Модел на Солоу-Суон

Андрей Василев

Основни въпроси

- Формулировка на модела на Солоу-Суон
- Равновесие в модела
- „Златно правило" за натрупване на капитала
- Динамика на прехода към стационарната стойност

Основни положения (1)

- Моделът на Солоу–Суон (Solow–Swan) се нарича още неокласически модел на икономически растеж.
- Ще разгледаме формулировка на модела в непрекъснато време и за случая на затворена икономика.
- Означаваме с $K(t)$, $L(t)$, $Y(t)$, $S(t)$ и $I(t)$ съответно обемите на капитала, труда, производството, спестяванията и инвестициите през периода t. Тези величини са функции на аргумента $t \in [0, +\infty)$.
- Понеже икономиката е затворена, имаме

$$S(t) = I(t). \tag{1}$$

Основни положения (2)

- Предполагаме, че склонността към спестяване (която в линейния случай съвпада с нормата на спестяване) $s = \text{const} \in (0, 1)$ е постоянна и зададена екзогенно:

$$S(t) = sY(t). \tag{2}$$

- Приемаме, че работната сила $L(t)$ расте с постоянен темп $n = \text{const} > 0$. С помощта на нормирането $L(0) = 1$ получаваме

$$L(t) = e^{nt}.$$

- Разглежда се неокласическа производствена функция

$$Y = F(K, L).$$

Интензивна форма на производствената технология

Ако означим

$$k = \frac{K}{L}, \; y = \frac{Y}{L},$$

от условието за хомогенност следва, че

$$Y = F(K, L) = LF(k, 1) := Lf(k),$$

което ни дава

$$y = f(k) \tag{3}$$

(производствена функция в интензивна форма).

Свойства на производствената функция в интензивна форма

Понеже $Y = Lf(k)$, намираме

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k) > 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial L} = [f(k) - kf'(k)] > 0 \end{cases}$$

и от условията на Инада следва, че

$$(5) \qquad \lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0.$$

Базисно уравнение на модела на Солоу

Натрупване на капитал:

$$\dot{K} = I - \delta K \equiv sF(K, L) - \delta K,$$

където $\delta = \text{const} > 0$ отчита амортизирането на капитала.

Следователно

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k,$$

откъдето, предвид

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L^2}\dot{L},$$

получаваме

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k. \qquad (6)$$

Казваме, че икономиката се намира на **равновесна траектория**, ако величините, които я описват $(k, y, c, \dots)$ имат постоянен темп на нарастване (т.е. $\dot{k}/k = \text{const}$ и т.н.).

Забележка. На английски терминът, използван за равновесна траектория, е *steady state*. Същият термин се използва и за стационарна точка на динамична система. В англоезичната икономическа литература терминът *steady state* се използва и при постоянен ненулев темп на нарастване, като обикновено изходната динамична система, описваща икономиката, може да се трансформира по подходящ начин, така че на равновесните ѝ траектории да съответстват стационарните точки на трансформираната система.

Равновесие в модела на Солоу (1)

От (6) следва, че за равновесната траектория

$$\frac{\dot{k}}{k} = \text{const} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta),$$

откъдето

$$\frac{f(k)}{k} = \text{const}\,.$$

Оттук, след диференциране по времето t, намираме

$$0 = \frac{f'(k)\dot{k}}{k} - \frac{f(k)\dot{k}}{k^2} = \frac{\dot{k}}{k}\cdot\frac{kf'(k) - f(k)}{k}.$$

Понеже числителят на последната дроб е положителен (вж. (4)), производната $\dot{k} = 0$, т.е. $k(t) = k_0 = \text{const}$ за равновесната траектория. Тогава са постоянни също $y_0 = f(k_0)$ и $c_0 = (1-s)f(k_0)$.

- Т.е. установихме, че в модела на Солоу условието за постоянен темп на растеж всъщност означава, че величините са постоянни.
- Може да се покаже, че върху равновесната траектория величините K, Y и C растат с постоянен темп, а именно темпът на нарастване на работната сила n.
- Да проверим това твърдение например за K. Имаме

$$0 = \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}n,$$

откъдето следва $\frac{\dot{K}}{K} = n$.

Равновесие в модела на Солоу (3)

За равновесната траектория числото $k = k_0 > 0$ удовлетворява

$$sf(k_0) = (n+\delta)k_0. \tag{7}$$

Определяме функцията $k_0 = k_0(s)$ от последното уравнение. Това е възможно, защото

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial k_0}[sf(k_0) - (n+\delta)k_0] = sf'(k_0) - (n+\delta) = \\
&= \frac{1}{k_0}\left[k_0 sf'(k_0) - (n+\delta)k_0\right] = \frac{1}{k_0}\left[k_0 sf'(k_0) - sf(k_0)\right] = \\
&= \frac{s}{k_0}\left[k_0 f'(k_0) - f(k_0)\right] < 0
\end{aligned}$$

поради (4).

