

## Лекция 9

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (4)

## ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Формула Тейлора для многочленов

Формула Тейлора для произвольной функции

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Маклорена

Представление функций  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  формулой Маклорена

Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

В определении функции не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения  $y = f(x)$

**Как найти значения, например, функций  $y = \sin x$ ,  $y = \ln(1+x)$  при любых (допустимых) значениях аргумента?**

Для того, чтобы вычислить значения данной функции  $y = f(x)$ , ее заменяют многочленом  $P_n(x)$  степени  $n$ , значения которого всегда и легко вычисляемы. Возможность представлять функцию многочленом дает **формула Тейлора**.



**Тейлор** (Taylor) Брук (18.8.1685, Эдмонтон, Мидлсекс, — 29.12.1731, Лондон), английский математик, член Лондонского королевского общества (1712).

Нашёл в 1712 общую формулу для разложения функций в степенные ряды, которую опубликовал в 1715 в работе «Methodus incrementorum directa et inversa».

## ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Если функция  $y=f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную, то ее приращение можно представить в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Иначе говоря, существует линейная функция  $P_1(x) = y_0 + A(x - x_0)$

такая, что  $f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$ ,  $x \rightarrow x_0$

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), \quad P'_1(x_0) = A = f'(x_0).$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция  $f$  имеет в точке  $x_0$   $n$  производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , такой, что

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

$$f(x_0) = P_n(x_0), \quad f'(x_0) = P'_n(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}_n(x_0)$$

## Формула Тейлора для многочленов

Пусть  $P$  - многочлен степени не выше  $n$ :

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Дифференцируя его  $n$  раз находим

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1},$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + (n-1) \cdot n \cdot a_nx^{n-2},$$

$$\dots\dots\dots P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \dots n \cdot a_n.$$

Полагая во всех этих формулах  $x = 0$ , получаем

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \dots \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Таким образом,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Пусть теперь

$$P(x) = \sum_{k=0}^n A_k (x - x_0)^k.$$

Полагая  $t = x - x_0$ ,  $P(t - x_0) = Q(t)$  по доказанному имеем

$$A_k = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Замечание**

Если  $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{k!} (x - x_0)^k$ , то  $C_k = P^{(k)}(x_0)$  при  $k = \overline{0, n}$ .

## Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , определенную на промежутке  $[a; b]$ . Допустим, что на этом промежутке  $f(x)$  дифференцируема  $n$  раз. Докажем, что  $f(x)$  может быть представлена в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x - a)^{n-1} + R_n$$

– **формула Тейлора.**

Последнее слагаемое в формуле Тейлора называется остаточным членом.

Если отбросить остаточный член, то получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1}$$

Многочлен  $P(x)$ , стоящий справа, называется **многочленом Тейлора**. Заметим, что коэффициенты многочлена Тейлора вычисляются без труда: для этого достаточно вычислить значения функции  $f(x)$  и ее производных

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x) \quad \text{в точке } a.$$

**Заменяя функцию ее многочленом Тейлора, мы совершим ошибку, равную отброшенному остаточному члену  $R_n$  в формуле Тейлора.**

При решении практических задач эту ошибку точно указать, как правило, нельзя, однако всегда можно ее оценить, т.е. можно указать такое положительное число, которого не превосходит модуль отброшенного остаточного члена.

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Согласно замечанию имеем

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

Положим  $r(x) = f(x) - P(x)$ .

Очевидно, что  $r^{(k)}(x_0) = 0$  при  $k = 0, n$ .

Применяя  $n - 1$  раз правило Лопиталья и принимая во внимание определение производной, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{r^n(x_0)}{n!} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом  $r(x) = o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

То есть, имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^n)$$

**Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.**



**Джузёппе Пеано** (итал. *Giuseppe Peano*; 27 августа 1858 — 20 апреля 1932) —

итальянский математик. Внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики. Создатель вспомогательного искусственного языка

латино-сине-флексione. Более всего

известен как автор стандартной

аксиоматизации натуральной арифметики — *арифметики Пеано*.

Джузеппе Пеано внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики. Автор более 200 книг и статей, он был одним из основателей математической логики и теории множеств.

