高数 7月1日

二重积分

注意要求上限大于下限

有估值定理估计最大最小值

二重积分转累次积分直角坐标(扫描线法)

$$\int_{y1}^{y2}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy$$

积不出来可以考虑交换积分次序

极坐标（有x^2+y^2时候重点考虑）

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0(\theta)}^{r_1(\theta)} f(rcos\theta,rsin\theta)rdrd\theta$$

关注函数关于定义域的对称性的函数值的奇偶性&轮换对称性 能简化计算

结论 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

一般变量替换公式（一一对应映射）

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$$

$$\iint f(x,y)dxdy=\iint f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}d\xi d\eta$$

$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}$为雅克比行列式

椭圆变换(广义极坐标变换)

$x=arcos\theta \quad y=brsin\theta$ 雅克比行列式为abr

三重积分

投影法(分为一个个柱，适合凸顶的)

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz=\iint dxdy\int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

截面法(分为一层一层，适合平顶的)

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dz\iint f(x,y,z)dxdy$$

转换为柱坐标

$$\begin{cases}x=rcos\theta\\y=rsin\theta\\z=z\end{cases}$$

$$雅克比行列式\frac{D(x,y,z)}{D(rcos\theta,rsin\theta,z)}=r$$

转换为球坐标

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\z=\rho\cos\varphi\end{cases}其中\theta表示水平偏转角\ \ \varphi表示俯仰角$$

$$雅克比行列式\frac{D(x,y,z)}{D(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)}=\rho^2sin\varphi$$

一般变量替换类似二重积分

曲线积分与曲面积分

第一型曲线积分（已知线密度求线的质量）

$$\int_L\rho(x,y,z)ds$$

直角坐标形式

$$设曲线L方程y=y(x)(a<x<b),线密度\rho=f(x,y)$$

$$线质量m=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

参数方程形式

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

$$m=\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt$$

空间中曲线类似

第二型曲线积分（向量积分，类似已知力和有向路径求做功）

$$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy\text{或者}\int_{\overset{\frown}{AB}} F\cdot dr$$

参数方程形式

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \alpha<t<\beta$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\overset{\frown}{AB}}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$$

空间中类似

格林公式，积分与路径无关的条件（只与起点终点有关）

区域积分的顺序（单联通区域逆时针为正）

L^+为正向边界

$$\text{则}\oint_{L^+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

对函数有不连续点时候用单独范围包围不连续点

高数 7月2日

积分与路径无关的充分必要条件

$$1.\oint_{C^+} Pdx+Qdy=0(C\text{是简单光滑闭曲线})$$

$$2.\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\text{在积分区域上成立}$$

$$3.\text{存在}u(x,y)\ \ du(x,y)=Pdx+Qdy$$

$$\text{推论}:\int_{\overset{\frown}{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_A^B du=u(B)-u(A)(u\text{称为原函数})$$

求原函数的方法

$$1.\text{先取特殊点}(x_0,y_0)\text{按照特定路线积分(一般是折线)}$$

$$2.\text{由}\frac{\partial u}{\partial x}=P\text{对}x\text{积分得到}P(x,y)\text{关于}x\text{的原函数}$$

$$\text{记作}u_1(x,y)\ \ \text{则}\frac{\partial u_1}{\partial x}=P\ \ \text{令}u(x,y)=u_1(x,y)+\varphi(y)\ \ \text{两边求导得:}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\varphi'(y)=Q\text{求得}\varphi'(y)\ \ \text{则}u(x,y)=u_1(x,y)+\varphi(y)$$

3.凑全微分方法(次数相近，注意多项式中x少一次y多一次的，sin和cos的)

第一型曲面积分(曲线网的质量)

计算：设曲面S由方程$z=g(x,y)$ 投影到xoy面上

$$\iint f(x,y,z)dS=\iint f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy$$

$$\text{当参数方程给出时}\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}\text{则令}\begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\G=x_v^2+y_v^2+z_v^2\end{cases}$$

$$\iint f(x,y,z)dS=\iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

第二型曲面积分（水流总量积分）

曲面的方向：在曲面上一点$P(x,y,z)$取$n=(-f_x,-f_y,1)$时，我们称选取了曲面的上侧

球面和椭球面可分为内侧和外侧

$$\text{计算:}\ \iint F\cdot dS=\iint(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)$$

