Лекция 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (5)

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Признак постоянства функции

Признаки возрастания и убывания функции

Экстремумы функции. Критические точки

Необходимые условия экстремума

Исследование критических точек с помощью первой производной
Первое достаточное условияе экстремума

Наибольшее и наименьшее значение функции

Признак постоянства функции

Теорема 10.1. *Пусть функция $f\ (x)$ непрерывна на промежутке $[a;\ b]$ и дифференцируема на $(a;\ b)$. Для того, чтобы $f\ (x)$ была постоянна на промежутке $[a;\ b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x\in(a;\ b)$ выполнялось условие* $f'(x)=0$

Доказательство.

Достаточность. Пусть $f'(x)=0 \quad \forall\ x\in(a;\ b)$.

Возьмем любые две точки x_1 и x_2, принадлежащие промежутку $[a;\ b]$.

По теореме Лагранжа, $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, но $f'(c)=0$,

следовательно, $f(x_2)=f(x_1)$, причем x_1 и x_2 – любые две точки из

отрезка $[a;\ b]$, а это означает, что $f(x)=const \quad \forall\ x\in[a;\ b]$.

Необходимость. Пусть $f(x)=const \quad \forall\ x\in[a;\ b]$.

Значит, $f'(x)=c'=0$

Признаки возрастания и убывания функции

Теорема 10.2. *Пусть f (x) непрерывна на промежутке [a; b] и дифференцируема в интервале (a; b). Для того, чтобы f (x) не убывала на этом промежутке, необходимо и достаточно, что бы при любом x ∈(a; b) выполнялось условие* $f'(x) \geq 0$

Доказательство

Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает на промежутке $[a;\ b]$.

И пусть $x \in (a;\ b)$. Возьмем приращение $\Delta x > 0$ столь малое, чтобы было

$(x + \Delta x) \in (a; b)$

Ясно, что $x + \Delta x > x$, а так как $f(x)$ не убывает, то очевидно, что

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

Устремим теперь Δx к нулю, тогда в силу определения производной получим

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a;\, b).$$

Совершенно аналогично, если взять приращение $\Delta x < 0$, тогда будет

$$f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, опять получим $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a;\, b[$

Достаточность. Пусть для любого x из интервала $(a;\ b)$ выполняется условие

$$f'(x) \geq 0$$

Возьмем любые две точки x_1 и x_2 из этого интервала, причем $x_1 < x_2$; тогда по теореме Лагранжа имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

Так как $x_1 - x_2 > 0$, $f'(x) \geq 0$, то ясно, что $f(x_2) \geq f(x_1)$,

а это и означает, что $f(x)$ возрастает на промежутке $[a;\ b]$.

Теорема 10.3.

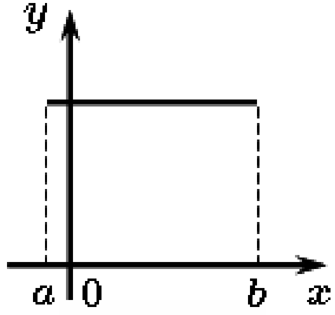
Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$.

Для того, чтобы $f(x)$ убывала на этом промежутке, необходимо и достаточно, что бы при любом $x \in (a;\ b)$ выполнялось условие

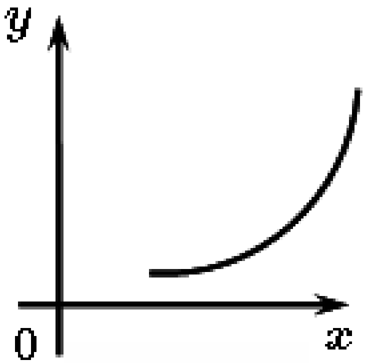
$$f'(x) \le 0$$

Теорема доказывается аналогично предыдущей

Геометрическая иллюстрация.



