1. Symbolen

1.1 Verzamelingen

$\in$	is element van	$\varnothing = \{ \}$	lege verzameling
$\notin$	is geen element van	$\cap$	doorsnede
$\subset$	is deelverzameling van	$\cup$	unie
$\not\subset$	is geen deelverzameling van	$\setminus$	verschil

1.2 Algemene symbolen

$\forall$	voor alle	$\Leftrightarrow$	als en slechts als (equivalentiepijl)
$:$	geldt	$\Rightarrow$	als … dan … (implicatiepijl)
$\exists$	er bestaat	∞	oneindig

1.3 Getallenleer

$=$	is gelijk aan	$\leq$	is kleiner dan of gelijk aan
$\neq$	is niet gelijk aan	$>$	is groter dan
$<$	is kleiner dan	$\geq$	is groter dan of gelijk aan

1.4 Meetkunde

xy	rechte xy	$\perp$	staat loodrecht op
$[xy$	halfrechte xy	$\overline{AB}$	verschuiving AB
$[xy]$	lijnstuk xy	$\vec{v}$	vector v
$\lvert xy \rvert$	lengte van het lijnstuk xy	$c(M,r)$	cirkel met middelpunt M en straal r
$d(A,r)$	afstand van het punt A tot de rechte r	$\cong$	is congruent met
$//$	is evenwijdig met	$\sim$	is gelijkvormig met
$\not\parallel$	snijdt		

1.5 Romeinse cijfers

1 =	I	8 =	VIII
2 =	II	9 =	IX
3 =	III	10 =	X

4 =	IV	50 =	L
5 =	V	100 =	C
6 =	VI	500 =	D
7 =	VII	1 000 =	M

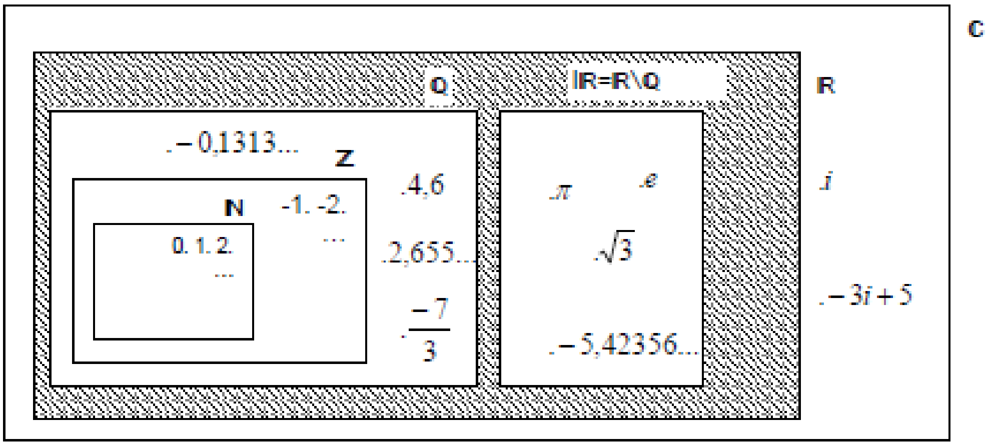
1.6 Grieks alfabet

Kleine letter	Hoofdletter	Leeswijze	Kleine letter	Hoofdletter	Leeswijze
α	A	alfa	ν	N	nu
β	B	beta	ξ	Ξ	ksi
γ	Γ	gamma	o	O	omikron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rho
ζ	Z	dzeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
ϑ	Θ	theta	υ	Υ	upsilon
ι	I	jota	φ	Φ	fi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	omega

2. Rekenen

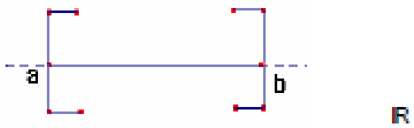
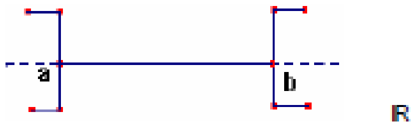
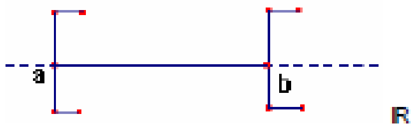
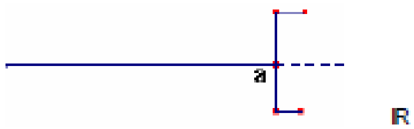
2.1 Getallenverzamelingen

2.1.1 Venndiagram



$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen
$\mathbb{Z}$ gehele getallen
$\mathbb{Q}$ rationale getallen
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ irrationale getallen
$\mathbb{R}$ reële getallen
$\mathbb{C}$ complexe getallen

2.1.2 Intervallen

Soort interval	Notatie	Grafische voorstelling	Omschrijving
Gesloten interval	$[a,b]$		$a \le x \le b$
Open interval	$]a,b[$		$a < x < b$
Halfopen interval	$[a,b[$		$a \le x < b$
Interval met oneindig verre grens	$]-\infty,a[$		$x < a$

2.3 Rekenregels

2.3.1 Haakjes

$a+(b+c-d)=a+b+c-d$	(+ voor haakjes → haakjes weglaten en tekens behouden)
$a-(b+c-d)=a-b-c+d$	(- voor haakjes → haakjes weglaten en tekens binnen de haken veranderen)
$a\,.\,(b+c-d)=ab+ac-ad$	(. voor de haakjes→ vermenigvuldig elke term met de factor buiten de haakjes)

2.3.2 Rekenen in N,Z,Q en R

Bewerking	Voorbeeld	Rekenregel
Optellen en aftrekken	2 gelijke tekens $2+6=8$ $-3-4=-7$	- bewaar teken - tel abs. waarden op
	2 verschillende tekens $-2+6=4$ $3-4=-1$	- neem teken van getal met grootste abs. waarde - trek abs. waarden af (grootste – kleinste)
Vermenigvuldigen en delen	$-2\,.\,6=-12$ $-2\,.\,(-3)\,.\,(-4)=-24$ $-22:(-11)=2$	- even aantal mintekens → + - oneven aantal mintekens → - - vermenigvuldig of deel de abs. waarden
Machtsverheffen	$2^3=8$ $(-2)^3=-8$ $(-2)^4=16$	- alle machten zijn positief behalve wanneer het grondtal negatief en de exponent oneven is.

2.3.3 Rekenen met breuken

Bewerking	Voorbeeld	Rekenregel
Breuken vereenvoudigen	$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$	Teller en noemer van de breuk delen door eenzelfde getal.
Breuken gelijknamig maken	$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}$	Teller en noemer van een breuk met eenzelfde getal vermenigvuldigen.
Optellen en aftrekken	$\frac{-3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{-9+10}{12}=\frac{1}{12}$	Maak de breuken gelijknamig. Maak de som van de tellers en behoud de noemer.
Vermenigvuldigen	$\frac{-3}{2}\,.\,\frac{5}{4}=\frac{-15}{8}$	Teller maal teller. Noemer maal noemer.
Delen	$\frac{-2}{5}:\frac{-3}{7}=\frac{-2}{5}\,.\,\frac{-7}{3}=\frac{14}{15}$	Vermenigvuldig de 1e breuk met het omgekeerde van de 2e breuk.

Machtsverheffen	$\left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$	Verhef de teller en de noemer tot de gegeven macht.
Worteltrekken	$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$	Trek de wortel uit de teller en de noemer.

2.3.4 OMZETTEN DECIMAAL GETAL ↔ RATIONAAL GETAL

- Omzetten van breuk naar decimale vorm: deel teller door noemer

  vb.: $\frac{3}{4} = 3:4 = 0,75$
- Omzetten van decimaal getal naar breuk:

  vb. $3,45 = \frac{345}{100} = \frac{69}{20}$
- Omzetten van ZRDV (Zuiver Repeterende Decimale Vorm) naar breuk: periode wordt teller, noemer bevat evenveel negens als er cijfers in de periode staan

  vb. $0,\underline{35}35... = \frac{35}{99}$
- Omzetten van GRDV (Gemengd Repeterende Decimale Vorm)naar breuk:

  vb. $q = 6,43\underline{7}7...$

$$\begin{aligned} 1000q &= 6437,77... \\ -100q &= 643,77... \\ \hline 900q &= 5794 \\ q &= \frac{5794}{900} \\ q &= \frac{2897}{450} \end{aligned}$$

2.3.5 MACHTSVERHEFFING – REKENEN MET MACHTEN

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$ $\qquad$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^m . a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a.b)^m = a^m . b^m$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{m.n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

2.3.6 WORTELTREKKING

vierkantswortels

$\sqrt{a} = \pm b \Leftrightarrow (\pm b)^2 = a$ (voorwaarde: a is positief)

$(\sqrt{a})^2 = a$

n-de machtswortels

als n even is

$\sqrt[n]{a} = \pm b \Leftrightarrow (\pm b)^n = a$ (met a ∈ $\mathbb{R}^+$)

als n oneven is

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

2.3.7 SOMMATIES

definitie

De som $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$ met p, q ∈ $\mathbb{Z}$ en p<q noteert men bondig als volgt: $\sum_{i=p}^{q} a_i$

eigenschappen

herletteren $\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{k=p}^{q} a_k$

splitsen $\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i=p}^{r} a_i + \sum_{i=r}^{q} a_i$ met p≤r<q

sommatie van een som $\sum_{i=p}^{q} (a_i + b_i) = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=p}^{q} b_i$

$\sum_{i=p}^{q} (a_i + c) = \sum_{i=p}^{q} a_i + (q - p + 1).c$

vooraanstellen $\sum_{i=p}^{q} (c.a_i) = c.\sum_{i=p}^{q} a_i$

dubbele sommatie $\sum_{i=p}^{q}\left(\sum_{j=r}^{s} a_i.b_j\right) = \left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right)\left(\sum_{j=r}^{s} b_j\right)$

verwisselbaarheid $\sum_{i=p}^{q}\left(\sum_{j=r}^{s} a_i.b_j\right) = \sum_{j=r}^{s}\left(\sum_{i=p}^{q} a_i.b_j\right)$

2.3.8 LOGARITMEN

definitie

$\forall a \in R_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in R_0^+, \forall y \in R: {}^a\log x = y \Leftrightarrow a^y = x$

soorten logaritmen

Briggse logaritme: logaritme met grondtal 10 $\log x = {}^{10}\log x$

Neperiaanse logaritme: logaritme met grondtal e ${}^e\log x = \ln x$

Eigenschappen

$\forall a \in R_0^+ \{1\}: {}^a\log a = 1$

$\forall a \in R_0^+ \{1\}: {}^a\log 1 = 0$

${}^a\log a^x = x$

$a^{{}^a\log y} = y$

$\forall a \in R_0^+ \{1\}, \forall x \in R_0^+: {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

rekenregels

$\forall a \in R_0^+ \{1\}, \forall x, y \in R_0^+: {}^a\log(x.y) = {}^a\log x + {}^a\log y$

$$\forall a \in R_0^+ \{1\}, \forall x, y \in R_0^+ : {}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log x - {}^a\log y$$

$$\forall a \in R_0^+ \{1\}, \forall x \in R_0^+, \forall n \in N : {}^a\log x^n = n.{}^a\log x$$

$$\forall a \in R_0^+ \{1\}, \forall x \in R_0^+, \forall n \in N_0 : {}^a\log \sqrt[n]{x} = \frac{{}^a\log x}{n}$$

2.3.9 REKENEN MET $\pm\infty$ EN ONBEPAALDE VORMEN

Bij het rekenen met $(+\infty)$ en $(-\infty)$ blijven de tekenregels gelden!

