Детерминистични динамични оптимизационни задачи с явни управления

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Постановка на задачата с явни управления
- Извеждане на необходими условия за оптималност
- Достатъчни условия за оптималност

Постановка на задачата с явни управления (1)

$X \subset \mathbb{R}^n$ – *фазово пространство*, пространство на състоянията на променливите $x = (x^1, \dots, x^n)$.

Приемаме, че $\forall x \in X,\ \exists U(x) \subset \mathbb{R}^m, U(x) \neq \emptyset$. Елементите $u = (u^1, \dots, u^m)$ се наричат *управления*.

Целева функция (моментна): $f^0(x, u)$ за $x \in X$, $u \in U(x)$

Фазови уравнения:

(1) $$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 \text{ – дадено}$$

където $f(x, u)$ е векторна функция, приемаща стойности в X, за $x \in X$, $u \in U(x)$.

Интерпретация!

Постановка на задачата с явни управления (2)

Търси се редица от допустими управления $\mathrm{u} = \{u_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ която чрез (1) определя редица фазови променливи $\{x_{t+1}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, за които целевият функционал

$$j(x_0, \mathrm{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \tag{2}$$

достига максимум

$$v(x_0) = \sup_{\mathrm{u}} j(x_0, \mathrm{u}). \tag{3}$$

Горната задача наричаме *задача A*.

Постановка на задачата с явни управления (3)

Числото $\beta \in (0,1)$ се нарича *дисконтов фактор*.

Означаваме с $\mathrm{FC}(x_0)$ множеството от всички допустими редици управления $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ за начални данни $x_0 \in X$, т.е. x_{t+1} удовлетворява (1) за $u_t \in U(x_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ и дадено x_0.

С $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ означаваме оптималната редица от двойки фазови променливи и управления за задачата A, т.е. $\{u^*_t\} \in \mathrm{FC}(x_0)$, и

$$v(x_0) = j(x_0, \mathrm{u}^*), \; \mathrm{u}^* = \{u^*_t\}.$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (1)

Популярен в икономическата литература алгоритъм:

1. Конструира се Лагранжиан

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, u_0, u_1, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[f^0(x_t, u_t) + \lambda_t' \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \right]$$

където $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^n)$, $t = 0, 1, 2, \dots,$ са множителите на Лагранж и с точка $(\cdot)$ е означено матричното умножение (в случая скаларното произведение):

$$\lambda_t' \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i [f^i(x_t, u_t) - x_{t+1}^i].$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (2)

2. Ако съответните обекти са диференцируеми, то формално се диференцира $\mathcal{L}$ по отношение на x_t и u_t, резултатите се приравняват на нула и така се получават НУ за оптималност от I ред:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\beta\left[f^0_{x^k_t}(x_t,u_t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda^i_t f^i_{x^k_t}(x_t,u_t)\right]=\lambda^k_{t-1},\ \ k=1,\dots,n,\\ &f^0_{u^j_t}(x_t,u_t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda^i_t f^i_{u^j_t}(x_t,u_t)=0,\ \ j=1,\dots,m. \end{aligned}$$

3. Уравнения (1) и (4) се комбинират и се получава (кандидат-)решение $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ или, по-точно, редица $\{x_{t+1},u_t\}_{t=0}^{\infty}$. (Често се намира стационарна точка на системата (1) и (4) и се изследва линеаризация на системата около тази точка.)

Извеждане на необходими условия за оптималност (3)

В матричен запис предходните условия се получават както следва:

$$\mathcal{L}_x = \beta^t f_x^0(x_t, u_t) + \beta^t f_x'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t - \beta^{t-1}\lambda_{t-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta(f_x^0(x_t, u_t) + f_x'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t) = \lambda_{t-1}. \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_u = \beta^t f_u^0(x_t, u_t) + \beta^t f_u'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \Rightarrow$$

$$f_u^0(x_t, u_t) + f_u'(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \tag{6}$$

Какви са основанията за използване на описания алгоритъм?

