ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ.

Определение 2.1

Если в силу некоторого правила f каждому элементу $x \in D$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция f и при этом пишут

$$D \xrightarrow{f} E$$

В том случае, если множества D и E являются подмножествами множества вещественных чисел, т. е. $D \subset \mathrm{R}$, $E \subset \mathrm{R}$, то функция f называется **числовой** и при этом принята такая форма записи $y = f(x)$ или $y = y(x)$, где x - аргумент, y - значение функции;

Область определения может быть указана

***D(f)*=[1;2]**

Если область определения функции *y = f(x)* не указала, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл.

Пример:

$$y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D(f)=(-2;2), \quad E(f)=(0.5; \quad).$$

Определение 2.2

Пусть a, $b \in \mathrm{R}$, тогда множество $\{x\colon a \leq x \leq b\}$ называется **отрезком** числовой прямой или и обозначается $[a; b]$, т. е.

$$[a;b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \quad x \quad b\}$$

.

Числовые множества

$$[a.b) = \{x : a \quad x < b\} \qquad (a,b] \overset{def}{=} \{x : a < x \quad b\}$$

называются **полуинтервалами**.

Числовое множество

$$(a,b) \overset{def}{=} \{x : a < x < b\}$$

называется **интервалом**.

Термины **функция, отображение, преобразование** – синонимы.

Обозначения:

$y=f(x)$; f: $D \to E$; $D \xrightarrow{f} E$

Для функций одной переменной $D \subseteq R$; $E \subseteq R$.

Частное значение функции записывается в виде:

$$f(x_0) \text{ или } y|_{x=x_0}.$$

Способы задания функций:
Аналитический, табличный, графический, алгоритмический

Числовые функции могут задаваться формулами на различных промежутках или интервалах, принадлежащих множеству определения функции.
Такой способ задания называется **аналитическим**.
При этом могут встретиться такие ситуации.

Если функция такова, что ее удается выразить в виде $y = f(x)$, то говорят о **явном аналитическом** способе задания

Если не удается явно выразить y через x, а удается только указать зависимость между функцией и аргументом в виде $F(x, y) = 0$ или в виде $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$, то такой способ задания называется **неявным аналитическим**.

Пример

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Здесь y как функция x связана с ним неявной аналитической зависимостью, правда, в данном случае нетрудно перейти к **явному аналитическому** способу задания, выразив из этого уравнения y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Но на практике чаще всего встречаются функции, не допускающие такого перехода.

Иногда при аналитическом способе задания функции бывает удобно ввести в рассмотрение промежуточный аргумент ***t*** (так называемый **параметр**) и выразить ***x*** и ***y*** как функции этого промежуточного аргумента, изменяющегося на некотором числовом подмножестве $T \subset R$.

Пример:

Если материальная точка перемещается в плоскости декартовой системы координат xOy,то, взяв в качестве параметра время t, указывают закон движения в виде

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \end{aligned} \qquad t \quad [t_1, t_2]$$

Исключив параметр t, можно перейти к явному или неявному аналитическому способу задания рассматриваемой функции.

Такой способ задания называется **параметрическим**

Составные функции:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Табличный способ задания функций.

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_n$$

$$y_1, \quad y_2, \ldots, y_n$$

Примеры: таблицы **ln, sin** и т. д.

Определение 2.3

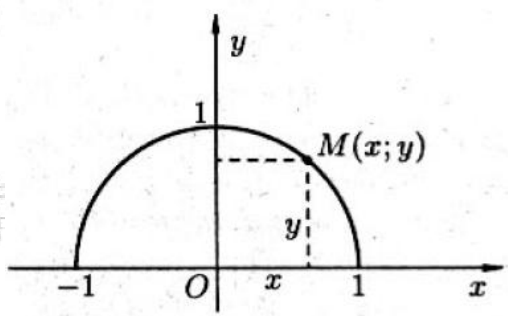
Графиком функции *y = f(x)* называется множество всех точек плоскости *xOy,* для каждой из которых *x* является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Другими словами график – это множество упорядоченных пар (x, f(x))

