Национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет информационных технологий и программирования
Информационные системы и технологии

Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №3

Работу выполнили:
Фирсова Д. А., студентка М33081
Деревицкая П. К., студентка М33081
Борздун А. В., студентка М33051

Преподаватель:
Свинцов М. В.

Санкт-Петербург,
2023

Оглавление

Цель работы: исследование дискретной цепи Маркова

Задачи, решаемые во время выполнения работы:

1. Моделирование дискретной эргодической сети Маркова
2. Моделирование преобразования вектора вероятностей состояний
3. Распределение по состояниям численно и аналитически

Сети Маркова
Краткая теоретическая справка

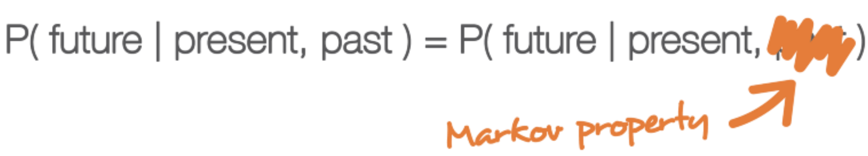
Случайные переменные и случайные процессы.

Вне языка математики **случайной величиной** X считается величина, которая определяется результатом случайного явления. Его результатом может быть число (или «подобие числа», например, векторы) или что-то иное. Пространство возможных результатов случайной величины может быть дискретным или непрерывным.

Далее мы можем определить **случайный процесс** (также называемый стохастическим) как набор случайных величин, проиндексированных множеством T, которое часто обозначает разные моменты времени. Два самых распространённых случая: T может быть или множеством натуральных чисел (случайный процесс с дискретным временем), или множеством вещественных чисел (случайный процесс с непрерывным временем). Например, если мы будем бросать монетку каждый день, то зададим случайный процесс с дискретным временем, а постоянно меняющаяся стоимость опциона на бирже задаёт случайный процесс с непрерывным временем.

Марковское свойство, марковский процесс и цепь Маркова.

Случайный процесс с марковским свойством называется **марковским процессом.** Марковское свойство сообщает нам о том, что в любой момент времени условное распределение будущих состояний процесса с заданными текущим и прошлыми состояниями зависит только от текущего состояния, но не от прошлых состояний (свойство отсутствия памяти).



То есть, если мы знаем текущее состояние в заданный момент времени, то нам не нужна никакая дополнительная информация о будущем, собираемая из прошлого. На основании этого определения мы можем сформулировать определение «однородных цепей Маркова с дискретным временем» («цепи Маркова»). Цепь Маркова — это марковский процесс с дискретным временем и дискретным пространством состояний.

Итак**, цепь Маркова** — это дискретная последовательность состояний, каждое из которых берётся из дискретного пространства состояний (конечного или бесконечного), удовлетворяющее марковскому свойству.

$$X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$$

где в каждый момент времени процесс берёт свои значения из дискретного множества E, такого, что

$$X_n \in E \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда марковское свойство подразумевает, что у нас есть

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, X_{n-2} = s_{n-2}, \ldots) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n)$$

Определим динамику цепи Маркова. Для этого нам нужно определить два аспекта: **исходное распределение вероятностей** (то есть распределение вероятностей в момент времени n=0), обозначаемое

$$\mathbb{P}(X_0 = s) = q_0(s) \qquad \forall s \in E$$

и **матрицу переходных вероятностей** (которая даёт нам вероятности того, что состояние в момент времени n+1 является последующим для другого состояния в момент n для любой пары состояний), обозначаемую

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n) = p(s_n, s_{n+1}) \qquad \forall (s_{n+1}, s_n) \in E \times E$$

Вероятность любого результата процесса можно вычислить циклически.

Классификация цепей Маркова

Классификация цепей Маркова может быть выполнена по нескольким критериям:

По количеству состояний:

- Дискретные (или конечные) цепи Маркова имеют конечное число состояний.
- Непрерывные цепи Маркова имеют бесконечное множество состояний.

По пространству состояний:

- Однородные цепи Маркова, в которых вероятности перехода между состояниями не изменяются с течением времени.
- Неоднородные цепи Маркова, где вероятности перехода могут изменяться в зависимости от времени.

