Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. М. ИВЛЕВА, Л. В. КОВАЛЕВСКАЯ,
И. Д. ЧЕРНЫХ

ГОТОВИМСЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

2-е издание

НОВОСИБИРСК
2015

УДК 512.64(075.8)
И 255

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор *А.В. Чехонадских*,
доцент *Э.Б. Шварц*

Работа подготовлена на кафедре алгебры и математической логики для студентов I курса всех факультетов

Ивлева А.М.

И 255 Готовимся к контрольной работе : учеб. пособие / А. М. Ивлева, Л. В. Ковалевская, И. Д. Черных. – 2-е изд. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015. – 172 с.

ISBN 978-5-7782-2788-0

В пособии приводятся очень подробные решения наиболее типичных задач по линейной алгебре, предлагаемых в аудиторных контрольных работах и типовых расчетах.

УДК 512.64(075.8)

ISBN 978-5-7782-2788-0

Ивлева Ася Михайловна
Ковалевская Людмила Викторовна
Черных Илья Дмитриевич

ГОТОВИМСЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Учебное пособие

2-е издание

Редактор *И.Л. Кескевич*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 13.11.2015. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 9,99. Печ. л. 10,75. Изд. № 260. Заказ № 1584. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

Предисловие

Цель данного пособия в точности та, которая обозначена в названии — помочь студенту подготовиться к аудиторной контрольной работе. Тот минимум определений и теории, который содержится в пособии, не претендует ни на полноту, ни на строгость. Предполагается, что теоретические сведения в необходимом объеме получены из лекций и других книг, т. е. одного этого пособия для изучения линейной алгебры и аналитической геометрии ни в коей мере не достаточно. Пособие служит только дополнением ко всему остальному.

Здесь приведены решения самых типичных задач, содержащихся в заданиях для аудиторных контрольных работ. Второе издание дополнено задачами из типового расчета. Решения снабжены весьма подробными объяснениями. Для закрепления навыков даны задачи для самостоятельного решения.

По замыслу авторов, пособие должно помочь старательному студенту благополучно пройти все предусмотренные контрольные мероприятия и оказаться допущенным к экзамену по линейной алгебре.

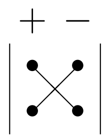
Глава 1

Определители

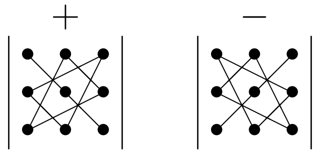
Не давая строгого определения определителя, напомним, что определитель — это число, которое ставится в соответствие квадратной таблице чисел (квадратной матрице). Что это число определяет — поймем несколько позже. А пока научимся его находить. Поскольку речь идет о таблице чисел, их удобно нумеровать двумя индексами: первый обозначает строку, в которой стоит число, второй — столбец. Место в i-й строке и j-м столбце будем обозначать (ij). Самая маленькая квадратная таблица имеет размер 1×1 и обозначается так: (a_{11}). Определитель принято обозначать либо вертикальными прямыми с обеих сторон, либо буквами det, либо значком $\triangle$ (дельта).Для определителей малых порядков существуют простые правила нахождения, а именно:

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \text{(не путать с модулем!)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{или}$$



Для определителя третьего порядка так называемое правило треугольника удобнее нарисовать:



Первые три произведения берем с плюсом, вторые три — с минусом, т. е. с плюсом берем произведения чисел, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, а с минусом — то же самое, только с побочной диагональю.

Можно определитель третьего порядка вычислить иначе, используя методику “выпрямления треугольников”, которая заключается в следующем. К определителю справа приписываются первые два столбца вот так:

$$\begin{array}{c} \qquad + \qquad\qquad\qquad - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \end{array}$$

и произведение элементов главной диагонали, а также произведения, стоящие на линиях параллельных ей, берутся со своим знаком, а произведения элементов побочной диагонали и стоящих на линиях, параллельных побочной диагонали, берутся с противоположным знаком. Убедитесь, что произведения получаются те же самые, что и при расчете по треугольникам.

Замечание. Правило треугольника используется только для вычисления определителей третьего порядка. Его нельзя применять для определителей четвертого, пятого и других порядков, что часто делают студенты.

Что касается определителей более высоких порядков, то их находят, пользуясь свойствами определителей. Чтобы сформулировать основное свойство, нам понадобятся два определения.

Определение. ***Минором*** M_{ij} определителя n-го порядка $(n > 1)$ называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минором M_{32} определителя третьего порядка

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

будет определитель второго порядка $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, полученный вычеркиванием третьей строки и второго столбца.

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} в определителе n-го порядка называется

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \text{ где } M_{ij}\text{— минор,}$$

то есть алгебраическое дополнение отличается от минора либо знаком, если место $(i\ j)$ нечетное (то есть $(i+j)$ — нечетное число), либо совпадает с минором, если место $(i\ j)$ четное.

Теорема (о разложении определителя по строке или столбцу). *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

$$\triangle = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{1}$$

Эта формула позволяет определитель порядка n выражать через определители порядка $(n-1)$. Значит, определитель четвертого порядка мы можем найти, так как мы умеем находить определители третьего порядка. Ну, а если в определителе есть строка или столбец, состоящие из нулей, то из формулы (1) следует, что тогда определитель равен нулю. Эта же формула показывает, что вычисления значительно упростятся, если все элементы i-й строки, кроме одного, будут равны нулю. Тогда вместо n определителей $(n-1)$-го порядка нам придется считать всего один! А можем ли мы сами устроить такую ситуацию? Да, можем, применяя следующее свойство определителя.

Определитель не изменится, если к какой-либо его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на какое-либо число.

Вот теперь можно сказать, что удобнее всего находить определитель по формуле (1), «заработав» предварительно нули в какой-нибудь строке или каком-нибудь столбце. Покажем все это на примерах.

Пример 1. Найти определитель $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Вначале найдем по правилу треугольника:

$$\triangle = 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 4 + (-3)(-1)(-1) - (4\cdot 1(-1) + 2(-3)0 + 2(-1)1) =$$

$$= 16 - 3 - (-4 - 2) = 19$$

или по другой методике:

$$\triangle = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right| = 1\cdot 1\cdot 0 + (-3)(-1)(-1) + 4\cdot 2\cdot 2 -$$

$$(4\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot 2 + (-3)\cdot 2\cdot 0) = -3 + 16 - (-4-2) = 13 + 6 = 19.$$

Теперь получим то же самое разложением, например, по первой строке:

$$\triangle = 1\cdot A_{11} - 3\cdot A_{12} + 4\cdot A_{13} =$$

$$= 1(-1)^{1+1}M_{11} - 3(-1)^{1+2}M_{12} + 4(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= M_{11} + 3M_{12} + 4M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 0 - (-1)2) + 3(2\cdot 0 - (-1)(-1)) + 4(2\cdot 2 - (-1)1) = 2 - 3 + 20 = \boxed{19}$$

А теперь, сначала «заработаем» нули в какой-нибудь подходящей строке (или столбце), а потом уже разложим по этой строке (или столбцу). Что значит подходящей? Во-первых, «зарабатывать» нули удобно с помощью единицы, поэтому подходящими являются строка или столбец, содержащие единицу. Во-вторых, если нули уже где-то есть, то удобно устраивать их в той же строке или том же столбце (меньше вычислений).

Исходя из этих соображений устроим нули, например, в третьей строке. Для этого первый столбец умножим на 2 и прибавим ко второму, т. е. каждый элемент первого столбца умножим на 2 и прибавим к соответствующему элементу второго столбца. Тогда на месте (32) появится еще один ноль, и мы будем иметь в третьей строке всего один ненулевой элемент на месте (31).

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\cdot 2-3 & 4 \\ 2 & 2\cdot 2+1 & -1 \\ -1 & (-1)2+2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Разложим полученный определитель по третьей строке:

$$= (-1)(-1)^{3+1}M_{31} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(1-20) = 19.$$

Как видите, «зарабатывание» нулей — самый быстрый способ.

Пример 2. Найти определитель.

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Здесь единицы стоят в третьем столбце, и в этом же столбце — самые маленькие по абсолютной величине числа. Поэтому именно с помощью этого столбца удобно «зарабатывать» нули, например, в первой строке.

Пусть $a_{13} = 1$ — ненулевой элемент, с помощью которого получим нули в первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & \mathbf{1} & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Для получения нулей в первой строке третий столбец умножим на (-2) и прибавим к первому и четвертому, и его же умножим на 5 и прибавим ко второму.

Обратите внимание на то, что тот столбец, который мы умножаем и прибавляем к другим столбцам, не меняется и остается на своем месте, а столбцы, к которым мы прибавляем, меняются.

Полученный определитель разложим по первой строке:

$$= 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

У нас осталось такое произведение: (сам ненулевой элемент) $\times$ (минус единица в степени «место») $\times$ (то, что осталось после вычеркивания той строки и того столбца, в которых стоит этот элемент). В получившемся определителе третьего порядка уже есть 0 в третьем столбце. Можем получить еще один с помощью второй строки:

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ (-2) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Теперь разложим, например, по первой строке:

$$= (-3)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3(0 - (-3)) = -9.$$

Пример 3. Найти опеределитель

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Здесь единиц нет. Поэтому прежде всего желательно на каком-нибудь месте получить единицу. Например, из первой строки вычтем вторую, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \quad 4 \quad (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} =$$

Далее получим с помощью (-1), стоящей на месте (11), нули в первом столбце:

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

Разложим по первому столбцу:

$$= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ -13 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad =$$

$$\begin{matrix} (-2) \\ (-7) \end{matrix}$$

Получим нули в первой строке:

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 8 & 2 & -3 \\ -58 & -14 & 9 \end{vmatrix}. =$$

Разложим по первой строке:

$$= -(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -58 & -14 \end{vmatrix} = (-112 - (-116)) = 4.$$

Пример 4. Найти определитель

$$\triangle = \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Решение. Опять нет единиц, но зато все элементы первой строки делятся на 3. А по свойству определителя общий множитель элементов строки или столбца выносится за знак определителя. Поэтому имеем:

$$\triangle = 3\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 13 & 3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 13 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ -7 & -5 & 0 \\ -8 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (-3)(-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 9(42 - 40) = 18.$$

Задачи

Найти определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$

Глава 2

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Определители применяются для решения систем линейных уравнений, удовлетворяющих двум условиям:

1) система «квадратная», т. е. число неизвестных равно числу уравнений;

2) определитель системы, составленный из коэффициентов левых частей уравнений, не равен нулю.

Пусть дана система, удовлетворяющая обоим условиям.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Введем обозначения.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{— определитель системы,}$$

$$\triangle_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ — определитель,}$$

который получается из определителя системы заменой первого столбца, который составляют как раз коэффициенты, стоящие при x_1, столбцом свободных членов. Аналогично получаем

$$\triangle_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots, \quad \triangle_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & b_n \end{vmatrix}.$$

В этих обозначениях неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ находятся по ***формулам Крамера***:

$$x_1 = \frac{\triangle_{x_1}}{\triangle}, \;\; x_2 = \frac{\triangle_{x_2}}{\triangle}, \; \cdots, \; x_n = \frac{\triangle_{x_n}}{\triangle}. \tag{2}$$

Из формул (2) понятно, что для решения системы с n неизвестными нужно найти $(n+1)$ определитель n-го порядка. Из этих же формул следует, что если $\triangle = 0$, то решить систему методом Крамера невозможно. Обратите внимание на то, что отсюда не следует, что система не имеет решений.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 2y = 5. \end{cases}$

Решение. Прежде всего находим $\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$, так как $\triangle \neq 0$, находим $\triangle_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 15 = 13$, $\triangle_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9$. Теперь по формулам (2) имеем:

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{13}{-1} = -13, \;\; y = \frac{\triangle_y}{\triangle} = \frac{9}{-1} = -9.$$

Ответ: $x=-13,\ y=-9$.