Например, графиком функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

является верхняя полуокружность радиуса R = 1 с центром в O(0; 0)



Алгоритмически заданные функции

Editor - D:\work\LokFrac.m

```
function [y1] = LokFrac(BND,rw)

%B = wk1read('d:\work\Larichev\Vakynay\CO.wk1');

B = wk1read('d:\work\Pangeja\C2H6.wk1');

xi = linspace(min(B(:,1)),max(B(:,1)),length(B)/0.5);
yi = linspace(min(B(:,2)),max(B(:,2)),length(B)/0.5);
%zi = griddata_fil(B(:,1),B(:,2),B(:,3),xi,yi','linear',100000,1);%метр
zi = griddata_fil(B(:,1),B(:,2),B(:,3),xi,yi','linear',0.1,1);%град


%--- ОКОНТУРИВАНИЕ ---------------------------------------------------------
 %dX=0.06*length(xi);
 %dY=0.06*length(yi);
 %X=((B(:,1)-min(xi))/(max(xi)-min(xi)))*(length(xi)-1)+1;
 %Y=((B(:,2)-min(yi))/(max(yi)-min(yi)))*(length(yi)-1)+1;
 %Z(1:length(yi),1:length(xi))=NaN;
 %for i=1:length(B)
 %     Z(max(1,fix(Y(i)-dY)):min(ceil(Y(i)+dY),length(yi)),max(1,fix(X(i)-dX)):min(ceil(X(i)+dX),le
 %end
%  zi=zi.*Z;
```

SalMaps.m | izo311fgn.m | d1.m | d1an.m | hilko2.m | LokFrac.m

LokFrac Ln 5 Col 41 OVR

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Начальный этап исследования функции.

1) Нули **f(x)=0** и знак функции на множестве ***x*∈*D(f)*.**

2) Четность ⇔ **∀ x∈D(f): (-x∈D(f)) ∧ (f(-x)=f(x));**
нечетность ⇔ **∀ x∈D(f): (-x∈D(f)) ∧ (f(-x)=-f(x)).**

Примеры:

$$f(x) = x^2 - \text{четная},$$
$$f(x) = x^3 - \text{нечетная}.$$

Замечание: Существуют функции общего вида.

3) Периодичность: **f(x)=f(x-T)=f(x+T). T** – период.

f(x) – периодическая ⇔ **∃ T≠0: ∀ x∈D(f): (x±T)∈D(f) ∧ f(x±T)=f(x).**

4) **Монотонность**: функция - монотонно возрастающая, если

$$\forall x_1, x_2 \quad X: x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2);$$

функция - монотонно убывающая, если

$$\forall x_1, x_2 \quad X: x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

5) **Ограниченность:**

функция ограничена сверху ⇔ **∃ M∈R: ∀ x∈X⇒ f(x)≤M,**

функция ограничена снизу ⇔ **∃ M∈R: ∀ x∈X⇒ f(x) ≥ M,**

функция ограничена ⇔ **∃ N,M∈R: ∀ x∈X⇒ N≤f(x)≤M.**

6) Если условия пункта 5 не выполняются, то функция называется **неограниченной.**

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ.

Сложная функция.

На **D** определена функция **u=φ(x)** → **E(u)** – множество значений.
На **E(u)** задана **y=f(u)** **(D(f) ⊆ E(u)).**
Тогда

$$x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y \qquad y = f\left(\varphi(x)\right) \qquad \left(f \circ \varphi\right).$$

называется суперпозицией функций.
x – независимая переменная; **u** – промежуточный аргумент.

Пример:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx}, \; u = ax^2 + bx, \; y = \sqrt{u}.$$

Обратная функция.