По времени:

- Временные цепи Маркова, в которых временные моменты дискретны.
- Продолжительные временные цепи Маркова, где временные моменты являются непрерывными.

По эргодичности:

- Эргодичные цепи Маркова, в которых существует стационарное распределение и любое состояние может быть достигнуто из любого другого с положительной вероятностью.
- Неэргодичные цепи Маркова, где не существует стационарного распределения или некоторые состояния не могут быть достигнуты из других.

По марковским свойствам:

- Цепи Маркова с дискретным временем.
- Цепи Маркова с непрерывным временем.

По типу состояний:

- Периодические цепи Маркова, где состояния подчиняются определенным периодичным закономерностям.
- Апериодические цепи Маркова, где периодичности отсутствуют.

Цепи Маркова в конечных пространствах состояний.

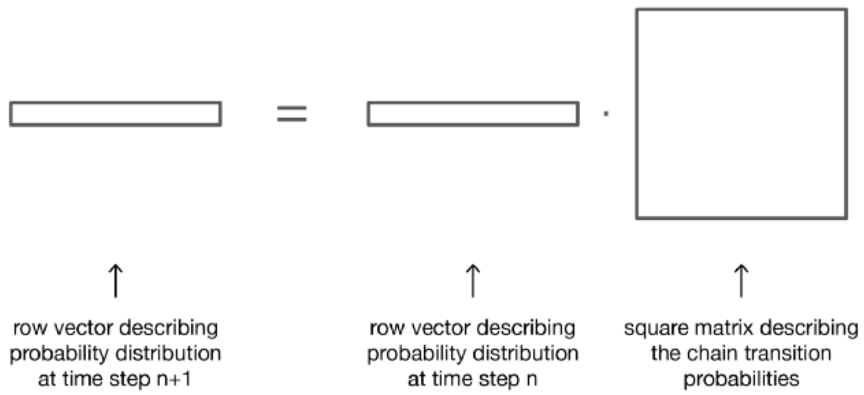
Здесь мы допустим, что во множестве E есть конечное количество возможных состояний N:

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_N\}$$

Тогда исходное распределение вероятностей можно описать как вектор-строку q0 размером N, а переходные вероятности можно описать как матрицу p размером N на N, такую что

$$(q_0)_i = q_0(e_i) = \mathbb{P}(X_0 = e_i)$$
$$p_{i,j} = p(e_i, e_j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i) \qquad \text{(independent of n)}$$

То есть:



Если умножить справа вектор-строку, описывающий распределение вероятностей на заданном этапе времени, на матрицу переходных вероятностей, то мы получим распределение вероятностей на следующем этапе времени.

Переход распределения вероятностей из заданного этапа в последующий определяется просто как умножение справа вектора-строки вероятностей исходного шага на матрицу p. Кроме того, это подразумевает, что у нас есть:

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i) \equiv \text{ probability of going from } e_i \text{ to } e_j \text{ in 1 step} \\ (p^2)_{i,j} &= \mathbb{P}(X_{n+2} = e_j | X_n = e_i) \equiv \text{ probability of going from } e_i \text{ to } e_j \text{ in 2 steps} \\ &\qquad \ldots \\ (p^m)_{i,j} &= \mathbb{P}(X_{n+m} = e_j | X_n = e_i) \equiv \text{ probability of going from } e_i \text{ to } e_j \text{ in m steps} \end{aligned}$$

Динамику случайности цепи Маркова в конечном пространстве состояний можно с лёгкостью представить как нормированный ориентированный граф, такой что каждый узел графа является состоянием, а для каждой пары состояний (ei, ej) существует ребро, идущее от ei к ej, если p(ei,ej)>0. Тогда значение ребра будет той же вероятностью p(ei,ej).

Стохастические матрицы

Стохастическая матрица (или вероятностная матрица) — это квадратная матрица, элементы которой являются неотрицательными и таким образом, что сумма элементов каждой строки равна 1. Формально, матрица P размером n×n называется стохастической, если выполнены два условия: неотрицательность и строковая сумма равна 1. Эти условия гарантируют, что каждая строка матрицы представляет собой дискретное вероятностное распределение, где каждый элемент строки - это вероятность соответствующего события.