Optellen	**$\forall r \in \mathbb{R}$**	**en ook**	**onbepaalde vormen**
	$(+\infty)+r=+\infty$	$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(+\infty)+(-\infty)$
	$(+\infty)-r=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$(-\infty)+(+\infty)$
	$(-\infty)+r=-\infty$	$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$	$(+\infty)-(+\infty)$
	$(-\infty)-r=-\infty$	$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$	$(-\infty)-(-\infty)$
Vermenigvuldigen	**$\forall r \in \mathbb{R}_0^+$**	**en ook**	**onbepaalde vormen**
	$(+\infty).r=+\infty$	$(+\infty).(+\infty)=+\infty$	$(\pm\infty).0$
	$(-\infty).r=-\infty$	$(-\infty).(-\infty)=+\infty$	$0.(\pm\infty)$
	$\forall r \in \mathbb{R}_0^-$		
	$(+\infty).r=-\infty$	$(+\infty).(-\infty)=-\infty$	
	$(-\infty).r=+\infty$	$(-\infty).(+\infty)=-\infty$	
Delen	**$\forall r \in \mathbb{R}_0^+$**	**en ook**	**onbepaalde vormen**
	$(+\infty):r=+\infty$	$r:(+\infty)=0$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
	$(-\infty):r=-\infty$	$r:(-\infty)=0$	
	$\forall r \in \mathbb{R}_0^-$		
	$(+\infty):r=-\infty$	$\dfrac{0}{+\infty}=0$	
	$(-\infty):r=+\infty$	$\dfrac{0}{-\infty}=0$	
Machtsverheffing	**$\forall n \in \mathbb{N}$**	$(+\infty)^n=+\infty$	
	$\forall n \in \mathbb{N}$ en n even	$(-\infty)^n=+\infty$	
	$\forall n \in \mathbb{N}$ en n oneven	$(-\infty)^n=-\infty$	
Worteltrekking	**$\forall n \in \mathbb{N}$**	$\sqrt[n]{+\infty}=+\infty$	
	$\forall n \in \mathbb{N}$ en n oneven	$\sqrt[n]{-\infty}=-\infty$	
	$\forall n \in \mathbb{N}$ en n even	$\sqrt[n]{-\infty}$ bestaat niet	

2.3.10 COMPLEXE GETALLEN

Soorten complexe getallen

imaginaire eenheid	i met $i^2 = -1$
zuiver imaginair getal	$a.i$ genoteerd ai
standaardvorm complex getal	$a + bi$ met a het reële-, en bi het imaginaire gedeelte
tegengesteld complexe getal	$-(a+bi) = -a - bi$
toegevoegd complex getal	$\overline{a+bi} = a - bi$
goniometrische vorm complex getal	$a + bi = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$

Rekenen in C

Optellen

tel de reële gedeeltes bij elkaar op en tel de imaginaire gedeeltes bij elkaar op.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Vermenigvuldigen

vermenigvuldigen uitwerken op basis van de distributiviteit.

$$(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

of

de modulus = het product van de moduli van de factoren
het argument = de som van de argumenten van de factoren

$$r_1(\cos\theta_1+i.\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2+i.\sin\theta_2)=r_1.r_2.(\cos(\theta_1+\theta_2)+i.\sin(\theta_1+\theta_2))$$

Delen

teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde waarde van de noemer.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)}=\frac{(a+bi).(c-di)}{c^2+d^2}$$

of

de modulus = het quotiënt van de moduli van deeltal en deler
het argument = het verschil van de argumenten van deeltal en deler

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i.\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i.\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}.(\cos(\theta_1-\theta_2)+i.\sin(\theta_1-\theta_2))$$

Machtsverheffing

herleid het complex getal eerst naar zijn goniometrische vorm

$$(r(\cos\theta+i.\sin\theta))^n=r^n.(\cos n\theta+i.\sin n\theta)$$

$(\cos\theta+i.\sin\theta)^n=\cos n\theta+i.\sin n\theta$ (formule van De Moivre)

Worteltrekking

herleid het complex getal eerst naar zijn goniometrische vorm. Elk complex getal, verschillend van 0, heeft n verschillende n-de machtswortels in C.

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i.\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}.\left(\cos\frac{\theta+k.360°}{n}+i.\sin\frac{\theta+k.360°}{n}\right) \text{ met } k\in\mathbb{Z}$$

Vierkantsvergelijking in C

De vierkantsvergelijking $az^2+bz+c=0$ met $a\in\mathbb{C}_0$ en $b,c\in\mathbb{C}$ heeft als wortels $z_1=\frac{-b+w}{2a}$ en $z_2=\frac{-b-w}{2a}$, waarbij w een vierkantswortel is uit de discriminant $D=b^2-4ac$

2.4 Volgorde van bewerkingen

(…)	haakjes uitwerken van binnen naar buiten (meestal eerst ( ), ,dan [ ],dan { })
x^n / $\sqrt{\ }$	machtsverheffing en worteltrekken van links naar rechts
x / :	vermenigvuldigen / delen van links naar rechts
+/-	optellen / aftrekken van links naar rechts

2.5 Eigenschappen van bewerkingen

commutativiteit	getallen van plaats verwisselen
associativiteit	haakjes verplaatsen of zelfs weglaten
distributiviteit	bewerking buiten de haakjes verdelen over de termen binnen de haakjes

2.6 Metrisch stelsel

2.6.1 Tiendelige maten: lengte, massa, inhoud

km kg kl	hm hg hl	dam dag dal	m g l	dm dg dl	cm cg cl	mm mg ml	
			1	0	0		1 m = 100 cm
0,	1	2	3				123 m = 0, 123 km
			1,	7	2	3	172,3 cm = 1, 723 m
							Opm: 1 ton = 1 000 kg

Nooit komma inschrijven in de tabel
Maateenheid slaat op het laatste cijfer voor de komma
Bij herleiden: komma plaatsen rechts van de gevraagde eenheid

2.6.2 Honderddelige maten: oppervlakte- en landmaten

km²		hm² ha		dam² a		m² ca		dm²		cm²		mm²		
							1	0	0	0	0			1 m² = 10 000 cm²
			0,	0	1	2	3							123 m² = 0, 012 3 hm²
									1	7	2	3	0	172,3 cm² = 17 230 mm²

2.6.3 Duizenddelige maten: ruimtematen

km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³			
											1	0	0	0							1 m³ = 1 000 dm³
														0,	1	2	3				123 cm³ = 0, 123 dm³
												1	7	2	3	0	0				172,3 dm³ = 172 300 cm³

Opmerking: **1 dm³ = 1 l** en **1 cm³ = 1 ml**

3. Algebra

3.1 Begrippen

3.1.1 Eentermen

Een **eenterm** is een product van een getal met één of meerdere letters met een natuurlijk getal als exponent.
Gelijksoortige eentermen zijn eentermen met hetzelfde lettergedeelte.

3.1.2 Veeltermen

Een veelterm is een som van eentermen.

3.1.3 Rationale vormen

Een rationale vorm is een breuk, waarvan teller en noemer veeltermen zijn.

3.2 Rekenregels

3.2.1 Rekenen met eentermen en veeltermen

Optellen	coëfficiënten optellen, lettergedeelte behouden vb. $3a^2b + 4a^2b = 7a^2b$
Vermenigvuldigen	coëfficiënten vermenigvuldigen, exponenten van gelijke letters optellen vb. $3ab.2a^2.3bc = 18a^3b^2c$
Delen	coëfficiënten delen, exponenten van gelijke letters aftrekken vb. $24a^3b^2c : 6ab^2 = 4a^2c$
Machtsverheffen	coëfficiënten tot de macht verheffen, elke exponent met de macht vermenigvuldigen vb. $(7a^3b)^2 = 49a^6b^2$

3.2.2 Rekenen met rationale vormen

Vereenvoudigen	Ontbind teller en noemer in factoren Deel teller en noemer door de gemeenschappelijke factoren
Gelijknamig maken	Ontbind teller en noemer in factoren Vereenvoudig de rationale vormen Bepaal de nieuwe noemer = kgv Pas de tellers van de rationale vormen aan
Optellen	Vereenvoudig de rationale vormen Maak de rationale vormen gelijknamig. Maak de som van de tellers en behoud de noemer.
Vermenigvuldigen	Teller x teller en noemer x noemer. Vereenvoudig indien mogelijk.

3.2.3 Euclidische deling

$$\left(-9x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 27x + 10\right) : (3x + 3) =$$

$$\begin{array}{l|l} -9x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 27x + 10 & 3x+3 \\ \underline{9x^4 + 9x^3} & -3x^3 + 7x^2 + 5x + 4 \\ \quad 21x^3 + 36x^2 + 27x + 10 & \\ \quad \underline{-21x^3 - 21x^2} & \\ \qquad 15x^2 + 27x + 10 & \\ \qquad \underline{-15x^2 - 15x} & \\ \qquad\quad 12x + 10 & \\ \qquad\quad \underline{-12x - 12} & \\ \qquad\qquad -2 & \end{array}$$

$$f(x) = (3x+3).(-3x^3 + 7x^2 + 5x + 4) - 2$$

3.2.4 Schema van Horner

vb. $(2x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x - 6) : (x+2) =$

	2	0	-6	4	0	9	-6
a = -2		-4	8	-4	0	0	-18
	2	-4	2	0	0	9	-24

$$f(x) = (x+2).(2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 9) - 24$$

3.2.5 Reststelling

De rest van de deling van een veelterm f(x) door een tweeterm van de vorm x – a, is gelijk aan de getalwaarde van de veelterm f(x) voor x = a.

vb. $(2x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x - 6) : (x+2) =$

$$f(-2) = 2.(-2)^6 - 6.(-2)^4 + 4.(-2)^3 + 9.(-2) - 6 = -24$$

3.3 Merkwaardige producten

3.3.1 Basisformules

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b).(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a+b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2 \qquad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

3.3.2 Binomiaalformule

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

3.4 ONTBINDEN IN FACTOREN

Gemeenschappelijke factoren buiten haakjes plaatsen

werkwijze: coëfficiënt: ggd van de coëfficiënten

lettergedeelte: alle gemeenschappelijke letters met kleinste exponent

TWEETERM

$$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$$

DRIETERM

1. volkomen kwadraat

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

2. geen volkomen kwadraat

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$$

waarbij x_1 en x_2 gevonden worden met de discriminant of met 'som en product'

VIERTERM

1. volkomen derdemacht

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

2. geen volkomen derdemacht

2.1 samennemen van de termen 2 à 2

2.2 samennemen van de termen 3 à 1 ofwel 1 à 3

ZESTERM

1. tweedemacht van een drieterm

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$$

2. samennemen van de termen 2 à 2 ofwel 3 à 3

Horner kan steeds gebruikt worden om een veelterm te ontbinden in factoren

3.5 Vergelijkingen

3.5.1 Eerste graad

veranderen van lid = veranderen van bewerking

$$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$$

$$ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

aantal oplossingen

0 . x = 0 → oneindig veel oplossingen
0 . x = a → geen oplossingen
a. x = 0 → één oplossing

