ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КУРСОВА РОБОТА

|  |  |
| --- | --- |
| з | дисципліни «Численні методи» |
|  | (назва дисципліни) |
| на тему: | «Інтерполяція функцій» |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Студента | | 2 | курсу, групи | | 4315 |
| напряму підготовки | | | | 6.040301 «Прикладна математика» | |
|  | | | | (шифр і назва напряму підготовки) | |
| А.С.Солодухін | | | | | |
| (ініціали та прізвище) | | | | | |
| Керівник | Полюга С.І. | | | | |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) | | | | |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Національна шкала: | |  | | |
| Кількість балів: |  | | Оцінка ECTS: |  |
|  |  | |  |  |
| Члени комісії: |  |  | |  | |
|  | (підпис) |  | | (ініціали та прізвище) | |
|  |  |  | |  | |
|  |  |  | |  | |
|  | (підпис) |  | | (ініціали та прізвище) | |
|  |  |  | |  | |
|  |  |  | |  | |
|  | (підпис) |  | | (ініціали та прізвище) | |

Запоріжжя – 2016

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Кафедра | Прикладної математики | | |
| Дисципліна | | Численні методи | |
| Напрям підготовки | | | 6.040301 «Прикладна математика» |

# ЗАВДАННЯ

**НА КУРСОВУ РОБОТУ СТУДЕНТА**

Солодухіна Олексія Станіславовича

(прізвище, ім’я та по-батькові)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. Тема роботи | «Інтерполяція функцій. Розробка програми інтерполяції функції методом Лагранжа» | | | | | |
|  | | | | | | |
|  | | | | | | |
|  | | | | | | |
|  | | | | | | |
| 2. Термін здачі студентом закінченої роботи | | | | 19.05.2016 | | |
|  | | | | | | |
| 3. Вихідні дані до роботи | | | 1. Постановка задачі. | | | |
| 2. Довідники з вищої математики та численних методів. | | | | | | |
| 3. Реалізація програмного продукту для інтерполяції функцій | | | | | | |
|  | | | | | | |
|  | | | | | | |
| 4. Зміст роботи (перелік питань, які підлягають розробці) | | | | |  | |
| 1. Методи інтерполяції | | | | | | |
| 2.Зворотнє інтерполювання | | | | | | |
| 3.Інтерполяція функцій декількох змінних | | | | | | |
|  | | | | | | |
|  | | | | | | |
| 5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) | | | | | |  |
|  | | | | | | |
|  | | | | | | |
| 6. Дата видачі завдання | | 29.02.2016 | | | | |

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Назва етапів курсової роботи** | **Термін виконання етапів роботи** | **Примітка** |
| 1. | Розробка плану роботи | 18.03.2016 | Виконано |
|  |  |  |  |
| 2. | Збір вихідних даних | 23.03.2016 | Виконано |
|  |  |  |  |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних | 01.04.2016 | Виконано |
|  | джерел |  |  |
|  |  |  |  |
| 4. | Розробка першого розділу | 07.04.2016 | Виконано |
|  |  |  |  |
| 5. | Розробка другого розділу | 14.04.2016 | Виконано |
|  |  |  |  |
| 6. | Оформлення курсової роботи | 22.04.2016 | Виконано |
|  |  |  |  |
| 7. | Захист курсової роботи | 29.04.2016 |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Студент | | | |  | | | |
|  | | | | (підпис) | | | |
|  | | | | | | | |
| Керівник роботи | | | |  | | | |  |  | |
|  | | | | (підпис) | | | |  | (ініціали та прізвище) |
|  | | | |  | | | |  |  |
|  | | | |  | | | |  |  |
| « |  |  |  | | 20 |  | р. |

# РЕФЕРАТ

Курсова робота: 24 с., 4 джерела.

Об’єкт дослідження – методи інтерполяції функцій.

Метод дослідження – практичний.

Метою роботи є вивчення основних методів інтерполяції, та реалізація програмного продукту для інтерполяції функцій многочленом Лагранжа.

