Оценяване на варианти на неокейнсиански модели

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Модели с ненаблюдаеми компоненти
- Елементи на бейсовото оценяване
- Оценяване на модели с ненаблюдаеми компоненти в Dynare

- Уравнение на наблюденията:

$$y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t,$$

където:

  - y_t е p-мерен вектор с наблюдения
  - α_t е m-мерен вектор на фазови променливи (състояния)
  - Z_t е $p \times m$ матрица с коефициенти
  - $\varepsilon_t \sim iid\ N(0, H_t)$ е p-мерен вектор с шокове

Модели с ненаблюдаеми компоненти

- Фазово уравнение (уравнение на състоянията):

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t,$$

  където:

  - T_t е $m \times m$ преходна матрица
  - шокът $\eta_t \sim iid\ N(0, Q_t)$ е r-мерен ($r \leq m$)
  - матрицата R_t с размерност $m \times r$ се нарича селектираща матрица

- Ако няма специална информация за началните състояния, стандартно се приема, че

$$\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$$

Модели с ненаблюдаеми компоненти

- Нека означим наблюденията $y_1, \ldots, y_t$ с Y_t, като цялата извадка е с големина n
- Ако матриците Z_t, H_t, T_t и Q_t, и разпределението на α_1 са известни, то:
  - оценяването на състоянията α_t чрез Y_t се нарича *филтриране*
  - оценяването на състоянията α_t чрез пълната извадка Y_n се нарича *изглаждане*
  - когато Y_t се използва, за да опишем α_s, $s > t$, имаме *прогнозиране*
- Съществуват рекурсивни алгоритми като филтъра на Калман, които реализират горните операции

Модели с ненаблюдаеми компоненти

- От практическа гледна точка е много малко вероятно матриците в модела да са известни
- Техните коефициенти всъщност трябва да бъдат оценени
- В хода на прилагането на филтъра на Калман се получава функция на правдоподобие за модела, което позволява да се използват методи като този на максималното правдоподобие

Филтър на Калман

- Дефинираме

$$a_{t|t} = E(\alpha_t | Y_t)$$

$$P_{t|t} = Var(\alpha_t | Y_t)$$

$$a_{t+1} = E(\alpha_{t+1} | Y_t)$$

$$P_{t+1} = Var(\alpha_{t+1} | Y_t)$$

$$v_t = y_t - Z_t a_t$$

- Филтърът на Калман се задава от следните рекурсивни връзки:
  (1)

$$a_{t|t} = a_t + P_t Z_t' F_t^{-1} v_t, \quad F_t = Var(v_t|Y_{t-1}) = Z_t P_t Z_t' + H_t$$

$$P_{t|t} = P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t$$

$$a_{t+1} = T_t a_t + K_t v_t, \quad K_t = T_t P_t Z_t' F_t^{-1}$$

$$P_{t+1} = T_t P_t (T_t - K_t Z_t)' + R_t Q_t R_t'$$

- Численото максимизиране на функция на правдоподобие може да срещне трудности:
  - Много локални максимуми или области с почти постоянни стойности
  - Чувствителност към началните условия на използвания метод за оптимизация
  - Нелогични или теоретично неиздържани оценки на параметрите
- Тези проблеми понякога могат да бъдат преодолени с използването на бейсови методи

- По-точно, бейсовите методи могат да са полезни при:
  - Малка извадка
  - Необходимост дадени параметри да бъдат ограничени
  - Налична допълнителна теоретична или емпирична информация

Бейсово оценяване

- Традиционният подход в статистиката приема параметрите на един модел за фиксирани, но неизвестни, а данните се приемат за случайни величини
- Бейсовият подход третира параметрите като случайни величини и провежда анализа за фиксиран набор от данни
- По този начин се отчита несигурността по отношение на параметрите
- Формално се работи с разпределението на параметрите ψ на модела, при зададени наблюдения Y_n.

Бейсово оценяване

- Ако пълният модел се формализира чрез съвместното разпределение на параметрите и данните, $p(\psi, Y_n)$, можем да използваме формулата на Бейс и да запишем условната плътност $p(\psi|Y_n)$ във вида:

$$p(\psi|Y_n) = \frac{p(\psi)p(Y_n|\psi)}{p(Y_n)} \tag{2}$$

- Плътността $p(\psi)$ се нарича *априорна плътност*
- Условната плътност $p(Y_n|\psi)$ е всъщност *функцията на правдоподобие*
- Условната плътност $p(\psi|Y_n)$, от която се интересуваме, се нарича *апостериорна плътност*

