

Лекция 19

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (2)

Понятие первообразной

Свойства неопределенного интеграла

Табличные интегралы

Методы нахождения неопределенных интегралов

Приведение к табличному виду

Подведение под знак дифференциала

Интегрирование заменой переменной, или подстановка

Интегрирование по частям

Понятие первообразной

Основная задача интегрального исчисления - нахождение функции $y = f(x)$ по ее известной производной $y' = f'(x)$.

Определение 19.1.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке X , конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого промежутка и ее производная $F'(x) = f(x)$.

Равенство $F'(x) = f(x)$ можно записать через дифференциалы

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \text{ или } dF = f(x) \cdot dx.$$

Пример. Функция $F(x) = \frac{x^2}{2}$ является первообразной для функции $f(x) = x$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

Замечание.

Первообразная $F(x)$ имеет конечную производную. Следовательно, она является непрерывной функцией. Это следует учитывать при нахождении неопределенных интегралов в случаях, когда область интегрирования по переменной x разделяется на несколько промежутков.

Пример.

Функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}, x \leq 0 \end{cases}$$

есть первообразная для $f(x)=|x|$, $x \in R$

Теорема 19.1 (о бесконечном множестве первообразных для функции).

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X , то и функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$ на этом промежутке.

Доказательство

$$\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Таким образом, **если функция $y = f(x)$ имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных.** Между двумя различными первообразными для одной и той же функции существует тесная связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема 19.2. (об общем виде представления первообразной для функции)

Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ - две любые первообразные для функции $y = f(x)$, то их разность равна некоторой постоянной

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad C = \text{const.}$$

Доказательство

Пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ — первообразные для функции $f(x)$,

т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$, и пусть $L(x) = \Phi(x) - F(x)$.

Найдем производную функции $L(x)$:

$$L'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Это означает, что производная функции $L(x)$ равна нулю на всем промежутке

Возьмем на рассматриваемом промежутке отрезок $[a; x]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$L(x) - L(a) = L'(\xi) \cdot (x - a), \text{ где } a < \xi < x.$$

В любой точке промежутка, а значит, и в точке ξ отрезка $[a; x]$ имеем $L'(\xi) = 0$.

Отсюда следует $L(x) - L(a) = L'(\xi) \cdot (x - a) = 0$, или $L(x) = L(a)$ для любого значения x , принадлежащего промежутку

Это означает что функция $L(x) = \Phi(x) - F(x)$ постоянна на промежутке.

Обозначим $L(a) = C$.

Тогда $\Phi(x) - F(x) = L(a) = C$, что и требовалось доказать.

Эту теорему можно было сформулировать так:

Теорема 19.1a

Каждая функция, первообразная для $f(x)$, может быть представлена в виде

$$F(x) + C$$

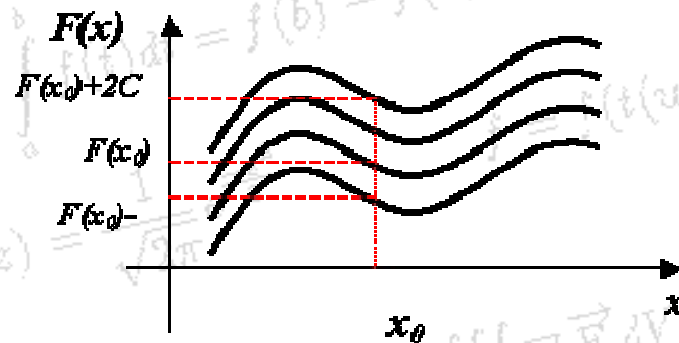
Определение 19.2.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на промежутке, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x) dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Здесь знак \int называется **знаком интеграла**,
выражение $f(x)dx$ - **подынтегральным выражением**,
сама функция $f(x)$ - **подынтегральной функцией**,
а x называется **переменной интегрирования**.



Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

По второму свойству левая часть равенства $\left(\int \alpha \cdot f(x) dx \right)' = \alpha \cdot f(x)$. По свойству производной правая часть равенства $\left(\alpha \int f(x) dx \right)' = \alpha \left(\int f(x) dx \right)' = \alpha \cdot f(x)$. Таким образом, левая и правая части равенства в четвертом свойстве равны.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

По свойству 2

$$\left(\int (f(x) \pm g(x)) dx \right)' = f(x) \pm g(x).$$

По свойству производной

$$\left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' \pm \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x).$$

Таким образом, $\int (f(x) \pm g(x)) dx$ и $\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ являются первообразными для одних и тех же функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно, **они отличаются друг от друга не более чем на некоторую постоянную величину.**

Замечание.

Равенства, описывающие свойства 4 и 5, справедливы и в том случае, если к любой части уравнения добавить константу C . Это означает, что **знак равенства при нахождении интегралов носит условный характер**: левая часть равенства равна правой части с точностью до произвольной постоянной величины.

Рассмотрим некоторые элементарные функции $F(x)$ и их производные $f(x)$. Формулу, их связывающую: $F'(x) = f(x)$ - запишем в виде $dF(x) = f(x)dx$.

По известному дифференциалу $dF(x)$ функции $F(x)$ восстановим саму функцию, пользуясь свойством 3:

$$\int dF(x) = F(x) + C = \int f(x)dx,$$

где $C - \text{const.}$

Таким путем получают основные интегралы, представленные ниже в виде таблицы

Табличные интегралы

$$\int 0 \cdot dx = C.$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C.$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ где } \alpha \neq -1, x > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad |x| \neq a$$

«высокий» логарифм

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

«длинный» логарифм

Замечание

Не все интегралы можно свести к табличным. Если операция дифференцирования элементарных функций всегда приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования непрерывных функций может привести к таким функциям, которые не выражаются через элементарные.

У каких функций имеются первообразные?

Теорема

Любая функция, непрерывная на промежутке, имеет первообразную.

Обсудить доказательство этого утверждения можно будет только после того, как появится понятие определенного интеграла. Далеко не у каждой элементарной функции имеется первообразная, выражающаяся элементарной функцией. Например, функция e^{-x^2} непрерывная, следовательно, имеет первообразную (интеграл Пуассона), но первообразная не является элементарной функцией (а значит ее невозможно записать с помощью известных функций). В некоторых случаях неэлементарные первообразные получили специальные обозначения и названия. Так,

первообразная для функции $\frac{\sin x}{x}$, $x > 0$, обозначается $\text{Si}(x)$ и называется синус интегральный.

Замечание

Операция сведения интегралов к табличным может быть достаточно сложной как с идейной, так и с технической точек зрения. Существует огромное количество различных методов, позволяющих это сделать.

Примеры вычислений связанных с неопределенным интегралом

Пример 1.

Найти уравнение кривой, угловой коэффициент которой в точке (x,y) равен $k = 2 - \frac{x}{2}$, если известно, что она проходит через точку $(2,3)$.

Решение.

Если $y=y(x)$ – уравнение искомой кривой, то угловой коэффициент в точке x равен $k = \frac{dy}{dx}$.

Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = \int \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = 2x - \frac{x^2}{4} + c$$

Кроме того, по условию задачи:

$$y(2) = 3 \Rightarrow 3 = 4 - 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Следовательно } y = 2x - x^2/4$$

Замечание.

Рассмотренный пример показывает, что неопределенная константа c может быть вычислена, если задано значение первообразной в некоторой точке x .

Пример.

Скорость химической реакции пропорциональна количеству вещества, вступившего в реакцию. Найти функцию $m(t)$, где t – время, а $m(t)$ – количество вещества, вступившего в реакцию в момент времени t , если задано:

$$m(0)=m_0 \text{ и } m(1)=m_1.$$

Решение:

По условию задачи:

$$\frac{dm}{dt} = -km, \text{ где } k > 0 \text{ — некоторая константа.}$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{dm}{m} = -k dt \text{ или}$$

$$d(\ln(m)) = -k dt \Rightarrow \int d(\ln m) = -k \int dt \Rightarrow \ln m = kt + c \Rightarrow m(t) = e^{-kt+c}$$

Используя условия: $m(0)=m_0$ и $m(1)=m_1$, получим равенство:

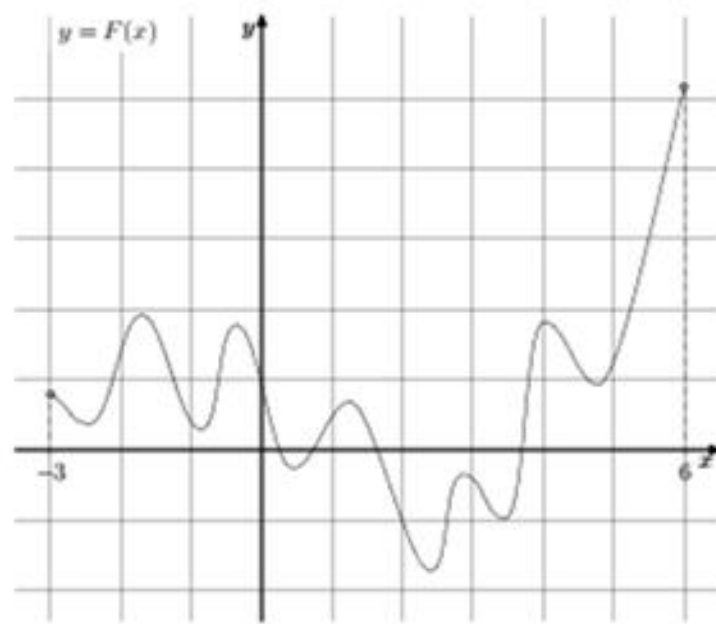
$$m_0 = e^c \text{ и } m_1 = e^{-k+c} = m_0 e^{-k}.$$

Следовательно, окончательно получаем:

$$m(t) = m_0 \cdot m_1^{-t}.$$

Задача

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ - одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Приведение к табличному виду (непосредственное интегрирование)

С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример Найти $\int (ax^2 + bx + c)dx$

Решение.

$$\int (ax^2 + bx + c)dx = \int ax^2 dx + \int bxdx + \int cdx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$$

Пример Найти $\int 2^{3x-1} dx$

Решение.

$$\int 2^{3x-1} dx = \int \frac{8^x}{2} dx = \frac{2^{3x}}{6 \ln 2} + C$$

Подведение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина dx означает, что берется дифференциал от переменной x .

Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла.

Для этого воспользуемся формулой $y'(x)dx = dy(x)$. Если нужная функция $y(x)$ отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

Пример.

$$dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x+3)$$

Решение.

$$dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x) = \frac{1}{2} \cdot d(2x+3)$$

Пример. Внести переменную x под знак дифференциала

Решение. Если перед дифференциалом dx стоит переменная x , то легко получить под знаком дифференциала функцию x^2 :

$$x \cdot dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot d(x^2)$$

Пример. Внести функцию $\cos 2x$ под знак дифференциала

Решение. $\cos 2x \cdot dx = \cos 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) = \frac{1}{2} \cdot d(\sin 2x)$

Теорема 19.1

Справедливо равенство

$$\int f(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx = \int f(y(x)) \cdot dy(x)$$

Доказательство

Находим производные интегралов, стоящих в его левой и правой частях.

Производная по x от левого интеграла равна

$$\left(\int f(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx \right)'_x = f(y(x)) \cdot y'(x).$$

Производная по x от правого интеграла находится как производная сложной функции

$$\left(\int f(y(x)) \cdot dy(x) \right)'_x = (F(y(x)) + C)'_x = F'(y(x)) \cdot y'(x) = f(y(x)) \cdot y'(x)$$

Правые части последних двух равенств одинаковы, следовательно, исходное равенство верно с точностью до константы

Пример. Найти $\int \frac{dx}{3-5x}$

Решение.
$$\int \frac{dx}{3-5x} = \int \frac{-5}{3-5x} d(-5x) = -\frac{1}{5} \int \frac{d(3-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5} \ln|3-5x| + C$$

Пример. Найти $\int x e^{x^2} dx$

Решение. $\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx =$$

$$\left\{ t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx; \right\} =$$

$$-\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Интегрирование заменой переменной, или подстановка

Теорема 19.2

Пусть $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, а между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие.

Тогда справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Доказательство

Отметим, что

$$dx = \varphi'(t)dt$$

Берем производные от обеих частей равенства

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x)$$

Производную по x от правого интеграла находим по правилу дифференцирования сложной функции с промежуточным аргументом t .