Полученные ответы легко проверяются подстановкой в исходную систему. Заметим, что проверку нужно делать обязательно.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y+z-2=0\\ x+5y-4z+5=0\\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему так, чтобы свободные члены были справа:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2\\ x+5y-4z=-5\\ 4x-y-3z=-4. \end{cases}$$

Определитель системы $\triangle$ находим, получая нули в третьем столбце с помощью $a_{13}=1$:

$$\triangle=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -4\\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 9 & -7 & 0\\ 10 & -8 & 0 \end{vmatrix} =$$

разложим $\triangle$ по третьему столбцу

$$=1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & -7\\ 10 & -8 \end{vmatrix}=-72+70=-2$$

Вычислим определитель $\triangle_x$, который получается из $\triangle$, если первый столбец заменить столбцом свободных членов:

$$\triangle_x=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ -5 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 3 & -7 & 0\\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -7\\ 2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$=-24+14=-10.$

Для получения $\triangle_y$ второй столбец определителя $\triangle$ заменим столбцом свободных членов:

$$\triangle_y=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & -5 & -4\\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 9 & 3 & 0\\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 30 = -12.$$

Аналогично для $\triangle_z$ заменим третий столбец

$$\begin{array}{ccc} & (4) & \\ & (-4) & \end{array}$$

$$\triangle_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 = \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 14 & -3 & -10 \\ -19 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 14 & -10 \\ -19 & 15 \end{vmatrix} = -(210 - 190) = -20.$$

Тогда

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{-10}{-2} = 5, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad z = \frac{\triangle_z}{\triangle} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Ответ: $x = 5,\ y = 6,\ z = 10.$

В этом примере обратите внимание на то, что свободные члены в исходной системе стоят в левых частях уравнений, но, когда мы находим определители $\triangle_x,\ \triangle_y,\ \triangle_z$, мы записываем столбец свободных членов с обратными знаками, так, как если бы мы перенесли их в правую часть, поскольку формулы Крамера применяются к записи системы в виде (1) со свободными членами в правых частях уравнений.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение.

$$\triangle=\begin{vmatrix}2&2&-1&1\\4&3&-1&2\\8&5&-3&4\\3&3&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\2&1&-1&1\\2&-1&-3&1\\-1&-1&-2&0\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1&1\\2&-1&1\\-1&-1&0\end{vmatrix}\ {\scriptstyle(-1)}\ =$$

$$=-\begin{vmatrix}0&2&0\\2&-1&1\\-1&-1&0\end{vmatrix}=-(1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}=0+2=2.$$

$$\triangle_{x_1}=\begin{vmatrix}4&2&-1&1\\6&3&-1&2\\12&5&-3&4\\6&3&-2&2\end{vmatrix}=\text{из первого столбца вынесем } 2$$

$$=2\begin{vmatrix}2&2&-1&1\\3&3&-1&2\\6&5&-3&4\\3&3&-2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&-1&-3&1\\-1&-1&-2&0\end{vmatrix}=$$

$$=2(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\-1&-1&0\end{vmatrix}\ {\scriptstyle(1)}\ =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(0-1) = 2.$$

$$\triangle_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 6 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(0+1) = 2.$$

$$\triangle_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$
= 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 8 & -1 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-1) = -2.
$$

$$
\triangle_{x_4} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 8 & 5 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2(1-0) = -2.
$$

Получаем:

$$
x_1 = \frac{\triangle_{x_1}}{\triangle} = \frac{2}{2} = 1,\ x_2 = \frac{\triangle_{x_2}}{\triangle} = \frac{2}{2} = 1,
$$

$$
x_3 = \frac{\triangle_{x_3}}{\triangle} = \frac{-2}{2} = -1,\ x_4 = \frac{\triangle_{x_4}}{\triangle} = \frac{-2}{2} = -1
$$

Ответ:

$$
x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = -1.
$$

Задачи

Решить системы линейных уравнений методом Крамера.

5. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

Глава 3

Комплексные числа

§ 3.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексными числами называют объекты специального вида, которые можно складывать, вычитать, перемножать и делить и среди которых находятся все действительные числа. Любое комплексное число z представимо в виде $z = a + bi$, где $a, b \in R$, i — мнимая единица, обладающая свойством $i^2 = -1$. Действительные числа a и b называются действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$ и обозначаются соответственно: $a = \mathrm{R}e\, z$, $b = \mathrm{I}m\, z$. Такое представление комплексного числа $z = a+bi$ называется ***алгебраической формой комплексного числа***. Алгебраическая форма определяется вещественной и мнимой частью числа: для того, чтобы записать комплексное число в алгебраической форме, нужно знать вещественную и мнимую часть, и наоборот, если число записано в алгебраической форме, то вещественная и мнимая часть явно выделены.

Для комплексных чисел определена ***операция сопряжения*** (обозначается чертой), которая любому числу $z = a + bi$ ставит в соответствие число $\bar{z} = a-bi$. Отметим некоторые свойства операции сопряжения: $\bar{\bar{z}} = z; \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$

$\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $(z_2 \neq 0)$; $z \cdot \bar{z} \in R$.

Последнее свойство используют при делении комплексных чисел в алгебраической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} =$$

$$= \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ia_2b_1 - i^2b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Напомним, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — это модуль комплексного числа $z = a + bi$.

Пример 1. Вычислить, результат записать в алгебраической форме:

а) $3 + i + (4 - 7i)$;

б) $5 + 3i - (7 + 6i)$;

в) $(2 + 3i)(5 - 2i)$;

г) $\dfrac{2 + i}{1 + 3i}$.

Решение. Пользуемся обычными свойствами операций: коммутативностью, ассоциативностью и дистрибутивностью. Тогда получаем:

а) $3 + i + (4 - 7i) = (3 + 4) + (1 - 7)i = 7 - 6i$;

б) $5 + 3i - (7 + 6i) = (5 - 7) + (3 - 6)i = -2 - 3i$;

в) $(2 + 3i)(5 - 2i) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2i + 3i \cdot 5 - 3 \cdot 2i^2 = = 10 - 4i + 15i - 6 \cdot (-1) = 16 + 11i$;

$$\text{г) } \frac{2 + i}{1 + 3i} = \frac{(2 + i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{5 - 5i}{1 - (3i)^2} = \frac{5 - 5i}{1 - 9i^2} = \frac{5 - 5i}{1 + 9} =$$

$$= \frac{5 - 5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Итак, при делении комплексных чисел в алгебраической форме нужно и числитель, и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю. При этом в знаменателе получим действительное число, на которое нужно почленно разделить числитель, чтобы выделить действительную и мнимую части комплексного числа.

Пример 2. Найти вещественные решения уравнения $(2+i)x+(1-i)y=5-2i$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя в ней действительную и мнимую части комплексного числа, стоящего слева: $(2x+y)+(x-y)i=5-2i$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=-2 \end{cases}$. Мы приравняли действительные и мнимые части двух комплексных чисел, стоящих слева и справа от знака равенства.

Решая систему, найдем $x=1,\ y=3$.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{3-4i}$, результат записать в алгебраической форме.

Решение. Пусть z — искомое число. Тогда по определению квадратного корня $3-4i=z^2$. Если $z=a+bi$, где $a,b\in R$, то $3-4i= =(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2\cdot i^2=(a^2-b^2)+2abi$. Как и в предыдущей задаче, приравнивая действительные и мнимые части двух комплексных чисел, получим систему

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений. Из второго уравнения выразим $b=-\frac{4}{2a}=-\frac{2}{a}$ и подставим его значение в первое уравнение $a^2-\frac{4}{a^2}=3$. Отсюда: $a^4-3a^2-4=0$. Обозначим $a^2=t$. Тогда $t^2-3t-4=0$. Решаем это квадратное уравнение: $t=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}$.

Вспомним, что $a^2=t$, и при этом a — вещественное число ($a\in R$). Так как $a=\pm\sqrt{t}$, то $t\geq 0$ (t должно быть числом положительным). В нашем примере $t=4$. Следовательно, $a=\pm2$ и $b=-\frac{2}{(\pm2)}=\mp1$. Окончательно, $z_1=2-i,\ z_2=-2+i$ или $z_{1,2}=\pm(2-i)$.

Пример 4. Найти все комплексные корни уравнения $z^2-(1+i)z+6+3i=0$.

Решение. Используем обычную формулу для корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2}=\frac{1+i\pm\sqrt{(1+i)^2-4(6+3i)}}{2}=$$

$$=\frac{1+i\pm\sqrt{1+2i+i^2-24-12i}}{2}=\frac{1+i\pm\sqrt{-24-10i}}{2}.$$

Вычислим $\sqrt{-24-10i}$, как в предыдущем примере. Пусть $-24-10i=p^2;\ p=a+bi,\ a,b\in R.$

$$-24-10i=(a+bi)^2;$$

$$-24-10i=a^2-b^2+2abi;$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=-24 \\ 2ab=-10 \end{cases};\ \ b=-\frac{5}{a};\ \ a^2-\frac{25}{a^2}=-24;$$

$$a^4+24a^2-25=0;\ \ a^2=t.$$

$$t^2+24t-25=0;\ \ t=\frac{-24\pm\sqrt{576+100}}{2}=\frac{-24\pm 26}{2}=\frac{2}{2}=1,$$

так как $t\geq 0$. Тогда $a=\pm 1,\ b=\mp 5,\ p=\pm(1-5i)$.

Отсюда

$$z_{1,2}=\frac{1+i\pm(1-5i)}{2};$$

$$z_1=\frac{1+i+1-5i}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i;$$

$$z_2=\frac{1+i-1+5i}{2}=\frac{6i}{2}=3i.$$

Итак, $z_1=1-2i,\ z_2=3i$.

Пример 5. Вычислить i^n, $n\in Z$ (Z — множество всех целых чисел).

Решение. Вычислим сначала i^n для нескольких натуральных показателей:

$i^0=1 \qquad i^4=1$

$i^1 = i \qquad i^5 = i$
$i^2 = -1 \qquad \cdots$
$i^3 = -i.$

Видно, что значения степеней начинают повторяться: $i^4 = i^0$, $i^5 = i^1$. Обобщим это наблюдение.

Рассмотрим i^n, где n — произвольное число. Разделим n с остатком на 4, тогда $n = 4k + r$, где $k, r \in Z$, $0 \le r \le 3$. Отсюда $i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = (i^4)^k i^r = i^r$, так как $i^4 = 1$.

Итак,

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 4k \\ i \text{ при } n = 4k+1 \\ -1 \text{ при } n = 4k+2 \\ -i \text{ при } n = 4k+3 \end{cases}.$$

Пример 6. Вычислить $(1+i)^{3047}$.

Решение. Представляем $(1+i)^{3047} = (1+i)^{2\cdot 1523}(1+i)$ и найдем сначала $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Тогда $(1+i)^{3047} = (2i)^{1523}(1 + i) = 2^{1523} i^{1520+3}(1 + i) = 2^{1523} \quad i^3$ $(1+i) = 2^{1523}(-i)(1+i) = 2^{1523}(-i - i^2) = 2^{1523} - 2^{1523}i$. Здесь воспользовались тем, что $i^{1523} = -i$, так как $1523 = 4k + 3$ (1520 делится на 4, а число, кратное 4, в степени мнимой единицы можно отбрасывать).

Задачи

Вычислить:

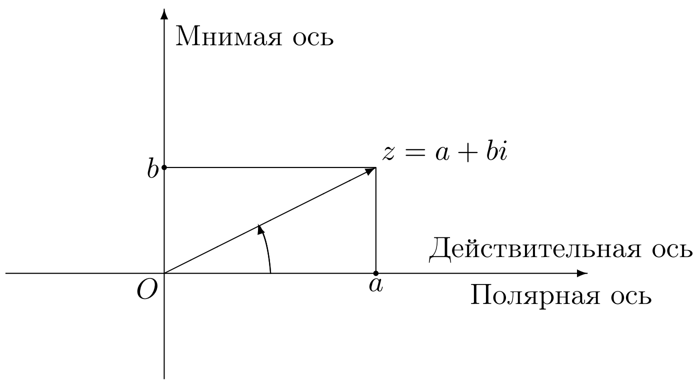
9. $(3-2i)^2 + (1+3i)(-2+5i)$.
10. $(2+3i)(4-5i) - (2-3i)(4+5i)$.
11. $\frac{(2+i)(3-2i)-3i}{(1-i)^2+2}$.
12. $\frac{(1+i)^{1939}}{(1-i)^{1937}}$.
13. $\sqrt{-15+8i}$.
14. $\sqrt{-8i}$.
15. $\sqrt{-11+60i}$.
16. Решить уравнение:

    а) $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$;

б) $x^2 - (3-2i)x + 5 - 5i = 0$;
в) $(2+i)x^2 - (5-i)x + 2 - 2i = 0$;
г) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$.

§ 3.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = a+bi,\ a, b \in R$ точку с координатами (a, b) или ее радиус-вектор (рис. 1). Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости.



Если на плоскости наряду с декартовой имеется согласованная с ней полярная система координат (рис. 1), то каждая точка плоскости, а значит, и каждое комплексное число определяются полярными координатами. Ясно, что полярный радиус точки — это ***модуль*** соответствующего комплексного числа $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$, он же равен длине вектора, изображающего число z.

Полярный угол φ этой точки называют ***аргументом*** числа z и обозначают $\arg z$; он равен величине угла между положительным направлением действительной оси и вектором, изображающим число z ($\arg z = \varphi$). Значение аргумента определяется неоднозначно, с точностью до слагаемых, кратных 2π.