Пусть *y=const.* Ясно, что ее график прямая, параллельная оси 0*x*, значит касательная к графику этой функции параллельно оси 0*x*, в любой точке, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

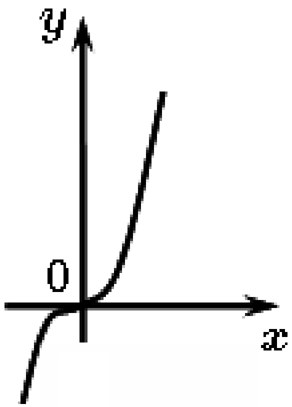


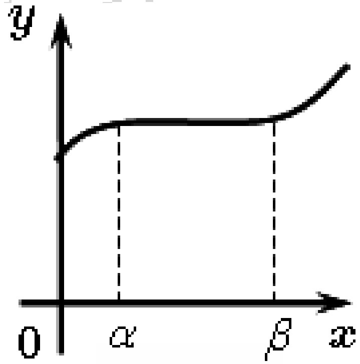
Пусть теперь *f(x)* строго возрастающая функция. Касательная к графику этой функции в любой точке образует острый угол с осью 0*x*, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha > 0$

У строго возрастающей функции совершенно необязательно $f'(x) > 0$; могут найтись точки, в которых будет $f'(x) = 0$.

Действительно, рассмотрим график строго возрастающей функции $y = x^3$

Ясно, что в точке $x_0 = 0$ $y'(x_0) = 0$.





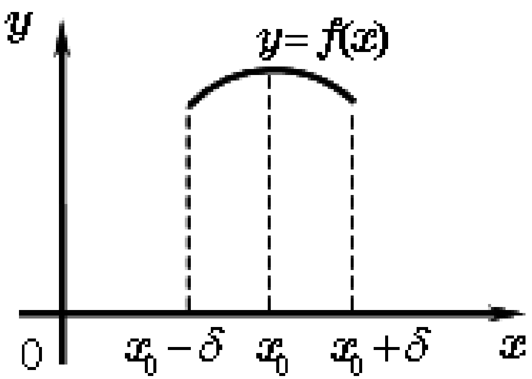
Пусть теперь *f(x)* не убывающая, но не строго возрастающая функция. Очевидно, что на промежутке [α; β] происходит остановка в возрастании. В каждой точке этого промежутка $f'(x) = 0$

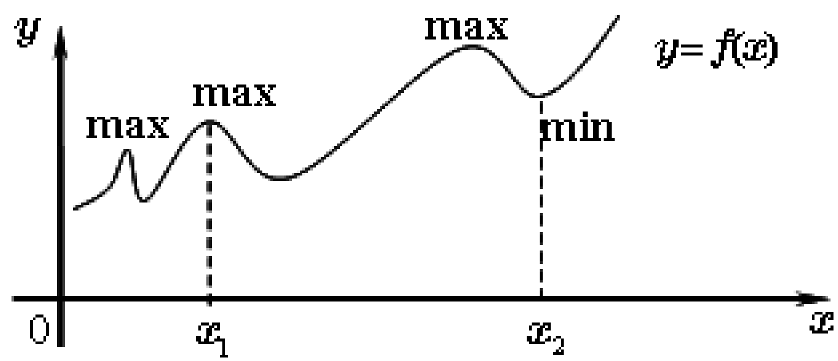
Экстремумы функции

Определение 10.1. *Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке локальный* ***максимум (минимум)****, если*

$\forall \quad x \in \overset{0}{U}(x_0;\delta)$ *выполняется неравенство* $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$

При этом пишут: $\max f(x) = f(x_0)$ $(\min f(x) = f(x_0))$





Максимум или ***минимум*** функции называется одним словом: ***экстремум***. Заметим, что функция на некотором промежутке $[a;\ b]$ может иметь несколько максимумов или минимумов, причем, не обязательно максимальное значение является наибольшим, точно так же, как и минимальное – наименьшим.

Необходимые условия экстремума

Теорема 10.4 (теорема Ферма) .

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, принадлежащей интервалу

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

и имеет в этой точке экстремум, то обязательно

$$f'(x_0) = 0$$

Пьер де Ферма́ (фр. *Pierre de Fermat*, 17 августа 1601) — 12 января 1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой Великой теоремы Ферма.