## Аксиомы Пеано

- 1 является натуральным числом;
- Число, *следующее* за натуральным, также является натуральным;
- 1 не следует ни за каким натуральным числом;
- Если натуральное число  $a$  непосредственно следует как за числом  $b$ , так и за числом  $c$ , то  $b$  и  $c$  тождественны;
- (Аксиома индукции) Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа  $n$  (индукционное предложение), вытекает, что оно верно для следующего за  $n$  натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел

Рассмотрим другую форму остаточного члена. Для этого прибегнем к такому искусственному приему: допустим, что некоторое неизвестное число  $R$  определено равенством

$$f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (b-a) - \frac{f''(a)}{2!} \cdot (b-a)^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (b-a)^{n-1} - \frac{R}{n!} \cdot (b-a)^n = 0 \quad (9.1)$$

и введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} \cdot (b-x) - \frac{f''(x)}{2!} \cdot (b-x)^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \cdot (b-x)^{n-1} - \frac{R}{n!} \cdot (b-x)^n \quad (9.2)$$

В силу равенства (9.1)  $\Phi(a) = 0$ . Очевидно, что  $\Phi(b) = 0$ . Кроме того,  $\Phi(x)$  дифференцируема и непрерывна на промежутке  $[a; b]$ . Следовательно,  $\Phi(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, между точками  $a$  и  $b$  существует некоторая точка  $c$  такая, что  $\Phi'(c) = 0$ .

Продифференцируем равенство (9.2) почленно:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= -f'(x) - \left[ \frac{f''(x)}{1!} \cdot (b-x) - \frac{f'(x)}{1!} \right] - \\ &\quad - \left[ \frac{f'''(x)}{2!} \cdot (b-x)^2 - \frac{f''(x)}{2!} \cdot 2 \cdot (b-x) \right] - \dots \\ &\quad - \left[ \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} \cdot (b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \cdot (n-1) \cdot (b-x)^{n-2} \right] + \frac{R}{n!} \cdot n \cdot (b-x)^{n-1} = \\ &= -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + \frac{R}{(n-1)!} \cdot (b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

Отсюда следует  $\Phi'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{R}{(n-1)!} \cdot (b-c)^{n-1} = 0 \Rightarrow R = f^{(n)}(c)$

Подставим найденное значение  $R$  в формулу (9.1) и заменим в ней  $b$  на  $x$ , тогда получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Здесь  $c$  лежит между  $a$  и  $x$ .

Эта формула называется

**формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.**



**Жозе́ф Луи Лагранже́** (**фр.** *Joseph Louis Lagrange*, **итал.** *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; 25 января 1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером — крупнейший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала

**Остаточный член в форме Пеано удобен при изучении вопросов, связанных с предельным переходом.**

**Остаточный член в форме Лагранжа часто позволяет получить даже количественную оценку погрешности.**

С другой стороны, в сравнении с формой Пеано он установлен при более жёстких ограничениях. Кроме того, его запись содержит точку, положение которой как правило точно не известно. Следует отметить, что остаточный член в форме Лагранжа применяется наиболее часто.

## Другие формы остаточного члена

Форма Шлёмильха-Роша

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!p} (x-x_0)p(x-\xi)^{n-p},$$

Форма Коши

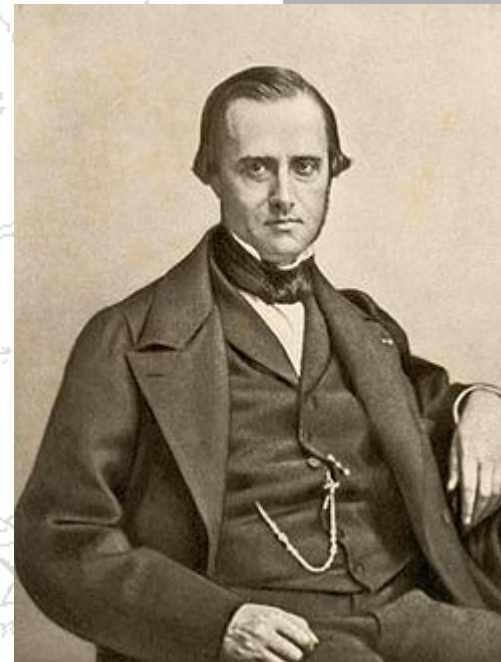
$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} (x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$



**Оскар Ксавер**

**Шлёмильх** (нем. *Oskar Xavier Schlömilch*; 13

апреля 1823, Веймар — 7  
февраля 1901, Дрезден) —  
немецкий математик,



**Рош, Эдуар Альбер** (фр. *Édouard Albert Roche*; 17

октября 1820, Монпелье — 8  
апреля 1883) —

французский астроном, математик,

Отметим некоторые **частные случаи формулы Тейлора**.

