

## Лекция 5. Триггеры

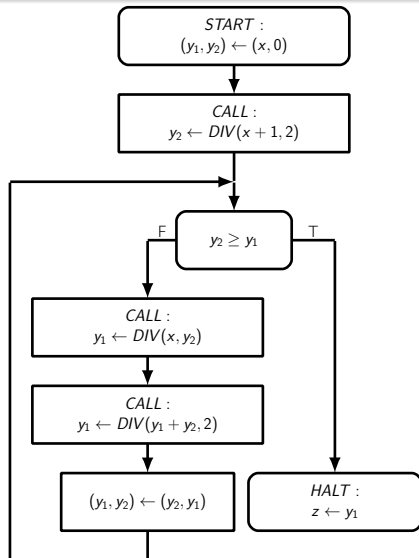
# Цель лекции

Научиться эффективно использовать SMT-солверы для дедуктивной верификации.

# Содержание

- 1 Мотивация
- 2 Подробнее о солверах
- 3 Кванторы и солверы

# Пример для дедуктивной верификации



$$D_x = D_{y_1} = D_{y_2} = D_z = \mathbb{Z}.$$

Надо доказать полную  
корректность этой блок-схемы  
относительно спецификации

$$\varphi(x) = x \geq 0,$$

$$\psi(x, z) = (z^2 \leq x < (z + 1)^2),$$

если сигнатура DIV

сопоставлена спецификация

$$\varphi_D(a_1, a_2) = (a_1 \geq 0 \wedge a_2 > 0),$$

$$\psi_D(a_1, a_2, r) = (0 \leq a_1 - r * a_2 < a_2).$$

# Ход решения

- Докажите полную корректность этой блок-схемы «на листочке» самостоятельно.
- Выпишите условия верификации на языке Why3.
- Используйте Why3IDE для доказательства условий верификации при помощи солверов *Alt-Ergo*, *CVC4*, *Z3*.

# Первые выводы

- Вы видите, что солверы не могут доказать некоторые из истинных условий верификации.
- Индуктивное утверждение можно записать с разными кванторами и вы видите, что с одними кванторами солвер доказывает больше условий верификации, чем с другими.
- Во всем этом надо разобраться.

# Содержание

- 1 Мотивация
- 2 Подробнее о солверах
- 3 Кванторы и солверы

# Солверы

- Для «доказательства условий верификации» мы используем *солверы*.
- Солвер – это алгоритм решения «уравнений» определенного вида (типовое «уравнение» – это формула со свободными переменными) или программа, реализующая этот алгоритм.
- Примеры: солвер дифференциальных уравнений, SAT-солвер, солвер тригонометрических уравнений, солвер логических уравнений.
- Солвер ожидает формулу на известном ему языке, т.е. с определенным набором операций. На них рассчитан алгоритм солвера. Их еще называют «теорией» (тригонометрия, логика и т.п.).



## Солверы (2)

- У солвера есть 3 варианта ответа:
  - решение найдено, и оно предъявляется
  - солвер определил, что решений нет, формула противоречива
  - солвер не знает, какой из первых двух пунктов имеет место быть (не для всех уравнений ведь есть метод решения)

# SMT-солвер

- SMT-солвер – это комбинация солверов. То есть это программа для решения «уравнений» из комбинации теорий.
- Как скомбинировать солверы? Например, получив формулу, можно сделать «замену переменных», как вы это делали при решении уравнений на вступительных экзаменах, и получить несколько задач, каждая из своей теории.
- Мы уже использовали теорию целых чисел.

# Солвер как прuver

Как доказать истинность формулы (условия верификации) при помощи солвера?

- Условие верификации – это формула с квантором всеобщности (как минимум по значениям входных переменных).
- Надо взять ее отрицание и применить сколемизацию. Тогда получится формула со свободными переменными.
- Если солвер определит, что у этой формулы нет решений, то можно считать доказанным истинность исходной формулы.
- Если решение есть, то исходная формула противоречива и есть контрпример.
- Солвер может ответить, что не знает, есть ли решение.