Hoofdeigenschap evenredigheden $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

3.5.2 Tweede graad

Methode van de discriminant

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0 \Rightarrow$ 2 oplossingen nl. $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$D = 0 \Rightarrow$ 1 oplossing nl. $x = \frac{-b}{2a}$

$D < 0 \Rightarrow$ geen oplossingen in $\mathbb{R}$

Som en product van de oplossingen van een vierkantsvergelijking:

S = $\frac{-b}{a}$ en P = $\frac{c}{a}$

Een vierkantsvergelijking waarvan je de wortels kent

noteren als $x^2 - Sx + P = 0$

Bikwadratische vergelijking oplossen

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ waarbij je $x^2 = y$ stelt zodat $ay^2 + by + c = 0$
verder oplossen als vierkantsvergelijking

3.5.4 Rationale vergelijkingen

Het oplossen van een rationale vergelijking is te herleiden tot het zoeken van de nulpunten van een rationale functie

3.5.5 Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

werkwijze om een vergelijking van de vorm $a^x = b$ op te lossen (met a,b ∈ $\mathbb{R}$)

1. neem van beide leden het logaritme $\Rightarrow$ $\log a^x = \log b$
2. pas de rekenregel $\log a^x = x.\log a$ toe $\Rightarrow$ $x.\log a = \log b$
3. bereken x $\Rightarrow$ $x = \frac{\log b}{\log a}$

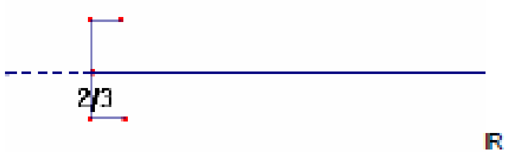
3.6 Ongelijkheden

3.6.1 Eerste graad

Balansmethode

$$3x-(4x-7)\leq 2x+5$$
$$3x-4x+7\leq 2x+5$$
$$3x-4x-2x\leq 5-7$$
$$-3x\leq -2$$
$$x\geq \frac{2}{3}$$

Opl. $\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$



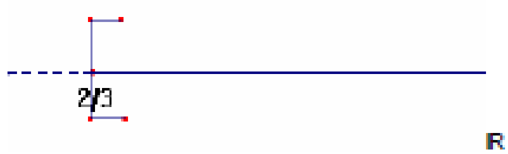
Tekenschema

$$3x-(4x-7)\leq 2x+5$$
$$3x-4x+7\leq 2x+5$$
$$3x-4x-2x+7-5\leq 0$$
$$-3x+2\leq 0$$

$$-3x+2=0$$
$$-3x=-2$$
$$x=\frac{2}{3}$$

x		$\frac{2}{3}$	
f(x)	+	0	-

Opl. $\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$



3.6.2 Tweede graad

Het oplossen van een ongelijkheid van de tweede graad steunt op het opstellen van het tekenschema van de tweedegraadsfunctie

3.6.3 Rationale ongelijkheden

Het oplossen van een rationale ongelijkheid steunt op het opstellen van het tekenschema van een rationale functie.

3.7 Oplossen van stelsels

3.7.1 Combinatiemethode

$$\begin{cases} x-4y=12 \,\big|\, .(-3) \\ 3x+2y=8 \,\big|\end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+12y=-36 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$$

$$14y = -28$$
$$y = -2$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x - 4.(-2) = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2 \\ x + 8 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Opl: $(4,-2)$

3.7.2 ELIMINATIEMETHODE OF GELIJKSTELLINGSMETHODE

$$\begin{cases} y - x = 3 & \Rightarrow \quad y = x + 3 \\ 2x + y = -3 & \Rightarrow \quad y = -2x - 3 \end{cases}$$

$$x + 3 = -2x - 3$$
$$3x = -6$$
$$x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Opl.: $(-2,1)$

3.7.3 SUBSTITUTIEMETHODE

$$\begin{cases} x + 3y = -10 & \Rightarrow \quad x = -3y - 10 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$

$$2(-3y - 10) - y = -6$$
$$-6y - 20 - y = -6$$
$$\Rightarrow \qquad -7y = -6 + 20$$
$$-7y = 14$$
$$y = -2$$

$$\begin{cases} x = -3.(-2) - 10 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Opl: $(-4,-2)$

3.7.4 Methode van Gauss-Jordan

matrixnotatie

Een stelsel S: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$

kan men met behulp van matrices noteren als $\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}}_{coëfficiëntenmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}}_{onbekendenmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}}_{bekendenmatrix}$

waarbij $\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} & b_p \end{array}\right]}_{uitgebreidematrix}$

oplosbaarheid

Voor een stelsel $S : A.X = B$ met $A \in \mathbb{R}^{pxq}$, $X \in \mathbb{R}^{qx1}$, $B \in \mathbb{R}^{px1}$ geldt:

$rgA < rg\,A\vert B$	$\Rightarrow$ S is een vals stelsel	= geen oplossingen
$rgA = rg\,A\vert B = q$	$\Rightarrow$ S is een bepaald stelsel	= juist één oplossing
$rgA = rg\,A\vert B < q$	$\Rightarrow$ S is een onbepaald stelsel	= niet-eindig aantal oplossingen

Criterium voor oplosbaarheid: een stelsel is oplosbaar a.s.a de rang van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan de rang van de uitgebreide matrix

3.8 Matrices

3.8.1 Soorten matrices

gelijke matrices	2 matrices zijn gelijk a.s.a de gelijkstandige matrixgetallen gelijk zijn.
nulmatrix	een matrix waarvan alle matrixgetallen gelijk zijn aan 0
rijmatrix	een matrix met 1 rij
kolommatrix	een matrix met 1 kolom
vierkante matrix	een matrix met evenveel rijen als kolommen
diagonaalmatrix	een vierkante matrix waarvan de matrixgetallen die niet op de hoofddiagonaal voorkomen, gelijk zijn aan 0
eenheidsmatrix	een diagonaalmatrix waarvan alle matrixgetallen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1
getransponeerde matrix	de matrix waarvan de kolommen de overeenkomstige rijen van een gegeven matrix zijn, noemt men de getransponeerde matrix van een gegeven matrix

deelmatrix	de matrix die men bekomt door in een matrix een aantal rijen of een aantal kolommen te schrappen, noemt men een deelmatrix van de matrix.

3.8.2 BEWERKINGEN MET MATRICES

Optellen in $\mathbb{R}^{pxq}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1q}+b_{1q} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2q}+b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & \cdots & a_{pq}+b_{pq} \end{bmatrix}$$

Scalair vermenigvuldigen van $\mathbb{R}$ op $\mathbb{R}$pxq

$$r.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r.a_{11} & r.a_{12} & \cdots & r.a_{1q} \\ r.a_{21} & r.a_{22} & \cdots & r.a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r.a_{p1} & r.a_{p2} & \cdots & r.a_{pq} \end{bmatrix}$$

Vermenigvuldigen van matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pj} & \cdots & c_{pq} \end{bmatrix}$$

waarbij $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj}$

3.8.3 RIJOPERATIES

lineaire combinaties van rijen

Definitie: stel $a_1, a_2, \ldots a_p \in \mathbb{R}$ en $R_1, R_2, \ldots R_p \in \mathbb{R}^{1xq}$
De rij $a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_p R_p$ noemt men een lineaire combinatie van de rijen $R_1, R_2, \ldots, R_p$

elementaire rijoperaties

- 2 rijen van plaats verwisselen	$R_i \leftrightarrow R_j$
- een rij met een getal ≠0, vermenigvuldigen	$R_i \rightarrow R_i + R_j$
- bij een rij een andere rij optellen	$R_i \rightarrow R_i + R_j$

rij operaties

een lineaire combinatie van rijen nemen	$R_i \rightarrow aR_i + bR_j + cR_k$

rij-equivalente matrices

De matrix B die men bekomt door een eindig aantal elementaire rij-operaties uit te voeren op een matrix A, noemt men rij-equivalent met A – genoteerd: –

3.8.4 CANONIEK MATRIX

Een canoniek matrix voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. de eventuele rijen met uitsluitend nullen komen onderaan
2. ook in een niet-nulrij kunnen nullen voorkomen, maar het eerste getal van een dergelijke rij dat niet 0 is, is 1
   Een dergelijke 1 noemt men een spil. De spil wordt meestal aangeduid met een cirkeltje.
3. In een kolom met een spil zijn de overige elementen gelijk aan 0.
4. De spilelementen komen trapsgewijs voor, van boven links naar onder rechts, d.w.z. de spil van de eerste rij staat links van de spil van de tweede rij, enz…

3.8.5 SPILMETHODE

Met de spilmethode kan men een matrix transformeren tot een canoniek matrix. zie voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2.6-5.3 \\ 0 & 2.2-3.(-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.(-3)-0.3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De bekomen matrix is een canonieke matrix

3.8.6 DE RANG VAN EEN MATRIX

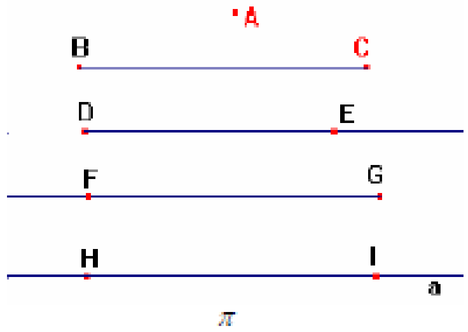
De rang van een matrix is het aantal niet-nulrijen van een canonieke matrix.
genoteerd: rg A

4. Meetkunde

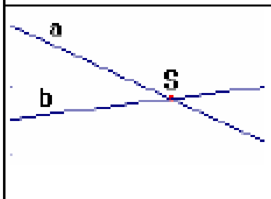
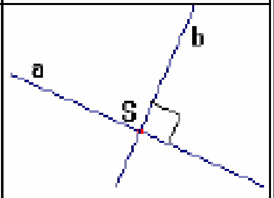
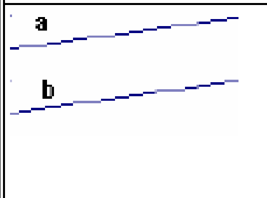
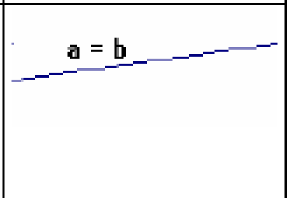
4.1 Punt – Rechte - Vlak

4.1.1 Begrip

1. punt A
2. lijnstuk $[BC]$ met lengte = $|BC|$
3. halfrechte $[DE$
4. halfrechte $FG]$
4. rechte $HI = a$
5. vlak π

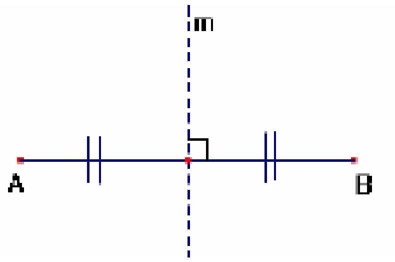


Onderlinge ligging van 2 rechten in het vlak

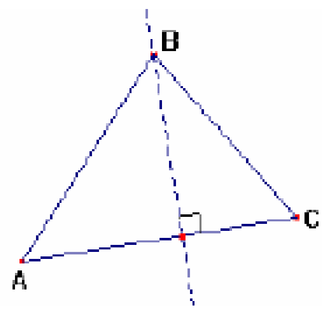
Snijdende rechten a en b		Evenwijdige rechten a en b	
Willekeurig snijdende rechten	Loodlijnen of loodrechte rechten	Disjuncte rechten	Samenvallende rechten
			
$a \nparallel b$	$a \perp b$	$a // b$	$a = b$

Bijzondere lijnen

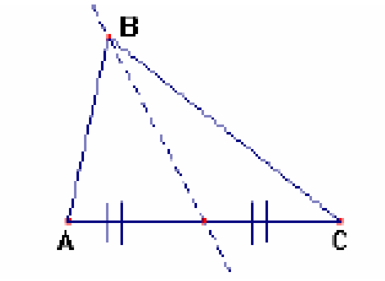
De **middelloodlijn** van een lijnstuk is een rechte die het lijnstuk loodrecht en in het midden snijdt.



