

Лекция 4. Методы Флойда для блок-схем с вызовами других блок-схем

Цель лекции

Добавить в блок-схемы возможность вызвать другую блок-схему как подпрограмму. Определить методы Флойда для таких блок-схем.

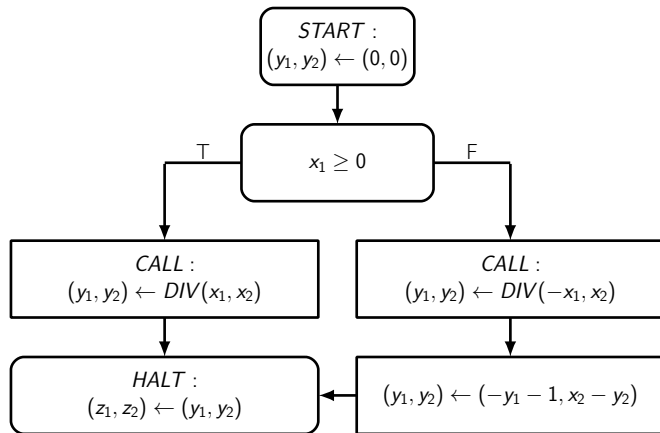
Содержание

- 1 Синтаксис и семантика
- 2 Полная корректность для нерекурсивного случая
- 3 Полная корректность для рекурсии

Подпрограммы в языках программирования

- подпрограмма – это модуль (белый ящик, черный ящик), заголовок, прототип, сигнатура, интерфейс и реализация
- процедурная абстракция – годится любая реализация вызываемой подпрограммы из определенного множества реализаций
- формальные и фактические параметры
- способы передачи параметров в функцию (по значению, по ссылке, по имени)
- требуется этап сборки программы из подпрограмм

Пример блок-схемы



$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{y_1} = D_{y_2} = D_{z_1} = D_{z_2} = \mathbb{Z}$. Как определить функцию, вычисляемую этой блок-схемой?

Синтаксис и семантика

- синтаксис: сигнатура блок-схемы, домены ее входных переменных и домены ее выходных переменных
- пример: сигнатура *DIV* с доменом входных переменных $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и доменом выходных переменных $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- вычисление требует предъявления блок-схемы, подходящей под сигнатуру
- т.е. функция, вычисляемая блок-схемой, *зависит* от функции, вычисляемой вызываемыми блок-схемами

Пример функции, вычисляемой блок-схемой

$M[DIV](a_1, a_2) =$	$M[P](x_1, x_2) =$
$(0, 0)$	$\begin{cases} (0, 0) & , x_1 \geq 0 \\ (-1, x_2) & , x_1 < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} (0, 0) & , a_1 \geq 0 \\ (-1, a_2) & , a_1 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} (0, 0) & , x_1 \geq 0 \\ (-1, x_2) & , x_1 < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \omega & , a_1 \geq 0 \\ (0, 0) & , a_1 < 0 \end{cases}$	ω
$\begin{cases} (a_1 / a_2, a_1 \% a_2) & , a_1 \geq 0 \wedge a_2 > 0 \\ \omega & , \text{иначе} \end{cases}$	$?$

Модель требований для блок-схем с вызовами

не требует изменений по сравнению с блок-схемами без вызовов

Содержание

- 1 Синтаксис и семантика
- 2 Полная корректность для нерекурсивного случая
- 3 Полная корректность для рекурсии

Соотношения корректности: рекурсии пока нет

- Хотим модульности – доказательство корректности не надо переделывать при смене вызываемой блок-схемы, если она из «нужного» множества.
- Множество блок-схем, полностью корректных относительно некоторой спецификации, вот пример «нужного» множества
- Можно задать это множество при помощи пары предикатов – предусловия и постусловия (спецификации сигнатуры)
- Блок-схема с вызовами полностью корректна относительно своей спецификации и спецификаций сигнатур, если для всех блок-схем, полностью корректных относительно спецификаций сигнатур, ... (далее определение полной корректности для блок-схем без вызовов)

Формулы для полной корректности

- Смотрим на наш пример с DIV. Пусть (φ_D, ψ_D) – спецификация, сопоставленная сигнатуре DIV.
- Полная корректность = частичная корректность + завершаемость
- Завершаемость: если CALL с сигнатурой DIV заикливается, то заикливается и P. Попробуем выразить определение полной корректности (завершаемости) без квантора по функциям, вычисляемым блок-схемами, которые сопоставлены DIV.
- Какова «самая заикливающаяся» блок-схема, полностью корректная относительно (φ_D, ψ_D) ? Та, которая заикливается на всех входах, где ложно φ_D , и завершается на всех входах, где истинно φ_D .
- Значит, P завершается тогда, когда завершается DIV, т.е. входы DIV удовлетворяют φ_D .

Формулы для полной корректности

- Частичная корректность: если DIV завершилась, то ее выходные переменные удовлетворяют постусловию ψ_D .
Надо доказать, что при всех таких значениях переменных вычисления будут приводить к HALT в блок-схеме P с теми переменными, которые удовлетворяют постусловию ψ .
- Квантор по функциям, вычисляемым блок-схемами, которые сопоставлены DIV, превращается в квантор по разным значениям выходных переменных DIV, удовлетворяющих постусловию ψ_D .