У даній курсовій роботі розглядаються основні методи інтерполяції функцій ( лінійна інтерполяція, метод кінцевих різниць, многочлен Лагранжа, многочлен Ньютона), а також програмно реалізовується метод многочлена Лагранжа для функцій однієї змінної. Програмний продукт реалізован на базі JavaScript-плагина Highcharts.js

**ЗМІСТ**

[ЗАВДАННЯ 2](#_Toc449617573)

[РЕФЕРАТ 4](#_Toc449617574)

[ВСТУП 6](#_Toc449617575)

[1 Інтерполяція 7](#_Toc449617576)

[1.1 Що таке інтерполяція і навіщо вона потрібна? 7](#_Toc449617577)

[1.2 Локальна та глобальна інтерполяції 7](#_Toc449617578)

[2 СПОСОБИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ](#_Toc449617579) 8

[2.1 Інтерполяційна формула Лагранжа 8](#_Toc449617580)

[2.2 Барицентрична форма інтерполяції Лагранжа або [поліном Ньютона](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%BE%D0%BC_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0) 9](#_Toc449617581)

[3 РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ 10](#_Toc449617576)

[3.1 Опис програми та її методів 10](#_Toc449617577)

[3.2 Приклад роботи програми 10](#_Toc449617578)

[ВИСНОВКИ 13](#_Toc449617582)

[ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 14](#_Toc449617583)

# ВСТУП

У обчислювальній математиці вагому роль має інтерполяція функцій, тобто побудова по заданій функції, або по точкам (вузлам) іншої функції. Для реалізації цього процесу на практиці, вважається ефективним звести задану функцію до поліномів, або до дробно-раціональних функцій. Теорія інтерполювання використовується при побудові та дослідженні квадратурних формул для численного інтегрування, для отримання методів вирішення диференціальних та інтегральних рівнянь.

У даній курсовій роботі будуть описані методи поліномінальної інтерполяції, або інтерполяції многочленами. Конкретніше, методи многочлена Лагранжа та Ньютона, а також поверхово метод лінійної інтерполяції та метод кінцевих різниць.

Також у даній роботі буде представлено прототип програми для інтерполювання функції однієї змінної, виконаний на мові програмування JavaScript за допомогою бібліотек jQuery та Hightcharts.js.

# 1 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

## 1. 1 Що таке інтерполяція і навіщо вона потрібна?

У вступі вже було сказано, що таке інтерполяція - в [обчислювальній математиці](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) спосіб знаходження проміжних значень величини за наявним [дискретним](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C) набором відомих значень. Тобто ми оперуємо тільки із значеннями отриманими в ході деякого експерименту чи шляхом виборки. Як правило, на підставі цих наборів потрібно побудувати [функцію](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), зі значеннями якої могли б з високою точністю збігатися інші отримувані значення. Така задача називається [апроксимацією](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F) кривої. Інтерполяцією називають такий різновид апроксимації, при якій крива побудованої функції проходить точно через наявні точки даних.

Нехай маємо n значень *xi*, кожному з яких відповідає своє значення *yi*. Потрібно знайти таку функцію *F*, що:

*F(xi) = yi , I = 1, … , n*

При цьому:

* *xi* називають вузлами інтерполяції
* пари (*xi*, *yi*) називають точками даних чи базовими точками
* різницю між «сусідніми» значеннями *xi* і- *xi-1* — кроком
* функцію *F (x)* — функцією, що інтерполює чи інтерполянтом.

Тобто, інтерполяція – це процес переходу табличних даних у вигляд функції.

## 1.2 Локальна та глобальна інтерполяції

Якщо деяка функція *f(x)* інтерполюється на відрізку [a,b] за допомогою єдиного многочлена Pm(x), то таку інтерполяцію називають **глобальною.** У випадку **локальної інтерполяції** на кожному інтервалі [xi , xi+1] будується окремий інтерполяційний многочлен невисокого степені.

# 2 СПОСОБИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

## 2.1 Інтерполяційна формула Лагранжа або інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай на відрізку [*a; b*] дано (*n+1*) різних значень аргумента Інтерполяційна формула Лагранжа (Інтерполяційна формула Лагранжа) для яких відомі відповідні значення функції Інтерполяційна формула Лагранжа. Необхідно побудувати поліном, степінь якого не перевищує *n*, і який у **вузлах інтерполяції** Інтерполяційна формула Лагранжа приймає ті ж значення, що і функція  Інтерполяційна формула Лагранжа, тобтоІнтерполяційний поліном Лагранжа. **Інтерполяційна формула Лагранжа** дозволяє представити поліном Інтерполяційна формула Лагранжа у вигляді лінійної комбінації функції Інтерполяційна формула Лагранжа у **вузлах інтерполяції**:

Інтерполяційна формула Лагранжа

де Інтерполяційна формула Лагранжа — поліном степені *n*, для якого виконується умова:

Інтерполяційна формула Лагранжа

Врахувавши (1) поліном Інтерполяційна формула Лагранжа можна записати у наступному вигляді:

Інтерполяційна формула Лагранжа

де Інтерполяційна формула Лагранжа постійний коефіцієнт. Значення даного коефіцієнта можна знайти при Інтерполяційна формула Лагранжа.

