

# Уводни бележки и помощен инструментариум за разработване на динамични макроикономически модели

Андрей Василев  
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

- Организационни въпроси
- Уводни бележки
- Извеждане на необходимими условия за оптималност за стохастични задачи
- Оптимално разпределение при непрекъснат агрегатор
- Линейни приближения

# Организационни въпроси (1)

- Тази част на курса се занимава с разглеждането на няколко постановки и модели, които са популярни в съвременната макроикономика
- Използват се варианти на инструментариума от първата част на курса...
- ...Но се акцентира на икономическите идеи и конструкции за сметка на математическата формализация
- Освен тези слайдове и казаното на лекциите, допълнителна информация може да се получи от 2-ра и 3-та глава на:
  - Jordi Galí, Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework, Princeton University Press, 2008.

## Организационни въпроси (2)

- Ако времето позволи, ще завършим с някои практически упражнения на компютър. За да извлечете максимална полза от тях трябва да си носите лаптопи, конфигурирани по съответния начин (ще бъде обяснено допълнително).
- Проверката на знанията върху този материал ще се осъществи по един от следните начини (по ваш избор):
  - Представяне на решенията на набор от задачи, дадени като домашни в хода на лекциите
  - Компютърна реализация и експерименти с малък модел (това е потенциална дипломна работа!)
  - Решаване на задача на изпита: извеждане на необходимите условия за оптималност на някой модел, извеждане на линейно приближение на условия за оптималност.

- Исторически бележки
- Основни характеристики на съвременните макроикономически модели
  - динамика
  - неизвестност – стохастичен елемент, роля на очакванията
  - общо равновесие
  - микроикономически основи
    - оптимизация; алтернативни варианти
    - агрегиране – представителен агент, симетрия
  - транзакционни разходи; примери
- Поради горното в употреба е влязъл терминът *динамични стохастични модели на общо равновесие (DSGE)*

- Инструментариум – динамични оптимизационни задачи със стохастичен елемент
  - разлика с детерминистични оптимизационни задачи; правила за взимане на решения/политики
  - методите за решаване се учат на алгоритмично ниво в този курс
  - повече подробности и по-строго математическо изложение:
    - Stokey and Lucas (1989)
    - D. Bertsekas, S. Shreve. Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. New York, Academic Press, 1978
    - John Stachurski. Economic Dynamics – Theory and Computation. MIT Press, 2009

- Основни етапи в решаването на динамични стохастични модели на общо равновесие
  - формулиране – цел  $\rightarrow$  механизми, шокове (структурна интерпретация)
  - извеждане на НУ за оптималност
  - пресмятане на стационарно състояние – детерминистични стационарни състояния
  - линейно приближение на модела около стационарното състояние – лог-линеаризация
  - калибриране/оценяване
  - симулации, прогнози
    - IRF (функция на импулсна реакция/импулсен отклик)
    - преход към дадено стационарно състояние
    - исторически декомпозиции

# Кратък преговор на постановките от началото на курса

Неявни управления (вариационна формулировка тип Stokey-Lucas)

$$\begin{aligned} & \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & \text{s.t. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \\ & \quad x_0 \in X - \text{зададено} \end{aligned}$$

- Избира се директно редицата  $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$
- Във всеки момент от времето текущото състояние  $x_t$  определя множеството  $\Gamma(x_t)$  от допустими стойности за  $x$  в следващия период



# Кратък преговор на постановките от началото на курса

Явни управления (1) (формулировка тип оптимално управление)

$$(1) \quad \sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

$$(2) \quad x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 - \text{дадено}$$

- Избират се  $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  (*управления*)
- Променливите  $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$  (*фазови променливи*) се получават с помощта на управленията чрез (2)

# Кратък преговор на постановките от началото на курса

## Явни управления (2) (формулировка тип оптимално управление)

Лагранжиан:

$$(3) \quad \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, u_0, u_1, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) + \beta^t \langle \lambda_t, [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \rangle,$$

където  $\langle \lambda_t, [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_t^i [f^i(x_t, u_t) - x_{t+1}^i]$ .

Необходими условия:

$$(4) \quad \beta \left[ f_{x_t^k}^0(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^n \lambda_t^i f_{x_t^k}^i(x_t, u_t) \right] = \lambda_{t-1}^k, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$f_{u_t^j}^0(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^n \lambda_t^i f_{u_t^j}^i(x_t, u_t) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

# Въвеждане на стохастичен елемент в задачата с явни управления (1)

Нека сега във фазовите уравнения участва и случайна величина:

$$(5) \quad x_{t+1} = f(x_t, u_t, \epsilon_t), \quad x_0 - \text{дадено}$$

Тогава  $\{x_t\}$  също стават случайни, съответно случайна става и  $f^0(x_t, u_t)$ .