Доказательство.

Пусть для определенности в точке x_0 функция имеет максимум.

Тогда $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0,$ если $\Delta x>0$ и $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0,$ если $\Delta x<0$

Устремим Δx к нулю, тогда получим $f'_+(x_0)\leq 0$ и $f'_-(x_0)\geq 0,$

а так как функция в точке x_0 дифференцируема, то должно быть:

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0),$$

а это возможно, только когда

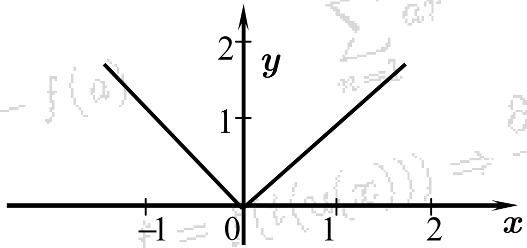
$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0.$$

Следовательно $f'(x_0)=0$

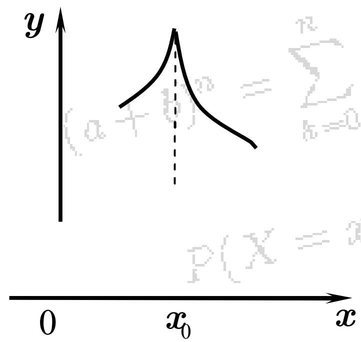
Геометрически это означает что **касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремуму параллельна оси О*х***. Заметим, что в рассмотренном выше случае точка x_0 называется **точкой гладкого экстремума.**

Экстремум у функции может существовать и в точках, в которых функция не имеет производной или производная обращается в бесконечность, т.е. в точках, в которых функция недифференцируема. Тогда говорят, что в этих точках функция имеет **острый экстремум.**

Например, $y = |x|$



Ясно, что в точке $x_0 = 0$ эта функция недифференцируема, т.е. у нее в этой точке не существует производная. Однако, очевидно, что в точке x_0 функция имеет минимум (острый экстремум).



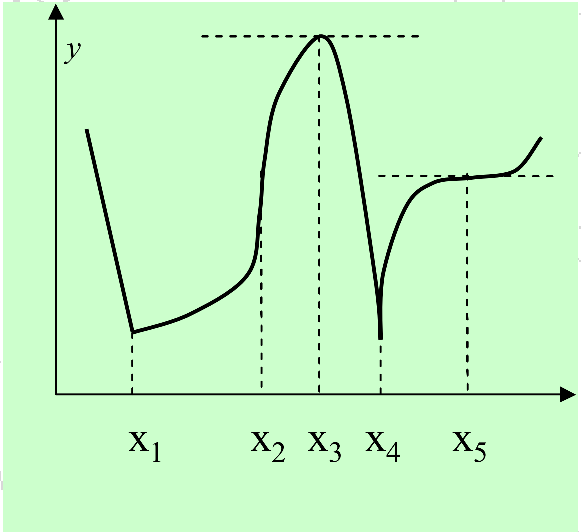
На рисунке изображена функция, у которой в точке x_0 производная обращается в бесконечность (функция в этой точке также недифференцируемая); ясно, что в точке x_0 функция имеет острый максимум.

Определение 10.2.

Если $f'(x_0)=0$, то точка x_0 называется **стационарной точкой.**

Замечание

В стационарной точке функция может иметь экстремум, причем ясно, что в стационарной точке экстремума может и не быть.



Функция *y=f(x),* график которой представлен на этом рисунке, имеет экстремумы в точках x_1, x_3, x_4, при этом

в точке x_1 производная не существует,

в точке x_3 она равна нулю,

в точке x_4 обращается в бесконечность.

В точках x_2, x_5 функция экстремума не имеет, причем в точке x_2 производная обращается в бесконечность, в точке x_5 производная равна нулю.

Например, функция $y=x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет $f'(0) = 0$,

однако понятно, что в точке $x_0 = 0$ функция экстремумов не имеет.

