Методи за динамично оптимизиране за задачи със стохастичен елемент. Задачи за оптимално разпределение и линейни приближения

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Извеждане на необходими условия за оптималност за стохастични задачи
- Оптимално разпределение при непрекъснат агрегатор
- Линейни приближения

(1) $$\sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

(2) $$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 \text{ – дадено}$$

- Избират се $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ (*управления*)
- Променливите $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ (*фазови променливи*) се получават с помощта на управленията чрез (2)

Лагранжиан:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, u_0, u_1, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) + \beta^t \langle \lambda_t, [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \rangle, \tag{3}$$

където $\langle \lambda_t, [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i [f^i(x_t, u_t) - x_{t+1}^i]$.

Необходими условия:

$$\begin{aligned} &\beta \left[f^0_{x_t^k}(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i f^i_{x_t^k}(x_t, u_t) \right] = \lambda_{t-1}^k, \quad k = 1, \ldots, n, \\ &f^0_{u_t^j}(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i f^i_{u_t^j}(x_t, u_t) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

Въвеждане на стохастичен елемент в задачата с явни управления (1)

Нека сега във фазовите уравнения участва и случайна величина:

(5) $$x_{t+1} = f(x_t, u_t, \epsilon_t), \quad x_0 \text{ – дадено}$$

Тогава $\{x_t\}$ също стават случайни, съответно случайна става и $f^0(x_t, u_t)$.
Това налага модификация на целевия функционал – там трябва да се вземе математическо очакване (условно по наличната информация към съответния момент). Нека за простота сме в момент $t = 0$:

(6) $$\sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

Въвеждане на стохастичен елемент в задачата с явни управления (2)

- Последователност на събитията в рамките на един период:

$$x_t \quad \to \quad u_t \quad \to \quad \epsilon_t \quad \Longrightarrow \quad x_{t+1} \quad \to \quad \cdots$$

  Т.е. когато вземаме решението не сме сигурни къде ще попаднем през следващия период.
  В някои източници пишат $x_{t+1} = f(x_t, u_t, \epsilon_{t+1})$, за да подчертаят тази последователност.
- За разлика от детерминистичните задачи, тук решението не може да бъде предварително избрана траектория $u_0^*, u_1^*, \ldots$ Например, не може в момент 0 да определим u_5, понеже не знаем колко ще бъде x_5 (то е случайно).
- Поради това оптималното поведение се задава като правило за реакция $u_t = \mu(x_t)$, което е функция от състоянието x_t на системата.

Въвеждане на стохастичен елемент в задачата с явни управления (3)

- При горната структура на модела реално се взема решение само за настоящия момент от времето.
- Всичко друго напред остава план, които може да не бъде осъществен.
- На следващата стъпка моделът се решава отново за новите начални условия.
- Това има следствия за прилагането на оператора за условно математическо очакване при пресмятането на необходими условия за оптималност.

Задача:

$$\max_{u_{s+t}} E_s \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_{s+t}, u_{s+t})$$

при условие

$$x_{s+t+1} = f_{s+t}(x_{s+t}, u_{s+t}, \epsilon_{s+t}), \quad x_s - \text{известно},$$

където $x_{s+t} \in \mathbb{R}^n$ и $u_{s+t} \in \mathbb{R}^m$.

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = E_s \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ f^0(x_{s+t}, u_{s+t}) + \langle \lambda_{s+t}, f_{s+t}(x_{s+t}, u_{s+t}, \epsilon_{s+t}) - x_{s+t+1} \rangle \right\}$$

При определени условия (изпълнени за стандартни икономически задачи), решението удовлетворява

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i_{s+t}} = 0,\ i = 1, \ldots, m; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j_{s+t+1}} = 0,\ j = 1, \ldots, n,\ \forall t \geq 0,\ \text{т.е.}$$

$$E_s \left\{ \frac{\partial}{\partial u^i_{s+t}} f^0(x_{s+t}, u_{s+t}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k_{s+t} \frac{\partial}{\partial u^i_{s+t}} f^k_{s+t}(x_{s+t}, u_{s+t}, \epsilon_{s+t}) \right\} = 0,$$

$$\beta E_s \Bigg\{ \frac{\partial}{\partial x^j_{s+t+1}} f^0(x_{s+t+1}, u_{s+t+1}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k_{s+t+1} \frac{\partial}{\partial x^j_{s+t+1}} f^k_{s+t}(x_{s+t+1}, u_{s+t+1}, \epsilon_{s+t+1}) \Bigg\} = E_s \left\{ \lambda^j_{s+t} \right\}$$

- По-лесно е задачата да се напише за $s = 0$. Стандартните задачи са инвариантни по времето и това не пречи.
- Удобно е да приложим оператора за очакването накрая, т.е. след диференцирането и последващите пресмятания.
- Диференцираме по всички управления за произволен момент t и по всички фазови променливи за момент $t + 1$. Приравняваме на нула съответните изрази.
- При прилагане на оператора за условно очакване, той се прилага към момент t.

