Лекция 27

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ(5)

Вычисление длины дуги кривой
Механические приложения определенного интеграла

Работа переменной силы

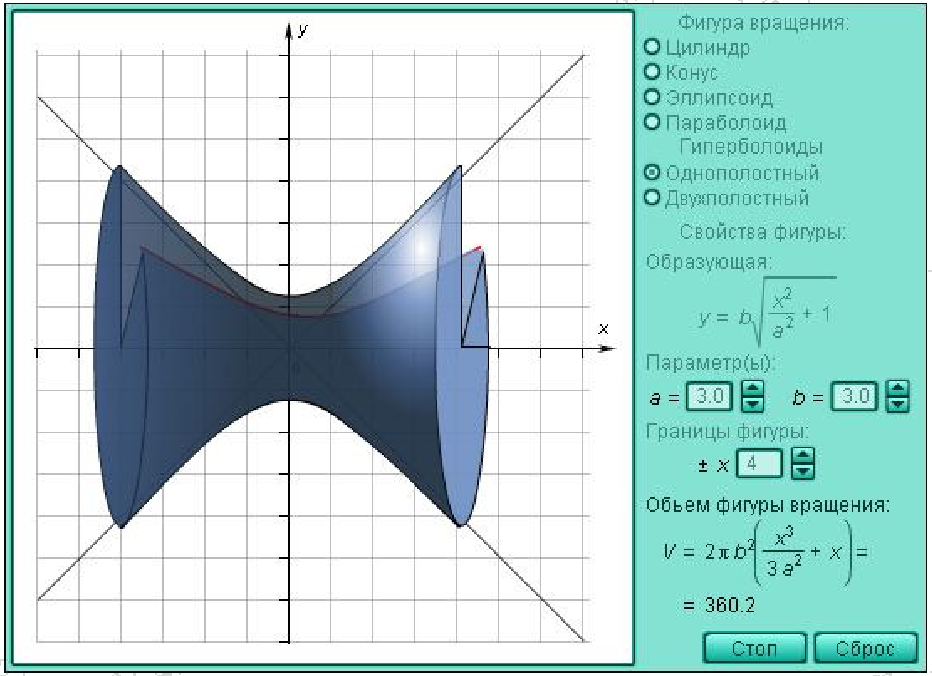
Путь, пройденный телом

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Объем тела вращения.

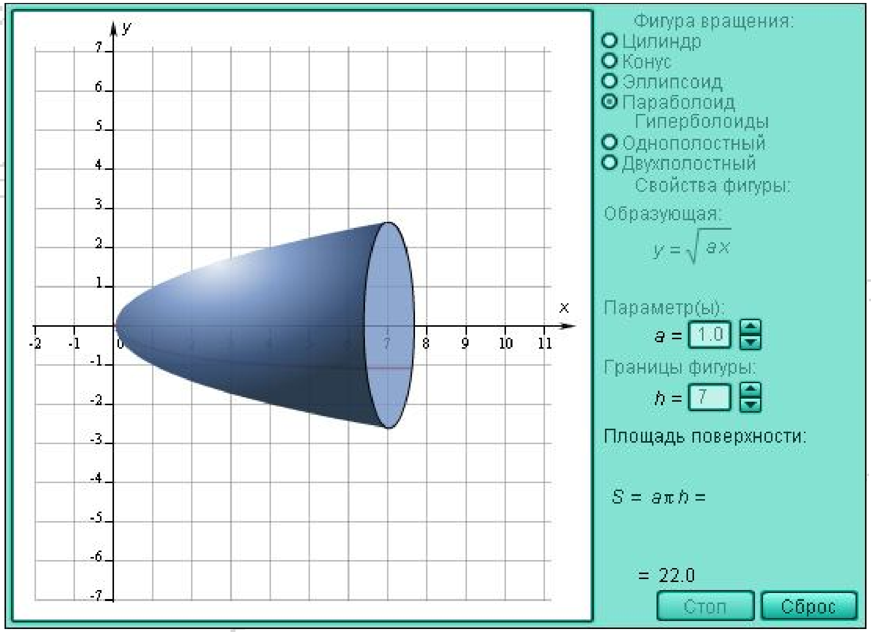
Пусть тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной на отрезке [a ; b] функцией f (x).



