

Задача про мембрану. МКЭ.

Аксенов Виталий

20 ноября 2018 г.

Схема расчета

1. Генерация сетки.

- Параметры узла — начальные координаты (x_0, y_0) , начальные смещения $\mathbf{a} = (u, v, w)$, начальные скорости $\mathbf{v} = (v_u, v_v, v_w)$
- Параметры элемента — индексы узлов (i, j, k) в порядке обхода против часовой, упругие параметры (E_e, ν_e) , ρ_e — плотность, h_e — толщина, внешняя (объёмная) сила $\mathbf{b}_e(\tau)$
- Ещё в элементе нужно сделать место под S_e (площадь, считается из координат вершин), тензор напряжений σ_{ij} (6 чисел)

2. Сборка глобальных матриц \mathbf{K} , \mathbf{M} . Матрицу \mathbf{f} придется пересобирать каждый раз, т.к. силы \mathbf{b}_e зависят от времени.

- Для каждого элемента нужно получить матрицы $\mathbf{K}_e, \mathbf{M}_e, \mathbf{f}_e$. Возможно, нужно будет перейти в систему барицентра чтобы пользоваться формулами интегрирования из Зинкевича. Вопрос: как такое преобразование координат влияет на матрицы? Кажется, что никак, т.к. это просто сдвиг, но нужно уточнить.
- Возможно, стоит оценить для каждого элемента $\tau_{opt} = \frac{1}{2} \frac{diam_e}{c}$, $c \propto \sqrt{\frac{E_e}{\rho_e}}$ — скорость звука.
- Сборка глобальных матриц.

3. Шаги по времени. Численное решение уравнения $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$

- Пересчет \mathbf{f}
- Вычисление тензора напряжений σ_{ij} (для дампов и последующего анализа на разрушение и т.п.)
- Дамп в `.vtk`
- Итерация по времени. (см. метод Ньюмарка (???))

1 Функции формы элемента. Получение матриц $\mathbf{K}_e, \mathbf{M}_e, \mathbf{f}_e$

Элемент — «толстый» треугольник. Есть три узла $(1, 2, 3)$ в порядке обхода против часовой стрелки. Известно, какие индексы у узлов в глобальном списке: $(1, 2, 3) \leftrightarrow (p, q, r)$ Это мы используем в сборке. В формулах ниже (i, j, k) — циклическая перестановка $(1, 2, 3)$

1.1 Функции формы

Аппроксимируем смещения (displacement) в элементе:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (1.1.1)$$

где $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3]$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ — узловые смещения.

Гипотеза Кирхгофа-Лява (кинематика тонких пластин) — волокно, нормальное к срединной поверхности, остается нормальным к ней при деформации. Отсюда можем получить зависимость смещения от z :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_{midsurface}(x, y) + (\mathbf{n}_{curr} - \mathbf{n}_{init})z \quad (1.1.2)$$

где $z \in [-\frac{h_e}{2}, \frac{h_e}{2}]$. Предполагая, $\Delta \mathbf{a}$ между узлами элемента малы, можно подчеркнутое приближённо переписать в виде линейного оператора от \mathbf{a} .

$$\mathbf{N}_i = (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \mathbf{E} + z \mathbf{V}_i \quad (1.1.3)$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{S_e} [r_k - r_j]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta_i \\ 0 & 0 & -\gamma_i \\ \beta_i & \gamma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y & 0 & -\beta_i \\ 0 & \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y & -\gamma_i \\ \beta_i & \gamma_i & \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \end{bmatrix} \quad (1.1.5)$$

Здесь

$$\alpha_i = \frac{1}{S_e} \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \beta_i = -\frac{1}{S_e} (y_k - y_j) \quad \gamma_i = \frac{1}{S_e} (x_k - x_j) \quad (1.1.6)$$

$$S_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \text{ — удвоенная площадь треугольника}$$

1.2 Растяжения (strains)

Формулируем трёхмерную теорию упругости.

$$\varepsilon = \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

Двойки, которые обычно есть в выражениях типа \mathbf{S}_2 , видимо, учтены будут в матрице упругих констант \mathbf{D}

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^1 & \mathbf{B}_2^1 & \mathbf{B}_3^1 \\ \mathbf{B}_1^2 & \mathbf{B}_2^2 & \mathbf{B}_3^2 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{B}_i^1 = \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 \\ \beta_i & \gamma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^2 = \begin{bmatrix} \gamma_i & \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

1.3 Напряжения (stresses)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Здесь (E, ν) — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для элемента.

1.4 Матрица жёсткости \mathbf{K}_e

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV_e = \frac{1}{2} S_e h_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} = [\mathbf{K}_{ij}]_{i,j \in \overline{1,3}} \quad (1.4.1)$$

Имеется в виду блочная матрица из 3×3 блоков, каждый из которых — матрица 3×3 :

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_j^1 + \mathbf{B}_i^2 \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_j^2 \quad (1.4.2)$$

1.5 Матрица сил \mathbf{f}_e

$$\mathbf{f}_e = - \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV_e = - \iiint_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_2^T \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_3^T \mathbf{b} \end{bmatrix} dV_e \quad (1.5.1)$$

$$\int_{V_e} \mathbf{N}_i^T dV_e = h_e \iint (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \mathbf{E} dx dy + \frac{1}{2} S_e \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \mathbf{V}_i^T z dz \quad (1.5.2)$$

Интегралы $\iint x dx dy$, $\iint y dx dy$ равны нулю в системе барицентра (см. Зинкевич, в конце, Appendix D). Но переход из глобальной системы в систему барицентра — сдвиг \Rightarrow якобиан единичный \Rightarrow в глобальной системе то же самое. В системе барицентра получается

$$\mathbf{f} = \frac{\frac{1}{2} S_e h_e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

По идее, это не должно зависеть от системы (так же получалось и в $1D$ методе), но нужно проверить.

1.6 Матрица масс \mathbf{M}_e

\mathbf{M}_e снова запишем как блочную матрицу $[\mathbf{M}_{ij}]_{i,j \in \overline{1,3}}$

$$\mathbf{M}_e = \rho_e \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (1.6.1)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \rho \int_{V_e} \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_j dV \quad (1.6.2)$$

После интегрирования получаем:

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\rho_e h_e S_e}{24} [12\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2)) + \gamma_i \gamma_j (y_i^2 + y_j^2 + y_k^2) + (\beta_i \gamma_j + \beta_j \gamma_i)(x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k)] \mathbf{E} + \underline{+ \frac{\rho_e S_e h_e^3}{12} \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_j} \quad (1.6.3)$$

Интересно будет попробовать на подчеркнутое забить, т.к. там h_e^3 , а мембрана тонкая. Здесь все x_i, y_i в системе барицентра (для нее выписаны все формулы интегрирования). Т.е. нужно сделать сдвиг

$$x_i = x_i^0 - \frac{1}{3}(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0), \quad y_i = y_i^0 - \frac{1}{3}(y_1^0 + y_2^0 + y_3^0)$$

Список литературы

[1] Python, М.: «On general theory of SPAM», ELSEVEIR, 1488, ISBN 42424242