- Освен горните необходими условия за оптималност, едно решение трябва също така да удовлетворява и стохастичен вариант на условие за трансверсалност. Засега пренебрегваме този детайл, но в разглежданите модели ще осигуряваме това условие да е изпълнено.
- В някои случаи се използва конвенция за записване на фазовите уравнения от типа

$$x_t = f_t(x_{t-1}, u_t, \epsilon_t).$$

(Може да се интерпретира като измерване на фазовите променливи в края на текущия период, а не в началото на следващия, т.е. 31 декември вместо 1 януари.) В този случай диференцирането се извършва по фазовите променливи в момент t вместо $t+1$.

Формулировка:

$$\max_{\{C_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$A_{t+1} = (1+r)A_t + Y_t - C_t, \;\; Y_t = \bar{Y} - \epsilon_t$$

C_t – потребление, A_t – активи, Y_t – доход, r – лихвен процент

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_t \left[(1+r)A_t + Y_t - C_t - A_{t+1} \right] \right\}$$

Пример I (2)

Необходими условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \{ C_t^{-\sigma} - \lambda_t \} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1}(1+r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = \beta(1+r)\lambda_{t+1}$$

Прилагаме E_t:

$$E_t\{C_t^{-\sigma}\} = E_t\{\lambda_t\} \quad \Longrightarrow \quad C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$E_t\{\lambda_t\} = E_t\{\beta(1+r)\lambda_{t+1}\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = \beta(1+r)E_t\{\lambda_{t+1}\}$$

След заместване на $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$ в последния израз:

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1+r)E_t\left\{C_{t+1}^{-\sigma}\right\}$$

Пример I (2)

Необходими условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t\{C_t^{-\sigma} - \lambda_t\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(1+r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = \beta(1+r)\lambda_{t+1}$$

Прилагаме E_t:

$$E_t\{C_t^{-\sigma}\} = E_t\{\lambda_t\} \quad \Longrightarrow \quad C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$E_t\{\lambda_t\} = E_t\{\beta(1+r)\lambda_{t+1}\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = \beta(1+r)E_t\{\lambda_{t+1}\}$$

След заместване на $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$ в последния израз:

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1+r)E_t\left\{C_{t+1}^{-\sigma}\right\}$$

Задача: Решете Пример I, ако фазовото уравнение е записано според конвенцията $A_t = (1+r)A_{t-1} + Y_t - C_t$.

Пример II (1)

Формулировка:

$$\max_{\{C_t\},\{N_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t)$$

$$Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - T_t$$

C_t – потребление, N_t – количество труд (отработени часове), B_t – дисконтови облигации, закупувани в период t и падежиращи през $t+1$, Q_t – цена на облигациите, P_t – цена на потребителската стока, W_t – заплата, T_t – данъци/трансфери

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(C_t, N_t) + \lambda_t \left[B_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - T_t - Q_t B_t \right] \right\}$$

Пример II (2)

Въвеждаме $U_{c,t} := \frac{\partial}{\partial C} U(C_t, N_t)$, $U_{n,t} := \frac{\partial}{\partial N} U(C_t, N_t)$.

Диференцираме по управленията:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t U_{c,t} - \beta^t P_t \lambda_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = \frac{U_{c,t}}{P_t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \beta^t U_{n,t} + \beta^t \lambda_t W_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t W_t = -U_{n,t}$$

От предходните две уравнения можем да получим

$$\frac{W_t}{P_t} = -\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}}.$$

Пример II (3)

Диференцираме по фазовата променлива (в момент t за този случай!):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t Q_t \lambda_t + \beta^{t+1}\lambda_{t+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_t \lambda_t = \beta E_t\{\lambda_{t+1}\}$$

След заместване на израза за λ в моменти t и $t+1$, имаме

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}.$$

Окончателно получаваме

$$\frac{W_t}{P_t} = -\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}}, \quad Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \text{ за } t = 0, 1, 2, \ldots$$

Задача: Как изглеждат горните необходими условия, ако функцията на полезност има вида $U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$, $\sigma > 0$, $\varphi \geq 1$?

Задача: решения за спестяване и миграция

$$\max_{\{C_t\},\{Z_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t$$

$$A_{t+1} = (1+r)A_t + w(X_t) - P_t C_t - \xi Z_t^2, \quad w(X_t) = \bar{w}(X_t) + \epsilon_t$$

$$X_{t+1} = X_t + Z_t$$

Означенията са както преди, като в допълнение X_t е положението на икономическия агент в пространството (в случая реалната права), $w(\cdot)$ е заплатата, зависеща от положението в пространството, $\bar{w}(\cdot)$ е гладка функция, а променливата Z_t управлява скоростта на преместване в пространството.