- Функция ***y=f(x)*** отображает **D(f) → E(f).**
- Пусть ***f*** осуществляет взаимно однозначное отображение

$$f \quad \forall x \quad D\,\exists^1 y \quad E: y = f(x):$$

$$\forall x_1, x_2 \quad D,\ x_1 \quad x_2 \quad f(x_1) \quad f(x_2).$$

Тогда можно говорить об обратной функции $x = f^{-1}(y).$

Пример:

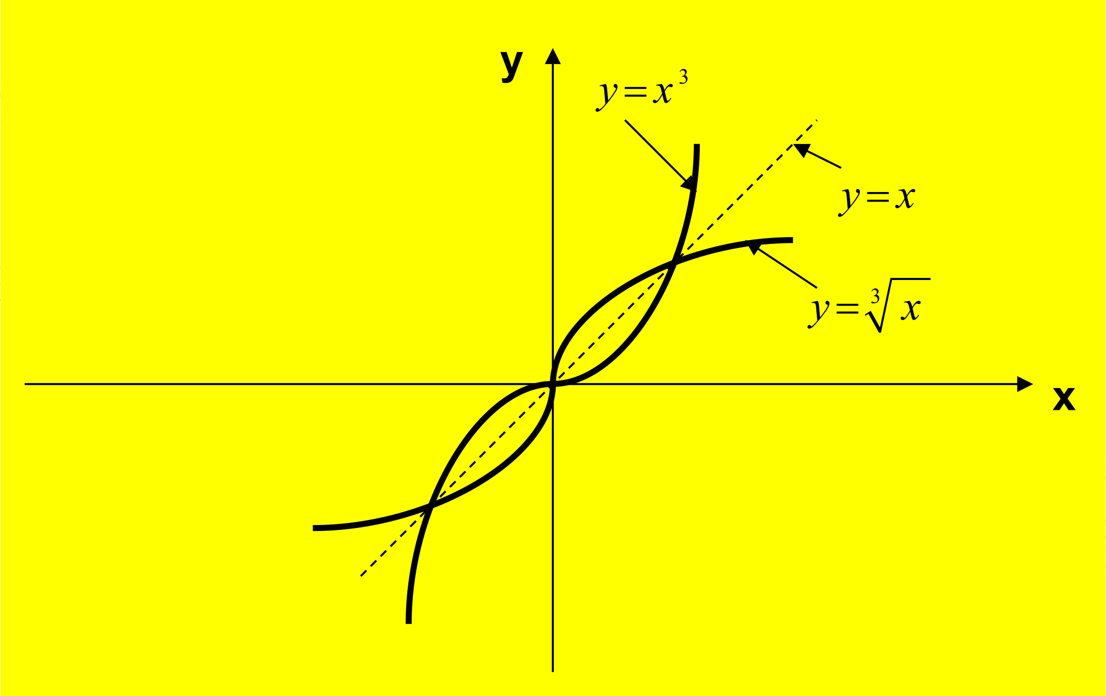
$$y = x^3, \quad x = \sqrt[3]{y}\ .$$

Теорема 2.1(достаточное условие обратимости)

