

Детерминистични динамични оптимизационни задачи с явни управления

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

- Пример: решаване на задача във вариационна формулировка
- Постановка на задачата с явни управления
- Извеждане на необходими условия за оптималност
- Достатъчни условия за оптималност

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (1)

Задача:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + y_t - c_t, \quad k_0 > 0 - \text{дадено}$$

$$y_t = Ak_t^\alpha, \quad 0 < \underline{c} \leq c_t \leq \bar{c}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1), \quad A > 0$$

НУ:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{\ln((1 - \delta)k_t + Ak_t^\alpha - k_{t+1})}_{=F(x_t, x_{t+1})}.$$

Уравнение на Ойлер:

$$F_y(x_t, x_{t+1}) + \beta F_x(x_{t+1}, x_{t+2}) = 0$$

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (2)

При прилагане на уравнението на Ойлер:

$$\frac{-1}{(1-\delta)k_t + Ak_t^\alpha - k_{t+1}} + \beta \frac{(1-\delta) + \alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}}{(1-\delta)k_{t+1} + Ak_{t+1}^\alpha - k_{t+2}} = 0$$

Последното има вида

$$G(x_{t+2}, x_{t+1}, x_t) = 0,$$

т.е. нелинейно диференчно уравнение от II ред.

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (3)

При прилагане на уравнението на Ойлер:

$$\frac{-1}{(1-\delta)k_t + Ak_t^\alpha - k_{t+1}} + \beta \frac{(1-\delta) + \alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}}{(1-\delta)k_{t+1} + Ak_{t+1}^\alpha - k_{t+2}} = 0$$

Последното има вида

$$G(x_{t+2}, x_{t+1}, x_t) = 0,$$

т.е. нелинейно диференчно уравнение от II ред.

Въпрос: Можете ли да намерите решението на това уравнение за $\beta = 0.95$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $\alpha = 0.5$ и $k_0 = 2$?

Пример: Извеждане на НУ за задача във вариационна формулировка (4)

При прилагане на уравнението на Ойлер:

$$\frac{-1}{(1-\delta)k_t + Ak_t^\alpha - k_{t+1}} + \beta \frac{(1-\delta) + \alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}}{(1-\delta)k_{t+1} + Ak_{t+1}^\alpha - k_{t+2}} = 0$$

Последното има вида

$$G(x_{t+2}, x_{t+1}, x_t) = 0,$$

т.е. нелинейно диференчно уравнение от II ред.

Въпрос: Можете ли да намерите решението на това уравнение за $\beta = 0.95$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $\alpha = 0.5$ и $k_0 = 2$? Ако не, какво още е необходимо?

Постановка на задачата с явни управления (1)

$X \subset \mathbb{R}^n$ – *фазово пространство*, пространство на състоянията на променливите $x = (x^1, \dots, x^n)$.

Приемаме, че $\forall x \in X, \exists U(x) \subset \mathbb{R}^m, U(x) \neq \emptyset$. Елементите $u = (u^1, \dots, u^m)$ се наричат *управления*.

Целева функция (моментна): $f^0(x, u)$ за $x \in X, u \in U(x)$

Фазови уравнения:

$$(1) \quad x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 - \text{дадено}$$

където $f(x, u)$ е векторна функция, приемаща стойности в X , за $x \in X, u \in U(x)$.

Интерпретация!

Постановка на задачата с явни управления (2)

Търси се редица от допустими управления $\mathbf{u} = \{u_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, която чрез (1) определя редица фазови променливи $\{x_{t+1}\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, за които целевият функционал

$$(2) \quad j(x_0, \mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

достига максимум

$$(3) \quad v(x_0) = \sup_{\mathbf{u}} j(x_0, \mathbf{u}).$$

Горната задача наричаме *задача A*.

Постановка на задачата с явни управления (3)

Числото $\beta \in (0, 1)$ се нарича *дисконтов фактор*.

Означаваме с $FC(x_0)$ множеството от всички допустими редици управления $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ за начални данни $x_0 \in X$, т.е. x_{t+1} удовлетворява (1) за $u_t \in U(x_t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, и дадено x_0 .