Его объем выражается формулой $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$

Площадь поверхности вращения.

Пусть поверхность задается вращением относительно оси OX графика функции $y = f(x)$, $a \le x \le b$, и функция f имеет непрерывную производную на этом отрезке.

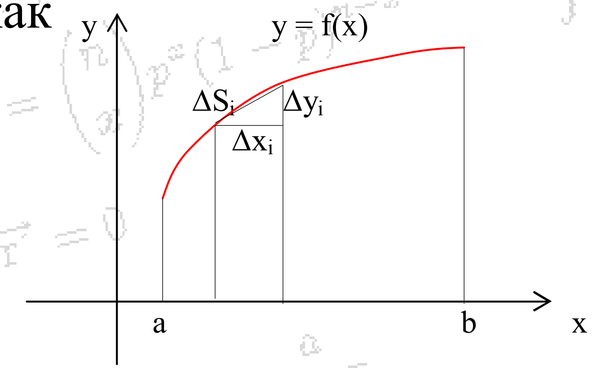


Тогда площадь поверхности вращения определяется формулой

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Вычисление длины дуги кривой

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

Длина дуги может быть определена, как

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Тогда можно показать, что $S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$

Если уравнение кривой задано **параметрически,**

где x = φ(t) и y = ψ(t).

то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции получаем ,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\, dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, $\rho = f(\varphi)$.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} =$$

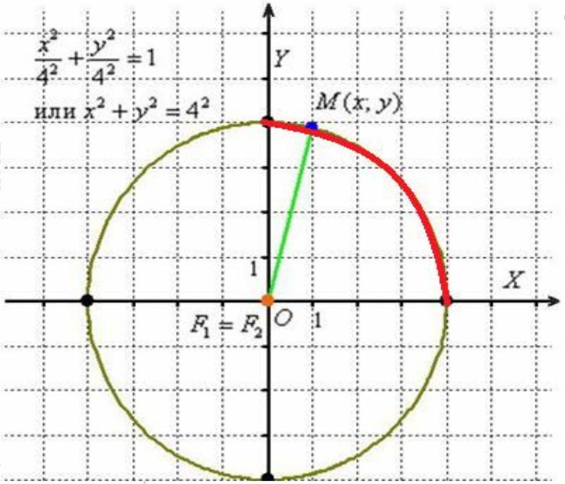
$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}.$$

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



1 способ. Выразим из уравнения переменную y:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Найдем производную $\quad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тогда $\quad \dfrac{1}{4}S = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int\limits_0^r \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r \cdot \arcsin \dfrac{x}{r}\Big|_0^r = r\dfrac{\pi}{2}$

Тогда $S = 2\pi r$. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим:

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\quad \rho' = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$

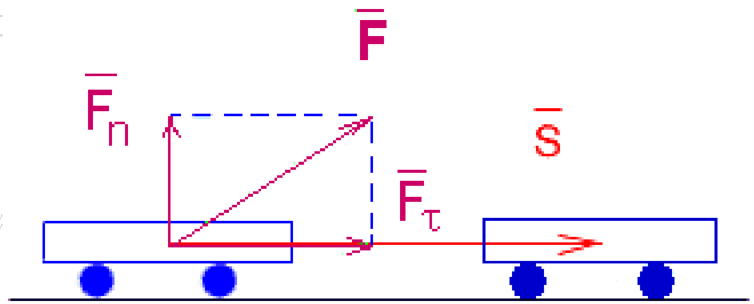
тогда $\quad S = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\, d\varphi = r\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$

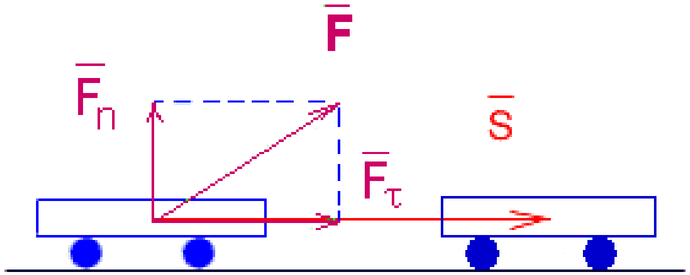
Механические приложения определенного интеграла

Работа постоянной силы

Для характеристики эффективности силового воздействия на тело используется величина, называемая механической работой.