Итак, **точки, в которых производная обращается в ноль, в бесконечность или не существует, могут оказаться точками экстремума.**

Эти точки называются **критическими** или **подозрительными на экстремум**

Точки, подозрительные на экстремум, подвергаются дополнительному исследованию с целью выяснения, имеется ли в них максимум или минимум

Исследование критических точек с помощью первой производной
Первое достаточное условие экстремума

Теорема 10.5.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и производная $f'(x)$ обращается в нуль в точке x_0, то :

-если при прохождении через точку x_0 производная меняет знак “плюс” на “минус”, то в точке x_0 функция имеет максимум;

-если при прохождении через точку x_0 производная меняет знак “минус” на “плюс”, то в точке x_0 функция имеет минимум;

-если производная при переходе через точку x_0 не меняет своего знака, экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство.

Докажем первую часть теоремы. Допустим, что проходя через точку x_0, производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, причем $f'(x_0)=0$

Будем рассматривать различные $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Так как выполнены условия теоремы Лагранжа, то можно написать:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$$

Если $x < x_0$, то $f'(c) > 0,$ $x-x_0<0,$

следовательно $f(x)-f(x_0)<0$

Если $x > x_0$, то $f'(c)<0,$ $x-x_0>0,$

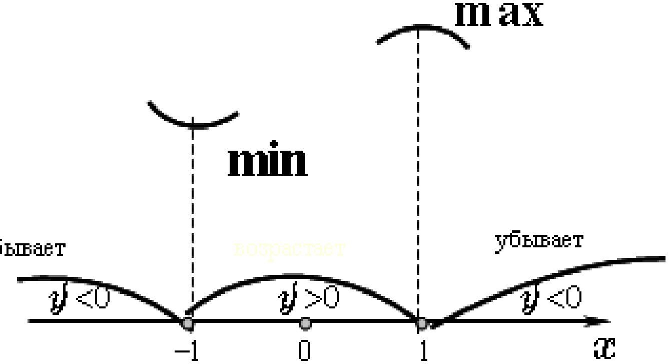
следовательно, $f(x)-f(x_0)<0,$

а это и означает, что в точке x_0 функция имеет максимум

Вторая половина теоремы доказывается аналогично.

Заметим, что **теорема остается в силе, если в критических точках производная не существует или обращается в бесконечность, лишь бы только в самой критической точке функция имела конечное значение**.

Отметим, кроме того, что при решении примеров полезно делать схему, которая позволяет свести воедино получаемые результаты и сделать соответствующие выводы, а именно: на оси Ох наносят критические точки, указывают интервалы возрастания и убывания функции, а также характер критических точек.

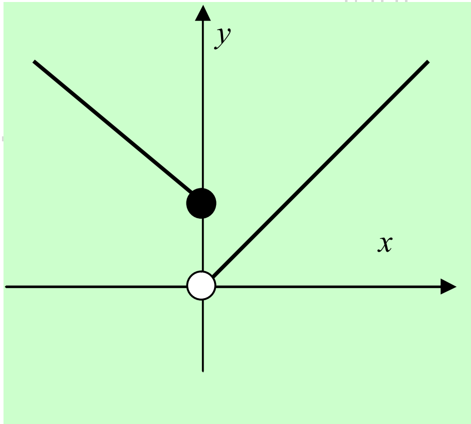


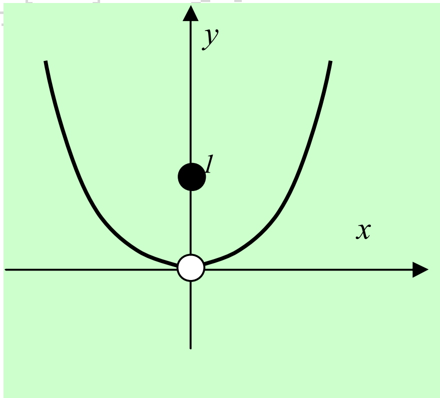
Условия теоремы можно свести в следующую таблицу

