Класически монетарни модели

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Базисен модел – формулировка и решение
- Парична политика и определяне на ценовото равнище
- Модели с пари във функцията на полезност

- Затворена икономика
- Има два вида агенти: домакинства и фирми
- За определени въпроси приемаме, че има и централна банка
- Няма правителство
- Няма капитал и съответно инвестиции
- Пазарите се „изчистват”, т.е. търсене се изравнява с предлагане

Позната формулировка:

$$\max_{\{C_t\},\{N_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t)$$

$$Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - T_t$$

C_t – потребление, N_t – количество труд (отработени часове), B_t – дисконтови облигации, закупувани в период t и падежиращи през $t+1$, Q_t – цена на облигациите, P_t – цена на потребителската стока, W_t – заплата, T_t – данъци/трансфери

Допълнително изискване:

$$\lim_{T\to\infty} E_t\{B_T\} \geq 0$$

Интерпретация: забранява схеми на Понци.
Осигурява да е изпълнено условие за трансверсалност.

Необходими условия:

$$\frac{W_t}{P_t} = -\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}}, \quad Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \text{ за } t = 0, 1, 2, \ldots$$

За функцията на полезност

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \ \sigma > 0, \ \varphi \geq 1$$

тези условия имат вида

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\varphi}, \quad Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}$$

(Това беше задача за домашно!)

Линейно приближение (Galí нарича това лог-линеаризация!):

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t, \tag{1}$$

където $w_t := \ln W_t$, $p_t := \ln P_t$ и т.н.

Линеаризирането на другото необходимо условие (уравнението на Ойлер) е по-сложно. Въвеждаме означенията $i_t := -\ln Q_t$ (защо?), $\rho := -\ln\beta$ и $\pi_{t+1} = p_{t+1} - p_t$. Условието може да бъде записано като

$$e^{-i_t} = e^{-\rho} E_t \left\{ \frac{(e^{c_{t+1}})^{-\sigma}}{(e^{c_t})^{-\sigma}} \frac{e^{p_t}}{e^{p_{t+1}}} \right\};$$

$$1 = E_t\{e^{i_t - \sigma\Delta c_{t+1} - \pi_{t+1} - \rho}\}.$$

Разглеждаме равновесие, при което потреблението расте с темп γ, а инфлацията е π, т.е. $\Delta c_t = \gamma$ и $\pi_t = \pi$. Според предходния израз за такова равновесие е в сила

$$i - \sigma\gamma - \pi - \rho = 0,$$

откъдето, въвеждайки равновесен реален лихвен процент $r := i - \pi$, получаваме

$$r = \sigma\gamma + \rho.$$

Ще линеаризираме $e^{i_t - \sigma\Delta c_{t+1} - \pi_{t+1} - \rho}$ около горното равновесие, като за краткост означаваме $e^{\mathrm{EQ}} := e^{i - \sigma\gamma - \pi - \rho} = 1$:

$$\begin{aligned} e^{i_t - \sigma\Delta c_{t+1} - \pi_{t+1} - \rho} \approx & e^{\mathrm{EQ}} + e^{\mathrm{EQ}}(i_t - i) - \\ & \sigma e^{\mathrm{EQ}}(\Delta c_{t+1} - \gamma) - e^{\mathrm{EQ}}(\pi_{t+1} - \pi) = \\ & 1 + i_t - \sigma\Delta c_{t+1} - \pi_{t+1} - \rho \end{aligned}$$

Тогава имаме приблизително

$$1 = E_t\{1 + i_t - \sigma\Delta c_{t+1} - \pi_{t+1} - \rho\},$$

откъдето

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho). \tag{2}$$

При горната формулировка няма пари, а основният канал на паричната политика е лихвеният процент i_t. Понякога е удобно към модела да се добави екзогенно определена лог-линеаризирана функция на търсене на пари (реални парични баланси):

$$m_t - p_t = y_t - \eta i_t, \quad \eta \geq 0 \tag{3}$$

където M_t са пари, а Y_t е производството.