Положим в формуле Тейлора  **$n = 1$** . Тогда получим формулу

$$f(x) = f(a) + f'(c) \cdot (x - a)$$

( $c$  лежит между  $a$  и  $x$ ). Это и есть ни что иное, как полученная ранее формула Лагранжа. (Этот факт станет очевидным, если заменить  $x$  на  $b$ ).

Положим теперь в формуле Тейлора  $n = 2$ .

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (x - a)^2$$

и заменим в этом выражении  $x$  на  $x + \Delta x$ , а точку  $a$  на  $x$ , тогда получим

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (\Delta x)^2$$

Отбросим последнее слагаемое, тогда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + df(x)$$

Этой формулой можно пользоваться в приближенных вычислениях, заменяя полное приращение функции ее дифференциалом.

Погрешность таких приближенных вычислений нетрудно оценить, рассмотрев отброшенный остаточный член

$$\frac{f''(c)}{2!} \cdot (\Delta x)^2$$

Заметим, что формула Тейлора имеет очень широкое применение, поскольку позволяет любую функцию (лишь бы она была нужное число раз дифференцируема!) заменить многочленом с любой степенью точности.

## ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА:

Если в формуле Тейлора положить  $a = 0$ , то получим частный случай формулы Тейлора – так называемую **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot x^n$$

Заметим, что точка  $c$  лежит между  $a$  и  $x$ , а поэтому  $c = a + \theta \cdot x$ ,  $0 < \theta < 1$ .



**Ко́лин Макло́рен** (англ. *Maclaurin*) (1698, Шотландия — 1746) — выдающийся английский математик. Рано осиротев, он был взят на попечение своим дядей, который, как и отец Маклорена, желал, чтобы Маклорен посвятил себя духовному званию. В 1709 г. поступил в университет города Глазго. Здесь у него блестящие математические способности столь развились, что в возрасте 15 лет он уже открыл несколько теорем, которые и изложил впоследствии в одном из своих сочинений.

## Представление функций $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ , $\ln(1+x)$ , $(1+x)^\alpha$ формулой Маклорена

$y = e^x$ . Очевидно, что эта функция дифференцируема сколько угодно раз на всей числовой оси. Найдем ее разложение по формуле Маклорена

$$y(x) = e^x; \quad y(0) = 1$$

$$y^{(n-1)}(x) = e^x; \quad y^{(n-1)}(0) = 1$$

$$y'(x) = e^x; \quad y'(0) = 1$$

$$y^{(n)}(x) = e^x; \quad y^{(n)}(0) = 1$$

$$y''(x) = e^x; \quad y''(0) = 1$$

Подставим найденные значения производных в формулу Маклорена, окончательно получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!} \cdot x^n$$

(с лежит между 0 и x).

$y = \sin x$ . Функция сколько угодно раз дифференцируема на всей числовой оси.

$$y = \sin x;$$

$$y(0) = 0$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y''(0) = 0$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y'''(0) = -1$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(n)} = \sin\left[x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y^{(n)}(c) = \sin\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

Подставим найденные значения производных в формулу Маклорена, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{\sin\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]}{n!} \cdot x^n$$

$$y = \cos x$$

$$y = \cos x;$$

$$y(0) = 1$$

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''(0) = 1$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{iv} = \cos x = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{iv}(0) = 1$$

