Лекция 23

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Площадь криволинейной трапеции (*геометрический смысл определенного интеграла)***

**Работа переменной силы *(физический смысл определенного интеграла)***

**Необходимое и достаточное условия интегрируемости**

**Свойства определенного интеграла**

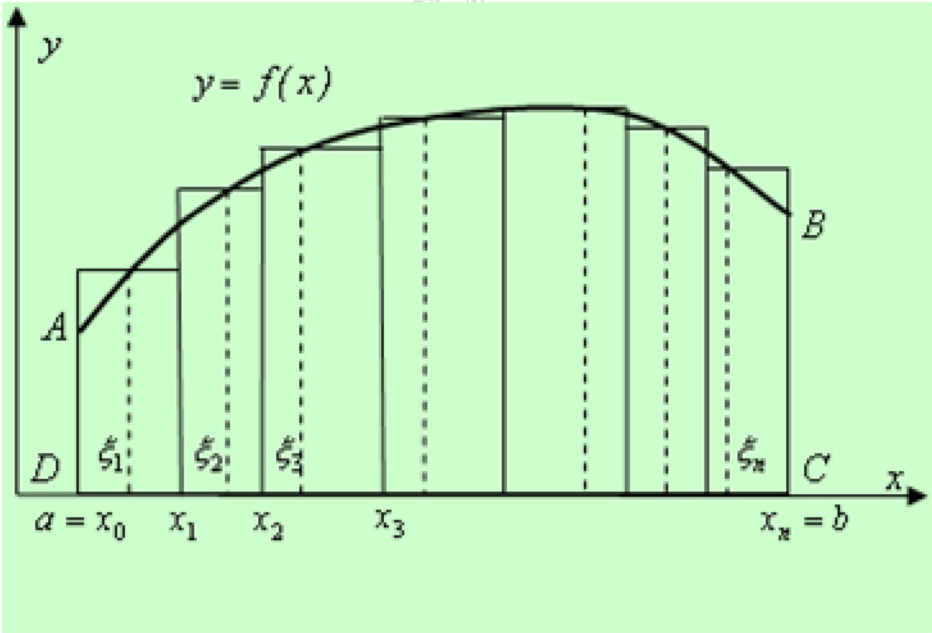
**Интеграл с переменным верхним пределом**

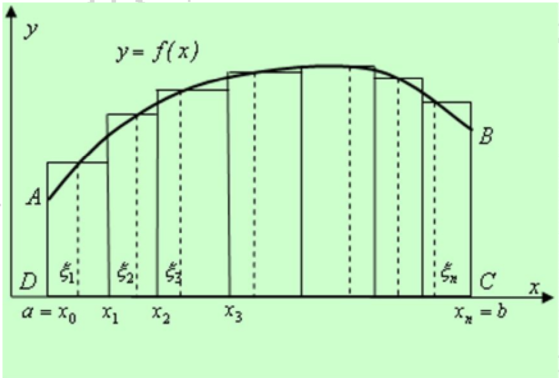
**Теорема существования первообразной**

## *Площадь криволинейной трапеции*

К понятию определенного интеграла приводит задача отыскания площади криволинейной трапеции.

Фигуру, ограниченную графиком положительно определенной функции y=f(x), вертикальными прямыми $x = a$, x = b и осью $OX$ назовем криволинейной трапецией






Для нахождения площади плоской фигуры ABCD разобьем отрезок $[a,b]$ на $n$ частей точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ возьмем по одной произвольной точке $\xi_k$ и построим прямоугольник с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой, равной $f(\xi_k)$.

Площадь этого прямоугольника будет равна $\Delta S = f(\xi_k)\Delta x_k$.

Таких прямоугольников, покрывающих площадь криволинейной трапеции, будет *n* штук.