Приема се, че има представителна фирма. Тя разполага с производствена технология

$$Y_t = A_t N_t^{1-\alpha},$$

където A_t е технологичното равнище и за a_t приемаме, че се описва със зададен стохастичен процес. В логаритмичен вид:

$$y_t = a_t + (1-\alpha) n_t \tag{4}$$

Фирмата максимизира печалбата си

$$P_t Y_t - W_t N_t$$

при зададената производствена технология, като избира N_t и приема P_t и W_t за дадени.

Имаме

$$\frac{d}{dN_t}\left\{P_t A_t N_t^{1-\alpha} - W_t N_t\right\} = (1-\alpha)P_t A_t N_t^{-\alpha} - W_t = 0,$$

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}.$$

Задача 1: Напишете общите разходи на фирмата $TC(Y_t)$ (те са функция от производството!). Покажете, че пределните разходи MC са равни на $\frac{W_t}{(1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}}$.

След лог-линеаризация получаваме

$$w_t - p_t = a_t - \alpha n_t + \ln(1-\alpha). \tag{5}$$

Условие за изравняване на търсенето и предлагането на стоки:

(6) $$Y_t = C_t \quad \Longrightarrow \quad y_t = c_t.$$

Тогава, като използваме (1), (4), (5) и (6), можем да получим

(7) $$n_t = \psi_{na} a_t + \vartheta_n,$$

(8) $$y_t = \psi_{ya} a_t + \vartheta_y,$$

където $\psi_{na} := \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$, $\vartheta_n := \frac{\ln(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$, $\psi_{ya} := \frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$ и $\vartheta_y := (1-\alpha)\vartheta_n$.

Задача 2: Изведете (7) и (8).

Ако въведем реален лихвен процент $r_t := i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}$, от уравнението на Ойлер (2) и от (8) получаваме

$$\begin{aligned} r_t &= \rho + \sigma E_t\{\Delta y_{t+1}\} \\ &= \rho + \sigma \psi_{ya} E_t\{\Delta a_{t+1}\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ако въведем реална заплата $\omega_t := w_t - p_t$, от уравнението за търсене на труд (5) и от (7) получаваме

$$\begin{aligned} \omega_t &= a_t - \alpha n_t + \ln(1-\alpha) \\ &= \psi_{\omega a} a_t + \vartheta_\omega, \end{aligned} \tag{10}$$

където $\psi_{\omega a} := \frac{\sigma+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$ и $\vartheta_\omega := \frac{(\sigma(1-\alpha)+\varphi)\ln(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$.

Задача 3: Изведете (9) и (10).

Интерпретация на резултатите:

- В равновесие динамиката на реалните величини – заетост, производство, реален лихвен процент и реална заплата – зависи от процеса за технологията a_t, но не зависи от паричната политика, която би могла да влияе чрез номиналния лихвен процент i_t. Това се нарича *неутралност* на паричната политика по отношение на реалните променливи.
- Производството нараства при нарастване на производителността a_t.
- Реалната заплата нараства при нарастването на производителността.

- Не може да се определи ефектът от промени в производителността върху заетостта – той зависи от това дали $\sigma > 1$, $\sigma < 1$ или $\sigma = 1$. (Проверете какво става във всеки един от случаите!)
- Определянето на реалния лихвен процент е по-специфично, понеже зависи от *очакваните* изменения в технологиите $E_t\{\Delta a_{t+1}\}$: при $E_t\{a_{t+1}\} < a_t$ имаме стойности, по-малки от ρ, а при $E_t\{a_{t+1}\} > a_t$ имаме стойности, по-големи от ρ.
- Номиналните величини – инфлация и номинален лихвен процент – не могат да бъдат определени от получените дотук реални величини. Те изискват да се конкретизира фóрмата на провежданата парична политика.

Във всички случаи, които ще разгледаме по-долу, се използва следната връзка (уравнение на Фишер):

$$i_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t \tag{11}$$

Ще разгледаме следните варианти за провеждане на парична политика:

- Екзогенна траектория на номиналния лихвен процент
- Просто правило за парична политика, базирано на инфлацията
- Екзогенна траектория за паричното предлагане
- Оптимална парична политика

- Приемаме, че i_t се задава с екзогенен стационарен случаен процес и i_t има средна ρ.