- Если числовая функция монотонна, то существует обратная функция

$$x = f^{-1}(y).$$

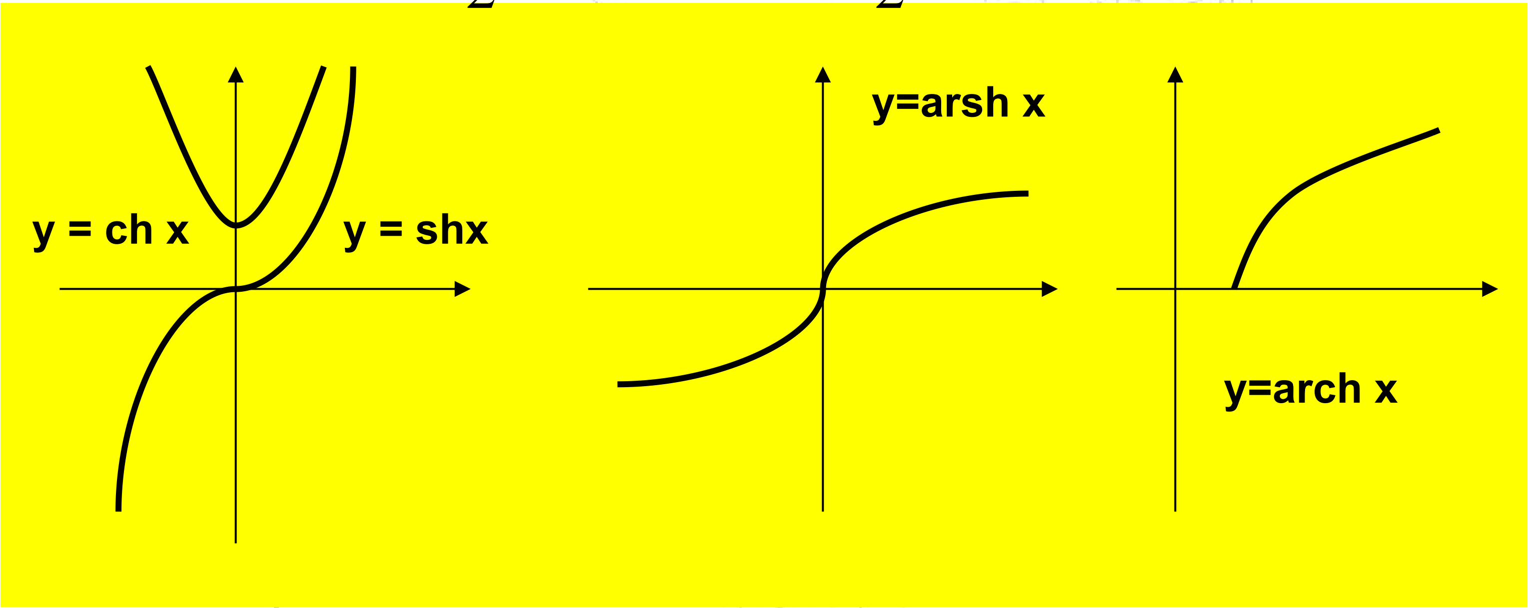
Построение графика обратной функции.



8) Гиперболические функции.

9) Обратные гиперболические функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



Обратные гиперболические функции читаются: ареа-синус гиперболический,
ареа-косинус гиперболический,
ареа-тангенс гиперболический

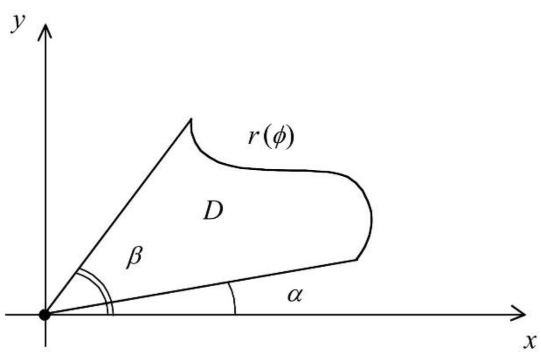
$$y = arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right);$$

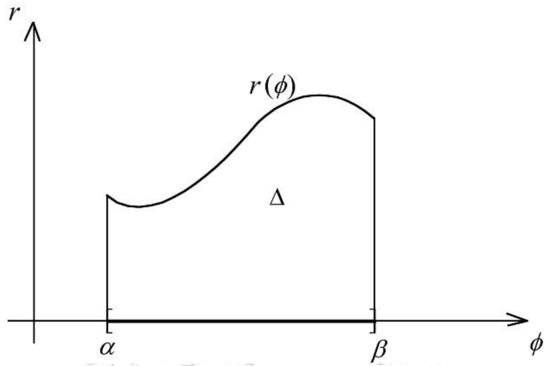
$$y = archx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

$$y = arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x};$$

Связь декартовых и полярных координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