В результате такого построения получим «ступенчатую» фигуру, площадь которой будет равна

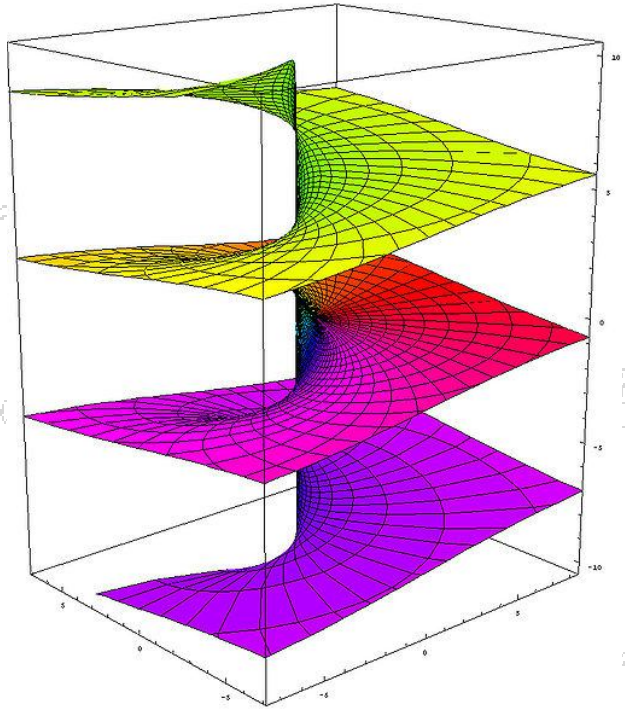
$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Величина $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ называется ***интегральной суммой Римана.***

**Бернхард Риман** Bernhard Riemann

17 сентября 1826 20 июля 1866 (39 лет)

«О гипотезах, лежащих в основании геометрии». 1854



Риманова поверхность (комплексный логарифм)

# Треугольники в неевклидовых пространствах

- Так выглядит треугольник на плоскости ***(геометрия Евклида).***

Сумма углов равна 180 °.

- Так выглядит треугольник на сфере (***геометрия Римана).***

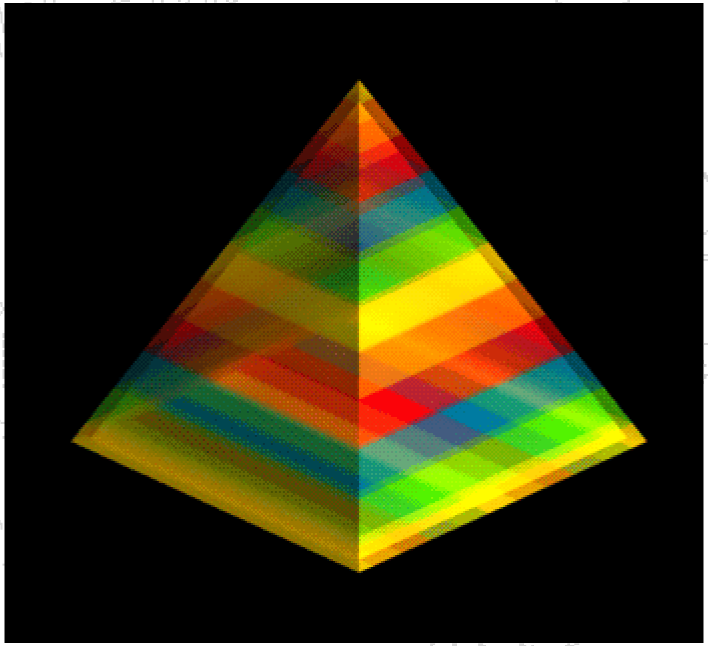
Сумма углов больше 180 °.

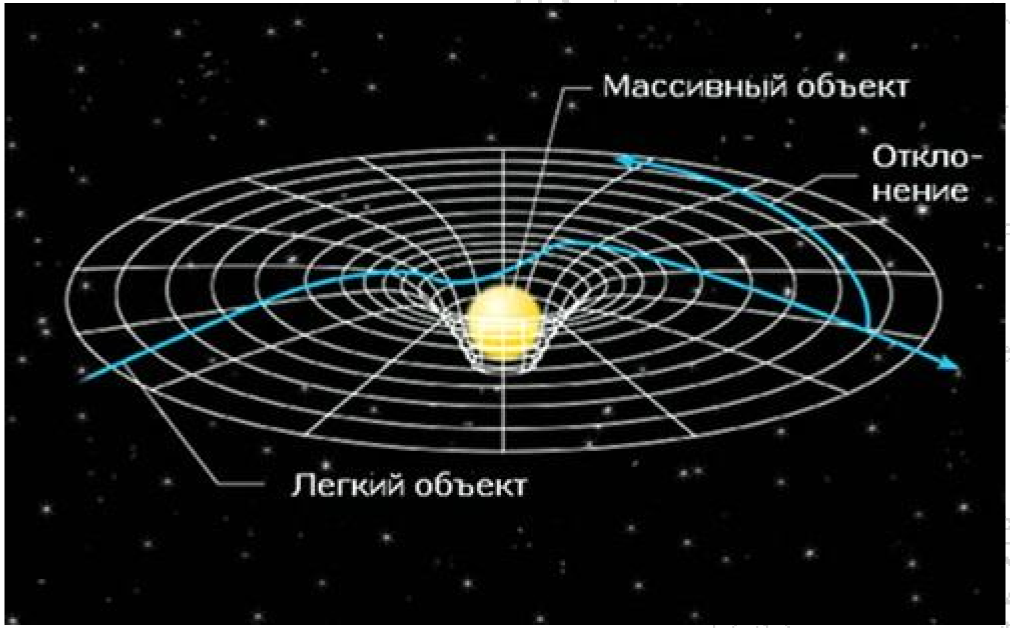
- Так выглядит треугольник на гиперболе (***геометрия Лобачевского).***

