Лекция 1. Основные определения

«Картина мира»

Реальный мир

программа – соответствует – требования

Формальный (математический) мир

матем. модель программы – матем. отношение соответствия – матем. модель требований

«Аксиома Шуры-Буры»: отношение неформального к формальному сугубо неформально!

Содержание

Переменные и домены

- $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$ – вектор входных переменных.
- $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots , y_m)$ – вектор промежуточных переменных.
- $\bar{z} = (z_1, z_2, \ldots , z_k)$ – вектор выходных переменных.
- D_v – домен (область значений) переменной v.
- $D_{\bar{x}} = D_{x_1} \times D_{x_2} \times \ldots D_{x_n}$ – домен входных переменных.
- $D_{\bar{y}} = D_{y_1} \times D_{y_2} \times \ldots D_{y_m}$ – домен промежуточных переменных.
- $D_{\bar{z}} = D_{z_1} \times D_{z_2} \times \ldots D_{z_k}$ – домен выходных переменных.

Специальные значения

- $D = \bigcup_v D_v$ – универсальный домен.
- $T, F \in D$ – специальные значения «истина» и «ложь».
- *Предикат* – функция, область значений которой равна T, F.
- $\omega \notin D$ – специальное обозначение «отсутствия значения».
- $D^+ = D \ \cup \ \{\omega\}$ – расширенный домен.
- $f : \ A \ \rightarrow \ B$ – функция, отображающая единственным образом каждый элемент множества A в элемент множества B.

Содержание

Операторы блок-схемы

- Оператор START : инициализирует все промежуточные переменные : $\bar{y} \leftarrow f(\bar{x})$ $(f: D_{\bar{x}} \rightarrow D_{\bar{y}})$
- Оператор ASSIGN : заменяет значения всех промежуточных переменных : $\bar{y} \leftarrow g(\bar{x}, \bar{y})$ $(g: D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \rightarrow D_{\bar{y}})$
- Оператор TEST : тестирует значения входных и промежуточных переменных : $t(\bar{x}, \bar{y})$ $(t: D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \rightarrow \{T, F\})$
- Оператор JOIN
- Оператор HALT : вычисляет все выходные переменные : $\bar{z} \leftarrow h(\bar{x}, \bar{y})$ $(h: D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \rightarrow D_{\bar{z}})$

Блок-схема

- O – множество операторов.
- Λ_P – множество меток операторов.
- Блок-схема P – это тройка $(V,\ N,\ E)$, где
  - $V = (\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ – переменные,
  - $N \subseteq O \times \Lambda_P$ – операторы блок-схемы, снабженные метками для различения одинаковых операторов.
  - $E \subseteq N \times \{T,\ F,\ \varepsilon\} \times N$ – ориентированные дуги-связки блок-схемы (начало дуги, метка дуги, конец дуги).

Корректно-определенная блок-схема

Блок-схема P называется *корректно-определенной*, если:

1. В ней есть единственный оператор START.
2. Любой оператор находится на ориентированном пути от START к одному из HALT.
3. Число и метки входящих и исходящих дуг для операторов соответствуют их типам: у START 0 входящих, 1 исходящая (помечена ε); у ASSIGN 1 входящая и 1 исходящая (помечена ε); у TEST 1 входящая и 2 исходящие (одна помечена T, другая – F); у JOIN не менее 1 входящей и 1 исходящая (помечена ε); у HALT 1 входящая и 0 исходящих.

Семантика блок-схемы

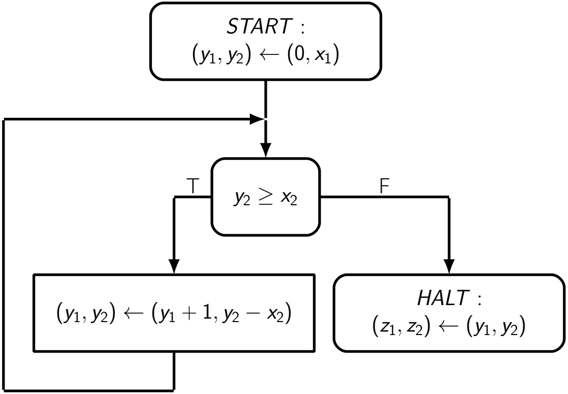
Конфигурация – пара $(\ell,\ \sigma)$, где $\ell \in \Lambda_P$, $\sigma \in D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}}$.
Вычисление – конечная или бесконечная последовательность конфигураций C_i, $i\ =\ 1, 2,\ \ldots$ такая, что:

1. метка в C_1 помечает оператор, следующий за оператором START;
2. значения y_i в C_1 равны $f(\bar{x})$, где $\bar{x}$ — это значения входных переменных, а функция f приписана оператору START;
3. любые соседние элементы C_i и C_{i+1} корректны относительно оператора, помеченного меткой в C_i (см. следующий слайд)

Соседние конфигурации вычисления

- если ℓ_i помечает оператор ASSIGN, которому приписана функция g, то ℓ_{i+1} помечает следующий за ним оператор, $\sigma_{i+1} \ = \ \sigma_i \ [\ \bar{y} \ \leftarrow \ g(\sigma_i[\bar{x}], \ \sigma_i[\bar{y}])\ ]$.
- если ℓ_i помечает оператор TEST, которому приписана функция t, то ℓ_{i+1} помечает следующий за ним оператор по дуге с меткой, равной $t(\sigma_i[\bar{x}, \ \bar{y}])$, $\sigma_{i+1} \ = \ \sigma_i$.
- если ℓ_i помечает оператор HALT, которому приписана функция h, то это последняя конфигурация вычисления.
- если ℓ_i помечает оператор JOIN, то ℓ_{i+1} помечает следующий за ним оператор, $\sigma_{i+1} \ = \ \sigma_i$.

Пример блок-схемы и вычисления



$(3, 2, 0, 3)$
$(3, 2, 0, 3)$
$(3, 2, 0, 3)$
$(3, 2, 1, 1)$
$(3, 2, 1, 1)$
$(3, 2, 1, 1)$

Функция, вычисляемая блок-схемой

Лемма: Для любой корректно-определенной блок-схемы P и значений входных переменных $\bar{x}$ существует и единственно вычисление, в котором значения входных переменных равны значениям $\bar{x}$.
$M[P] : D_{\bar{x}} \to D_{\bar{z}}^{+}$ – функция, вычисляемая блок-схемой.
Если вычисление конечно на $\bar{x}$, то $M[P](\bar{x}) = h(\sigma)$, где h – функция, приписанная оператору HALT в последней конфигурации вычисления, а σ – значения переменных в последней конфигурации вычисления.
Иначе (вычисление бесконечно на $\bar{x}$) $M[P](\bar{x}) = \omega$.

Содержание

Математическая модель требований

Спецификация Φ над переменными V – это пара функций $(\varphi, \ \psi)$, где $\varphi : D_{\bar{x}} \to \{T, \ F\}$, а $\psi : D_{\bar{x}} \ \times \ D_{\bar{z}} \to \{T, \ F\}$.
φ – предусловие
ψ – постусловие

Примеры моделей требований

- $\varphi \equiv T,\ \psi \equiv (x_1 = x_2 \cdot z_1 + z_2)$
- $\varphi \equiv (x_2 > 0),\ \psi \equiv (x_1 = x_2 \cdot z_1 + z_2)$
- $\varphi \equiv (x_1 > 0 \wedge x_2 > 0),\ \psi \equiv (x_1 = x_2 \cdot z_1 + z_2 \wedge 0 \leq z_2 < x_2)$

Содержание

Математические отношения соответствия

- Блок-схема P *частично корректна* относительно спецификации $(\varphi,\ \psi)$ (обозначается как $\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$), если $\forall \bar{x} \in D_{\bar{x}} \cdot \varphi(\bar{x}) \wedge M[P](\bar{x}) \neq \omega \Rightarrow \psi(\bar{x},\ M[P](\bar{x}))$.
- Блок-схема P *полностью корректна* относительно спецификации $(\varphi,\ \psi)$ (обозначается как $\langle\phi\rangle\ P\ \langle\psi\rangle$), если $\forall \bar{x} \in D_{\bar{x}} \cdot \varphi(\bar{x}) \Rightarrow M[P](\bar{x}) \neq \omega \wedge \psi(\bar{x},\ M[P](\bar{x}))$.
- *Лемма*: $\forall P, \varphi, \psi \cdot \langle\varphi\rangle P \langle\psi\rangle \Leftrightarrow \{\varphi\} P \{\psi\} \wedge \langle\varphi\rangle P \langle T\rangle$.