$$y^{(n-1)} = \cos\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

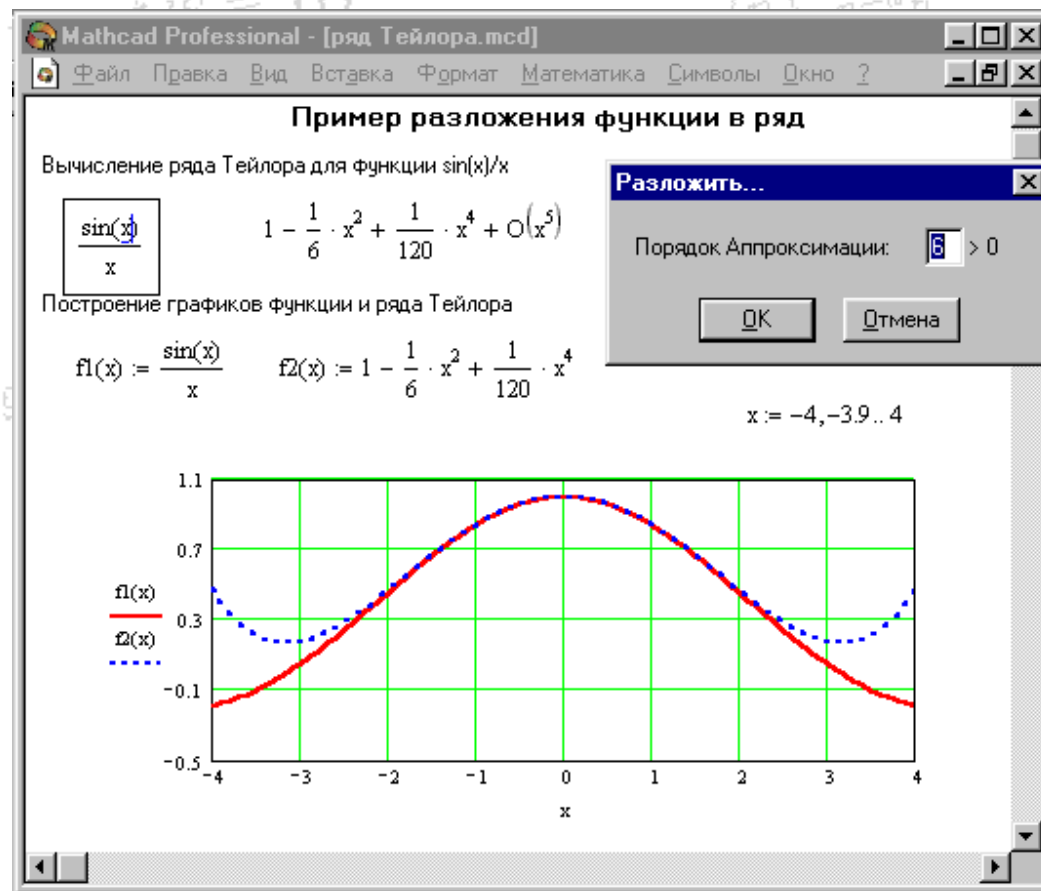
$$y^{(n-1)}(0) = \cos(n-1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

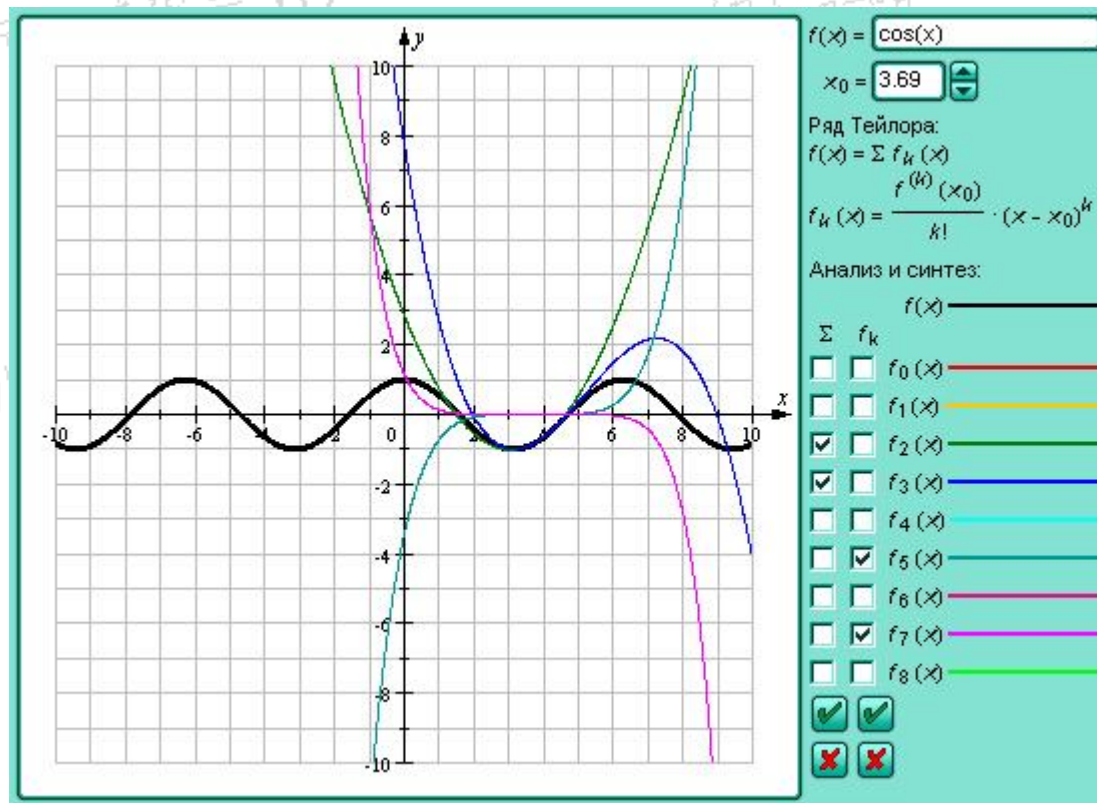
$$y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)}(c) = \cos\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