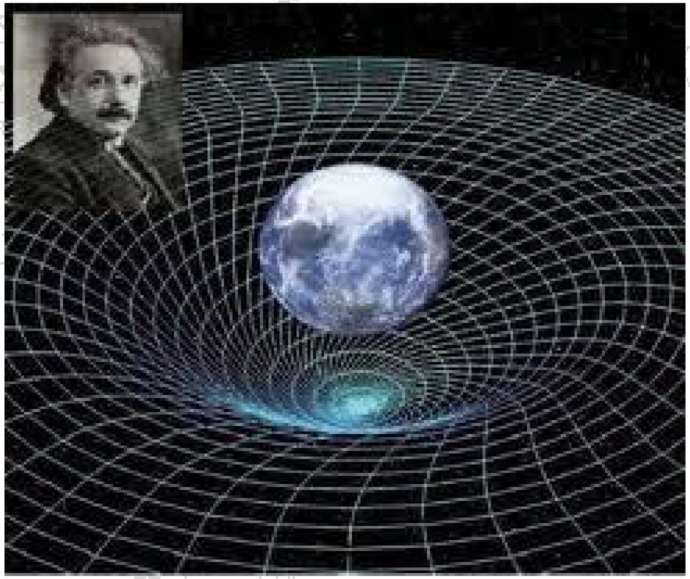
Сумма углов меньше 180 °.

MyShared

В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше 180. В геометрии Эвклида она всегда равна 180 . В геометрии Римана сумма углов треугольника всегда больше 180.

