Детерминистични динамични оптимизационни задачи с явни управления. Линейни приближения

Андрей Василев
avassilev@fmi.uni-sofia.bg

Основни въпроси

- Постановка на задачата с явни управления
- Извеждане на необходими условия за оптималност
- Достатъчни условия за оптималност
- Линейни приближения

Постановка на задачата с явни управления (1)

$X \subset \mathbb{R}^n$ – *фазово пространство*, пространство на състоянията на променливите $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Приемаме, че $\forall x \in X,\ \exists U(x) \subset \mathbb{R}^m, U(x) \neq \emptyset$. Елементите $u = (u^1, \ldots, u^m)$ се наричат *управления*.

Целева функция (моментна): $f^0(x, u)$ за $x \in X$, $u \in U(x)$

Фазови уравнения:

(1) $$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 \text{ – дадено}$$

където $f(x, u)$ е векторна функция, приемаща стойности в X, за $x \in X$, $u \in U(x)$.

Интерпретация!

Постановка на задачата с явни управления (2)

Търси се редица от допустими управления $\mathrm{u} = \{u_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots,$ която чрез (1) определя редица фазови променливи $\{x_{t+1}\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, за които целевият функционал

$$j(x_0, \mathrm{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \tag{2}$$

достига максимум

$$v(x_0) = \sup_{\mathrm{u}} j(x_0, \mathrm{u}). \tag{3}$$

Горната задача наричаме *задача A*.

Постановка на задачата с явни управления (3)

Числото $\beta \in (0,1)$ се нарича *дисконтов фактор*.

Означаваме с $\mathrm{FC}(x_0)$ множеството от всички допустими редици управления $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ за начални данни $x_0 \in X$, т.е. x_{t+1} удовлетворява (1) за $u_t \in U(x_t)$, $t = 0, 1, 2, \dots,$ и дадено x_0.

С $\{x_{t+1}^*, u_t^*\}, \ t = 0, 1, 2, \dots$ означаваме оптималната редица от двойки фазови променливи и управления за задачата А, т.е. $\{u_t^*\} \in \mathrm{FC}(x_0)$, и

$$v(x_0) = j(x_0, \mathrm{u}^*), \ \mathrm{u}^* = \{u_t^*\}.$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (1)

Популярен в икономическата литература алгоритъм:

1. Конструира се Лагранжиан

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, u_0, u_1, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[f^0(x_t, u_t) + \lambda_t^\top \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \right]$$

където $\lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^n)$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ са множителите на Лагранж и с точка $(\cdot)$ е означено матричното умножение (в случая скаларното произведение):

$$\lambda_t^\top \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_t^i [f^i(x_t, u_t) - x_{t+1}^i].$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (2)

2. Ако съответните обекти са диференцируеми, то формално се диференцира $\mathcal{L}$ по отношение на x_t и u_t, резултатите се приравняват на нула и така се получават НУ за оптималност от I ред:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&\beta\left[f^0_{x^k_t}(x_t,u_t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda^i_t f^i_{x^k_t}(x_t,u_t)\right]=\lambda^k_{t-1},\ \ k=1,\ldots,n,\\
&f^0_{u^j_t}(x_t,u_t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda^i_t f^i_{u^j_t}(x_t,u_t)=0,\ \ j=1,\ldots,m.
\end{aligned}
$$

3. Уравнения (1) и (4) се комбинират и се получава (кандидат-)решение $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ или, по-точно, редица $\{x_{t+1},u_t\}_{t=0}^{\infty}$. (Често се намира стационарна точка на системата (1) и (4) и се изследва линеаризация на системата около тази точка.)

Извеждане на необходими условия за оптималност (3)

В матричен запис предходните условия се получават както следва:

$$\mathcal{L}_x = \beta^t f_x^0(x_t, u_t) + \beta^t f_x^\top(x_t, u_t) \cdot \lambda_t - \beta^{t-1}\lambda_{t-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta(f_x^0(x_t, u_t) + f_x^\top(x_t, u_t) \cdot \lambda_t) = \lambda_{t-1}. \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_u = \beta^t f_u^0(x_t, u_t) + \beta^t f_u^\top(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \Rightarrow$$

$$f_u^0(x_t, u_t) + f_u^\top(x_t, u_t) \cdot \lambda_t = 0 \tag{6}$$

Какви са основанията за използване на описания алгоритъм?

