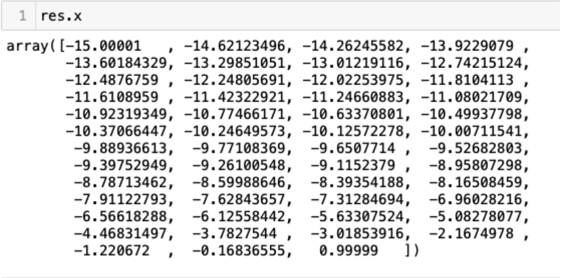
Задача 1

Численно найдите экстремум функционала

$$\int_0^2 y'^2 + 2y'y + y^2 + 3ye^{2t}dt$$

$$y(0) = -15, y(2) = 1$$

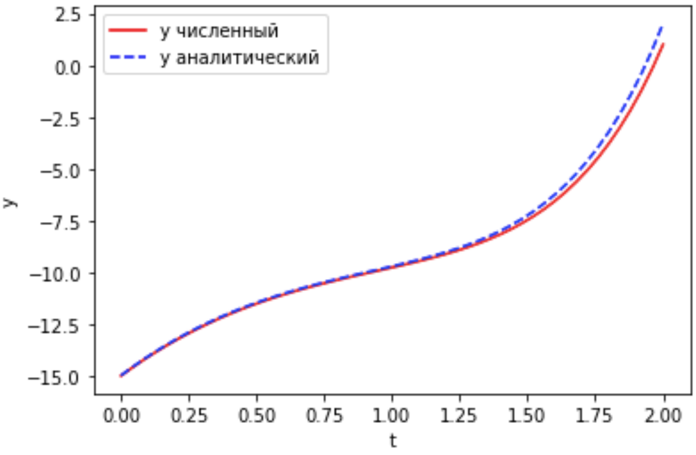
Для численного метода было взято число разделений дискретной шкалы, равное 51. Начальные значения = 1 для каждого шага шкалы. При минимизации функционала получилось следующее:



```
res.x
```

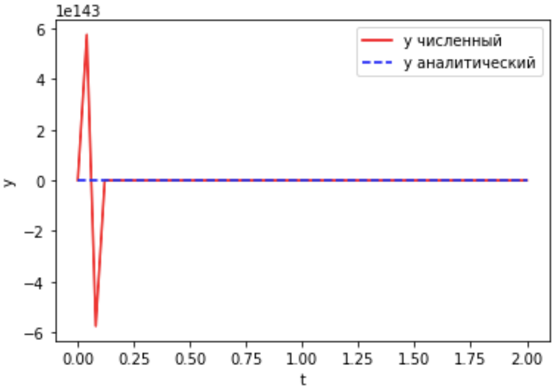
```
array([-15.00001   , -14.62123496, -14.26245582, -13.9229079 ,
       -13.60184329, -13.29851051, -13.01219116, -12.74215124,
       -12.4876759 , -12.24805691, -12.02253975, -11.8104113 ,
       -11.6108959 , -11.42322921, -11.24660883, -11.08021709,
       -10.92319349, -10.77466171, -10.63370801, -10.49937798,
       -10.37066447, -10.24649573, -10.12572278, -10.00711541,
        -9.88936613,  -9.77108369,  -9.6507714 ,  -9.52682803,
        -9.39752949,  -9.26100548,  -9.1152379 ,  -8.95807298,
        -8.78713462,  -8.59988646,  -8.39354188,  -8.16508459,
        -7.91122793,  -7.62843657,  -7.31284694,  -6.96028216,
        -6.56618288,  -6.12558442,  -5.63307524,  -5.08278077,
        -4.46831497,  -3.7827544 ,  -3.01853916,  -2.1674978 ,
        -1.220672  ,  -0.16836555,   0.99999   ])
```

Решение, полученное в питоне численным методом, примерно совпало с вычисленным аналитически:



Аналитическое решение было получено вручную решением д/у, полученного после записи уравнения Эйлера.

Также была решена задача максимизации функционала (минимизация исходной функции с противоположны знаком):



Видно, что решение плохо совпадает с аналитическим, что говорит о том, что в данной задаче экстремумом будет найденный ранее минимум.