Равновесие в модела на Солоу (4)

Производната на функцията $k_0 = k_0(s)$ е положителна, защото след диференциране на (7) по s получаваме, че

$$f(k_0) + sf'(k_0)\frac{dk_0}{ds} = (n+\delta)\frac{dk_0}{ds},$$

откъдето

$$\frac{dk_0}{ds} = \frac{f(k_0)}{n+\delta - sf'(k_0)} > 0. \tag{8}$$

Последното означава, че равновесният капитал нараства при нарастване на спестяванията в икономиката.

„Златно правило" за натрупване на капитала (1)

За равновесната траектория потреблението на глава от населението е

$$c_0 = (1 - s)f(k_0(s)) = f(k_0(s)) - (n + \delta)k_0(s)$$

и има производна

$$\frac{dc_0}{ds} = \left[f'(k_0(s)) - (n + \delta)\right] \frac{dk_0(s)}{ds}.$$

При малки стойности на s (т.е. за малки $k_0(s)$) тя е положителна (вж. (5)), а за големи s – отрицателна.

„Златно правило" за натрупване на капитала (2)

Следователно $c_0(s)$ достига максимума си за онази стойност на s, за която

$$\frac{dc_0}{ds} = 0, \text{ т.е. } f'(k_0(s)) = n + \delta,$$

тъй като производната на k_0 по s е положителна. Тази стойност на s се означава s_{gold}, съответно имаме $k_0 = k_{\text{gold}}$, потребление c_{gold}.

Смисълът от названието на това правило е, че при този темп на спестяване в равновесие се осигурява максималното възможно ниво на потребление. Разбира се, за кратко е възможно да се увеличи потреблението в даден къс хоризонт, но при златното правило се постига максималното възможно потребление и за бъдещите поколения.

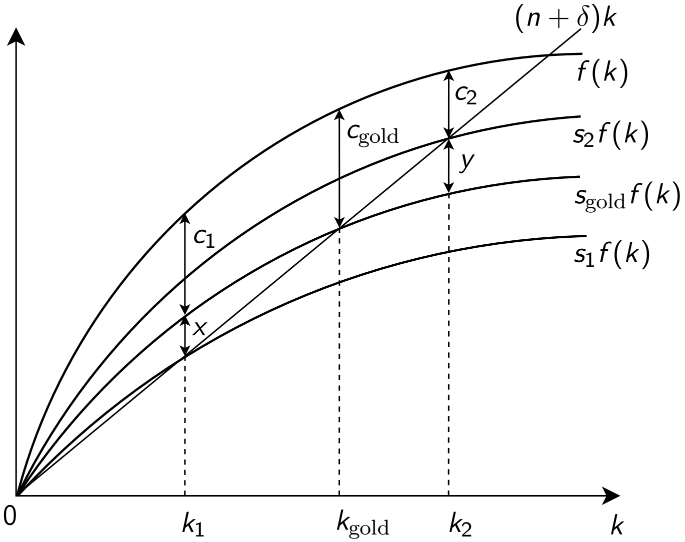
- Нека да вземем стойности s_i, $i = 1, 2$, за които $s_1 < s_{\mathrm{gold}} < s_2$. Тогава предвид (8), за съответните стационарни стойности $k_i = k_0(s_i)$, $i = 1, 2$, имаме

$$k_1 < k_{\mathrm{gold}} < k_2.$$

- При икономика, в която нормата на спестяване $s_2 > s_{\mathrm{gold}}$, ще се реализира потребление $c_2 < c_{\mathrm{gold}}$ (тъй като последното е максимално възможно).

- Ако s_2 се намали до s_{gold}, c_2 ще нарасне до c_{gold} (като в началото ще се наблюдава фактически още по-голяма стойност). Това показва, че при $s > s_{\mathrm{gold}}$ икономиката не функционира ефективно.

- За $s_1 < s_{\mathrm{gold}}$ потреблението $c_1 < c_{\mathrm{gold}}$ ще нарасне до максималната стойност след първоначален преходен период с намалено потребление.