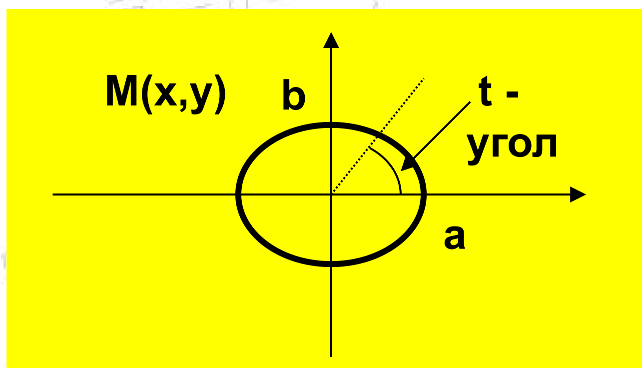




Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=a\cos t,\ 0\ \ t<2\pi,$$

$$y=b\sin t.$$



- **Парабола.**

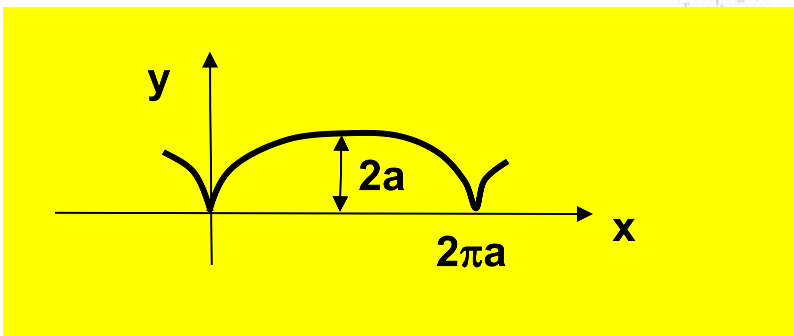
$$y^2=2px \qquad x=t,\ t\ \ [0;\ \ ),$$
$$y^2=2pt.$$

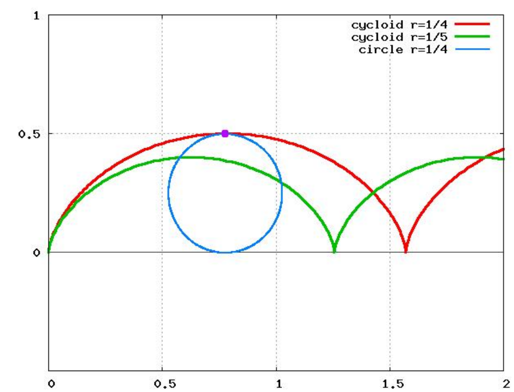
- **Гипербола.**

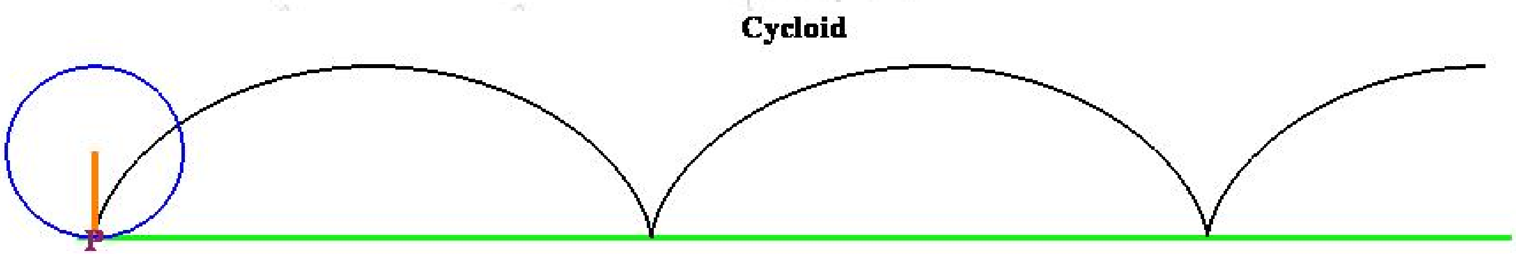
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=a\,\mathrm{ch}\,t,\ t\ \ R,$$
$$y=b\,\mathrm{sh}\,t.$$

Циклоида.

$$x = a(t - \sin t),\ t \quad R,$$
$$y = a(1 - \cos t).$$







Астроида.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \ (\ a = 4r\ )$$

$$x = a\cos^3 t,\ 0 \quad t < 2\pi,$$
$$y = a\sin^3 t.$$