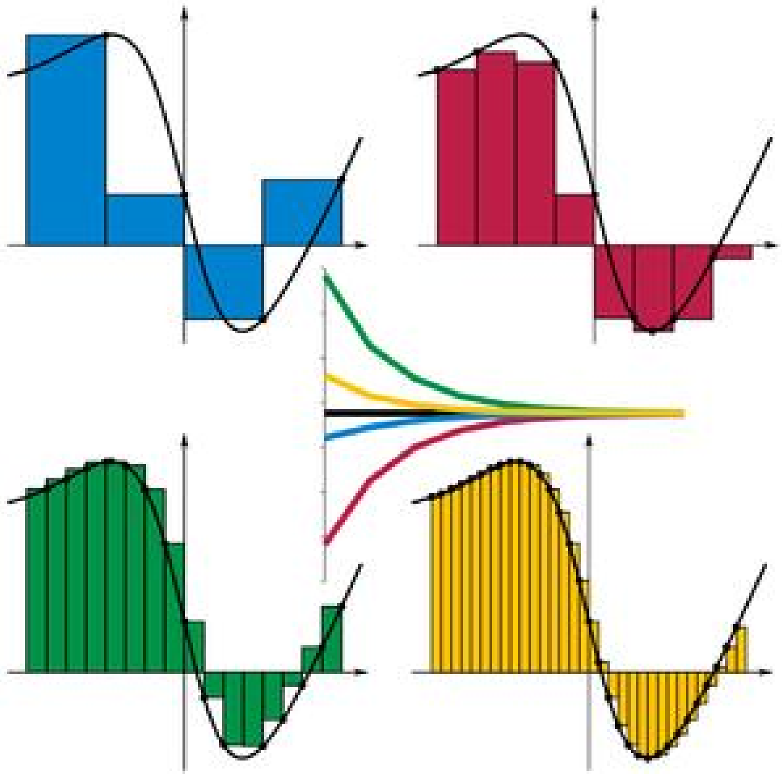


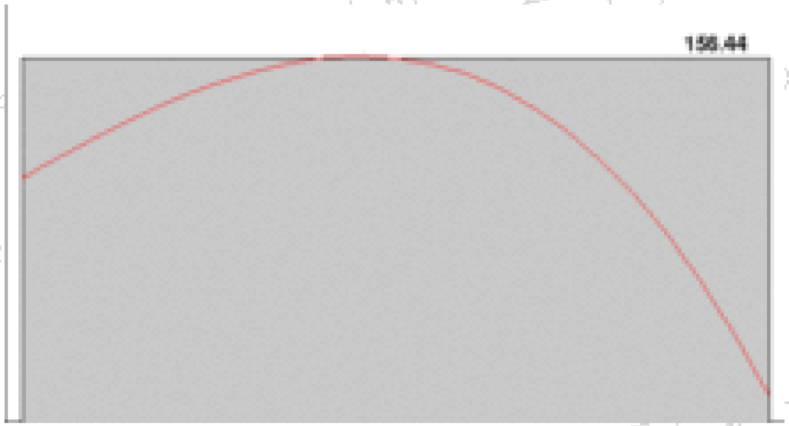

Массивный объект
Откло-
нение
Легкий объект



Будем теперь увеличивать число $n$ делений отрезка $[a,b]$.

Тогда «ступенчатая» фигура будет все меньше отклоняться от криволинейной трапеции ABCD




158.44

Введем $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ - длину наибольшего из рассматриваемых частичных отрезков.

При $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$ число частичных отрезков будет неограниченно увеличиваться, а их длины будут стремиться к нулю.

Пусть предел интегральной суммы при $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$ существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка *[a,b]*, ни от выбора точек $\xi_k$, тогда он принимается за площадь криволинейной трапеции ABCD и называется ***определенным интегралом или интегралом Римана,*** т. е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1\le k\le n}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1\le k\le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Функцию *f* при этом называют ***интегрируемой по Риману*** на отрезке *[a.b]*.

Числа *a* и *b* называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интеграла***;

***x называется переменной интегрирования,***

***f(x) - подынтегральной функцией,***

***f(x)dx – подынтегральным выражением.***

## Дарбу Жан Гастон

- Дарбу Жан Гастон (13.8.1842, Ним, — 23.2.1917, Париж), французский математик. Основные труды посвящены проблемам дифференциальной геометрии (теория поверхностей, теория криволинейных координат).Геометрические исследования привели Д. к рассмотрению различных вопросов интегрирования дифференциальных уравнений. Из работ, относящихся к др. областям математики, важны мемуары по теории интегрирования, теории аналитических функций, а также исследования по вопросу о разложении функций по ортогональным функциям, в частности полиномам Якоби. В механике плодотворно занимался различными вопросами кинематики, равновесия, малых колебаний системы точек и др.

# Суммы Дарбу

Разбиение отрезка $\tau' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_p\}$ называется последующим по отношению к $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, обозначение $\tau < \tau'$, если точки разбиения $\tau$ содержатся среди точек разбиения $\tau'$.

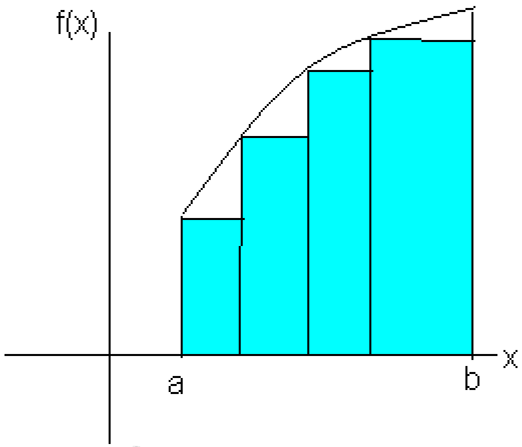
Особые разбиения *Дарбу* $\overline{\tau}$ *и* $\underline{\tau}$ :