Функцията-цена за задачата А удовлетворява аналог на познатото уравнение на Белман:

$$v(x) = \sup_{u \in U(x)} \left[f^0(x, u) + \beta v(f(x, u)) \right]. \tag{7}$$

Нека супремумът в (7) се достига във вътрешна точка на множеството $U(x)$. Да означим тази точка с $u = \mu(x)$ и нека всички обекти по-нататък да са диференцируеми, така че съответните операции са коректни.

Имаме

$$v(x) = f^0(x, \mu(x)) + \beta v(f(x, \mu(x))). \tag{8}$$

Също така, условието за достигане на екстремум е

$$f_u^0(x, \mu(x)) + \beta f_u^\top(x, \mu(x)) \cdot v_x(f(x, \mu(x))) = 0. \tag{9}$$

Като диференцираме (8) по x, получаваме

$$\begin{aligned} v_x(x) =& f_x^0(x, \mu(x)) + \mu_x^\top(x) \cdot f_u^0(x, \mu(x)) + \\ & \beta \left[f_x^\top(x, \mu(x)) + \mu_x^\top(x) \cdot f_u^\top(x, \mu(x)) \right] \cdot v_x(f(x, \mu(x))) \\ =& f_x^0(x, \mu(x)) + \beta f_x^\top(x, \mu(x)) \cdot v_x(f(x, \mu(x))) + \\ & \underbrace{\mu_x^\top(x) \cdot f_u^0(x, \mu(x)) + \beta \mu_x^\top(x) \cdot f_u^\top(x, \mu(x)) \cdot v_x(f(x, \mu(x)))}_{=0 \text{ поради } (9)}. \end{aligned}$$

Извеждане на необходими условия за оптималност (6)

Така получаваме

$$(10) \qquad v_x(x) = f_x^0(x, \mu(x)) + \beta f_x^\top(x, \mu(x)) \cdot v_x(f(x, \mu(x))).$$

Като вземем $x = x_t^*$ и $u_t^* = \mu(x_t^*)$, уравнения (9) и (10) добиват вида съответно

$$(11) \qquad f_u^0(x_t^*, u_t^*) + \beta f_u^\top(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*) = 0,$$

$$(12) \qquad v_x(x_t^*) = f_x^0(x_t^*, u_t^*) + \beta f_x^\top(x_t^*, u_t^*) \cdot v_x(x_{t+1}^*).$$

Ако положим $\lambda_t := \beta v_x(x_{t+1}^*)$ в (11) и (12), получаваме точно (5) и (6).

Пример (1)

Разглеждаме вариант на едносекторния модел на икономически растеж, където полезността на представителния потребител, зададена с

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^\gamma}{\gamma}, \quad \beta, \gamma \in (0,1),$$

трябва да се максимизира по потреблението $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$. Уравнението за динамиката на капитала е

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ – дадено.}$$

Коефициентът на амортизация е $\delta \in (0,1)$, а производството y_t се задава от производствената функция

$$f(k_t) = Ak_t^\alpha, \quad A > 0, \ \alpha \in (0,1).$$

Пример (2)

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \lambda_t \left((1-\delta)k_t + Ak_t^\alpha - c_t - k_{t+1} \right) \right]$$

НУ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t c_t^{\gamma-1} - \beta^t \lambda_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t = c_t^{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = \beta^t \lambda_t (1-\delta) + \beta^t \lambda_t A \alpha k_t^{\alpha-1} - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\beta \lambda_t \left[(1-\delta) + \alpha \frac{f(k_t)}{k_t} \right] = \lambda_{t-1}$$

Пример (3)

След комбиниране на двете уравнения от необходимите условия, получаваме

$$\beta\left[(1-\delta)+\alpha\frac{f(k_t)}{k_t}\right]=\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^{1-\gamma}$$

Интерпретация: от какво зависи темпът на изменение на потреблението?

Достатъчни условия за оптималност (1)

Теорема

Нека $\{\lambda_t\}$ *и* $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ *се определят чрез* (1) *и* (4). *Ако*

1. *функциите* $f^0(x, u)$ *и* $f(x, u)$ *са вдлъбнати по* (x, u)*;*
2. *множителите на Лагранж* $\lambda^1_t, \ldots, \lambda^n_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ *са неотрицателни;*
3. *фазовото пространство* X *е подмножество на* $\mathbb{R}^n_+$ *и е в сила условието за трансверсалност*

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \lambda^\top_T \cdot x^*_{T+1} = 0,$$

то редицата $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$ *(при зададено* x_0*) е оптимална за задачата А.*

Достатъчни условия за оптималност (2)

Доказателството на теоремата е сходно с извеждането на уравнения на Ойлер за задача във вариационна формулировка. Напомняме, че (4), записано в матричен вид, се задава с (5) и (6).

