Модел на Рамзи-Кас-Купманс

Андрей Василев

Основни въпроси

- Уводни бележки
- Математически апарат
- Модел на Рамзи – формулировка
- Изследване на модела на Рамзи

Уводни бележки

- Основно допускане в модела на Солоу е това за екзогенна фиксирана норма на спестяване $s \in (0, 1)$
- Подобно допускане може да бъде отслабено, доколкото е интуитивно, че при различни икономически обстоятелства се спестява различна част от дохода
- Моделът на Рамзи-Кас-Купманс (за краткост често е наричан само „модел на Рамзи”) позволява решенията за потребление, спестяване и съответно инвестиции да се вземат ендогенно, на основата на оптимално (в смисъла на решаване на подходяща оптимизационна задача) поведение на съответните икономически агенти, като по този начин обобщава модела на Солоу
- Отново разглеждаме случая на затворена икономика и работим в непрекъснато време

Математически апарат (1)

- Постановките, които ще разглеждаме, изискват да се моделира оптимално поведение в динамика
- Един от възможните математически подходи за целта е с използването на апарат от теорията на оптималното управление

Типична задача:

$$\max_{c(t)} \int_0^T f(k(t), c(t), t)\, dt, \tag{1}$$

при ограничението **фазовата променлива** $k(t)$ да удовлетворява уравнението

$$\dot{k}(t) = g(k(t), c(t), t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

(където с точка над съответната буква е означена производната ѝ по времето t) при дадена начална стойност

$$k(0) = k_0 > 0, \tag{3}$$

а $c(t)$ се нарича **управляваща променлива** или **управление**.

- Променливите $k(t)$ и $c(t)$ са скаларни в разглеждания от нас случай
- За всички използвани по-нататък свойства на съответните обекти (напр. диференцируемост) ще предполагаме, че са изпълнени, без да правим изрични уточнения
- В типичните икономически приложения се приема, че $T = +\infty$ и съответно интегралът в целевия функционал (1) е от 0 до $+\infty$ (това по принцип може да създаде математически трудности, които ние ще пренебрегнем тук)

Математически апарат (4)

- Тук ще се ограничим до алгоритмично получаване на необходими условия за оптималност
- За целта се съставя функцията на Хамилтън

$$J(k, c, t, \mu) = f(k, c, t) + \mu g(k, c, t), \tag{4}$$

  където функцията $\mu = \mu(t)$ се нарича **спрегната променлива**
- Необходимите условия в скаларния случай съдържат две уравнения:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial J}{\partial k} + \dot{\mu} = 0, \tag{5}$$

  и **условието за трансверсалност**

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) k(t) = 0. \tag{6}$$

- Необходимите условия (5) и (6) представляват конкретно приложение на т.нар. **принцип за максимума на Понтрягин**
- Първото условие от (5) е частен случай на условие за максимизация на J по c
- Условието за трансверсалност е необходимо условие само при специални случаи. Това е изпълнено при определени предположения за J, μ и

$$f(k,c,t) \equiv e^{-Rt}h(k,c,t), \;\; R > 0$$

(вж. края на §1.3.9 в приложението на Barro and Sala-i-Martin (1995))

- В модела има домакинства и фирми
- Домакинствата съществуват вечно
- Представителното домакинство се характеризира с определени активи $A(t)$, потребление $C(t)$ и трудово възнаграждение $W(t)$
- Населението расте с постоянен темп $n > 0$:

$$L(t) = e^{nt}, \ L(0) = 1. \tag{7}$$

- Изменението на финансовите активи на домакинството от момента t до момента $t + \Delta t$ има вида

$$A(t+\Delta t) - A(t) = \int_t^{t+\Delta t} r(\tau)A(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+\Delta t} W(\tau)\,d\tau - \int_t^{t+\Delta t} C(\tau)\,d\tau,$$

