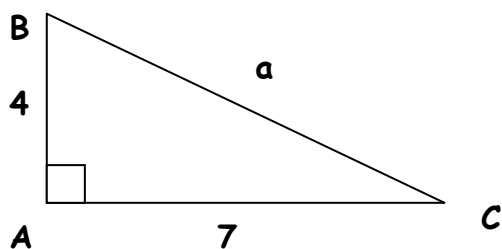


REPASEMOS

- ♣ Los vértices de un polígono se denominan con letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas.
- ♣ En los triángulos cada vértice y su lado opuesto se denominan con la misma letra.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejercicio resuelto: si se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 y 7 centímetros respectivamente, calcular el valor de la hipotenusa, el área y el perímetro.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como:

$$a = ?$$

$$b = 7$$

$$c = 4$$

Reemplazando en la ecuación:

$$a^2 = 7^2 + 4^2; \quad a^2 = 49 + 16; \quad a^2 = 65 \quad \text{entonces la hipotenusa} \quad a = \sqrt{65}$$

Para hallar el área, se aplica la fórmula: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

La base es 7 y la altura 4, entonces:

$$A = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

Para hallar el perímetro de este triángulo, se suman todos sus lados:

$$7 + 4 + \sqrt{65} \text{ cm.} = 11 + \sqrt{65} \text{ cm.}$$

4.5. EL CUADRILATERO:

Se llama cuadrilátero a los polígonos que tiene 4 lados. Estos polígonos tienen también 4 ángulos y 4 vértices.

Los cuadriláteros se clasifican en

- ♣ Paralelogramo: tiene sus lados opuestos paralelos. Dentro de esta clasificación están:
 - El cuadrado: tiene 4 lados iguales 4 ángulos rectos
 - Rectángulo: tiene dos lados consecutivos desiguales y 4 ángulos rectos
 - Rombo: tiene sus 4 lados iguales, pero sus ángulos consecutivos son diferentes.
 - Romboides: tienen los lados consecutivos desiguales y los ángulos contiguos también son diferentes.
- ♣ Trapecio: Tiene solo dos lados opuestos paralelos. Los tipos de trapecio son:
 - Rectángulo: tiene dos ángulos rectos.
 - Isóseles: tiene iguales sus lados no paralelos.
 - Escaleno: no son ni trapecio rectángulos ni isoseles
- ♣ Trapezoide: no tiene lados opuestos paralelos.

Propiedades de los Paralelogramos

En todo Paralelogramo:

- ♣ Sus lados opuestos son iguales
- ♣ Sus ángulos opuestos son iguales
- ♣ Sus diagonales los dividen en partes iguales.

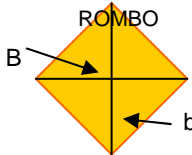
4.5.1. AREA DE LOS CUADRILATEROS:

CUADRADO



$$\text{Area} = \text{lado por lado} = l \bullet l$$

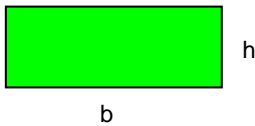
ROMBO



$$\text{Area} = \text{la mitad de la diagonal mayor por la diagonal menor}$$

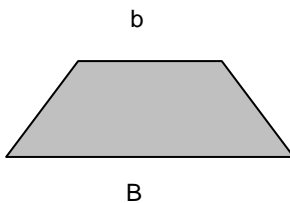
$$A = (1/2)B \bullet b$$

RECTANGULO



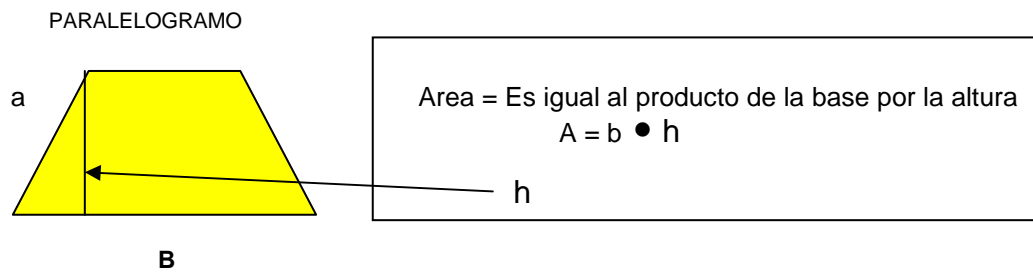
$$\text{Area} := \text{base por altura} = b \bullet h$$

TRAPECIO



$$\text{Area} = \text{la mitad de la suma de la base mayor más la base menor por la altura}$$

$$A = (1/2)(B+b) \bullet h$$



4.5.2. AREA DE UN POLIGONO REGULAR:

Se calcula de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2} (p \bullet a)$$

p = perímetro

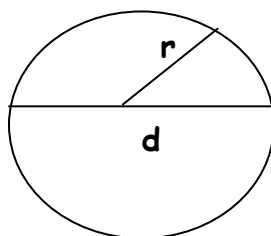
a = apotema.

Recordando que la apotema, es la perpendicular del centro del polígono a uno de sus lados.

4.6. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CIRCULO:

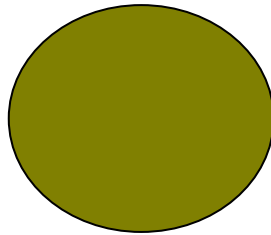
4.6.1. CIRCUNFERENCIA:

Es el conjunto de puntos que equidistan a un punto fijo llamado centro. La distancia de cualquier punto al centro se llama radio **(r)**. El doble del radio se conoce como diámetro **(d)**.

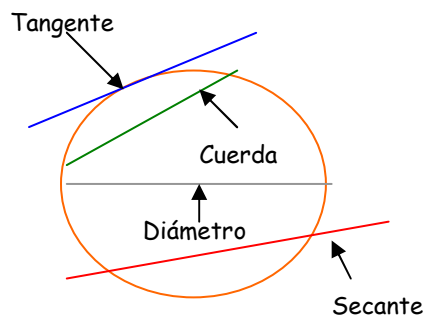


4.6.2. CIRCULO:

El círculo es el conjunto de puntos que están dentro de la circunferencia. El perímetro del círculo es la circunferencia.



4.6.3. LINEAS NOTABLES DE LA CIRCUNFERENCIA:



Diámetro: Es la recta que va de un punto al punto opuesto, pasando por el centro de la circunferencia.

Cuerda: Es el segmento de recta que va de un punto a otro punto de la circunferencia, cuando la cuerda pasa por el centro se llama diámetro, como se dijo anteriormente.

Tangente: Es un segmento de recta, que corta a la circunferencia en un punto.

Secante: Segmento de recta que corta la circunferencia en dos puntos.

4.6.4. AREA Y PERIMETRO DEL CÍRCULO:

$$A = \pi r^2$$

Donde:

A = área

r = radio de la circunferencia.

$\pi = 3.1416....$

$$P = 2\pi r$$

Donde:

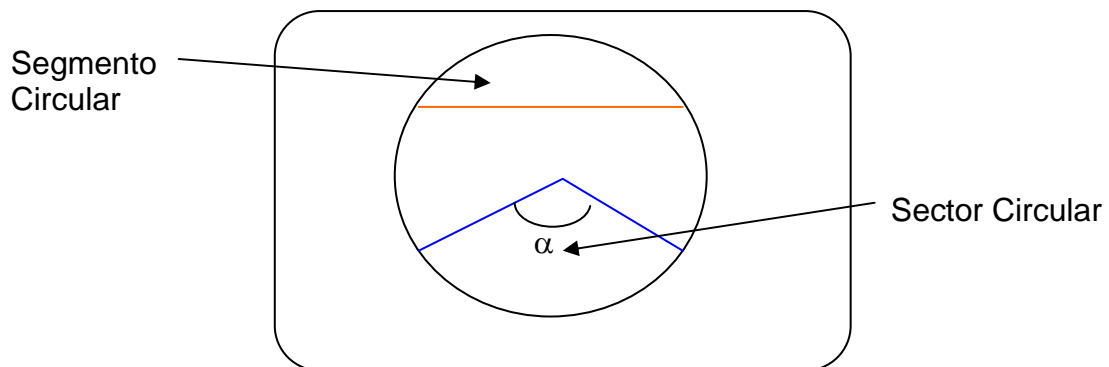
P = Perímetro

r = radio de la circunferencia

$\pi = 3.1416.....$

Es de notar que la circunferencia NO tiene área, porque esta se refiere al contorno del círculo.

Otras figuras derivadas del círculo:



4.6.5. SECTOR CIRCULAR:

Es la parte del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido entre ellos.

El área del sector circular es igual a: $\frac{\pi r^2 \alpha}{2}$, donde:

r = radio

α = ángulo

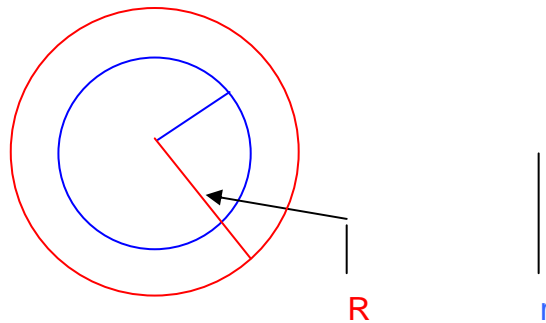
4.6.6. SEGMENTO CIRCULAR:

Se refiere a la parte del círculo comprendido entre una cuerda y su arco correspondiente. El área del segmento circular es igual al área del sector circular formado por la cuerda y el arco correspondiente menos el área del triángulo formado por la cuerda y los radios.

4.6.7. CORONA CIRCULAR:

Es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.

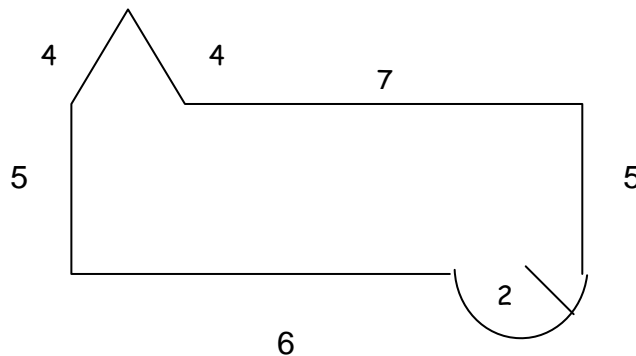
Área de la corona = área círculo mayor – área círculo menor.