С $\{x_{t+1}^*, u_t^*\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$ означаваме оптималната редица от двойки фазови променливи и управления за задачата А, т.е. $\{u_t^*\} \in FC(x_0)$, и

$$v(x_0) = j(x_0, u^*), \quad u^* = \{u_t^*\}.$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (1)

Популярен в икономическата литература алгоритъм:

- 1 Конструира се Лагранжиан

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, u_0, u_1, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [f^0(x_t, u_t) + \lambda'_t \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}]]$$

където $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^n)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, са множителите на Лагранж и с точка (\cdot) е означено матричното умножение (в случая скаларното произведение):

$$\lambda'_t \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] = \sum_{i=1}^n \lambda_t^i [f^i(x_t, u_t) - x_{t+1}^i].$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (2)

- 2 Ако съответните обекти са диференцируеми, то формално се диференцира \mathcal{L} по отношение на x_t и u_t , резултатите се приравняват на нула и така се получават НУ за оптималност от I ред:

$$(4) \quad \beta \left[f_{x_t^k}^0(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^n \lambda_t^i f_{x_t^k}^i(x_t, u_t) \right] = \lambda_{t-1}^k, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$f_{u_t^j}^0(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^n \lambda_t^i f_{u_t^j}^i(x_t, u_t) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

- 3 Уравнения (1) и (4) се комбинират и се получава (кандидат-)решение $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ или, по-точно, редица $\{x_{t+1}, u_t\}_{t=0}^{\infty}$. (Често се намира стационарна точка на системата (1) и (4) и се изследва линеаризация на системата около тази точка.)

Извеждане на необходимите условия за оптималност (3)

В матричен запис предходните условия се получават както следва:

$$\mathcal{L}_x = \beta^t f_x^0(x_t, u_t) + \beta^t f'_x(x_t, u_t) \cdot \lambda_t - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \Rightarrow$$

$$(5) \quad \beta(f_x^0(x_t, u_t) + f'_x(x_t, u_t) \cdot \lambda_t) = \lambda_{t-1}.$$

$$\mathcal{L}_u = \beta^t f_u^0(x_t, u_t) + \beta^t f'_u(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \Rightarrow$$

$$(6) \quad f_u^0(x_t, u_t) + f'_u(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0$$

Какви са основанията за използване на описания алгоритъм?

Функцията-цена за задачата A удовлетворява аналог на познатото уравнение на Белман:

$$(7) \quad v(x) = \sup_{u \in U(x)} [f^0(x, u) + \beta v(f(x, u))] .$$

Нека супремумът в (7) се достига във вътрешна точка на множеството $U(x)$. Да означим тази точка с $u = \nu(x)$ и нека всички обекти по-нататък да са диференцируеми, така че съответните операции са коректни.

Извеждане на необходими условия за оптималност (5)

Имаме

$$(8) \quad v(x) = f^0(x, v(x)) + \beta v(f(x, v(x))).$$

Също така, условието за достигане на екстремум е

$$(9) \quad f_u^0(x, v(x)) + \beta f_u'(x, v(x)) \cdot v_x(f(x, v(x))) = 0.$$

Като диференцираме (8) по x , получаваме

$$\begin{aligned} v_x(x) &= f_x^0(x, v(x)) + v_x'(x) \cdot f_u^0(x, v(x)) + \\ &\quad \beta [f_x'(x, v(x)) + v_x'(x) \cdot f_u'(x, v(x))] \cdot v_x(f(x, v(x))) \\ &= f_x^0(x, v(x)) + \beta f_x'(x, v(x)) \cdot v_x(f(x, v(x))) + \\ &\quad \underbrace{v_x'(x) \cdot f_u^0(x, v(x)) + \beta v_x'(x) \cdot f_u'(x, v(x)) \cdot v_x(f(x, v(x)))}_{=0 \text{ поради (9)}}. \end{aligned}$$

Извеждане на необходимими условия за оптималност (6)

Така получаваме

$$(10) \quad v_x(x) = f'_x(x, \nu(x)) + \beta f'_x(x, \nu(x)) \cdot v_x(f(x, \nu(x))).$$

Като вземем $x = x_t^*$ и $u_t^* = \nu(x_t^*)$, уравнения (9) и (10) добиват вида съответно

$$(11) \quad f'_u(x_t^*, u_t^*) + \beta f'_u(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*) = 0,$$

$$(12) \quad v_x(x_t^*) = f'_x(x_t^*, u_t^*) + \beta f'_x(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*).$$

Ако положим $\lambda_t := \beta v_x(x_{t+1}^*)$ в (11) и (12), получаваме точно (5) и (6).