  където $r(t)$ е лихвеният процент в дадения момент t

- Като разделим на Δt и оставим Δt да клони към нула, стигаме до диференциалното уравнение

$$\dot{A}(t) = r(t)A(t) + W(t) - C(t). \tag{8}$$

- Домакинството може да има дълг, което се отразява в отрицателни активи: $A(t) < 0$
- Предполагаме пълна заетост, т.е. броят на заетите е равен на населението
- Променливите на глава от населението означаваме с малки букви: $w(t) := \frac{W(t)}{L(t)}$, $c(t) := \frac{C(t)}{L(t)}$ и $a(t) := \frac{A(t)}{L(t)}$
- Тъй като

$$\frac{\dot{A}(t)}{L(t)} = \left(\frac{A(t)}{L(t)}\right)^{\cdot} + \frac{A(t)\dot{L}(t)}{[L(t)]^2} = \dot{a}(t) + na(t),$$

от (8) следва

$$\dot{a}(t) = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t) \tag{9}$$

- Полезността от потреблението на един индивид се измерва с **функция на полезност** (наричана понякога и felicity function):

$$u = u(c), \quad u : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

която е достатъчно гладка и има свойствата

$$(10) \qquad \begin{cases} u'(c) > 0, & u''(c) < 0, \\ \lim\limits_{c \to 0+} u'(c) = +\infty, & \lim\limits_{c \to +\infty} u'(c) = 0. \end{cases}$$

- Общата полезност в момента t е

$$(11) \qquad u(c(t))e^{nt},$$

т.е. индивидуалната полезност, умножена с броя на индивидите

- За да се отчетат предпочитанията на потребителите по отношение на момента от времето, в който тази полезност се реализира, въвеждаме дисконтиращ множител $e^{-\rho t}$, $\rho = \text{const} > 0$, за полезността (11)

- По-големите стойности на ρ означават по-малка полезност за фиксиран момент от времето t, което може да се интерпретира като по-висока степен на „нетърпеливост"

- Ако полезността $u(c(t))$ е ограничена функция (например ако $c(t) \in [0, C]$, $C = \text{const}$), тогава при $\rho > n$ изразът

$$U = \int_0^{\infty} u(c(t))e^{nt}e^{-\rho t}\,dt \tag{12}$$

за тоталната полезност за всички домакинства от избрания поток на потребление $c = c(t)$, $t \in [0, +\infty)$ е *сходящ* интеграл.

- Може да се покаже, че за оптималното потребление е невъзможно да се получи $c(t) = 0$ за някое t
- Потенциален проблем в модела е възможността представителното домакинство да натрупва верижно все по-големи дългове, с които едновременно да финансира потребление и да връща старите задължения. Това е т.нар. **игра на Понци** (Ponzi).
- За да забраним тази възможност ще поискаме асимптотично (т.е. за $t \to \infty$) да бъде изпълнено активите на едно лице да бъдат неотрицателни
  - В частност, това обхваща случая, когато отрицателните стойности на $a(t)$ (т.е. дълговете за едно лице) клонят към нула

- При нашите означения ограничението за забрана на игри на Понци се изразява в модифициран вид с условието

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) e^{-\int_0^t (r(\tau) - n)\, d\tau} \geq 0. \tag{13}$$

- Модификации
  - Има дисконтиране
  - Присъства множителят e^{nt} (= брой на индивидите)
- Интерпретация: настоящата стойност на нетните активи на агентите в цялата икономика асимптотично е неотрицателна

В крайна сметка се стига до следната задача:

Да се максимизира по $c(t)$ съвкупната полезност U от (12) при следните условия:

- бюджетното ограничение (9)
- зададена начална стойност $a(0) = a_0$
- ограничението (13) върху заемите
- управлението $c(t)$ се избира от $[0, +\infty)$ за всяко t

За да получим *необходимите условия* от първи ред, образуваме хамилтониана

$$J = u(c)e^{-(\rho-n)t} + \nu(t)[w(t) + (r(t) - n)a(t) - c(t)]. \tag{14}$$

Тук променливата $\nu(t)$ (наричана **спрегната**, или множител на Лангранж) е **сенчестата (скритата) цена** на богатството $a(t)$
Условията

