Детерминистични динамични оптимизационни задачи във вариационна формулировка

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Постановка на задачата
- Принцип за оптималност и уравнение на Белман
- Уравнения на Ойлер

- Оптимизационна задача със специална структура на целевата функция:
  - адитивност
  - дисконтиране
  - безкраен хоризонт
- Ограничения, които свързват допустимите стойности между различните периоди
- Зададено начално условие

Разглеждаме задачата

$$
\text{(SP)} \qquad \begin{aligned} & \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & \text{s.t. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \;\; t = 0, 1, 2, \dots, \\ & x_0 \in X \text{ – дадено} \end{aligned}
$$

- $x_t \in X$, където $X \subset \mathbb{R}^n$ е множеството от допустими стойности
- $\beta \in (0, 1)$ – дисконтов фактор (множител)
- $\Gamma(x) \subset X$ – множество от допустими стойности за следващия период за дадено x
- Обичайно за F и Γ се правят подходящи допускания

- $f(k_t)$ – производствена функция, където с k_t е означен физическият капитал
- Уравнение за натрупване на капитала:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t,$$

  където $\delta \in (0, 1)$ е нормата на амортизация, i_t са инвестициите, а $k_0 > 0$ е даден
- БВП тъждество:

$$y_t = c_t + i_t,$$

  c_t – потребление

- $U(c_t)$ – функция на полезност
- Целеви функционал:

$$(1) \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

- Еквивалентен запис на уравнението за натрупване на капитала:

$$(2) \qquad k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t, \quad k_0 > 0$$

- Ограничения $k_t, c_t \geq 0$, откъдето

$$(3) \qquad c_t \in [0, (1-\delta)k_t + f(k_t)]$$

- Задачата е да се максимизира (1) по $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ при ограничения (2) и (3)
- Можем да се освободим от c_t и да запишем задачата в еквивалентен вид като

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U((1-\delta)k_t + f(k_t) - k_{t+1})$$

s.t.

$$k_{t+1} \in [0, (1-\delta)k_t + f(k_t)]$$

при дадено $k_0 > 0$

- При този запис имаме
$F(x_t, x_{t+1}) := U((1-\delta)k_t + f(k_t) - k_{t+1})$ и
$\Gamma(x) := [0, (1-\delta)k_t + f(k_t)]$

Основни допускания

Нека означим с

$$\Pi(x_0) = \{\{x_t\}_{t=0}^{\infty} | x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ \ t \geq 0\}$$

множеството на всички допустими траектории (планове), започващи от x_0.

За да бъде добре дефинирана задачата (SP) е необходимо да се направят определени допускания:

Д1 $\Gamma(x) \neq \emptyset,\ \ \forall x \in X$

Д2 $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}),\ \ \ \forall x_0 \in X,\ \ \underline{x} \in \Pi(x_0)$

Забележка: Изобщо съществуването на границата в Д2 не изключва случая, когато тя е $\pm\infty$. Поради това общата постановка на (SP) е със sup вместо max.

Дефиниция на функция-цена

- Нека дефинираме $u_n : \Pi(x_0) \to \mathbb{R}$ като

$$u_n(\underline{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

и

$$u(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x})$$

- Ако допускания Д1 и Д2 са в сила, можем да дефинираме функцията v^* като

$$v^*(x_0) = \sup_{\underline{x}\in\Pi(x_0)} u(\underline{x})$$

- Тази функция се нарича *функция-цена*

Забележка: Английският термин е *value function*, но по-популярният термин на български е „функция-цена”.

