

# 高数 7月1日

## 二重积分

注意要求上限大于下限

有估值定理估计最大最小值

二重积分转累次积分直角坐标(扫描线法)

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dx dy$$

积不出来可以考虑交换积分次序

极坐标 (有  $x^2 + y^2$  时候重点考虑)

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_0(\theta)}^{r_1(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

关注函数关于定义域的对称性的函数值的奇偶性&轮换对称性 能简化计算

$$\text{结论 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

一般变量替换公式 (一一对应映射)

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \text{ 为雅克比行列式}$$

椭圆变换(广义极坐标变换)

$$x = a \cos \theta \quad y = b \sin \theta \quad \text{雅克比行列式为 } ab$$

## 三重积分

投影法(分为一个个柱, 适合凸顶的)

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iint dx dy \int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

截面法(分为一层一层, 适合平顶的)

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint f(x, y, z) dx dy$$

转换为柱坐标

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{雅克比行列式} \frac{D(x, y, z)}{D(r \cos \theta, r \sin \theta, z)} = r$$

转换为球坐标

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \text{其中} \theta \text{表示水平偏转角} \quad \varphi \text{表示俯仰角}$$

$$\text{雅克比行列式} \frac{D(x, y, z)}{D(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)} = \rho^2 \sin \varphi$$

一般变量替换类似二重积分

## 曲线积分与曲面积分

第一型曲线积分 (已知线密度求线的质量)

$$\int_L \rho(x, y, z) ds$$

直角坐标形式

设曲线  $L$  方程  $y = y(x) (a < x < b)$ , 线密度  $\rho = f(x, y)$

$$\text{线质量} m = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

参数方程形式

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$$m = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

空间中曲线类似

第二型曲线积分（向量积分，类似已知力和有向路径求做功）

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\int_{\overline{AB}} Pdx + Qdy \text{ 或者 } \int_{\overline{AB}} F \cdot dr$$

参数方程形式

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha < t < \beta$$

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\overline{AB}} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$$

空间中类似

格林公式，积分与路径无关的条件（只与起点终点有关）

区域积分的顺序（单连通区域逆时针为正）

$L^+$  为正向边界

$$\text{则 } \oint_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

对函数有不连续点时候用单独范围包围不连续点

## 高数 7月2日

积分与路径无关的充分必要条件

$$1. \oint_{C^+} Pdx + Qdy = 0 (C \text{ 是简单光滑闭曲线})$$

$$2. \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ 在积分区域上成立}$$

$$3. \text{存在 } u(x, y) \quad du(x, y) = Pdx + Qdy$$

$$\text{推论: } \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A^B du = u(B) - u(A) (u \text{ 称为原函数})$$

## 求原函数的方法

1. 先取特殊点  $(x_0, y_0)$  按照特定路线积分 (一般是折线)

2. 由  $\frac{\partial u}{\partial x} = P$  对  $x$  积分得到  $P(x, y)$  关于  $x$  的原函数

记作  $u_1(x, y)$  则  $\frac{\partial u_1}{\partial x} = P$  令  $u(x, y) = u_1(x, y) + \varphi(y)$  两边求导得:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \varphi'(y) = Q \text{ 求得 } \varphi'(y) \text{ 则 } u(x, y) = u_1(x, y) + \varphi(y)$$

3. 凑全微分方法 (次数相近, 注意多项式中  $x$  少一次  $y$  多一次的,  $\sin$  和  $\cos$  的)

## 第一型曲面积分(曲线网的质量)

计算: 设曲面  $S$  由方程  $z = g(x, y)$  投影到  $xoy$  面上

$$\iint f(x, y, z) dS = \iint f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

$$\text{当参数方程给出时 } \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \text{ 则令 } \begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases}$$

$$\iint f(x, y, z) dS = \iint f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

