# Задача про мембрану. МКЭ.

Аксенов Виталий

20 ноября 2018 г.

## Схема расчета

1. Генерация сетки.

   - Параметры узла — начальные координаты $(x_0, y_0)$, начальные смещения $\mathbf{a} = (u, v, w)$, начальные скорости $\mathbf{v} = (v_u, v_v, v_w)$
   - Параметры элемента — индексы узлов $(i, j, k)$ в порядке обхода против часовой, упругие параметры $(E_e, \nu_e)$, $\rho_e$ — плотность, $h_e$ — толщина, внешняя (обьёмная) сила $\mathbf{b_e}(\tau)$
   - Ещё в элементе нужно сделать место под $S_e$ (площадь, считается из координат вершин), матрицу $\mathbf{DB}$ из (1.3.1), чтобы считать $\sigma_{ij}$

2. Сборка глобальных матриц $\mathbf{K}, \mathbf{M}$. Матрицу $\mathbf{f}$ придется пересобирать каждый раз, т.к. силы $\mathbf{b}_e$ зависят от времени.

   - Для каждого элемента нужно получить матрицы $\mathbf{K}_e, \mathbf{M}_e, \mathbf{f}_e$. Возможно, нужно будет перейти в систему барицентра чтобы пользоваться формулами интегрирования из Зинкевича. Вопрос: как такое преобразование координат влияет на матрицы? Кажется, что никак, т.к. это просто сдвиг, но нужно уточнить.
   - Возможно, стоит оценить для каждого элемента $\tau_{opt} = \frac{1}{2}\frac{diam_e}{c}, c \propto \sqrt{\frac{E_e}{\rho_e}}$ — скорость звука.
   - Сборка глобальных матриц.

3. Шаги по времени. Численное решение уравнения $\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{Ku} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$

   - Пересчет $\mathbf{f}$
   - Вычисление тензора напряжений $\sigma_{ij}$ (для дампов и последующего анализа на разрушение и т.п.)
   - Дамп в `.vtk`
   - Итерация по времени. (см. метод Ньюмарка (???))

## 1 Функции формы элемента. Получение матриц $\mathbf{K}_e, \mathbf{M}_e, \mathbf{f}_e$

Элемент — «толстый» треугольник. Есть три узла $(1, 2, 3)$ в порядке обхода против часовой стрелки. Известно, какие индексы у узлов в глобальном списке: $(1, 2, 3) \leftrightarrow (p, q, r)$ Это мы используем в сборке. В формулах ниже $(i, j, k)$ — циклическая перестановка $(1, 2, 3)$

## 1.1 Функции формы

Аппроксимируем смещения (displacement) в элементе:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{N_i a_i} = \mathbf{Na} \tag{1.1.1}$$

где $\mathbf{N} = \left[\, \mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3 \,\right]$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ — узловые смещения.

Гипотеза Кирхгофа-Лява (кинематика <u>тонких</u> пластин) — волокно, нормальное к срединной поверхности, остается нормальным к ней при деформации. Отсюда можем получить зависимость смещения от $z$:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \mathbf{u}_{midsurface}(x,y) + \underline{(\mathbf{n_{curr}} - \mathbf{n_{init}})}z \tag{1.1.2}$$

где $z \in [-\frac{h_e}{2}, \frac{h_e}{2}]$. Предполагая, $\Delta\mathbf{a}$ между узлами элемента малы, можно подчёркнутое приближённо переписать в виде линейного оператора от $\mathbf{a}$.

$$\mathbf{N}_i = (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)\mathbf{E} + z\mathbf{V}_i \tag{1.1.3}$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{S_e}[r_k - r_j]_\times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta_i \\ 0 & 0 & -\gamma_i \\ \beta_i & \gamma_i & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y & 0 & -\beta_i \\ 0 & \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y & -\gamma_i \\ \beta_i & \gamma_i & \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

Здесь

$$\alpha_i = \frac{1}{S_e}\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \beta_i = -\frac{1}{S_e}(y_k - y_j) \quad \gamma_i = \frac{1}{S_e}(x_k - x_j) \tag{1.1.6}$$

$$S_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \text{ — удвоенная площадь треугольника}$$

