

# Модел на Солоу-Суон

Андрей Василев

- Формулировка на модела на Солоу-Суон
- Равновесие в модела
- „Златно правило“ за натрупване на капитала
- Динамика на прехода към стационарната стойност

# Основни положения (1)

- Моделът на Солоу–Суон (Solow–Swan) се нарича още неокласически модел на икономически растеж.
- Ще разгледаме формулировка на модела в непрекъснато време и за случая на затворена икономика.
- Означаваме с  $K(t)$ ,  $L(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $S(t)$  и  $I(t)$  съответно обемите на капитала, труда, производството, спестяванията и инвестициите през периода  $t$ . Тези величини са функции на аргумента  $t \in [0, +\infty)$ .
- Понеже икономиката е затворена, имаме

$$(1) \quad S(t) = I(t).$$

## Основни положения (2)

- Предполагаме, че склонността към спестяване (която в линейния случай съвпада с нормата на спестяване)  $s = \text{const} \in (0, 1)$  е постоянна и зададена екзогенно:

$$(2) \quad S(t) = sY(t).$$

- Приемаме, че работната сила  $L(t)$  расте с постоянен темп  $n = \text{const} > 0$ . С помощта на нормирането  $L(0) = 1$  получаваме

$$L(t) = e^{nt}.$$

- Разглежда се неокласическа производствена функция

$$Y = F(K, L).$$

# Интензивна форма на производствената технология

Ако означим

$$k = \frac{K}{L}, \quad y = \frac{Y}{L},$$

от условието за хомогенност следва, че

$$Y = F(K, L) = LF(k, 1) := Lf(k),$$

което ни дава

$$(3) \quad y = f(k)$$

(производствена функция в интензивна форма).

# Свойства на производствената функция в интензивна форма

Понеже  $Y = Lf(k)$ , намираме

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k) > 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial L} = [f(k) - kf'(k)] > 0 \end{cases}$$

и от условията на Инада следва, че

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0.$$

# Базисно уравнение на модела на Солоу

Натрупване на капитал:

$$\dot{K} = I - \delta K \equiv sF(K, L) - \delta K,$$

където  $\delta = \text{const} > 0$  отчита амортизирането на капитала.

Следователно

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k,$$

откъдето, предвид

$$\dot{k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{L} \right) = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L^2} \dot{L},$$

получаваме

$$(6) \quad \dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k.$$

Казваме, че икономиката се намира на **равновесна траектория**, ако величините, които я описват  $(k, y, c, \dots)$  имат постоянен темп на нарастване (т.е.  $\dot{k}/k = \text{const}$  и т.н.).

**Забележка.** На английски терминът, използван за равновесна траектория, е *steady state*. Същият термин се използва и за стационарна точка на динамична система. В англоезичната икономическа литература терминът *steady state* се използва и при постоянен ненулев темп на нарастване, като обикновено изходната динамична система, описваща икономиката, може да се трансформира по подходящ начин, така че на равновесните ѝ траектории да съответстват стационарните точки на трансформираната система.



# Равновесие в модела на Солоу (1)

От (6) следва, че за равновесната траектория

$$\frac{\dot{k}}{k} = \text{const} = s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta),$$

откъдето

$$\frac{f(k)}{k} = \text{const}.$$

Оттук, след диференциране по времето  $t$ , намираме

$$0 = \frac{f'(k)\dot{k}}{k} - \frac{f(k)\dot{k}}{k^2} = \frac{\dot{k}}{k} \cdot \frac{kf'(k) - f(k)}{k}.$$

Понеже числителят на последната дроб е отрицателен (вж. (4)), производната  $\dot{k} = 0$ , т.е.  $k(t) = k_0 = \text{const}$  за равновесната траектория. Тогава са постоянни също  $y_0 = f(k_0)$  и  $c_0 = (1 - s)f(k_0)$ .

## Равновесие в модела на Солоу (2)

- Т.е. установихме, че в модела на Солоу условието за постоянен темп на растеж всъщност означава, че величините са постоянни.
- Може да се покаже, че върху равновесната траектория величините  $K$ ,  $Y$  и  $C$  растат с постоянен темп, а именно темпът на нарастване на работната сила  $n$ .
- Да проверим това твърдение например за  $K$ . Имаме

$$0 = \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}n,$$

откъдето следва  $\frac{\dot{K}}{K} = n$ .

# Равновесие в модела на Солоу (3)

За равновесната траектория числото  $k = k_0 > 0$  удовлетворява

$$(7) \quad sf(k_0) = (n + \delta)k_0.$$

Определяме функцията  $k_0 = k_0(s)$  от последното уравнение. Това е възможно, защото

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_0} [sf(k_0) - (n + \delta)k_0] &= sf'(k_0) - (n + \delta) = \\ &= \frac{1}{k_0} [k_0 sf'(k_0) - (n + \delta)k_0] = \frac{1}{k_0} [k_0 sf'(k_0) - sf(k_0)] = \\ &= \frac{s}{k_0} [k_0 f'(k_0) - f(k_0)] < 0 \end{aligned}$$

поради (4).