$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r) (R - r)$$

AUTO EVALUACIÓN 13: GEOMETRIA PLANA

1. Dibujar un polígono convexo, identificando todos sus elementos.
2. Un polígono tiene 9 lados, cuanto ¿suman sus ángulos interiores?
3. ¿Cuál será el valor de los ángulos interiores de un polígono regular que tiene 14 lados?
4. Cuantas diagonales tendrá un polígono de 11 lados?
5. ¿Cuántas diagonales tiene un triángulo? Corrobore su respuesta gráficamente.
6. Dibujar tres triángulos, uno con las alturas, otro con las medidas y otro con las bisectrices.
7. El perímetro de un triángulo es de 54 cm. Hallar sus lados si se encuentran en relación 2-3-4
8. El ángulo interior de un polígono regular mide 165° ¿cuántos lados tendrá dicho polígono?
9. Cual será el área de la figura que se representa a continuación.



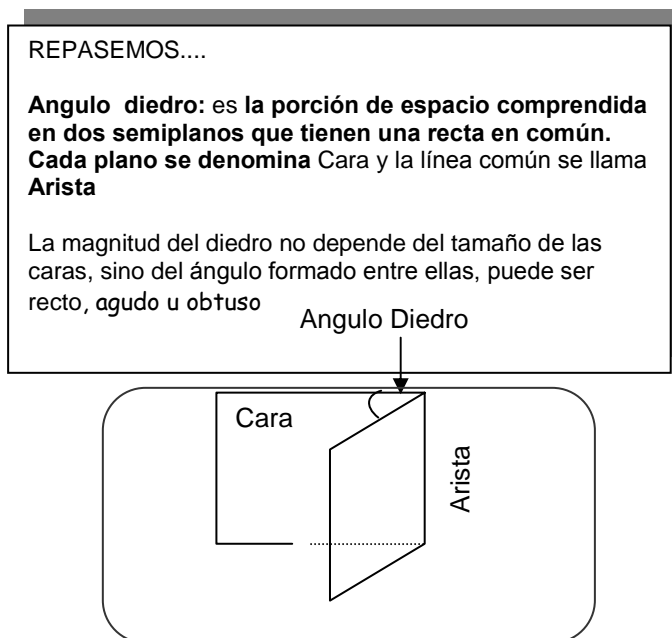
10. El perímetro de un rectángulo es de 120 cm, ¿cuáles serán la dimensiones del rectángulo, si sus lados están en relación 2-3?

4.7. GEOMETRIA ESPACIAL:

Cuando se analizan las dimensiones de un lote rectangular y se dice que tiene 120 m^2 , indica que el largo multiplicado por el ancho es igual a 120, de esta forma lo que se esta midiendo es la superficie del lote. En muchas ocasiones lo que se requiere es medir además del largo y el ancho, la profundidad; es decir, la tercera dimensión de los objetos.

Esta tercera dimensión se refiere a las figuras geométricas que **“Ocupan un lugar en el espacio”**. Antes de abordar esta temática es necesario recordar algunos aspectos:

4.7.1 DIEDROS:



4.7.1.1. CLASES DE DIEDROS:

REPASEMOS.....

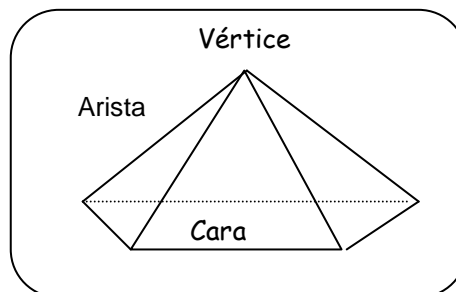
CLASIFICACION DE LOS DIEDROS:

- ♣ Diedro Llano: formado por dos semiplanos opuestos (igual a 180°)
- ♣ Diedro Cóncavo: cuando es mayor que un llano (mayor de 180°)
- ♣ Diedro Convexo: cuando es menor que un llano (menor de 180°)
- ♣ Diedros Consecutivos: aquellos que tienen la misma arista, una cara en común y los puntos de cada uno son exteriores al otro.
- ♣ Diedros Adyacentes: cuando siendo consecutivos, las caras no comunes son semiplanos opuestos
- ♣ Diedros Opuestos por la Arista: son aquella en las que las caras de uno son semiplanos opuestos a las caras del otro
- ♣ **Diedros Complementarios:** son los que al sumarlos originan uno recto.
- ♣ Diedros Suplementarios: los que al sumarlos originan dos rectos.

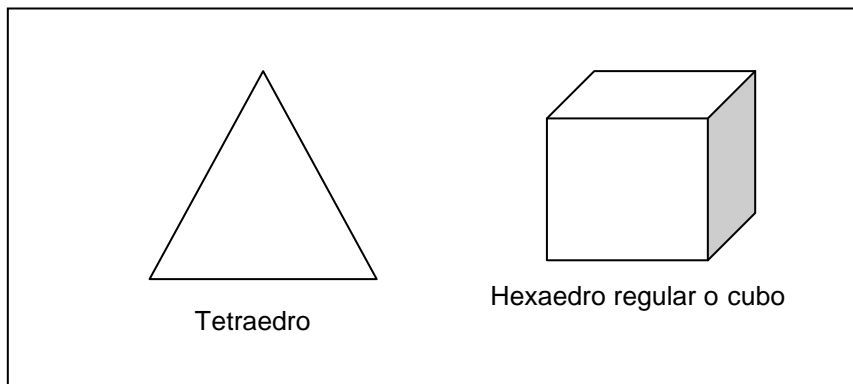
4.7.2 POLIEDROS:

Se llama **poliedro** a un cuerpo o sólido geométrico, limitado por superficies planas.

A las superficies que limitan el sólido se le llama **caras**, a los lados de las caras se les denominan **aristas** y las intersecciones de las aristas se identifican como **vértices**. Las diagonales de un poliedro son las rectas que une dos vértices de caras distintas.



Los poliedros Regulares son los que tienen como caras polígonos regulares iguales y sus ángulos poliedros también son iguales. Existen cinco (5) tipos de poliedros que son regulares son los que tienen caras formadas por triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos



Tetraedro Regular: Se refiere al poliedro que esta limitado por 4 triángulos equiláteros, unidos de tres en tres, con 4 ángulos poliedros. En este, los ángulos poliedros miden 180° cada uno.

Hexaedro Regular: Es el poliedro limitado por 6 cuadrados, unidos de tres en tres. Contiene 8 ángulos poliedros, cuyo valor es de 270° cada uno.

Los otros poliedros regulares son: Octaedro, icosaedro y dodecaedro.

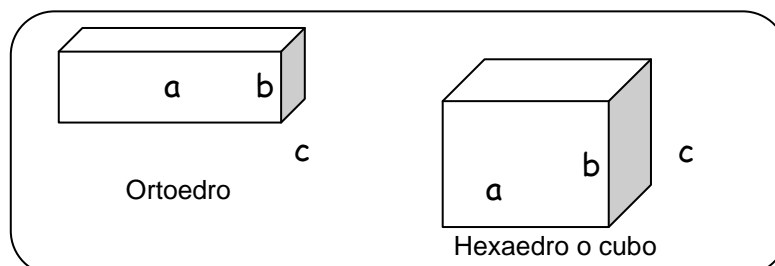
4.7.2.1. EL PRISMA:

El prisma es un poliedro, cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos. Por su base los prismas pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales y hexagonales, entre otros.

Una clase de prisma es el **paralelepípedo** cuyas bases son paralelogramos iguales, existen dos tipos:

⇒ **Recto Rectangular u ortoedro:** cuando sus bases son rectángulos iguales

⇒ **Hexaedro o cubo:** cuando sus bases son cuadradas



4.7.2.1.1. AREA DEL PRISMA:

Todo prisma tiene dos áreas, una lateral y una total.

El área lateral, se refiere a la suma de las áreas de las caras laterales, mientras que el área total comprende la suma del área lateral y el área de la bases.

4.7.2.1.2. VOLUMEN DEL PRISMA:

Teniendo en cuenta que el volumen tiene que ver con la medida del espacio ocupado por el sólido, para un paralelepípedo el volumen es el producto de sus tres longitudes.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

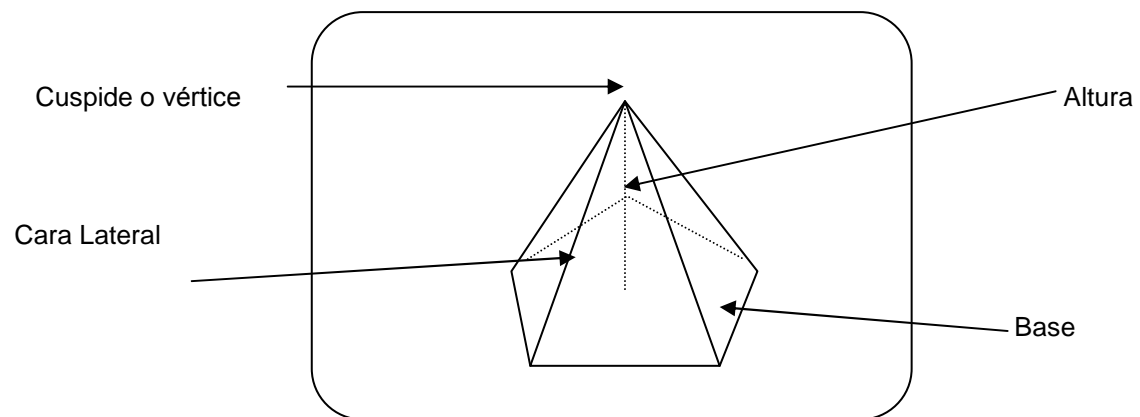
Las unidades de volumen se dan en l³ o sea cm³, m³, pies³, otros.

4.7.2.2 LA PIRAMIDE:

La pirámide es un poliedro que tiene como base un polígono y las caras laterales son triangulares que convergen en un punto. El punto donde convergen los triángulos se conoce como vértice o cúspide. La altura de la pirámide es la perpendicular trazada del vértice a la base. Las aristas laterales, son los lados que limitan las caras laterales.