Знаки производной до и после перехода через точку x_0		Экстремум
-	+	Минимум
+	-	Максимум
-	-	Нет
+	+	Нет

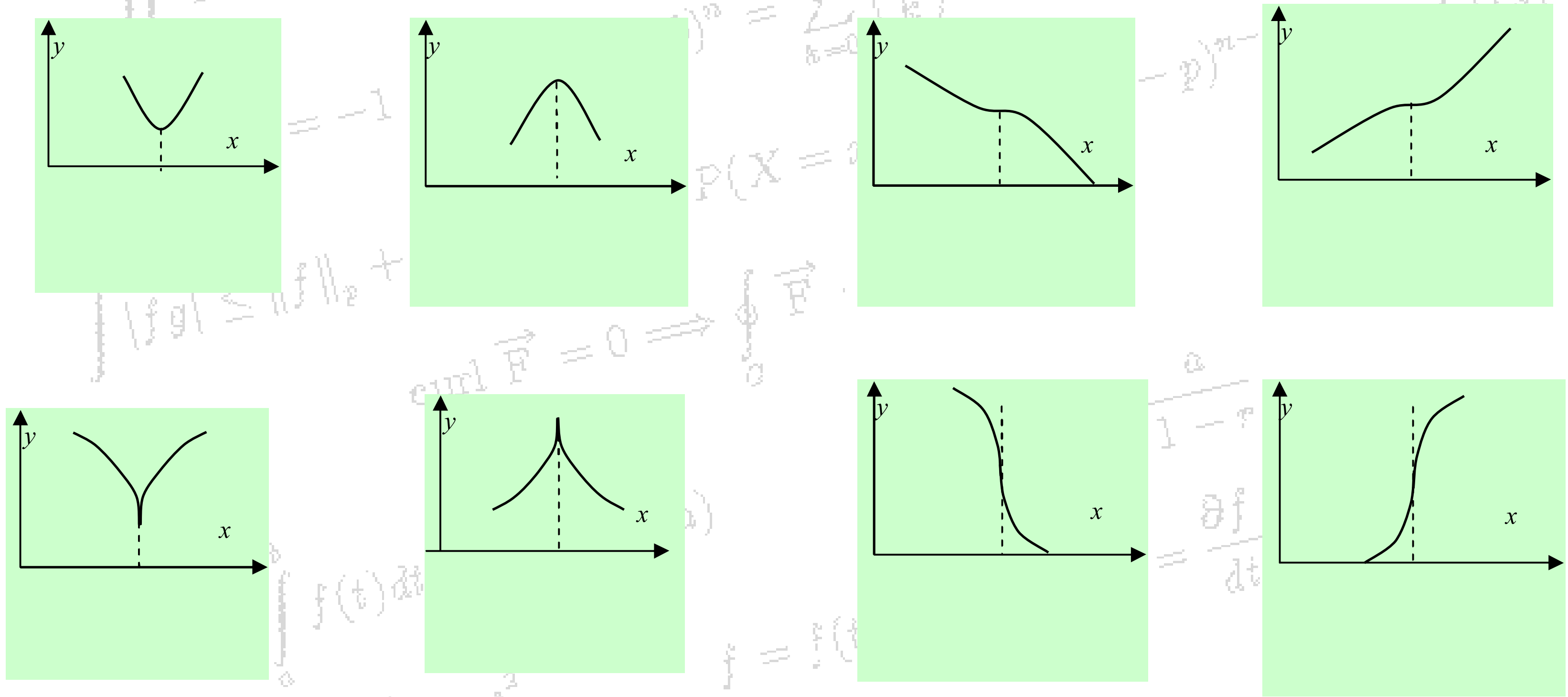
Замечание

Если условие непрерывности функции в самой точке x_0 не выполнено, вопрос о наличии экстремума остается открытым