Главное значение аргумента, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$, вычисляется по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, \text{ если } a > 0 \text{ (I или IV четверть)} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} - \pi, \text{ если } a, b < 0 \text{ (III четверть)} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} + \pi, \text{ если } a < 0,\ b > 0 \text{ (II четверть)} \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a = 0,\ b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a = 0,\ b < 0 \\ \text{не определен, если } a = b = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Если $z = a + bi$, $a, b \in R$, $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ (рис. 1), то $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, т. е. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такое представление числа z называют ***тригонометрической формой***. Если в тригонометрическом представлении комплексного числа раскрыть скобки, то получится алгебраическая форма.

Если дано, что $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r \in R$ и $r \geq 0$, то $|z| = r$ и $\arg z = \varphi$.

Если дано, что $z = a + bi$, то φ можно найти из соотношения $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$ (при $a \neq 0$), учитывая формулы $(*)$. Так как $r = |z|$, то $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отметим, что модуль комплексного числа есть число неотрицательное ($r \geq 0$), а главное значение аргумента находится в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Таким образом, можно переходить от алгебраической к тригонометрической форме комплексного числа и наоборот.

Заметим, что ***формула Эйлера***

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

позволяет упростить запись комплексного числа и операции с ним:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Такая форма записи комплексного числа называется ***показательной***.

Заметим, что тригонометрическая и показательная формы комплексного числа определяются модулем и аргументом, в том же смысле, как алгебраическая форма определяется вещественной и мнимой частью.

Пример 7. Комплексное число изображено точкой на комплексной плоскости (рис. 2). Представить число в трех формах: алгебраической, тригонометрической, показательной.

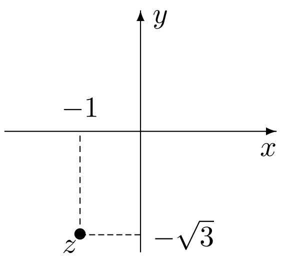


Рис. 2

Решение. Проведем радиус-вектор в точку, соответствующую комплексному числу z (рис. 3).

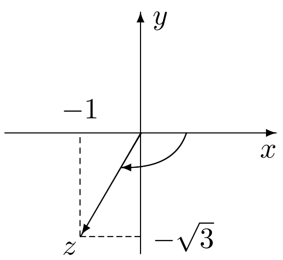


Рис. 3

Из чертежа ясно, что $a = x = -1,\ b = y = -\sqrt{3}$. Алгебраическая форма $z = -1 - i\sqrt{3}$. Теперь найдем модуль и аргумент комплексного числа. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Аргумент z найдем по формулам (∗). Так как $a, b < 0$, то $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} - \pi =$

$= \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2}{3}\pi$. Итак, $|z| = 2,\ \arg z =$ $= -\dfrac{2}{3}\pi$. Тогда тригонометрическая форма числа
$z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$, показательная форма $z = 2e^{-i\frac{2}{3}\pi}$.

Пример 8. Найти модуль и аргумент комплексного числа. Записать число в тригонометрической и показательной формах. Изобразить точкой на комплексной плоскости:

$$\text{а) } z = -2\sqrt{3} + 2i.$$

Решение. Действительная и мнимая части этого комплексного числа соответственно равны $\operatorname{Re} z = a = -2\sqrt{3}$; $\operatorname{Im} z = b = 2$. Изобразим это число точкой на плоскости и проведем в нее радиус-вектор.

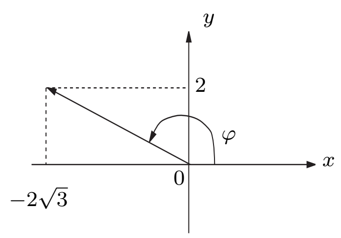


Рис. 4

Найдем модуль и аргумент так же, как в предыдущей задаче: $r = |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$. Число z во II четверти, поэтому аргумент

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{-2\sqrt{3}} + \pi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Итак, $r = 4$; $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ (рис. 4).

Тригонометрическая форма $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Показательная форма $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

б) $z = -7i$.

Решение. У этого числа действительная часть $a = 0$, мнимая $b = -7$. Изобразим его на плоскости (рис. 5).

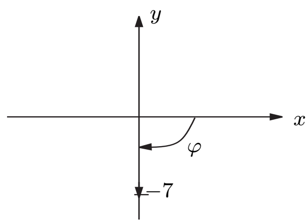


Рис. 5

Из рис. 5 ясно, что $r = |z| = 7$ (помним, что модуль комплексного числа — это расстояние от начала координат до точки), аргумент $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Тогда тригонометрическая и показательная формы соответственно, равны:

$$-7i = 7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 7\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Теперь перейдем к выполнению арифметических действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Речь пойдет о нахождении модуля и аргумента результата этого действия через модули и аргументы чисел, над которыми производится действие. Модуль и аргумент суммы (разности) плохо выражаются через модули и аргументы слагаемых, поэтому сложение и вычитание в тригонометрической форме не производится. Напротив, умножение и производные от него действия удобнее выполнять именно в тригонометрической или показательной формах.

При умножении двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

При делении комплексных чисел происходит деление модулей и вычитание аргументов

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Из формулы умножения следует ***формула Муавра***, позволяющая возводить комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в любую натуральную степень

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

или в показательной форме

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

При извлечении корня с натуральным показателем $n \in N$ из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ получаем ровно n различных корней $W_0, W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$, которые даются формулой

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad (**)$$

В этой формуле $\sqrt[n]{r}$ — положительное число, равное арифметическому корню n-й степени из модуля комплексного числа ($r = |z|$).

Из записи чисел W_k видно, что соответствующие им точки на комплексной плоскости лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке 0 и делят ее на n равных частей.

Пример 9. Вычислить корни из комплексного числа. Ответ записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить точками на комплексной плоскости: $\sqrt{2 - i \cdot 2\sqrt{3}}$.

Решение. $z = 2 - i \cdot 2\sqrt{3}$. Найдем модуль и аргумент числа z. Его действительная часть $a = 2$, мнимая $b = -2\sqrt{3}$. Следовательно,

$|z| = r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$. Число z находится в IV четверти и его аргумент $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$.

Воспользуемся формулой для $n = 2$ (квадратный корень)
$W_k = \sqrt{r}\Big(\cos \dfrac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin \dfrac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\Big)$, $k = 0, 1$.

Вычисляем корни и даем ответ в трех формах:

$$k = 0,\ W_0 = \sqrt{4}\left(\cos \frac{-\dfrac{\pi}{3} + 2\cdot 0\cdot \pi}{2} + i\sin \frac{-\dfrac{\pi}{3} + 0}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\,\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i;$$

$$k = 1,\ W_1 = 2\left(\cos \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} + i\sin \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\,\frac{5\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

Сделаем чертеж: корни W_0, W_1 лежат на окружности радиуса 2, так как модули одинаковы, а аргуметы соответственно равны $-\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$ (рис. 6).

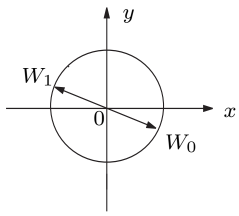


Рис. 6

Заметим, что, если $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$ — корни n-й степени из комплексного числа z, то на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ они располагаются с интервалом $T = \dfrac{2\pi}{n}$.

В этом примере $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ и аргумент для W_1 можно найти так: $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

Пример 10. Решить уравнение $x^9 + 8 = 0$.

Решение. $x^9 + 8 = 0$ — корни этого уравнения есть корни 9-й степени из -8, т. е. $\sqrt[9]{-8}$. Используем формулу $(**)$ для $n = 9$ и $z = -8$. Соответствующие модуль и аргумент будут $r = 8$, $\varphi = \pi$, а формула для всех корней уравнения выглядит так:

$$x_k = \sqrt[9]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{9} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

$k = 0$, $x_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

$k = 1$, $x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{9} + i\sin\frac{3\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$k = 2$, $x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$

$k = 3$, $x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$

$k = 4$, $x_4 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{9} + i\sin\frac{9\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[3]{2}$ (так как $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$)

$k = 5$, $x_5 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$

$k = 6$, $x_6 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$

$k = 7$, $x_7 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{9} + i\sin\frac{15\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$k = 8$, $x_8 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$.

Это все девять корней уравнения, которые на окружности радиуса $r = \sqrt[3]{2}$ располагаются с интервалом $T = \frac{2\pi}{9}$ (рис. 7).

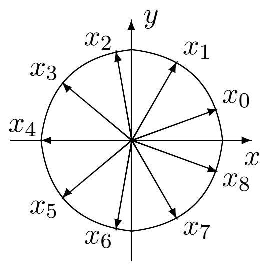


Рис. 7

Пример 11. Найти все корни: $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}-i}{8+8i}}$.

Решение. Найдем сначала модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{8+8i}$, а для этого модули и аргументы числителя $z_1 = \sqrt{3} - i$ и знаменателя $z_2 = 8 + 8i$. Покажем на рис. 8 эти числа, тогда будут очевидны искомые значения $r_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$.

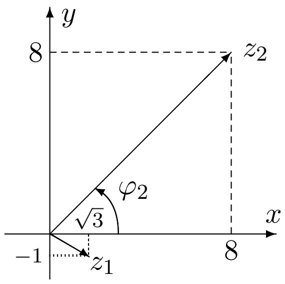


Рис. 8

$$r_1 = \sqrt{3+1} = 2; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6},$$

$$r_2 = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{8}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Помним, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{8\sqrt{2}}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Извлечем корень 5-й степени из этого числа:

$$W_k = \sqrt[5]{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Вычислим модуль

$$\sqrt[5]{\frac{1}{4\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^{5/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$W_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right).$$

$$k = 0,\ \ W_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right);$$

$$k = 1,\ \ W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{60}\pi + i\sin\frac{19}{60}\pi\right);$$

$$k = 2,\ \ W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{43}{60}\pi + i\sin\frac{43}{60}\pi\right);$$

$$k = 3,\ \ W_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{67}{60}\pi + i\sin\frac{67}{60}\pi\right);$$

$$k = 4,\ \ W_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{91}{60}\pi + i\sin\frac{91}{60}\pi\right).$$

Нанесем корни на окружность радиуса $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, располагая их с интервалом $T = \frac{2\pi}{5} = \frac{2\cdot 180^\circ}{5} = 72^\circ$. Аргументы соответственно, будут: $\varphi_0 = -15^\circ$; $\varphi_1 = -15^\circ + 72^\circ = 57^\circ$; $\varphi_2 = 57^\circ + 72^\circ = 129^\circ$; $\varphi_3 = 129^\circ + 72^\circ = 201^\circ$; $\varphi_4 = 201^\circ + 72^\circ = 273^\circ$ (рис. 9)

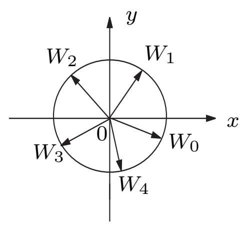


Рис. 9

Пример 12. Вычислить $(-\sqrt{3}+i)^{15}$.

Решение. Для возведения комплексного числа в натуральную степень используем формулу Муавра. Сначала переведем число $z=-\sqrt{3}+i$ в тригонометрическую форму:

$z=-\sqrt{3}+i=2\Big(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)$. Теперь возведем в степень $n=15$: $z^n=r^n\Big(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\Big)=2^{15}\Big(\cos 15\cdot\frac{5\pi}{6}+i\sin 15\cdot\frac{5\pi}{6}\Big)=$ $=2^{15}\Big(\cos\frac{25\pi}{2}+i\sin\frac{25\pi}{2}\Big)=2^{15}\Big(\cos\Big(12\pi+\frac{\pi}{2}\Big)+i\sin\Big(12\pi+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)=$ $=2^{15}\Big(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\Big)=2^{15}i.$

Задачи

17. Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах. Изобразить точкой на комплексной плоскости:

а) $z=7-7i$;
б) $z=-3+i\sqrt{3}$;
в) $z=2$;
г) $z=-5$;
д) $z=3i$;
е) $z=\cos\varphi-i\sin\varphi$.

18. Вычислить:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{26}.$$

19. Вычислить все корни. Ответ записать в трех формах и изобразить точками на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[4]{8+8\sqrt{3}i}$;
б) $\sqrt[3]{-125}$;
в) $\sqrt[6]{\frac{i}{64}}$;
г) $\sqrt[7]{\frac{16+16i}{1-i\sqrt{3}}}$.

20. Решить уравнения. Ответ дать в алгебраической форме.

а) $z^6+27=0$;
б) $z^8+z^4+1=0$.