Інтерполяційна формула Лагранжа

З останнього співвідношення визначаєсо Інтерполяційна формула Лагранжа і підставляємо його у формулу (2):

Інтерполяційна формула Лагранжа

Інтерполяційна формула Лагранжа

Тоді **інтерполяційний многочлен Лагранжа** буде мати наступний вигляд:

Інтерполяційна формула Лагранжа

**Приклад 1.1**

Ми бажаємо інтерполювати ƒ(x) = x2 на діапазоні 1 ≤ x ≤ 3, із відомими трьома точками:

*x0 = 1 f(x0) = 1*

*x1 = 2 f(x1) = 8*

*x2 = 3 f(x2) = 27*

Інтерполяційний многочлен такий:

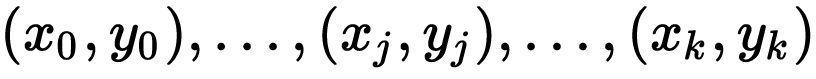
*L(x) =*

*=*

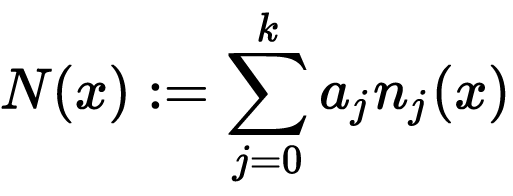
Як видно з ходу вирішення , кожен раз коли вузол *xk* змінюється, всі базові многочлени Лагранжа необхідно перерахувати. Найкращим варіантом інтерполяційного многочлена для практичних (або обчислювальних) цілей є барицентрична форма інтерполяції Лагранжа або [поліном Ньютона](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%BE%D0%BC_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0)

## 2.2 Барицентрична форма інтерполяції Лагранжа або [поліном Ньютона](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%BE%D0%BC_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0)

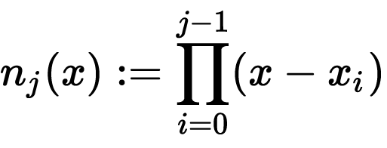
Маючи множину з k + 1 точок



де немає двох однакових xi, інтерполяційний многочлен у формі Ньютона — це [лінійна комбінація](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D1%96%D0%BD%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F) базових многочленів Ньютона

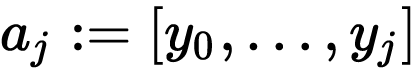


де базовий многочлен Ньютона задається так

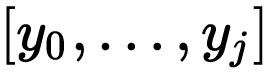


для j > 0

Коефіцієнти задаються як



Де



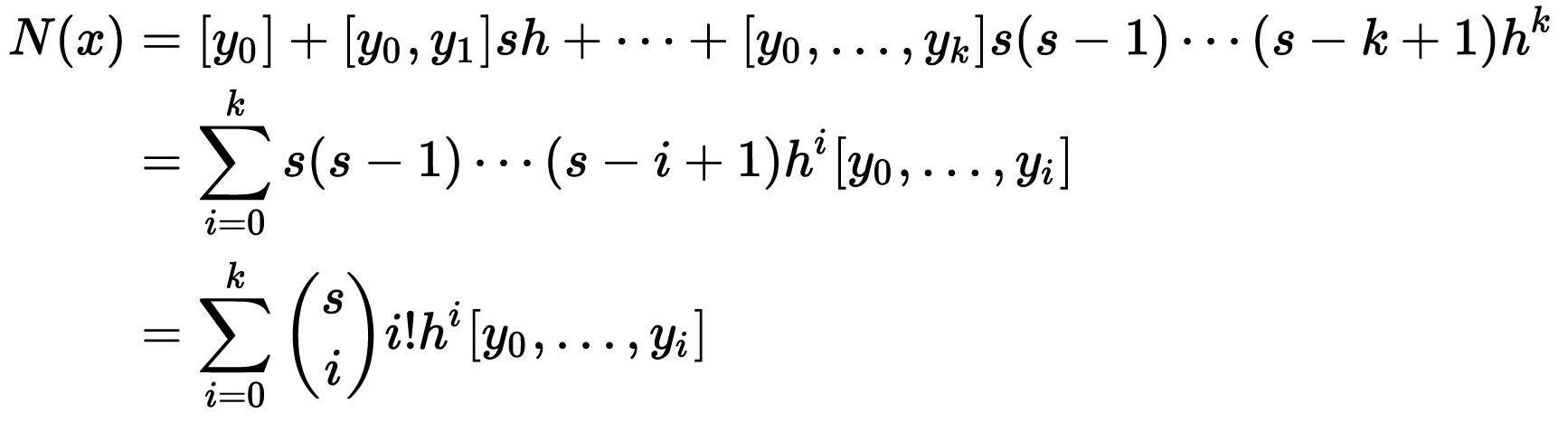
це позначення [розділеної різниці](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D0%B4%D1%96%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B0_%D1%80%D1%96%D0%B7%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8F).