设曲面由方程$z=f(x,y)$ 投影到xoy面上计算,化为二重积分

$$\text{计算}:\iint(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)=$$

$$\pm\iint(P(x,y,f(x,y))(-f_x)+Q(x,y,f(x,y))(-f_y)+R(x,y,f(x,y)))dxdy\text{（上侧取正，下侧取负）}$$

高斯公式和斯托克斯公式

$$\Omega\text{是空间区域}\ \ S\text{是}\Omega\text{的外侧则高斯公式}$$

$$\oiint_{S^+}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy(S\text{取外侧})=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV$$

斯托克斯公式（空间曲线第二型积分）

$$L_+\text{是简单闭曲线，是}S_+\text{的边界}\ \ \text{则}$$

$$\oint_{L^+}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S^+}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz$$

第八章完

第九章 常微分方程

基本概念

n阶常微分方程(方程中导数的最高阶为n)

通解中独立的任意常数恰是方程的阶数

通解不能表示的解叫奇解

判断常数是否独立：$D(y,y',y'',\cdots)/D(C_1,C_2,C_3,\cdots)$行列式是否不为0

初等积分法

$$\text{第一类：}\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$$

作变量替换$z=ax+by+c$

$$\text{得}\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}=a+bf(z)\text{是关于}z\text{可变量分离的方程}$$

$$第二类：\frac{dy}{dx}=f(x,y)(f是关于x,y的齐次函数)$$

$$例如：y'=\frac{x+2y}{2x-y}$$

$$改写为y'=h(\frac{y}{x})$$

$$令u=\frac{y}{x}$$

$$则y'=u+xu'带入上式得\frac{du}{dx}=\frac{h(u)-u}{x}可分分离变量$$

$$第三类：\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b1_y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

$$第一种\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$联立\begin{cases} a_1x+b1_y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}解得(x_0,y_0)$$

$$令\begin{cases} u=x-x_0 \\ v=y-y_0 \end{cases}$$

$$原式化为\frac{dv}{du}=f(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v})是第二种方程$$

$$第二种\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

$$令z=a_1x+b_1y$$

$$则\frac{dz}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}=a_1+b_1f(\frac{z+c_1}{kz+c_2})可变量分离$$

一阶线性微分方程（关于y'和y都是线性的）

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

$$第一类：一阶线性其次微分方程（Q(x)\equiv 0）$$

$$直接分离变量得到通解y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}$$

第二类：$Q(x)\not\equiv 0$

先求出对应其次方程通解，再令通解中的常数$C=u(x,y)$设出新解：

$$y(x)=u(x)e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}$$

对两边求导$y'(x)=u'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}+u(x)P(x)e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}$

代入原式有$u'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}=Q(x)$

$$y(x)=[\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}+C]e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}$$

结构为一个特解加上通解

伯努利方程

$\frac{dy}{dx}=P(x)y=Q(x)y^a$　解法：同除以y^a再令$z=y^{1-a}$化为一阶线性微分方程

全微分方程（恰当方程）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

可以写成$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$的形式

为某二元函数全微分或者乘适当函数(积分因子)后是某个二元函数全微分

通积分为$u(x,y)=C$

求原函数的方式见第八章

常见积分因子

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{1}{xy},e^x,e^y,\frac{1}{x^2+y^2},\frac{1}{x^2-y^2}$$

(略过求积分因子的公式法)

可降阶的二阶微分方程

$$F(X,Y',Y'')$$

令$z=y'$ 化为$F(x,z,z')$

解决初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

皮卡序列的构造方法

$$令 y(x) \equiv y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x)dx$$

$$\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x)dx$$

高数 七月3日

高阶线性微分方程

$$郎斯基行列式(判断函数组是否线性相关)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} 是否等于0$$

$$根据解的结构只需求对应齐次方程的通解和一个特解$$

二阶常系数微分方程

$$对应齐次方程: y'' + py' + qy = 0$$

$$对应特征方程 \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$第一种\ 两个不相等实根通解为：y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

$$第二种\ 两个相等实根通解为：y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$$

$$第三种\ 两个共轭复根(\lambda = a \pm \beta i)通解为：y = e^{ax}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$$

$$求特解的方式$$

$$第一种：f(x) = P_n(x)e^{ax}时$$

$$设y=x^kQ_n(x)e^{ax}\ \ Q_n(x)为待定系数多项式$$

$$k=\begin{cases}0,a\neq\lambda_1,a\neq\lambda_2\\1,a=\lambda_1或a=\lambda_2\\2,a=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$$第二种：f(x)=e^{ax}[P_m(x)cos\beta x+P_n(x)sin\beta x]时$$