Глава 4

Векторная алгебра

Ограничимся определением вектора как направленного отрезка, но будем помнить, что в аналитической геометрии два вектора параллельных, одинаково направленных и одинаковой длины считаются равными. Фиксируем в пространстве так называемый ортонормированный базис, векторы которого $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ попарно ортогональны и единичной длины. Тогда произвольный вектор пространства можно представить как линейную комбинацию векторов этого базиса:

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}. \tag{1}$$

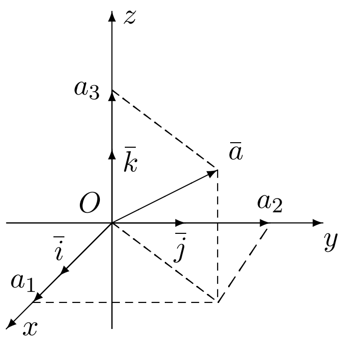


Рис. 10

Из рис. 10 понятно, что числа a_1, a_2, a_3 есть проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Поскольку базис $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ мы фиксируем, вместо записи (1) употребляем так называемую координатную форму записи вектора: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Помимо линейных операций над векторами (сложение и умножение на число) определяем различные операции произведения векторов.

Определение. ***Скалярным произведением*** двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a},^\wedge \bar{b}).$$

Выпишем формулы, относящиеся к скалярному произведению. Пусть $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\cos(\bar{a},^\wedge \bar{b}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} =$ $= \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$, $\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\ \text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}$. Скалярное произведение служит удобным критерием ортогональности: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Определение. ***Векторным произведением*** двух векторов $\bar{a} \times \bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\bar{c} \perp \bar{a},\ \bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a},^\wedge \bar{b})$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку.

Рассмотрим рис. 11. Первое условие означает, что вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (не забудем, что мы всегда можем считать их выходящими из одной точки), второе условие означает, что длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а третье условие означает, что из конца вектора $\bar{c}$ поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден против часовой стрелки, поэтому

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$$

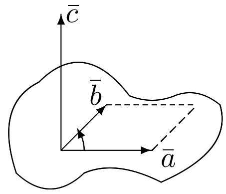


Рис. 11

Обратите внимание на то, что результатом скалярного произведения является число (скаляр), а результатом векторного произведения является вектор.

Векторное произведение в координатной форме находится так:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

Заметьте, что мы разложили определитель по первой строке.

Если скалярное произведение используется для нахождения углов, то векторное произведение — для нахождения площадей. Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллелограмм или треугольник. Тогда

$$S_{\square}=|\bar{a}\times\bar{b}|,\;\; S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|.$$

Если скалярное произведение служит критерием ортогональности, то векторное произведение — критерием коллинеарности.

$$\bar{a}\|\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}.$$

Очень часто в задачах бывает необходимо найти вектор, перпендикулярный двум данным. И здесь необходимо векторное произведение, потому что именно $\bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{a}$ и $\bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{b}$.

Определение. ***Смешанным произведением*** трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т.е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Значит, смешанное произведение — это опять число. Можно показать, что $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$, т.е. безразлично, какие векторы перемножать векторно: первый и второй или второй и третий. А вот порядок сомножителей, так же, как и в векторном произведении, важен: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$.

Через координаты смешанное произведение выражается так:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл смешанного произведения состоит в том, что его модуль равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Если смешанное произведение положительно, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку, если отрицательно — то левую. А если равно нулю? В этом случае векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — компланарны, т. е. лежат на одной плоскости. Так что смешанное произведение служит удобным критерием компланарности:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ — компланарны } \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0.$$

Пример 1. Дан треугольник ABC: $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$, $C(4;5;-2)$. Найти: а) площадь треугольника; б) длину высоты BD; в) длину медианы AM.

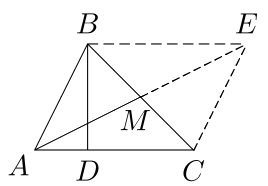


Рис. 12

Решение.

а) $S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$, найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по правилу «из конца отнять начало». $\overline{AB} = (1-7; 0-3; 6-4) =$

$= (-6; -3; 2)$, $\overline{AC} = (-3; 2; -6)$.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}|(14, -42, -21)| = \frac{1}{2} \cdot 7|(2, -6, -3)| = \frac{7}{2}\sqrt{4+36+9} = \frac{49}{2}.$$

б) $S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{BD}| \cdot |\overline{AC}|$, отсюда $|\overline{BD}| = \frac{2 \cdot S_\Delta}{|\overline{AC}|}$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{9+4+36} = 7. \quad |\overline{BD}| = \frac{2 \cdot \frac{49}{2}}{7} = 7.$$

в) Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCE$ (рис. 12). Тогда очевидно, что $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. Следовательно, $\overline{AM} = \frac{1}{2}((-6, -3, 2) + (-3, 2, -6)) = \frac{1}{2}(-9, -1, -4)$. Тогда $|\overline{AM}| = \frac{1}{2}\sqrt{81+1+16} = \frac{1}{2}\sqrt{98} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$.

Пример 2. Дана пирамида с вершинами $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти: а) угол между ребрами AC и AD, б) длину высоты, опущенной из вершины D.

а) $\cos(\overline{AC},^\wedge \overline{AD}) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AD}|}$. Найдем координаты векторов $\overline{AC} = (4, 0, 6)$ и $\overline{AD} = (-7, -7, 7)$ и подставим в формулу:

$$\cos(\overline{AC},^\wedge \overline{AD}) = \frac{(4, 0, 6) \cdot (-7, -7, 7)}{\sqrt{4^2+6^2}\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+7^2}} = \frac{-28+42}{\sqrt{52} \cdot 7\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{13} \cdot 7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{39}}.$$

б) Прежде всего заметим, что объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, то есть $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|$. Найдем вектор

$\overline{AB} = (2, -2, -3)$. Тогда

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{7}{3} \left| \begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{7}{3} \left| (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{7}{3} \cdot 22 = \frac{154}{3} = 51\frac{1}{3}.$$

Чтобы найти высоту DE , вспомним, что $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\ S_{\text{осн}} \cdot h$, т.е. $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\ S_{ABC} \cdot DE$, откуда $DE = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{ABC}}$.

Найдем S_{ABC}, как в примере 1:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = |(-6, -12, 4)| = \sqrt{36 + 144 + 16} =$$

$$= \sqrt{196} = 14.$$

Теперь найдем высоту:

$$DE = \frac{3 \cdot \frac{7}{3} \cdot 22}{14} = 11.$$

Пример 3. Разложить вектор $\bar{s} = (-1, 8, 3)$ по векторам $\bar{a} = (3, -2, 1)$, $\bar{b} = (1, -3, 2)$, $\bar{c} = (-2, 3, 1)$.

Решение. Разложить вектор $\bar{s}$ по векторам $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ означает найти такие числа x_1, x_2, x_3, что выполняется равенство $\bar{s} = x_1\bar{a} + x_2\bar{b} + x_3\bar{c}$. Запишем это равенство в координатной форме:

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 3x_1 \\ -2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -3x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Как видим, чтобы найти числа x_1, x_2, x_3, нужно решить систему линейных уравнений. Обратите внимание, что столбцы определителя этой системы — в точности столбцы координат векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (по которым мы раскладываем вектор $\bar{s}$), а столбец свободных членов — координаты вектора $\bar{s}$. Решим систему:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{2}{(-3)} & \end{array} \\ \triangle = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -3 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -(35 - 15) = -20.$$

$$\triangle x_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} & 2 & \\ & 1 & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 8 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(25+15) = -40.$$

$$\triangle x_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} & (-2) & \\ & 3 & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 22 & 8 & -13 \\ 10 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 22 & -13 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -110 + 130 = 20.$$

$$\triangle x_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & \\ & (-3) & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(35+25) = -60.$$

$$x_1 = \frac{\triangle x_1}{\triangle} = \frac{-40}{-20} = 2;\ x_2 = \frac{\triangle x_2}{\triangle} = \frac{20}{-20} = -1;\ x_3 = \frac{\triangle x_3}{\triangle} = \frac{-60}{-20} = 3.$$

Значит, $\bar{s} = 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$.

Пример 4. На векторах $\bar{a} = -\bar{p} + 3\bar{q}$ и $\bar{b} = 5\bar{p} - 5\bar{q}$ построен параллелограмм, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2$, $(\bar{p},^\wedge \bar{q}) = \frac{\pi}{3}$. Найти: а) угол между диагоналями параллелограмма; б) площадь параллелограмма; в) высоту параллелограмма, опущенную на вектор $\bar{b}$.

а)

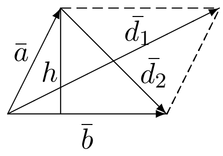


Рис. 13

Решение. Прежде всего выразим диагонали $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$. По правилу параллелограмма $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b} = 4\bar{p} - 2\bar{q}$, по правилу треугольника $\bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = 6\bar{p} - 8\bar{q}$. Значит, угол между ними равен

$$\cos(\bar{d}_1,^\wedge \bar{d}_2) = \frac{\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2}{|\bar{d}_1||\bar{d}_2|} = \frac{(4\bar{p} - 2\bar{q})(6\bar{p} - 8\bar{q})}{\sqrt{(4\bar{p} - 2\bar{q})^2} \cdot \sqrt{(6\bar{p} - 8\bar{q})^2}} =$$

Хотим предостеречь от распространенной ошибки: $\sqrt{(4\bar{p} - 2\bar{q})^2} \neq 4\bar{p} - 2\bar{q}$! Подумайте сами, ведь в левой части равенства стоит число, а в правой — вектор. Поэтому нужно под корнем найти скалярное произведение $(4\bar{p} - 2\bar{q})(4\bar{p} - 2\bar{q})$, а уж потом из полученного числа извлечь корень. Поскольку скалярное произведение дистрибутивно и коммутативно, скобки раскрываем так, как привыкли делать это в школьной алгебре. И поэтому же формулы сокращенного умножения тоже остаются в силе.

Продолжим вычисления:

$$= \frac{24\bar{p}^2 - 12\bar{q}\bar{p} - 32\bar{p}\bar{q} + 16\bar{q}^2}{\sqrt{16\bar{p}^2 - 16\bar{p}\bar{q} + 4\bar{q}^2} \cdot \sqrt{36\bar{p}^2 - 96\bar{p}\bar{q} + 64\bar{q}^2}} =$$

$$= \frac{24 \cdot 1 - 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 32 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 4}{\sqrt{16 \cdot 1 - 16 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4}\sqrt{36 \cdot 1 - 96 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 64 \cdot 4}} =$$

$$= \frac{24 - 44 + 64}{4 \cdot 14} = \frac{44}{4 \cdot 14} = \frac{11}{14}, \quad (\bar{d}_1,^\wedge \bar{d}_2) = \arccos \frac{11}{14}.$$

б)

$$S_{\square} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |(-\bar{p} + 3\bar{q}) \times (5\bar{p} - 5\bar{q})| =$$

напомним, что по свойствам векторного произведения скобки раскрываем как обычно, но порядок сомножителей сохраняем, так как векторное произведение антикоммутативно, т. е. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

$$= |-5\bar{(}p \times \bar{p}) + 15(\bar{q} \times \bar{p}) + 5(\bar{p} \times \bar{q}) - 15(\bar{q} \times \bar{q})| =$$

$$= |\bar{0} - 15(\bar{p} \times \bar{q}) + 5(\bar{p} \times \bar{q}) - \bar{0}| = |-10(\bar{p} \times \bar{q})| =$$

$$= 10 \cdot |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

Поясним, что векторное произведение вектора самого на себя (или на коллинеарный вектор) есть нулевой вектор, так как $|\bar{a}\times\bar{a}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \sin 0 = 0$.

в) $S_{\varnothing} = |\bar{b}| \cdot h$, откуда

$$h = \frac{S_{\varnothing}}{|\bar{b}|} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{(5\bar{p} - 5\bar{q})^2}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{25 \cdot 1 - 50 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 4}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 2.$$

Задачи

21. Дан треугольник ABC: $A(3,1)$, $B(2,7)$, $C(15,3)$. Доказать, что он прямоугольный, и найти длины высоты и медианы, проведенных из прямого угла.

22. Дана пирамида с вершинами $A(1,-2,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(3,1,-1)$, $D(5,-1,1)$. Найти: а) площадь грани ABC; б) длину высоты, опущенной из вершины D; в) угол между ребрами AC и AD.

23. Разложить вектор $\bar{s} = (4,-5,5)$ по векторам $\bar{a} = (2,-3,5)$, $\bar{b} = (3,-2,1)$, $\bar{c} = (1,0,-2)$.

24. На векторах $\bar{a} = \bar{p}+3\bar{q}$ и $\bar{b} = -\bar{p}+\bar{q}$, исходящих из одной точки, построен треугольник. Найти длину третьей стороны треугольника, длину медианы, делящей эту сторону пополам, и площадь треугольника, если $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\cos(\bar{p},^\wedge \bar{q}) = \frac{3}{8}$.