La pirámide puede ser triangular, rectangular, pentagonal; según la base sea un triángulo, rectángulo, pentágono, entre otras.

También, una pirámide puede ser regular cuando tiene como base un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de la base. Además las aristas laterales son iguales y por consiguiente las caras laterales son isósceles iguales. La apotema de una pirámide regular es la altura de la cara lateral.



4.7.2.2.1. AREA DE LA PIRAMIDE:

Se hallan las dos áreas, la lateral y la de la base:

Lateral: Comprende el área de todos los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide. Como se trata de triángulos, se aplica la formula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Base: Dependiendo del tipo de polígono se aplica la formula respectiva.

El área es la suma de la lateral y de la base.

4.7.2.2.2. VOLUMEN DE LA PIRAMIDE:

Es igual al producto de área de la base por la altura, dividido en tres.

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Donde:

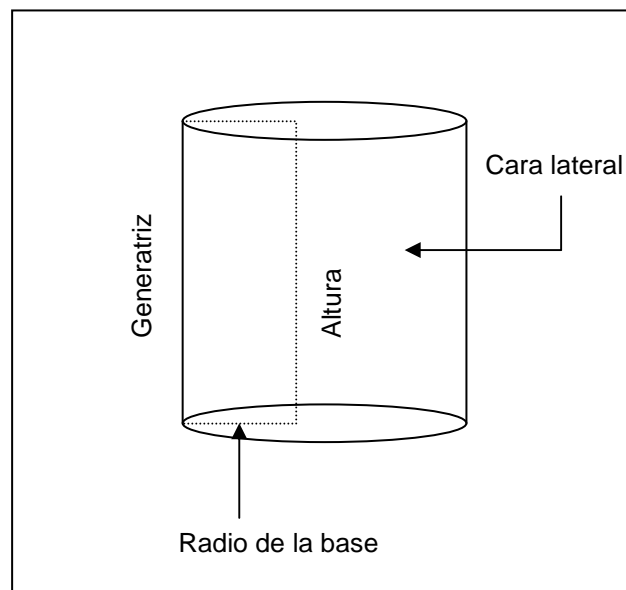
B = área de la base.

h= altura de la pirámide

4.7.2.3. EL CILINDRO:

Una superficie cilíndrica es engendrada por una recta que se desplaza en el espacio, permaneciendo siempre paralela a una recta fija. La recta que gira se llama **generatriz** y la recta fija se llama **directriz**.

Todo cilindro tiene una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que cortan a todas las generatrices, dichos planos se conocen como las bases del cilindro



4.7.2.3.1. AREA DEL CILINDRO:

Esta conformada por el área lateral y el área de las dos bases

Area lateral:

$$A = 2\pi rg$$

Donde:

r= radio

g= generatriz

Area de las bases:

$$2\pi r^2$$

Area total: $2\pi rg + 2\pi r^2$

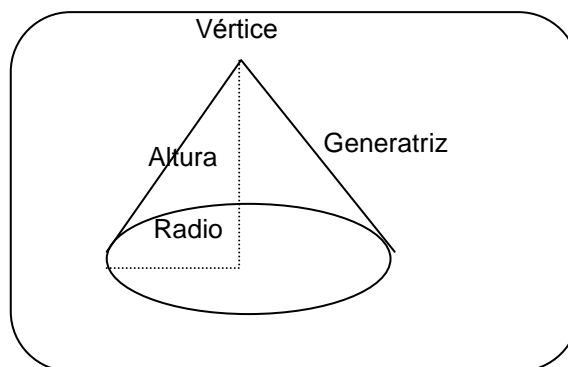
4.7.2.3.2. VOLUMEN DEL CILINDRO:

Es igual a l producto del área de la base por la altura.

$$V = \pi r^2 h$$

4.7.2.4 EL CONO:

El cono de revolución o cono recto, se refiere al cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



4.7.2.4.1. VOLUMEN DE UN CONO:

Es igual al tercio de la altura, multiplicada por el area del círculo que forma la base.

$$V = \frac{h\pi r^2}{3}$$

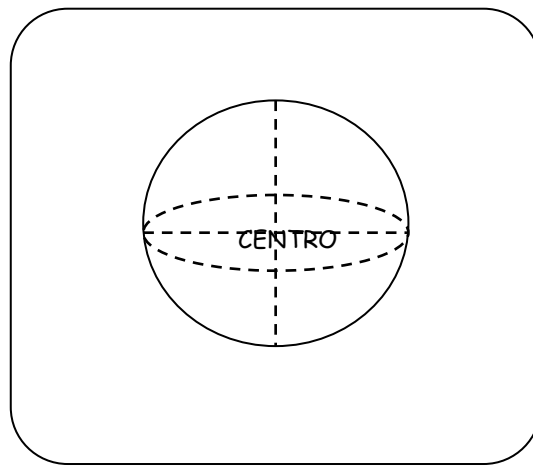
Donde:

h = Altura

r = Radio

4.7.2.5. LA ESFERA:

La esfera se obtiene cuando hay la revolución completa de una semicircunferencia alrededor de su diámetro. Por lo tanto se puede decir que una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan a un punto fijo llamado centro.



4.7.2.5.1. AREA DE LA ESFERA:

Es igual al producto de la circunferencia máxima por el diámetro.

$$A = 2\pi rd$$

Donde:

r = radio

d = diámetro

O también el área de la esfera se puede escribir en función del radio.

$$A = 4\pi r^2$$

El área también se puede escribir en función del diámetro.

$$A = \pi d^2$$

4.7.2.5.2. VOLUMEN DE LA ESFERA:

Se obtiene al multiplicar la superficie esférica por la tercera parte del radio.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

El volumen en función del diámetro es:

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3$$

AUTOEVALUACION 14: GEOMETRIA ESPACIAL

1. Calcular el área de una de las caras de un tetraedro regular, si su arista mide 6 cm.
2. La arista de un cubo mide 24 cm, hallar el volumen, el área lateral y el área total.
3. La pirámide grande de Egipto tiene como base un cuadrado de 232 m de lado. Sus caras laterales son triángulos equiláteros. ¿Cuál será la altura de la pirámide?
4. Hallar el área y el volumen de un cilindro inscrito en un cubo que tiene 12 cm de arista.
5. El área de una esfera es de 1.256 cm^2 ¿Cuál será su radio?

INFORMACION DE RETORNO

Muchos de los procesos que se muestran a continuación son sólo una de las posibilidades de realizar un ejercicio, si la respuesta es coherente mediante un proceso alterno correcto, el resultado es válido.

AUTOEVALUACION 1: CONJUNTOS Y NUMEROS

1. Son vacíos los conjuntos b y c, los conjuntos a y c tienen un elemento cada uno, dentro de las llaves.
2. a- Entre A y F se pueden contar 5 números.
b- Entre C y G hay 4 números, por lo tanto la mitad entre los dos está a dos (2) números, entonces E es la mitad.
c- Entre B y H hay 6 números, un tercio entre B y H está en D.
3. a- Es cierto solo en las ocasiones en que $a=b$
b- Es verdadero por la ley conmutativa.
4. a- La propiedad asociativa
b- La propiedad conmutativa
5. a- $(31 \cdot 7) + (31 \cdot 3) = [(30+1) \cdot 7] + [(30+1) \cdot 3] = (210 + 7) + (90+3) = 310$
b- $15 \cdot (3/5 + 2/3) = 15 \cdot 3/5 + 15 \cdot 2/3 = 9 + 10 = 19.$
6. Son ciertos los enunciados a, c y d.

AUTOEVALUACION 2: POTENCIACION

1. $9^0 = 1$

2. $-5^1 = -5$

3. $(-5)^4 = 625$

4. $(-3)^2 + (-2)^3 = 9 + (-8) = 1$

5. $(X^2 \bullet X^4)^3 = (X^6)^3 = X^{18}$

6. $(y^3 z^4)^5 = y^{15} z^{20}$

7. $\left(\frac{2^2 * 5^{-3}}{2^4 * 5^{-7}} \right)^3 = \left(\frac{5^{-3+7}}{2^{4-2}} \right)^3 = \left(\frac{5^4}{2^2} \right)^3 = \frac{5^{12}}{2^6}$

8. $(3^{-2} + [2^3 + 4^2] - 10^0) = \frac{1}{9} + 8 + 16 - 1 = \frac{1}{9} + 23 = \frac{208}{9}$

9. $5^3 + \frac{4^2}{3^{-2}} - (-7^{-2}) = 125 + 16 * 9 - \left(-\frac{1}{49} \right) = 125 + 144 + \frac{1}{49} = \frac{13.181}{49}$

10. $\left[\frac{x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{y^{-3}z^{-4}3^4} \right]^{-2} = \left[\frac{z^{-2+4}}{81x^3y^{-3+4}} \right]^{-2} = \left[\frac{z^2}{81x^3y} \right]^{-2} = \left[\frac{81x^3y}{z^2} \right]^2 = \frac{6561x^6y^2}{z^4}$

AUTOEVALUACIÓN 3: RADICACIÓN

1. $\sqrt[3]{54^3} = 54$

2. $\sqrt[3]{0} = 0$

3. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

4. $\sqrt[3]{-256} = \sqrt[3]{-8 \cdot 8 \cdot 4} = -2 \cdot 2\sqrt[3]{4} = -4\sqrt[3]{4}$

5. $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \pm \frac{1}{5}$

6. $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = \frac{10}{5} + \frac{-2}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

7. $\sqrt{-16} + \sqrt[4]{-16} = \text{No tiene solución en los reales.}$

8. $\frac{5}{\sqrt[3]{-125}} = \frac{5}{-5} = -1$

9. $\sqrt[4]{x^4 y^2 z^6} = x^{4/4} y^{2/4} z^{6/4} = xy^{1/2} z^{3/2} = x\sqrt{yz^3} = xz\sqrt{yz}$

10. $\sqrt[3]{\frac{1}{y^{1/2}}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{y^{1/2}}} = \frac{1}{y^{1/6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{y}}$