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial a}$$

имат в случая формата

$$\nu(t) = u'(c(t))e^{-(\rho-n)t}, \tag{15}$$

$$\dot{\nu}(t) = -(r(t) - n)\nu(t). \tag{16}$$

Към предходните условия трябва да добавим и **условието за трансверсалност**:

$$\lim_{t\to\infty}[\nu(t)a(t)] = 0. \tag{17}$$

Диференцираме (15), записано във вида

$$e^{(\rho-n)t}\nu(t) = u'(c(t)),$$

относно t и заменяме $\dot{\nu}$ с израза от (16). Това ни дава

$$e^{(\rho-n)t}\nu(t)(\rho - r(t)) = u''(c(t))\dot{c}(t).$$

Последният израз, комбиниран с (15), води до

$$r(t) = \rho - \left[\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))}\right]\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}. \tag{18}$$

Понякога (18) се нарича **уравнение на Ойлер**.

Напомняме, че **еластичност** на дадена функция $f(x)$ се дефинира като $\frac{f'(x)x}{f(x)}$ (интерпретация!).

Съответно изразът в скобите в (18) е еластичността на $u'(c)$ относно c. Той е отрицателен, понеже $u''(c) < 0$.

Интерпретация: кога расте (= се отлага във времето) потреблението?

От (15) имаме

$$\nu(0) = u'(c(0)) > 0$$

и от (16) намираме

$$\nu(t) = \nu(0)e^{-\int_0^t (r(\tau)-n)\,d\tau}. \tag{19}$$

Това позволява условието за трансверсалност (17) да се запише във вида

$$\lim_{t\to+\infty} a(t)e^{-\int_0^t (r(\tau)-n)\,d\tau} = 0, \tag{20}$$

което е дори по-силно от желаното (13).

Една често използвана практика е да се вземе следната функция на полезност:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \ \theta = \text{const} > 0. \tag{21}$$

Включването на (-1) в числителя е обичайно, защото така при $\theta \to 0+$ се получава често използваната функция $\ln c$.

При направения избор (21) за $u(c)$ равенство (18) има вида

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho). \tag{22}$$

Оттук се получава

$$c(t) = c(0)e^{\frac{1}{\theta}[\bar{r}(t)-\rho]t}, \tag{23}$$

където $\bar{r}(t)$ е средният лихвен процент от 0 до t:

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(\tau)\,d\tau. \tag{24}$$

В частност, имаме $c(0) > 0$ защото $c(0) = 0$ би означавало $c(t) = 0$ за всяко t.

- Фирмите в модела произвеждат стоки, като заплащат за труда $L(t)$ и за вложения капитал $K(t)$
- Производствена технология:

$$Y = F(K, \hat{L}), \tag{25}$$

където $\hat{L} = L(t)A(t)$ е в единици ефективен труд, а $A(t)$ е нивото на технологията.

- За улеснение приемаме, че $A(t)$ расте с постоянна скорост $x \geq 0$. Тогава, след нормирането $A(0) = 1$, намираме

$$A(t) = e^{xt}.$$

- Променлива z *за единица ефективен труд* се записва като $\hat{z}$ и така нормираните Y и K са съответно

$$\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}} \quad \text{и} \quad \hat{k} = \frac{K}{\hat{L}},$$

а производствената функция в интензивна форма е

$$\hat{y} = f(\hat{k}) \equiv F(\hat{k}, 1),$$

където $f(0) = 0$ и производните

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\hat{k}), \tag{26}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = [f(\hat{k}) - \hat{k} f'(\hat{k})] e^{xt} \tag{27}$$

се предполагат положителни.