Глава 5

Прямая на плоскости

В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени, и, обратно, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

Существуют различные виды уравнений прямой l на плоскости. Вот эти уравнения:

1) $Ax + By + C = 0$ — ***общее уравнение*** прямой l. Вектор $\bar{n} = (A, B)$ — ***нормальный вектор***, он перпендикулярен прямой ($\bar{n} \perp l$). Если переставить координаты вектора $\bar{n}$ и изменить знак у одной (любой) из координат, то получим ***направляющий вектор*** $\bar{s} = (-B, A)$, который параллелен прямой l ($\bar{s} \parallel l$).

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$ — прямая, проходящая ***через точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***перпендикулярно вектору нормали*** $\bar{n} = (A, B)$.

$$\bar{s} = (-B, A); \quad \bar{s} \parallel l \qquad \text{(рис. 14)}$$

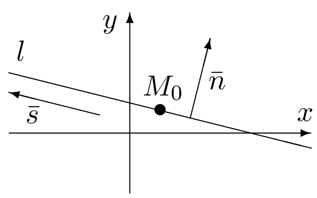


Рис. 14

3) ***Нормальное уравнение*** прямой l.

Если обе части общего уравнения $Ax + By + C = 0$ умножить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$(которое называется нормирующим можителем), причем знак μ противоположен знаку C, то получится нормальное уравнение прямой

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

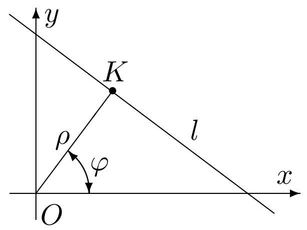


Рис. 15

Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую ($p = |\overline{OK}|$), а φ — угол, образованный этим препендикуляром с положительным направлением оси Ox (рис. 15).

Отклонение точки $M_0(x_0, y_0)$ от прямой l, заданной нормальным уравнением, вычисляется по формуле:

$$\delta(M, l) = x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p.$$

Если точка M и начало координат находятся по разные стороны от прямой l, то $\delta > 0$, а если по одну сторону, то $\delta < 0$. ***Расстояние*** от точки M_0 до l равно модулю отклонения (рис. 16):

$$d = |x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p|,$$

а если прямая l задана общим уравнением, то расстояние от точки M_0 до этой прямой равно

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

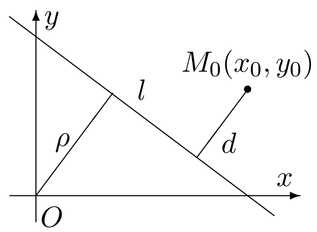


Рис. 16

4) ***Каноническое*** уравнение прямой l (рис. 17)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

где $M_0(x_0, y_0)$ — точка, лежащая на прямой l, $\bar{s}=(m,n)$ — направляющий вектор; $\bar{s}\parallel l$.

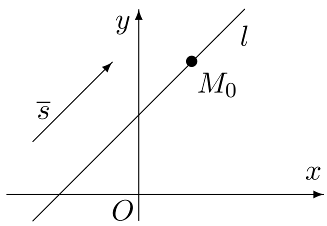


Рис. 17

5) Уравнение прямой l, ***проходящей через две точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 18),

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Если в этом уравнении какой-либо из знаменателей обращается в нуль, то это означает, что соответствующий числитель равен нулю. Например, уравнение $\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{5}$ означает, что прямая задается уравнением $x-3=0$.

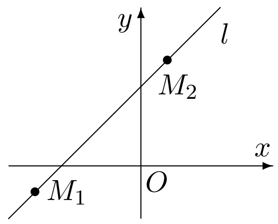


Рис. 18

6) Уравнение прямой в ***отрезках*** (рис. 19)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение получается из общего $Ax + By + C = 0$ делением всех членов на $(-C)$, если $C \neq 0$. Здесь a и b — отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.

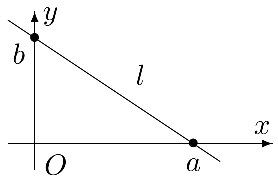


Рис. 19

7) Уравнение прямой ***с угловым коэффициентом*** (рис. 20)

$$y = kx + b$$

можно получить из общего $Ax+By+C = 0$ $(B \neq 0)$, если разрешить его относительно y. Здесь $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — ***угол наклона***, k — ***угловой коэффициент*** прямой l, b — отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

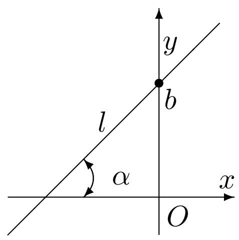


Рис. 20

8) Уравнение прямой l, ***проходящей через точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***с известным угловым коэффициентом*** k

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

9) Угол φ между прямыми l_1 и l_2 равен углу между их направляющими векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ или их нормальными векторами $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, то (рис. 21)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

$$\varphi + \varphi_1 = \pi.$$

Это означает, что по первой формуле находим тангенс того угла, который получился поворотом первой прямой до второй прямой против часовой стрелки, а по второй — угол φ_1, который получается поворотом второй прямой до первой против часовой стрелки. Внимательно посмотрите рис. 21.

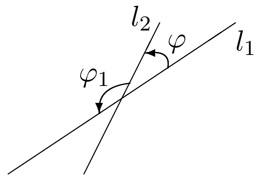


Рис. 21

10) Условия параллельности и перпендикулярности прямых l_1 и l_2.

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \ \text{ или } \ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \ \text{ или } \ \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \ \text{ или } \ A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \ \text{ или } \ m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Пример 1. Дано общее уравнение прямой $3x - 2y - 16 = 0$. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках; в) нормальное уравнение.

Решение. а) Разрешив уравнение относительно y, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{3}{2}x - 8,$$

здесь $k = \frac{3}{2},\ b = -8$.

б) Перенесем свободный член общего уравнения в правую часть и разделим обе части уравнения на 16, тогда получим $\frac{3}{16}x - \frac{2}{16}y = 1$ или $\frac{x}{\frac{16}{3}} + \frac{y}{-\frac{16}{2}} = 1$. После сокращения окончательно имеем $\frac{x}{16/3} + \frac{y}{(-8)} = 1$ уравнение прямой в отрезках. Здесь $a = \frac{16}{3},\ b = -8$.

в) Находим нормирующий множитель

$$\mu = +\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Знак нормирующего множителя (+) противоположен знаку $C = -16$. Умножим обе части общего уравнения на этот множитель и получим нормальное уравнение прямой

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\,x - \frac{2}{\sqrt{13}}\,y - \frac{16}{\sqrt{13}} = 0.$$

Здесь $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}};\ \sin\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}};\ p = \frac{16}{\sqrt{13}}$.

Пример 2. Построить прямые:
а) $x - 4y + 3 = 0$;
б) $2x + 3y = 0$;
в) $7x - 5 = 0$;
г) $3y + 8 = 0$.

Решение. а) Полагая в уравнении $x = 0$, получим $y = \frac{3}{4}$. Следовательно, точка $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$; — это точка пересечения прямой с осью ординат. Полагая $y = 0$, получим $x = -3$, т. е. прямая пересекается с осью абсцисс в точке $A(-3, 0)$. Проведем прямую через точки A и B (рис. 22).

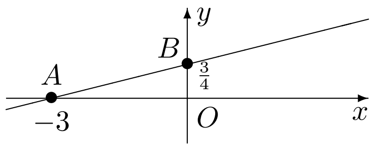


Рис. 22

б) Прямая $2x + 3y = 0$ проходит через начало координат, так как ее свободный член равен нулю ($C = 0$). Следовательно, одна точка есть $O(0, 0)$, нужно найти вторую точку, через которую проходит прямая. Пусть, например, $x = 3$, тогда $6 + 3y = 0$, т. е. $y = -2$; получаем точку $M(3, -2)$. Проводим прямую через эту точку и начало координат O (рис. 23).

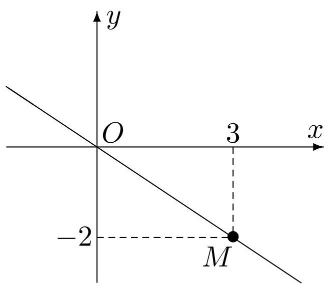


Рис. 23

в) Разрешим уравнение относительно x: $x = \frac{5}{7}$. Эта прямая параллельна оси ординат и проходит через точку $\left(\frac{5}{7}, 0\right)$(рис. 24).

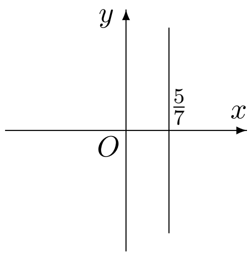


Рис. 24

г) Разрешим уравнение относительно y: $y = -\frac{8}{3}$. Эта прямая параллельна оси абсцисс (рис. 25).

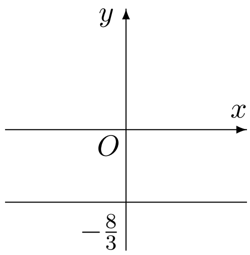


Рис. 25

Пример 3. Показать, что прямые $2x - 3y + 7 = 0$ и $10x - 15y - 11 = 0$ параллельны.

Решение. Используем условие 10). Нормальные векторы этих прямых равны соответственно: $\bar{n}_1 = (2, -3)$; $\bar{n}_2 = (10, -15)$ и $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, так как $\frac{2}{10} = \frac{-3}{-15}$; $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. Координаты нормальных векторов пропорциональны, значит, и прямые параллельны.

Можно использовать другое условие из 10). Для этого приведем уравнение каждой прямой к виду с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \quad \text{и} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{15}.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$, т. е. прямые параллельны.

Пример 4. Показать, что прямые $6x - 10y + 7 = 0$ и $5x + 3y - 4 = 0$ перпендикулярны.

Решение. Здесь нормальные векторы $\bar{n}_1 = (6,-10)$; $\bar{n}_2 = (5,3)$. Условие ортогональности 10) $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow 6 \cdot 5 + (-10) \cdot 3 = 0$ выполнено. Или через угловые коэффициенты прямых: $k_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $k_2 = -\frac{5}{3}$. Условие ортогональности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$ — выполнено. Эти прямые ортогональны.

Пример 5. Даны вершины треугольника: $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(13,-4)$.

а) Написать уравнение прямой AB и найдите длину стороны AB.

б) Составить уравнение медианы, проведенной из вершины B.

в) Написать уравнение высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины C, и найдите ее длину.

г) Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A.

Решение. Сделаем схематический рисунок, на котором обозначим искомые прямые (рис. 26)

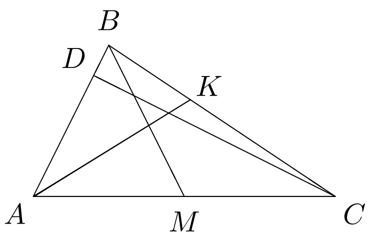


Рис. 26

а) Уравнение стороны AB напишем как уравнение прямой через две точки $A(1,1)$ и $B(4,5)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Полагая $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y_2 = 5$, получаем: $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{5-1}$ или $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}$. Преобразуем $4x - 4 = 3y - 3$. Итак, искомое уравнение AB имеет вид: $4x - 3y - 1 = 0$. Длину стороны AB найдем как длину вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB} = (4-1; 5-1)$; $\overline{AB} = (3,4)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

б) Чтобы написать уравнение медианы BM, найдем координаты точки M, которая делит сторону AC пополам.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+13}{2} = 7;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+(-4)}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Как и в пункте а), уравнение медианы напишем как уравнение прямой через две точки $B(4,5)$ и $M(7, -\frac{3}{2})$.

Тогда $\frac{x-4}{7-4} = \frac{y-5}{-\frac{3}{2}-5}$; $\frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{-\frac{13}{2}}$; $-13(x-4) = 6(y-5)$; $-13x+52 = 6y - 30$; $13x + 6y - 82 = 0$ — это уравнение медианы BM.

в) В пункте а) мы нашли вектор $\overline{AB} = (3,4)$, который перпендикулярен высоте CD, и, значит, он является вектором нормали $\bar{n} = (A, B)$ для искомой прямой. Воспользуемся уравнением $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$.

Здесь $\bar{n} = (3,4)$; $x_0 = 13$, $y_0 = -4$ — координаты точки C. $3(x-13) + 4(y+4) = 0$; $3x - 4y - 23 = 0$ — уравнение высоты CD.