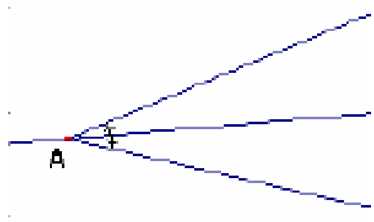
Een **hoogtelijn** in een driehoek is een loodrechte vanuit een hoekpunt op de overstaande zijde.



Een **zwaartelijn** in een driehoek is een rechte vanuit een hoekpunt naar het midden van de overstaande zijde.

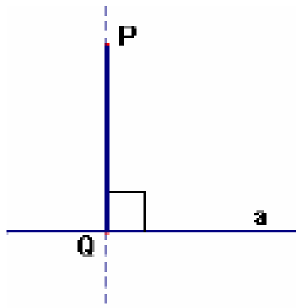


De **deellijn** of **bissectrice** van een hoek is een rechte die de hoek in 2 gelijke delen verdeelt.



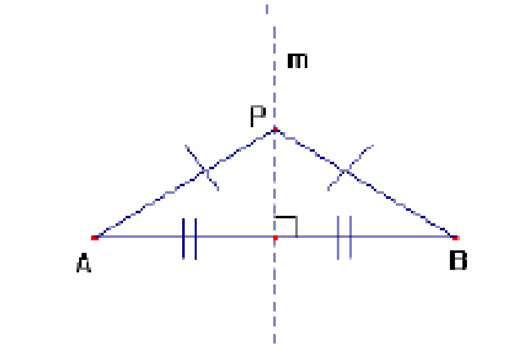
Afstand punt – rechte

De afstand van een punt tot een rechte $d(P,a) = |PQ|$ met $PQ \perp a$ en $Q \in a$



4.1.2 Eigenschappen

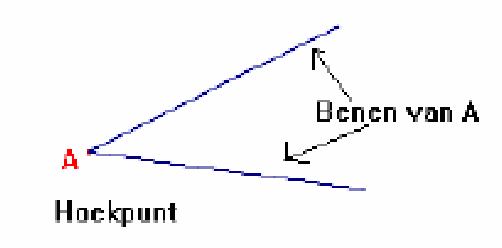
Elk punt van de middelloodlijn m van de rechte $[AB]$, ligt op gelijke afstand van A en B. $|PA| = |PB|$



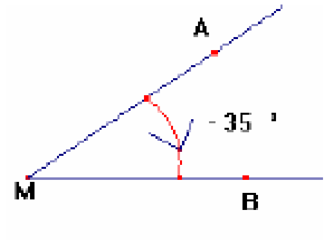
4.2 Hoeken

4.2.1 Begrip

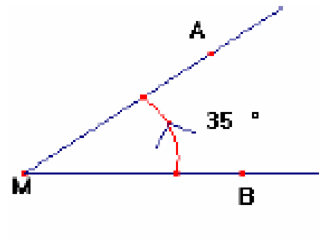
Een hoek is een figuur gevormd door twee halve rechten met dezelfde oorsprong



Georiënteerde hoek met gegeven draairichting



wijzerzin → -

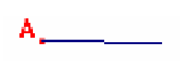
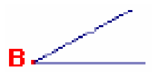
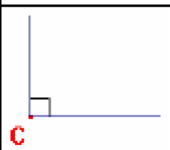
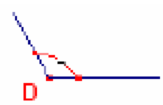
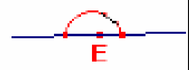


tegenwijzerzin → +

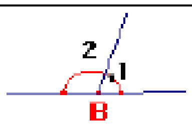
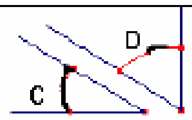
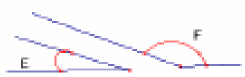
4.2.2 EIGENSCHAPPEN

Soorten hoeken

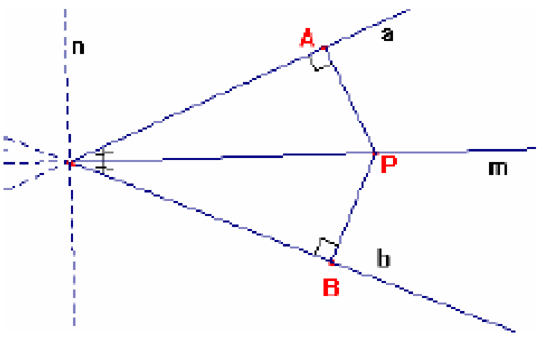
Met één hoek

Nulhoek $\hat{A} = 0°$	Scherpe hoek $0° < \hat{B} < 90°$	Rechte hoek $\hat{C} = 90°$	Stompe hoek $90° < \hat{D} < 180°$	Gestrekte hoek $\hat{E} = 180°$
 A	 B	 C	 D	 E

Met twee hoeken

Aanliggende hoeken	Nevenhoeken	Complementaire hoeken	Supplementaire hoeken
Eén been gemeenschappelijk en de anderen aan weerszijden hiervan	$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180°$	$\hat{C} + \hat{D} = 90°$	$\hat{E} + \hat{F} = 180°$
 2 1 A	 2 1 B	 D C	 E F

Eigenschappen van de bissectrice van snijdende rechten



Elk punt van de bissectrice van een hoek ligt op gelijke afstand van de benen van die hoek.

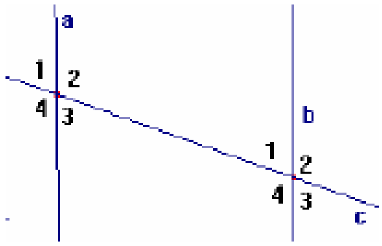
$$d(P,a) = d(P,b) \text{ of } |PA| = |PB|$$

Elk punt dat op gelijke afstand ligt van de benen van een hoek ligt op de bissectrice van die hoek.

Eigenschappen

De overstaande hoeken bij 2 snijdende rechten zijn gelijk.

Bij twee evenwijdige rechten gesneden door eenzelfde derde rechte geldt:



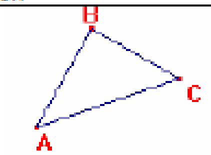
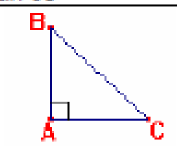
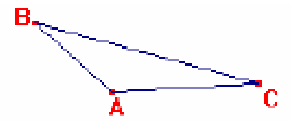
Overeenkomstige hoeken zijn gelijk
$\hat{A}_1 = \hat{B}_1; \hat{A}_2 = \hat{B}_2; \hat{A}_3 = \hat{B}_3; \hat{A}_4 = \hat{B}_4;$
Verwisselde binnenhoeken zijn gelijk
$\hat{A}_2 = \hat{B}_4; \hat{A}_3 = \hat{B}_1;$
Verwisselde buitenhoeken zijn gelijk
$\hat{A}_1 = \hat{B}_3; \hat{A}_4 = \hat{B}_2;$
Binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair
$\hat{A}_2 + \hat{B}_1 = 180°; \hat{A}_3 + \hat{B}_4 = 180°$
Buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair
$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180°; \hat{A}_4 + \hat{B}_3 = 180°$

4.3 Vlakke figuren

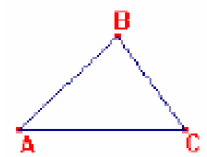
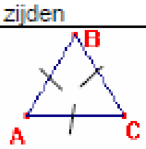
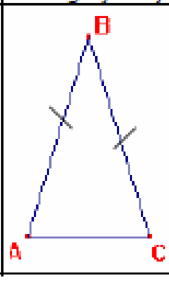
4.3.1 Driehoek

Begrip

Indeling volgens de hoeken:

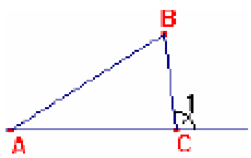
Een scherphoekige driehoek is een driehoek met scherpe hoeken	Een rechthoekige driehoek is een driehoek met één rechte hoek van 90°	Een stomphoekige driehoek is een driehoek met één hoek groter dan 90°
		

Indeling volgens de zijden:

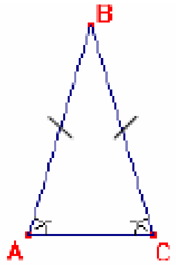
Een ongelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie ongelijke zijden	Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden	Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met (minstens) twee gelijke zijden
		

Eigenschappen

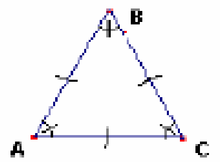
- In een driehoek is de som van de hoeken 180°
- Buitenhoek van een driehoek: $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$



- De basishoeken in een gelijkbenige driehoek zijn gelijk en scherp
- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.
- De bisssectrice van de tophoek is een symmetrieas van de driehoek.
- De bissectrice van de tophoek is ook de middelloodlijn van de basis, de zwaartelijn uit de top en de hoogtelijn uit de top op de basis.



- In een gelijkzijdige driehoek zijn de hoeken gelijk aan 60°.
- In een gelijkzijdige driehoek vallen de snijpunten van de hoogtelijnen, zwaartelijnen, middelloodlijnen en bissectrices samen..



4.3.2 VIERHOEKEN

Begrippen

- Een vierkant is een vierhoek met 4 gelijke zijden en 4 gelijke hoeken.
- Een rechthoek is een vierhoek met 4 gelijke hoeken.
- Een ruit is een vierhoek met 4 gelijke zijden.
- Een parallellogram is een vierhoek waarvan de zijden 2 aan 2 evenwijdig zijn.
- Een trapezium is een vierhoek met 1 paar evenwijdige zijden.