Уравнение на Белман

- Разглеждаме следното уравнение:

$$\text{(FE)} \qquad v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} [F(x,y) + \beta v(y)], \ \forall x \in X$$

- Уравнението (FE) е функционално: функцията $v(\cdot)$ е неизвестна
- Уравнението (FE) се нарича *уравнение на Белман*
- Уравнението на Белман представлява интерес, защото решенията му са свързани с решенията на задачата (SP)

- Общата идея е, че решение v на (FE), оценено в точката x_0, дава точно супремума на целевия функционал в (SP)
- Очакваме също така, че за една редица $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ супремумът за (SP) се достига точно тогава, когато редицата удовлетворява

$$v(x_t) = F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1}), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

- Тези идеи (които засега са хипотези) са известни като *принцип за оптималност (на Белман)*

Уравнение на Белман

- Ако функцията-цена удовлетворява уравнението на Белман (както се надяваме), то тя по същество участва в рекурсивна връзка:
  - Функцията-цена в точка x може да се получи чрез решаването на максимизационна задача за избор на следваща точка y при критерий сумата от текущата стойност на целевата функция (F) и дисконтираната „остатъчна" стойност на целевия функционал за точката y
- Ако знаехме функцията-цена, бихме могли да използваме (FE), за да итерираме по оптималната траектория. Това е идеята на уравнение (4).
- Така с помощта на уравнението на Белман задачата за намиране на цялата оптимална редица за (SP) може да се сведе до серия от оптимизационни задачи за намиране на отделните елементи на тази редица

Следващият резултат показва, че функцията-цена е решение на уравнението на Белман:

Теорема (SL, Th. 4.2)

Нека X, Γ, F и β удовлетворяват допускания Д1 и Д2. Тогава функцията v^* е решение на (FE).

Следващият резултат показва, че функцията-цена е решение на уравнението на Белман:

Теорема (SL, Th. 4.2)

Нека X, Γ, F и β удовлетворяват допускания Д1 и Д2. Тогава функцията v^* е решение на (FE).

- Функцията-цена не е непременно единственото решение на уравнението на Белман
- Това подсказва, че е необходимо да се търсят допълнителни критерии за изолиране на функцията-цена от множеството на решенията на (FE)

Основни резултати за връзките между (SP) и (FE)

Оказва се, че ако едно решение на уравнението на Белман в допълнение удовлетворява специално условие за ограниченост, то това решение е именно функцията-цена:

Теорема (SL, Th. 4.3)

Нека X, Γ, F и β удовлетворяват допускания Д1 и Д2. Ако функцията v е решение на (FE) *и удовлетворява условието*

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0, \quad \forall (x_0, x_1, \ldots) \in \Pi(x_0), \ \forall x_0 \in X, \tag{5}$$

то $v = v^*$.

Основни резултати за връзките между (SP) и (FE)

Оказва се, че ако едно решение на уравнението на Белман в допълнение удовлетворява специално условие за ограниченост, то това решение е именно функцията-цена:

Теорема (SL, Th. 4.3)

Нека X, Γ, F и β удовлетворяват допускания Д1 и Д2. Ако функцията v е решение на (FE) *и удовлетворява условието*

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0, \quad \forall (x_0, x_1, \ldots) \in \Pi(x_0), \; \forall x_0 \in X, \tag{5}$$

то $v = v^*$.

- Условието (5) трябва да бъде изпълнено за произволна допустима редица
- **Интерпретация:** за всяка допустима редица дисконтираната остатъчна стойност трябва да се анулира в границата

Основни резултати за връзките между (SP) и (FE)

Установените дотук резултати характеризират оптималната стойност на целевия функционал, но не казват как да конструираме допустим план, с който да постигнем тази оптимална стойност (т.е. оптимален план). Следващият резултат показва, че оптималният план е решение на (4) при $v = v^*$:

Теорема (SL, Th. 4.4)

Нека X, Γ, F и β удовлетворяват допускания Д1 и Д2. Нека $\underline{x}^* \in \Pi(x_0)$ е допустим план, за който се достига супремумът в (SP) за начално условие x_0. Тогава имаме

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*), \quad t = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Основни резултати за връзките между (SP) и (FE)

Аналогично на това, че не всяко решение на (FE) ни дава функцията-цена, може да има редици, които удовлетворяват (6), без да са оптимални. За да намерим оптимална редица, отново ни трябва допълнително условие за ограниченост:

Теорема (SL, Th. 4.5)

Нека X, Γ, F *и* β *удовлетворяват допускания Д1 и Д2. Нека* $\underline{x}^* \in \Pi(x_0)$ *е допустим план, който удовлетворява* (6) *и нека в допълнение е в сила*

$$\limsup_{t\to\infty} \beta^t v^*(x_t^*) \leq 0. \tag{7}$$

Тогава за $\underline{x}^*$ *се достига супремумът в* (SP).