Эргодичность цепи Маркова

Эргодичность — это ещё одно свойство, связанное с поведением цепи Маркова. Если цепь Маркова неразложима, то также говорится, что она «эргодическая», потому что удовлетворяет следующей эргодической теореме. Допустим, у нас есть функция f(.), идущая от пространства состояний E к оси (это может быть, например, цена нахождения в каждом состоянии). Мы можем определить среднее значение, перемещающее эту функцию вдоль заданной траектории (временное среднее). Для n-ных первых членов это обозначается как

$$\frac{1}{n}(f(X_0) + f(X_1) + ... + f(X_{n-1})) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i)$$

Также мы можем вычислить среднее значение функции f на множестве E, взвешенное по стационарному распределению (пространственное среднее), которое обозначается

$$\sum_{e \in E} \pi(e) f(e)$$

Тогда эргодическая теорема говорит нам, что, когда траектория становится бесконечно длинной, временное среднее равно пространственному среднему (взвешенному по стационарному распределению). Свойство эргодичности можно записать так:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) = \sum_{e \in E} \pi(e) f(e)$$

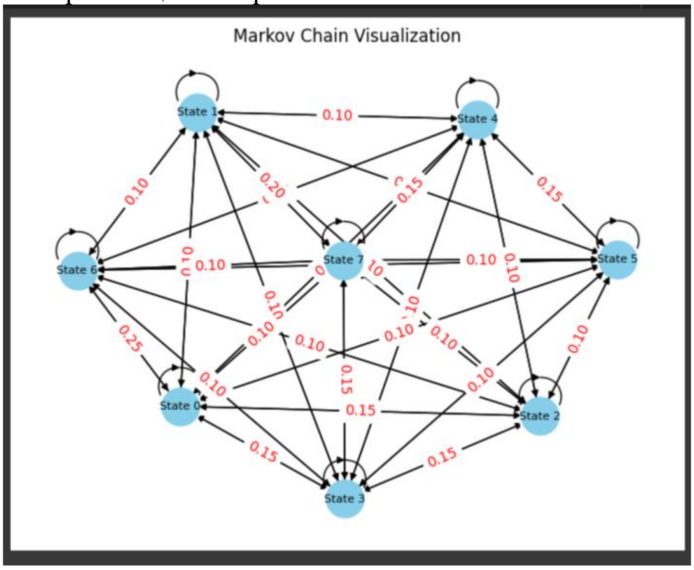
Иными словами, оно обозначает, что в пределе ранее поведение траектории становится несущественным и при вычислении временного среднего важно только долговременное стационарное поведение.

Программная реализация

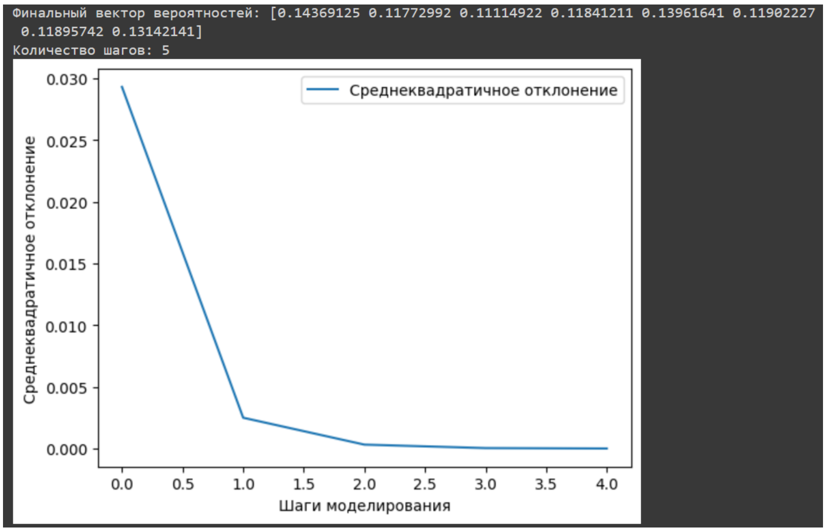
Код предоставлен по ссылке:

https://colab.research.google.com/drive/1dqUzkl8W3hhwY3rCNpr931hQvJkU0shl?usp=sharing