Това налага модификация на целевия функционал – там трябва да се вземе математическо очакване (условно по наличната информация към съответния момент). Нека за простота сме в момент  $t = 0$ :

$$(6) \quad \sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

# Въвеждане на стохастичен елемент в задачата с явни управления (2)

- Последователност на събитията в рамките на един период:

$$x_t \rightarrow u_t \rightarrow \epsilon_t \implies x_{t+1} \rightarrow \dots$$

Т.е. когато вземаме решението не сме сигурни къде ще попаднем през следващия период.

В някои източници пишат  $x_{t+1} = f(x_t, u_t, \epsilon_{t+1})$ , за да подчертаят тази последователност.

- За разлика от детерминистичните задачи, тук решението не може да бъде предварително избрана траектория  $u_0^*, u_1^*, \dots$ . Например, не може в момент 0 да определим  $u_5$ , понеже не знаем колко ще бъде  $x_5$  (то е случайно).
- Поради това оптималното поведение се задава като правило за реакция  $u_t = \mu(x_t)$ , което е функция от състоянието  $x_t$  на системата.

# Въвеждане на стохастичен елемент в задачата с явни управления (3)

- При горната структура на модела реално се взема решение само за настоящия момент от времето.
- Всичко друго напред остава план, които може да не бъде осъществен.
- На следващата стъпка моделът се решава отново за новите начални условия.
- Това има следствия за прилагането на оператора за условно математическо очакване при пресмятането на необходими условия за оптималност.

# Извеждане на необходими условия за оптималност (1)

Обща постановка (алгоритмично решение)

Задача:

$$\max_{u_{s+t}} E_s \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_{s+t}, u_{s+t})$$

при условие

$$x_{s+t+1} = f_{s+t}(x_{s+t}, u_{s+t}, \epsilon_{s+t}), \quad x_s - \text{известно},$$

където  $x_{s+t} \in \mathbb{R}^n$  и  $u_{s+t} \in \mathbb{R}^m$ .

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = E_s \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ f^0(x_{s+t}, u_{s+t}) + \langle \lambda_{s+t}, f_{s+t}(x_{s+t}, u_{s+t}, \epsilon_{s+t}) - x_{s+t+1} \rangle \}$$

# Извеждане на необходими условия за оптималност (2)

Обща постановка (алгоритмично решение)

При определени условия (изпълнени за стандартни икономически задачи), решението удовлетворява

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{s+t}^i} = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{s+t+1}^j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{т.е.}$$

$$E_s \left\{ \frac{\partial}{\partial u_{s+t}^i} f^0(x_{s+t}, u_{s+t}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{s+t}^k \frac{\partial}{\partial u_{s+t}^i} f_{s+t}^k(x_{s+t}, u_{s+t}, \epsilon_{s+t}) \right\} = 0,$$

$$\beta E_s \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{s+t+1}^j} f^0(x_{s+t+1}, u_{s+t+1}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{s+t+1}^k \frac{\partial}{\partial x_{s+t+1}^j} f_{s+t+1}^k(x_{s+t+1}, u_{s+t+1}, \epsilon_{s+t+1}) \right\} = E_s \left\{ \lambda_{s+t}^j \right\}$$

# Извеждане на необходими условия за оптималност (3)

## Практически съвети и коментари

- По-лесно е задачата да се напише за  $s = 0$ . Стандартните задачи са инвариантни по времето и това не пречи.
- Удобно е да приложим оператора за очакването накрая, т.е. след диференцирането и последващите пресмятания.
- Диференцираме по всички управления за произволен момент  $t$  и по всички фазови променливи за момент  $t + 1$ . Приравняваме на нула съответните изрази.
- При прилагане на оператора за условно очакване, той се прилага към момент  $t$ .



# Извеждане на необходими условия за оптималност (4)

## Практически съвети и коментари

- Освен горните необходими условия за оптималност, едно решение трябва също така да удовлетворява и стохастичен вариант на условие за трансверсалност. Засега пренебрегваме този детайл, но в разглежданите модели ще осигуряваме това условие да е изпълнено.
- В някои случаи се използва конвенция за записване на фазовите уравнения от типа

$$x_t = f_t(x_{t-1}, u_t, \epsilon_t).$$

(Може да се интерпретира като измерване на фазовите променливи в края на текущия период, а не в началото на следващия, т.е. 31 декември вместо 1 януари.) В този случай диференцирането се извършва по фазовите променливи в момент  $t$  вместо  $t + 1$ .