Разглеждаме

$$\mathcal{L}_T(x_t, u_t) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left\{ f^0(x_t, u_t) + \lambda_t^\top \cdot [f(x_t, u_t) - x_{t+1}] \right\}.$$

Имаме

$$D := \mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) +$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t [f^0(x_t, u_t) + \lambda_t^\top \cdot f(x_t, u_t) - f^0(x_t^*, u_t^*) - \lambda_t^\top \cdot f(x_t^*, u_t^*)].$$

Достатъчни условия за оптималност (3)

Тогава, предвид вдлъбнатостта, получаваме

$$\mathcal{L}_T(x_t, u_t) - \mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) \ \ (= D) \ \ \leq \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) +$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t [f_x^{0\top}(x_t^*, u_t^*) \cdot (x_t - x_t^*) + f_u^{0\top}(x_t^*, u_t^*) \cdot (u_t - u_t^*) +$$

$$\lambda_t^\top \cdot [f_x(x_t^*, u_t^*) \cdot (x_t - x_t^*) + f_u(x_t^*, u_t^*) \cdot (u_t - u_t^*)]] =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T} \beta^t \underbrace{[f_x^{0\top}(x_t^*, u_t^*) + \lambda_t^\top \cdot f_x(x_t^*, u_t^*)]}_{= \frac{\lambda_{t-1}^\top}{\beta} \text{ поради (5)}} \cdot (x_t - x_t^*)$$

$$+ \sum_{t=0}^{T} \beta^t \underbrace{[f_u^{0\top}(x_t^*, u_t^*) + \lambda_t^\top \cdot f_u(x_t^*, u_t^*)]}_{= 0^\top \text{ поради (6)}} \cdot (u_t - u_t^*).$$

Достатъчни условия за оптималност (4)

Т.е.

$$D \le \sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{\lambda_{t-1}^\top}{\beta} \cdot \underbrace{(x_t - x_t^*)}_{\text{N.B.: } x_0 = x_0^*} =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \frac{\lambda_{t-1}^\top}{\beta} \cdot (x_t - x_t^*) =$$

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda_t^\top}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*) =$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \lambda_t^\top \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \frac{\lambda_t^\top}{\beta} \cdot (x_{t+1} - x_{t+1}^*) +}_{<0 \text{ т.к. } 1/\beta > 1}$$

$$\beta^T \lambda_T^\top \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \underbrace{\le}_{\text{т.к. } \lambda_t, x_t \ge 0} \beta^T \lambda_T^\top \cdot x_{T+1}^*.$$

Достатъчни условия за оптималност (5)

Така имаме (при отчитане на условието за трансверсалност):

$$D \leq \beta^T \lambda_T^\top \cdot x^*_{T+1} \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

т.е.

$$\mathcal{L}_T(x_t^*, u_t^*) - \mathcal{L}_T(x_t, u_t) \geq 0,$$

което показва оптималността на редицата $\{x^*_{t+1}, u^*_t\}$.

- За решаването на един динамичен макроикономически модел е удобно да се разглежда приближение на уравненията от модела.
- Обикновено ни интересува поведението на системата в околност на някакво равновесие (стационарно състояние) и приближението се прави около него.
- Най-често приближенията са линейни: трансформираме оригиналното, нелинейно уравнение в линейно по някакъв начин.

Линейни приближения (2)

Варианти за линейни приближения

- Приближение от първи ред по формулата на Тейлър
- Логаритмуване (за променливи с положителни стойности)
- Лог-линеаризация

Приближение по формулата на Тейлър (1)

- Приближението от първи ред на $f(X_1, \ldots, X_n)$ около точка $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ се задава с

$$f(X_1, \ldots, X_n) \approx f(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} f(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_i)$$

- Типично точката $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ е стационарно състояние на динамична система, която разглеждаме
- Понякога за променлива $X_i > 0$ е удобно да се положи $x_i := \ln X_i$ и съответно $X_i = e^{x_i}$, като тогава се работи с променливата x_i
    - Този подход създава удобства при интерпретацията, доколкото $x_i - \bar{x}_i$ има смисъл на процентно отклонение от стационарното състояние

Приближение по формулата на Тейлър (2)

- Директното използване на формулата на Тейлър дава повече гъвкавост $\longrightarrow$ може да се работи с логаритмична трансформация или с оригиналната стойност на променливата в зависимост от това дали ни интересува процентно или абсолютно отклонение от референтната стойност (стационарното състояние)

Логаритмуване

- За изрази с мултипликативна структура и положителни променливи е удобно да се прилага директно логаритмуване

- Пример:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t,$$

  където $w_t := \ln W_t$, $p_t := \ln P_t$ и т.н.

