# Икономически растеж. Производствени функции

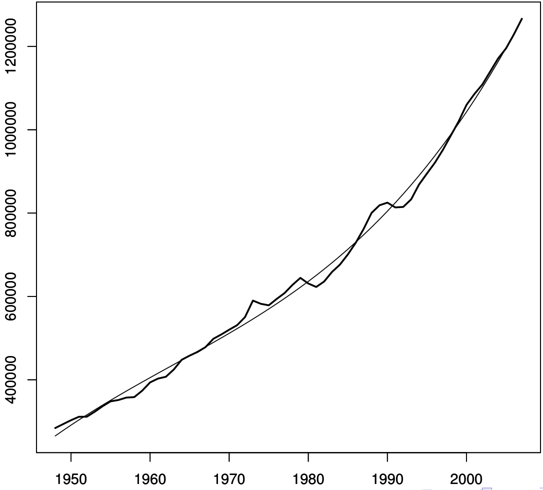
Андрей Василев

# Основни въпроси

- Стилизирани факти за икономическия растеж
- Производствени функции

# Преговор: краткосрочни и дългосрочни модели

## Реален БВП за Великобритания и неговият кубичен тренд, 1948-2007 г., милиони британски лири.



# Емпирични наблюдения

- В САЩ за периода 1870–1990 г. БВП на глава от населението е нараснал 8.1 пъти (от 2244 \$ до 18 258 \$) със среден темп на годишен растеж 1.75%.

- В САЩ за периода 1870–1990 г. БВП на глава от населението е нараснал 8.1 пъти (от 2244 $ до 18 258 $) със среден темп на годишен растеж 1.75%.
  **Защо разглеждаме БВП на глава от населението?**

# Емпирични наблюдения

- В САЩ за периода 1870–1990 г. БВП на глава от населението е нараснал 8.1 пъти (от 2244 $ до 18 258 $) със среден темп на годишен растеж 1.75%.
  **Защо разглеждаме БВП на глава от населението?**
- За периода 1900–1987 г. годишният темп на растеж за Индия, Пакистан и Филипините е съответно 0.64%, 0.88% и 0.86%.
- За периода от 1890 г. до началото на 90-те години на XX в. темпът на растеж в Япония и Тайван е съответно 2.95% и 2.75%.
- За периода 1960-1990 г. 18 държави са имали отрицателен растеж на реалния БВП на глава от населението.

# Стилизирани факти на Калдор

1. Производството на глава от населението расте с течение на времето и съответният темп на растеж не намалява.
2. Физическият капитал за един зает в производството расте.
3. Възвръщаемостта на средствата, вложени в капитал, е приблизително постоянна.
4. Отношението на физическия капитал и произведената продукция е приблизително постоянно.
5. Дяловете на труда и на физическия капитал в националния доход са приблизително постоянни.
6. Темпът на растеж на производството на един зает се различава значително в отделните страни.

# Дефиниция на производствена функция

- Най-често се приема, че произведената продукция $Y$ зависи от:
  - обема на физическия капитал $K$
  - работната сила $L$
  - нивото на технологично развитие (дали разполагаме с повече или по-малко съвършени технологии на производство)
- Малко по-общо, искаме производството $Y$ да зависи от обемите на даден набор вложени количества $X_i$, $i = 1, \ldots, n$, на отделните фактори на производство (капитал, труд, енергия, суровини и пр.).
- Такъв тип връзка се нарича **производствена функция**:

$$Y = F(X_1, \ldots, X_n). \tag{1}$$

- В сила са следните предположения:

$$F_{X_i} > 0, \; F_{X_i X_i} < 0, \; \forall i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

къдeто $F_{X_i} := \frac{\partial}{\partial X_i} F(X_1, \ldots, X_n)$ и
$F_{X_i X_j} := \frac{\partial^2}{\partial X_i X_j} F(X_1, \ldots, X_n)$

- **Интерпретация на изискването за първите производни:** Всеки производствен фактор допринася за производството и нарастването на използваните количества от фактора води до по-висока продукция.