$$设y=x^ke^{ax}[Q_l^{(1)}cos\beta x+Q_l^{(2)}sin\beta x](Q_l^{(1)},Q_l^{(2)}是待定系数多项式)$$

$$k=\begin{cases}0,a\pm\beta i不是特征根\\1,a\pm\beta i是特征根\end{cases}$$

欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

$$做变量替换x=e^t\ \ 或t=ln(x)$$

$$高阶类似二阶$$

第十章 无穷级数

基本概念

$$柯西收敛准则：\forall\varepsilon\ \ \exists N\ \ 当n,m>N,|a_m-a_n<\varepsilon|则序列有极限$$

$$部分和极限存在则级数收敛$$

$$级数收敛，通项a_n\to 0$$

$$级数前面添加或者删除有限项目，不改变级数的敛散性$$

$$收敛级数加括号仍然收敛，级数的和不变$$

正向级数的收敛判别方法

比较判别法

$$u_n<v_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n收敛则\sum_{n=1}^{\infty}u_n收敛$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n发散则\sum_{n=1}^{\infty}v_n发散$$

p级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad p>1\text{收敛，}p<=1\text{发散}$$

比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$$

$$\text{若}0<h<\infty\text{则两个级数收敛性相同}$$

达朗贝尔判别法(一般在有阶乘时候用)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

$$\begin{cases}l<1\text{时，级数收敛}\\l>1\text{时，级数发散}\\l=1\text{时候，不能判断}\end{cases}$$

柯西判别法(根值法)(一般用在有n次方时候用)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$$

$$\begin{cases}l<1\text{时，级数收敛}\\l>1\text{时，级数发散}\\l=1\text{时候，不能判断}\end{cases}$$

Raabe判别法(书上说了读者不必记住他)

积分判别法

$$\text{设}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{为正项级数，若存在单调下降非负函数}f(x)\text{使得}f(n)=u_n$$

$$\text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛的充分必要条件是无穷积分}\int_1^{\infty}f(x)dx\text{收敛}$$

任意项级数

莱布尼茨判别法(交错级数，递减趋0)

$$\begin{cases}u_n>u_{n+1}\\\lim_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$$

$$\text{则级数收敛}$$

绝对收敛与条件收敛

$$若正项级数\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|收敛则\sum_{n=1}^{\infty}u_n收敛$$

狄里克雷判别法（一个趋0，乘以有界，收敛）

$$级数\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$$

$$若a_n单调，\lim_{k\to\infty}a_k=0且b_k部分和有界，则级数收敛$$

阿贝尔判别法(一个收敛，乘以单调有界，收敛)

$$级数\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$$

$$若级数\sum_{k=1}^{\infty}a_k收敛,且级数\sum_{k=1}^{\infty}b_k单调有界则级数收敛$$

函数项级数（级数每一项都是x的函数）

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

$$收敛点：取x_0级数发散则x_0是收敛点$$

$$收敛域：全体收敛点组成的集合$$

$$和函数：记为S(x)$$

$$一致收敛的定义：略\ \ 符号：f_n(x)\rightrightarrows f(x)$$

判断是否一致收敛的方法

$$1.若|f_n(x)-f(x)|\le a_n且a_n\to 0\quad 则f_n(x)一致收敛$$

$$2.若存在点列x_n,若|f_n(x_n)-f(x_n)|\ge l则f_n(x)不一致收敛$$

$$2.变式\ \ 若存在点列x_n,若|f_n(x_n)-f(x_n)|\to k\neq 0则f_n(x)不一致收敛$$

$$一致收敛的必要条件：u_n(x)\to 0$$

$$一致收的柯西准则(略)$$

强级数判别法(M判别法):

$$u_n(x)\le a_n\ \ \sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛则\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)一致收敛$$