Задача 1: Проверете, че за връзката $\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{m} Y_j^{\beta_j}$, при $X_i, Y_j > 0$, прилагането на приближение от първи ред по формулата на Тейлър по отношение на логаритмуваните променливи, x_i и y_j, води до същия резултат като директното логаритмуване.

Този подход също може да се разглежда като следствие от приближението с формулата на Тейлър.
Нека имаме $x_t > 0$ и $\bar{x}$ е дадена стойност на x_t (най-често стационарна стойност).
Логаритмично отклонение (лог-отклонение) на x_t от $\bar{x}$:

$$\hat{x}_t := \ln\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right).$$

Предвид

$$\ln(1+z) \approx \ln(1+z_0) + \frac{1}{1+z_0}(z - z_0),$$

за $z_0 = 0$ получаваме $\ln(1+z) \approx z$ и съответно

$$\ln\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}\right) \approx \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}.$$

Нека $y_t = f(x_t, z_t)$, където f е диференцируема.

Тогава

$$\hat{y}_t = \frac{f_x(\bar{x},\bar{z})\bar{x}}{f(\bar{x},\bar{z})}\hat{x}_t + \frac{f_z(\bar{x},\bar{z})\bar{z}}{f(\bar{x},\bar{z})}\hat{z}_t$$

Имаме следните частни случаи:

1. $y_t = x_t z_t \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = \hat{x}_t + \hat{z}_t.$
2. $y_t = x_t / z_t \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = \hat{x}_t - \hat{z}_t.$
3. $y_t = x_t + z_t \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\hat{x}_t + \frac{\bar{z}}{\bar{y}}\hat{z}_t.$
4. $g(x_t, y_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t = -\frac{g_x(\bar{x},\bar{y})\bar{x}}{g_y(\bar{x},\bar{y})\bar{y}}\hat{x}_t$

Задача 2: Изведете формули 1-4 чрез прилагане на общата формула.

Едносекторен модел на икономически растеж – продължение (1)

Формулировка:

$$f(k_t) = Ak_t^{\alpha}, \quad A > 0,\ \alpha \in (0,1).$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t, \quad \delta \in (0,1), \quad k_0 > 0 \text{ – дадено.}$$

$$\beta\left[(1-\delta) + \alpha\frac{f(k_{t+1})}{k_{t+1}}\right] = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{1-\gamma}$$

Забележка: Индексът за време е преместен с една стъпка напред в последното уравнение.

Стационарно състояние: $k_t = \bar{k}$, $c_t = \bar{c}$ за всяко $t = 0, 1, \ldots$

Имаме

$$\beta \left[1 - \delta + \alpha A \frac{\bar{k}^{\alpha}}{\bar{k}} \right] = \left[\frac{\bar{c}}{\bar{c}} \right]^{1-\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha A \bar{k}^{\alpha - 1} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta.$$

Дефинираме $\rho := \frac{1}{\beta} - 1 (> 0)$. Тогава

$$\bar{k} = \left[\frac{\rho + \delta}{\alpha A} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1}} = \left[\frac{\alpha A}{\rho + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Стационарната стойност на потреблението пресмятаме от

$$\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + A\bar{k}^{\alpha} - \bar{c} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{c} = f(\bar{k}) - \delta\bar{k} = A\bar{k}^{\alpha} - \delta\bar{k}.$$

Величината $\delta\bar{k}$ представлява инвестициите в стационарното състояние.

Едносекторен модел на икономически растеж – продължение (4)

Качествен анализ

Ако потреблението нараства, имаме

$$c_{t+1} > c_t \quad \Rightarrow \left[\beta\left[(1-\delta) + \alpha\frac{f(k_{t+1})}{k_{t+1}}\right]\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} > 1 \quad \Rightarrow$$

$$\beta[1 + f'(k_{t+1}) - \delta] > 1 \quad \Rightarrow$$

$$f'(k_{t+1}) > \frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \rho + \delta = f'(\bar{k}) \quad \Rightarrow$$

$$k_{t+1} < \bar{k}$$

Интерпретация: Потреблението нараства, когато капиталът е под равновесната си стойност, понеже е оптимално да пренасочим потребление днес към инвестиции.