Находим высоту CD как расстояние от точки $C(13,-4)$ до прямой AB: $4x - 3y - 1 = 0$.

$$d = |CD| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4 \cdot 13 - 3(-4) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{63}{5}.$$

г) Направляющим вектором биссектрисы AK (рис. 27) может служить сумма ортов векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, исходящих из вершины A. Это важно, ведь нас интересует биссектриса внутреннего угла $\triangle ABC$. Найдем эти орты, если $\overline{AB} = (3,4)$; $\overline{AC} = (12,-5)$

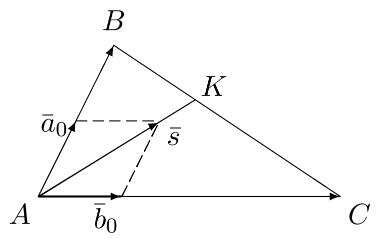


Рис. 27

$$\bar a_0 = \frac{1}{|\overline{AB}|}\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{9+16}}(3,4) = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right).$$

$$\bar b_0 = \frac{1}{|\overline{AC}|}\overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{144+25}}(12,-5) = \frac{1}{13}(12,-5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right).$$

Теперь найдем направляющий вектор биссектрисы

$$\bar s = \bar a_0 + \bar b_0 = \left(\frac{3}{5} + \frac{12}{13};\ \frac{4}{5} - \frac{5}{13}\right) = \left(\frac{99}{65},\ \frac{27}{65}\right).$$

Можно взять в качестве направляющего вектор $\bar s_1$, параллельный полученному вектору $\bar s(\bar s \parallel \bar s_1)$, т. е. $\bar s = \lambda \bar s_1$.

В нашем примере $\bar s = \left(\frac{99}{65}, \frac{27}{65}\right) = \frac{9}{65}(11,3) = \frac{9}{65}\cdot \bar s_1$ и $\bar s_1 = (11,3)$.

Тогда уравнение биссектрисы получим, используя каноническое уравнение 4):

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$; (x_0, y_0) — координаты т. $A(1,1)$.

$\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{3}$; $3x-3 = 11y-11$;

$3x - 11y + 8 = 0$ — уравнение биссектрисы AK.

Пример 6. Через точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $x-3y+4=0$ провести прямые, одна из которых проходит через начало координат, а другая параллельна оси абсцисс.

Решение. Определим точку пересечения двух прямых, решив систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=8 \\ x-3y=-4 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ (-2) \end{array}\right. + \Rightarrow$$

умножим второе уравнение на (-2) и сложим, тогда получим уравнение:

$$11y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{11};\ x - 3\frac{16}{11} = -4;\ x = \frac{48}{11} - 4 = \frac{48-44}{11} = \frac{4}{11}.$$

Итак, точка пересечения двух прямых имеет координаты $A\left(\frac{4}{11}; \frac{16}{11}\right)$. Через эту точку проведем прямую, проходящую через начало координат; она имеет вид $y = kx$. Найдем угловой коэффициент: $\frac{16}{11} = k \cdot \frac{4}{11}$; $k = 4$. Тогда

$$y = 4x \text{ — уравнение прямой через точку } O \text{ и точку } A.$$

Напишем уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной оси абсцисс. Общий вид такой прямой $y =$const, а в нашем примере

$$y = \frac{16}{11} \text{ — уравнение искомой прямой.}$$

Пример 7. Через точку $M(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3.

Решение. Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Если прямая проходит через точку $M(4, -3)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению, т. е. $\frac{4}{a} + \frac{-3}{b} = 1$. Поскольку площадь треугольника равна 3 (рис. 28), получаем второе уравнение: $S = \frac{1}{2}|ab|$ или $3 = \frac{1}{2}|ab|$.

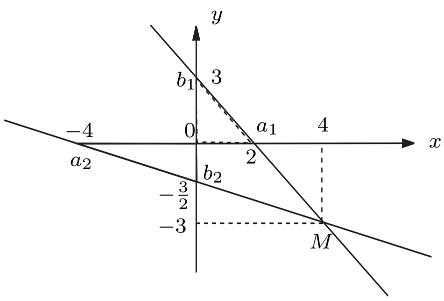


Рис. 28

Решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + \dfrac{-3}{b} = 1 \\ |ab| = 6 \end{cases}.$$

По условию задачи $a \neq 0$ и $b \neq 0$, из рис. 28 понятно, что $|ab| = ab$, так как a и b могут быть либо оба положительны, либо оба отрицательны, тогда из второго уравнения: $b = \dfrac{6}{a}$. Подставим это выражение в первое и решим квадратное уравнение:

$$\frac{4}{a} - \frac{3a}{6} = 1;\ \frac{4}{a} - \frac{a}{2} = 1;\ a^2 + 2a - 8 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = -4.$$

Соответственно $b_1 = \frac{6}{2} = 3$ и первое уравнение имеет вид $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, или в общем виде $3x + 2y - 6 = 0$; аналогично получим второе уравнение $b_2 = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{-3/2} = 1$ или $3x + 8y + 12 = 0$.

На рис. 28 показаны искомые прямые и отсекаемые ими отрезки на осях координат, а также треугольники с площадью, равной 3.

Пример 8. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5, 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

Решение. Построим схематический рисунок, так как наглядность упрощает понимание задачи (рис. 29)

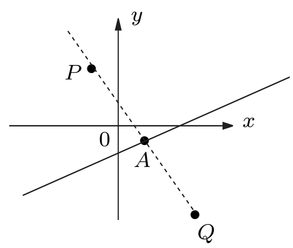


Рис. 29

Заданная прямая ортогональна прямой PQ, и точка их пересечения A находится на одинаковых расстояниях от точек P и Q. Напишем уравнение прямой PQ из условия ортогональности двух прямых. Вектор нормали заданной прямой $\bar{n}_1 = (2, -3)$, тогда для прямой PQ вектор нормали $\bar{n}_2 = (3, 2)$ (проверим, что выполняется условие ортогональности $\bar{n}_1\bar{n}_2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$).

Прямая проходит через точку $P(-5, 13)$, поэтому $3(x + 5) + 2(y - 13) = 0$, или $3x + 2y - 11 = 0$ — уравнение PQ. Найдем координаты точки A как точки пересечения двух прямых:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 & \cdot (2) \\ 3x + 2y = 11 & \cdot (3) \end{cases} + \text{ домножаем эти уравнения и складываем}$$

$$13x = 39;\ x = 3;\ y = 1;$$

$$A(3, 1).$$

Известно, что координаты середины отрезка точки $A(3, 1)$ равны полусумме координат концов отрезка точек $P(-5, 13)$ и $Q(x, y)$:

$$3 = \frac{-5 + x}{2}; \quad 1 = \frac{13 + y}{2};$$

$$6 = -5 + x; \quad 2 = 13 + y;$$

$$x = 11; \qquad y = -11.$$

$$Q(11, -11).$$

Пример 9. Составить уравнение биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми: $x - 3y + 5 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ (рис. 30).

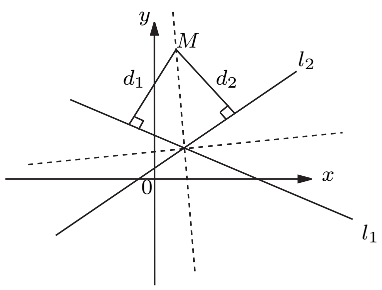


Рис. 30

Решение. Рассмотрим рис. 30. Известно, что биссектрисы углов, образованных двумя прямыми l_1 и l_2, представляют собой множество точек, равноудаленных от этих прямых. Если точка $M(x, y)$ лежит на биссектрисе, то равны ее расстояния до прямых, т. е. $d_1 = d_2$. Используем формулу расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

В нашем случае точка M имеет координаты (x, y) и тогда:

$$d_1 = \frac{|x - 3y + 5|}{\sqrt{1 + 9}}; \quad d_2 = \frac{|3x - y - 2|}{\sqrt{9 + 1}}.$$

Приравниваем эти расстояния и убираем модуль:

$$\frac{x - 3y + 5}{\sqrt{10}} = \pm \frac{3x - y - 2}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда получаем два уравнения для двух биссектрис:

$$x - 3y + 5 = 3x - y - 2 \quad \text{и} \quad x - 3y + 5 = -(3x - y - 2).$$

Окончательно:

$2x + 2y - 7 = 0$ и $4x - 4y + 3 = 0$ — это уравнения искомых биссектрис.

Пример 10. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x - 4y - 10 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 3$.

Решение. Искомых прямых две (рис. 31). Аналогично предыдущей задаче

$$3 = \frac{|3x - 4y - 10|}{\sqrt{9 + 16}}, \quad \text{отсюда } 3 = \pm \frac{3x - 4y - 10}{5}.$$

Тогда уравнения прямых

$$15 = 3x - 4y - 10; \quad 3x - 4y - 25 = 0$$

и

$$15 = -(3x - 4y - 10); \quad 3x - 4y + 5 = 0.$$

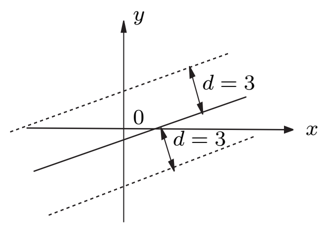


Рис. 31

Задачи

25. Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

26. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x - 4y + 7 = 0$ и $5x + 2y + 3 = 0$ и параллельную оси ординат.

27. Показать, что точки $A(-2, -2)$, $B(-3, 1)$, $C(7, 7)$ и $D(3, 1)$ являются вершинами трапеции, и составить уравнения ее средней линии и диагоналей.

28. Даны вершины треугольника $A(1, -2)$, $B(5, 4)$ и $C(-2, 0)$.

а) Напишите уравнение прямой AB и найдите длину стороны AB.

б) Составьте уравнение медианы, проведенной из вершины B.

в) Напишите уравнение высоты треугольника ABC, проведенной из вершины C, и найдите ее длину.

г) Напишите уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A.

29. Через точку $(3, 2)$ провести прямые, отсекающие равные отрезки на осях координат.

30. При каких значениях A прямая $Ax + 8y - 20 = 0$ отсекает на координатных осях равные отрезки?

31. Найти проекцию точки $P(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2, -3)$ и $B(-5, 1)$.

32. Дан ромб, диагонали которого равны 4 и 10. Найти уравнения всех его сторон, зная, что оси координат направлены по его диагоналям из точки их пересечения.

33. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат.

34. Составить уравнение биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:

а) $x - 2y - 3 = 0, \quad 2x + 4y + 7 = 0;$

б) $3x + 4y - 1 = 0, \quad 5x + 12y - 2 = 0.$

35. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 1)$ под углом 45° к данной прямой.

36. Даны последовательные вершины параллелограмма: $A(0, 0), B(1, 3),\ C(7, 1)$. Найти угол между его диагоналями и показать, что этот параллелограмм является прямоугольником.

Глава 6

Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве может быть задана различными видами уравнений. Чтобы выбрать наиболее подходящий вид для решения данной задачи, нужно понимать геометрический смысл параметров каждого вида. Напомним, что параметрами называются все буквы, входящие в уравнение, кроме букв x, y, z, обозначающих координаты произвольной точки плоскости.

1) ***Общее уравнение*** плоскости

$$P: \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Здесь A, B, C, D — параметры. Их геометрический смысл следующий:

вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен плоскости P и называется ***вектором нормали*** к этой плоскости;

величина $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ равна расстоянию плоскости P от начала координат.

2) Уравнение плоскости, ***проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору***

$$P: \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Здесь вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен плоскости P, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка, лежащая на плоскости P.

3) Уравнение плоскости, ***проходящей через три данные точки***

$$P: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три данные точки, лежащие на плоскости P.

4) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между двумя плоскостями

$$P_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

находится по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Нетрудно понять, что это в точности косинус угла между нормальными векторами к этим плоскостям $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Отсюда же легко получаются условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5) Исследование общего уравнения плоскости. Речь идет о том, чтобы определить, каким будет положение плоскости при обращении в нуль некоторых коэффициентов общего уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0$	$P \parallel Ox$
$B = 0$	$P \parallel Oy$
$C = 0$	$P \parallel Oz$
$D = 0$	P проходит через начало координат

Решая задачи на плоскость, прежде всего нужно понять, в каком виде удобнее всего искать уравнение плоскости, исходя из условий задачи. А уж потом искать уравнение плоскости в таком виде. Чаще всего наиболее удобным оказывается уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, т. е., если из данных задачи известна какая-нибудь точка, лежащая на плоскости, нужно постараться найти вектор, перпендикулярный плоскости.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -2, 5)$ перпендикулярно ее радиусу-вектору.