## Пример I (1)

Формулировка:

$$\max_{\{C_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$A_{t+1} = (1+r)A_t + Y_t - C_t, \quad Y_t = \bar{Y} - \epsilon_t$$

$C_t$  – потребление,  $A_t$  – активы,  $Y_t$  – доход,  $r$  – лихвен процент

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_t [(1+r)A_t + Y_t - C_t - A_{t+1}] \right\}$$

## Пример I (2)

Необходимы условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \{C_t^{-\sigma} - \lambda_t\} = 0 \implies C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1+r) = 0 \implies \lambda_t = \beta(1+r) \lambda_{t+1}$$

Прилагаем  $E_t$ :

$$E_t \{C_t^{-\sigma}\} = E_t \{\lambda_t\} \implies C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$E_t \{\lambda_t\} = E_t \{\beta(1+r) \lambda_{t+1}\} \implies \lambda_t = \beta(1+r) E_t \{\lambda_{t+1}\}$$

След заместване на  $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$  в последния израз:

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1+r) E_t \{C_{t+1}^{-\sigma}\}$$

## Пример I (2)

Необходими условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \{ C_t^{-\sigma} - \lambda_t \} = 0 \implies C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1+r) = 0 \implies \lambda_t = \beta(1+r) \lambda_{t+1}$$

Прилагаме  $E_t$ :

$$E_t \{ C_t^{-\sigma} \} = E_t \{ \lambda_t \} \implies C_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$E_t \{ \lambda_t \} = E_t \{ \beta(1+r) \lambda_{t+1} \} \implies \lambda_t = \beta(1+r) E_t \{ \lambda_{t+1} \}$$

След заместване на  $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$  в последния израз:

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1+r) E_t \{ C_{t+1}^{-\sigma} \}$$

**Задача:** Решете Пример I, ако фазовото уравнение е записано според конвенцията  $A_t = (1+r)A_{t-1} + Y_t - C_t$ .

## Пример II (1)

Формулировка:

$$\max_{\{C_t\}, \{N_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t)$$

$$Q_t B_t = B_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - T_t$$

$C_t$  – потребление,  $N_t$  – количество труд (отработени часове),  
 $B_t$  – дисконтови облигации, закупувани в период  $t$  и  
падажиращи през  $t + 1$ ,  $Q_t$  – цена на облигациите,  $P_t$  – цена на  
потребителската стока,  $W_t$  – заплата,  $T_t$  – данъци/трансфери

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{U(C_t, N_t) + \lambda_t [B_{t-1} + W_t N_t - P_t C_t - T_t - Q_t B_t]\}$$

## Пример II (2)

Въвеждаме  $U_{c,t} := \frac{\partial}{\partial C} U(C_t, N_t)$ ,  $U_{n,t} := \frac{\partial}{\partial N} U(C_t, N_t)$ .

Диференцираме по управленията:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t U_{c,t} - \beta^t P_t \lambda_t = 0 \quad \implies \quad \lambda_t = \frac{U_{c,t}}{P_t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \beta^t U_{n,t} + \beta^t \lambda_t W_t = 0 \quad \implies \quad \lambda_t W_t = -U_{n,t}$$

От предходните две уравнения можем да получим

$$\frac{W_t}{P_t} = -\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}}.$$

## Пример II (3)

Диференцираме по фазовата променлива (в момент  $t$  за този случай!):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t Q_t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} = 0 \quad \implies \quad Q_t \lambda_t = \beta E_t \{ \lambda_{t+1} \}$$

След заместване на израза за  $\lambda$  в моменти  $t$  и  $t+1$ , имаме

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}.$$

Окончателно получаваме

$$\frac{W_t}{P_t} = -\frac{U_{n,t}}{U_{c,t}}, \quad Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \quad \text{за } t = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача:** Как изглеждат горните необходими условия, ако функцията на полезност има вида

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \quad \sigma > 0, \quad \varphi \geq 1?$$

## Задача: решения за спестяване и миграция

$$\max_{\{C_t\}, \{Z_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t$$

$$A_{t+1} = (1 + r)A_t + w(X_t) - P_t C_t - \xi Z_t^2, \quad w(X_t) = \bar{w}(X_t) + \epsilon_t$$

$$X_{t+1} = X_t + Z_t$$

Означенията са както преди, като в допълнение  $X_t$  е положението на икономическия агент в пространството (в случая реалната права),  $w(\cdot)$  е заплата, зависеща от положението в пространството,  $\bar{w}(\cdot)$  е гладка функция, а променливата  $Z_t$  управлява скоростта на преместване в пространството.



# Оптимално разпределение за непрекъснат агрегатор (1)

Разглеждаме задачата

$$\left| \begin{array}{l} \min_{c(j)} \int_0^1 p(j)c(j)dj \\ \int_0^1 c(j)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj = C^{\frac{\theta-1}{\theta}} \end{array} \right.,$$

където  $p(j) > 0$  са дадени цени, а  $\theta > 1$  и  $C > 0$  са константи.