# Равновесие в модела на Солоу (4)

Производната на функцията  $k_0 = k_0(s)$  е положителна, защото след диференциране на (7) по  $s$  получаваме, че

$$f(k_0) + sf'(k_0)\frac{dk_0}{ds} = (n + \delta)\frac{dk_0}{ds},$$

откъдето

$$(8) \quad \frac{dk_0}{ds} = \frac{f(k_0)}{n + \delta - sf'(k_0)} > 0.$$

Последното означава, че равновесният капитал нараства при нарастване на спестяванията в икономиката.

# „Златно правило” за натрупване на капитала (1)

За равновесната траектория потреблението на глава от населението е

$$c_0 = (1 - s)f(k_0(s)) = f(k_0(s)) - (n + \delta)k_0(s)$$

и има производна

$$\frac{dc_0}{ds} = [f'(k_0(s)) - (n + \delta)] \frac{dk_0(s)}{ds}.$$

При малки стойности на  $s$  (т.е. за малки  $k_0(s)$ ) тя е положителна (вж. (5)), а за големи  $s$  – отрицателна.

## „Златно правило” за натрупване на капитала (2)

Следователно  $c_0(s)$  достига максимума си за онази стойност на  $s$ , за която

$$\frac{dc_0}{ds} = 0, \text{ т.е. } f'(k_0(s)) = n + \delta,$$

тъй като производната на  $k_0$  по  $s$  е положителна. Тази стойност на  $s$  се означава  $s_{\text{gold}}$ , съответно имаме  $k_0 = k_{\text{gold}}$ , потребление  $c_{\text{gold}}$ .

Смисълът от названието на това правило е, че при този темп на спестяване в равновесие се осигурява максималното възможно ниво на потребление. Разбира се, за кратко е възможно да се увеличи потреблението в даден къс хоризонт, но при златното правило се постига максималното възможно потребление и за бъдещите поколения.

## „Златно правило” за натрупване на капитала (3)

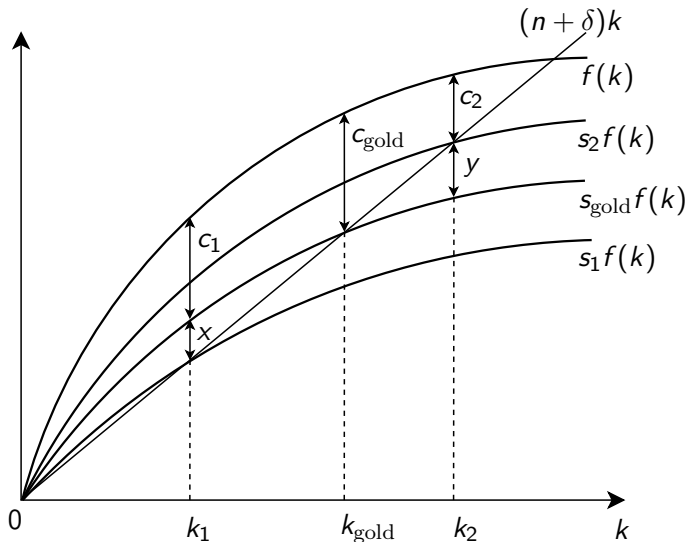
- Нека да вземем стойности  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , за които  $s_1 < s_{\text{gold}} < s_2$ . Тогава предвид (8), за съответните стационарни стойности  $k_i = k_0(s_i)$ ,  $i = 1, 2$ , имаме

$$k_1 < k_{\text{gold}} < k_2.$$

- При икономика, в която нормата на спестяване  $s_2 > s_{\text{gold}}$ , ще се реализира потребление  $c_2 < c_{\text{gold}}$  (тъй като последното е максимално възможно).
- Ако  $s_2$  се намали до  $s_{\text{gold}}$ ,  $c_2$  ще нарасне до  $c_{\text{gold}}$  (като в началото ще се наблюдава фактически още по-голяма стойност). Това показва, че при  $s > s_{\text{gold}}$  икономиката не функционира ефективно.
- За  $s_1 < s_{\text{gold}}$  потреблението  $c_1 < c_{\text{gold}}$  ще нарасне до максималната стойност след първоначален преходен период с намалено потребление.