Eigenschappen

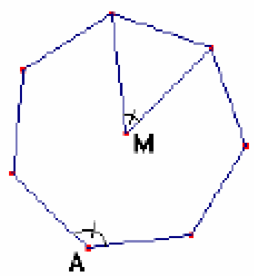
Figuur	Overstaande zijden even lang	Overstaande hoeken even groot	Diagonalen delen elkaar middendoor	Diagonalen even lang	Diagonalen loodrecht op elkaar
vierkant	X	X	X	X	X
rechthoek	X	X	X	X	
ruit	X	X	X		X
parallellogram	X	X	X		
trapezium					

4.3.3 REGELMATIGE N-HOEK

Som van de hoeken van een regelmatige n-hoek: $(n-2)180°$

Grootte van 1 hoek van een regelmatige n-hoek: $\hat{A} = \frac{(n-2)180°}{n}$

Een middelpuntshoek van een regelmatige n-hoek: $\hat{M} = \frac{360°}{n}$

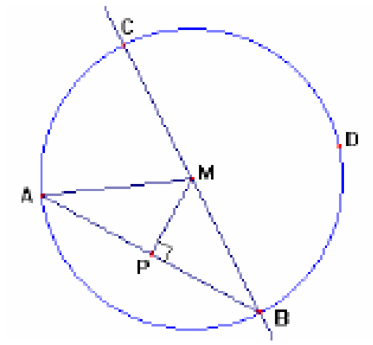


4.3.4 CIRKEL

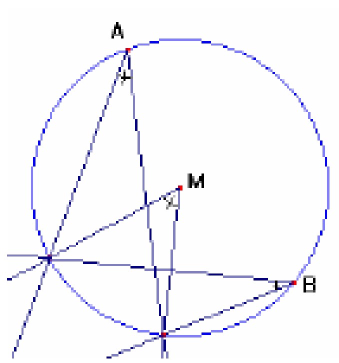
Begrippen

cirkel $c(M,r)$ De cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van alle punten die op dezelfde afstand r van het punt M liggen.

straal	$\lvert AM \rvert$	De straal van een cirkel is de afstand tussen een willekeurig punt van de cirkel en het middelpunt van de cirkel.
koorde	$[AB]$	Een koorde van een cirkel is een lijnstuk begrensd door 2 punten van die cirkel.
middellijn / diameter	BC	Een middellijn van een cirkel is een koorde die het middelpunt van de cirkel bevat
diameter	$\lvert BC \rvert$	De diameter van een cirkel is de lengte van een middellijn van die cirkel.
apothema	$[MP]$	Het apothema van een koorde is de afstand van het middelpunt van de cirkel tot die koorde
kleine / grote boog	AB / $A\hat{D}B$	Een boog van een cirkel is een deel van de cirkel begrensd door twee verschillende punten van die cirkel.
raaklijn		Een raaklijn aan een cirkel is een rechte die met de cirkel juist één punt gemeenschappelijk heeft. Het gemeenschappelijk punt noemen we het raakpunt
omtrekshoek	$\hat{B}$	Een omtrekshoek van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en waarvan beide benen de cirkel snijden
middelpuntshoek	$\hat{M}$	Een middelpuntshoek van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van de cirkel is.



Eigenschappen



- middelpuntshoek is het dubbel van de omtrekshoek op dezelfde boog. $\hat{M} = 2.\hat{A}$
- omtrekshoeken op dezelfde boog zijn even groot $\hat{A} = \hat{B}$
- omtrekshoek op een halve cirkel is 90°.
- som van de hoeken van een driehoek is 180°, van een vierhoek 360°
- overstaande hoeken zijn even groot.
- basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn even groot.

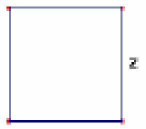
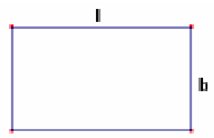
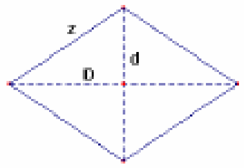
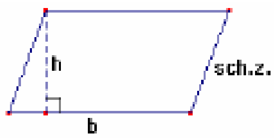
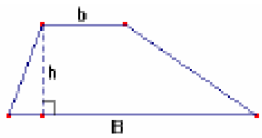
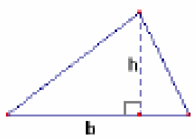
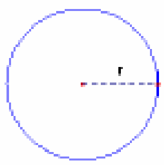
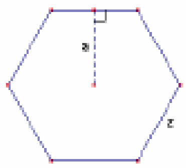
Formules

1. lengte cirkelboog $\quad 2\pi r \dfrac{\alpha}{360°}$

2. opp. cirkelsegment $A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180°} - \sin\alpha\right)$

3. opp. cirkelsector $A = \pi r^2 \frac{\alpha}{360°}$

4.3.5 Formules omtrek en oppervlakte vlakke figuren

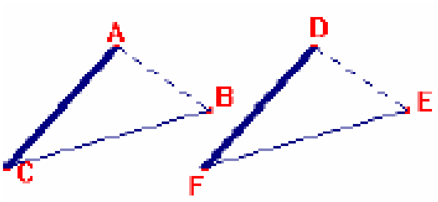
Figuur	Voorstelling	Omtrek	Oppervlakte
Vierkant		$4z$	z^2
Rechthoek		$2(l+b)$	$l.b$
Ruit		$4z$	$\frac{D.d}{2}$
Parallellogram		$2.(b + sch.z.)$	$b.h$
Trapezium		som van de zijden	$\frac{(B+b).h}{2}$
Driehoek		som van de zijden	$\frac{b.h}{2}$
Cirkel		$2.\pi.r$	$\pi.r^2$
Regelmatige veelhoek n: aantal zijden		$n.z$	$n.\frac{z.a}{2}$

4.6 Congruente figuren

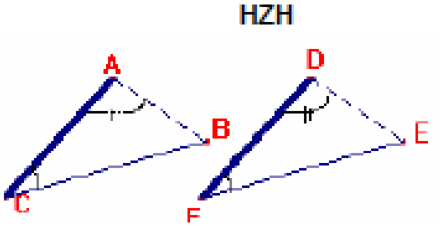
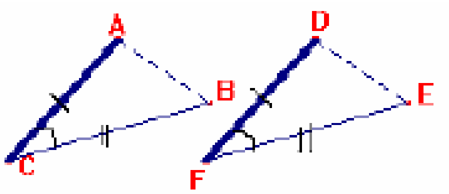
4.6.1 Congruente driehoeken

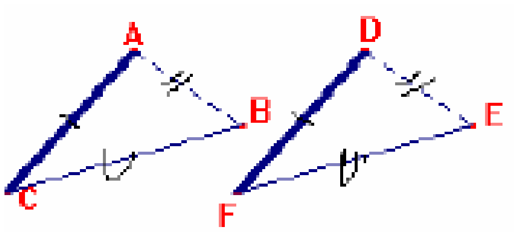
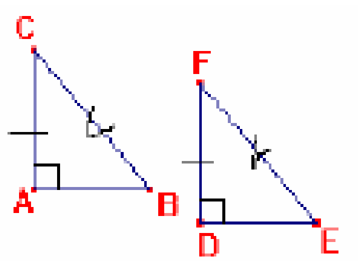
Δ ABC ≅ Δ DEF ⇔ 1. $\hat{A} = \hat{D}$ $\hat{B} = \hat{E}$ $\hat{C} = \hat{F}$

2. $|AB| = |DE|$ $|AC| = |DF|$ $|BC| = |EF|$



4.6.2 Congruentiekenmerken

HZH	ZHZ
 $\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{D} \\ \lvert AC\rvert = \lvert DF\rvert \\ \hat{C} = \hat{F}\end{array}\right\}\Delta ABC \cong \Delta DEF$	 $\left.\begin{array}{l}\lvert AC\rvert = \lvert DF\rvert \\ \hat{C} = \hat{F} \\ \lvert CB\rvert = \lvert FE\rvert\end{array}\right\}\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ZZZ	ZZ90°
 $\left.\begin{array}{l}\lvert AB\rvert = \lvert DF\rvert \\ \lvert CB\rvert = \lvert FE\rvert \\ \lvert AB\rvert = \lvert DE\rvert\end{array}\right\}\Delta ABC \cong \Delta DEF$	 $\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \lvert AC\rvert = \lvert DF\rvert \\ \lvert CB\rvert = \lvert FE\rvert\end{array}\right\}\Delta ABC \cong \Delta DEF$

4.7 Gelijkvormige figuren

4.7.1 Gelijkvormige figuren

Definitie

Bij gelijkvormige figuren zijn de overeenkomstige zijden evenredig en de overeenkomstige hoeken even groot.

Notatie

$ABCD \sim EFGH$

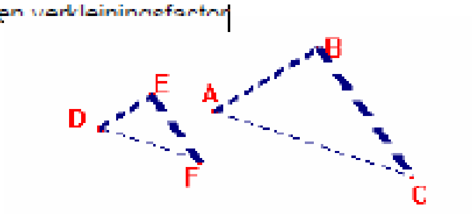
Eigenschappen

Als $ABCD \sim EFGH$ en $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|} = \frac{|CD|}{|GH|} = \frac{|AD|}{|EH|} = k$, dan is k de gelijkvormigheids-factor of schaal van vierhoek ABCD t.o.v. vierhoek EFGH;

De schaal is $\frac{\text{afmeting op tekening}}{\text{werkelijke afmeting}}$

Als k>1 $\Rightarrow$ een vergrotingsfactor ; als k<1 $\Rightarrow$een verkleiningsfactor

4.7.2 Gelijkvormige driehoeken



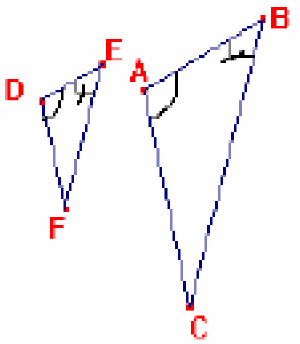
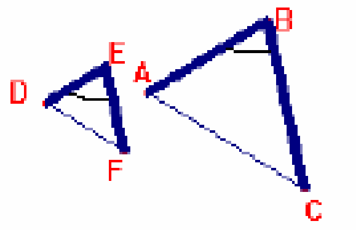
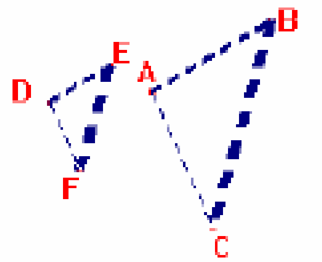
$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow$

$\hat{A} = \hat{D}$

$\hat{B} = \hat{E}$ en $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$

$\hat{C} = \hat{F}$

4.7.3 Gelijkvormigheidskenmerken

HH	$\frac{Z}{Z} H \frac{Z}{Z}$	$\frac{Z}{Z}\frac{Z}{Z}\frac{Z}{Z}$
		
$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{D}\\ \hat{B} = \hat{E}\end{array}\right\} \Delta ABC \sim \Delta DEF$	$\frac{\|AB\|}{\|DE\|} = \frac{\|BC\|}{\|EF\|}$ $\hat{B} = \hat{E}$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$	$\frac{\|AB\|}{\|DE\|} = \frac{\|BC\|}{\|EF\|} = \frac{\|AC\|}{\|DF\|}$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

6. Analytische meetkunde

6.1 Rechte

Algemene vorm van de vergelijking van een rechte

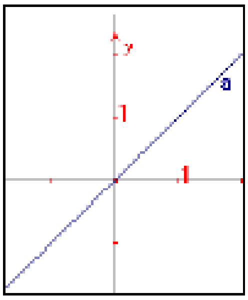
$r \equiv y = m.x + q$ waarbij m = richtingscoëfficiënt of rico
q = stuk afgesneden op de Y-as; (0,q) is het snijpunt met de Y-as

a // b $\Rightarrow$ rc (a) = rc (b)
a // x-as $\Rightarrow$ m (rico) = 0
a // y-as $\Rightarrow$ geen m (rico)