Решението  $c(j)$  на задачата се задава от формулата

$$c(j) = \left( \frac{p(j)}{P} \right)^{-\theta} C,$$

при  $P := \left( \int_0^1 p(j)^{1-\theta} dj \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$ . Също така

$$\int_0^1 p(j)c(j)dj = PC.$$

## Оптимално разпределение за непрекъснат агрегатор (2)

Дефинираме (вж. Алексеев, Тихомиров, Фомин. Оптимальное управление. 1979, стр. 77)

$$\mathcal{L} = p(j)c(j) + \lambda c(j)^{\frac{\theta-1}{\theta}}.$$

Условието  $\partial \mathcal{L} / \partial c = 0$  има вида

$$p(j) + \lambda \frac{\theta-1}{\theta} c(j)^{-\frac{1}{\theta}} = 0.$$

Следователно,

$$p(j) = \left( -\lambda \frac{\theta-1}{\theta} \right) c(j)^{-\frac{1}{\theta}},$$

така че

$$(7) \quad c(j) = \left( -\lambda \frac{\theta-1}{\theta} \right)^{\theta} p(j)^{-\theta}.$$

# Оптимално разпределение за непрекъснат агрегатор (3)

Заместваме в изопериметричното ограничение и получаваме

$$\left(-\lambda \frac{\theta-1}{\theta}\right)^{\theta-1} \int_0^1 p(j)^{1-\theta} dj = C^{\frac{\theta-1}{\theta}},$$

т.е.

$$\left(-\lambda \frac{\theta-1}{\theta}\right) P^{-1} = C^{\frac{1}{\theta}}.$$

Тогава от (7) следва

$$c(j) = \left(PC^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} p(j)^{-\theta} = \left(\frac{p(j)}{P}\right)^{-\theta} C.$$

Накрая, проверяваме, че

$$\int_0^1 p(j)c(j) dj = \int_0^1 p(j)p(j)^{-\theta} P^{\theta} C dj = CP^{\theta} P^{1-\theta} = PC.$$

# Линейни приближения (1)

## Общи положения

- За решаването на един динамичен макроикономически модел е удобно да се разглежда приближение на уравненията от модела.
- Обикновено ни интересува поведението на системата в околност на някакво равновесие (стационарно състояние) и приближението се прави около него.
- Най-често приближенията са линейни: трансформираме оригиналното, нелинейно уравнение в линейно по някакъв начин.

# Линейни приближения (2)

## Варианти за линейни приближения

- Логаритмуване (за променливи с положителни стойности):

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^\sigma N_t^\varphi \implies w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t,$$

където  $w_t := \ln W_t$ ,  $p_t := \ln P_t$  и т.н.

- Директно приближение по формулата на Тейлър
- Лог-линеаризация (ще я разгледаме отделно)

# Лог-линеаризация (1)

## Общи положения

Нека имаме  $x_t \neq 0$  и  $\bar{x}$  е дадена стойност на  $x_t$  (най-често стационарна стойност).

**Логаритмично отклонение (лог-отклонение)** на  $x_t$  от  $\bar{x}$ :

$$\hat{x}_t := \ln \left( \frac{x_t}{\bar{x}} \right).$$

Предвид

$$\ln(1+z) \approx \ln(1+z_0) + \frac{1}{1+z_0}(z-z_0),$$

за  $z_0 = 0$  получаваме  $\ln(1+z) \approx z$  и съответно

$$\ln \left( \frac{x_t}{\bar{x}} \right) = \ln \left( 1 + \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} \right) \approx \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}.$$

# Лог-линеаризация (2)

## Общи положения

Нека  $y_t = f(x_t, z_t)$ , където  $f$  е диференцируема.

Тогава

$$\hat{y}_t = \frac{f_x(\bar{x}, \bar{z})\bar{x}}{f(\bar{x}, \bar{z})} \hat{x}_t + \frac{f_z(\bar{x}, \bar{z})\bar{z}}{f(\bar{x}, \bar{z})} \hat{z}_t$$

Имаме:

❶  $y_t = x_t z_t \Rightarrow \hat{y}_t = \hat{x}_t + \hat{z}_t.$

❷  $y_t = x_t / z_t \Rightarrow \hat{y}_t = \hat{x}_t - \hat{z}_t.$

❸  $y_t = x_t + z_t \Rightarrow \hat{y}_t = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \hat{x}_t + \frac{\bar{z}}{\bar{y}} \hat{z}_t.$

❹  $g(x_t, y_t) = 0 \Rightarrow \hat{y}_t = -\frac{g_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}}{g_y(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}} \hat{x}_t$