Решение. Поскольку здесь известны координаты точки, лежащей на плоскости, удобнее всего воспользоваться видом 2). Радиус-вектор $\overline{OA}$ точки A имеет по определению те же координаты, что и сама точка A, т. е. $\overline{OA} = (3, -2, 5)$. Из условия задачи следует, что $\overline{OA}$ перпендикулярен искомой плоскости. Значит, в качестве x_0, y_0, z_0 берем координаты точки A, в качестве A, B, C берем координаты вектора $\overline{OA}$ и подставляем в вид 2):

$$3(x-3) - 2(y-(-2)) + 5(z-5) = 0.$$

$$3x - 9 - 2y - 4 + 5z - 25 = 0.$$

$$3x - 2y + 5z - 38 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, 3)$:

а) перпендикулярно плоскостям $2x+y-5z+4 = 0$ и $3x-y+4z = 0$;

б) параллельно первой из указанных плоскостей.

Решение. а) Опять удобен вид 2), так как известна точка, лежащая на искомой плоскости. Значит, надо найти вектор, перпендикулярный искомой плоскости. Обозначим этот вектор через $\bar{n}$. Из общих уравнений данных плоскостей найдем векторы их нормалей: $\bar{n}_1 = (2, 1, -5)$, $\bar{n}_2 = (3, -1, 4)$. Так как искомая плоскость перпендикулярна обеим данным плоскостям, то вектор нормали искомой плоскости препендикулярен нормальным векторам данных плоскостей, т. е. $\bar{n} \perp \bar{n}_1$, $\bar{n} \perp \bar{n}_2$. А раз так, то в качестве $\bar{n}$ можно взять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$. (Вспомним, что вектор, перпендикулярный двум данным векторам, — это их векторное произведение.)

$$\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1; -23; -5).$$

Теперь находим уравнение искомой плоскости в виде 2), беря в качестве x_0, y_0, z_0 координаты точки M, а в качестве A, B, C — координаты вектора $\bar{n}$.

$$-1 \cdot (x - 2) - 23(y - (-1)) - 5(z - 3) = 0$$

$$-x - 23y - 5z + 2 - 23 + 15 = 0$$

$$x + 23y + 5z + 6 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

б) Так как искомая плоскость параллельна первой из указанных плоскостей, то $\bar{n} = \bar{n}_1$. Составляем уравнение искомой плоскости в виде 2), беря в качестве x_0, y_0, z_0 координаты точки M, а в качестве A, B, C — координаты вектора $\bar{n}_1$:

$$2(x - 2) + 1 \cdot (y - (-1)) - 5(z - 3) = 0$$

$$2x + y - 5z - 4 + 1 + 15 = 0$$

$$2x + y - 5z + 12 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

Пример 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,3,0),\ M_2(1,-2,3),\ M_3(3,2,-1)$, и расстояние точки $M(5,-2,2)$ до этой плоскости.

Решение. Поскольку из условий задачи известны три точки, лежащие на искомой плоскости, воспользуемся видом 3):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ 1-2 & -2-3 & 3-0 \\ 3-2 & 2-3 & -1-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по первой строке

$$(x-2)\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x-2)-(-2)(y-3)+6z=0$$

$$8x+2y+6z-16-6=0$$

$$8x+2y+6z-22=0$$

$$4x+y+3z-11=0.$$

Мы нашли уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3. В этом можно убедиться, подставив координаты этих точек в полученное уравнение. Во всех трех случаях оно обратится в тождество.

Теперь найдем расстояние от точки M до найденной плоскости. Для этого воспользуемся формулой для расстояния от точки до плоскости, т. е. подставим в уравнение плоскости координаты точки и разделим на модуль нормального вектора. Результат возьмем по абсолютной величине:

$$d = \frac{|4\cdot 5-2+3\cdot 2-11|}{\sqrt{16+1+9}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Заметим, что точно так же можно решить пункт б) из примера 2 раздела «Векторная алгебра». Действительно, длина высоты, опущенной из вершины D, это есть не что иное, как расстояние от точки

D до плоскости, проходящей через точки A, B, C. Решите и сверьте с полученным ответом.

Пример 4. Доказать, что данные плоскости параллельны, и найти расстояние между ними.

$2x + 6y - 3z + 21 = 0$ и $-4x - 12y + 6z + 7 = 0$.

Решение. Вспомним, что $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Здесь имеем $\frac{2}{-4} = \frac{6}{-12} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

Значит, данные плоскости параллельны. Чтобы найти расстояние между ними, можно взять точку на одной из них и найти расстояние этой точки до другой плоскости. Чтобы найти координаты какой-нибудь точки, лежащей на первой плоскости, достаточно двум переменным, например x и y, придать произвольные значения, подставить эти значения в первое уравнение и найти третью переменную z. Пусть, например, $x = 0, y = 0$, тогда $-3z + 21 = 0$ и $z = 7$. Значит, точка $M(0, 0, 7)$ лежит на первой плоскости. Найдем расстояние от этой точки до второй плоскости

$$d = \frac{|-4 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 6 \cdot 7 + 7|}{\sqrt{16 + 144 + 36}} = \frac{49}{\sqrt{196}} = \frac{49}{14} = 3\frac{1}{2}.$$

Это и есть расстояние между данными плоскостями.

Пример 5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -3, 5)$, $M_2(3, 0, 1)$ и параллельной оси Oy.

Решение. Так как по условию задачи искомая плоскость параллельна оси Oy, коэффициент $B = 0$, т. е. ищем уравнение плоскости в виде $Ax + Cz + D = 0$. Поскольку искомая плоскость проходит через точки M_1 и M_2, их координаты должны удовлетворять уравнению плоскости. Значит, выполняются равенства

$$\begin{cases} 2A + 5C + D = 0 \\ 3A + C + D = 0. \end{cases}$$

Выразим, например, A и C через D. С этой целью удобно второе уравнение умножить на (-5) и прибавить к первому:

$$2A - 15A + 5C - 5C + D - 5D = 0$$

$$-13A - 4D = 0 \quad A = -\frac{4}{13}D,$$

тогда

$$C = -3A - D = \frac{12}{13}D - D = -\frac{1}{13}D.$$

Тогда уравнение примет вид

$$-\frac{4}{13}Dx - \frac{1}{13}Dz + D = 0.$$

Очевидно, что $D \neq 0$, так как в противном случае уравнение превращается в тождество, справедливое при любых значениях переменных x, y, z, и не задает плоскость. Раз так, то мы можем сократить уравнение на D и умножить его на (-13). Тогда получим

$$4x + z - 13 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

Пример 6. Могут ли плоскости $2x - 3y + 6z - 7 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 7 = 0$ служить гранями куба с центром в начале координат?

Решение. Чтобы плоскости могли служить гранями куба, нужно, чтобы они были параллельны или перпендикулярны. Выпишем нормальные векторы этих плоскостей: $\bar{n}_1 = (2, -3, 6)$, $\bar{n}_2 = (3, 6, 2)$. Очевидно, что $\bar{n}_1 \not\parallel \bar{n}_2$, так как $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{6}$. Проверим перпендикулярность: $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 6 - 18 + 12 = 0$. Значит, $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ и плоскости перпендикулярны.

Поскольку расстояния от центра куба до его граней одинаковы, осталось проверить, равны ли расстояния данных плоскостей от начала координат между собой:

$$d_1 = \frac{|-7|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = 1, \quad d_2 = \frac{7}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = 1.$$

Так как расстояния равны, то данные плоскости могут служить гранями куба с центром в начале координат.

Задачи

37. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(3,-2,1)$.

38. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5,-1,2)$ параллельно плоскости $x-3y+z+5=0$.

39. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $2x-3y+5z-1=0$ и $x+2y-z+6=0$.

40. Могут ли плоскости $x-2y+2z-5=0$ и $2x-y-2z+4=0$ служить гранями куба?

41. Грани куба лежат на плоскостях $x-2y+3z-14=0$ и $2x-4y+6z+56=0$. Найти объем куба.

42. Найти уравнение и расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,1)$, $M_2(3,0,2)$, $M_3(2,-1,1)$.

Глава 7

Прямая в пространстве

В отличие от плоскости, прямая в пространстве не может быть задана одним линейным уравнением. Поэтому нужно говорить об уравнениях прямой в пространстве. Их тоже несколько видов, и каждый вид имеет определенный геометрический смысл параметров.

1) ***Общие уравнения*** прямой в пространстве:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0. \qquad (*)$$

Прямая L задается как линия пересечения двух плоскостей $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Условие $(*)$ гарантирует, что плоскости P_1 и P_2 не параллельны. Мы помним, что $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2. Условие $(*)$ означает, что $|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2| \neq 0$, т. е. $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \neq \bar{0}$, что и означает, что $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$. Так как $L \subset P_1$, то $\bar{n}_1 \perp L$, аналогично $\bar{n}_2 \perp L$, откуда следует, что $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \| L$, значит, из общих уравнений прямой можно найти вектор, параллельный прямой, который называется ***направляющим вектором прямой***. В этом и состоит геометрический смысл параметров общих уравнений прямой.

2) ***Канонические уравнения*** прямой в пространстве

$$L: \ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Здесь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка прямой L, $\bar{s} = (m, n, p)$ — направляющий вектор прямой L.

3) ***Параметрические уравнения*** прямой в пространстве

$$L: \ \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Здесь тоже $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка прямой L, $\bar{s} = (m, n, p)$ — направляющий вектор L, t — параметр, произвольное действительное число. Каждому значению параметра t соответствует своя точка на прямой, поэтому параметрические уравнения удобно использовать в задачах, в которых требуется на прямой найти некоторую особую точку, обладающую дополнительными свойствами.

4) Уравнения прямой в пространстве, ***проходящей через две данные точки***

$$L: \ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Здесь $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две точки, лежащие на прямой. Конечно, эти точки не должны совпадать, иначе они не будут определять прямую. Однако некоторые координаты могут совпадать, и тогда один или два знаменателя могут оказаться равными нулю. Это означает, что соответствующий числитель нужно приравнять к нулю. Например, уравнения $\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ означают, что $x - 3 = 0$ и $\frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Наиболее удобными являются канонические уравнения прямой.

Пример 1. Найти канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$L: \ \begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Чтобы найти канонические уравнения, нужно найти направляющий вектор прямой и какую-нибудь точку, лежащую на прямой. Как было замечено выше, в качестве направляющего вектора можно взять $\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$. $\bar{n}_1 = (3, 2, -1)$, $\bar{n}_2 = (1, -1, 2)$.

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (3, -7, -5).$$

Чтобы найти какую-нибудь точку, лежащую на прямой, нужно найти какое-нибудь решение системы уравнений, задающих прямую L. Так как неизвестных в системе три, а уравнений два, одному из неизвестных придадим произвольное значение, например, $x = 0$, а два других неизвестных найдем из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y - z + 5 = 0 \\ -y + 2z - 4 = 0 \cdot 2 \end{array} \right. + \Rightarrow$$

$$3z - 3 = 0$$

$$z = 1.$$

Тогда $2y - 1 + 5 = 0$, $2y = -4$, $y = -2$. Значит, точка $M_0(0, -2, 1)$ лежит на прямой L. Теперь можем записать канонические уравнения прямой L:

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{-5}.$$

Пример 2. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -2, -3)$ перпендикулярно плоскости P: $3x - y + 5z - 1 = 0$.

Решение.

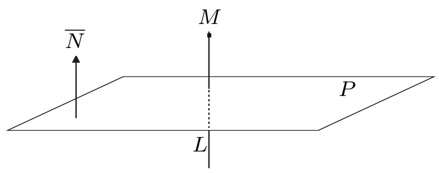


Рис. 32

Из рис. 32 очевидно, что в качестве направляющего вектора для искомой прямой можно взять нормальный вектор плоскости P, т. е. $\bar{s} = \bar{n} = (3, -1, 5)$, а точка, лежащая на прямой, дана в условии задачи. И мы получаем

$$L: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{5}.$$

Это и есть уравнения искомой прямой.

Пример 3. Дана пирамида с вершинами $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти уравнения высоты пирамиды, опущенной из вершины D, и точку пересечения этой высоты с основанием.

Решение. Здесь опять известна точка, лежащая на прямой. Нужно найти направляющий вектор. Как в предыдущей задаче, в качестве $\bar{s}$ можем взять любой вектор, перпендикулярный плоскости ABC (рис. 33)

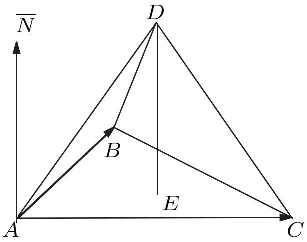


Рис. 33

Найдем

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-12, -24, 8) = -4(3, 6, -2).$$

Понятно, что в качестве направляющего можно взять вектор $\bar{s} = (3, 6, -2)$. Тогда уравнения DE имеют вид: $\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-8}{-2}$.

