

# Лабораторная работа №3

**Задача 1.** Предъявите доверительный интервал уровня  $1 - \alpha$  для указанного параметра при данных предположениях (с обоснованиями). Сгенерируйте 2 выборки объема 25 и посчитайте доверительный интервал. Повторите 1000 раз. Посчитайте, сколько раз 95-процентный доверительный интервал покрывает реальное значение параметра. То же самое сделайте для объема выборки 10000. Как изменился результат? Как объяснить?

Задача представлена в 3 вариантах. Везде даны две независимые выборки  $X, Y$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  объема  $n, m$  соответственно. Сначала указывается оцениваемая функция, потом данные об остальных параметрах, затем параметры эксперимента и подсказки.

1.  $\tau = \mu_1 - \mu_2$ ;  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  известны;  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0.5$ ; воспользуйтесь функцией

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\sigma}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}.$$

2.  $\tau = \mu_1 - \mu_2$ ;  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  неизвестна;  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ ; воспользуйтесь функцией

$$\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\sqrt{n\text{Var}(X) + m\text{Var}(Y)}},$$

где  $\text{Var}(\cdot)$  – выборочная смещенная дисперсия. Смотрите в сторону распределения Стюдента.

3.  $\tau = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ ;  $\mu_1, \mu_2$  неизвестны;  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 1$ ; воспользуйтесь функцией

$$\frac{n(m-1)\text{Var}(X)}{m(n-1)\text{Var}(Y)},$$

где  $\text{Var}(\cdot)$  – выборочная смещенная дисперсия. Смотрите в сторону распределения Фишера.

**Задача 2.** Постройте асимптотический доверительный интервал уровня  $1 - \alpha$  для указанного параметра. Проведите эксперимент по схеме, аналогичной первой задаче.

Задача представлена в 7 вариантах. Сначала указывается класс распределений (однопараметрический) и оцениваемый параметр, затем параметры эксперимента и подсказки.

1.  $\text{Exp}(\lambda)$ ; медиана;  $\lambda = 1$ ; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении среднего члена вариационного ряда.
2. Распределение Лапласа с неизвестным параметром сдвига  $\mu$  и единичным масштабирующим параметром;  $\mu$ ;  $\mu = 2$ ; можно воспользоваться подсказкой для предыдущего варианта, хотя другие способы решения приветствуются.
3.  $U[-\theta, \theta]$ ;  $\theta$ ;  $\theta = 5$ ; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении крайних членов вариационного ряда.

4.  $\text{Geom}(p)$ ;  $p$ ;  $p = 0.7$ ; тут рецепт стандартный).
5.  $\text{Pois}(\lambda)$ ; второй момент;  $\lambda = 1$ ; воспользоваться асимптотической нормальностью второго момента.
6.  $U[0; \theta]$ ;  $\theta$ ;  $\theta = 2$ , см. п. 3.
7.  $U[-\theta; 0]$ ;  $\theta$ ;  $\theta = 3$ , см. п. 3.

**Ключевые понятия:**

- Доверительные интервалы. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Теорема Фишера
- Доверительные интервалы. "Универсальный" рецепт.
- Асимптотические доверительные интервалы. "Обычный" рецепт.
- Теоремы об асимптотическом поведении среднего и крайних членов вариационного ряда.