Детерминистични динамични оптимизационни задачи с явни управления

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Постановка на задачата с явни управления
- Извеждане на необходими условия за оптималност
- Достатъчни условия за оптималност

$X \subset \mathbb{R}^n$ – *фазово пространство*, пространство на състоянията на променливите $x = (x^1, \dots, x^n)$.

Приемаме, че $\forall x \in X, \ \exists U(x) \subset \mathbb{R}^m, U(x) \neq \emptyset$. Елементите $u = (u^1, \dots, u^m)$ се наричат *управления*.

Целева функция (моментна): $f^0(x, u)$ за $x \in X$, $u \in U(x)$

Фазови уравнения:

$$(1) \qquad x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 \text{ – дадено}$$

където $f(x, u)$ е векторна функция, приемаща стойности в X, за $x \in X$, $u \in U(x)$.

Интерпретация!

Постановка на задачата с явни управления (2)

Търси се редица от допустими управления $\mathbf{u} = \{u_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ която чрез (1) определя редица фазови променливи $\{x_{t+1}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, за които целевият функционал

$$j(x_0, \mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \tag{2}$$

достига максимум

$$v(x_0) = \sup_{\mathbf{u}} j(x_0, \mathbf{u}). \tag{3}$$

Горната задача наричаме *задача A*.

Числото $\beta \in (0,1)$ се нарича *дисконтов фактор*.

Означаваме с $\mathrm{FC}(x_0)$ множеството от всички допустими редици управления $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ за начални данни $x_0 \in X$, т.е. x_{t+1} удовлетворява (1) за $u_t \in U(x_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ и дадено x_0.

С $\{x_{t+1}^*, u_t^*\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ означаваме оптималната редица от двойки фазови променливи и управления за задачата А, т.е. $\{u_t^*\} \in \mathrm{FC}(x_0)$, и

$$v(x_0) = j(x_0, \mathbf{u}^*), \ \mathbf{u}^* = \{u_t^*\}.$$

Популярен в икономическата литература алгоритъм:

1. Конструира се Лагранжиан

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, u_0, u_1, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[f^0(x_t, u_t) + \lambda_t' \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \right]$$

където $\lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^n)$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ са множителите на Лагранж и с точка $(\cdot)$ е означено матричното умножение (в случая скаларното произведение):

$$\lambda_t' \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i [f^i(x_t, u_t) - x_{t+1}^i].$$

2. Ако съответните обекти са диференцируеми, то формално се диференцира $\mathcal{L}$ по отношение на x_t и u_t, резултатите се приравняват на нула и така се получават НУ за оптималност от I ред:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\beta\left[f^0_{x^k_t}(x_t,u_t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda^i_t f^i_{x^k_t}(x_t,u_t)\right]=\lambda^k_{t-1},\ \ k=1,\dots,n,\\ &f^0_{u^j_t}(x_t,u_t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda^i_t f^i_{u^j_t}(x_t,u_t)=0,\ \ j=1,\dots,m. \end{aligned}$$

3. Уравнения (1) и (4) се комбинират и се получава (кандидат-)решение $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ или, по-точно, редица $\{x_{t+1},u_t\}_{t=0}^{\infty}$. (Често се намира стационарна точка на системата (1) и (4) и се изследва линеаризация на системата около тази точка.)

Извеждане на необходими условия за оптималност (3)

В матричен запис предходните условия се получават както следва:

$$\mathcal{L}_x = \beta^t f_x^0(x_t, u_t) + \beta^t f_x'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t - \beta^{t-1}\lambda_{t-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta(f_x^0(x_t, u_t) + f_x'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t) = \lambda_{t-1}. \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_u = \beta^t f_u^0(x_t, u_t) + \beta^t f_u'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \Rightarrow$$

$$f_u^0(x_t, u_t) + f_u'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \tag{6}$$

Какви са основанията за използване на описания алгоритъм?

Функцията-цена за задачата A удовлетворява аналог на познатото уравнение на Белман:

$$v(x) = \sup_{u \in U(x)} \left[f^0(x,u) + \beta v(f(x,u)) \right]. \tag{7}$$

Нека супремумът в (7) се достига във вътрешна точка на множеството $U(x)$. Да означим тази точка с $u = \nu(x)$ и нека всички обекти по-нататък да са диференцируеми, така че съответните операции са коректни.