  Задача 4: Проверете, че това допускане позволява да имаме стационарно състояние с нулева инфлация и нулев растеж на реалните величини.

  Частен случай на това е да имаме постоянен номинален лихвен процент $i_t = i = \rho$.
- Тогава можем да запишем

$$E_t\{\pi_{t+1}\} = i_t - r_t.$$

- Последното условие ни позволява да определим очакваната инфлация, но не и действителната инфлация.

- При това положение равновесна може да бъде всяка траектория на цените, която удовлетворява

$$p_{t+1} = p_t + i_t - r_t + \xi_{t+1},$$

където $\{\xi_t\}$ е произволна случайна редица, за която $E_t\{\xi_{t+1}\} = 0$ (шок от слънчеви петна, sunspot shock $\rightarrow$ W.S. Jevons)
- Равновесия от подобен тип се наричат *неопределени равновесия* (произволни фактори могат да влияят върху динамиката на модела). В случая имаме неопределеност на ценовото равнище.
- При горните предположения можем да определим паричните баланси m_t.

- Това става от уравнение (3):

$$m_t = p_t + y_t - \eta i_t.$$

- В случая парите също ще бъдат неопределени, доколкото зависят от p_t.
- Аналогично неопределеност ще имаме и за номиналната заплата W_t, понеже $w_t = \omega_t + p_t$.

- Нека централната банка определя номиналния лихвен процент според правилото

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t, \quad \phi_\pi \geq 0.$$

Този коефициент може да се интерпретира като степен на „агресивност" на реакцията на централната банка, изразяваща се в промени на номиналния лихвен процент при изменения в цените.

- Тогава от уравнението на Фишер (11) получаваме

$$\phi_\pi \pi_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + \hat{r}_t, \tag{12}$$

където $\hat{r}_t := r_t - \rho$.

- Можем да обособим два случая, в зависимост от това дали $\phi_\pi > 1$ или $\phi_\pi < 1$.

Случаят $\phi_\pi > 1$:

- С последователно заместване получаваме

$$\pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_\pi^{-(k+1)} E_t\{\hat{r}_{t+k}\}. \tag{13}$$

Задача 5: Изведете уравнение (13).

- Горното уравнение има единствено стационарно решение в този случай.
- Инфлацията и оттам ценовото равнище еднозначно се определят от реалния лихвен процент и чрез него от технологията a_t заради (9).
- Колкото по-голямо е ϕ_π, толкова по-малка е реакцията на инфлацията спрямо реалните променливи.

Случаят $\phi_\pi < 1$:

- В този случай стационарните решения на (12) имат вида

$$\pi_{t+1} = \phi_\pi \pi_t - \hat{r}_t + \xi_{t+1}, \tag{14}$$

  където отново $\{\xi_t\}$ е произволна случайна редица, за която $E_t\{\xi_{t+1}\} = 0$
- Всеки процес $\{\pi_t\}$, удовлетворяващ горното уравнение, е съвместим с равновесието на системата, т.е. имаме неопределеност.
- Тази неопределеност се появява, защото централната банка не реагира достатъчно на инфлацията.

- Изискването номиналният лихвен процент да реагира повече от 1:1 на промени в инфлацията е известно като *принцип на Тейлър*.
- Този принцип е по-общ и съответно е необходим за определеност на равновесието и при модели със сложна структура.

- Нека сега централната банка определя не лихвения процент, а паричното предлагане m_t.
- След заместване на уравнението за търсенето на пари (3) в уравнението на Фишер (11) получаваме

$$p_t = \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right) E_t\{p_{t+1}\} + \left(\frac{1}{1+\eta}\right) m_t + u_t, \tag{15}$$

където $u_t := (1+\eta)^{-1}(\eta r_t - y_t)$ се определя от реалната част на модела.