Оптимално разпределение за непрекъснат агрегатор (1)

Разглеждаме задачата

$$\left| \begin{array}{l} \min_{c(j)} \ \int_0^1 p(j)c(j)dj \\ \\ \int_0^1 c(j)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj = C^{\frac{\theta-1}{\theta}} \end{array} \right. ,$$

където $p(j) > 0$ са дадени цени, а $\theta > 1$ и $C > 0$ са константи.

Решението $c(j)$ на задачата се задава от формулата

$$c(j) = \left(\frac{p(j)}{P} \right)^{-\theta} C,$$

при $P := \left(\int_0^1 p(j)^{1-\theta} dj \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$. Също така

$$\int_0^1 p(j)c(j)dj = PC.$$

Оптимално разпределение за непрекъснат агрегатор (2)

Дефинираме (вж. Алексеев, Тихомиров, Фомин. Оптимальное управление. 1979, стр. 77)

$$\mathfrak{L} = p(j)c(j) + \lambda c(j)^{\frac{\theta-1}{\theta}}.$$

Условието $\partial\mathfrak{L}/\partial c = 0$ има вида

$$p(j) + \lambda\frac{\theta-1}{\theta}c(j)^{-\frac{1}{\theta}} = 0.$$

Следователно,

$$p(j) = \left(-\lambda\frac{\theta-1}{\theta}\right)c(j)^{-\frac{1}{\theta}},$$

така че

$$c(j) = \left(-\lambda\frac{\theta-1}{\theta}\right)^{\theta}p(j)^{-\theta}. \tag{7}$$

Оптимално разпределение за непрекъснат агрегатор (3)

Заместваме в изопериметричното ограничение и получаваме

$$\left(-\lambda\frac{\theta-1}{\theta}\right)^{\theta-1}\int_0^1 p(j)^{1-\theta}dj = C^{\frac{\theta-1}{\theta}},$$

т.е.

$$\left(-\lambda\frac{\theta-1}{\theta}\right)P^{-1} = C^{\frac{1}{\theta}}.$$

Тогава от (7) следва

$$c(j) = \left(PC^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} p(j)^{-\theta} = \left(\frac{p(j)}{P}\right)^{-\theta} C.$$

Накрая, проверяваме, че

$$\int_0^1 p(j)c(j)dj = \int_0^1 p(j)p(j)^{-\theta}P^{\theta}Cdj = CP^{\theta}P^{1-\theta} = PC.$$

- За решаването на един динамичен макроикономически модел е удобно да се разглежда приближение на уравненията от модела.
- Обикновено ни интересува поведението на системата в околност на някакво равновесие (стационарно състояние) и приближението се прави около него.
- Най-често приближенията са линейни: трансформираме оригиналното, нелинейно уравнение в линейно по някакъв начин.

- Логаритмуване (за променливи с положителни стойности):

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t,$$

  където $w_t := \ln W_t$, $p_t := \ln P_t$ и т.н.
- Директно приближение по формулата на Тейлър
- Лог-линеаризация (ще я разгледаме отделно)

Нека имаме $x_t \neq 0$ и $\bar{x}$ е дадена стойност на x_t (най-често стационарна стойност).

Логаритмично отклонение (лог-отклонение) на x_t от $\bar{x}$:

$$\hat{x}_t := \ln\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right).$$

Предвид

$$\ln(1+z) \approx \ln(1+z_0) + \frac{1}{1+z_0}(z-z_0),$$

за $z_0 = 0$ получаваме $\ln(1+z) \approx z$ и съответно

$$\ln\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}\right) \approx \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}.$$

Нека $y_t = f(x_t, z_t)$, където f е диференцируема.

Тогава

$$\hat{y}_t = \frac{f_x(\bar{x}, \bar{z})\bar{x}}{f(\bar{x}, \bar{z})}\hat{x}_t + \frac{f_z(\bar{x}, \bar{z})\bar{z}}{f(\bar{x}, \bar{z})}\hat{z}_t$$

Имаме:

1. $y_t = x_t z_t \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = \hat{x}_t + \hat{z}_t.$
2. $y_t = x_t / z_t \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = \hat{x}_t - \hat{z}_t.$
3. $y_t = x_t + z_t \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\hat{x}_t + \frac{\bar{z}}{\bar{y}}\hat{z}_t.$
4. $g(x_t, y_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = -\frac{g_x(\bar{x},\bar{y})\bar{x}}{g_y(\bar{x},\bar{y})\bar{y}}\hat{x}_t$