Пусть под действием постоянной силы **F** тело сместилось из положения 1 в положение 2 вдоль прямой линии





Смещение тела охарактеризуем вектором перемещения **S**. Работой силы **F** на перемещении **S** называется скалярная величина, определяемая равенством:

$A = |\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{S}|\cdot\cos\alpha = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})$

Работа постоянной силы равняется скалярному произведению силы на перемещение.

Единица измерения работы - Джоуль. 1 Дж = 1 Н·м.

Из уравнения для A следует, что работу совершает только тангенциальная составляющая силы $A = F_\tau \cdot S$.

Свойства работы:

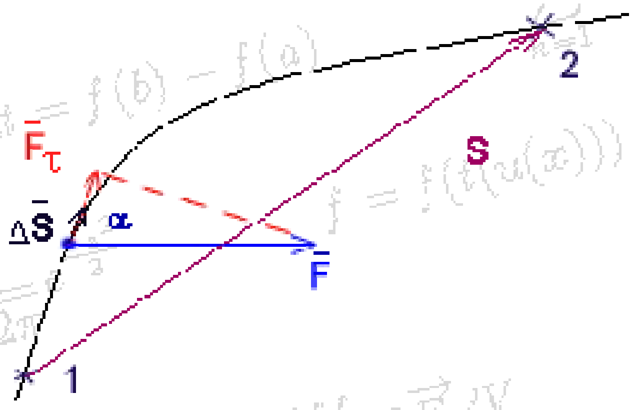
1.Перпендикулярная перемещению составляющая силы работы не производит;

2.Работа результирующей силы равна сумме работ составляющих сил:
$A = F_\tau \cdot S = \Sigma F_{\tau i} \cdot S = \Sigma A_i$;

Работа на перемещении **S** равна сумме работ на отдельных участках этого перемещения, т.е. работа является аддитивной величиной:
$A = F_\tau \cdot \Sigma \Delta S_i = \Sigma A_i$.

Работа переменной силы.

В общем случае криволинейного движения величина работы рассчитывается посредством интегрирования. Для этого все перемещение разбивается на отдельные элементарные участки Δ**S** такой малой длины, что их можно считать прямолинейными, а действующую на этих участках силу - постоянной.



Работу при перемещении частицы из начального положения в конечное рассчитаем согласно выражению

$$A = F_\tau \cdot \Sigma \Delta S_i = \Sigma A_i.$$

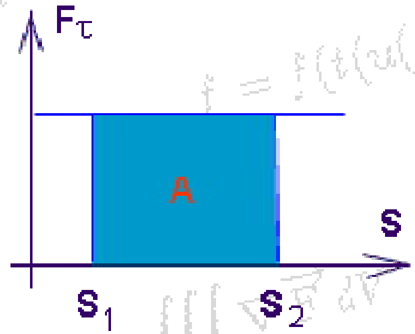
где A_i - работа силы на каждом участке. Предел суммы работ на отдельных участках траектории при $\Delta\mathbf{S}$ стремящемся к нулю является определенным интегралом и представляет собой искомую величину работы:

$$A = \lim_{\Delta S \to 0} \sum (\vec{F}_i \cdot \Delta S) = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{S})$$

Если тело M перемешается вдоль оси Ox под действием силы F = F(x), направленной параллельно этой оси, то работа, произведенная силой при перемещении тела из положения $x = a$ в положение $x = b$ (a < b), находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx$$

Работу силы **F** при конечном перемещении $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1$ можно найти графически. Как следует из определения работы, ее значение в случае постоянной силы равно площади закрашенного прямоугольника



Пример: **Работа, совершаемая при растяжении пружины (работа силы упругости)**

Если растяжение проводить медленно, то **$F = -F_{упр} = kx$**

Сила **F** – **величина не постоянная**, она зависит от величины деформации **x**.