Задача 2

Численно найдите экстремум функционала

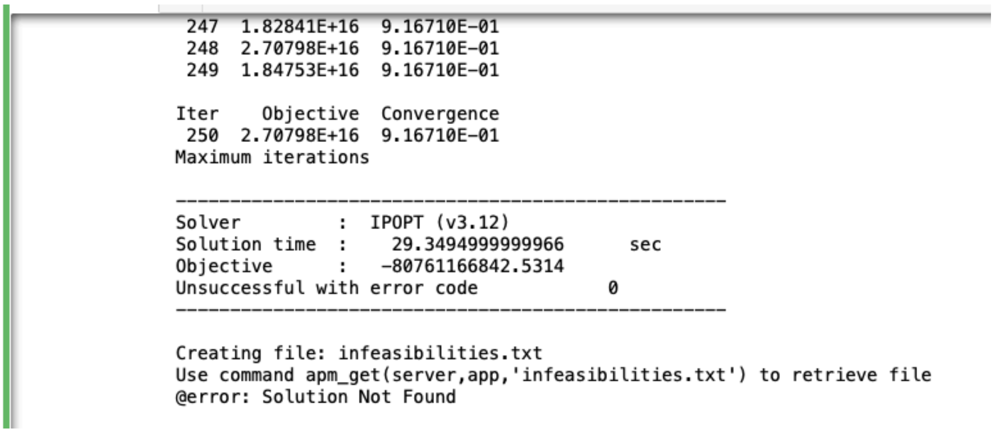
$$\int_0^2 \left(y - 15u\right)dt,\ y' = 18y + u$$

$$y(0) = 2, y(2)\ свободно$$

$$u(t) \in [-3{,}13]$$

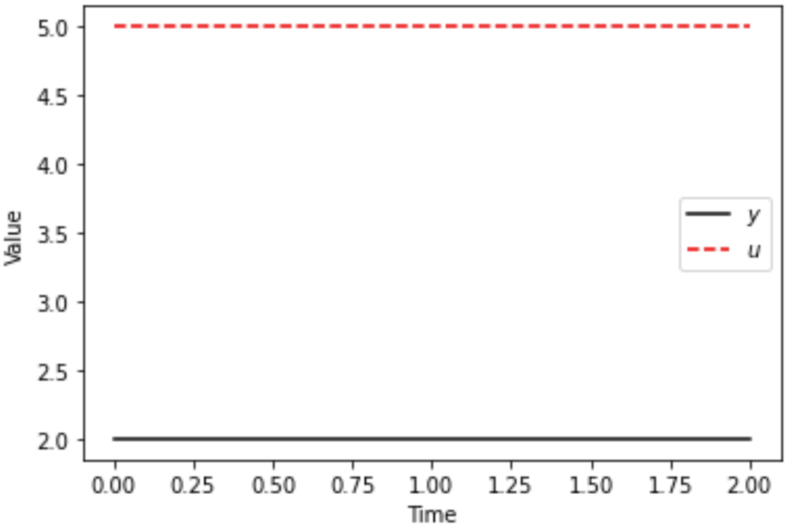
Для численного решения взято 501 деление дискретной шкалы.

Python не смог найти решение, Excel тоже:



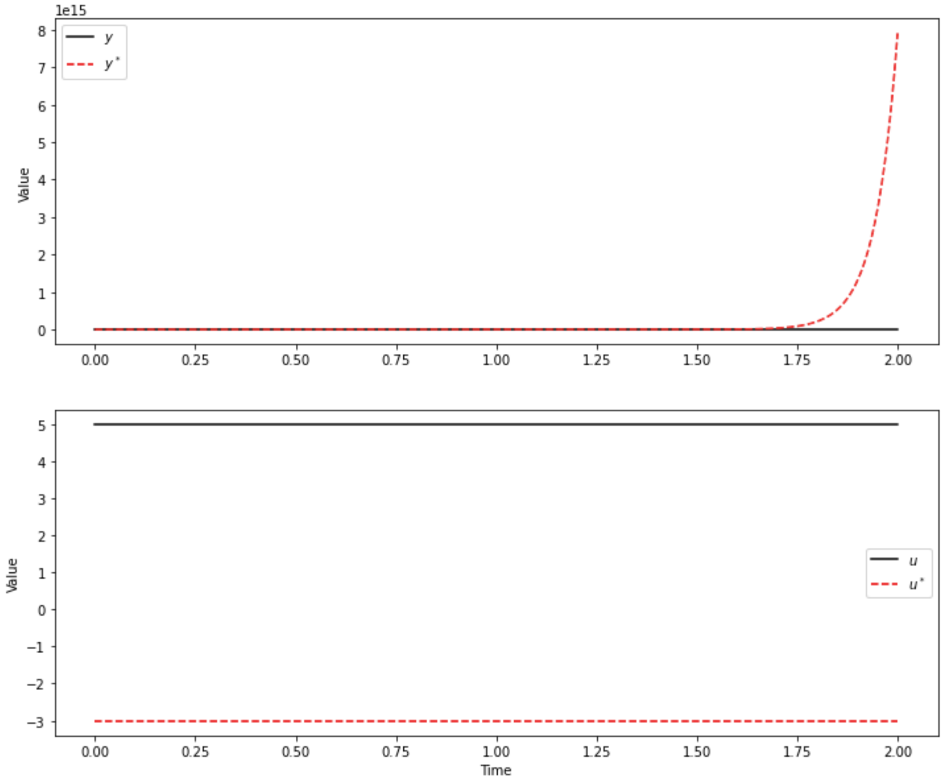
```
 247  1.82841E+16  9.16710E-01
 248  2.70798E+16  9.16710E-01
 249  1.84753E+16  9.16710E-01

Iter    Objective  Convergence
 250  2.70798E+16  9.16710E-01
Maximum iterations

 ---------------------------------------------------
 Solver         :  IPOPT (v3.12)
 Solution time  :    29.3494999999966      sec
 Objective      :   -80761166842.5314
 Unsuccessful with error code            0
 ---------------------------------------------------

 Creating file: infeasibilities.txt
 Use command apm_get(server,app,'infeasibilities.txt') to retrieve file
 @error: Solution Not Found
```

Графики y и u выглядят следующим образом и не имеют общих точек:



То есть y = 2, u = 5 при всех t от 0 до 2.

Графики y и u, полученных численно и аналитически (с помощью приниципа максимума Понтрягина):



Видно, что численные и аналитические решения плохо совпадают (для u не совпадают совсем, но если выбрать начальное значение не в 5, а в -3, то они совпадут).

Расчеты, выполненные вручную с помощью принципа максимума Понтрягина, привели к результату, в котором также отсутствуют пересечения y и u, что вероятно говорит об отсутствии решения для данной задачи.

1. $H = \text{ y} - 15\text{u} + 18\lambda\text{y} + \lambda\text{u} = \left(1 + 18\lambda\right)\text{y} + \text{u}(\lambda - 15)$

2. Максимизируем на $u(t) \in \left[-3{,}13\right]$

$$u* = \begin{cases} 13{,}\lambda > 15 \\ \left[-3;13\right],\ \lambda = 15 \\ -3,\lambda < 15 \end{cases}$$