- От условията на Инада за F съответно следват

$$\lim_{\hat{k}\to 0+} f'(\hat{k}) = \infty, \tag{28}$$

$$\lim_{\hat{k}\to\infty} f'(\hat{k}) = 0. \tag{29}$$

- Ще считаме, че домакинствата са притежатели на капитала, който фирмата наема при **рентна цена** $R(t)$
- Ако капиталът се амортизира с постоянна скорост $\delta \geq 0$, то чистата възвращаемост за домакинствата е $R(t) - \delta$ на единица капитал
- Тъй като те могат да заемат средства на други домакинства при лихва $r(t)$, вместо да купят капитал, по съображения за липса на арбитраж получаваме $r(t) = R(t) - \delta$, т.е. $R(t) = r(t) + \delta$

- Представителната фирма във всеки момент от времето има **печалба**

$$\Pi = F(K, \hat{L}) - (r+\delta)K - wL = \hat{L}[f(\hat{k}) - (r+\delta)\hat{k} - we^{-xt}]. \tag{30}$$

- Тъй като $\hat{L}$ се счита за дадено във всеки момент, фирмата максимизира печалбата си, подбирайки количеството капитал, и значи в сила е релацията

$$f'(\hat{k}(t)) = r(t) + \delta. \tag{31}$$

- Знакът на печалбата в оптимум ще зависи от стойността на w

- Приемаме, че фирмите функционират в условия на съвършена конкуренция, което означава, че заплатата ще бъде такава, че печалбата на една фирма да е нула.
    - Ако имахме $\Pi > 0$ за една фирма, какъв би бил стимулът ѝ да променя използваното количество труд (нагоре или надолу)? Какъв ефект върху заплатата очаквате, ако всички фирми в икономиката се държат така? Ако $\Pi < 0$?

- Условието $\Pi = 0$, т.е.

$$f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt} = 0,$$

заедно с (31), ни дава

$$[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt} = w. \tag{32}$$

- При горната постановка можем да определим оптимално съотношение между производствените фактори, т.е. $\hat{k}$
- Резултатите от това ще се използват в общия модел за определяне на обема на производството на ниво икономика
- Не можем обаче да определим производството на ниво отделна фирма

- В разглежданата затворена икономика всяка единица капитал трябва да се притежава от някое домакинство
- Следователно активите трябва да са равни на капитала, $a = k$
  - Ако икономиката беше *отворена*, наличието на разлика между a и k би съответствало на нетните (!) активи на домакинствата по отношение на останалия свят
- Като поставим $a = k = \hat{k}e^{xt}$ в уравнение (9), вземайки предвид, че $c = \hat{c}e^{xt}$, както и формула (32) за w и условието (31), намираме

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta)\hat{k}, \tag{33}$$

където $\hat{k}(0)$ е дадено

- Уравнение (33) само по себе си не е достатъчно за решаването на модела – необходимо е да определим и $\hat{c}$
- Ще разгледаме частния случай на избора (21) на функция на полезност
- Като вземем предвид, че $\hat{c} = ce^{-xt}$ и $r = f(\hat{k}) - \delta$ намираме чрез (22) уравнението

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} \equiv \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta}[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]. \tag{34}$$

- Системата (33)-(34) за $\hat{k}, \hat{c}$ заедно с началното условие $\hat{k}(0)$ и крайното условие (20) (т.е. условие в $+\infty$) ще определя оптималния път за $\hat{k}, \hat{c}$
- Предвид $a = k = \hat{k}e^{xt}$ и уравнение (31), условието за трансверсалност (20) приема вида
(35)
$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}(t)\exp\left(-\int_0^t [f'(\hat{k}(\nu)) - \delta - x - n]\,d\nu\right)\right\} = 0.$$

- Подобно на модела на Солоу, **равновесна траектория** дефинираме като такава, върху която $\hat{k}$ и $\hat{c}$ имат *постоянен темп на изменение*, т.е.