Функцията-цена за задачата A удовлетворява аналог на познатото уравнение на Белман:

$$v(x) = \sup_{u \in U(x)} \left[f^0(x,u) + \beta v(f(x,u)) \right]. \tag{7}$$

Нека супремумът в (7) се достига във вътрешна точка на множеството $U(x)$. Да означим тази точка с $u = \mu(x)$ и нека всички обекти по-нататък да са диференцируеми, така че съответните операции са коректни.

Извеждане на необходими условия за оптималност (5)

Имаме

$$v(x) = f^0(x,\mu(x)) + \beta v(f(x,\mu(x))). \tag{8}$$

Също така, условието за достигане на екстремум е

$$f_u^0(x,\mu(x)) + \beta f_u'(x,\mu(x)) \cdot v_x(f(x,\mu(x))) = 0. \tag{9}$$

Като диференцираме (8) по x, получаваме

$$\begin{aligned} v_x(x) =& f_x^0(x,\mu(x)) + \mu_x'(x) \cdot f_u^0(x,\mu(x)) + \\ & \beta \left[f_x'(x,\mu(x)) + \mu_x'(x) \cdot f_u'(x,\mu(x)) \right] \cdot v_x(f(x,\mu(x))) \\ =& f_x^0(x,\mu(x)) + \beta f_x'(x,\mu(x)) \cdot v_x(f(x,\mu(x))) + \\ & \underbrace{\mu_x'(x) \cdot f_u^0(x,\mu(x)) + \beta \mu_x'(x) \cdot f_u'(x,\mu(x)) \cdot v_x(f(x,\mu(x)))}_{=0 \text{ поради } (9)}. \end{aligned}$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (6)

Така получаваме

$$(10) \qquad v_x(x) = f_x^0(x, \mu(x)) + \beta f_x'(x, \mu(x)) \cdot v_x(f(x, \mu(x))).$$

Като вземем $x = x_t^*$ и $u_t^* = \mu(x_t^*)$, уравнения (9) и (10) добиват вида съответно

$$(11) \qquad f_u^0(x_t^*, u_t^*) + \beta f_u'(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*) = 0,$$

$$(12) \qquad v_x(x_t^*) = f_x^0(x_t^*, u_t^*) + \beta f_x'(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*).$$

Ако положим $\lambda_t := \beta v_x(x_{t+1}^*)$ в (11) и (12), получаваме точно (5) и (6).

Пример (1)

Разглеждаме вариант на едносекторния модел на икономически растеж, където полезността на представителния потребител, зададена с

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^\gamma}{\gamma}, \quad \beta, \gamma \in (0,1),$$

трябва да се максимизира по потреблението $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$. Уравнението за динамиката на капитала е

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ – дадено.}$$

Коефициентът на амортизация е $\delta \in (0,1)$, а производството y_t се задава от производствената функция

$$f(k_t) = Ak_t^\alpha, \quad A > 0,\ \alpha \in (0,1).$$

Пример (2)

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \lambda_t \left((1-\delta) k_t + A k_t^\alpha - c_t - k_{t+1} \right) \right]$$

НУ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t c_t^{\gamma-1} - \beta^t \lambda_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = c_t^{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = \beta^t \lambda_t (1-\delta) + \beta^t \lambda_t A \alpha k_t^{\alpha-1} - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\beta \lambda_t \left[(1-\delta) + \alpha \frac{f(k_t)}{k_t} \right] = \lambda_{t-1}$$

Пример (3)

След комбиниране на двете уравнения от необходимите условия, получаваме

$$\beta\left[(1-\delta)+\alpha\frac{f(k_t)}{k_t}\right]=\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^{1-\gamma}$$

Интерпретация: от какво зависи темпът на изменение на потреблението?