Направление силы **F** совпадает с деформацией ($\cos\alpha = 1$)

Следовательно, $$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx \cos\alpha = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}$$ - **работа зависит только от начального и конечного положения конца пружины**

Силы, работа которых не зависит от формы пути, а зависит только от начального и конечного положения, называют консервативными

Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю

Примеры **консервативных** сил: **сила упругости, сила тяжести**

Пример **неконсервативной** силы – **сила трения**

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е.

$$v(t) = \frac{dS}{dt}$$

Отсюда следует, что $dS = v(t)\,dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Путь, пройденный за какой-либо промежуток времени, численно выражается площадью, ограниченной осью времени, графиком скорости и двумя вертикальными отрезками, проведенными из точек, соответствующих началу и концу данного промежутка времени.

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости *Oxy* задана система материальных точек $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$,.. , $M_n(x_n;y_n)$ соответственно с массами m_1, m_2,.. m_n. ***Статическим моментом S_x*** системы материальных точек относительно оси *Ox* называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси Ox):

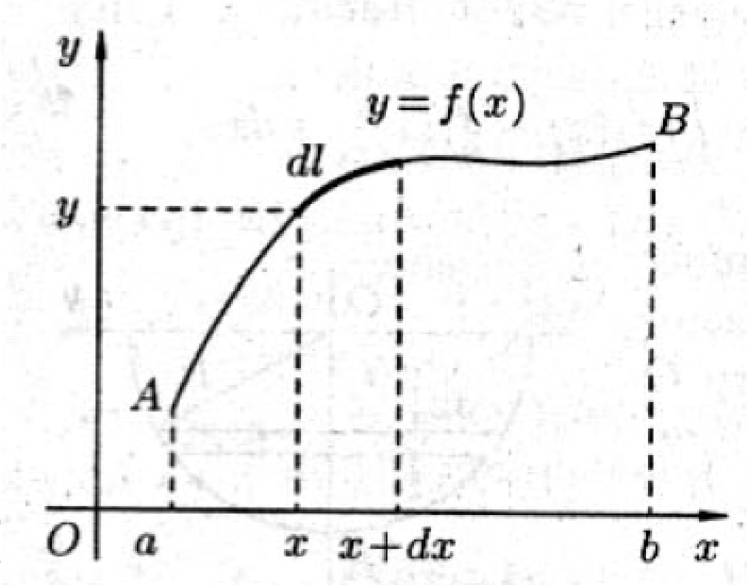
$$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i.$$

Аналогично определяется ***статический момент S_y*** этой системы относительно оси *Oy:*

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i.$$

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть у = *f(x)* *(a < x <b)* — это уравнение материальной кривой *AB*. Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ (γ = const).



Для произвольного $x \in [a; b]$ на кривой *AB* найдется точка с координатами *(x;y)*. Выделим на кривой элементарный участок длины *dl,* содержащий точку *(x;y)*.

Масса этого участка равна γdl.

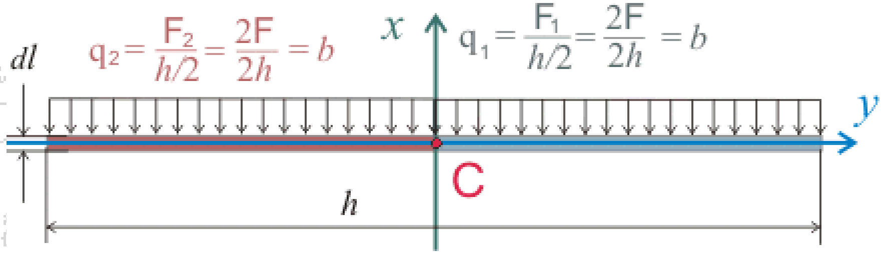
Примем выделенный участок dl ***приближенно за точку***, отстоящую от оси Ox па расстоянии y.
Тогда дифференциал статического момента dS_x («элементарный момент») будет равен $\gamma\, dly$, т. е. $dS_x = \gamma dl\, y$ Отсюда следует, что статический момент S_x кривой AB относительно оси Ox равен