Примеры

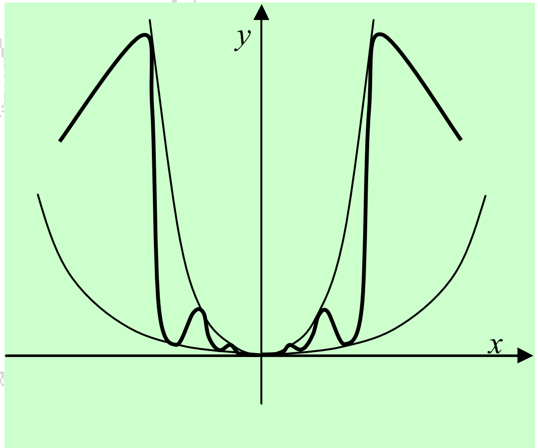


Возможные случаи наличия или отсутствия экстремума непрерывной функции, производная которой в критической точке равна нулю или обращается в бесконечность

Экзотический пример

Пусть дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 - \cos\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



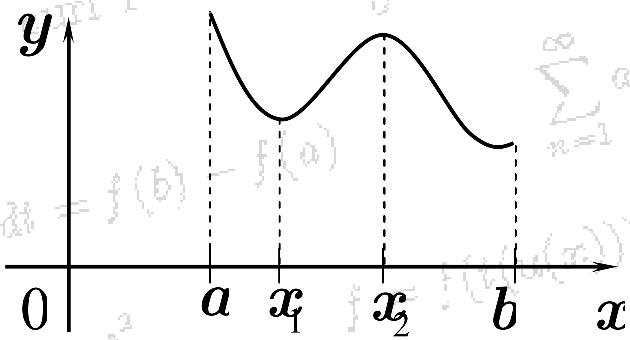
Можно показать, что в точке x=0 данная функция непрерывна и имеет минимум. Производная функции

$$f'(x) = 2x\left(2 - \cos\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{x}$$

в любой окрестности точки x=0 меняет знак бесконечно много раз. Поэтому функция $f(x)$ не является монотонно убывающей или возрастающей ни слева, ни справа от точки x=0.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Допустим, что некоторая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$, тогда на этом промежутке она имеет наибольшее и наименьшее значения. Чтобы их найти, **нужно отыскать все максимумы и минимумы функции, вычислить ее значения на концах промежутка, а затем сравнить их между собой и выбрать наименьшее и наибольшее.**



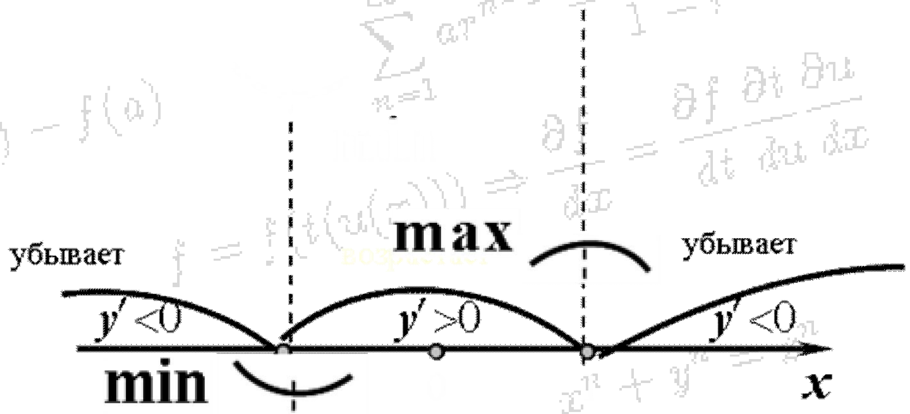
Пример. Найти экстремумы функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, интервалы возрастания и убывания функции и сделать ее рисунок

Решение. Прежде всего заметим, что функция определена на всей числовой оси. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого вычислим производную:

$$\boldsymbol{y}' = \frac{1\cdot\left(1+\boldsymbol{x}^2\right) - \boldsymbol{x}\cdot 2\boldsymbol{x}}{\left(1+\boldsymbol{x}^2\right)^2} = \frac{1+\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x}^2}{\left(1+\boldsymbol{x}^2\right)^2} = \frac{1-\boldsymbol{x}^2}{\left(1+\boldsymbol{x}^2\right)^2}, \quad \boldsymbol{y}' = 0 \Rightarrow 1 - \boldsymbol{x}^2 = 0$$

