Лекция 2. Метод индуктивных утверждений Флойда

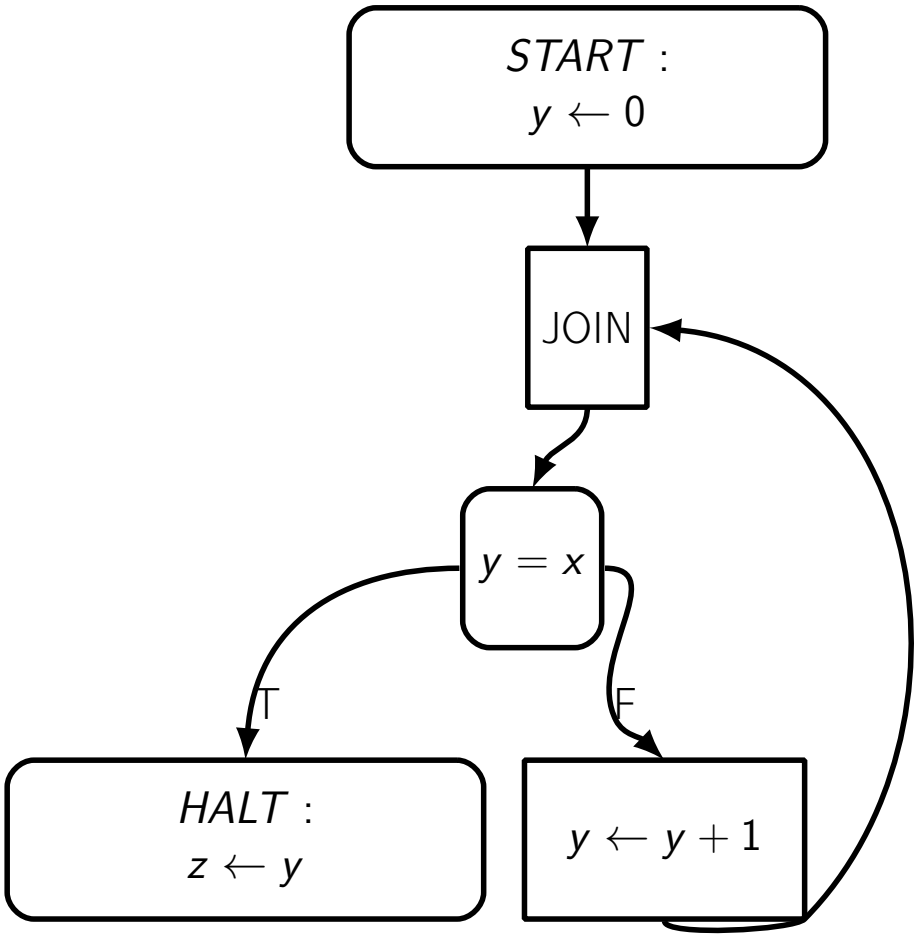
Цель лекции

Определить метод доказательства частичной корректности.

Содержание

Пример для доказательства

$$D_x = D_y = D_z = \mathbb{Z},\ \varphi(x) \equiv T,\ \psi(x, z) \equiv 2 * z \geq x$$



Поиск доказательства

Нельзя составить $M[P]$ в виде формулы, не прибегая к «знанию принципа работы блок-схемы» (иначе формулу для $M[P]$ можно было бы подставить в определение частичной корректности и свести задачу доказательства частичной корректности к задаче доказательства истинности формулы частичной корректности). Задача составления $M[P]$ алгоритмически неразрешима.

Поиск доказательства

Надо доказать, что во всех конфигурациях на псевдосвязке после HALT выполнено $2 * y \geq x$. То есть, что то же выполнено на всех конфигурациях на связке между TEST и HALT. Туда можно попасть только из связки между JOIN и TEST.
Если у нас было бы множество всех конфигураций для связки JOIN и TEST (обозначим его C), то для доказательства частичной корректности было бы достаточно доказать, что $\forall x \in D_x, y \in D_y \cdot (x,\ y) \in C \wedge y = x \Rightarrow 2 * y \geq x$. Но такое множество тоже не всегда можно выразить.
Но может получиться выразить в виде формулы надмножество множества C (обозначим его C'), которого будет достаточно для доказательства частичной корректности: если указанная выше формула справедлива для C', то она справедлива и для C.

Поиск доказательства

$C' = \{(x,\ y)\ |x \in D_x,\ y \in D_y\ \cdot\ p(x,\ y)\}$, где для предиката p выполнены такие соотношения:

$$\begin{cases} \forall x \in D_x \cdot p(x,\ 0) \\ \forall x \in D_x,\ y \in D_y \cdot p(x,\ y) \wedge \neg(y = x) \Rightarrow p(x,\ y+1) \end{cases}$$

Тогда методом математической индукции можно доказать, что во всех конфигурациях на связке между JOIN и TEST выполнено $p(x,\ y)$, то есть, что $C \subseteq C'$.

И не забываем, что должно быть выполнено $\forall x \in D_x,\ y \in D_y \cdot p(x,\ y) \wedge (y = x) \Rightarrow 2 * y \geq x$.