# Пруверы

- Альтернатива солверам – прuverы. Они проверяют данный пользователем вывод формулы в заданной логике. Вывод – это цепочка преобразований множества формул из аксиом. Допускаются только определенные преобразования («правила вывода»).
- Proof assistant – командная среда, помогающая пользователю составить вывод. Возможности варьируются: от полной автоматизации до лишь записи пошагового вывода, который полностью пишется пользователем.
- Главное: солверы – обычно более автоматические, чем прuverы. Поэтому мы используем солверы, а не прuverы.
- Примеры прuverов: *Coq*, *HOL/Isabelle*, *PVS*.

# Содержание

- 1 Мотивация
- 2 Подробнее о солверах
- 3 Кванторы и солверы

# Кванторы в солверах

- Пусть есть формула для условия верификации, истинность которой надо доказать. Берем отрицание формулы и сколемизируем ее. Получаем конъюнкцию множества подформул.
- Могут остаться кванторы всеобщности в конъюнктах. Что с ними делать? Подбирать значения подкванторных переменных и инстанцировать кванторы, чтобы получить противоречащие подформулы.

## Пример с инстанцированием

- При помощи инстанцирования кванторов докажите противоречивость данного набора формул. Все свободные переменные принадлежат  $\mathbb{Z}$ .
$$\begin{cases} x > 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z} \cdot t > 0 \Rightarrow x * t = x \end{cases}$$
- Инстанцируем квантор значением  $t = 2$ . Получаем новую формулу  $2 > 0 \Rightarrow x * 2 = x$ . После упрощения:  $x * 2 = x$ . Целочисленный солвер это упростит до  $x = 0$ . Получили противоречие с  $x > 0$ .

## Выводы из примера

- Как автоматически определить, что можно подставить 2 в качестве  $t$ ? Множество значений переменной  $t$  бесконечно, его не перебрать.
- В общем случае, задача выбора подстановок, чтобы получить противоречащие формулы, алгоритмически неразрешима...
- Может быть вместо инстанцирования надо ввести дополнительные утверждения, доказать их и использовать? Так делает человек. Но солвер не умеет «придумывать» дополнительные утверждения.



# Проблема инстанцирования кванторов всеобщности

- Если солвер не может придумывать, то он должен использовать то, что уже имеет, т.е. части самой формулы и части других инстансов кванторов.
- Бесконтрольное инстанцирование приводит к большому числу ненужных формул, причем рост может быть экспоненциальным.
- Нужна методика ограничиваия инстанцирования.

# Триггеры

- Триггер – это терм, в котором встречаются все подкванторные переменные как свободные термы триггера.
- Если солвер в процессе работы имеет терм, унифицирующийся с триггером, он определяет подстановку для подкванторных переменных квантора и инстанцирует квантор.

# Варианты триггеров

- Мультитриггер – это множество термов, в совокупности дающих подстановку всех подкванторных переменных.
- Может быть несколько триггеров у одного квантора. Если можно провести унификацию хотя бы с одним из них, она производится.

## Пример

- Пример квантора с триггером (триггер записан в квадратных скобках после подкванторных переменных):  
 $\text{forall } x \ y \ [f \ x \ y]. \ (g \ x) \rightarrow (f \ (h \ y) \ x)$
- Терм  $f \ 0 \ 1$  унифицируется с триггером и дает такой инстанс квантора:  $(g \ 0) \rightarrow (f \ (h \ 1) \ 0)$ .
- В этом инстансе есть терм, который можно унифицировать с триггером. Это терм  $f \ (h \ 1) \ 0$ . Получаем новый инстанс квантора:  $(g \ (h \ 1)) \rightarrow (f \ (h \ 0) \ (h \ 1))$ .
- Опять можно инстанцировать аксиому...