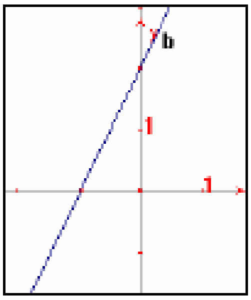
Vergelijking van een rechte opstellen

1 punt $A(x_1, y_1)$ + rico	$r \equiv y - y_1 = m.(x - x_1)$	waarbij $rico = m$
2 punten $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$	$r \equiv y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$	waarbij $rico = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
raaklijn aan $f(x)$ en door $A(x_1, y_1)$	$r \equiv y - y_1 = f'(a).(x - x_1)$	waarbij $rico = f'(a)$

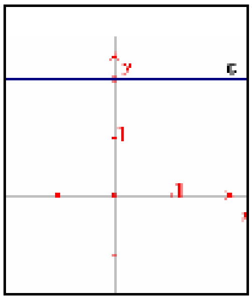
Grafische weergave van een eerstegraadsfunctie



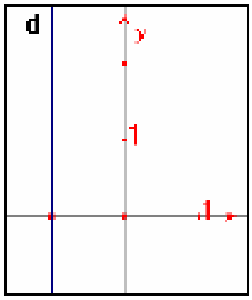
$a \equiv y = m.x$



$b \equiv y = m.x + q$



$c \equiv y = q$
$x - as \equiv y = 0$



$d \equiv x = p$
$y - as \equiv x = 0$

Afstandsformule

$A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$ $\quad |AB| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

M is het midden van een lijnstuk [AB]

$A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$ $\quad M(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

Loodrechte stand van 2 rechten

$p \perp q \Leftrightarrow$ rico p . rico $q = -1$

Afstand van een punt P tot een rechte r

$$d(P, r) = \frac{|u \cdot x_1 + v \cdot y_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

6.2 KEGELSNEDEN

6.2.1 CIRKEL

definitie: $C = \{p \in \Pi \,\|\, pm| = r\}$

canonieke vergelijking: $C(m,r): (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

6.2.2 ELLIPS

definitie: $E = \{p \in \Pi \,\|\, |pf_1| + |pf_2|\| = 2a\}$

canonieke vergelijking: $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ met } b^2 = a^2 - f^2$

ontdubbelingsformule raaklijn: $T_q = \dfrac{x_q x}{a^2} + \dfrac{y_q y}{b^2} = 1$

6.2.3 HYPERBOOL

definitie: $H = \{p \in \Pi \,\|\, |pf_1| - |pf_2|\| = 2a\}$

canonieke vergelijking: $E: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ met } b^2 = f^2 - a^2$

asymptoten: $SA_1 : y = \dfrac{b}{a}x$ en $SA_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$

ontdubbelingsformule raaklijn: $T_q = \dfrac{x_q x}{a^2} - \dfrac{y_q y}{b^2} = 1$

6.2.4 PARABOOL

definitie: $P = \{p \in \Pi \,\|\, pF| = |pf|\}$ met $f \notin F$

canonieke vergelijking: $P: y = \dfrac{1}{2a}x^2$ met $co(f) = \left(0, \dfrac{a}{2}\right)$, $F: y = -\dfrac{a}{2}$ en $a > 0$

Formularium goniometrie

- **Definities:** $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\quad \csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

  Gevolg: $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

- **Hoofdformule:** $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\quad$ **Gevolg:** $1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ $\quad 1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

- **Gelijke hoeken**

  $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$

  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$

  $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$

  $\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$

- **Tegengestelde hoeken**

  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

  $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

  $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

- **Complementaire hoeken**

  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

  $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

- **Supplementaire hoeken**

  $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

  $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

- **Antisupplementaire hoeken**

  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

  $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

  $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

- **Anticomplementaire hoeken**

  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$

  $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

- **Bijzondere waardentabel** `zie ook '04 Goniometrische cirkel.pdf'`

α	$0° = 0$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.g.	0	n.g.
$\cot\alpha$	n.g.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n.g.	0

- **Basisvergelijkingen**

  $\sin x = a \Leftrightarrow x = x_1 + 2k\pi$ of $x = \pi - x_1 + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

  $\cos x = a \Leftrightarrow x = x_1 + 2k\pi$ of $x = -x_1 + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

  $\tan x = a \Leftrightarrow x = x_1 + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

- **Tekenen van de grafiek van een algemene sinusfunctie**

Algemeen

In het voorschrift $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ bepalen de coëfficiënten a, b, c en d de kenmerken van de grafiek:

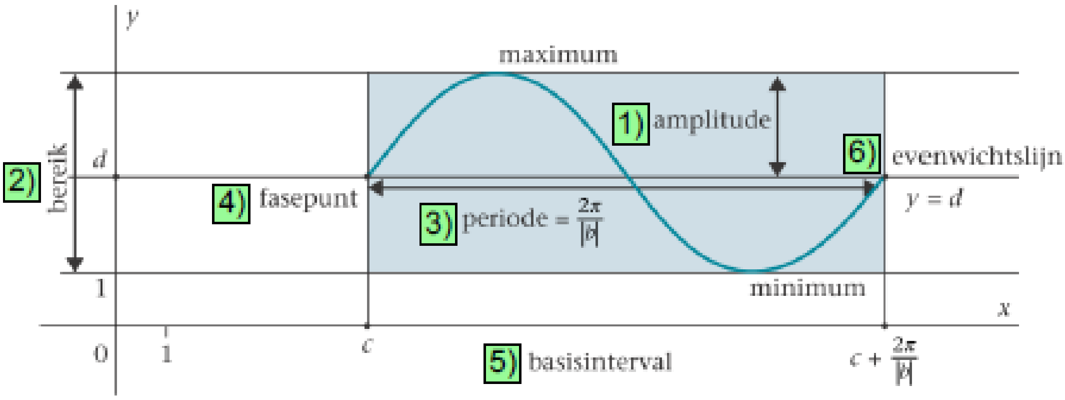
- De amplitude van f is $|a|$,
- Het bereik van f is $[-|a|+d, |a|+d]$,
- De periode van f is $\frac{2\pi}{|b|}$,
- Het fasepunt van de grafiek van f is het punt met coördinaat (c, d),
- De evenwichtslijn van de grafiek van f is de rechte met vergelijking y = d.

Grafiek van de algemene sinusfunctie

Omdat een algemene sinusfunctie een periodieke functie is, volstaat het de grafiek ervan te tekenen in een interval met een lengte van één periode. We noemen dit het **basisinterval** van deze functie. Het basisinterval begint bij het fasepunt en eindigt één periode verder. Het basisinterval is dus $[c, c+p]$.

Door het basisinterval in vier gelijke delen te verdelen, vind je de snijpunten van de grafiek met de evenwichtslijn en ook waar je het maximum en het minimum in het basisinterval moet tekenen.

Als in het voorschrift $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ de b negatief is, schuif je het minteken door naar a. Zo werk je met een positieve waarde voor b.



Indien a negatief is, moet je de grafiek nog spiegelen om de evenwichtslijn.

- **Som- en verschilformules**

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

- **Formules voor de dubbele hoek**

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha \quad\Rightarrow\quad 1-\cos 2\alpha=2\cdot\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1 \quad\Rightarrow\quad 1+\cos 2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- **Formules van Simpson : eerste vorm**

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

- **Formules van Simpson : tweede vorm**

$$2\cdot\sin x\cdot\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$$

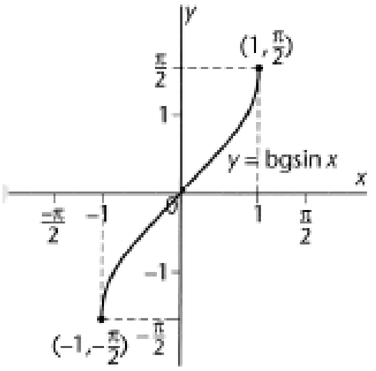
$$2\cdot\cos x\cdot\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$$

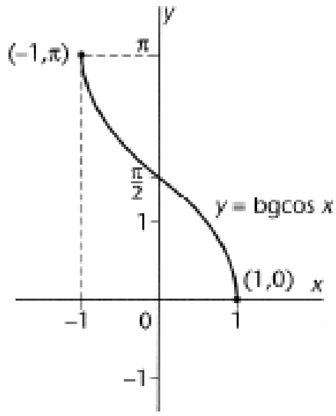
$$2\cdot\cos x\cdot\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$-2\cdot\sin x\cdot\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$$

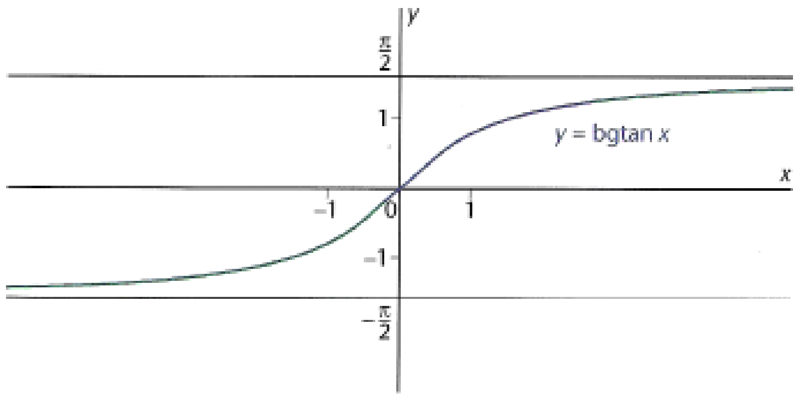
• Cyclometrische functies

$$\text{Bgsin} = \left(\sin \mid \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)^{-1} \qquad \text{Bgcos} = \left(\cos \mid [0, \pi]\right)^{-1} \qquad \text{Bgtan} = \left(\tan \mid \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)^{-1}$$





x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
bgsin x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
bgcos x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