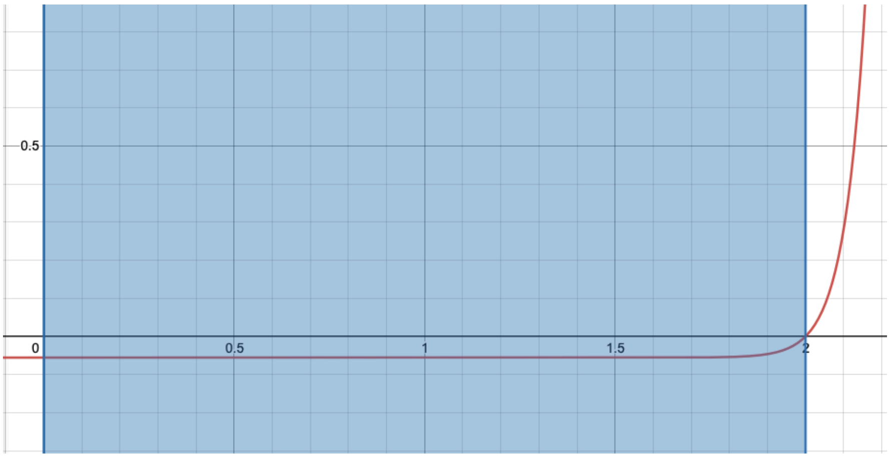
3. $\lambda' = 1 + 18\lambda$, откуда

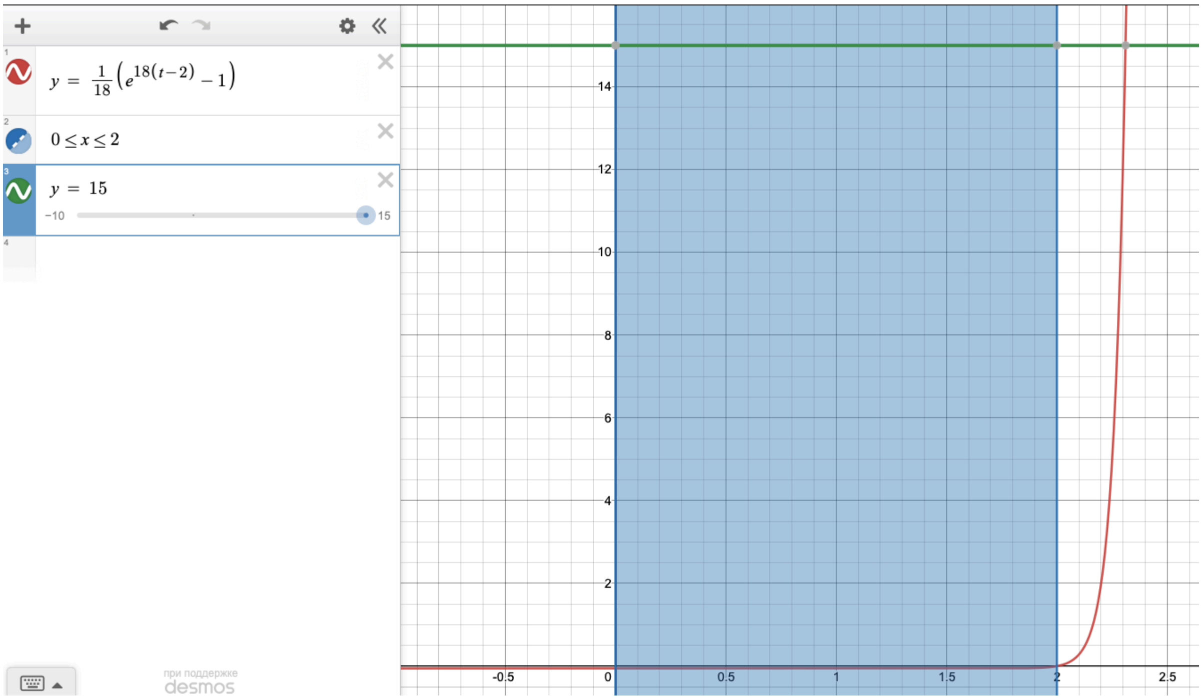
$$\lambda(\text{t}) = c_1\text{e}^{18t} - \frac{1}{18}$$

4. $\lambda(2) = 0$, откуда

$$\lambda(\text{t}) = \frac{1}{18}(\text{e}^{18(t-2)} - 1)$$

Требуется исследовать λ(t):





$y = \frac{1}{18}\left(e^{18(t-2)} - 1\right)$

$0 \le x \le 2$

$y = 15$

-10 … 15

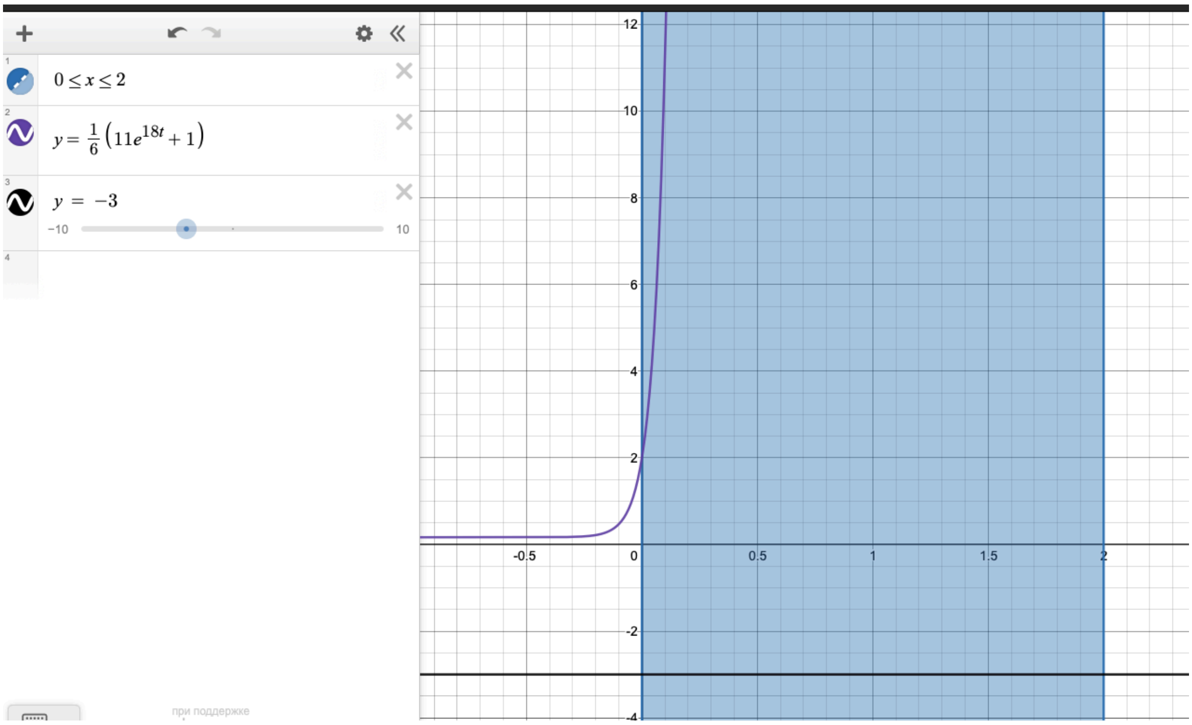
Граничное значение лямбда = 15, полученное в u* не пересекается с полученной функцией λ(t) на исследуемой области (от 0 до 2). λ(t) всегда меньше 15 на данном промежутке, значит, полученное ранее u* должно быть переписано следующим образом:

$$u* = -3,\ при\ t \in [0, 2]$$

Находим $y' = 18y + u = 18y - 3,\ t \in [0{,}2]$

Откуда $y = \dfrac{1}{6}\left(11e^{18t} + 1\right),\ \ t \in [0{,}2]$

Графики y и u не имеют общих точек:



1 $0 \le x \le 2$

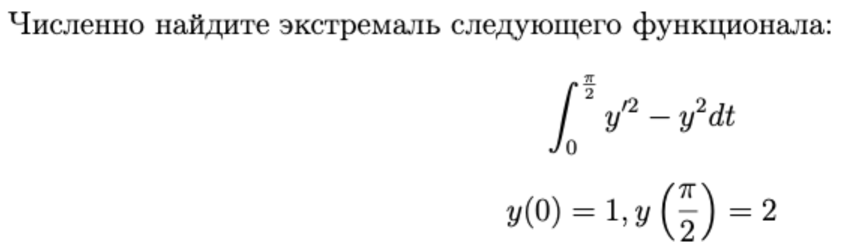
2 $y = \frac{1}{6}\left(11e^{18t} + 1\right)$

3 $y = -3$

−10 10

4

Задача 3



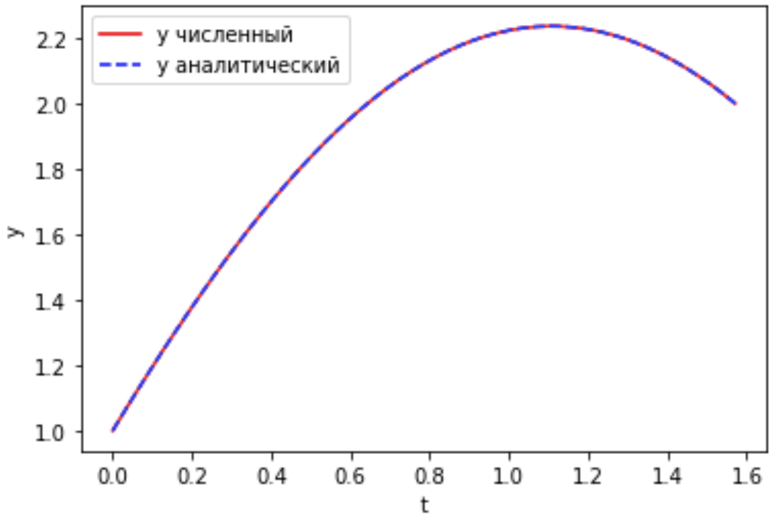
Численно найдите экстремаль следующего функционала:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y'^2 - y^2 dt$$

$$y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

Взято число делений дискретной шкалы = 51, 1 – начальное значение y для каждого шага.

Полученное численное и аналитическое решение совпали (аналитическое решение – с помощью уравнения Эйлера: y(t)=2sinx+cosx):



При максимизации функционала (минимизации функционала с противоположным знаком), получилось решение, не совпадающее с аналитическим, значит, экстремум – минимум, найденный ранее.