## 第二型曲面积分 (水流总量积分)

曲面的方向: 在曲面上一点  $P(x, y, z)$  取  $n = (-f_x, -f_y, 1)$  时, 我们称选取了曲面的上侧

球面和椭球面可分为内侧和外侧

$$\text{计算: } \iint F \cdot dS = \iint (P dy dz + Q dz dx + R dx dy)$$

设曲面由方程  $z = f(x, y)$  投影到  $xoy$  面上计算, 化为二重积分

计算： $\iint (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) =$

$\pm \iint (P(x, y, f(x, y))(-f_x) + Q(x, y, f(x, y))(-f_y) + R(x, y, f(x, y)))dxdy$  (上侧取正，下侧取负)

## 高斯公式和斯托克斯公式

$\Omega$ 是空间区域  $S$ 是 $\Omega$ 的外侧则高斯公式

$$\oiint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy (S \text{取外侧}) = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

斯托克斯公式 (空间曲线第二型积分)

$L_+$ 是简单闭曲线, 是 $S_+$ 的边界 则

$$\oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dxdy + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz$$

## 第八章完

## 第九章 常微分方程

### 基本概念

$n$ 阶常微分方程(方程中导数的最高阶为 $n$ )

通解中独立的任意常数恰是方程的阶数

通解不能表示的解叫奇解

判断常数是否独立： $D(y, y', y'', \dots) / D(C_1, C_2, C_3, \dots)$ 行列式是否不为0

### 初等积分法

第一类：
$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

作变量替换 $z = ax + by + c$

得 $\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + bf(z)$ 是关于 $z$ 可变量分离的方程

第二类:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  ( $f$ 是关于 $x, y$ 的齐次函数)

$$\text{例如: } y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$$

$$\text{改写为 } y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}$$

则 $y' = u + xu'$ 带入上式得 $\frac{du}{dx} = \frac{h(u) - u}{x}$ 可分分离变量

$$\text{第三类: } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$\text{第一种 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{联立 } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } (x_0, y_0)$$

$$\text{令 } \begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$$

原式化为 $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$ 是第二种方程

$$\text{第二种 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{令 } z = a_1x + b_1y$$

则 $\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right)$ 可变量分离

一阶线性微分方程（关于 $y'$ 和 $y$ 都是线性的）

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

第一类：一阶线性其次微分方程（ $Q(x) \equiv 0$ ）

直接分离变量得到通解 $y = Ce^{-\int_{x_0}^x P(t)dt}$

第二类:  $Q(x) \neq 0$

先求出对应齐次方程通解, 再令通解中的常数  $C = u(x, y)$  设出新解:

$$y(x) = u(x)e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt}$$

$$\text{对两边求导 } y'(x) = u'(x)e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} + u(x)P(x)e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt}$$

$$\text{代入原式有 } u'(x)e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} = Q(x)$$

$$y(x) = \left[ \int_{x_0}^x Q(t)e^{-\int_{x_0}^t P(t)dt} + C \right] e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt}$$

结构为一个特解加上通解

伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^a \quad \text{解法: 同除以 } y^a \text{ 再令 } z = y^{1-a} \text{ 化为一阶线性微分方程}$$

全微分方程 (恰当方程)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x, y)}{Q(x, y)}$$

可以写成  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  的形式

为某二元函数全微分或者乘适当函数(积分因子)后是某个二元函数全微分

通积分为  $u(x, y) = C$

求原函数的方式见第八章

常见积分因子

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{xy}, e^x, e^y, \frac{1}{x^2 + y^2}, \frac{1}{x^2 - y^2}$$

(略过求积分因子的公式法)

可降阶的二阶微分方程

$$F(X, Y', Y'')$$

令  $z = y'$  化为  $F(x, z, z')$

解决初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

皮卡序列的构造方法

$$\text{令 } y(x) \equiv y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

...