# Златно правило за натрупване на капитала (4)

Графична илюстрация





# Динамика на прехода към стационарната стойност (1)

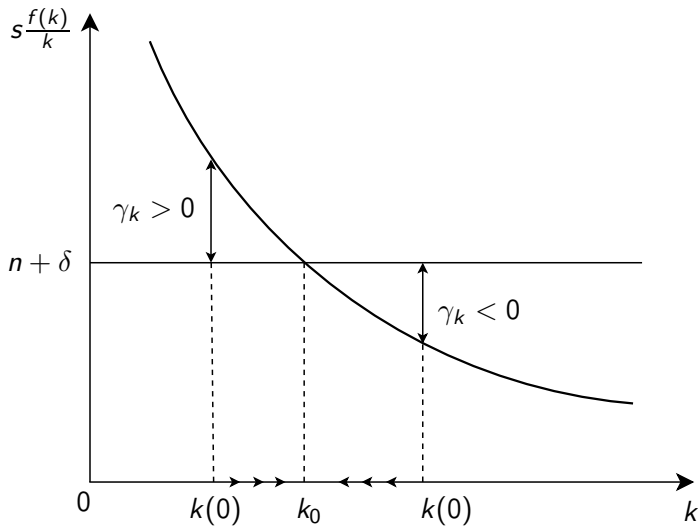
- Ще разгледаме динамиката на прехода към стационарната стойност  $k_0$  в зависимост от началната стойност  $k(0)$  на капитала  $k(t)$ .
- От основното уравнение (6) се вижда, че темпът на растеж на  $k(t)$

$$(9) \quad \gamma_k := \frac{\dot{k}}{k} = s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta)$$

е положителен при малки стойности на  $k$  и отрицателен – при големи.

- Скоростта на прехода към равновесието е толкова по-малка, колкото  $k(0)$  е по-близо до  $k_0$  (вж. следващата фигура).

# Динамика на прехода към стационарната стойност (2)



# Динамика на прехода към стационарната стойност (3)

- По-нататък темпът на растеж  $\dot{\varphi}/\varphi$  на функцията  $\varphi(t)$  ще означаваме с  $\gamma_{\varphi}$ .
- Например

$$\gamma_K := \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{L} \cdot \frac{L}{K} = \frac{1}{k}(\dot{k} + kn) = \gamma_k + n,$$

т.е. темпът на растеж на общия обем на капитала  $K(t)$  е равен на темпа на растеж на капитала на глава от населението  $\gamma_{k(t)}$ , увеличен с темпа  $n$  на растеж на населението.

# Динамика на прехода към стационарната стойност (4)

Аналогично бихме могли да изучим темпа на растеж на производството на глава от населението (вж. (9)):

$$(10) \quad \gamma_y := \frac{\dot{y}}{y} = \frac{f'(k)\dot{k}}{f(k)} = \frac{kf'(k)}{f(k)}\gamma_k = sf'(k) - (n + \delta)Sh(k),$$

където величината

$$Sh(k) := \frac{kf'(k)}{f(k)}$$

се нарича дял на капитала (като част от общия доход).

# Динамика на прехода към стационарната стойност (5)

След диференциране относно  $k$  намираме

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} &= sf''(k) - (n + \delta) \frac{(kf'' + f')f - k(f')^2}{f^2} = \\ &= sf''(k) - (n + \delta) \frac{kf''}{f} - (n + \delta) \frac{f'}{f} \left[ 1 - \frac{kf'}{f} \right],\end{aligned}$$

т.е. предвид (6)

$$(11) \quad \frac{\partial \gamma_y}{\partial k} = \frac{f''(k)k}{f(k)} \gamma_k - \frac{(n + \delta)f'(k)}{f(k)} [1 - \text{Sh}(k)].$$

# Динамика на прехода към стационарната стойност (6)

- Понеже  $0 < \text{Sh}(k) < 1$ , последното събираемо в дясната страна на (11) е отрицателно.
- Когато  $\gamma_k \geq 0$ , тогава и първото събираемо е неположително и в крайна сметка  $\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0$ .
- Следователно при тези условия  $\gamma_y$  намалява при нарастване на  $k$ . Да напомним, че  $\gamma_k \geq 0$  е изпълнено при  $k \leq k_0(s)$ .

# Динамика на прехода към стационарната стойност (7)

- При условие че  $\gamma_k < 0$  (т.е.  $k > k_0$ ), знакът на  $\frac{\partial \gamma_y}{\partial k}$  не може да се определи (при максимално общите предположения за  $f(k)$ ).
- Можем да кажем обаче, че ако икономиката е много близо до стационарното състояние (т.е.  $k - k_0$  е много малко), тогава  $\gamma_k > 0$  ще бъде много малко и следователно отново  $\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0$ .
- Тъй като  $s = \text{const}$  в модела на Солоу–Суон, от равенството  $s = (1 - s)y$  следва, че поведението на  $\gamma_c$  съвпада с това на  $\gamma_y$ .