Учитывая, что производная обратной функции равна

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}, \text{ получим}$$

$$\left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_x = \left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot t'_x = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$$

Так как производные интегралов равны, то эти интегралы определяют одно и то же семейство первообразных

Таким образом для неопределенного интеграла имеет место **инвариантность формулы интегрирования**

Если

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

то

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

для любой функции $u = \varphi(x)$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{1-2x}$

Решение. Положим $t = 1-2x$,

откуда $x = 0,5 - 0,5t$,

т.е. вводится функция $x = \varphi(t)$, имеющая непрерывную производную и однозначно связывающая переменные x и t .

Находим $dx = -0,5dt$.

Подставляем это в интеграл

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{-0,5dt}{t} = -0,5 \int \frac{dt}{t} = -0,5 \ln|t| + C = -0,5 \ln|1-2x| + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема 19.3

Для функции $u(x)$ и $v(x)$ имеющих непрерывные производные справедлива формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$

Тогда, по правилу дифференцирования произведения, будем иметь

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

Отсюда, используя $v'(x)dx = dv$ и $u'(x)dx = du$, получим

$$\int (u(x)v(x))' dx = uv$$

$$\int (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = \int u dv + \int v du$$

Таким образом

$$\int u dv + \int v du = uv$$

Окончательно

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Интегрирование по этой формуле называется **интегрированием по частям**

Замечание 1. При нахождении функции v по ее дифференциалу dv можно брать любое значение постоянной интегрирования C , так как она в конечный результат не входит (для проверки этого достаточно в последнюю формулу подставить $v+C$ вместо v).

Поэтому для удобства следует брать $C=0$.

Замечание 2. Использование формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда **дифференцирование упрощает один из сомножителей**, в то время как **интегрирование не усложняет другой**.

Основные случаи, когда применяется данный способ интегрирования:

- 1) подынтегральная функция содержит
 - произведение многочлена от x на показательную функцию от x ;
 - произведение многочлена от x на $\sin(x)$ или $\cos(x)$;
 - произведение многочлена от x на $\ln(x)$;
- 2) подынтегральная функция представляет собой одну из обратных тригонометрических функций $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ и т.д.;
- 3) подынтегральная функция есть произведение показательной функции на $\sin(x)$ или $\cos(x)$.

$$\int x^n \cdot \begin{vmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{vmatrix} dx = \begin{vmatrix} u = x^n, du = nx^{n-1} \\ dv = \begin{vmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{vmatrix} dx, v = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} e^{ax} \\ -\cos ax \\ \sin ax \end{vmatrix} \end{vmatrix}, n = 1, 2, \dots$$

Здесь после применения формулы интегрирования по частям показатель степени у множителя x^n уменьшается на единицу, а после n — кратного применения формулы этот множитель исчезает.

$$\int x^a \cdot \begin{vmatrix} \ln^n x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{vmatrix} dx = \begin{vmatrix} \ln^n x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{vmatrix}, du = \begin{vmatrix} \frac{n \ln^{n-1} x}{x} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} dx, n = 1, 2, \dots; a \geq 0.$$

$$dv = x^a dx, v = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

В этом случае после интегрирования по частям исчезают "плохие" функции – логарифм, арксинус, арктангенс. Точно так же интегрируются арккосинус и арккотангенс.

Замечание 3. При интегрировании по частям удобно использовать определенную форму записи, позволяющую избежать ошибок подстановки типа «берем не то и подставляем не туда».

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пример. Найти интеграл $\int x \cdot \cos x dx$

Решение. Здесь следует ввести $u(x) = x$ и $dv = \cos x dx = d(\sin x)$.

Тогда

$$\int x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \cos x dx, \end{array} \right. \begin{array}{l} du = dx, \\ v = \sin x \end{array} \Bigg\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$uv = x \sin x \quad \int v du = \int \sin x dx.$$

Замечание 4. К нахождению интеграла $\int v du$ в правой части формулы можно снова применять интегрирование по частям.

Пример. Найти $\int x^2 e^x dx$.

Решение. $\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$

Последний интеграл возьмем тем же методом:

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

Окончательно получим

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Циклическое интегрирование

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = \\ &= e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x + \\ &+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx\end{aligned}$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

И окончательно получим

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Еще пример нахождения неопределенного интеграла приведением к табличным.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx =$$

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2} \sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$