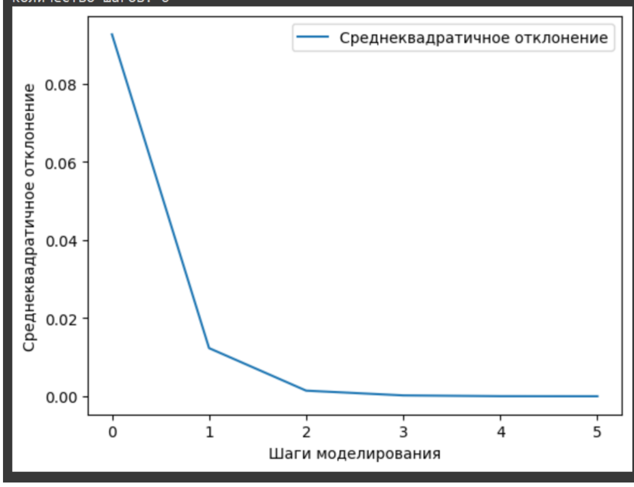
1. Построили цепь Маркова:



2. Решаем численным методом. В результате мы видим графики, отображающие среднеквадратичное отклонение между последовательными векторами на каждом шаге. С их помощью оценим, как быстро модель достигает стационарности. Мы тестировали решение на разном количестве итераций.



```
Финальный вектор вероятностей: [0.14369048 0.11773095 0.11114912 0.11841242 0.13961611 0.11902205
 0.11895756 0.13142131]
Количество шагов: 6
```



На графиках наглядно видно, что отклонение уменьшается на каждом шаге. Также мы понимаем, что до ответа, с некоторой точностью, можно дойти при любом количестве итераций.

В данном случае оба начальных вектора показывают сходимость к одному и тому же стационарному состоянию.

3. Решаем Аналитическим методом:

```python
# Уравнение P * transition_matrix = P можно переписать как (P * transition_matrix - P) = 0
# Добавим условие нормировки
A = np.vstack((transition_matrix.T - np.eye(8), np.ones(8)))
b = np.zeros(9)
b[-1] = 1

solution = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)[0]
stationary_distribution = solution[0:]

print("Стационарное распределение:")
print(stationary_distribution)
```

```
Стационарное распределение:
[0.14369078 0.11773066 0.11114898 0.11841229 0.13961621 0.11902218
 0.1189576  0.13142129]
```

Решение представляет собой стационарное распределение.
Аналитический метод позволяет получить решение системы уравнений без явной итерации. Важно отметить, что этот метод эффективен для данной задачи.

Выводы

В ходе лабораторной работы была промоделирована дискретная эргодическая цепь Маркова и реализованы численный и аналитический методы решения Марковских цепей. В результате были выявлены преимущества и недостатки этих методов для данной задачи.

Для численного метода это:

Преимущества:

- Универсальность: численные методы подходят для широкого спектра задач, даже в случае сложных матриц переходов и векторов начальных состояний.
- Гибкость: могут использоваться для моделирования больших систем или систем с динамическим изменением параметров.
- Возможность учета сложных структур: могут быть расширены для учета дополнительных условий или структур в модели, таких как разные веса переходов.

Недостатки:

- Численная неопределенность: Результаты могут зависеть от параметров численного метода (например, эпсилон, максимальное количество шагов), и их выбор может быть нетривиальным.
- Вычислительная сложность: могут потребоваться значительные вычислительные ресурсы для больших систем.

Аналитический метод:

Преимущества:

- Аналитическая ясность: позволяет получить явное аналитическое решение для стационарного распределения, что облегчает анализ и интерпретацию.
- Эффективность: в случае простых систем аналитический метод может быть более эффективным и менее ресурсозатратным.

Недостатки:

- Ограничения применимости: аналитический метод может быть сложен или даже невозможен для применения в некоторых случаях, особенно для сложных моделей или систем.
- Точность: в некоторых случаях аналитическое решение может упрощать модель, что может привести к потере точности.

То есть, для простых систем аналитический метод может быть предпочтителен из-за своей ясности и эффективности. Это наш случай. В более сложных случаях, где аналитическое решение невозможно или затруднено, численные методы могут быть более подходящими.
Также, результаты аналитического метода могут использоваться для проверки корректности численного метода.