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \left(\gamma_{\hat{k}}\right)^* = \text{const}, \quad \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\gamma_{\hat{c}}\right)^* = \text{const}\,. \tag{36}$$

- Може да се покаже, че върху равновесните траектории величините $\hat{k}$ и $\hat{c}$ са константи, т.е. представляват истинско стационарно състояние, а оттам също се отнася и за $\hat{y} = f(\hat{k})$
- Следователно променливите k, c, y „на глава от работещите" растат с постоянен темп x, а тоталните променливи (за цялата икономика) K, C, Y – с темп $x + n$
- Това съответства точно на модела на Солоу

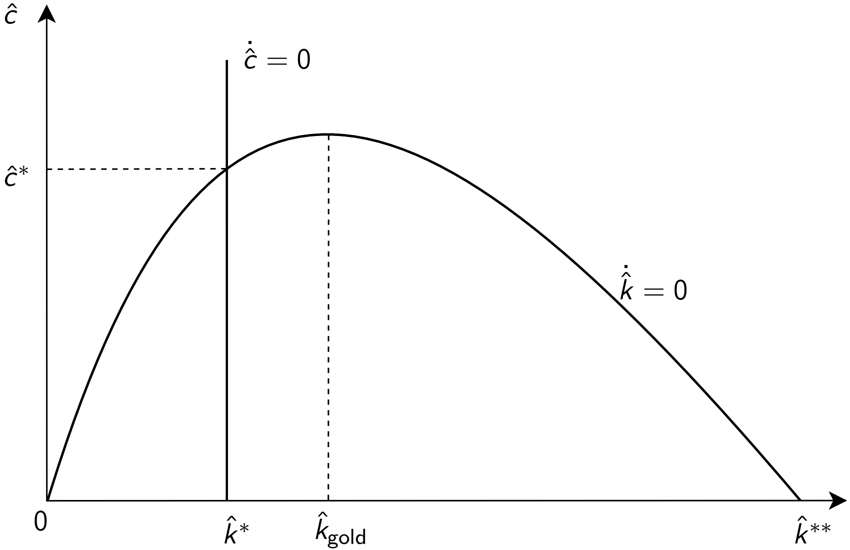
- Определянето на стационарно състояние $\hat{k}^*, \hat{c}^*$ става, като положим $\dot{\hat{k}}$ и $\dot{\hat{c}}$ равни на нула в (33) и (34)
- Геометрично се интересуваме от двойките $(\hat{k}, \hat{c})$, които удовлетворяват:
  1. уравнението $\dot{\hat{k}} = 0$, т.е.

     (37) $$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta)\hat{k},$$

  2. уравнението $\dot{\hat{c}} = 0$, т.е.

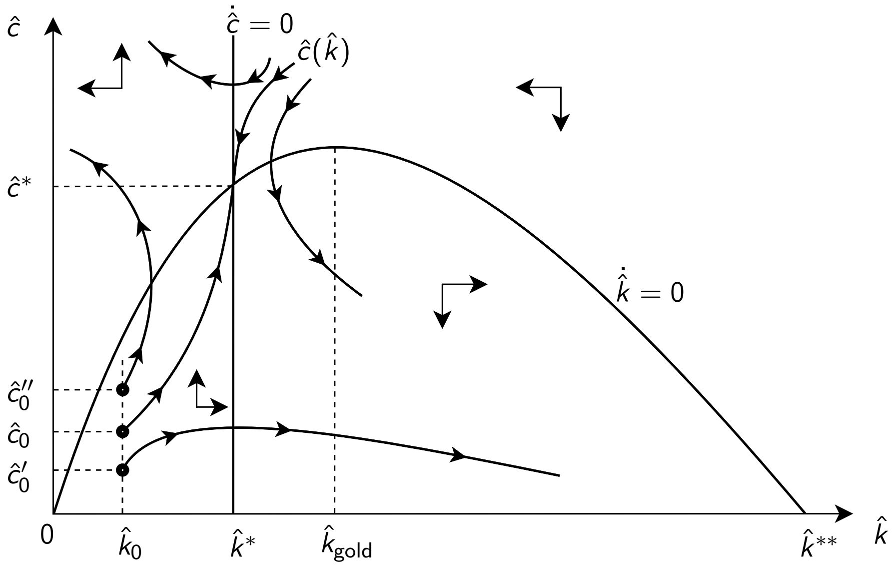
     (38) $$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x,$$