Доказательство по индукции

Лемма Пусть $p: \ D_x \times D_y \to \{T, \ F\}$ таков, что выполнены формулы (1) и (2). Тогда на всех конфигурациях на связке между JOIN и TEST выполнен предикат p.

$$\begin{cases} \forall x \in D_x \cdot p(x, \ 0) & (1) \\ \forall x \in D_x, \ y \in D_y \cdot p(x, \ y) \wedge \neg(y = x) \Rightarrow p(x, \ y+1) & (2) \end{cases}$$

Доказательство по индукции. Рассмотрим произвольное вычисление. Отметим в нем подпоследов-ть связок между JOIN и TEST. Индукция будет вестись по этой подпослед-ти.

База индукции. Самое первое вхождение такой связки возможно лишь единственным способом – из оператора START. Из (1) следует утверждение.

Переход. Предположим, что утверждение доказано для некоторого вхождения A_n этой связки со значениями $(x, \ y)$. Тогда на вхождении A_{n+1} переменные будут равны $(x, \ y+1)$ и из-за (2) утверждение верно на A_{n+1}.

Доказательство частичной корректности

Предположим, что существует такой предикат $p: \ D_x \times D_y \to \{T, \ F\}$, для которого выполнено:

$$\begin{cases} \forall x \in D_x \cdot p(x, \ 0) & (1) \\ \forall x \in D_x, \ y \in D_y \cdot p(x, \ y) \wedge \neg(y = x) \Rightarrow p(x, \ y + 1) & (2) \\ \forall x \in D_x, \ y \in D_y \cdot p(x, \ y) \wedge (y = x) \Rightarrow 2 * y \geq x & (3) \end{cases}$$

Тогда по лемме этот предикат выполнен во всех конфигурациях на связке между JOIN и TEST. Но тогда по (3) следует, что на всех конфигурациях между TEST и HALT выполнено постусловие, т.е. что блок-схема частично корректна относительно спецификации.

Такой предикат действительно существует: $p(x, \ y) \equiv y \geq 0$.

Содержание

Пути в блок-схемах

Дополним блок-схему «псевдосвязками»: перед оператором START и после каждого оператора HALT.
Путь в блок-схеме — это последовательность связок или псевдосвязок, начинающаяся и заканчивающая на связке или псевдосвязке, являющаяся путем в графе блок-схемы.
Обозначение: $e_1 - [n_1] -> e_2 - [n_2] -> \ldots - [n_k] -> e_{k+1}$.

Предварительные определения

$R_\alpha : D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \to \{T, F\}$ – предикат пути α в блок-схеме (множество значений переменных в начале пути, при которых вычисление «пойдет» по пути α).

$r_\alpha : D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \to D_{\bar{y}}$ – функция пути α в блок-схеме (значения промежуточных переменных в конце пути α).

Определение функций R_α и r_α (по индукции)

$R_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv R^1_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$. $r_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv r^1_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$.

- $R^{k+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv T$, $r^{k+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv \bar{y}$
- если n_m – START с функцией f, то $R^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv R^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$, $r^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv r^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ f(\bar{x}))$
- если n_m – ASSIGN с функцией g, то $R^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv R^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$, $r^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv r^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ g(\bar{x},\ \bar{y}))$
- если n_m – TEST с функцией t и связка e_{m+1} помечена значением b, то $R^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv t(\bar{x},\ \bar{y}) = b\ \wedge\ R^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$, $r^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv r^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$
- если n_m – JOIN, то $R^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv R^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$, $r^m_\alpha(\bar{x},\ \bar{y}) \equiv r^{m+1}_\alpha(\bar{x},\ \bar{y})$

Содержание

Метод индуктивных утверждений (1)

Шаг 1

Выбрать множество *точек сечения* (множество связок такое, что каждый цикл блок-схемы содержит хотя бы одну связку из этого множества).

Шаг 2

Каждой точке сечения сопоставить *индуктивное утверждение*, т.е. предикат $p : D_{\bar{x}} \times D_{\bar{y}} \to \{T,\ F\}$. Псевдосвязке перед START сопоставить $p(x,\ y) \equiv \varphi(x)$. Каждой псевдосвязке после HALT с функцией h сопоставить $p(x,\ y) \equiv \psi(x, h(x, y))$.

Метод индуктивных утверждений (2)

Шаг 3

Выписать *условие верификации* для каждого *базового пути* α (т.е. пути без самопересечений, внутри которого нет т.с.) между точками сечения и псевдосвязками (началу пути сопоставлено p_1, концу пути — p_2):

$\forall \bar{x} \in D_{\bar{x}}, \bar{y} \in D_{\bar{y}}$

$\varphi(\bar{x}) \wedge p_1(\bar{x}, \bar{y}) \wedge R_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow p_2(\bar{x}, r_\alpha(\bar{x}, \bar{y}))$

Корректность метода индуктивных утверждений

Теорема

Дана произвольная блок-схема P и спецификация для нее $(\varphi,\ \psi)$. Пусть сделаны все шаги метода индуктивных утверждений. Тогда если все выписанные условия верификации истинны, то $\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$.

Замечание: иногда индуктивные утверждения называют *инвариантами циклов* (т.к. они должны быть выполнены всегда, когда вычисление программы находится в точке, куда они приписаны).