Аналогично имаме

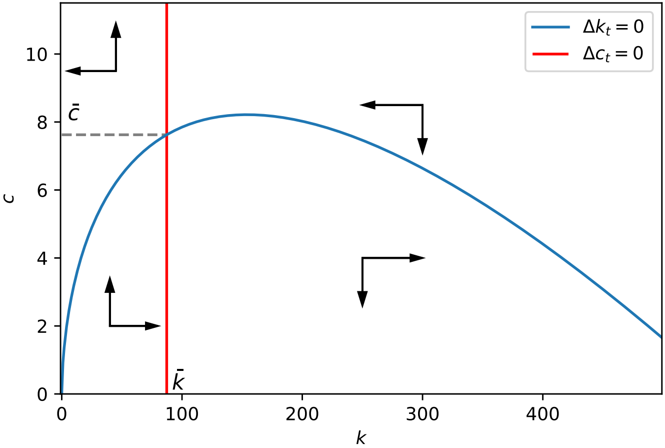
$$k_{t+1} > k_t \quad \Rightarrow -\delta k_t + f(k_t) - c_t > 0 \quad \Rightarrow$$

$$f(k_t) - \delta k_t > c_t.$$

Интерпретация: Капиталът нараства, когато има останало производство, след като сме използвали част от него за потребление и амортизация.

Едносекторен модел на икономически растеж – продължение (6)

Графична илюстрация на качественото поведение на системата



Обикновено моделът се изследва в линеаризиран вид в околност на стационарното състояние.

След лог-линеаризация получаваме уравненията

$$\hat{c}_{t+1} - \frac{\beta f''(\bar{k})\bar{k}}{\mathcal{R}(\bar{c})}\hat{k}_{t+1} = \hat{c}_t,$$

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\hat{k}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t.$$

За функция на полезност $U(c)$ величината $\mathcal{R}(c)$ се дефинира като

$$\mathcal{R}(c) := -\frac{U''(c)c}{U'(c)} \geq 0.$$

Величината $\mathcal{R}(c)$ представлява измерител на локалната вдлъбнатост на функцията на полезност и се нарича мярка на Ароу-Прат за относително избягване на риска.

Задача 3: Проверете, че за функцията $U(c) = c^\gamma/\gamma$ имаме $\mathcal{R}(c) = 1 - \gamma$.

Задача 4: Покажете, че лог-линеаризацията на

$$\beta\left[(1-\delta) + \alpha\frac{f(k_{t+1})}{k_{t+1}}\right] = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{1-\gamma}$$

води до уравнението

$$\hat{c}_{t+1} - \frac{\beta f''(\bar{k})\bar{k}}{\mathcal{R}(\bar{c})}\hat{k}_{t+1} = \hat{c}_t.$$

Едносекторен модел на икономически растеж – продължение (9)

В матричен вид лог-линеаризираният модел може да бъде записан като

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta f''(\bar{k})\bar{c}}{\mathcal{R}(\bar{c})} & -\frac{f''(\bar{k})\bar{k}}{\mathcal{R}(\bar{c})} \\ -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \end{pmatrix}.$$

Поведението на решението зависи от характеристичните корени на матрицата

$$A := \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta f''(\bar{k})\bar{c}}{\mathcal{R}(\bar{c})} & -\frac{f''(\bar{k})\bar{k}}{\mathcal{R}(\bar{c})} \\ -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Може да се покаже, че:

- Характеристичните корени λ_1, λ_2 на матрицата A са реални и положителни.
- Имаме $\lambda_1 > 1$ и $0 < \lambda_2 < 1$.

Това означава, че лог-линеаризираната система е от тип „седло”.

Едносекторен модел на икономически растеж – продължение (11)

Решението на системата може да бъде записано във вида

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{k}_0 \end{pmatrix},$$

където Q е матрицата от собствените вектори, съответстващи на λ_1, λ_2.
Това решение може да бъде записано по-подробно като

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}\lambda_1^t & q_{12}\lambda_2^t \\ q_{21}\lambda_1^t & q_{22}\lambda_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{22}\hat{c}_0 - q_{12}\hat{k}_0 \\ -q_{21}\hat{c}_0 + q_{11}\hat{k}_0 \end{pmatrix} \frac{1}{\det(Q)}.$$

Избухването на решението може да бъде предотвратено, ако изберем

$$\hat{c}_0 = \frac{q_{12}}{q_{22}}\hat{k}_0.$$

Интерпретация!