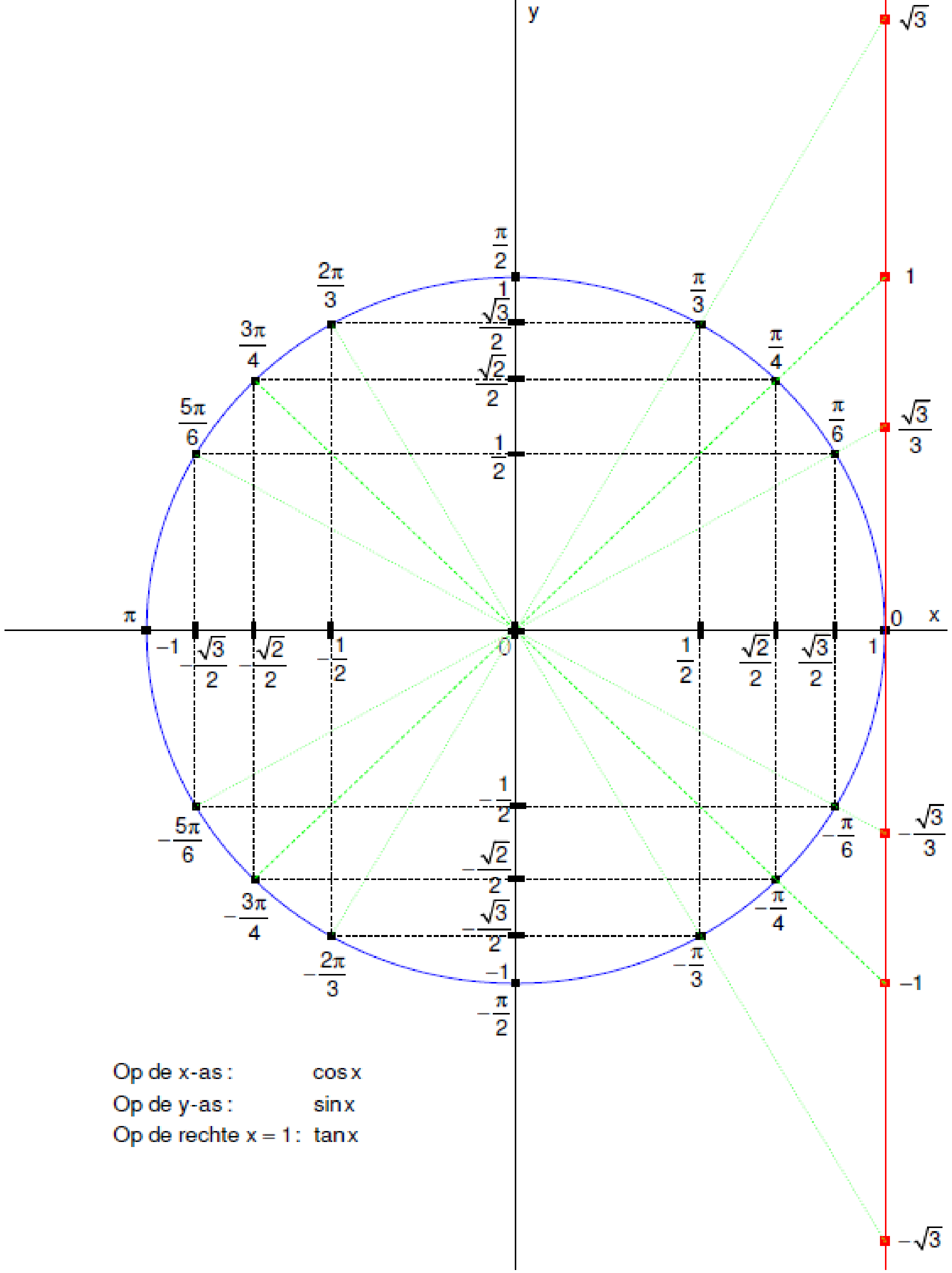
x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
bgtan x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$$\forall\, x \in [-1, 1] : \text{Bgsin}\, x = y \Leftrightarrow \sin y = x \text{ en } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

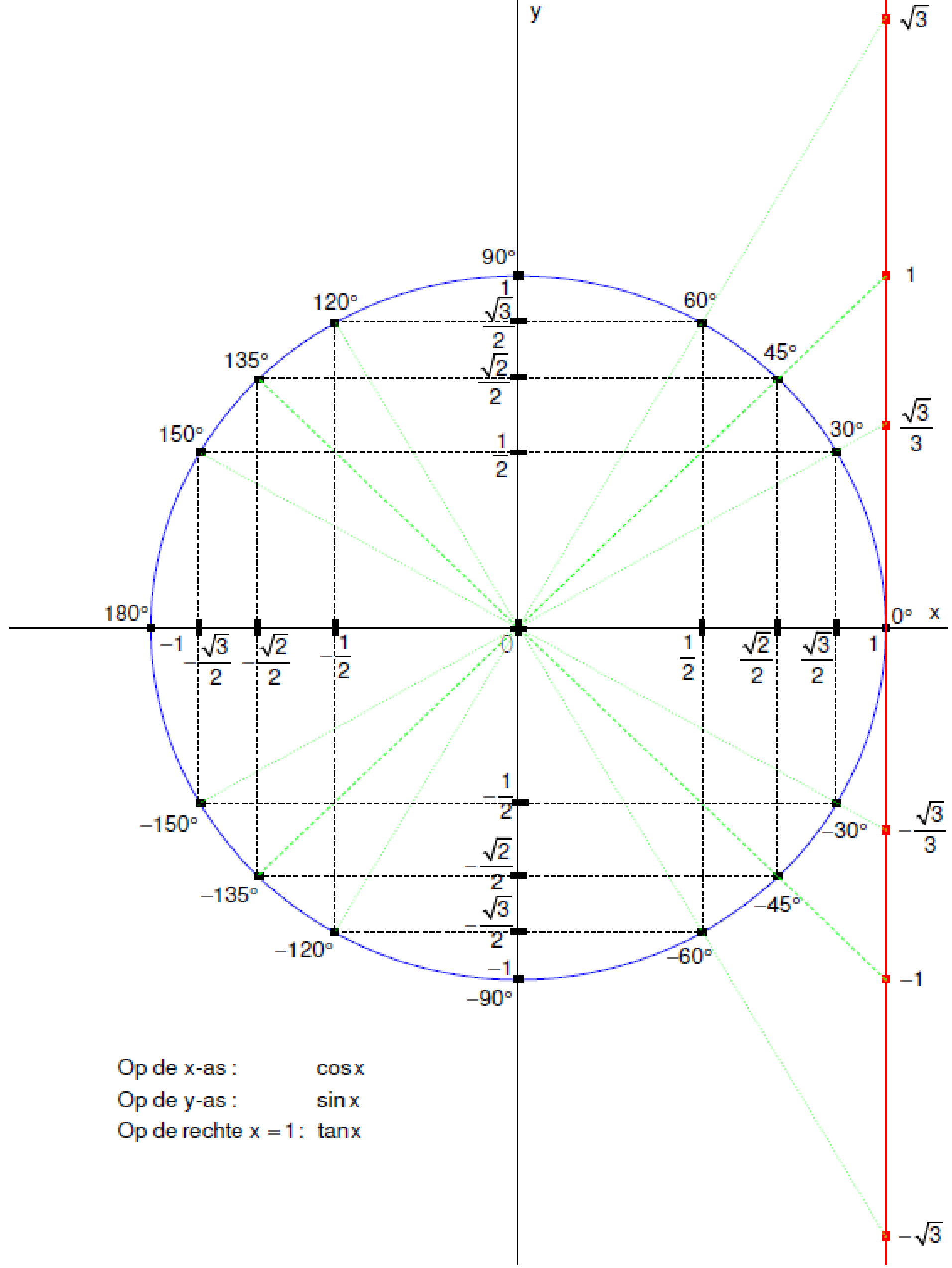
$$\forall\, x \in [-1, 1] : \text{Bgcos}\, x = y \Leftrightarrow \cos y = x \text{ en } y \in [0, \pi]$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \text{Bgtan}\, x = y \Leftrightarrow \tan y = x \text{ en } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Goniometrische cirkel (radialen)



Goniometrische cirkel (graden)



9.2 Limietberekening

9.2.1 Limietberekening veeltermfuncties

x→a De limiet is gelijk aan de functiewaarde

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

x→± ∞ De limiet is gelijk aan de limiet van de hoogstegraadsterm

$$\lim_{x \to \infty} a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \ldots + a_n = \lim_{x \to \infty} a_1 x^n$$

9.2.2 Limietberekening rationalefuncties

x→a

A voorwaarde: $N(a) \neq 0$

werkwijze: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{T(x)}{N(x)} = \dfrac{T(a)}{N(a)}$

B voorwaarde: $N(a) = 0$ en $T(a) \neq 0$

werkwijze: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{T(x)}{N(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{T(x)}{q(x)} . \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)}$

De factor die het nulpunt in de noemer oplevert dient afgezonderd te worden in een afzonderlijke limiet. Vervolgens linker en rechter limiet berekenen.

C voorwaarde: $N(a) = 0$ en $T(a) = 0$

werkwijze: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{T(x)}{N(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{q_1(x).(x-a)}{q_2(x).(x-a)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{q_1(x)}{q_2(x)}$

Ontbind de teller en de noemer in factoren. Schrap in de teller en noemer de factor die het nulpunt oplevert. Bereken opnieuw de limiet.

x→± ∞ De limiet is gelijk aan de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen van de teller en de noemer

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + b_3 x^{m-2} + \ldots + b_m} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_1 x^n}{b_1 x^m}$$

9.2.3 Limietberekening irrationale functies

x→a

A voorwaarde: $a \in \text{dom } f$

werkwijze: $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

B voorwaarde: $a \notin \text{dom } f$

werkwijze: vermenigvuldig $T(x)$ en $N(x)$ met de toegevoegde waarde van $T(x)$ en/of $N(x)$

x→± ∞ voorafgaande opmerking: $\sqrt{x^2}$ is steeds een positief getal

A voorwaarde: $f(x)$ is een breuk $\dfrac{T(x)}{N(x)}$

werkwijze: x afzonderen in $T(x)$ en $N(x)$, waarna te vereenvoudigen

B voorwaarde: $f(x)$ is geen breuk

werkwijze: ofwel uitwerken ofwel $T(x)$ en $N(x)$ vermenigvuldigen met de toegevoegde waarde van $T(x)$ en/of $N(x)$

9.2.5 REGEL VAN DE L'HOPITAL

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

9.3 RIJEN EN REEKSEN

9.3.1 REKENKUNDIGE RIJEN

Een rekenkundige rij is een rij getallen waarbij elk getal vanaf het tweede, gelijk is aan het voorgaande vermeerderd met een zelfde constant reëel getal.

In een rekenkundige rij is elke term vanaf de tweede, gelijk aan het rekenkundig gemiddelde van de voorgaande en de volgende term.

$$t_n = t_1 + (n-1).v \qquad t_n = \frac{t_{n-1} + t_{n+1}}{2}$$

$$s_n = n.\frac{t_1 + t_n}{2} \qquad s_n = n.t_1 + \frac{n.(n-1)}{2}.v$$

9.3.2 MEETKUNDIGE RIJEN

Een meetkundige rij is een rij getallen waarbij elk getal vanaf het tweede, gelijk is aan het voorgaande vermenigvuldigd met een zelfde constant reëel getal.

In een meetkundige rij met strikt positieve termen is elke term vanaf de tweede, gelijk aan het meetkundig gemiddelde van de voorgaande en de volgende term.

$$t_n = t_1.r^{n-1} \qquad t_n = \sqrt{t_{n-1}.t_{n+1}}$$

$$s_n = t_1.\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

9.3.3 DE HARMONISCHE RIJ

In een harmonische rij is elke term vanaf de tweede, gelijk aan het harmonisch gemiddelde van de voorgaande en de volgende term.

$$\frac{2}{t_n} = \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n+1}}$$

9.3.4 CONVERGENTIE – DIVERGENTIE

Een rij convergeert naar $b \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} t_n = b \in \mathbb{R}$

Een rij is divergeert naar $\pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} t_n = \pm\infty$

Een meetkundige reeks met reden, gelegen tussen 0 en 1, is convergent en convergeert naar $\frac{t_1}{1-r}$.