AUTOEVALUACION 4: LOGARITMOS

1. $\text{Log}_4 64 = x$ entonces: $4^x = 64$ luego: $x = 3$
2. $\text{Log}_2 32 = x$ entonces: $2^x = 32$ luego: $x = 5$
3. $\text{Log}_5 125 = x$ entonces: $5^x = 125$ luego: $x = 3$
4. $\text{Log}_3 (1/9) = x$ entonces: $3^x = 1/9$ luego: $x = -2$
5. $\text{Log} 20 = 1,3010$ (**usando calculadora**)
6. $\text{Log} 10 + \text{Log} 1.000 = 1 + 3 = 4$
7. $\text{Log} 50 - \text{Log} 70 = 1,6989 - 1,84509 = -0,14619$
8. $\text{Ln} 10 = 2,3025$
9. $\text{Ln} 100 = 4,6051$
10. $\text{Ln} 1 + \text{Ln}(1/2) = 0 + (-0,6931) = -0,6931$

AUTOEVALUACION 5: NUMEROS COMPLEJOS

1. $i^4 = i^2 * i^2 = (-1) * (-1) = 1$
2. $i^5 = i^2 * i^2 * i = (-1) * (-1) * i = i$
3. $\sqrt{-36} = \sqrt{36} * \sqrt{-1} = 6i$
4. $\sqrt{-50} = \sqrt{25 * 2} * \sqrt{-1} = 5\sqrt{2}i$
5. $\sqrt{-98} - \sqrt{-162} = \sqrt{49 * 2} * \sqrt{-1} - \sqrt{81 * 2} * \sqrt{-1} = 7\sqrt{2}i - 9\sqrt{2}i = -2\sqrt{2}i$
6. $\sqrt{-25} + \sqrt{-36} = 5i + 6i = 11i$

7. Para $(-5+4i)$ el conjugado será: $(-5 -4i)$

8. $(a + bi) + (x-yi) = (a + x) + (b - y)i$

9. $(-5i + 3) - (8 + 3i) = (3 - 8) + (-5 - 3)i = -5 - 8i$

$$10. \frac{(3 - 8i) * (4-2i)}{(4+2i) (4-2i)} = \frac{(12-6i-32i+16i^2)}{(16-8i+8i-4i^2)} = \frac{12 - 38i + 16(-1)}{16 - 4(-1)} = \frac{-4 - 38i}{20}$$

$$= \frac{-4(1+38i)}{20} = \frac{-(1+38i)}{5}$$

11. $i * (3 - i) = 3i - i^2 = 3i - (-1) = 1 + 3i$

AUTOEVALUACION 6: PRODUCTOS NOTABLES

Los ejercicios 1 al 4 se desarrollaron por el método del Binomio de Newton.

1. $(p-q)^3 = p^3 - 3p^{3-1}q + \frac{3(3-1)}{1*2} p^{3-2}q^2 - q^3 = p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$

2. $(a+3)^3 = a^3 + 3a^{3-1} * 3 + \frac{3(3-1)}{1*2} a^{3-2} * 3^2 + 3^3 = a^3 + 9a^2 + 3a * 3^2 + 3^3 =$
 $= a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

3. $(5x-3y)^4 = (5x)^4 - 4(5x)^{4-1} (3y) + \frac{4(4-1)}{1*2} (5x)^{4-2} (3y)^2 - \frac{4(4-1)(4-2)}{1*2*3} (5x)^{4-3} 3(y)^3 +$
 $(3y)^4 = (5x)^4 - 4(5x)^3 (3y) + 6 (5x)^2 (3y)^2 - 4(5x) (3y)^3 + (3y)^4$
 $= 625^4 - 1.500x^3y + 1350x^2y^2 - 540xy^3 + 81y^4$

4. $([x-2] - y)^3 = [x-2]^3 - 3[x-2]^{3-1}y + \frac{3(3-1)}{1*2} [x-2]^{3-2} y^2 - y^3$
 $= [x-2]^3 - 3[x-2]^2 y + 3[x-2] y^2 - y^3$
 $= x^3 - 3x^2 * 2 + 3x * 2^2 - 2^3 - 3[x^2 - 4x + 4] y + [3x-6]y^2 - y^3$

$$\begin{aligned}
&= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x^2y + 12xy - 12y + 3xy^2 - 6y^2 - y^3 \\
&= x^3 - 6x^2 + 12x - 3x^2y + 12xy - 12y + 3xy^2 - 6y^2 - y^3 - 8
\end{aligned}$$

Los ejercicios del 5 al 8 se desarrollaron por el método del triángulo de pascal

5. $(t-4)^3$: Los coeficientes son: 1,3,3,1 los exponentes de la t van disminuyendo uno a uno desde cero hasta tres y los de 4 van aumentando de igual manera.

$$\begin{aligned}
(t-4)^3 &= 1t^3 4^0 - 3t^2 4^1 + 3t^1 4^2 - 1t^0 4^3 \\
&= t^3 - 12t^2 + 48t - 64
\end{aligned}$$

6. $(2t + 3s)^4$: Los coeficientes son: 1,4,6,4,1 de la misma manera que el caso anterior.

$$\begin{aligned}
(2t + 3s)^4 &= 1(2t)^4 (3s)^0 + 4(2t)^3 (3s)^1 + 6(2t)^2 (3s)^2 + 4(2t)^1 (3s)^3 + 1(2t)^0 (3s)^4 \\
&= 16t^4 + 96t^3s + 216t^2s^2 + 432ts^3 + 81s^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. ([x-1]-[y-2])^3 &= 1[x-1]^3 [y-2]^0 - 3[x-1]^2 [y-2]^1 + 3[x-1]^1 [y-2]^2 - 1[x-1]^0 [y-2]^3 \\
&= [x-1]^3 - 3[x-1]^2 [y-2] + 3[x-1]^1 [y-2]^2 - [y-2]^3 \\
&= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3(x^2 - 2x + 1)(y-2) + 3(x-1)(y^2 - 4y + 4) - (y^3 - 3y^2 + 3y - 2) \\
&= x^3 + 3x^2 - 3x^2y + 3x - 6xy + 3xy^2 - 3y + 9y^2 - y^3 + 25
\end{aligned}$$

8. $(x-3y)^5$: Los coeficientes son: 1,5,10,10,5,1 entonces:

$$\begin{aligned}
&= 1x^5 (3y)^0 - 5x^4 (3y)^1 + 10x^3 (3y)^2 - 10x^2 (3y)^3 + 5x^1 (3y)^4 - 1x^0 (3y)^5 \\
&= x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5
\end{aligned}$$

$$9. (a+2)(a+7) = a^2 + 9a + 14$$

$$10. (m+8)(m-8) = m^2 - 64$$

$$11. (m^2+4)(m^2-4) = m^4 - 16$$

AUTOEVALUACION 7: FACTORIZACION

1. $(C^2 - 25) = (C-5)(C+5)$

2. $2a^3+8a = 2a^3+2^3a = 2a(a^2+4)$

3. $3m^3 - 6m^2 + 15 = 3m(m^2-2m+5)$

4. $x^2 + 49$ No es factorizable

5. $27 - x^3y^3 = (3-xy)(9+3xy+x^2y^2)$

6. $4b^2 - 4b - 24 = (b-3)(4b+8) = 4(b-3)(b+2)$

7. $y^3-2y^2+y - 2 = (y^3-2y^2)+(y-2) = y^2(y-2) + (y-2) = (y^2+1)(y-2)$

8. $a^2b^2 - 16 = (ab-4)(ab+4)$

9. $m^2 - 4m + 3 = (m-3)(m-1)$

10. $18a^3 - 8a = 2a(9a^2-4) = 2a(3a-2)(3a+2)$

AUTOEVALUACION 8: M.C.D. y M.C.M.

1. $3a^2x$, $7a^3x^3$, $12b^2x^2$: factor común de coeficientes NO hay, pero de base es x , donde el mínimo exponente es uno.

Entonces: M.C.D será: x

2. $16a^2b$, $20bc^2$, $30x^2y^2$: Factor común de coeficientes es 2, de base NO hay, por consiguiente el M.C.D. será. 2

3. $24pq^3$, $16p^3$, $28p^4q^2$, $40qxp$: factor común de coeficientes es 4, el de bases es p con exponente mínimo 1.

Entonces el M.C.D es $4p$

4. $x^3 + 27$, $2x^2 - 2x - 24$, $x^4 - x^3 - 6x^2$: Como son polinomios, se factorizan y se escoge el factor común, con su mínimo exponente.

Entonces:

$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9)$$

$$2x^2-2x-24 = \frac{(2x)^2-2(2x)-48}{2} = \frac{(2x-8)(2x+6)}{2} = (2x-8)(x+3)$$

$$x^4 - x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 + x - 6) = x^2(x+3)(x-2)$$

Como podemos observar, el factor común es $(x+3)$ Luego el M.C.D. será: $(x+3)$.

5. $3p^2-6p$, $3p^3-6p^2$, p^2q-2pq , p^3-p^2-2p : Factorizamos:

$$3p^2-6p=3p(p-2)$$

$$3p^3-6p^2=3p^2(p-2)$$

$$p^2q-2pq = pq(p-2)$$

$$p^3-p^2-2p=p(p^2-p-2)=p(p-2)(p+1)$$

Como vemos, el común denominador es $p(p-2)$, por consiguiente el MCD será: $p(p-2)$.

6. $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6$, $x^3 + x^2 - x + 2$: En este caso NO se puede factorizar, entonces se hacen las divisiones sucesivas hasta obtener el residuo cero.

Veamos:

Primero simplificamos el primer polinomio: $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6 = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

Luego planteamos la primera division:

$x^3 + 2x^2 - 2x + 3 / x^3 + x^2 - x + 2 =$ cociente 1 residuo $x^2 - x + 1$,

La segunda division será: $x^3 + x^2 - x + 2 / x^2 - x + 1 =$ cociente x y residuo $2x^2 - 2x + 2$

La siguiente division: $2x^2 - 2x + 2 = x^2 - x + 1 / 2x^2 - 2x + 2 =$ cociente $\frac{1}{2}$ y residuo 0

Entonces: el MCD = $x^2 - x + 1$

Del 7 al 11, hallar el Mínimo Común Múltiplo.