- При $\eta > 0$ след последователно заместване получаваме

$$p_t = \frac{1}{1+\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k E_t\{m_{t+k}\} + u'_t,$$

където $u'_t := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k E_t\{u_{t+k}\}$.

- Предходното уравнение може да се пренапише така, че да съдържа очаквания растеж на паричното предлагане:

$$p_t = m_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^k E_t\{\Delta m_{t+k}\} + u'_t.$$

- Следствието от тези връзки е, че дадена екзогенна траектория на паричното предлагане винаги определя точно ценовото равнище.
- Тогава можем да използваме функцията на търсене на пари (3) и да пресметнем номиналния лихвен процент:

$$i_t = \eta^{-1}[y_t - (m_t - p_t)] = \eta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^k E_t\{\Delta m_{t+k}\} + u''_t,$$

където $u''_t := \eta^{-1}(u'_t + y_t)$.

- За да говорим за оптималност на паричната политика трябва да имаме критерий (целева функция), с който да я оценяваме.

Пример (функция на загубите, Макроикономика-1):

$$L = (\pi_t - \pi^T)^2 + \lambda \hat{y}_t^2$$

- Подобни критерии обаче би следвало да не са произволни, а да са свързани с икономическите агенти в модела.
- Най-често това означава да се максимизира благосъстоянието на представителния потребител, измерено чрез неговия функционал на полезност.

- От разгледаното дотук се вижда, че в базисния модел паричната политика има роля за номиналните величини, но не участва в определянето на реалните величини.
- Избраната функция на полезност обаче включва само реални величини и съответно паричната политика няма отношение към благосъстоянието.
- Тогава едно нелогично следствие от този вариант на модела е, че парична политика с големи колебания в инфлацията и парична политика, стабилизираща инфлацията, са еквивалентни.
- Решенията на този проблем са в две посоки:
  - Включване на допълнителни величини във функцията на полезност
  - Модифициране на модела по начин, който директно обвързва номиналните с реалните величини

Дотук въвеждането на парите беше екзогенно, а не като част от оптимизационната задача на някой агент. Един начин парите да бъдат ендогенизирани е те да участват във функцията на полезност на домакинството.

Функция на полезност:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) \tag{16}$$

M_t/P_t – реални парични баланси. U е нарастваща и вдлъбната по тази променлива.

Бюджетно ограничение:

$$Q_t B_t + M_t = B_{t-1} + M_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - T_t$$

Въвеждаме променлива за общото финансово богатство, която се дефинира като $\mathcal{A}_t := B_{t-1} + M_{t-1}$. Бюджетното ограничение приема вида

$$Q_t \mathcal{A}_{t+1} = \mathcal{A}_t + W_t N_t - P_t C_t - (1 - Q_t) M_t - T_t. \tag{17}$$

Забрана на схеми на Понци:

$$\lim_{T \to \infty} E_t\{\mathcal{A}_T\} \geq 0$$

Интерпретация на бюджетното ограничение: Можем да си представяме, че имаме синтетичен финансов актив $\mathcal{A}_t$ и с него си купуваме „стоката" M_t по цена $1 - Q_t = 1 - \exp(-i_t) \approx i_t$. Така цената на парите (които не носят лихва) се оказва приблизително алтернативната цена на това да се откажем да държим активите си в лихвоносни облигации.

Удобно е да разглеждаме реалните парични баланси M_t/P_t като една променлива, напр. $\mathcal{M}_t := \frac{M_t}{P_t}$. Тогава функцията на полезност се записва като $U(C_t, \mathcal{M}_t, N_t)$, а бюджетното ограничение приема вида

$$Q_t\mathcal{A}_{t+1} = \mathcal{A}_t + W_tN_t - P_tC_t - (1-Q_t)P_t\mathcal{M}_t - T_t. \tag{18}$$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{U(C_t, \mathcal{M}_t, N_t) + \lambda_t[\mathcal{A}_t + W_tN_t - P_tC_t - (1-Q_t)P_t\mathcal{M}_t - T_t - Q_t\mathcal{A}_{t+1}]\}$$

Производните на Лагранжиана по C_t, N_t и $\mathcal{A}_{t+1}$ без изменения водят до вече познатите изрази, от които можем да получим функция на предлагане на труд и уравнение на Ойлер.