- **Интерпретация на изискването за вторите производни:** увеличаването на всеки ресурс води до нарастване на продукцията, но при увеличението на количествата от ресурса (при фиксирани обеми на останалите ресурси) имаме намаляване на скоростта $F_{X_i}$ на увеличаване (по отношение на него).
- Това свойство е известно като „закон за намаляващата възвръщаемост” или „закон за намаляващата пределна производителност”.

- Производствената функция е положително хомогенна от първа степен

$$F(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda F(X_1, \dots, X_n), \ \forall \lambda > 0. \tag{3}$$

- **Интерпретация:** Ако увеличим $\lambda$ пъти вложените ресурси, също толкова пъти нараства и продукцията.
- Това свойство се нарича *постоянна възвръщаемост по отношение на мащаба*.

- Ако диференцираме (3) по $\lambda$ в точката $\lambda = 1$, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i} X_i = F(X_1, \dots, X_n). \tag{4}$$

- Тази връзка се нарича **формула на Ойлер**.

Ще покажем, че за $n = 1$ от условието за положителна хомогенност от първа степен (3) следва, че $F(X)$ е линейна функция, т.е. $F(X) = aX, \ a = \text{const}$.

Наистина, ако фиксираме $X_0 > 0$ и означим $a = \frac{F(X_0)}{X_0}$, тогава за $\lambda = \frac{X}{X_0}$ имаме $F(X) = F(\lambda X_0) = \frac{X}{X_0} F(X_0) = aX$.

- Условията

$$\lim_{X_i \to 0} F_{X_i} = +\infty, \qquad \lim_{X_i \to +\infty} F_{X_i} = 0 \tag{5}$$

  за произволно фиксирани стойности на останалите променливи се наричат *условия на Инада*.

- **Интерпретация:** Ако $i$-тият производствен фактор стане много оскъден, той става много ценен и пределният му продукт става много голям (малко увеличение на използваното количество води до голямо нарастване на производството). Ако производственият фактор вече се използва в големи количества, използването на още малко от него почти не променя произведения продукт.

# Същественост на производствените фактори

- От условието за хомогенност от първа степен (3) и условията на Инада (5) следва, че при наличие на повече ресурси не е възможно само един ресурс да замести останалите $n-1$, т.е.

$$F(0,\dots,0,X_i,0,\dots,0)=0,\ \forall i=1,\dots,n. \tag{6}$$

- В частния случай, когато $Y=F(K,L)$, това означава, че всяка една от „съставките" е от решаващо значение за производството, т.е. $F(K,0)=F(0,L)=0$.

За да установим (6), ще отбележим, че при фиксирани стойности на $X_j$, $j \neq i$, е изпълнено

$$\lim_{X_i \to +\infty} \frac{F(X_1, \dots, X_n)}{X_i} = 0.$$

Последното твърдение е очевидно, ако числителят е ограничен.

Ако числителят не е ограничен, т.е.

$$\lim_{X_i \to +\infty} F(X_1, \dots, X_n) = +\infty,$$

прилагаме правилото на Лопитал и второто условие от условията на Инада (5).

От условието за хомогенност от първа степен (3) имаме

$$\frac{F(X_1, \dots, X_n)}{X_i} = F\left(\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, 1, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right),$$

което при $X_i \to +\infty$ ни дава

$$F(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0.$$

Умножаваме последното равенство с $X_i > 0$ и получаваме (6).

# Пример: функция на Коб-Дъглас

Тази функция може да бъде изведена от микроикономически съображения при подходящи предположения.

Ако означим с $P_i$ цената на единица обем от $i$-тия ресурс, а общото ценово равнище на продукцията е $P$, и допуснем, че тези цени се приемат за дадени, тогава номиналната „печалба" от производството, която бихме искали да максимизираме, е

$$\Pi = PF(X_1, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{n} P_i X_i.$$

Необходимите условия за оптималност са $\Pi_{X_i} = 0, \;\; i = 1, \dots, n$, т.е.