9.4 ASYMPTOTEN

9.4.1 VERTICALE ASYMPTOTEN

Een verticale asymptoot van de grafiek van een rationale functie f is een rechte met vergelijking x=a, waarbij a een nulpunt van de noemer is en $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty$ en $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$

9.4.2 HORIZONTALE ASYMPTOTEN

Een horizontale asymptoot van de grafiek van een rationale functie f is een rechte met vergelijking y=b, waarbij $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ en $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

9.4.3 SCHUINE ASYMPTOTEN BIJ RATIONALE FUNCTIES

Een schuine asymptoot van de grafiek met vergelijking $y = f(x)$ is een rechte met vergelijking $y = ax + b$ met $a \neq 0$.

Je vindt $ax + b$ door de teller van $f(x)$ te delen door de noemer van $f(x)$ met de methode van de Euclidische deling. $ax + b$ is het quotiënt van de deling.

9.4.4 SCHUINE ASYMPTOTEN BIJ IRRATIONALE FUNCTIES

Een schuine asymptoot van de grafiek met vergelijking $y = f(x)$ is een rechte met vergelijking $y = ax + b$ met $a \neq 0$, waarbij $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ en $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$

FORMULARIUM AFGELEIDEN

$D(f+g)=Df+Dg$	$D(c\cdot f)=c\cdot Df$ (c is een constante)
$D(f\cdot g)=Df\cdot g+f\cdot Dg$	$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{Df\cdot g-f\cdot Dg}{g^2}$
$D(x^n)=n\cdot x^{n-1}$	$D(f(x))^n=n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot Df(x)$
$D\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}$	$D\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{-1}{(f(x))^2}\cdot Df(x)$
$D(\sqrt{x})=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$D(\sqrt{f(x)})=\frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot Df(x)$
$D(\sin x)=\cos x$	$D(\sin f(x))=\cos f(x)\cdot Df(x)$
$D(\cos x)=-\sin x$	$D(\cos f(x))=-\sin f(x)\cdot Df(x)$
$D(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$D(\tan f(x))=\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot Df(x)$
$D(\cot x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$	$D(\cot f(x))=\frac{-1}{\sin^2 f(x)}\cdot Df(x)$
$D(\text{Bgsin}\,x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\left[\text{Bgsin}\,f(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot Df(x)$
$D(\text{Bgcos}\,x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\left[\text{Bgcos}\,f(x)\right]=\frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot Df(x)$
$D(\text{Bgtan}\,x)=\frac{1}{1+x^2}$	$D\left[\text{Bgtan}\,f(x)\right]=\frac{1}{1+[f(x)]^2}\cdot Df(x)$
$D(\text{Bgcot}\,x)=\frac{-1}{1+x^2}$	$D\left[\text{Bgcot}\,f(x)\right]=\frac{-1}{1+[f(x)]^2}\cdot Df(x)$
$D(e^x)=e^x$	$D(e^{f(x)})=e^{f(x)}\cdot Df(x)$
$D(a^x)=a^x\cdot\ln a$	$D(a^{f(x)})=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot Df(x)$
$D(\ln x)=\frac{1}{x}$	$D\left[\ln(f(x))\right]=\frac{1}{f(x)}\cdot Df(x)$
$D\left({}^a\log x\right)=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$D\left[{}^a\log(f(x))\right]=\frac{1}{f(x)\cdot\ln a}\cdot Df(x)$

FORMULARIUM VOOR INTEGRALEN

1 $\int dx = x + c$

2 $\int df(x) = f(x) + c$

3 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

4 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

9 $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10 $\int \cos x dx = \sin x + c$

11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

13 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

14 $\int e^x dx = e^x + c$

15 $\int \frac{dx}{1+x^2} = Bg \tan x + c$

16 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Bg \sin x + c$

18 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

19 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$

20 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c$

21 $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + c$

Reeksontwikkelingen

Formule van Taylor, vorm 1

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3+......+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},\qquad c\in\left]a,b\right[$$

Formule van Taylor, vorm 2

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+......+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1},\qquad c\in\left]a,a+h\right[$$

Reeks van Taylor

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+......+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+...$$

Reeks van McLaurin

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+......+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+...$$

Enkele belangrijke McLaurinreeksen

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4+...$$

convergentie : $m<-1\Rightarrow x\in\left]-1,+1\right[\quad,\quad -1<m<0\Rightarrow x\in\left]-1,+1\right]\quad,\quad m>0\Rightarrow x\in\left[-1,+1\right]$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+...\quad x\in\left]-1,+1\right[$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...\quad x\in\left]-1,+1\right]$$

$$\text{Bgsin}\,x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+...\,x\in\left]-1,+1\right[$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+...\quad x\in\left]-1,+1\right[$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\text{tg}\,x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+...\quad x\in\left]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}\right[$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7+...\quad x\in\left]-1,+1\right[$$

$$\text{Bgtg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-...\quad x\in\left[-1,+1\right]$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5-...\quad x\in\left[-1,+1\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4-...\quad x\in\left]-1,+1\right]$$

10. Statistiek

10.1 Telproblemen

10.1.1 Telschema's

Vermenigvuldigingsprincipe

Bestaat een taak t uit k deeltaken $t_1, t_2, \ldots, t_k$, waarbij er
n_1 mogelijkheden zijn voor t_1,
n_2 mogelijkheden zijn voor t_2,
...
n_k mogelijkheden zijn voor t_k,
dan kan taak t uitgevoerd worden op $n_1.n_2. \ldots . n_k$ verschillende manieren

Schema's

Boomdiagram - Kwartierstaat – Venndiagram – Wegschema

10.1.2 Groeperingsmethodes

Variaties

Een variatie van p elementen uit n elementen $(p \leq n)$ is een geordend *p-tal* van p *verschillende* elementen gekozen uit een gegeven verzameling van n elementen.

Het aantal variaties is $V_n^p = n.(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Permutaties

Een permutatie van n elementen is een variatie van n uit n elementen.

Het aantal permutaties is $P_n = n.(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$

Combinaties

Een combinatie van p elementen uit n elementen $(p \leq n)$ is een deelverzameling van p elementen gekozen uit een gegeven verzameling van n elementen. De volgorde is dus niet van belang.

Het aan tal combinaties is $C_n^p = \dfrac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p.(p-1)(p-2)\ldots 2.1} = \dfrac{n!}{p!.(n-p)!}$

Herhalingsvariatie

Een herhalingspermutatie van p elementen uit n elementen is een geordend *p-tal* van elementen gekozen uit de gegeven verzameling van deze n elementen.

Het aantal herhalingsvariaties is $\overline{V}_n^p = n^p$

Herhalingspermutatie

Een herhalingspermutatie uit n elementen is een permutatie waarbij een aantal elementen meer dan eens kan voorkomen.

Het aantal herhalingspermutaties is $\overline{P}_n^{\alpha,\beta,\chi} = \dfrac{n!}{\alpha!.\beta!.\chi!}$

Herhalingscombinatie

Het aantal herhalingscombinaties is $\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$

Samenvatting

Groeperingsvormen	herhaling mogelijk	geen herhaling mogelijk
ordening	herhalingsvariatie $\overline{V}_n^p = n^p$ herhalingspermutatie $\overline{P}_n^{\alpha,\beta,\chi} = \dfrac{n!}{\alpha!.\beta!.\chi!}$	variatie $V_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ permutatie $P_n = n!$
geen ordening / geen volgorde	herhalingscombinatie $\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$	combinatie $C_n^p = \dfrac{n!}{p!.(n-p)!}$

10.2 Kansberekening

10.2.1 Belangrijke kanswetten

regel van Laplace $P(A) = \dfrac{\# A}{\# U}$

zekere gebeurtenis $P(U) = 1$

onmogelijke gebeurtenis $P(\varnothing) = 0$

complementregel $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1$

formule van Boole $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

uitgebreide formule van Boole
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

wetten van De Morgan
$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

10.2.2 Samengestelde experimenten

productregel (onafh.gebeurtenissen) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

10.2.3 Voorwaardelijke kansberekening

productregel (afh.gebeurtenissen)
$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B|A).P(C|A \cap B)$$

regel van Bayes $P(A|B) = \dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$

10.3 Beschrijvende Statistiek

Gemiddelde ($\overline{x}$) Som van alle waarnemingen gedeeld door het aantal waarnemingen.

$$\bar{x} = \frac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + \ldots + n_k.x_k}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i.x_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} f_i.x_i \quad (f_i = \text{rel.freq.})$$

Modus (Mo) Waarneming die het vaakst voorkomt. Zijn er meerdere dan is er geen modus.

Mediaan (Me) De middelste waarneming wanneer je alle waarnemingen van klein naar groot rangschikt.

Kwartielen (Q…) 1^e kwartiel (Q1) = mediaan van de eerste helft van de waarnemingen.
2^e kwartiel (Q2) = mediaan.
3^e kwartiel (Q3) = mediaan van de tweede helft van de waarnemingen.

Kwartielafstand (Q) Maat voor de spreiding rond de mediaan. Verschil tussen derde en eerste kwartiel.

Variantie (σ^2) De variantie (t.o.v. de populatie) is het gemiddelde van de kwadratische afwijkingen van de resultaten t.o.v. het gemiddelde

$$\sigma^2 = \frac{n_1.(x_1 - \bar{x})^2 + n_2.(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k.(x_k - \bar{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i.(x_i - \bar{x})^2$$

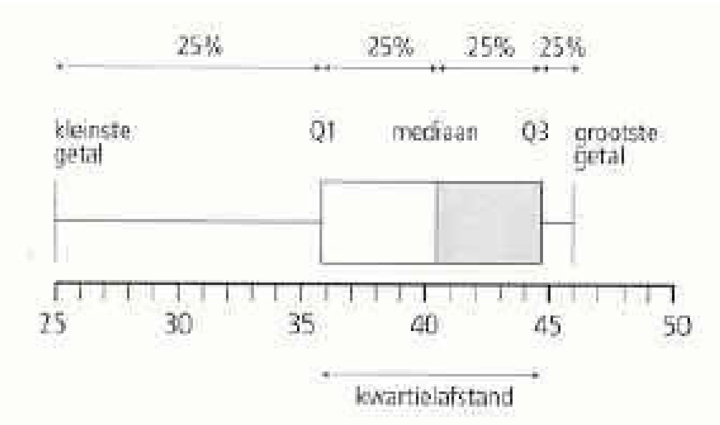
Variatiebreedte (R) Verschil tussen grootste en kleinste waarneming.

Standaarddeviatie (s) Ook wel standaardafwijking genoemd. Spreidingsmaat voor het gemiddelde. Bij een kleine uitkomst: de waarnemingen zijn weinig gespreid. Ze liggen dicht bij het gemiddelde.

De standaarddeviatie is ook de vierkantswortel uit de variantie

$$s = \sqrt{\sigma^2}$$

Boxplot



10.4 Verklarende Statistiek

10.4.1 Stochastische variabelen

Gemiddelde $E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + \ldots + x_k.p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i.p_i$

Variantie $Var(X) = (x_1 - E(X))^2.p_1 + (x_2 - E(X))^2.p_2 + \ldots + (x_k - E(X))^2.p_k$