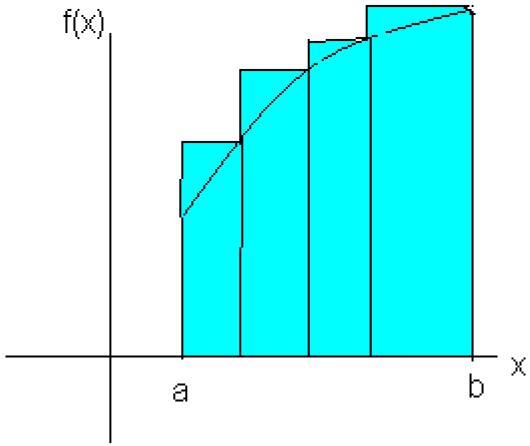
$$f(\overline{\xi}_i) = \max_{x\in[x_i;x_{i+1}]} f(x), \quad f(\underline{\xi}_i) = \min_{x\in[x_i;x_{i+1}]} f(x)$$

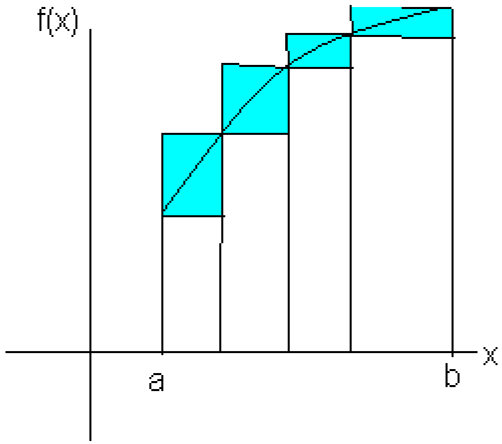
Верхняя сумма Дарбу : $\overline{S_\tau} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\xi}_i)\Delta x_i$

Нижняя сумма Дарбу : $\underline{S_\tau} = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta x_i 0$