7. $12x^3$, $18xy^2$, $30y^3$:

Primero calculamos el M.C.M. de los coeficientes, descomponiendo dichos números así: $12 = 4 \cdot 3$, $18 = 3^2 \cdot 2$, $30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$,

Entonces el M.C.M. sería: $4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 360$

Para las bases se escogen todas con su máximo exponente, indicando su producto: $x^3 \cdot y^3$

Luego el M.C.M. será: $360x^3y^3$

8. $5a^2$, $7ab^2$, $9ax^3$, $10b^3x^2$:

Para el M.C.M. de coeficientes, los descomponemos así:

$5 = 5 \cdot 1$, $7 = 7 \cdot 1$, $9 = 3^2$, $10 = 5 \cdot 2$

Entonces el producto de factores comunes y no comunes es: $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 = 630$

Para las bases: $a^2 * b^3 * x^3$

Luego el M.C.M. de los monomios es: $630 a^2 b^3 x^3$

9. $x^2 + 2x$, $x^3 - 2x^2$, $x^2 - 4$

Como son polinomios, factorizamos así:

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Ahora escogemos los factores comunes y no comunes, con su máximo exponente, cuyo producto es el M.C.M.

Luego éste será: $x^2 (x-2) (x+2)$

10. $(a - 2)^2$, $a^2 - 4$, $(a - 2)^3$:

Como el primero y último polinomio ya están en forma de factores, solo factorizamos el segundo:

$$a^2 - 4 = (a+2)(a-2) \text{ Entonces, el MCM es: } (a+2)(a-2)^3$$

11. $x^3 - 9x + 5x^2 - 45$, $x^4 + 2x^3 - 15x^2$

Factorizamos:

$$x^3 - 9x + 5x^2 - 45 = (x^3 - 9x) + (5x^2 - 45) = x(x^2 - 9) + 5(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(x + 5) = (x + 3)(x - 3)(x + 5)$$

$$x^4 + 2x^3 - 15x^2 = x^2(x^2 + 2x - 15) = x^2(x + 5)(x - 3)$$

Luego el M.C.M. es: $x^2(x+3)(x-3)(x+5)$

AUTOEVALUACION 9: FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. $\frac{15a^4b^3}{3a^5z^2} = \frac{5b^3}{az^2}$ La simplificación se hizo dividiendo los coeficientes por 3 y

la única base que esta común tanto en numerador como en el denominador es la **a**.

2. $\frac{17axt}{5bp}$ En este caso NO se puede simplificar, ya que los coeficientes no

tienen factores comunes, tampoco hay bases que se puedan simplificar.

3. $\frac{20yz}{35zw} = \frac{4y}{7w}$ Los coeficientes se simplificaron por 5, la única base que es

común tanto en el numerador como en el denominador es la z.

4. $\frac{5a^5t^3}{2t^6a^2b} = \frac{5a^3}{2t^3b}$ Para este caso los coeficientes no tienen factores

común para simplificar, pero hay una base que si se puede simplificar, la **a**.

5. $\frac{3x^2+19x+20}{6x^2+17x+12}$

Como se trata de una fracción con polinomios, primero factorizamos los polinomios del numerador y denominador, si se encuentran factores comunes, se simplifican, veamos:

$$3x^2+19x+20 = [(3x)^2 + 19(3x)+60]/3= [(3x+15)(3x+4)]/3$$

Simplificando obtenemos (x+5) (3x+4)

$$6x^2+17x+12= [(6x)^2+17(6x)+72]/6 = [(6x+9)(6x+8)]/ 3 * 2$$

Simplificando: (2x+3)(3x+4)

Ahora los ubicamos en la fracción:

$$\frac{3x^2+19x+20}{6x^2+17x+12} = \frac{(x+5)(3x+4)}{(2x+3)(3x+4)} = \frac{(x+5)}{(2x+3)}$$

$$6. \quad \frac{(x^2+y^2)}{x^3-y^3} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{(x+y)}{(x^2+xy+y^2)}$$

Es pertinente que identifiques qué casos de factorización se aplicaron, en este ejercicio.

$$7. \quad \frac{2}{x-1-\frac{3}{x-\frac{x-3}{x+2}}} \quad \text{Como se trata de una fracción compleja, se simplifica}$$

comenzando por la parte mas baja del denominador

$$\frac{2}{x-1-\frac{3}{x-\frac{x-3}{x+2}}} = \frac{2}{x-1-\frac{3}{\frac{x(x+2)-(x-3)}{(x+2)}}} \quad \text{Aplicamos el producto de}$$

extremos y medios para la parte mas baja del denominador

$$\frac{2}{x-1-\frac{3}{\frac{x(x+2)-(x-3)}{(x+2)}}} = \frac{2}{x-1-\frac{3(x+2)}{x^2+2x-x+3}} = \frac{2}{x-1-\frac{3x+6}{x^2+x+3}}$$

Ahora, volvemos a operar el denominador

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x+3)-(3x+6)} = \frac{2(x^2+x+3)}{(x-1)(x^2+x+3)-(3x+6)} = \frac{2x^2+2x+6}{x^3-x-9}$$

8. $\frac{\frac{x-2}{4-\frac{3-x}{1-\frac{x-2}{2+\frac{2}{x}}}}}{y}$ Esta la resolución la puede hacer en un grupo y luego

consultar con el Tutor, en caso de dudas.

AUTOEVALUACION 10: RAZONES Y PROPORCIONES

1. $a - b = c$ Antecedentes es a y el consecuente es b
2. $12 - 4 = 8$ Antecedentes es 12 y el consecuente es 4
3. $25 - 4 = 8$ Antecedentes es 25 y el consecuente es 4
4. $\frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ Antecedentes es 12 y el consecuente es 4
5. $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ Antecedentes es 20 y el consecuente es 5
6. $x - 5 = 4$ El valor de x es: $4 + 5 = 9$
7. $38 - x = 29$ El valor de x es: $38 - 29 = 9$
8. $\frac{x}{5} = 10$ El valor de x es: $5 * 10 = 50$
9. $\frac{84}{x} = 7$ El valor de x es: $84 \div 7 = 12$
10. $\frac{7}{2} = \frac{x}{6}$ Entonces: $x = \frac{7 * 6}{2} = 21$

11. $\frac{x}{4} = \frac{8}{2}$ Entonces: $x = \frac{4 * 8}{2} = 16$

12. $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ Se puede expresar de las siguientes formas:

$$\frac{4}{1} = \frac{12}{3}, \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

13. $\frac{5}{12} = \frac{45}{108}$ Se puede expresar de las siguientes formas:

$$\frac{12}{5} = \frac{108}{45}, \frac{12}{108} = \frac{5}{45}, \frac{5}{45} = \frac{12}{108}$$

AUTOEVALUACION 11: REPARTO PROPORCIONAL

1. Como se quiere repartir 26.000.000 entre 4 hijos de forma proporcional a las edades de estos, el procedimiento es el siguiente:

A. Método factor constante:

a.- Se suman los valores de las edades de los hijos: $5 + 8 + 10 + 14 = 37$

b.- Se divide la cantidad a repartir en este valor:

$$26.000.000 \div 37 = 702.702,7027$$

c.- Se multiplica el valor obtenido por cada uno de las edades de los hijos, así se obtiene cuanto le corresponde a cada uno.

Hijo de 5 años: $5 * 702.702,7027 = 3.513.513,514$

Hijo de 8 años: $8 * 702.702,7027 = 5.621.621,622$

Hijo de 10 años: $10 * 702.702,7027 = 7.027.027,027$

Hijo de 14 años: $14 * 702.702,7027 = 9.837.837,838$

B. Método de proporciones:

a.- Se suma el valor de las edades: $5 + 8 + 10 + 14 = 37$

b.- Se planea la proporción así:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = \frac{c}{10} = \frac{d}{14} = \frac{26.000.000}{37}$$

Planteamos las proporciones para cada incognita, a , b , c , d para conocer el valor correspondiente.

$$\frac{a}{5} = \frac{26.000.000}{37} \text{ Donde } a = \frac{5 * 26.000.000}{37} = 3.513.513,514 \text{ Para el hijo de 5 años}$$

$$\frac{b}{8} = \frac{26.000.000}{37} \text{ Donde } b = \frac{8 * 26.000.000}{37} = 5.621.621,622 \text{ Para el hijo de 8 años}$$

Complete el problema con sus compañeros, si tiene dudas consulta a su tutor.

2. El reparto de la cantidad es en relación inversa a las faltas realizadas. La cantidad es de \$ 500.000 entre Jorge 5 faltas, Alberto con 9 y Fabián con 7 faltas.

a.- Se expresan los recíprocos del número de faltas: $\frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}$

b.- Se multiplican los denominadores: $5 * 9 * 7 = 315$

c.- Se divide el valor obtenido por cada una de las faltas.

Para Jorge: $315 \div 5 = 63$

Para Alberto: $315 \div 9 = 35$

Para Fabian: $315 \div 7 = 45$

d.- Se suman estos cocientes: $63 + 35 + 45 = 143$

e.- Se plantean las proporciones para cada uno de ellos:

$$\text{Para Jorge: } \frac{143}{63} = \frac{500.000}{x} \quad \text{Donde } x = \frac{63 * 500.000}{143} = 220.279,72$$

$$\text{Para Alberto: } \frac{143}{35} = \frac{500.000}{y} \quad \text{Donde } y = \frac{35 * 500.000}{143} = 122.377,62$$

Para Fabián: $\frac{143}{45} = \frac{500.000}{z}$ Donde $z = \frac{45 * 500.000}{143} = 157.342,65$

3. El reparto del total entre los tres grupos A,B,C de los \$4.600.000,oo se puede hacer por el método de factor constante o por el método de proporciones. El grupo A trabajo 19 días a razón de 7 hr/día. El grupo B; 18 días a razón de 8 hr/día. El grupo C; 21 días a razón de 6hr/día.

Método de factor constante:

a.- Se determina el valor total de horas trabajadas por cada grupo.

Grupo A: 19 días x 7 hr/día = 133 horas

Grupo B: 18 días x 8 hr/día = 144 horas

Grupo C: 21 días x 6 hr / día = 126 horas.