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx$$

## 高数 七月3日

高阶线性微分方程

朗斯基行列式(判断函数组是否线性相关)

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \text{ 是否等于 } 0$$

根据解的结构只需求对应齐次方程的通解和一个特解

二阶常系数微分方程

$$\text{对应齐次方程: } y'' + py' + qy = 0$$

$$\text{对应特征方程 } \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$\text{第一种 两个不相等实根通解为: } y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\text{第二种 两个相等实根通解为: } y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

$$\text{第三种 两个共轭复根 } (\lambda = a \pm \beta i) \text{ 通解为: } y = e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

求特解的方式

$$\text{第一种: } f(x) = P_n(x) e^{ax} \text{ 时}$$



设  $y = x^k Q_n(x) e^{ax}$   $Q_n(x)$  为待定系数多项式

$$k = \begin{cases} 0, a \neq \lambda_1, a \neq \lambda_2 \\ 1, a = \lambda_1 \text{ 或 } a = \lambda_2 \\ 2, a = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

第二种:  $f(x) = e^{ax} [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$  时

设  $y = x^k e^{ax} [Q_l^{(1)} \cos \beta x + Q_l^{(2)} \sin \beta x]$  ( $Q_l^{(1)}, Q_l^{(2)}$  是待定系数多项式)

$$k = \begin{cases} 0, a \pm \beta i \text{ 不是特征根} \\ 1, a \pm \beta i \text{ 是特征根} \end{cases}$$

欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

做变量替换  $x = e^t$  或  $t = \ln(x)$

高阶类似二阶

## 第十章 无穷级数

基本概念

柯西收敛准则:  $\forall \varepsilon \exists N$  当  $n, m > N, |a_m - a_n| < \varepsilon$  则序列有极限

部分和极限存在则级数收敛

级数收敛, 通项  $a_n \rightarrow 0$

级数前面添加或者删除有限项目, 不改变级数的敛散性

收敛级数加括号仍然收敛, 级数的和不变

正向级数的收敛判别方法

比较判别法

$$u_n < v_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}$$

## p级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 1 \text{ 收敛}, \quad p \leq 1 \text{ 发散}$$

## 比值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$$

若  $0 < h < \infty$  则两个级数收敛性相同

## 达朗贝尔判别法(一般在有阶乘时候用)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

$$\begin{cases} l < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ l > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ l = 1 \text{ 时候, 不能判断} \end{cases}$$

## 柯西判别法(根值法)(一般用在有n次方时候用)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

$$\begin{cases} l < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ l > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ l = 1 \text{ 时候, 不能判断} \end{cases}$$

## Raabe判别法(书上说了读者不必记住他)

## 积分判别法

设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 若存在单调下降非负函数  $f(x)$  使得  $f(n) = u_n$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件是无穷积分  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  收敛

## 任意项级数

## 莱布尼茨判别法(交错级数, 递减趋0)

$$\begin{cases} u_n > u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$$

则级数收敛

## 绝对收敛与条件收敛

若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

狄里克雷判别法（一个趋0，乘以有界，收敛）

$$\text{级数 } \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

若  $a_n$  单调， $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$  且  $b_k$  部分和有界，则级数收敛

阿贝尔判别法(一个收敛，乘以单调有界，收敛)

$$\text{级数 } \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  收敛, 且级数  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  单调有界则级数收敛

函数项级数（级数每一项都是x的函数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

收敛点：取  $x_0$  级数发散则  $x_0$  是收敛点

收敛域：全体收敛点组成的集合

和函数：记为  $S(x)$

一致收敛的定义：略 符号：  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$

判断是否一致收敛的方法

1. 若  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  且  $a_n \rightarrow 0$  则  $f_n(x)$  一致收敛

2. 若存在点列  $x_n$ , 若  $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq l$  则  $f_n(x)$  不一致收敛

2. 变式 若存在点列  $x_n$ , 若  $|f_n(x_n) - f(x_n)| \rightarrow k \neq 0$  则  $f_n(x)$  不一致收敛

一致收敛的必要条件：  $u_n(x) \rightarrow 0$

一致收敛的柯西准则(略)