Таким образом, разложение функции  $y = \cos x$  по формуле Маклорена имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{\cos(n-1) \frac{\pi}{2}}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{\cos\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right] \cdot x^n}{n!}$$





$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

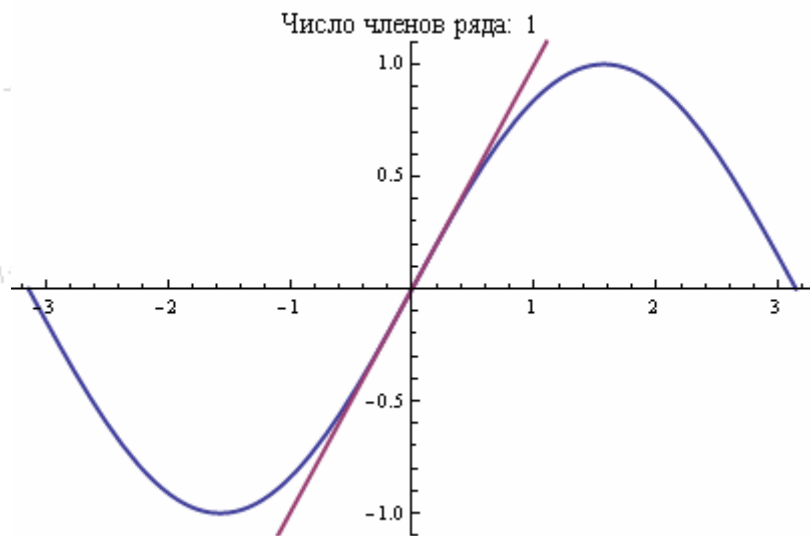
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{f}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$



$$= \frac{a}{1-r}$$

$$f(z)$$

$$\int_a^b$$

$$\|fg\| \leq \|f\|$$

$$(1-p)^{n-x}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi}$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{f}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \dots$$


$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \dots$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