Total de horas = 403

b.- Se determina el factor constante: $4.600.000 \div 403 = 11.414,39$

c.- Se multiplica el factor constante por el valor del tiempo de cada grupo y así, se obtiene la cantidad que le corresponde a cada uno.

Grupo A: 133 horas * 11.414,39 = 1.518.113,87

Grupo B: 144 horas * 11.414,39 = 1.643.672,16

Grupo C: 126 horas * 11.414,39 = 1.438.213,14

Método de proporciones:

a.- Se determina el valor total de horas trabajadas por cada grupo.

Grupo A: 19 días * 7 hr/día = 133 horas.

Grupo B: 18 días * 8 hr/día = 144 horas.

Grupo C: 21 días * 6 hr/día = 126 horas.

Total de horas = 403

b.- Se plantea las proporciones de la siguiente manera:

$$\frac{A}{133} + \frac{B}{144} + \frac{C}{126} = \frac{4.600.000}{403}$$

c.- Se hace la relación de proporciones para cada incógnita:

$$\frac{A}{133} = \frac{4.600.000}{403} \quad \text{Donde: } A = \frac{133 * 4.600.000}{403} = 1.518.144,14$$

$$\frac{B}{144} = \frac{4.600.000}{403} \quad \text{Donde: } B = \frac{144 * 4.600.000}{403} = 1.643.672,45$$

$$\frac{C}{126} = \frac{4.600.000}{403} \quad \text{Donde: } C = \frac{126 * 4.600.000}{403} = 1.438.213,40$$

4. Para repartir la herencia de don Fructuoso Calducho, la relación es inversa a la edad, entonces corresponde a un reparto proporcional inverso. La cantidad a repartir es de \$120.000.000.00 entre Nancy de 10 años, José de 15 años, Katty de 12 años y Marlene de 25 años.

El procedimiento es el siguiente:

a.- Se plantea el recíproco de las edades:

Nancy: 1/10

José: 1/15

Katty: 1/12

Marlene: 1/25

b.- Se multiplican los denominadores: $10 * 15 * 12 * 25 = 45.000$

c.- Se hace la división del producto obtenido por cada denominador:

Nancy: $45.000 \div 10 = 4.500$

José: $45.000 \div 15 = 3.000$

Katty: $45.000 \div 12 = 3.750$

Marlene: $45.000 \div 25 = 1.800$

d.- Se hace la suma de los cocientes obtenidos así:

$4.500 + 3.000 + 3.750 + 1.800 = 13.050$

e.- Se plantean las proporciones:

$$\text{Nancy: } \frac{13.050}{4.500} = \frac{120.000.000}{x} \quad x = 41.379.310,34$$

$$\text{Katty: } \frac{13.050}{3.750} = \frac{120.000.000}{x} \quad x = 34.482.758,62$$

AUTOEVALUACION 12: PORCENTAJE

1. Como cada tornillo se vendió a \$ 48,5 ganándole el 18%, entonces:

a- El porcentaje de ganancia se calcula

\$	%
48,5	118
x	100

$$\frac{48,5}{x} = \frac{118}{100} \quad \text{Entonces } x = 41.10$$

Significa que el costo del producto es de \$ 41.10

La utilidad es la diferencia entre el precio de venta y el costo:

$$\$ 48.5 - \$ 41.10 = \$ 7.4$$

b-Como sabemos cuanto gana por cada tornillo, entonces la ganancia del total de la venta se calculará así: $1246 \bullet \$ 7.4 = \$ 9.220.4$

2. Como Jimmy recibe el 12% de bonificación, si recibió \$ 759.000 por ventas, entonces para saber cuanto vendió Jimmy se realiza lo siguiente:

a-

\$	%
759.000	12
x	100

$$\frac{759000}{x} = \frac{12}{100} = \$6.325.000$$

Jimmy vendio: \$ 6.325.000,00

b-

\$	%
7.326.200	100
x	12

Jimmy recibirá \$ 879.144 por esta venta

3. a- Acido Ascórbico

Kg	%
1200	100
x	1.3

Entonces la cantidad de ácido ascórbico es de 15.6 kg.

Bicarbonato:

Kg	%
1200	100
x	0.045

La cantidad de bicarbonato es de 0.54 kg

b- En la nueva formulación, debemos calcular qué tanto por ciento de cada sustancia tiene la mezcla, para luego sí saber la cantidad de las sustancias requeridas para los 650 kg.

Los 50 kg de la mezcla son el 100%, entonces:

Para el ácido ascórbico es:

Kg	%
50	100
0.24	x

El porcentaje de ácido ascórbico para la nueva mezcla es de 0.48%

Para el bicarbonato es:

Kg	%
50	100
1.35	x

El porcentaje de bicarbonato es de 2.7 %

Entonces la cantidad necesaria para preparar 650 kg de saborizante es:

Acido ascórbico:

Kg	%
650	100
x	0.48

Se necesitan 3.12 kg de Acido ascórbico

Bicarbonato:

Kg	%
650	100
x	2.7

Se requieren 17.55 kg de Bicarbonato.

AUTOEVALUACION 13: GEOMETRIA PLANA:

1. La gráfica debe identificar lados, ángulos, vértices y diagonales.

2. Angulos interiores = $180 * (9-2) = 180 * 7 = 1260^\circ$

$$3. \theta = \frac{180 * (14 - 2)}{14} = \frac{180 * 12}{14} = \frac{2160}{14} = 154.28^\circ$$

$$4. \text{ } \text{ } = \frac{11}{2}(11 - 3) = 44 \text{ Diagonales.}$$

5. $\text{ } = \frac{3}{2}(3 - 3) = 0$ El triángulo tiene solo tres vértices, donde todos son consecutivos entre si.

6. Deben presentar los tres triángulos con su respectiva altura, mediana y bisectriz.

$$7. \quad 2 + 3 + 4 = 9 \text{ entonces : } 54 / 9 = 6$$

Luego: $2 * 6 = 12$ Primer lado

$3 * 6 = 18$ Segundo lado

$4 * 6 = 24$ Tercer lado.

8. Angulo interior de un poligono regular: $\frac{180}{n} * (n - 2)$

Se despeja $n = \frac{-360}{\alpha - 180}$ donde α es la medida del ángulo.

$$n = \frac{-360}{165 - 180} = 24 \text{ lados}$$

9. El área del rectángulo: $A = 5 * 10 = 50 \text{ cm}^2$

El área del círculo: $A = \pi (2\text{cm})^2 = 12.567 \text{ cm}^2$

El área del triángulo: Primero tenemos que hallar la altura.

Según la figura: $h^2 = 4^2 - (1.5)^2 = 13.75$

Despejando h: 3.708

Ahora sí hallamos el área del triángulo: $A = \frac{1}{2}(3\text{cm} * 3.708\text{cm}) = 5.56\text{cm}^2$

El area total de la figura es: $50\text{cm}^2 + 12.567\text{cm}^2 + 5.56\text{cm}^2 = 68.127 \text{ cm}^2$

10. La relación es 2-3, entonces: $120 / 5 = 24$ es el factor constante de relación.

Ahora: Los lados más grandes medirá: $3 * 24 = 72$, luego el largo mide: 36 cm

Los lados más cortos medirán: $2 * 24 = 48$, luego el ancho del rectángulo medirá 24 cm.

AUTOEVALUACION 14: GEOMETRIA ESPACIAL.

1. El área de una de las caras de un tetraedro es: $A_L = \frac{B * h}{2}$ donde B es la base y h es la altura del triángulo. La altura se halla utilizando el teorema de Pitágoras.

$h^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ El triángulo formado tiene 6 cm de lado y 3 cm de la mitad de la base.

$$h = \sqrt{27} = 5.196 \text{ cm}$$

Ahora si hallamos el área lateral.

$$A_L = \frac{6 \text{ cm} * 5.196 \text{ cm}}{2} = 15.58 \text{ cm}^2$$

2. Volumen: $V = l * l * l = 24 \text{ cm} * 24 \text{ cm} * 24 \text{ cm} = 13.824 \text{ cm}^3$ ya que es un cubo.

El área lateral: $A_L = p * a$ donde P es el perímetro y a es la arista.

$$A_L = (4 * 24) * 24 = 2.304 \text{ cm}^2$$

El área total : $A_T = A_L + 2B$ donde B es el área de la base, luego:

$$A_T = 2.304 \text{ cm}^2 + 2 * (24 \text{ cm} * 24 \text{ cm}) = 3.456 \text{ cm}^2$$

3. Primero hallamos la altura del triángulo:

$$h^2 = 232^2 - 116^2 = 40.368 \text{ m}^2 \text{ luego } h = 200.917 \text{ m}$$

Ahora sí podemos calcular la altura de la pirámide:

$$H^2 = (200.917)^2 - (116)^2 = 26.911,64 \text{ m}^2$$

H = 164,047 m corresponde a la altura de la pirámide.

4. Como el cubo tiene 12 cm de arista, este corresponde a la longitud del cilindro. Entonces la generatriz vale 12 cm y el radio 6 cm.

$$A_L = 2 \pi r * g = 2 \pi * 6 \text{ cm} * 12 \text{ cm} = 452,16 \text{ cm}^2$$

$$B = \pi r^2 = \pi * (6 \text{ cm})^2 = 113,09 \text{ cm}^2 \text{ Area de la base.}$$

Ahora podemos hallar el área total:

$$A_T = A_L + 2B = 452,16 \text{ cm}^2 + 2 (113,09 \text{ cm}^2) = 678,24 \text{ cm}^2$$

Por otro lado el volumen se calcula así:

$$V = B * h = 113,09 \text{ cm}^2 * 12 \text{ cm} = 1.357,08 \text{ cm}^3$$

5. El área de una esfera es : $A = 4\pi r^2$ despejamos r:

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1256 \text{ cm}^2}{4\pi}} = 9,997 \text{ cm}$$

GLOSARIO DE TERMINOS

ÁLGEBRA: Es la parte de las Matemáticas que estudian las relaciones entre cantidades y magnitudes, además de las reglas que la orientan, dicho en palabras más comunes el Álgebra es la Matemáticas de las letras. La palabra Álgebra se deriva del libro *lhm aljaba wa'l muqabalah* que fue escrito por el Matemático árabe AL – KHOWARAZMI en el año 800 D de C. EL significado básico del libro era el de Restauración y Reducción, procesos fundamentales para resolver ecuaciones.

