Детерминистични динамични оптимизационни задачи във вариационна формулировка

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Постановка на задачата
- Принцип за оптималност и уравнение на Белман
- Уравнения на Ойлер

- Оптимизационна задача със специална структура на целевата функция:
  - адитивност
  - дисконтиране
  - безкраен хоризонт
- Ограничения, които свързват допустимите стойности между различните периоди
- Зададено начално условие

Разглеждаме задачата

$$(SP) \qquad \begin{aligned} &\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ &\text{s.t. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \ \ t = 0, 1, 2, \ldots, \\ &x_0 \in X \text{ – дадено} \end{aligned}$$

- $x_t \in X$, където $X \subset \mathbb{R}^n$ е множеството от допустими стойности
- $\beta \in (0, 1)$ – дисконтов фактор (множител)
- $\Gamma(x) \subset X$ – множество от допустими стойности за следващия период за дадено x
- Обичайно за F и Γ се правят подходящи допускания

- $f(k_t)$ – производствена функция, където с k_t е означен физическият капитал
- Уравнение за натрупване на капитала:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t,$$

където $\delta \in (0,1)$ е нормата на амортизация, i_t са инвестициите, а $k_0 > 0$ е даден

- БВП тъждество:

$$y_t = c_t + i_t,$$

c_t – потребление

- $U(c_t)$ – функция на полезност
- Целеви функционал:

$$(1) \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

- Еквивалентен запис на уравнението за натрупване на капитала:

$$(2) \qquad k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c(t), \quad k_0 > 0$$

- Ограничения $k_t, c_t \geq 0$, откъдето

$$(3) \qquad c_t \in [0, (1-\delta)k_t + f(k_t)]$$

- Задачата е да се максимизира (1) по $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ при ограничения (2) и (3)
- Можем да се освободим от c_t и да запишем задачата в еквивалентен вид като

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U((1-\delta)k_t + f(k_t) - k_{t+1})$$

  s.t.

$$k_{t+1} \in [0, (1-\delta)k_t + f(k_t)]$$

  при дадено $k_0 > 0$
- При този запис имаме
  $F(x_t, x_{t+1}) := U((1-\delta)k_t + f(k_t) - k_{t+1})$ и
  $\Gamma(x) := [0, (1-\delta)k_t + f(k_t)]$

Основни допускания

Нека означим с

$$\Pi(x_0) = \{\{x_t\}_{t=0}^{\infty} | x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ \ t \geq 0\}$$

множеството на всички допустими траектории (планове), започващи от x_0.

За да бъде добре дефинирана задачата (SP) е необходимо да се направят определени допускания:

Д1 $\Gamma(x) \neq \emptyset,\ \forall x \in X$

Д2 $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}),\ \ \forall x_0 \in X,\ \underline{x} \in \Pi(x_0)$

Забележка: Изобщо съществуването на границата в Д2 не изключва случая, когато тя е $\pm\infty$. Поради това общата постановка на (SP) е със sup вместо max.

Дефиниция на функция-цена

- Нека дефинираме $u_n : \Pi(x_0) \to \mathbb{R}$ като

$$u_n(\underline{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

и

$$u(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x})$$

- Ако допускания Д1 и Д2 са в сила, можем да дефинираме функцията v^* като

$$v^*(x_0) = \sup_{\underline{x}\in\Pi(x_0)} u(\underline{x})$$

- Тази функция се нарича *функция-цена*.

Разглеждаме познатата задача

$$
(SP) \qquad \begin{aligned} & \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & \text{s.t. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \;\; t = 0, 1, 2, \ldots, \\ & x_0 \in X \text{ -- дадено} \end{aligned}
$$

За нея правим технически допускания (вж. 4.3-4.5, 4.7 и 4.9 в SL за пълния списък) като:

- Множеството X е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^l$ и $\Gamma(x)$ е непразно и компактно за всяко x
- Функцията F е ограничена, непрекъснато диференцируема във вътрешността на допустимото множество, строго вдлъбната и $F(\cdot, y)$ е нарастваща по първите l аргумента за всяко y

- Нека, за дадено x_0, имаме редица $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, която е решение на (SP).

- Тогава за всяко t тази редица трябва да бъде решение и на задачата

$$\begin{aligned} &\max_y [F(x^*_t, y) + \beta F(y, x^*_{t+2})] \\ &\text{s.t. } y \in \Gamma(x^*_t), \qquad x^*_{t+2} \in \Gamma(y) \end{aligned} \tag{4}$$

- **Интуиция**: редицата $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ не може да е оптимална, ако е възможно да направим допустима вариация на някой елемент и това да доведе до нарастване на целевия функционал.

- Нека F_x и F_y означават l-мерните вектори от частни производни съответно по първите и по вторите l аргумента
- Ако x^*_{t+1} е във вътрешността на $\Gamma(x^*_t)$ за всяко t, тогава условията за решение на задача (4) са

$$(5) \qquad 0 = F_y(x^*_t, x^*_{t+1}) + \beta F_x(x^*_{t+1}, x^*_{t+2}), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

- Условията (5) задават система от l на брой диференчни уравнения от втори ред.

- Щом (5) са система от l диференчни уравнения от втори ред, тогава ни трябват $2l$ условия, за да намерим решение
- Векторът от начални условия x_0 задава l такива условия
- Още l условия се задават от т.нар. условия за трансверсалност:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t F_x(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot x_t^* = 0. \tag{6}$$

- Интерпретация за условието за трансверсалност

Теорема (SL, Теорема 4.15)

Нека $X \subset \mathbb{R}^l_+$ и F удовлетворява допускания 4.3–4.5, 4.7 и 4.9. Тогава редицата $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, за която $x^*_{t+1} \in \Gamma(x^*_t)$, $t = 0, 1, \ldots$, е решение на задачата (SP) за зададено x_0, ако тя удовлетворява условията (5) и (6).

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (1)

Задача:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ – дадено}$$

$$y_t = Ak_t^{\alpha}, \quad 0 < \underline{\epsilon} \leq c_t \leq \bar{\epsilon}, \quad \alpha, \beta \in (0,1), \quad A > 0$$

НУ:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{\ln((1-\delta)k_t + Ak_t^{\alpha} - k_{t+1})}_{=F(x_t, x_{t+1})}.$$

Уравнение на Ойлер:

$$F_y(x_t, x_{t+1}) + \beta F_x(x_{t+1}, x_{t+2}) = 0$$

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (2)

При прилагане на уравнението на Ойлер:

$$\frac{-1}{(1-\delta)k_t + Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}} + \beta \frac{(1-\delta) + \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{(1-\delta)k_{t+1} + Ak_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}} = 0$$

Последното има вида

$$G(x_{t+2}, x_{t+1}, x_t) = 0,$$

т.е. нелинейно диференчно уравнение от II ред.