狄里克雷判别法

$$u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$$

$$若对\forall x, a_n(x)对n单调，且a_n(x)一致收敛于0$$

$$b_n部分和序列一致有界则u_n(x)一致收敛$$

阿贝尔判别法

$$u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$$

$$若\forall x\ a_n(x)对n单调，a_n(x)一致有界，$$

$$且\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)一致收敛, 则u_n(x)一致收敛$$

一致收敛函数的性质

$$\begin{cases} 1.u_n(x)连续，则和函数也连续(反过来可以证明函数不一致收敛) \\ 2.可以逐项积分\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx \end{cases}$$

$$若\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x)点点收敛, \sum_{k=1}^{\infty} u_n'(x)连续且一致收敛则可逐项求导$$

$$可以利用各种求导积分更容易求得和函数来计算级数的值$$

幂级数

$$形式：\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots$$

$$收敛半径(幂级数收敛域是一个点或者x_0为中心的区间，区间长度一半叫收敛半径)$$

求收敛半径

$$1.若幂级数相邻两项的系数之比有极限l$$

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$$

$$或者以下极限成立$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

$$则\begin{cases} 当0 < l < +\infty时， & R = \frac{1}{l} \\ 当l = 0时， & R = +\infty \\ 当l = +\infty时， & R = 0 \end{cases}$$

若有很多项系数为零，可直接换元用比值法

幂级数的性质

1.内闭一致性：幂级数在收敛域中任意一个区间上一致收敛

2.可逐项积分逐项求导，收敛域不变

泰勒级数

余项趋0才能泰勒展开

先把分式化为容易展开的形式

可以用来估算积分的近似值

初等函数额泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in R$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n, x \in (-1, +\infty)$$

第十一章 广义积分与含参变量积分

无穷积分

$$\lim_{A \to +\infty}\int_a^A f(x)dx\text{存在则称无穷限积分收敛}$$

$$p\text{函数}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\text{当}p > 1\text{时收敛}$$

柯西收敛原理(无穷积分收敛的充要条件)

$$\forall\varepsilon\ \exists A_0 > a\ A, A' > A_0|\int_A^{A'} f(x)dx| < \varepsilon$$

绝对收敛和条件收敛，比较判别法和级数类似

$$\text{比值法：}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

$$0<k<+\infty\text{时两无穷积分收敛性相同}$$

狄里克雷判别法

$$\text{对于}\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$$

$$\text{若}\forall A>a\int_a^A f(x)dx\text{有界，}g(x)\text{单调趋0则原无穷积分收敛}$$

阿贝尔判别法

$$\text{对于}\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$$

$$\text{若}\int_a^{+\infty}f(x)dx\text{收敛，}g(x)\text{单调有界，则原无穷积分收敛}$$

瑕积分

$$p\text{函数}\int_0^1\frac{1}{x^p}\text{当}p<1\text{时收敛}$$

比较判别法，比值判别法，柯西收敛原理类似无穷限积分

含参变量的正常积分

连续性

$$\text{若二元函数}f(x,y)\text{在闭矩形区域上连续，则参变量积分}g(y)=\int_a^b f(x,y)dx\text{连续}$$

有了连续性，可以交换求极限和求积分的顺序

有了连续性，可以交换x和y的积分顺序

有了连续性，可以交换求微和积分的顺序

可以把含有三个参数的积分转换为累次积分(可以考虑交换积分顺序)方便计算

含参变量的广义积分 略

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

$$\Gamma(\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha-1)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

十二章 傅里叶级数

三角函数的正交性

正交

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=0\text{则}f(x),g(x)\text{正交}$$

$$\text{函数系：}\frac{1}{\sqrt{2}},cosx,sinx,cos2x,sin2x,\cdots\text{两两正交且范数为}1$$

周期为**2pi**的函数的傅里叶级数

$$\text{若}f(x)\text{在定义上分段连续且分段单调是能傅里叶展开的充分条件(狄利克雷函数)}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_0cosnx+b_0sinnx)$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx\\b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx\end{cases}$$

傅里叶级数和函数性质(狄里克雷定理)

$$s(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{连续点}\\\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{为}f(x)\text{间断点}\end{cases}$$

奇，偶周期函数的傅里叶级数

$$f(x)\text{为奇函数时},a_n=0(\text{解答时要说明})$$

$$f(x)\text{为偶函数时},b_n=0(\text{解答时要说明})$$

任意周期的函数的傅里叶级数

$$\text{换元成为}2\pi\text{为周期的函数},\text{略}$$

有穷区间的函数

进行周期延拓，成为上一种(注意端点处是否相等)

函数在[0,l]上

奇延拓(成为正弦级数)，偶延拓(成为余弦级数)

高数下册 完