Формулы в примере

Получаются следующие формулы для доказательства полной корректности примера:

- завершаемость вызова DIV (путь START-T):
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 \geq 0 \Rightarrow \varphi_D(x_1, x_2)$$
- завершаемость вызова DIV (путь START-F):
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 < 0 \Rightarrow \varphi_D(-x_1, x_2)$$
- частичная корректность на пути (START-T-HALT):
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 \geq 0 \wedge \psi_D(x_1, x_2, r_1, r_2) \Rightarrow \psi(x_1, x_2, r_1, r_2)$$
- частичная корректность на пути (START-F-HALT):
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 < 0 \wedge \psi_D(-x_1, x_2, r_1, r_2) \Rightarrow \psi(x_1, x_2, -r_1 - 1, x_2 - r_2)$$

Формулы для блок-схем с циклами и вызовами

Составляем формулы по тому же принципу, но отсчитываем базовые пути не только от **START**, но и от каждой точки сечения.

Содержание

- 1 Синтаксис и семантика
- 2 Полная корректность для нерекурсивного случая
- 3 Полная корректность для рекурсии

Рекурсия

- Определение полной корректности такое же, как и для блок-схем без вызовов (не требуется выбирать «нужное» множество).
- Доказываем полную корректность по индукции по глубине рекурсии.
- Базовый случай: глубина рекурсии равна 0 (выход из рекурсии).
- Индуктивный переход: считаем, что доказали полную корректность на тех значениях входных переменных, которые приводят к глубине рекурсии не больше n . Тогда если все вызовы блок-схем такие, то можно сделать индуктивный переход – доказать полную корректность для множества значений входных переменных, приводящих к глубине рекурсии $n + 1$.

Завершаемость индукции

- Надо доказать, что все рекурсивные вызовы приводят к меньшей глубине рекурсии.
- Можно формализовать это правило при помощи фундированного множества и оценочной функции.
- Оценочная функция сопоставляется блок-схеме. Ее область определения – входной домен блок-схемы. Ее область значений – фундированное множество.

Формулы завершаемости

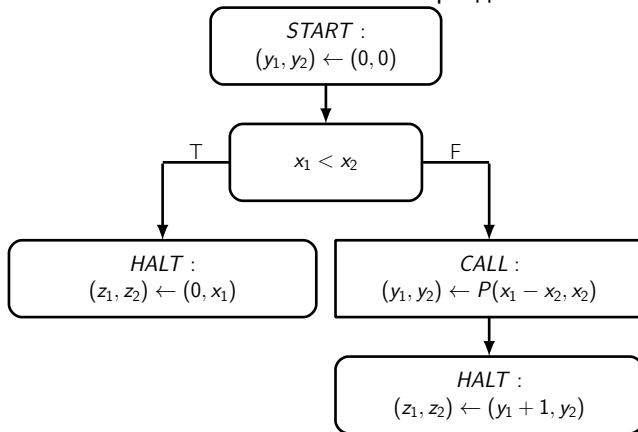
- Надо доказать фундированность множества.
- Надо доказать, что при всяком вызове блок-схемы с входными переменными, удовлетворяющими предусловию, значение оценочной функции принадлежит фундированному множеству.
- Надо доказать, что при всяком базовом пути, приводящем к рекурсивному вызову, оценочная функция на входных переменных вызываемой блок-схемы меньше оценочной функции на входных переменных вызывающей блок-схемы.

Формулы полной корректности

- Как только доказана завершаемость индукции, ее можно применять для доказательства частичной корректности и завершаемости блок-схемы.
- Применяем формулы для доказательства полной корректности для нерекурсивного случая, сопоставив вызываемым блок-схемам спецификацию вызывающей блок-схемы.

Пример

Вычисление частного и остатка при делении



$$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{y_1} = D_{y_2} = D_{z_1} = D_{z_2} = \mathbb{Z}.$$

Пример::схема доказательства

- 1 Надо доказать полную корректность блок-схемы P относительно спецификации: $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0$, $\psi(x_1, x_2, z_1, z_2) = (x_1 = z_1 * x_2 + z_2 \wedge 0 \leq z_2 < x_2)$.
- 2 Доказываем возможность индукции по глубине рекурсии: берем фундированное множество $(\{0, 1, 2, \dots\}, <)$. Его фундированность была доказана ранее. Берем оценочную функцию $u(x_1, x_2) = x_1$.
- 3 Составляем условия верификации.

Пример::условия верификации

- корректность оценочной функции:
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \Rightarrow u(x_1, x_2) \geq 0$$
- завершаемость индукции:
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 \geq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1 - x_2, x_2)$$
- частичная корректность (путь START-T-HALT):
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \psi(x_1, x_2, 0, x_1)$$
- частичная корректность (путь START-F-HALT):
$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \cdot \varphi(x_1, x_2) \wedge x_1 \geq x_2 \wedge \psi(x_1 - x_2, x_2, y_1, y_2) \Rightarrow \psi(x_1, x_2, y_1 + 1, y_2)$$
- завершаемость: не требует условий верификации, т.к. нет циклов

Подставляем формулы

- корректность оценочной функции:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$$

- завершаемость индукции:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \geq 0 \wedge x_2 > 0$$

- частичная корректность (путь START-T-HALT): $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \cdot x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = x_1 + 0 * x_2 \wedge 0 \leq x_1 < x_2$

- частичная корректность (путь START-F-HALT):

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \cdot x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_1 \geq x_2 \wedge x_1 - x_2 = x_2 * y_1 + y_2 \wedge 0 \leq y_2 < x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 * (y_1 + 1) + y_2 \wedge 0 \leq y_2 < x_2$$