$$F_{X_i}(X_1, \dots, X_n) = \frac{P_i}{P}. \tag{7}$$

# Пример: функция на Коб-Дъглас

Оттук след умножаване с $\frac{X_i}{Y}$ намираме, че еластичността на $F$ относно $X_i$ удовлетворява

$$\frac{X_i F_{X_i}}{F} = \frac{P_i X_i}{PY}, \tag{8}$$

т.е. еластичността на $F$ относно $X_i$ е частта от стойността на БВП (равен на $PY$), която съответства на $i$-тия ресурс. Предвид формулата на Ойлер (4) и като се използва необходимото условие за максимум (7), за оптималните обеми на $X_i$ е в сила

$$PY = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i. \tag{9}$$

Последното равенство показва, че максималната стойност на печалбата при тези предположения е нула. Така е винаги при съвършена конкуренция.

# Пример: функция на Коб-Дъглас

Най-често разглежданият случай е когато ресурсите са два: капитал $K$ и труд $L$. Съответно $Y = F(K,L)$. Условията (8) в този случай имат вида

$$\frac{KF_K}{F} = \frac{P_K K}{PY}, \quad \frac{LF_L}{F} = \frac{P_L L}{PY},$$

където $P_L = W$ е номиналната работна заплата, $P_K = R$ е рентната цена на капитала, а величините в десните страни на горните равенства са съответните части на капитала и труда. Предвид свойство 5 от стилизираните факти на Калдор можем *приблизително* да предположим, че

$$\frac{KF_K}{F} = \alpha = \text{const} > 0, \quad \frac{LF_L}{F} = \beta = \text{const} > 0. \tag{10}$$

# Пример: функция на Коб-Дъглас

Като фиксираме $L$, първото условие от (10) може еквивалентно да бъде записано като

$$\frac{\partial}{\partial K}(\ln F - \alpha \ln K) = 0,$$

откъдето

$$F = CK^{\alpha}, \ C = C(L) = \text{const}(L).$$

Сега фиксираме $K$ и заместваме получения израз за $F$ във второто равенство от (10), като по този начин намираме

$$\frac{LC'(L)K^{\alpha}}{C(L)K^{\alpha}} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{C'(L)}{C(L)} = \frac{\beta}{L},$$

откъдето

$$C(L) = AL^{\beta},$$

където $A$ е абсолютна константа.

# Пример: функция на Коб-Дъглас

Окончателно следва, че

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{11}$$

Предвид формулата на Ойлер (4) получаваме

$$\alpha + \beta = 1. \tag{12}$$

Именно функцията (11) при условието (12) се нарича **функция на Коб–Дъглас**.

Една производствена функция се нарича *неокласическа*, ако тя притежава посочените по-горе свойства, а именно:

1. Положителен ефект от нарастването на производствените фактори
2. „Закон за намаляващата възвръщаемост"
3. Постоянна възвръщаемост по отношение на мащаба
4. Условия на Инада

**Забележка:** Понякога като отделно свойство се посочва и съществеността на производствените фактори, макар че формално то е следствие.

# Отчитане на технологичния напредък

- Понякога се налага да се отчита съображението, че резултатът за производството от дадена комбинация от производствени фактори зависи от степента на технологичен напредък и знание.
- В макроикономическите модели най-често това се прилага за стандартния случай на два производствени фактора – труд и капитал.
- За целта се прави модификация на производствената функция, като в нея се добавя допълнителна променлива, отговаряща на степента на технологичен напредък (прогрес).
- Има три стандартни начина, по-които може да се направи подобна модификация.

# Видове технологичен напредък

## Дефиниция

Ще казваме, че технологичният прогрес е

а) неутрален по Хикс (Hicks)

б) неутрален по Харод (Harrod)

в) неутрален по Солоу (Solow),

ако съответната производствена функция (модифицирана вследствие иновациите) $F(K, L, t)$ има вида

а) $T(t)F(K, L)$, $\frac{dT}{dt} \geq 0$,

б) $F(K, A(t)L)$, $\frac{dA}{dt} \geq 0$ (технология, усилваща влиянието на работната сила или за краткост – увеличаваща работната сила),

в) $F(B(t)K, L)$, $\frac{dB}{dt} \geq 0$ (технология, усилваща влиянието на капитала или за краткост – увеличаваща капитала).