

Лекция 3. Метод фундированных множеств Флойда

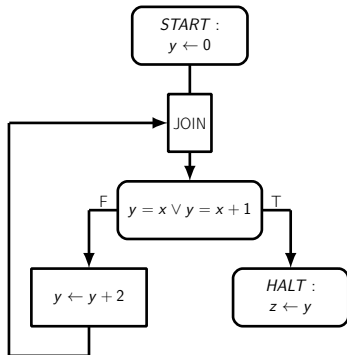
Цель лекции

Определить метод доказательства завершимости.

Содержание

- 1 Доказательство на примере
- 2 Метод фундированных множеств

Пример для доказательства



$$\begin{aligned} D_x &= \mathbb{Z} \\ D_y &= \mathbb{Z} \\ D_z &= \mathbb{Z} \\ \varphi(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Доказать, что блок-схема завершается при всех значениях входных переменных из указанного предусловия. Метод доказательства должен быть «автоматизируемым».

Поиск доказательства

Осознаем, что надо доказать: что при все вычисления при значениях входных переменных таких, что $\varphi(x)$:

- завершаются
- достигают связки перед оператором HALT
- что условие в операторе TEST не всегда ложно в вычислении
- что в каждом таком вычислении обязательно найдется конфигурация перед оператором TEST, в которой его предикат истинен. Если же такой конфигурации нет, то вычисление будет бесконечным.

Достижение чего-либо – это сложно приближение. Если есть некоторое определение расстояния до чего-то, которое на каждом шаге уменьшается, то рано или поздно мы остановимся.

Поиск доказательства

Есть ли такое «расстояние» в нашем случае? Надо откуда-то догадаться, как можно определить расстояние. Например, так: $|x + 1 - y|$. Оно неотрицательно. Каждая конфигурация на связке перед оператором TEST с ложным предикатом на ней вынуждает выполнить итерацию цикла. Будет ли при этом уменьшаться расстояние – проверим при помощи формул.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ x \geq 0 \wedge y \neq x \wedge y \neq x + 1 \Rightarrow |x + 1 - (y + 2)| < |x + 1 - y|.$$

Это условие ложно. Строим контрпример: оно ложно при $y = 3, x = 1$. Но этот контрпример невозможен, т.к. он не соответствует оператору START. Как его учесть?

Дополнительно доказать, что на каждой конфигурации перед TEST выполнено индуктивное утверждение $y \leq x + 1$.

Индуктивное утверждение

Базовый путь из псевдосвязки перед START в точку сечения:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x + 1$$

Базовый путь из точки сечения в точку сечения:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ x \geq 0 \wedge y \neq x \wedge y \neq x + 1 \wedge y \leq x + 1 \Rightarrow y + 2 \leq x + 1$$

Наконец, доказываем уменьшение расстояния: $\forall x, y \in \mathbb{Z} \ x \geq 0 \wedge y \neq x \wedge y \neq x + 1 \wedge y \leq x + 1 \Rightarrow |x + 1 - (y + 2)| < |x + 1 - y|$.

Доказательство

Итак, мы рассматривали конфигурации на связке перед оператором TEST (т.к. это точка сечения). Мы ввели «расстояние» от произвольной конфигурации этого множества до конфигурации, в которой истинен предикат в операторе TEST. Мы показали, что на всех путях между точками сечения (а такой путь один) расстояние уменьшается. То есть мы показали, что всякая конфигурация с ложными предикатом в TEST приводит к базовому пути, на котором расстояние уменьшается. Но т.к. расстояние неотрицательно, то оно не может уменьшаться бесконечно, значит в вычислении не могут бесконечно встречаться конфигурации, в которых предикат в операторе TEST ложен. Завершимость доказана.

Содержание

- 1 Доказательство на примере
- 2 Метод фундированных множеств

Предварительные определения

Отношение строгого частичного порядка – это бинарное отношение \prec на некотором множестве W , обладающее следующими свойствами:

- ❶ антирефлексивность: $\forall x \in W \cdot \neg(x \prec x)$.
- ❷ транзитивность: $\forall x, y, z \in W \cdot x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

Фундированное множество – множество, снабженное отношением строгого частичного порядка, в котором не существует бесконечно убывающей последовательности элементов.

Метод фундированных множеств

Шаг 1

Выбор множества т.с. (все циклические пути имеют т.с.) и фундированного множества (W, \prec) .

Шаг 2

Выбор индуктивного утверждения для каждой т.с., выписывание условий верификации для каждого базового пути между точками сечения и псевдосвязкой у START.

Шаг 3

Выбор оценочной функции для каждой точки сечения $(u_A : D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \rightarrow W', W \subseteq W')$.

Метод фундированных множеств (продолжение)

Шаг 4

Выписывание условия корректности оценочной функции для каждой точки сечения:

$$\forall \bar{x} \in D_{\bar{x}} \forall \bar{y} \in D_{\bar{y}} \cdot \varphi(\bar{x}) \wedge p_A(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow u_A(\bar{x}, \bar{y}) \in W.$$

Шаг 5

Выписывание условия завершенности для каждого базового пути между точками сечения (из A в B):

$$\forall \bar{x} \in D_{\bar{x}} \forall \bar{y} \in D_{\bar{y}} \cdot \varphi(\bar{x}) \wedge p_A(\bar{x}, \bar{y}) \wedge R_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow u_B(\bar{x}, r_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y})) \prec u_A(\bar{x}, \bar{y}).$$

Корректность метода фундированных множеств

Теорема

Дана блок-схема P , спецификация (φ, ψ) . Если все составленные условия верификации, корректности и завершимости истинны, то $\langle \varphi \rangle P \langle T \rangle$, т.е. блок-схема завершима.

Схема доказательства: по индукции доказать выполнение индуктивных утверждений в точках сечения, из фундированности W сделать вывод об отсутствии бесконечных вычислений.

Примеры фундированных множеств

Натуральные числа

$W \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых неотрицательных чисел

$x \prec y \equiv x < y$ – с естественным порядком на нем

Кортежи

$W \equiv W_1 \times W_2$ – пара двух фундированных множеств (W_1, \prec_1) и (W_2, \prec_2) .

$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \equiv x_1 \prec_1 y_1 \vee x_1 = y_1 \wedge x_2 \prec_2 y_2$ – лексикографический порядок.