# Геометрический смысл разбиений Дарбу



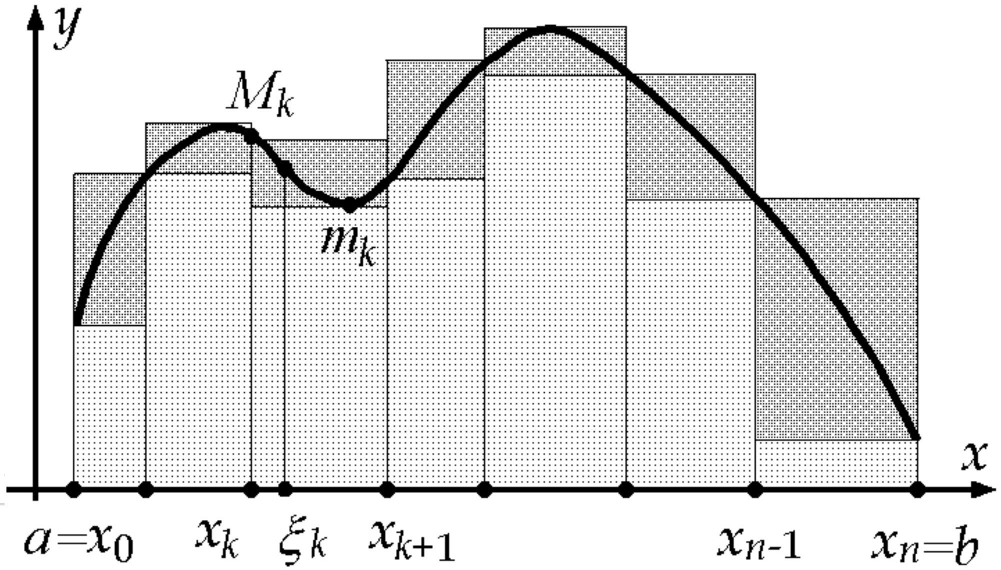



Верхняя сумма Дарбу есть

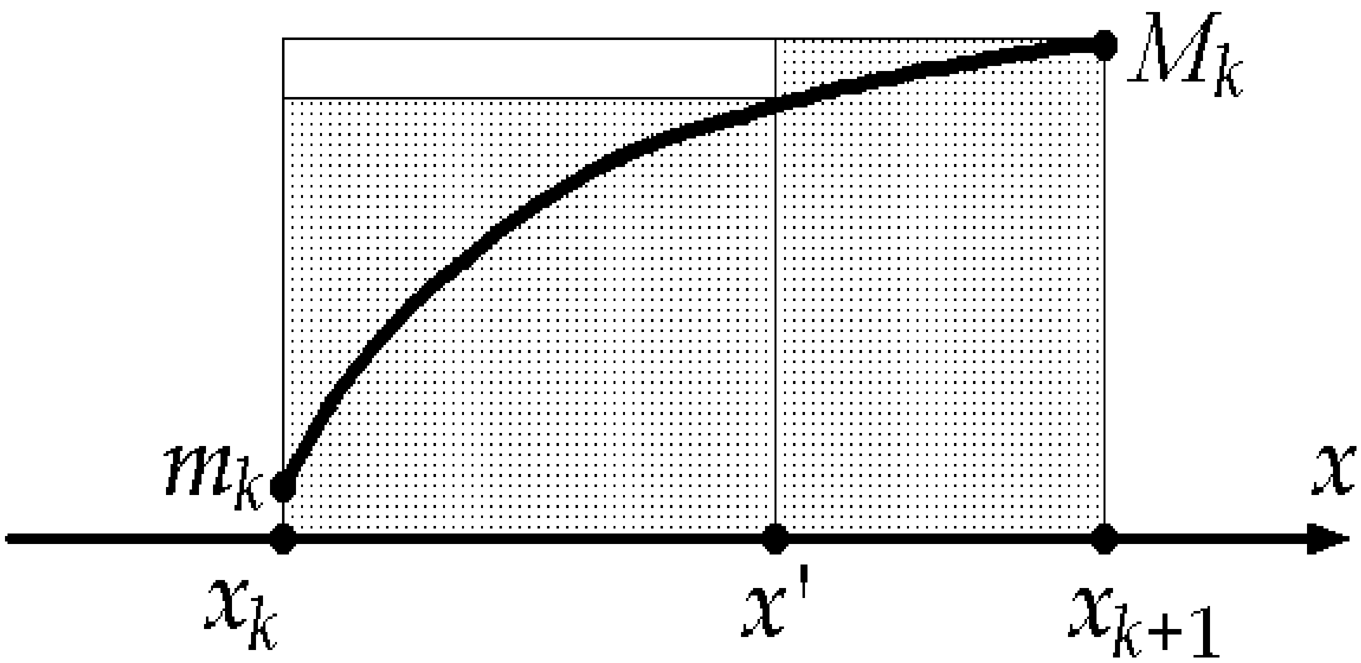
$$S(T)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

Нижняя сумма Дарбу есть

$$s(T)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$



При добавлении к разбиению дополнительных точек разбиения верхняя сумма Дарбу может только лишь уменьшиться, а нижняя сумма Дарбу - только лишь увеличиться.



# Свойства сумм Дарбу

$\exists \lim\limits_{d(\tau)\to 0} \underline{S}_\tau = \underline{I}$ – нижний интеграл Римана

$\exists \lim\limits_{d(\tau)\to 0} \overline{S}_\tau = \overline{I}$ – верхний интеграл Римана

$\underline{I} \le \overline{I}$

$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau \le \omega(d(\tau)) \cdot (b-a),$

$где\ \omega(\delta) = \max\limits_{|x'-x''|\le\delta} |f(x') - f(x'')|$ – колебание функции

Def. Функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$, если $\underline{I} = \overline{I}$.

**Замечание.**

Поскольку дальше мы будем иметь дело лишь с определенным интегралом Римана то будем называть его просто ***определенным интегралом,*** а функцию, интегрируемую по **Риману,** - просто ***интегрируемой функцией,***

Итак, ***определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции***.
В этом состоит **геометрический смысл определенного интеграла**.

## *Работа переменной силы*

Пусть материальная точка М перемещается под действием силы *F*, направленной вдоль оси *Ox* и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где *x* — абсцисса движущейся точки М.

Найдем работу *A* силы *F* по перемещению точки *M* вдоль оси *Ox* из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$.

Для этого отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ разобьем на *n* частичных отрезков $[x_{i-1};x_i]$.

Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, меняется от точки к точке. Но если длина отрезка достаточно мала, то сила *F* на этом отрезке изменяется незначительно. Ее можно приближенно считать постоянной н равной значению функции $F = F(x)$ в произвольно выбранной точке $x = c_i \in [x_{i-1};x_i]$, Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, равна произведению $F(c_i) \bullet \Delta x_i$. (как работа постоянной силы )

$$A_{\text{n}} = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

Итак, ***работа переменной силы F, величина которой есть непрерывная функция F = F(x), действующей на отрезке [a; b], равна определенному интегралу от величины F(x) силы, взятому по отрезку [a; b].***
В этом состоит **физический смысл определенного интеграла.**

**Замечание.** Возникает закономерный вопрос - почему предел интегральной суммы записывается как $\lim\limits_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0}} S_n$, а не в привычном нам виде $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ?

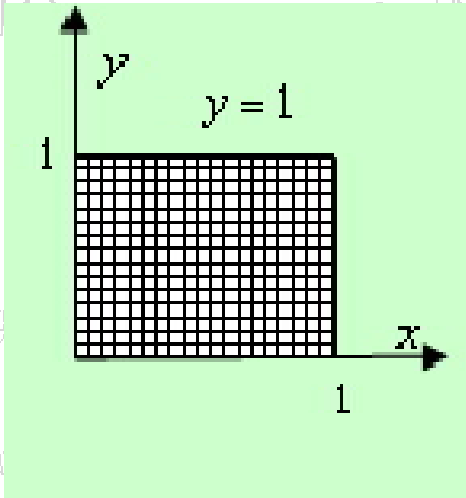
Условие $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$ означает, что ***ни один из промежутков*** не исключается из рассмотрения.

Запись $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ допускает изъятие одного или нескольких промежутков при неограниченном делении остальных.

**Замечание.**

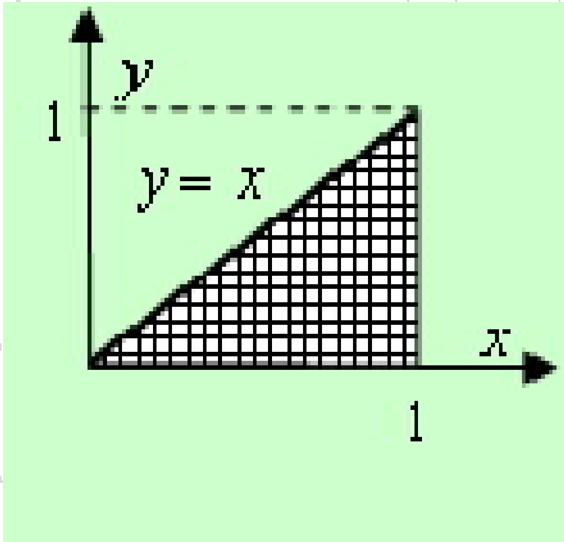
Введенное понятие определенного интеграла дает возможность в некоторых случаях узнать, чему он равен, хотя мы пока не знаем, как его вычислить в общем случае.

**Пример .**




$\int_0^1 1\cdot dx=1$, так как площадь, ограниченная прямой $y=1$, вертикальными прямыми $x=0$ и $x=1$ и осью $OX$ (площадь прямоугольника) равна 1

**Пример**




$\int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}$. Интеграл есть площадь под прямой $y=x$

**Замечание .**

Определенный и неопределенный интегралы – это разные понятия. **Неопределенный интеграл есть семейство функций, а определенный интеграл есть число**.

## Необходимое условие интегрируемости

**Теорема 23.1**. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

**Доказательство**

Пусть функция $f$ неограничена на отрезке *[a,b]*. Для произвольного разбиения отрезка представим сумму Римана интегрируемой функции $f$ в виде

$$S_m = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i \neq k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$S_m = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i \neq k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Здесь $[x_{k-1}, x_k]$ - такой отрезок разбиения $\tau$, на котором $f$ неограничена. Выберем каким-либо образом все отмеченные точки $\xi_i$, кроме одной из них с номером *к*.

Тогда правую часть суммы можно сделать сколь угодно большой по модулю за счет выбора $\xi_k$. Следовательно, при любом разбиении сумма Римана может быть по модулю сколь угодно большой при соответствующем выборе отмеченных точек.

Это противоречит существованию (конечного) предела суммы Римана.

Следовательно, функция $f$ не интегрируема на $[a, b]$.