Отже інтерполяційний многочлен Ньютона можна записати як



Інтерполяційний многочлен Ньютона можна представити у спрощеній формі якщо  *x0,x1,…,xk* впорядковані послідовно і з рівними проміжками. Позначаючи  *h =xi+1*  для кожного   *i = 0,1,…,k* та

*x = x0+sh* , різницю *x-xi* можна записати як *(s - i)h*. Так інтерполяційний многочлен Ньютона набуває форми:



така форма називається прямий інтерполяційний многочлен Ньютона.

# 3 РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

## 3.1 Опис програми та її методів

Програма реалізована на мові програмування JavaScript за допомогою бібліотеки jQuery та плагіну Hightcharts.js. Такий вибір було зроблено не випадково, тому що, таким чином доступ до програми мають усі користувачі інтернет ресурсів, це повністю виключає процес інсталяції програми на компьютері та дає змогу використовувати програму не залежно від характеристик ЕВМ.

Логіка програми, доволі, проста. Плагін Hightcharts.js дає змогу побудувати графік функції по її табличним значення, де точність розбиття відрізку аргументів вибирає сам користувач. Всі математичні операції та реалізація методу Лагранжа приведені у файлі math.js ( Дотаток А) процедурно. А використання цих методів та функцій приведена у файлі lagrange.js (Дотаток Б) у вигляді коду jQuery.

**3.2 Приклад роботи програми**

Побудуємо інтерполяційну функцію для *f(x) = tg(x),* що має наступні значення:

*x0 = -1.5 f(x0) = -14.1014*

*x1 = -0.75 f(x1) = -0.93*

*x2 = 0 f(x2) = 0*

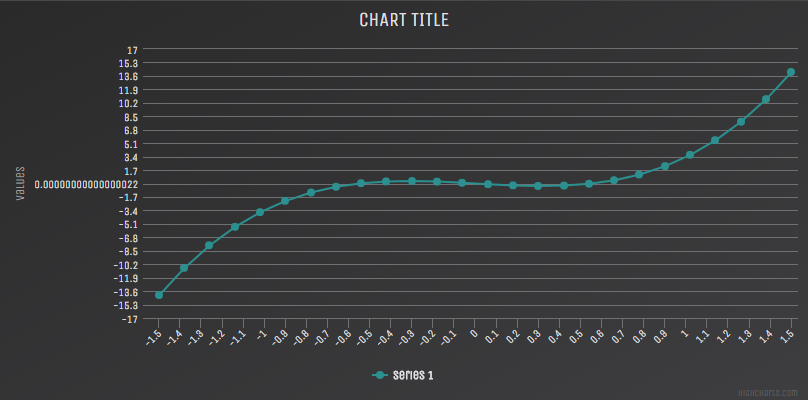
*x3 = 0.75 f(x3) = 0.93*

*x4 = 1.5 f(x4) = 14.1014*



Рис(1.1)

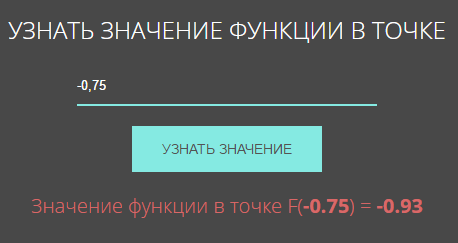
Після задання координат точок отримаємо:



Рис(1.2)

Це інтерполяційна функція для *f(x) = tg(x),*  що проходить через задані точки та має високу точність значень.

Для перевірки цього використаємо метод, що визначає значення функції в точці вже заданої нам таблично:



Рис(1.3)

Це відповідає значенню функції в точці *f(x1) = -0.93*

Отже, можна зробити висновок, що така програма точно знайде значення інтерполяційної функції.

# ВИСНОВКИ

Існує багато різних способів інтерполяції. Вибір найпридатнішого [алгоритму](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC) залежить від відповідей на питання: наскільки точний обраний метод, які затрати на його використання, наскільки гладкою є інтерполяційна функція, яку кількість точок даних вона вимагає і т.д.

Програма, що була реалізована у ході виконання курсової роботи – це лише прототип того, що можна зробити таким методом програмування, у майбутньому будуть використані також і інші численні алгоритми та методи для інтерполяції функції і декількох змінних.

# ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Численные методы, Книга 2, Методы математической физики, Калиткин Н.Н., Корякин П.В., 2013.

2. А.А. Самарский, А.В. Гулин, Численные методы

3. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации Половко А., Бутусов П.