В допълнение, дефинирайки $U_{m,t} := \frac{\partial U(C_t, \mathcal{M}_t, N_t)}{\partial \mathcal{M}_t}$, имаме

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{M}_t} = \beta^t U_{m,t} - \beta^t \lambda_t (1 - Q_t) P_t = 0,$$

откъдето получаваме

$$\frac{U_{m,t}}{U_{c,t}} = 1 - e^{-i_t}. \tag{19}$$

- Дали въвеждането на пари във функцията на полезност ще води до обвързване на номиналните и реалните величини зависи от конкретната функционална форма за полезността.
- При сепарабелна функция на полезност свойствата на модела не се променят и определянето на номиналните величини е отделено от това на реалните величини.
- При несепарабелна функция на полезност може да се появи връзка, като силата на връзката и конкретните ѝ свойства зависят от параметризацията на модела.
- Дори и в последния случай резултатите от такъв модел не са особено убедителни от емпирична гледна точка.
- За подробности: книгата на Galí, стр. 26-32.

- Разглеждаме задачата на планиращ субект, който се стреми да максимизира общественото благосъстояние.
- Макар че представителният агент отчита бъдещите ефекти от действията си и съответно решава задача за динамична оптимизация, планиращият субект не може да пренесе това на макро ниво и поради това решава серия от статични оптимизационни задачи, по една за всеки период.
- Задачата има вида

$$\max_{C_t, \mathcal{M}_t, N_t} U(C_t, \mathcal{M}_t, N_t) \tag{20}$$

при ограничението

$$C_t = A_t N_t^{1-\alpha} \tag{21}$$

Лагранжиан:

$$L = U(C_t, \mathcal{M}_t, N_t) + \lambda[A_t N_t^{1-\alpha} - C_t]$$

Необходимите условия след освобождаване от множителя на Лагранж приемат вида (**Задача 6:** проверете!):

$$-\frac{U_{n,t}}{U_{c,n}} = (1-\alpha) A_t N_t^{-\alpha} \tag{22}$$

$$U_{m,t} = 0 \tag{23}$$

- Кога една децентрализирана икономика би изпълнявала условията за оптималност за планиращия субект?
- Условието (22) може да бъде получено от уравненията за предлагане и търсене на труд, и съответно е независимо от паричната политика.
- Предвид $\frac{U_{m,t}}{U_{c,t}} = 1 - e^{-i_t}$, условието (23) налага да е изпълнено $i_t = 0, \ \forall t$.
- Интерпретация: условието (23) се тълкува като изискване обществените разходи за поддържане на някакви реални парични баланси да са нулеви, но от индивидуална гледна точка според уравнение (19) цената за това беше лихвеният процент. Тогава двете изисквания се съгласуват при нулев номинален лихвен процент.

Оптимална парична политика (4)

- Изискването $i_t = 0,\ \forall t$ е известно като *правило на Фридман*.
- При допускането за детерминистично стационарно състояние с нулев растеж от уравнението на Ойлер ще следва
$$\pi = -\rho < 0,$$
т.е. икономиката ще бъде в равновесие с дефлация.
- Правилото на Фридман гарантира обществена оптималност на равновесието, но води до неопределеност на ценовото равнище в модела.

- Неопределеността на ценовото равнище може да се избегне, ако централната банка следва правило от вида

$$i_t = \phi(r_{t-1} + \pi_t), \quad \phi > 1$$

- В комбинация с уравнението на Фишер (11) това правило води до

$$E_t\{i_{t+1}\} = \phi i_t,$$

  което има единствено стационарно решение при $i_t = 0, \ \forall t$. При това положение от правилото може да се определи равновесната инфлация, която е

$$\pi_t = -r_{t-1}.$$

- Горното се обобщава: всяка политика, при която инфлацията се изменя 1:1 и обратно на закъснението на реалната лихва, ще влече нулев номинален лихвен процент и ще бъде обществено оптимална.