AREA: Se define como el resultado de medir una superficie plana de cualquier figura.

COCIENTES NOTABLES: Al igual que los productos notables, existen cocientes que cumplen reglas fijas y que su resultado puede ser escrito por simple inspección, sin realizar toda la operaron.

CÓNICAS: Son figuras geométricas planas, que se obtiene al hacer cortes específicos a dos conos unidos por el vértice. Entre las más conocidas tenemos: Circunferencia, parábolas y elipse.

CONJUNTOS: Los conjuntos se pueden comparar como una colección o lista de objetos que comparten una cierta característica que los diferencia de otros. Los conjuntos están conformados por un grupo de objetos llamados elementos.

COORDENADAS RECTANGULARES: Son dos rectas que se cortan en un punto común llamado origen y divide el plano en cuatro cuadrantes, la recta horizontal se conoce como abscisa y la vertical como ordenada.

DESIGUALDAD: Es una expresión que compara dos partes, puede ser mayor o menor. Al igual que las ecuaciones, una desigualdad se hace verdadera cuando al reemplazar la incógnita por un valor el sentido de la desigualdad se cumple. Las desigualdades tienen como solución conjuntos de números.

DOMINIO: Todos los elementos que hacen parte del conjunto inicial de la función

ECUACIÓN ANALÍTICA: Es la que representa matemáticamente el comportamiento de figuras geométricas planas, como la circunferencia y otras.

ECUACIÓN: Es una expresión que establece una equivalencia entre dos partes separadas por el signo igual, donde hay involucradas incógnitas. La ecuación se hace verdadera cuando el valor de la incógnita permite que las dos partes sean equivalentes o iguales. Las ecuaciones tienen soluciones únicas.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS: Son combinaciones de números y letras unidos por las operaciones fundamentales del Álgebra.

FACTORIZACIÓN: Consiste en presentar un polinomio en factores. La factorización es el paso contrario a los productos notables. Este proceso es muy útil para simplificar fracciones.

FRACCIONES ALGEBRAICAS: Son expresiones donde el numerador y el denominador son monomios o polinomios, aclarando que el denominador debe ser diferente de cero.

FUNCIÓN: Dados dos conjuntos, el primero llamado dominio y el segundo llamado rango, deben cumplir una relación que tiene dos condiciones: Todos los elementos del dominio están relacionados, la relación es única.

GEOMETRÍA: Definida como el área que se encarga del estudio de las figuras geométricas en una, dos, tres, n dimensiones, sus características y sus propiedades. Se atribuye su descubrimiento a los Griegos, quienes constantemente hacían mediciones a la tierra.

IMAGEN: Los elementos del conjunto final, que se relacionan con los elementos del conjunto inicial de una función.

INTERVALO: Aritméticamente es un subconjunto de un conjunto numérico, geométricamente es un segmento de recta delimitada por dos extremos. Algebraicamente el intervalo significa la solución de una desigualdad.

LÍNEA: Es la sucesión de puntos y de acuerdo con la forma como estos se organizan se forman dos tipos de líneas: líneas rectas y líneas curvas.

LOGARITMACIÓN: Es otra de las operaciones inversa a la potenciación y consiste en hallar el exponente, conociendo la base y la potencia.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR: De dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de mayor coeficiente numérico y de mayor grado que está contenida exactamente en cada una de ellas.

MINIMO COMUN MULTIPLO: De dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

MONOMIO: Expresión algebraica compuesta por un coeficiente (constante), una base (variable), un exponente (constante) y un signo (+ o -). El exponente identifica el grado del monomio.

PERIMETRO: Se refiere a la longitud del contorno de una figura.

POLIGONO: Son figuras planas que se forman cuando tres o mas rectas no colineales se cortan.

POLINOMIO: Expresión algebraica de dos o más monomios. Si son dos se conoce como Binomio, si son Tres se conoce como Trinomio y así sucesivamente.

POTENCIACION: Es una operación que simplifica la multiplicación, ya que se puede decir que la potenciación es una multiplicación sucesiva. Esta operación es útil para abordar temas como la suma y resta de fraccionarios y simplificación, entre otras, por lo tanto es necesario tener muy claro el concepto de potenciación.

PRODUCTORIA: Es el proceso de *Multiplicar* una secuencia de números que presentan cierta propiedad o característica.

PRODUCTOS NOTABLES: Son productos que satisfacen algunas reglas y su resultado puede ser hallado por simple inspección, sin tener que realizar la operación, lo que agiliza cualquier operación.

PUNTO: Es una señal que no tiene forma ni dimensiones pero que se ve.

RADICACION: Es una operación inversa a la potenciación y consiste en hallar la base, conociendo el exponente y la potencia.

RAZON ARITMETICA: También llamada razón por diferencia y se representa por el signo (-). Esta razón indica cuanto el antecedente excede el consecuente.

RAZON GEOMETRICA: También llamada razón por cociente y se representa por una division. Esta razón indica cuantas veces el antecedente contiene al consecuente.

RAZONES: Las razones son comparaciones entre dos cantidades, de acuerdo al tipo de comparación, se presentan dos clases de razones: razones aritméticas y razones geométricas.

SIGNOS DE AGRUPACION: Existen diferentes signos de agrupación o paréntesis que se emplean para indicar como un todo las cantidades contenidas en estos. Los más usados son: paréntesis, corchete, las llaves y el vínculo o barra.

SUMATORIA: Es el proceso de *sumar* una secuencia de números que presentan cierta característica o propiedad.

VOLUMEN: Tiene que ver con la medida del espacio ocupado por el sólido.

BIBLIOGRAFIA



Allendoerfer, Oakley, Fundamentos de Matemáticas Universitarias. Editorial Mc Graw Hill, México, 1.982

Baldor, Aurelio, Algebra. Editorial Litoprisma, Medellín, 1983.

Obonaga, Edgar y otros. Matematicas. Series para Séptimo, Octavo y Noveno Grados de Educación Básica Secundaria. Editorial PIME.

Gustafson, David. Álgebra Intermedia, Thomson Learning. México, 1997

Keddy, Bittinger, Álgebra y Trigonometría, Fondo Educativo Interamericano, 1.978.

Lipschutz, Seymour. Teoría de Conjuntos y temas afines. Editorial Mc Graw Hill, 1978.

Lovaglia, Florence, Álgebra. Editorial Harla.

Raymond, Barnett. Algebra y Trigonometría. Editorial Mc Graw Hill, 1989

Stanley, Smith, otros. Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Editorial Addison Wesley Longman.

Swokowski, Earl. Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Editorial Grupo Ibero América.

Taylor, Wade. Matemáticas Básicas. Editorial Limusa, 1.981

CUADRO RESUMEN DE FORMULAS

PORCENTAJE	1	Cantidad = base \times porcentaje $A = BP$		
	2	Diferencia porcentual = $\frac{\text{diferencia entre los dos números}}{\text{base}} \times 100$		
	3	Porcentaje de cambio = $\frac{\text{nuevo valor} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}} \times 100$		
	4	Porcentaje de error = $\frac{\text{resultado de la medición} - \text{valor conocido}}{\text{valor conocido}} \times 100$		
	5	Porcentaje de concentración del ingrediente $A = \frac{\text{cantidad de } A}{\text{cantidad total de la mezcla}} \times 100$		
	6	Porcentaje de eficiencia = $\frac{\text{potencia obtenida}}{\text{potencia suministrada}} \times 100$		
EXPONENTES	7	Definición	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$	
	8	Leyes de los exponentes	Productos	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
	9		Cocientes	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
	10		Potencias	$(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$
	11		Producto elevado a una potencia	$(xy)^a = x^a \cdot y^a$
	12		Cociente elevado a una potencia	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$
	13		Exponente cero	$x^0 = 1$
	14		Exponente negativo	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
	15	Exponentes fraccionarios	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$	
	16		$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	
RADICALES	17	Reglas de los radicales	Raíz de un producto	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
	18		Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
	19		Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

OPERACIONES CON CERO	20	Adición y sustracción		$a \pm 0 = a$
	21	Multiplicación		$a \times 0 = 0$
	22	Dividendo cero		$\frac{0}{a} = 0$
	23	División por cero		$\frac{a}{0}$ no está definida.
	24	Cero elevado a una potencia		$0^a = 0$
	25	Potencia cero		$a^0 = 1$
	26	Cero elevado a la potencia cero		0^0 no está definida
	27	Raíz de cero		$\sqrt[n]{0} = 0$
	28	Índice cero		$\sqrt[n]{a}$ no está definida.
	29	Raíz cero de cero		$\sqrt[n]{0}$ no está definida.
PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION	30	Factor común		$ab + ac + ad = a(b + c + d)$
	31	Binomios	Diferencia de dos cuadrados	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
	32		Suma de dos cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	33		Diferencia de dos cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
	34	Trinomios	Prueba de factorizabilidad	$ax^2 + bx + c$ es factorizable si $b^2 - 4ac$ es cuadrado perfecto.
	35		Coeficiente principal = 1	$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
	36		Trinomio cuadrático general	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
	37		Trinomios cuadrados perfectos	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
	38			$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	39	Factorización por agrupamiento		$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$

FRACCIONES	40	Signo de una fracción	$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{-x}{-y}$		
	41	Simplificación	$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$		
	42	Multiplicación	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$		
	43	División	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$		
	44	Adición y sustracción	Denominadores iguales	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	
	45		Denominadores diferentes	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	
REGLA DE TRES	46	En la proporción $a : b = c : d$	El producto de los medios es igual al producto de los extremos.		$ad = bc$
	47		Los extremos pueden ser intercambiados.		$d : b = c : a$
	48		Los medios pueden ser intercambiados.		$a : c = b : d$
	49		Los medios pueden ser intercambiados con los extremos.		$b : a = d : c$
	50	Media proporcional	$a : b = b : c$		
	51		Media geométrica	$b = \pm \sqrt{ac}$	
VARIACION	52	$k =$ constante de proporcionalidad	Directa	$y \propto x$ ó $y = kx$	
	53		Inversa	$y \propto \frac{1}{x}$ ó $y = \frac{k}{x}$	
	54		Conjunta	$y \propto xw$ o $y = kxw$	
LINEAS QUE SE INTERSECTAN	55	Los ángulos opuestos de dos líneas rectas que se intersectan son iguales.			
	56	Si una transversal corta dos líneas paralelas, los ángulos correspondientes son iguales, y también lo son los alternos internos.			
	57	Si varias líneas paralelas cortan dos líneas, los segmentos correspondientes son proporcionales.			