## Бесконечный цикл инстанцирования

- В этом примере можно попасть в бесконечный цикл инстанцирования квантора. Это еще одна причина, почему солвер может давать ответ «не знаю».
- Чтобы не попадать в этот цикл, надо выбрать другой триггер или вместо исходного квантора записать другой, эквивалентный ему. Например, триггер  $f(h\ y)\ x$ . Тогда при инстанцировании этого квантора не появится новых термов, унифицируемых с триггером.
- Другая проблема – слишком требовательный триггер. Солвер может никогда не получить нужный терм для унификации с триггером.

# Генерация триггеров

- Если триггер не указан, солвер обычно выбирает его на основе некоторой эвристики.
- Пример эвристики выбора триггера:
  - 1 это терм, являющийся частью самого квантора;
  - 2 в терме встречаются все подкванторные переменные;
  - 3 в терм входит хотя бы один пользовательский символ;
  - 4 это минимальный терм (в нем самом нельзя выделить терм, в который входят все подкванторные формулы).
- Таковую эвристику используют солверы *Alt-Ergo*, *CVC3*.

## Пример

- Например, для квантора `forall x y. (x > y) -> (f (h y) x)` таким термом является `(f (h y) x)`.
- Терм `forall x y. (x > y) -> (f (h y) x)` не является минимальным.
- В терм `x > y` не входит пользовательский символ.
- В терм `(h y)` не входят все подкванторные переменные.

## Отладка автоматического выбора триггера

- Солвер *Alt-Ergo* позволяет понять, какой триггер он выбрал для квантора и как он его использовал.
- `alt-ergo -dtriggers input.why` распечатывает автоматически сгенерированные триггеры
- `alt-ergo -dmatching=1 input.why` распечатывает кванторы, которые были инстанцированы (вместо 1 можно написать 2 для более подробного вывода)
- Ввод для *Alt-Ergo* можно получить из Why3IDE: кнопка Edit по попытке доказательства этим солвером и текст будет создан в файле в поддиректории с вспомогательными файлами.



## Отладка выбора триггера в CVC4

- `cvc4 -d trigger smt2file` – распечатывает сгенерированные триггеры
- Требуется отладочная версия CVC4 (при конфигурировании надо указать режим `debug`)
- Файл `smt2` можно получить при помощи кнопки Edit в Why3IDE.

## Пример с подстановкой $t = 2$

- Ранее в этой лекции был пример системы формул, где противоречие находилось подстановкой  $t = 2$ . Что будет делать солвер с такой системой?
- Он выделит триггер  $x * t$ . Но термов для унификации с триггером нет. Значит солвер не сможет инстанцировать квантор. *Alt-Ergo* добавляет в систему еще один квантор (одно утверждение про умножение целых чисел) и он только и делает, что инстанцирует этот квантор. Его ответ — «не знаю».
- Правда, это не означает, что не может быть других эвристик: солверы *CVC4* и *Z3* находят противоречие.

## Как доказать?

- Попробуем добиться, чтобы *Alt-Ergo* тоже находил противоречие. Надо добавить истинную формулу в систему формул, которая будет давать терм  $x * 2$ . Например,  $x * 2 = x + x$ .
- Теперь *Alt-Ergo* мгновенно находит противоречие.

## Выводы

- Солверы могут давать ответ «не знаю» или заикливаться, если им дают формулы с кванторами всеобщности.
- Если солвер заиклился или «не знает» ответ, посмотрите, надо ли ему работать с кванторами всеобщности. Какие триггеры выбрал солвер для кванторов всеобщности. Какие он должен сделать подстановки для подкванторных переменных. Достаточно ли солверу термов, чтобы сделать эти подстановки.
- Теперь вы можете ответить, почему в примере с дедуктивной верификацией квадратного корня солверы доказывают больше или меньше условий верификации в зависимости от того, как записано индуктивное утверждение.