Уравнения на Ойлер

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Постановка на задачата

Разглеждаме познатата задача

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

$$\text{(SP)} \qquad \text{s.t. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \;\; t = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_0 \in X \text{ – дадено}$$

За нея правим технически допускания (вж. 4.3-4.5, 4.7 и 4.9 в SL за пълния списък) като:

- Множеството X е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^l$ и $\Gamma(x)$ е непразно и компактно за всяко x
- Функцията F е ограничена, непрекъснато диференцируема във вътрешността на допустимото множество, строго вдлъбната и $F(\cdot, y)$ е нарастваща по първите l аргумента за всяко y

Интуиция за извеждане на НУ за оптималност

- Нека, за дадено x_0, имаме редица $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, която е решение на (SP).

- Тогава за всяко t тази редица трябва да бъде решение и на задачата

$$
\begin{aligned}
& \max_y [F(x_t^*, y) + \beta F(y, x_{t+2}^*)] \\
& \text{s.t. } y \in \Gamma(x_t^*), \qquad x_{t+2}^* \in \Gamma(y)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- **Интуиция**: редицата $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ не може да е оптимална, ако е възможно да направим допустима вариация на някой елемент и това да доведе до нарастване на целевия функционал.

Формулировка на НУ за оптималност

- Нека F_x и F_y означават l-мерните вектори от частни производни съответно по първите и по вторите l аргумента
- Ако x^*_{t+1} е във вътрешността на $\Gamma(x^*_t)$ за всяко t, тогава условията за решение на задача (1) са

$$(2) \qquad 0 = F_y(x^*_t, x^*_{t+1}) + \beta F_x(x^*_{t+1}, x^*_{t+2}), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

- Условията (2) задават система от l на брой диференчни уравнения от втори ред.

Допълнителни условия за намиране на оптимално решение

- Щом (2) са система от l диференчни уравнения от втори ред, тогава ни трябват $2l$ условия, за да намерим решение
- Векторът от начални условия x_0 задава l такива условия
- Още l условия се задават от т.нар. условия за трансверсалност:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t F_x(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot x_t^* = 0. \tag{3}$$

- Интерпретация за условието за трансверсалност

Достатъчни условия за оптималност

Теорема (SL, Теорема 4.15)

Нека $X \subset \mathbb{R}^l_+$ и F удовлетворява допускания 4.3–4.5, 4.7 и 4.9. Тогава редицата $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, за която $x^*_{t+1} \in \Gamma(x^*_t)$, $t = 0, 1, \ldots$, е решение на задачата (SP) за зададено x_0, ако тя удовлетворява условията (2) и (3).