$(n+\delta)k$
$f(k)$
c_2
c_{gold}
$s_2 f(k)$
y
$s_{\text{gold}} f(k)$
c_1
$s_1 f(k)$
x
0
k_1
k_{gold}
k_2
k

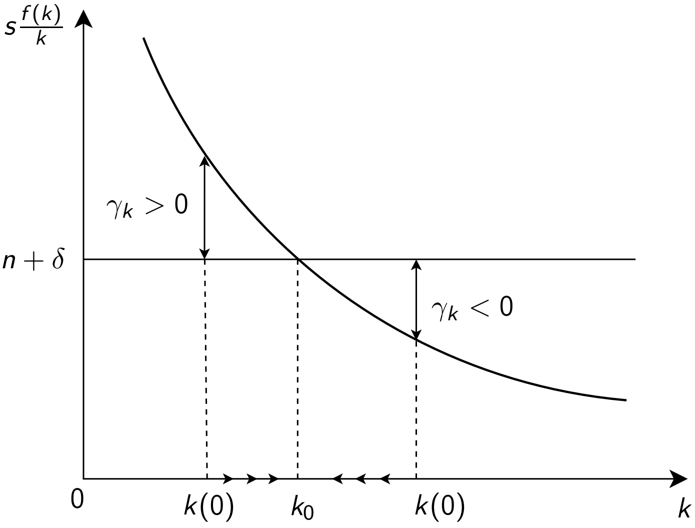
Динамика на прехода към стационарната стойност (1)

- Ще разгледаме динамиката на прехода към стационарната стойност k_0 в зависимост от началната стойност $k(0)$ на капитала $k(t)$.
- От основното уравнение (6) се вижда, че темпът на растеж на $k(t)$

$$\gamma_k := \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta) \tag{9}$$

  е положителен при малки стойности на k и отрицателен – при големи.
- Скоростта на прехода към равновесието е толкова по-малка, колкото $k(0)$ е по-близо до k_0 (вж. следващата фигура).

Динамика на прехода към стационарната стойност (2)



Динамика на прехода към стационарната стойност (3)

- По-нататък темпът на растеж $\dot{\varphi}/\varphi$ на функцията $\varphi(t)$ ще означаваме с γ_φ.
- Например

$$\gamma_K := \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{L} \cdot \frac{L}{K} = \frac{1}{k}(\dot{k} + kn) = \gamma_k + n,$$

т.е. темпът на растеж на общия обем на капитала $K(t)$ е равен на темпа на растеж на капитала на глава от населението $\gamma_{k(t)}$, увеличен с темпа n на растеж на населението.

Аналогично бихме могли да изучим темпа на растеж на производството на глава от населението (вж. (9)):

$$\gamma_y := \frac{\dot{y}}{y} = \frac{f'(k)\dot{k}}{f(k)} = \frac{kf'(k)}{f(k)}\gamma_k = sf'(k) - (n+\delta)\mathrm{Sh}(k), \tag{10}$$

където величината

$$\mathrm{Sh}(k) := \frac{kf'(k)}{f(k)}$$

се нарича **дял на капитала** (като част от общия доход).

След диференциране относно k намираме

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} = sf''(k) - (n+\delta)\frac{(kf''+f')f - k(f')^2}{f^2} =$$
$$= sf''(k) - (n+\delta)\frac{kf''}{f} - (n+\delta)\frac{f'}{f}\left[1 - \frac{kf'}{f}\right],$$

т.е. предвид (6)

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} = \frac{f''(k)k}{f(k)}\gamma_k - \frac{(n+\delta)f'(k)}{f(k)}\left[1 - \mathrm{Sh}(k)\right]. \tag{11}$$

- Понеже $0 < \mathrm{Sh}(k) < 1$, последното събираемо в дясната страна на (11) е отрицателно.
- Когато $\gamma_k \geq 0$, тогава и първото събираемо е неположително и в крайна сметка $\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0$.
- Следователно при тези условия γ_y намалява при нарастване на k. Да напомним, че $\gamma_k \geq 0$ е изпълнено при $k \leq k_0(s)$.

Динамика на прехода към стационарната стойност (7)

- При условие че $\gamma_k < 0$ (т.е. $k > k_0$), знакът на $\frac{\partial \gamma_y}{\partial k}$ не може да се определи (при максимално общите предположения за $f(k)$).
- Можем да кажем обаче, че ако икономиката е много близо до стационарното състояние (т.е. $k - k_0$ е много малко), тогава $\gamma_k > 0$ ще бъде много малко и следователно отново $\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0$.
- Тъй като $s = \text{const}$ в модела на Солоу–Суон, от равенството $c = (1 - s)y$ следва, че поведението на γ_c съвпада с това на γ_y.