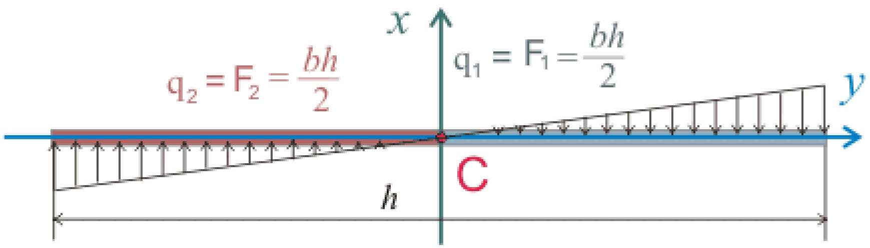
$$S_x = \gamma \int_a^b y\, dl = \gamma \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Аналогично

$$S_y = \gamma \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Принципиальная разница между статическим моментом и моментом инерции в том, что статический момент характеризует сечение, которое сила тяжести как бы пытается сломать пополам относительно центра тяжести или оси симметрии, а момент инерции характеризует тело, все материальные точки которого перемещаются (или пытаются переместиться) в одном направлении относительно центра тяжести.





Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством:

если в этой точке сосредоточить всю массу *m* заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой *y = f(x)* относительно той же оси.

Обозначим через $C(x_c;y_c)$ центр тяжести кривой AB.

Из определения центра тяжести следуют равенства

$$\gamma l \cdot x_c = S_y \text{ и } \gamma l \cdot y_c = S_x.$$

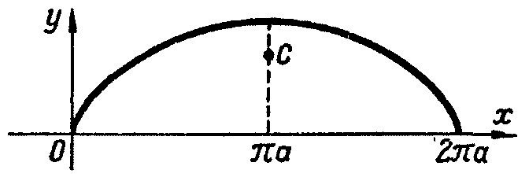
$$x_c = \frac{S_y}{\gamma l},\ y_c = \frac{S_x}{\gamma l}$$

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\,dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1+(y_x')^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y_x')^2}\,dx};$$

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b y\,dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b y \cdot \sqrt{1+(y_x')^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y_x')^2}\,dx}.$$

Найти центр тяжести однородной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$



Решение. Данная однородная дуга симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому центр тяжести дуги лежит на этой прямой, т. е. $x_C = \pi a$. Для определения y_C найдем дифференциал дуги циклоиды

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt$$

вычислим интегралы

$$I_1=\int\limits_{(A)}^{(B)}\delta y\,dl=2\delta a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

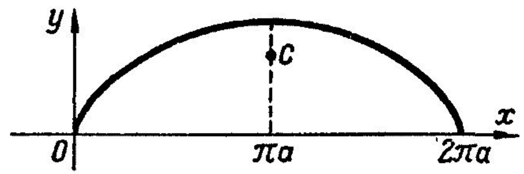
$$=2\delta a^2\left(\int\sin\frac{t}{2}dt-\int\cos t\sin\frac{t}{2}dt\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=2\delta a^2\left\{2\int\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\int\left[\sin\frac{3}{2}t+\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right]dt\right\}\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=2\delta a^2\left(-3\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{32}{3}\delta a^2.$$

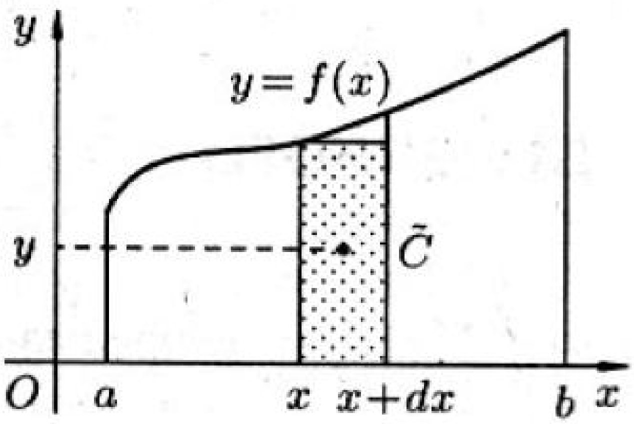
$$I_2=\int\limits_{(A)}^{(B)}\delta\,dl=2\delta a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4\delta a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8\delta a.$$

$$y_C=\frac{4}{3}a.$$



Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x) > 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$



Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна (γ = const). Тогда масса «всей пластинки равна γ S, т. е.

$$m = \gamma \int_a^b f(x)\,dx.$$

Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma y dx$.