Достатъчни условия за оптималност (1)

Теорема

Нека $\{\lambda_t\}$ *и* $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ *се определят чрез* (1) *и* (4). *Ако*

1. *функциите* $f^0(x, u)$ *и* $f(x, u)$ *са вдлъбнати по* (x, u);
2. *множителите на Лагранж* $\lambda^1_t, \ldots, \lambda^n_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ *са неотрицателни;*
3. *фазовото пространство* X *е подмножество на* $\mathbb{R}^n_+$ *и е в сила условието за трансверсалност*

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \lambda'_T \cdot x^*_{T+1} = 0,$$

то редицата $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$ *(при зададено* x_0*) е оптимална за задачата* A.

Достатъчни условия за оптималност (2)

Доказателството на теоремата е сходно с извеждането на уравнения на Ойлер за задача във вариационна формулировка. Напомняме, че (4), записано в матричен вид, се задава с (5) и (6).

Разглеждаме

$$\mathcal{L}_T(x_t, u_t) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left\{ f^0(x_t, u_t) + \lambda_t' \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \right\}.$$

Имаме

(13)

$$D := \mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) +$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t [f^0(x_t, u_t) + \lambda_t' \cdot f(x_t, u_t) - f^0(x_t^*, u_t^*) - \lambda_t' \cdot f(x_t^*, u_t^*)].$$

Достатъчни условия за оптималност (3)

Тогава, предвид вдлъбнатостта, получаваме

$$\mathcal{L}_T(x_t,u_t)-\mathcal{L}_T(x_t^*,u_t^*)\ \ (=D)\ \ \le \sum_{t=0}^{T}\beta^t\lambda_t'\cdot(x_{t+1}^*-x_{t+1})+$$

$$\sum_{t=0}^{T}\beta^t[f_x^{0'}(x_t^*,u_t^*)\cdot(x_t-x_t^*)+f_u^{0'}(x_t^*,u_t^*)\cdot(u_t-u_t^*)+$$

$$\lambda_t'\cdot[f_x(x_t^*,u_t^*)\cdot(x_t-x_t^*)+f_u(x_t^*,u_t^*)\cdot(u_t-u_t^*)]]=$$

$$\sum_{t=0}^{T}\beta^t\lambda_t'\cdot(x_{t+1}^*-x_{t+1})+\sum_{t=0}^{T}\beta^t\underbrace{[f_x^{0'}(x_t^*,u_t^*)+\lambda_t'\cdot f_x(x_t^*,u_t^*)]}_{=\frac{\lambda_{t-1}'}{\beta}\text{ поради (5)}}\cdot(x_t-x_t^*)$$

$$+\sum_{t=0}^{T}\beta^t\underbrace{[f_u^{0'}(x_t^*,u_t^*)+\lambda_t'\cdot f_u(x_t^*,u_t^*)]}_{=0'\text{ поради (6)}}\cdot(u_t-u_t^*).$$

Достатъчни условия за оптималност (4)

Т.е.

$$D \le \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{\lambda_{t-1}'}{\beta} \cdot \underbrace{(x_t - x_t^*)}_{\text{N.B.: } x_0 = x_0^*} =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \frac{\lambda_{t-1}'}{\beta} \cdot (x_t - x_t^*) =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda_t'}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*) =$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \lambda_t' \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda_t'}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*)}_{<0 \text{ т.к. } 1/\beta > 1} +$$

$$\beta^T \lambda_T' \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \underbrace{\le}_{\text{т.к. } \lambda_t, x_t \ge 0} \beta^T \lambda_T' \cdot x_{T+1}^*.$$

Достатъчни условия за оптималност (5)

Така имаме (при отчитане на условието за трансверсалност):

$$D \leq \beta^T \lambda'_T \cdot x^*_{T+1} \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

т.е.

$$\mathcal{L}_T(x^*_t, u^*_t) - \mathcal{L}_T(x_t, u_t) \geq 0,$$

което показва оптималността на редицата $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$.