Имеем две критические точки $x_{1,2} = \pm 1$

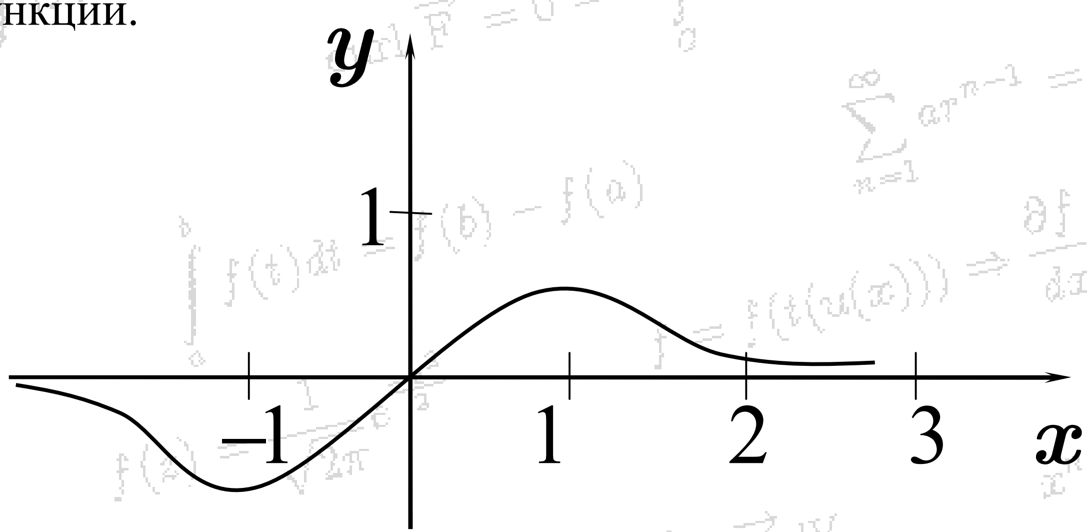
Левее точки $x_1 = -1$, $y' < 0$, правее $y' > 0$, значит в точке $x_1 = -1$ функция имеет минимум. Ясно, что в точке $x_2 = 1$ функция имеет максимум.



Нетрудно вычислить $y_{\min}$ и $y_{\max}$

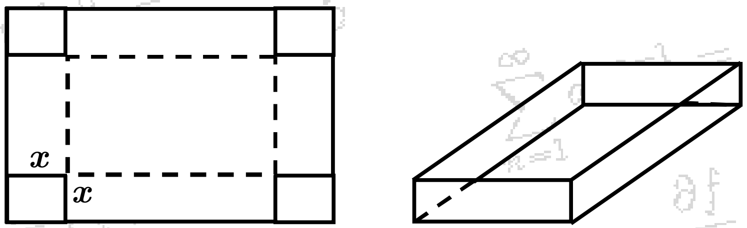
Действительно, $y_{\min} = -\frac{1}{2}, \quad y_{\max} = \frac{1}{2}$

Если учесть, что $y(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$, то легко нарисовать график этой функции.



Задача.

Из листа картона размерами 15х8 вырезать уголки, такие, чтобы после загибания краев получилась коробка наибольшего объема.



Решение. Ясно, что объем $v = x \cdot (15 - 2x) \cdot (8 - 2x)$; $v' = 12x^2 - 92x + 120.$

.Приравняв производную к нулю, получим квадратное уравнение

$3x^2 - 23x + 30 = 0$; его корни $x_1 = 6,\ x_2 = \frac{5}{3}.$

Очевидно, что $x_1 = 6$ следует исключить из рассмотрения.

При прохождении через точку $x_2 = \frac{5}{3}$ производная меняет знак "плюс" на знак "минус",

значит, если вырезать уголки с размерами $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$ то коробка будет иметь

наибольший объем, а именно: $v_{\max} = \frac{5}{3} \cdot \frac{35}{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{2450}{27}$ куб.ед.