TRIÁNGULO CUALQUIERA

58

Áreas

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bh$$

59

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{donde } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

60

Suma de ángulos

$$A + B + C = 180^\circ$$

61

Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

62

Ley de los cosenos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

63

Angulo externo

$$\theta = A + B$$

64

Medianas

La mediana une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

65

Las tres medianas de un triángulo se encuentran en el baricentro.

66

Las medianas se cortan a los $\frac{2}{3}$ de su longitud, medida desde el vértice

67

La bisectriz del ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

68

Una línea paralela a un lado de un triángulo divide los otros dos lados proporcionalmente.

69

La línea que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercero y tiene la mitad de la longitud de éste.

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

70

Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro, los dos triángulos son semejantes.

71

Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales entre sí.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

72

Teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

73

Funciones trigonométricas

Seno

$$\sin A = \frac{y}{r} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

74

Coseno

$$\cos A = \frac{x}{r} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

75

Tangente

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

76

Cotangente

$$\cot A = \text{ctn } A = \frac{x}{y} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}}$$

77


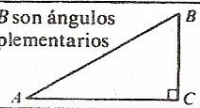

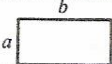


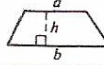
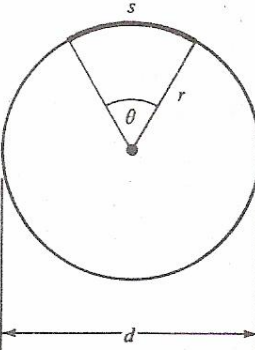
Secante

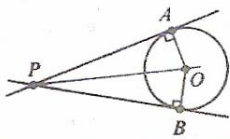
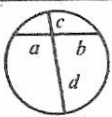
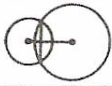
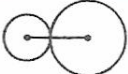
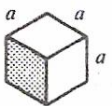
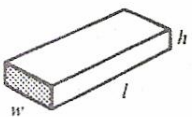
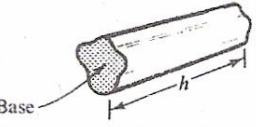
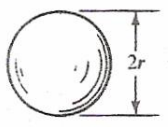

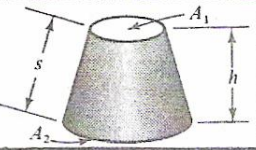
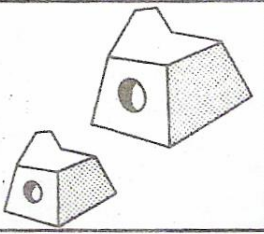
$$\sec A = \frac{r}{x} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

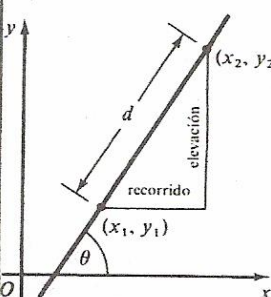
78

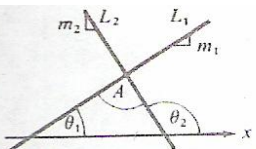
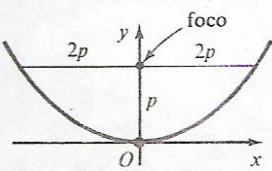
Cosecante

$$\csc A = \frac{r}{y} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS (Cont.)	79	Funciones recíprocas	$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\operatorname{csc} A} \quad \cos A = \frac{1}{\sec A} \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}$	
	80	Otras funciones trigonométricas	Exsecante	$\operatorname{exsec} A = \sec A - 1$
	81		Seno verso	$\operatorname{vers} A = 1 - \cos A$
	82		Coseno verso	$\operatorname{covers} A = 1 - \operatorname{sen} A$
	83		Haverseno o medio seno verso	$\operatorname{hav} A = \frac{1}{2} \operatorname{vers} A$
	84		En un triángulo rectángulo, la altura que tiene la hipotenusa como base forma dos triángulos rectángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo original.	
TRIÁNGULOS CONGRUENTES	85	 A y B son ángulos complementarios	Cofunciones	$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} B = \cos A & \cot B = \tan A \\ \cos B = \operatorname{sen} A & \sec B = \operatorname{csc} A \\ \tan B = \cot A & \operatorname{csc} B = \operatorname{sen} A \end{array}$
	86	Dos triángulos son congruentes si	Son iguales dos ángulos y un lado de uno de ellos a dos ángulos y el lado correspondiente del otro (ALA), (AAL).	
	87		Dos lados y el ángulo formado por ellos en uno son iguales a dos lados y el ángulo formado por ellos en el otro (LAL).	
	88		Son iguales los tres lados de uno a los tres lados del otro (LLL).	
CUADRILÁTEROS	89		Cuadrado	$\text{Area} = a^2$
	90		Rectángulo	$\text{Area} = ab$
	91		Paralelogramo: las diagonales se bisectan entre sí.	$\text{Area} = bh$
	92		Rombo: Sus diagonales se bisectan, pero sus ángulos no son rectos.	$\text{Area} = ah$
	93		Trapezio	$\text{Area} = \frac{(a+b)h}{2}$
CIRCULOS	94		Circunferencia = $2\pi r = \pi d$	
	95		Area = $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$	
	96		Angulo central θ (radianes) = $\frac{s}{r}$	
	97		Area de un sector circular = $\frac{rs}{2} = \frac{r^2\theta}{2}$	
	98		1 revolución = 2π radianes = 360°	
	99		Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.	

CIRCULOS (Cont.)	100		Tangente a un círculo	La tangente AP es perpendicular al radio OA .
	101			Tangente $AP =$ tangente BP OP bisecta el ángulo APB
	102		Cuerdas que se intersectan	$ab = cd$
	103		Si dos círculos se cortan, la línea que une sus centros es perpendicular a la cuerda común precisamente en el punto medio.	
	104		Si dos círculos son tangentes entre sí, la línea que une sus centros pasa por el punto de tangencia.	
SOLIDOS	105		Cubo	Volumen = a^3
	106			Area lateral = $6a^2$
	107		Paralelepípedo rectángulo	Volumen = lph
	108			Area lateral = $2(lp + hp + lh)$
	109		Cilindro recto o prisma	Volumen = (área de la base)(altura)
	110			Area lateral = (perímetro de la base)(altura) (sin incluir las bases)
	111		Esfera	Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$
	112			Area lateral = $4\pi r^2$
	113		Cono	Volumen = $\frac{1}{3}$ (área de la base)(altura)
	114			Area lateral = $\frac{1}{2}$ (perímetro de la base) × (altura inclinada)
	115		Tronco de cono	Volumen = $\frac{h}{3} (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$
	116			Area lateral = $\frac{s}{2} \left(\text{suma de los perímetros de la base} \right) = \frac{s}{2} (P_1 + P_2)$
SOLIDOS SEMEJANTES	117		Segmentos correspondientes de figuras planas o sólidas semejantes son proporcionales.	
	118		Áreas de figuras planas o sólidas semejantes son proporcionales al cuadrado de la razón entre dos segmentos correspondientes cualesquiera.	
	119		Volúmenes de figuras sólidas semejantes son proporcionales al cubo de la razón entre dos segmentos correspondientes cualesquiera.	

DETERMINANTES	120	Segundo orden	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$	
	121	Tercer orden	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3)$	
	122	Regla de Cramer	<p>La solución al conjunto de ecuaciones</p> $\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$ <p>es</p> $x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$	
NUMEROS COMPLEJOS	123	Potencias de i	$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \text{ etc.}$	
	124	Sumas	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	
	125	Diferencias	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	
	126	Productos	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	
	127	Cocientes	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$	
LA RECTA	128		Distancia entre dos puntos	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
	129		Pendiente m	$m = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
	130			$m = \tan(\text{ángulo de inclinación}) = \tan \theta$
	131		Ecuación de la recta	Forma general $Ax + By + C = 0$
	132			Forma pendiente-intercepto $y = mx + b$
	133			Forma punto-punto $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
	134			Forma pendiente-punto $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$
	135			Forma intercepto-intercepto $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

LA RECTA (Cont.)	136			Si L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces	$m_1 = -\frac{1}{m_2}$
	137			Angulo de intersección	$A = \theta_2 - \theta_1$
CUADRÁTICAS	138	Forma general	$ax^2 + bx + c = 0$		
	139	Ecuación cuadrática	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		
	140	Naturaleza de las raíces	Si a, b y c son reales, y	si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales y distintas si $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son reales e iguales si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas	
	141			Parábola, vértice en el origen, cóncava hacia arriba.	$x^2 = 4py$
LOGARITMOS	142	De la forma exponencial a la forma logarítmica		Si $b^x = N$, entonces $x = \log_b N$	
	143	Leyes de los logaritmos	Productos	$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$	
	144		Cocientes	$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$	
	145		Potencias	$\log_b M^p = p \log_b M$	
	146		Raíces	$\log_b \sqrt[q]{M} = \frac{1}{q} \log_b M$	
	147		Log de 1	$\log_b 1 = 0$	
	148		Log de la base	$\log_b b = 1$	
	149	Notación para los logaritmos comunes		$\log_{10} N \equiv \log N$	
	150	Notación para los logaritmos naturales		$\log_e N \equiv \ln N$, donde $e \cong 2.718$	
	151	Log de la base elevada a una potencia		$\log_b b^n = n$	
	152	Característica y mantisa		$\log(1.85 \times 10^2) = \overbrace{2}^{\text{Característica}}, \overbrace{.2672}^{\text{Mantisa}}$	
	153	Cambio de base		$\log N = \frac{\ln N}{\ln 10} = \frac{\ln N}{2.3026}$	