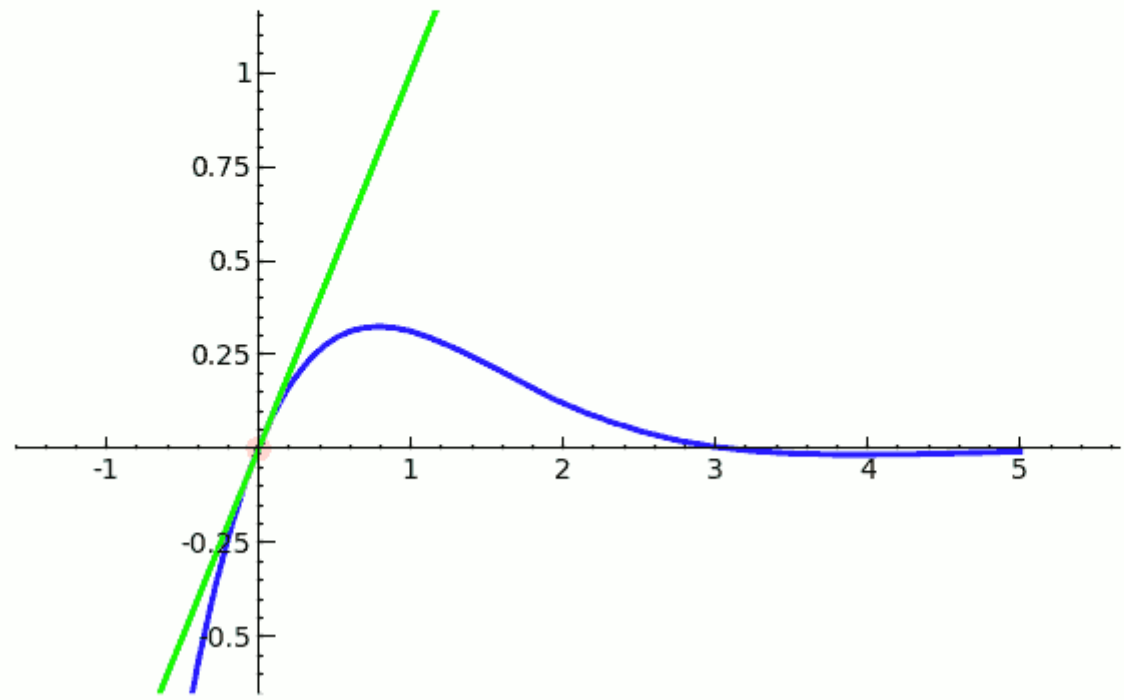
order 

$$f(x) = e^{-x} \sin(x)$$

$$\hat{f}(x; 0) = x + \mathcal{O}(x^2)$$



$$\|fg\| \leq \|f\|$$



$$\frac{d}{dx} \dots$$

$$f(z)$$

$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \sqrt{2\pi}$$

$$x^n + y$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$y = \ln(1+x)$  Функция определена и дифференцируема  $\forall x > -1$ .

$$y(x) = \ln(1+x)$$

$$y(0) = \ln 1 = 0$$

$$y'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$y'(0) = 1$$

$$y''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''(0) = -1$$

$$y'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3}$$

$$y'''(0) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$y^{(4)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4}$$

$$y^{(4)}(0) = (-1)^3 \cdot 3!$$

$$y^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot (1+x)^{-(n-1)}$$

$$y^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-2} \cdot (n-2)!$$

$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$$

$$y^{(n)}(c) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+c)^n}$$

Таким образом, имеем разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n \cdot (1+c)^n}$$

$$y = (1+x)^\alpha, \alpha - \text{любое число}, x \neq -1.$$

$$y(x) = (1+x)^\alpha$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$

$$y'(0) = \alpha$$

$$y''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$$

$$y''(0) = \alpha \cdot (\alpha-1)$$

$$y'''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (1+x)^{\alpha-3}$$

$$y'''(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)$$

$$y^{(n-1)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n+1}$$

$$y^{(n-1)}(0) = \alpha \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)$$

$$y^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1 + x)^{\alpha - n}$$

$$y^{(n)}(c) = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{(1 + c)^{n - \alpha}}$$

Итак, разложение функции  $y = (1 + x)^\alpha$  имеет вид

$$\begin{aligned} (1 + x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!} \cdot x^3 + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 2)}{(n - 1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n! \cdot (1 + c)^{n - \alpha}} \cdot x^n \end{aligned}$$

## Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

Если функцию можно представить формулой Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n,$$

то, отбросив последнее слагаемое (остаточный член), получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1}$$

Таким образом, если нужно вычислить приближенное значение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , то мы получим

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x_0 - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x_0 - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x_0 - a)^{n-1}$$

Если указано, сколько членов разложения следует взять, то погрешность вычислений нетрудно оценить, оценив модуль отброшенного остаточного члена. **Иногда в приближенных вычислениях требуется выполнить вычисления с заданной точностью, т.е. указывается число, которого не должен превосходить модуль отброшенного члена; число слагаемых, которое следует взять в формуле Тейлора при этих вычислениях, определяется с учетом заранее заданной точности.**

**Пример 1.** Вычислить  $\sqrt{e}$ , разложив функцию  $e^x$  по формуле Маклорена.

Взять шесть членов разложения. Оценить погрешность вычислений.

**Решение.** Разложение функции  $e^x$  по формуле Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^c}{6!} \cdot x^6 \quad (\text{с лежит между 0 и } x).$$

Тогда, отбросив остаточный член и положив  $x = \frac{1}{2}$ , получим

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5}$$

Прежде чем подсчитать приближенное значение суммы слагаемых, стоящих справа, оценим погрешность.

$$|R_6| = \frac{e^c}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{6!2^6} < \frac{\sqrt{3}}{6!2^6} < \frac{1.8}{6!2^6} < 0.00001$$

Сделанная оценка погрешности гарантирует нам, что в приближенном вычислении  $\sqrt{e}$  пять знаков после запятой будут вычислены правильно.