Имаме

$$(8) \qquad v(x) = f^0(x, \nu(x)) + \beta v(f(x, \nu(x))).$$

Също така, условието за достигане на екстремум е

$$(9) \qquad f_u^0(x, \nu(x)) + \beta f_u'(x, \nu(x)) \cdot v_x(f(x, \nu(x))) = 0.$$

Като диференцираме (8) по x, получаваме

$$\begin{aligned} v_x(x) =& f_x^0(x, \nu(x)) + \nu_x'(x) \cdot f_u^0(x, \nu(x)) + \\ & \beta \left[f_x'(x, \nu(x)) + \nu_x'(x) \cdot f_u'(x, \nu(x)) \right] \cdot v_x(f(x, \nu(x))) \\ =& f_x^0(x, \nu(x)) + \beta f_x'(x, \nu(x)) \cdot v_x(f(x, \nu(x))) + \\ & \underbrace{\nu_x'(x) \cdot f_u^0(x, \nu(x)) + \beta \nu_x'(x) \cdot f_u'(x, \nu(x)) \cdot v_x(f(x, \nu(x)))}_{=0 \text{ поради } (9)}. \end{aligned}$$

Така получаваме

$$(10) \qquad v_x(x) = f_x^0(x,\nu(x)) + \beta f_x'(x,\nu(x)) \cdot v_x(f(x,\nu(x))).$$

Като вземем $x = x_t^*$ и $u_t^* = \nu(x_t^*)$, уравнения (9) и (10) добиват вида съответно

$$(11) \qquad f_u^0(x_t^*, u_t^*) + \beta f_u'(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*) = 0,$$

$$(12) \qquad v_x(x_t^*) = f_x^0(x_t^*, u_t^*) + \beta f_x'(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*).$$

Ако положим $\lambda_t := \beta v_x(x_{t+1}^*)$ в (11) и (12), получаваме точно (5) и (6).

Достатъчни условия за оптималност (1)

Теорема

Нека $\{\lambda_t\}$ *и* $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ *се определят чрез* (1) *и* (4). *Ако*

1. *функциите* $f^0(x, u)$ *и* $f(x, u)$ *са вдлъбнати по* (x, u)*;*
2. *множителите на Лагранж* $\lambda^1_t, \ldots, \lambda^n_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ *са неотрицателни;*
3. *фазовото пространство* X *е подмножество на* $\mathbb{R}^n_+$ *и е в сила условието за трансверсалност*

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \lambda'_T \cdot x^*_{T+1} = 0,$$

то редицата $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$ *(при зададено* x_0*) е оптимална за задачата* A*.*

Достатъчни условия за оптималност (2)

Доказателството на теоремата е сходно с извеждането на уравнения на Ойлер за задача във вариационна формулировка. Напомняме, че (4), записано в матричен вид, се задава с (5) и (6).

Разглеждаме

$$\mathcal{L}_T(x_t, u_t) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left\{ f^0(x_t, u_t) + \lambda_t' \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \right\}.$$

Имаме

(13)

$$D := \mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) +$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t [f^0(x_t, u_t) + \lambda_t' \cdot f(x_t, u_t) - f^0(x_t^*, u_t^*) - \lambda_t' \cdot f(x_t^*, u_t^*)].$$

Достатъчни условия за оптималност (3)

Тогава, предвид вдлъбнатостта, получаваме

$$\mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) \ \ (= D) \quad \leq \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) +$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t [f_x^{0'}(x_t^*, u_t^*) \cdot (x_t - x_t^*) + f_u^{0'}(x_t^*, u_t^*) \cdot (u_t - u_t^*) +$$

$$\lambda_t' \cdot [f_x(x_t^*, u_t^*) \cdot (x_t - x_t^*) + f_u(x_t^*, u_t^*) \cdot (u_t - u_t^*)]] =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T} \beta^t \underbrace{[f_x^{0'}(x_t^*, u_t^*) + \lambda_t' \cdot f_x(x_t^*, u_t^*)]}_{= \frac{\lambda_{t-1}'}{\beta} \text{ поради (5)}} \cdot (x_t - x_t^*)$$

$$+ \sum_{t=0}^{T} \beta^t \underbrace{[f_u^{0'}(x_t^*, u_t^*) + \lambda_t' \cdot f_u(x_t^*, u_t^*)]}_{= \mathbf{0}' \text{ поради (6)}} \cdot (u_t - u_t^*).$$

Достатъчни условия за оптималност (4)

Т.е.

$$D \leq \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{\lambda_{t-1}'}{\beta} \cdot \underbrace{(x_t - x_t^*)}_{\text{N.B.: } x_0 = x_0^*} =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \frac{\lambda_{t-1}'}{\beta} \cdot (x_t - x_t^*) =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda_t'}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*) =$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda_t'}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*)}_{=0} +$$

$$\beta^T \lambda_T' \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \underbrace{\leq}_{\text{понеже } \lambda_t, x_t \geq \mathbf{0}} \beta^T \lambda_T' \cdot x_{T+1}^*.$$

Достатъчни условия за оптималност (5)

Така имаме (при отчитане на условието за трансверсалност):

$$D \leq \beta^T \lambda'_T \cdot x^*_{T+1} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т.е.

$$\mathcal{L}_T(x^*_t, u^*_t) - \mathcal{L}_T(x_t, u_t) \geq 0,$$

което показва оптималността на редицата $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$.