Условие ограниченности функции, являясь необходимым для интегрируемости функции, не является достаточным, в чем можно убедиться на примере функции Дирихле:

$$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Для этой функции и произвольного разбиения $S_m(f) = 1$, если все отмеченные точки рациональны, $S_m(f) = 0$, если все отмеченные точки иррациональны.

## Достаточное условие интегрируемости

### Определение

Функция $f(x)$ называется ***кусочно непрерывной*** на $[a, b]$, если существует разбиение $\{a_i\}$, такое, что при любом $i = 1, .... m$:

- функция $f$ непрерывна на $(a_{i-1}, a_i)$;
- существуют конечные пределы $f(a_{i-1}+0),\ f(a_i-0)$

Или, другими словами,

если функция ограничена на $[a,b]$ и имеет конечное число точек разрыва

### Теорема 23.2.

Кусочно непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

## *Свойства определенного интеграла*

**1)** Если поменять местами пределы интегрирования, интеграл поменяет знак.

Действительно, если построить интегральную сумму так, что $b<a$, т.е. все $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < 0$, тогда $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

**2)** Интеграл, пределы интегрирования которого равны, равен нулю.

Если $a=b$, то $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$, откуда следует $\int_a^a f(x)dx = 0$

**3)** Определенный интеграл зависит только от величины нижнего и верхнего пределов интегрирования и от вида подынтегральной функции, он не зависит от переменной интегрирования. Поэтому величина определенного интеграла не изменится, если переменную $x$ заменить любой другой переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

Это следует из того, что интегральная сумма Римана, а следовательно, и ее предел не зависят от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции

**4)** Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$\alpha \int_a^b f(x)dx$$

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Для доказательства следует обратиться к пределу интегральной суммы двух функций и воспользоваться тем, что предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций.

**6)** Для любых чисел *a, b, c* имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть $a<c<b$. Отрезок $[a;b]$ разобьем на два отрезка $[a;c]$ и $[c;b]$ и составим интегральные суммы на каждом отрезке.

Пределы этих интегральных сумм и будут определенными интегралами на каждом таком отрезке, а их сумма есть определенный интеграл на отрезке $[a;b]$.

б) $a<b<c$. Из пункта а) следует

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

откуда находим, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \; .$$

7) Если $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$,

т.е. неравенство можно интегрировать.

Это следует из того, что справедливо неравенство

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

**8)** Если функция $y = f(x)$ непрерывна и ограничена на отрезке $[a;b]$, т.е. $m \le f(x) \le M$, то

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

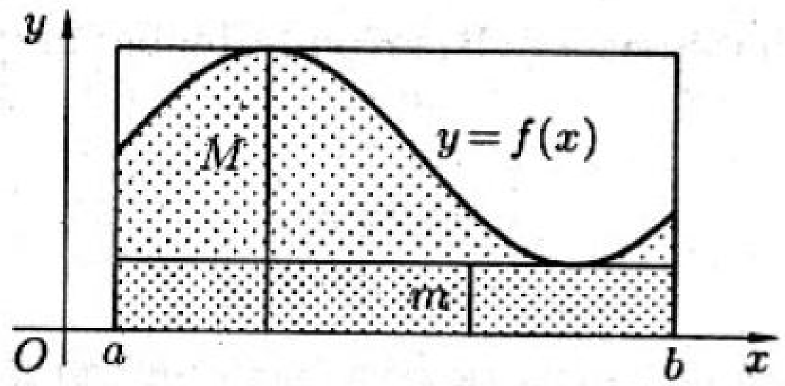
Поскольку $m \le f(x) \le M$, то по свойству **7)** получим

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

Левый и правый интегралы легко берутся.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

откуда $$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$



**9)** Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx; \quad a < b.$$

Применяя свойство **7** к очевидным неравенствам

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

получаем

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Отсюда

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

**9)Теорема о среднем**. Для непрерывной на $[a;b]$ функции существует $x_0$ $(a \le x_0 \le b)$, такое что

$$f(x_0)\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

В силу непрерывности функция $y=f(x)$ принимает все промежуточные значения, заключенные между $m$ и $M$.

Поэтому по второй теореме Больцано-Коши (лекция 5) найдется такое число $x_0$ $(a \le x_0 \le b)$, что

$$f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Это значение функции называется ***средним значением*** на отрезке $[a;b]$.

Последнее выражение можно переписать в виде: $f(x_0)\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)dx$