Лекция 21

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (4)

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

Понижение порядка

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

R –некоторая рациональная функция от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки.

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$$

Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctgt; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}; \qquad t=tg\frac{x}{2} \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2-16} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{tg\frac{x}{2}+1}{4} + C.$$

Достоинства подстановки.

С ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл.

Недостатки

При преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Интеграл вида $\int R(\sin\ x, \cos\ x)dx$ *(функция R является нечетной относительно* cos*x)*.

$$R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x),$$

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку ***t = sinx*.**

Пример.

$$\int\frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{aligned}&\sin x=t\\&dt=\cos x dx\\&\cos^2 x=1-\sin^2 x\end{aligned}\right\}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+$$

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Замечание

Для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если функция R является нечетной относительно sinx*

$$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x),$$

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка ***t = cosx.***

Пример.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2} \right] dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2} \right] dt = \int t dt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} - 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \qquad = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

функция R четная относительно sinx и cosx.

$$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x).$$

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка ***t = tgx.***

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$$

Пример.

$$I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

$$x=\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\quad \text{и}\quad \sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$I=\int\frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})}=\int\frac{dt}{2t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \left\{\begin{aligned} & tgx = t; \\ & \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{aligned}\right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx+3-5}{tgx+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx\,dx = \int \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3. Формулы понижения порядка если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

Например,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

4) подстановка tgx = t, если $m + n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример.

$$I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \, dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x \, dx.$$

$$m + n = -4. \qquad \operatorname{tg} x = t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\, dt = \int t^{-3}\, dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример.

$$\int \cos(\ln x)dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & du = \dfrac{1}{x}dx; \\ x = e^u; & dx = e^u du; \end{Bmatrix} = \int e^u \cos u du$$

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + C$$

$$\int x \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C;$$