Центр тяжести C прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка C отстоит от оси Ox на $0.5y$, а от оси Oy на x (точнее на $x+0.5\Delta x$).

Тогда для элементарных статических моментов относительно осей Ox и Oy выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma \cdot y\,dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2\,dx$$

$$dS_y = \gamma \cdot y\,dx \cdot x = \gamma x y\,dx.$$

Следовательно

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_a^b y^2\,dx,\quad S_y = \gamma \int_a^b xy\,dx.$$

По аналогии с плоской кривой, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c;\ y_c)$, получаем, что $mx_c = S_y$, $my_c = S_x$

Отсюда

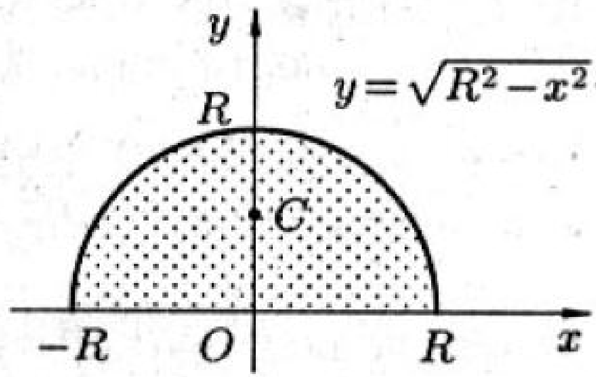
$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \text{ и } y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

$$x_c = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

Пример

Найти координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 = R^2$, $y > O$ ($\gamma = \mathrm{const}$)

Решение



Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Оу), что $x_c = 0$.
Площадь полукруга равна $\pi R^2/2$.
Находим S_x

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\, dx = \frac{1}{2}\gamma(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}) = \gamma \cdot \frac{2}{3}R^3.$$

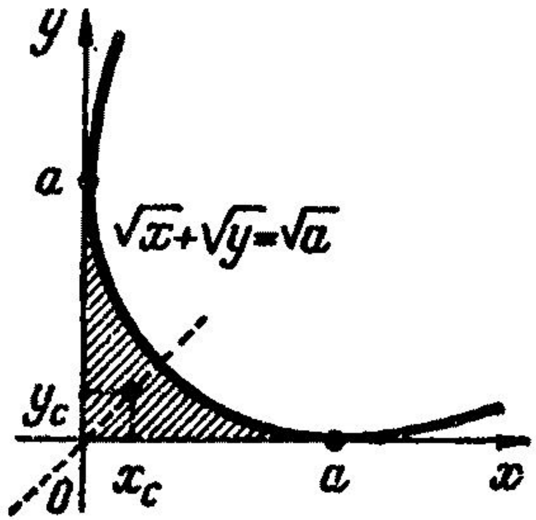
$$y_c = \frac{S_x}{\gamma S} = \frac{2\gamma R^3}{3\gamma \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Координаты центра тяжести

$$C\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$$

Найти центр тяжести однородной фигуры (пластинки), ограниченной параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Решение. Данная однородная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла поэтому $x_C = y_C$.



Вычислим интегралы:

$$I_1 = \int_a^b xy\,dx = \int_0^a x\left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx = \int_0^a \left(ax - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{4}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{30}.$$

$$I_2 = \int_a^b y\,dx = \int_0^a \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx = \int_0^a \left(a - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + x\right) dx = \frac{a^2}{6}.$$

Следовательно, $x_C = y_C = \frac{I_1}{I_2} = \frac{a}{5}$.