     което всъщност е вертикална права $\hat{k} = \hat{k}^*$


$\hat{c}$
$\dot{\hat{c}} = 0$
$\hat{c}^*$
$\dot{\hat{k}} = 0$
0
$\hat{k}^*$
$\hat{k}_{\text{gold}}$
$\hat{k}^{**}$

- На графиката е отчетено поведението на $f(\hat{k})$ и кривата е показана до стойността $\hat{k}^{*}*$, за която $\hat{c} > 0$
- Условието за екстремум на тази крива е $f'(\hat{k}) - \delta = x + n$, което определя „златното правило" за натрупване на капитал в модела на Солоу (с точност до условието $x = 0$ в разгледания от нас вариант на модела на Солоу)
- На графиката стойността $\hat{k}^{*}$ е взета вляво от $\hat{k}_{\text{gold}}$ – това е свойство на модела, когато е изпълнено условието за трансверсалност

- Фазовата диаграма на системата (33), (34) е от тип **седло**
- Следователно съществува единствен устойчив път към стационарното състояние



$\hat{c}$
$\dot{\hat{c}} = 0$
$\hat{c}(\hat{k})$
$\hat{c}^*$
$\dot{\hat{k}} = 0$
$\hat{c}_0''$
$\hat{c}_0$
$\hat{c}_0'$
0
$\hat{k}_0$
$\hat{k}^*$
$\hat{k}_{\text{gold}}$
$\hat{k}^{**}$
$\hat{k}$

- Макар че на фазовата диаграма началното условие за системата е $\hat{k}_0, \hat{c}_0$, между двата компонента на началното условие има съществени разлики
  - Началният капитал на единица ефективен труд $\hat{k}_0$ е зададен
  - Стойността на $\hat{c}_0$ се избира като част от решението на оптимизационната задача на домакинството
- Въпросът е кои точки $\hat{c}_0$ от вертикалната права през $\hat{k}_0$ удовлетворяват необходимите условия
- Може да се покаже, че единствената такава точка е тази, която е върху устойчивия път към стационарното състояние

- Устойчивата траектория за $\hat{k}_0 < \hat{k}_0$ е изобразена като изпъкнала функция на нашата фазова диаграма
- Дали това е така зависи от стойността на параметъра θ:
  - За малки стойности на θ траекторията е изпъкнала (както е изобразена)
  - За големи стойности на θ траекторията става вдлъбната и е близо до кривата $\dot{\hat{k}} = 0$
- Ако $\hat{k}_0 > \hat{k}_0$ се наблюдава обратната ситуация – за малки стойности на θ траекторията е вдлъбната (виж диаграмата)

- В модела на Рамзи
$$\frac{C}{Y} = \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})}$$
и следователно нормата на спестяване е равна на
$$s = 1 - \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})}$$
- Тази норма, за разлика от модела на Солоу, се изменя във времето и по принцип може да има различна динамика в зависимост от параметризацията на функцията на полезност и производствената функция
- По-конкретни резултати могат да бъдат получени за случая на производствена функция на Коб-Дъглас $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$

- Ако $f(\hat{k}) = A\hat{k}^\alpha$, стационарната стойност на нормата на спестяване $s^* = 1 - \frac{\hat{c}^*}{f(\hat{k}^*)}$ е равна на величината

$$\frac{\alpha(x+n+\delta)}{\rho+\theta x+\delta}$$

- Може да се покаже, че $s^* < \alpha$

- При означението

$$z = \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})}$$

е в сила

$$\gamma_z = \frac{\dot{z}}{z} = f'(\hat{k})\left[z(t) - \frac{\theta-1}{\theta}\right] + (\delta+\rho+\theta x)\left(s^* - \frac{1}{\theta}\right). \tag{39}$$

- Ако $s^* > \frac{1}{\theta}$, то s нараства с нарастването на $\hat{k}$
- Ако $s^* = \frac{1}{\theta}$, то $s(t)$ е константа $(= s^*)$
- Ако $s^* < \frac{1}{\theta}$, то s е намаляваща функция от $\hat{k}$