Подсчитываем

$\sqrt{e}$	1.0
	0.5
	0.125
	0.020833
	0.0026041
	<u>0.00026041</u>
	1.64869751 $\approx$ 1.64869

**Пример 2.** Вычислить приближенное значение  $\sqrt[5]{32}$ , разложив  $\sqrt[5]{x}$  по степеням  $(x - 32)$ . Вычисление выполнить с точностью до 0.0001.

**Решение.** Разложим функцию  $y = \sqrt[5]{x}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 32$

$$y = x^{\frac{1}{5}} \quad y(32) = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$$

$$y' = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} \quad y'(32) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$y'' = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot x^{-\frac{9}{5}} \quad y''(32) = \frac{-4}{5^2 \cdot 2^9}$$

$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \dots [5 \cdot (n-1) - 1]}{5^n} \cdot x^{-\frac{5n-1}{5}}$$

Итак, разложение функции

$y = \sqrt[5]{x}$  в окрестности точки  $x_0 = 32$

будет иметь следующий вид:

$$\sqrt[5]{x} = 2 + \frac{1}{1! \cdot 5 \cdot 2^4} \cdot (x - 32) - \frac{4}{2! \cdot 5^2 \cdot 2^9} \cdot (x - 32)^2 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \dots [5 \cdot (n-1) - 1]}{n! \cdot 5^n \cdot 2^{\frac{5n-1}{5}}} \cdot (x - 32)^n,$$

( $c$  лежит между 32 и  $x$ ).

Положим теперь в этом разложении  $x = 33$ . Тогда получим

$$\sqrt[5]{33} = 2 + \frac{1}{1! \cdot 5 \cdot 2^4} - \frac{4}{2! \cdot 5^2 \cdot 2^9} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \dots [5 \cdot (n-1) - 1]}{n! \cdot 5^n \cdot c^{\frac{5n-1}{5}}}, \quad 32 < c < 33$$

Попробуем подобрать такое наименьшее число слагаемых в правой части, чтобы отброшенный остаточный член был меньше 0.0001. При  $n = 2$  имеем

$$|R_2| = \frac{4}{2! \cdot 5^2 \cdot c^{\frac{9}{5}}} < \frac{4}{2! \cdot 5^2 \cdot (32)^{\frac{9}{5}}} = \frac{4}{2! \cdot 5^2 \cdot 2^9} \approx 0.000156 > 0.0001$$

Следовательно, чтобы выполнить вычисления с заданной точностью, недостаточно взять два члена разложения, так как точность вычислений не гарантирована. Возьмем  $n = 3$ . Получим

$$|R_3| = \frac{4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3 \cdot 2^{\frac{14}{5}}} < \frac{4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3 \cdot (32)^{\frac{14}{5}}} = \frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 2^{14}} \ll 0.0001$$

Очевидно, что три члена, взятые в разложении в силу сделанной оценки, гарантируют необходимую точность вычислений.

## Нахождение пределов с помощью формулы Тейлора.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \sqrt[6]{1-x^2}}{x^5}$ . Так как в знаменателе стоит  $x^5$ , то при представлении функций, стоящих в

числителе, по формуле Маклорена, мы должны брать многочлены не ниже пятой степени:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5); \quad \sqrt[6]{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} - 1\right) (-x^2)^2 + o(x^5) = (\text{следующий член разложения имеет шестую степень})$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} - 1\right) (-x^2)^2 + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{5x^4}{72} + o(x^5),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \sqrt[6]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left[ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{72} + o(x^5) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7(x^5 + o(x^5))}{90x^5} = \frac{7}{90}.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1 - x^2} + x^4}{x^4}$ . Здесь мы в выкладках обязаны удерживать члены до четвёртой степени:

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + o(\sin^4 x) = 1 - \frac{(x - x^3/3! + o(x^4))^2}{2!} + \frac{(x - x^3/3! + o(x^4))^4}{4!} + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{x^2 - 2x \cdot x^3/3! + o(x^4)}{2} + \frac{x^4 + o(x^4)}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 \left( \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} + x^4 &= (1 - x^2 + x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + x^4) + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) (-x^2 + x^4)^2 + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4); \end{aligned}$$

поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1 - x^2} + x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left[ \left( \frac{5}{24} - \frac{3}{8} \right) x^4 + o(x^4) \right] = -\frac{1}{6}.$