Достатъчни условия за оптималност (1)

Теорема

Нека $\{\lambda_t\}$ и $\{x_{t+1}^*, u_t^*\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, се определят чрез (1) и (4). Ако

- 1 функциите $f^0(x, u)$ и $f(x, u)$ са вдлъбнати по (x, u) ;
- 2 множителите на Лагранж $\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^n$, $t = 0, 1, 2, \dots$ са неотрицателни;
- 3 фазовото пространство X е подмножество на \mathbb{R}_+^n и е в сила условието за трансверсалност

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T \lambda'_T \cdot x_{T+1}^* = 0,$$

то редицата $\{x_{t+1}^*, u_t^*\}$ (при зададено x_0) е оптимална за задачата A .

Достатъчни условия за оптималност (2)

Доказателството на теоремата е сходно с това на теорема 4.15 от Stokey-Lucas. Напомняме, че (4), записано в матричен вид, се задава с (5) и (6).

Разглеждаме

$$\mathcal{L}_T(x_t, u_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \{ f^0(x_t, u_t) + \lambda'_t \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \}.$$

Имаме

(13)

$$\begin{aligned} D := \mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) &= \sum_{t=0}^T \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \\ &\sum_{t=0}^T \beta^t [f^0(x_t, u_t) + \lambda'_t \cdot f(x_t, u_t) - f^0(x_t^*, u_t^*) - \lambda'_t \cdot f(x_t^*, u_t^*)]. \end{aligned}$$

Достатъчни условия за оптималност (3)

Тогава, предвид вдлъбнатостта, получаваме

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) \quad (= D) &\leq \sum_{t=0}^T \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \\ &\sum_{t=0}^T \beta^t [f_x^{0'}(x_t^*, u_t^*) \cdot (x_t - x_t^*) + f_u^{0'}(x_t^*, u_t^*) \cdot (u_t - u_t^*) + \\ &\lambda'_t \cdot [f_x(x_t^*, u_t^*) \cdot (x_t - x_t^*) + f_u(x_t^*, u_t^*) \cdot (u_t - u_t^*)]] = \\ &\sum_{t=0}^T \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^T \beta^t \underbrace{[f_x^{0'}(x_t^*, u_t^*) + \lambda'_t \cdot f_x(x_t^*, u_t^*)]}_{= \frac{\lambda'_{t-1}}{\beta} \text{ поради (5)}} \cdot (x_t - x_t^*) \\ &+ \sum_{t=0}^T \beta^t \underbrace{[f_u^{0'}(x_t^*, u_t^*) + \lambda'_t \cdot f_u(x_t^*, u_t^*)]}_{= 0' \text{ поради (6)}} \cdot (u_t - u_t^*).\end{aligned}$$

Достатъчни условия за оптималност (4)

Т.е.

$$\begin{aligned}
 D &\leq \sum_{t=0}^T \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^T \beta^t \frac{\lambda'_{t-1}}{\beta} \cdot \underbrace{(x_t - x_t^*)}_{\text{N.B.: } x_0 = x_0^*} = \\
 &\sum_{t=0}^T \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \frac{\lambda'_{t-1}}{\beta} \cdot (x_t - x_t^*) = \\
 &\sum_{t=0}^T \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{\color{red}t} \frac{\lambda'_{\color{red}t}}{\beta} \cdot (x_{\color{red}t+1} - x_{\color{red}t+1}^*) = \\
 &\underbrace{\sum_{t=0}^{\color{red}T-1} \beta^t \lambda'_t \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda'_t}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*)}_{=0} + \\
 &\beta^T \lambda'_T \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \leq \beta^T \lambda'_T \cdot x_{T+1}^* \cdot \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{понеже } \lambda_t, x_t \geq 0}
 \end{aligned}$$

Достатъчни условия за оптималност (5)

Така имаме (при отчитане на условието за трансверсалност):

$$D \leq \beta^T \lambda'_T \cdot x_{T+1}^* \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

т.е.

$$\mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) - \mathcal{L}_T(x_t, u_t) \geq 0,$$

което показва оптималността на редицата $\{x_{t+1}^*, u_t^*\}$.