Бейсово оценяване

- Понеже маргиналната плътност $p(Y_n)$ е просто нормираща константа за фиксирани данни, често тя се изпуска и се работи с т.нар. ядро на апостериорната плътност $p(\psi)p(Y_n|\psi)$, като (2) се записва във вида:

$$p(\psi|Y_n) \propto p(\psi)p(Y_n|\psi) \tag{3}$$

- Априорната плътност $p(\psi)$ отчита информация за параметрите, която не е включена в наблюденията („какво знаем, преди да сме взели данните") – теоретични съображения, експертни оценки, субективни преценки, резултати от предходни изследвания

- Функцията на правдоподобие се конструира по стандартен начин, като отчита вероятната форма на процеса, генериращ данните, доколкото е възможно

Бейсово оценяване

- Така апостериорната плътност комбинира информация от данните и такава, която не идва от наблюденията, което може да се интерпретира като:
    1. актуализиране на априорната информация с информация от данните
    2. допълване на информацията от наличния набор от наблюдения с информация от допълнителни източници
- С помощта на апостериорната плътност могат да се правят аналози на редица стандартни статистически процедури като конструиране на точкови оценки, доверителни интервали, проверка на хипотези и пр.
- Най-често апостериорните плътности не могат да се пресметнат аналитично и се приближават с помощта на подходящи симулации

- Декларира се кои са наблюдаемите променливи
- Задават се априорните плътности, ако се ползва бейсов метод
    - Ако се работи в класическа схема, тогава се задават начални условия за оптимизатора
- Задава се командата за оценяване със съответните параметри

Задаване на наблюденията

Наблюдения
varobs y infl u;

- Те трябва да бъдат ендогенни за модела променливи
- В модела трябва да има поне толкова шокове, колкото и наблюдаеми променливи
- Разрешава се само един блок с декларации на наблюдаеми променливи за всеки .mod файл
- Данните могат да са записани в .m, .mat, .csv или .xlsx/xls формат

Априорни плътности

- Задават се в блок *estimated_params*
- В този блок може да се дава и информация за целите на стандартно оценяване с максимално правдоподобие
- Декларират се дисперсии на шоковете, корелации между шокове и свойства на параметри, които вече са били декларирани в блока *parameters*
- Има налични различни разпределения, напр. нормално, равномерно, бета, гама, и обратно гама разпределение, както и възможности някои разпределения да се параметризират по различен начин

Априорни плътности

Оценявани параметри

```
estimated_params;
stderr e1, inv_gamma_pdf, 0.005 , inf;
c1 , normal_pdf , 0.7 , 0.03;
end;
```

- След като се укаже типът на разпределението се задават средната и стандартното отклонение
- Ако искаме да пропуснем някой параметър, това се указва с празна позиция, отделена със запетаи, напр.

  ```
  corr eps_1, eps_2, 0.5, , , beta_pdf, 0, 0.3, -1, 1;
  ```

Оценяване

estimation(datafile = estdata,mh_replic=2000, mh_nblocks=2, filtered_vars, smoother, diffuse_filter) yp z;

- Използва файл *estdata* (в случая .m файл)
- Пуснати са две вериги със симулации, всяка с по 2000 итерации
- Да се оценят филтрирани и изгладени стойности
- Опцията diffuse filter се използва при нестационарни наблюдения
- Да се визуализират резултати за променливите *yp* и *z*

Формулировка

$$
\begin{aligned}
y_t &= \tau_t + \zeta_t \\
\tau_t &= \tau_{t-1} + \beta_{t-1} + v_{1,t} \\
\beta_t &= \beta_{t-1} + v_{2,t} \\
\zeta_t &= c_1\zeta_{t-1} + v_{3,t} \\
\pi_t &= (1 - c_2)c_3 + c_2\pi_{t-1} + c_4\zeta_t + v_{4,t}
\end{aligned}
$$

Означения

y_t – БВП (логаритмуван), τ_t – тренд, ζ_t – цикличен компонент, π_t – инфлация, $v_{i,t}$ – шокове

Типично $c_1 \in (0, 1)$. Също така $c_2 \in (0, 1)$, а c_3 се интерпретира като дългосрочна (равновесна) инфлация.

Формулировка

$$
\begin{aligned}
y_t &= \tau_t + \zeta_t \\
\tau_t &= \tau_{t-1} + \beta_{t-1} + v_{1,t} \\
\beta_t &= \beta_{t-1} + v_{2,t} \\
\zeta_t &= c_1\zeta_{t-1} + v_{3,t} \\
\pi_t &= (1 - c_2)E_t\{\pi_{t+1}\} + c_2\pi_{t-1} + c_4\zeta_t + v_{4,t}
\end{aligned}
$$

Означения

y_t – БВП (логаритмуван), τ_t – тренд, ζ_t – цикличен компонент, π_t – инфлация, $v_{i,t}$ – шокове

Отново $c_1 \in (0, 1)$ и $c_2 \in (0, 1)$.