强级数判别法(M判别法):

$$u_n(x) \leq a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 一致收敛}$$

## 狄里克雷判别法

$$u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$$

若对 $\forall x, a_n(x)$ 对 $n$ 单调, 且 $a_n(x)$ 一致收敛于0

$b_n$ 部分和序列一致有界则 $u_n(x)$ 一致收敛

## 阿贝尔判别法

$$u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$$

若 $\forall x, a_n(x)$ 对 $n$ 单调,  $a_n(x)$ 一致有界,

且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 一致收敛, 则 $u_n(x)$ 一致收敛

## 一致收敛函数的性质

$\begin{cases} 1. u_n(x) \text{ 连续, 则和函数也连续 (反过来可以证明函数不一致收敛)} \\ 2. \text{可以逐项积分 } \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx \end{cases}$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ 点点收敛,  $\sum_{k=1}^{\infty} u'_n(x)$ 连续且一致收敛则可逐项求导

可以利用各种求导积分更容易求得和函数来计算级数的值

## 幂级数

$$\text{形式: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots$$

收敛半径(幂级数收敛域是一个点或者 $x_0$ 为中心的区间, 区间长度一半叫收敛半径)

## 求收敛半径

1. 若幂级数相邻两项的系数之比有极限 $l$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

或者以下极限成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

则  $\begin{cases} \text{当 } 0 < l < +\infty \text{ 时,} & R = \frac{1}{l} \\ \text{当 } l = 0 \text{ 时,} & R = +\infty \\ \text{当 } l = +\infty \text{ 时,} & R = 0 \end{cases}$

若有很多项系数为零，可直接换元用比值法

## 幂级数的性质

1. 内闭一致性：幂级数在收敛域中任意一个区间上一致收敛
2. 可逐项积分逐项求导，收敛域不变

## 泰勒级数

余项趋0才能泰勒展开

先把分式化为容易展开的形式

可以用来估算积分的近似值

## 初等函数泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n, x \in (-1, +\infty)$$

## 第十一章 广义积分与含参变量积分

### 无穷积分

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$  存在则称无穷限积分收敛

$p$  函数  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$  当  $p > 1$  时收敛

### 柯西收敛原理(无穷积分收敛的充要条件)

$$\forall \varepsilon \exists A_0 > a, A' > A_0 \left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

绝对收敛和条件收敛，比较判别法和级数类似

$$\text{比值法: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

$0 < k < +\infty$  时两无穷积分收敛性相同

狄里克雷判别法

$$\text{对于 } \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

若  $\forall A > a$   $\int_a^A f(x)dx$  有界,  $g(x)$  单调趋 0 则原无穷积分收敛

阿贝尔判别法

$$\text{对于 } \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛,  $g(x)$  单调有界, 则原无穷积分收敛

瑕积分

$$p\text{函数 } \int_0^1 \frac{1}{x^p} \text{ 当 } p < 1 \text{ 时收敛}$$

比较判别法, 比值判别法, 柯西收敛原理类似无穷限积分

含参变量的正常积分

连续性

若二元函数  $f(x, y)$  在闭矩形区域上连续, 则参变量积分  $g(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  连续

有了连续性, 可以交换求极限和求积分的顺序

有了连续性, 可以交换  $x$  和  $y$  的积分顺序

有了连续性, 可以交换求微和积分的顺序

可以把含有三个参数的积分转换为累次积分(可以考虑交换积分顺序)方便计算

含参变量的广义积分 略

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha - 1)$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

## 十二章 傅里叶级数

### 三角函数的正交性

正交

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0 \text{ 则 } f(x), g(x) \text{ 正交}$$

函数系:  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$  两两正交且范数为1

### 周期为 $2\pi$ 的函数的傅里叶级数

若 $f(x)$ 在定义上分段连续且分段单调是能傅里叶展开的充分条件(狄利克雷函数)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$$

### 傅里叶级数和函数性质(狄利克雷定理)

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 连续点} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 间断点} \end{cases}$$

### 奇, 偶周期函数的傅里叶级数

$f(x)$ 为奇函数时,  $a_n = 0$  (解答时要说明)

$f(x)$ 为偶函数时,  $b_n = 0$  (解答时要说明)

### 任意周期的函数的傅里叶级数

换元成为 $2\pi$ 为周期的函数, 略

### 有穷区间的函数

进行周期延拓，成为上一种(注意端点处是否相等)

函数在 $[0, l]$ 上

奇延拓(成为正弦级数)，偶延拓(成为余弦级数)

高数下册 完