Разглеждаме познатата задача

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

$$\text{(SP)} \qquad \text{s.t. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \ \ t = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_0 \in X \text{ – дадено}$$

За нея правим технически допускания (вж. 4.3-4.5, 4.7 и 4.9 в SL за пълния списък) като:

- Множеството X е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^l$ и $\Gamma(x)$ е непразно и компактно за всяко x
- Функцията F е ограничена, непрекъснато диференцируема във вътрешността на допустимото множество, строго вдлъбната и $F(\cdot, y)$ е нарастваща по първите l аргумента за всяко y

- Нека, за дадено x_0, имаме редица $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, която е решение на (SP).

- Тогава за всяко t тази редица трябва да бъде решение и на задачата

$$\begin{aligned} &\max_y [F(x_t^*, y) + \beta F(y, x_{t+2}^*)] \\ &\text{s.t. } y \in \Gamma(x_t^*), \qquad x_{t+2}^* \in \Gamma(y) \end{aligned} \tag{8}$$

- **Интуиция**: редицата $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ не може да е оптимална, ако е възможно да направим допустима вариация на някой елемент и това да доведе до нарастване на целевия функционал.

- Нека F_x и F_y означават l-мерните вектори от частни производни съответно по първите и по вторите l аргумента
- Ако x^*_{t+1} е във вътрешността на $\Gamma(x^*_t)$ за всяко t, тогава условията за решение на задача (8) са

$$0 = F_y(x^*_t, x^*_{t+1}) + \beta F_x(x^*_{t+1}, x^*_{t+2}), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

- Условията (9) задават система от l на брой диференчни уравнения от втори ред.

- Щом (9) са система от l диференчни уравнения от втори ред, тогава ни трябват $2l$ условия, за да намерим решение
- Векторът от начални условия x_0 задава l такива условия
- Още l условия се задават от т.нар. условия за трансверсалност:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t F_x(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot x_t^* = 0. \tag{10}$$

- Интерпретация за условието за трансверсалност

Теорема (SL, Теорема 4.15)

Нека $X \subset \mathbb{R}^l_+$ и F удовлетворява допускания 4.3–4.5, 4.7 и 4.9. Тогава редицата $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, за която $x^*_{t+1} \in \Gamma(x^*_t)$, $t = 0, 1, \ldots$, е решение на задачата (SP) за зададено x_0, ако тя удовлетворява условията (9) и (10).

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (1)

Задача:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ – дадено}$$

$$y_t = Ak_t^{\alpha}, \quad 0 < \underline{\epsilon} \le c_t \le \bar{\epsilon}, \quad \alpha, \beta \in (0,1), \quad A > 0$$

НУ:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{\ln((1-\delta)k_t + Ak_t^{\alpha} - k_{t+1})}_{=F(x_t, x_{t+1})}.$$

Уравнение на Ойлер:

$$F_y(x_t, x_{t+1}) + \beta F_x(x_{t+1}, x_{t+2}) = 0$$

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (2)

При прилагане на уравнението на Ойлер:

$$\frac{-1}{(1-\delta)k_t + Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}} + \beta \frac{(1-\delta) + \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{(1-\delta)k_{t+1} + Ak_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}} = 0$$

Последното има вида

$$G(x_{t+2}, x_{t+1}, x_t) = 0,$$

т.е. нелинейно диференчно уравнение от II ред.