## 1.2 Растяжения (strains)

Формулируем трёхмерную теорию упругости.

$$\varepsilon = \mathbf{Su} = \mathbf{SNa} = \mathbf{Ba} \tag{1.2.1}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

Двойки, которые обычно есть в выражениях типа $\mathbf{S}_2$, видимо, учтены будут в матрице упругих констант $\mathbf{D}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^1 & \mathbf{B}_2^1 & \mathbf{B}_3^1 \\ \mathbf{B}_1^2 & \mathbf{B}_2^2 & \mathbf{B}_3^2 \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

$$\mathbf{B}_i^1 = \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 \\ \beta_i & \gamma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^2 = \begin{bmatrix} \gamma_i & \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

## 1.3 Напряжения (stresses)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau xz \end{bmatrix} = \mathbf{D}\varepsilon = \mathbf{DBa} \tag{1.3.1}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \tag{1.3.2}$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Здесь $(E, \nu)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для элемента.

## 1.4 Матрица жёсткости $\mathbf{K}_e$

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B^T D B} dV_e = \frac{1}{2} S_e h_e \mathbf{B^T D B} = \left[\mathbf{K}_{ij}\right]_{i,j \in \overline{1,3}} \tag{1.4.1}$$

Имеется в виду блочная матрица из $3 \times 3$ блоков, каждый из которых — матрица $3 \times 3$:

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{B}_i^1 \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_j^1 + \mathbf{B}_i^2 \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_j^2 \tag{1.4.2}$$

## 1.5 Матрица сил $\mathbf{f}_e$

$$\mathbf{f}_e = -\int_{V_e} \mathbf{N^T b} dV_e = -\iiint_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N_1^T b} \\ \mathbf{N_2^T b} \\ \mathbf{N_3^T b} \end{bmatrix} dV_e \tag{1.5.1}$$

$$\int_{V_e} \mathbf{N_i^T} dV_e = h_e \iint (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \mathbf{E} dx dy + \frac{1}{2} S_e \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \mathbf{V_i^T} z dz \tag{1.5.2}$$

Интегралы $\iint xdxdy$, $\iint ydxdy$ равны нулю в системе барицентра (см. Зинкевич, в конце, Appendix D). Но переход из глобальной системы в систему барицентра — сдвиг $\Rightarrow$ якобиан единичный $\Rightarrow$ в глобальной системе то же самое. В системе барицентра получается

$$\mathbf{f} = \frac{\frac{1}{2} S_e h_e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{1.5.3}$$

По идее, это не должно зависеть от системы (так же получалось и в $1D$ методе), но нужно проверить.

## 1.6 Матрица масс $\mathbf{M}_e$

$\mathbf{M}_e$ снова запишем как блочную матрицу $[\mathbf{M}_{ij}]_{i,j \in \overline{1,3}}$

$$\mathbf{M}_e = \rho_e \int_{V_e} \mathbf{N^T N} dV \tag{1.6.1}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \rho \int_{V_e} \mathbf{N_i^T N_j} dV \tag{1.6.2}$$

После интегрирования получаем:

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\rho_e h_e S_e}{24}\left[12\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2)) + \gamma_i\gamma_j(y_i^2 + y_j^2 + y_k^2) + (\beta_i\gamma_j + \beta_j\gamma_i)(x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k)\right]\mathbf{E} + \\ + \underline{\frac{\rho_e S_e h_e^3}{12}\mathbf{V_i^T V_j}} \quad (1.6.3)$$

Интересно будет попробовать на подчёркнутое забить, т.к. там $h_e^3$, а мембрана тонкая. Здесь все $x_i, y_i$ в системе барицентра (для нее выписаны все формулы интегрирования). Т.е. нужно сделать сдвиг

$$x_i = x_i^0 - \frac{1}{3}(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0), \quad y_i = y_i^0 - \frac{1}{3}(y_1^0 + y_2^0 + y_3^0)$$

# Список литературы


[1] Python, M.: «On general theory of SPAM», ELSEVEIR, 1488, ISBN 42424242