Чтобы найти координаты точки E, нам нужно знать уравнение плоскости ABC. Найдем это уравнение как уравнение плоскости, проходящей через данную точку (например, A) перпендикулярно данному вектору (например, $\bar{s}$).

$$3(x-2)+6(y-3)-2(z-1)=0$$

$$3x+6y-2z-22=0.$$

Для нахождения координат точки пересечения прямой с плоскостью удобно перейти к параметрическим уравнениям прямой, выразить x, y, z через t, подставить полученные выражения в уравнение плоскости, найти значение t, а затем координаты точки пересечения.

$$\begin{cases} \frac{x+5}{3}=t \\ \frac{y+4}{6}=t \\ \frac{z-8}{-2}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+3t \\ y=-4+6t \\ z=8-2t \end{cases}$$

$$3(-5+3t)+6(-4+6t)-2(8-2t)-22=0$$

$$9t+36t+4t-15-24-16-22=0$$

$$49t-77=0$$

$$t=\frac{77}{49}=\frac{11}{7}.$$

Чтобы найти координаты точки E, подставим найденное значение t в параметрические уравнения DE:

$$x_E=-5+3\cdot\frac{11}{7}=-\frac{2}{7}$$

$$y_E=-4+6\cdot\frac{11}{7}=\frac{38}{7}$$

$$z_E=8-2\cdot\frac{11}{7}=\frac{34}{7}$$

$$E\left(-\frac{2}{7},\frac{38}{7},\frac{34}{7}\right).$$

5) Рассмотрим задачу нахождения расстояния от точки до прямой в пространстве. Будем считать, что прямая L задана своими каноническими уравнениями. Тогда мы знаем точку M_0, лежащую на L, и направляющий вектор $\bar{s} \parallel L$. Пусть M_1 — произвольная точка пространства. Нужно найти расстояние от точки M_1 до прямой L. Рассмотрим рис. 34.

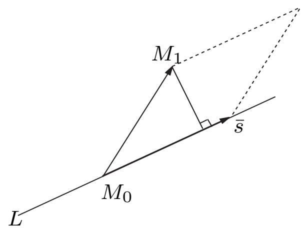


Рис. 34

Построим параллелограмм на векторах $\overline{M_0M_1}$ и $\bar{s}$. Тогда высота этого параллелограмма, опущенная на вектор $\bar{s}$, и будет равна расстоянию от точки M_1 до прямой L. $S_{\square} = h \cdot |\bar{s}|$, отсюда $h = \frac{S_{\square}}{|\bar{s}|}$. А теперь вспомним, что площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, равна модулю векторного произведения этих векторов, т. е. $S_{\square} = |\overline{M_0M_1} \times \bar{s}|$. Отсюда и получаем формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \bar{s}|}{|\bar{s}|},$$

где M_1 — данная точка, M_0 — фиксированная точка прямой, $\bar{s}$ — направляющий вектор прямой.

Пример 4. В условиях предыдущей задачи найти расстояние вершины D от ребра AB.

Решение. Здесь роль точки M_1 играет точка D, роль точки M_0 — точка A, а роль вектора $\bar{s}$ — вектор $\overline{AB}$. Поэтому имеем

$$d = \frac{|\overline{AD} \times \overline{AB}|}{|\overline{AB}|}$$

$$|\overline{AD}\times\overline{AB}| = |\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -7 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}| = |(35,-7,28)| =$$

$$= 7|(5,-1,4)| = 7\sqrt{25+1+16} = 7\sqrt{42}.$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

$$d = \frac{7\sqrt{42}}{\sqrt{17}} = 7\sqrt{\frac{42}{17}}.$$

Пример 5. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{0} \text{ и } \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{0}.$$

Решение. Поступим, как в аналогичной задаче на плоскости, а именно, на одной из прямых возьмем произвольную точку и найдем расстояние от этой точки до другой прямой. Положим $M_1(3,2,1)$ — точка, лежащая на первой прямой. $M_0(-1,1,0)$ — точка, лежащая на второй прямой, $\bar{s} = (4,3,0)$ — направляющий вектор, тогда

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1}\times\bar{s}|}{|\bar{s}|}$$

$$|\overline{M_0M_1}\times\bar{s}| = |\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}| = |(-3,4,8)| = \sqrt{9+16+64} = \sqrt{89}$$

$$|\bar{s}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$d = \frac{\sqrt{89}}{5}.$$

Пример 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,3)$ и прямую L: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$.

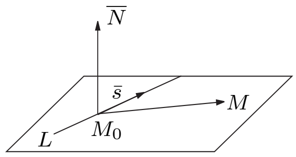


Рис. 35

Решение. Так как нам известна точка, лежащая на искомой плоскости, то удобнее всего искать уравнение плоскости как уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Следовательно, нужно из данных задачи постараться найти перпендикулярный к искомой плоскости вектор. На рис. 35 видно, что из данных задачи мы знаем два вектора, лежащих на плоскости: направляющий вектор прямой $\bar{s}$ и вектор $\overline{M_0M}$. Тогда их векторное произведение и будет искомым нормальным вектором плоскости

$$\bar{n} = \bar{s} \times \overline{M_0M}.$$

Из условия находим $\bar{s} = (2, 3, 4)$, $M_0(-1, 1, 0), \overline{M_0M} = (0, 1, 3)$.

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -6, 2).$$

Тогда уравнение искомой плоскости :

$$5(x+1) - 6(y-2) + 2(z-3) = 0$$

$$5x - 6y + 2z + 11 = 0.$$

Давайте проверим полученный ответ, т. е. убедимся в том, что точка M и прямая L лежат на плоскости.

Подставим координаты точки M в уравнение плоскости: $5 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 11 = 0$. Это верно. Чтобы убедиться, что прямая L лежит на плоскости, нужно проверить два факта: а) прямая параллельна плоскости; б) хотя бы одна точка прямой лежит на плоскости. Чтобы проверить а), нужно убедиться в том, что направляющий вектор прямой перпендикулярен вектору нормали плоскости, т.

е. что $\bar{s}\cdot\bar{n} = 0$. $\bar{n} = (5, -6, 2)$, $\bar{s}\cdot\bar{n} = (2, 3, 4)\cdot(5, -6, 2) = 10-18+8 = 0$. Выполняется.

Чтобы проверить б), возьмем точку $M_0(-1, 1, 0) \in L$ и подставим ее координаты в уравнение плоскости: $5 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 11 = 0$. Тоже выполняется.

Таким образом, найденный нами ответ верный.

Пример 7. Найти точку M_1, симметричную точке $M_0(1, 3, -1)$ относительно плоскости $3x + 4y - z + 10 = 0$.

Решение: Сначала найдем уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, 3, -1)$ перпендикулярно плоскости $3x+4y-z+10 = 0$. Нормальный вектор плоскости является направляющим для прямой, т.е. $\overline{s} = \overline{n} = (3, 4, -1)$. Канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{-1}.$$

Найдем точку пересечения этой прямой с плоскостью. Для этого запишем уравнения прямой в параметрическом виде, и систему из трех параметрических уравнений и плоскости решим совместно:

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t + 3 \\ z = -t - 1 \\ 3x + 4y - z + 10 = 0. \end{cases}$$

Подставим x, y, z в уравнение плоскости и найдем параметр t:
$3(3t + 1) + 4(4t + 3) - (-t - 1) + 10 = 0$
$9t + 3 + 16t + 12 + t + 1 + 10 = 0$
$26t = -26; t = -1.$

С помощью параметра $t = -1$ найдем координаты точки A пересечения прямой и плоскости:
$x = 3(-1) + 1 = -2$
$y = 4(-1) + 3 = -1$
$z = -(-1) - 1 = 0.$

Точка $A(-2; -1, 0)$ — это середина отрезка M_0M_1, поэтому координаты точки A равны полусумме координат концов отрезка M_0M_1: $A(x, y, z), M_0(1, 3, -1), M_1(x_1, y_1, z_1)$

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}; y = \frac{y_0 + y_1}{2}; z = \frac{z_0 + z_1}{2}$$

Подставим в формулы координаты точек A и M_0:

$-2 = \frac{1+x_1}{2}; x_1 + 1 = -4; x_1 = -5$

$-1 = \frac{3+y_1}{2}; y_1 + 3 = -2; y_1 = -5$

$0 = \frac{-1+z_1}{2}; z_1 - 1 = 0; z_1 = 1$

Симметричная точка имеет координаты $M_1(-5, -5, 1)$.

Пример 8. Найти точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, симметричную точке $M_0(-3, 3, 2)$ относительно прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{2}$.

Решение. Напишем уравнение плоскости, перпендикулярной заданной прямой и проходящей через точку M_0. Направляющий вектор прямой в этом случае будет вектором нормали искомой плоскости: $\overline{n} = \overline{s} = (-1, 4, 2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3, 3, 2)$, имеет вид:

$-1(x + 3) + 4(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$-x + 4y + 2z - 19 = 0$

$x - 4y - 2z + 19 = 0.$

Найдем точку A пересечения прямой и плоскости. Для этого, аналогично примеру 7, составим систему уравнений из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 4t - 3 \\ z = 2t + 5 \\ x - 4y - 2z + 19 = 0. \end{cases}$$

Найдем параметр t:

$-t - 4(4t - 3) - 2(2t + 5) + 19 = 0;\ -21t = -21;\ t = 1.$

Тогда $x = -1;\ y = 4 - 3 = 1;\ z = 2 + 5 = 7;\ A(-1, 1, 7)$. Координаты точки A — середины отрезка M_0M_1 равны полусумме координат точек M_1 и M_0 — концов отрезка M_0M_1: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_0(x_0, y_0, z_0) = (-3, 3, 2)$.

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}; y = \frac{y_0 + y_1}{2}; z = \frac{z_0 + z_1}{2}$$

$$-1=\frac{-3+x_1}{2}; x_1-3=-2; x_1=1$$

$$1=\frac{3+y_1}{2}; y_1+3=2; y_1=-1$$

$$7=\frac{2+z_1}{2}; z_1+2=14; z_1=12$$

$M_1(1,-1,12)$ — искомая симметричная точка.

Задачи

43. Найти канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$L:\ \begin{cases} 2x-3y+z-4=0 \\ 5x+2y-z+3=0. \end{cases}$$

44. Параллельны ли прямые

$$L_1:\ \begin{cases} -2x+y-5z+1=0 \\ 3x-2y-3z+5=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}\ ?$$

45. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(2,-3,1)$ на плоскость $x-y-4z+17=0$ (проекцию точки M на плоскость).

46. Стороны квадрата лежат на прямых

$$L_1:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{2} \quad \text{и} \quad L_2:\ \frac{x-6}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}.$$

Найти площадь квадрата.

47. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые из предыдущей задачи.

48. Параллельна ли прямая

$$L:\ \begin{cases} x-3y+5z-1=0 \\ 2x+y-3z+5=0 \end{cases} \quad \text{плоскости } 2x+y-3z+4=0?$$

Глава 8

Кривые второго порядка

§ 8.1. Окружность

Окружность — это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). В прямоугольной декартовой системе координат уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

где (a, b) — координаты ее центра C, а R — ее радиус (рис. 36).

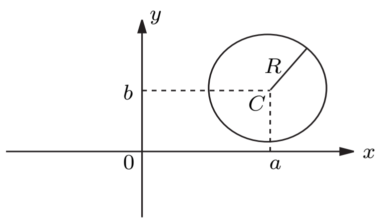


Рис. 36

Если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. если $a = 0,\ b = 0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Такие уравнения называются каноническими уравнениями окружности.

Если центр окружности находится в начале координат, то параметрические уравнения окружности имеют вид:

$$\begin{cases} x = R\cos\, t \\ y = R\sin\, t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Если центр окружности совпадает с полюсом полярной системы координат, то ее уравнение

$$\rho = R,$$

где R — радиус окружности.

Взаимное расположение точки $M(x_1, y_1)$ и окружности $x^2 + y^2 = R^2$ определяется такими условиями: если $x_1^2 + y_1^2 = R^2$, то точка M лежит на окружности; если $x_1^2 + y_1^2 < R^2$, то M лежит внутри окружности; если $x_1^2 + y_1^2 > R^2$, то точка M лежит вне окружности.

Пример 1. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB, где $A(4, -1)$, $B(-4, 5)$.

Решение. Координаты центра $C(a, b)$ найдем как координаты точки, делящей отрезок AB пополам:

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-4)}{2} = 0$$

$$b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2, \quad C(0; 2).$$

Радиус окружности R — это расстояние от точки C до точки A:

$$R = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Тогда уравнение окружности

$$x^2 + (y-2)^2 = 25.$$

Пример 2. Уравнение окружности $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ привести к каноническому виду.

Решение. Дополним выражения $x^2 - 2x$ и $y^2 + 6y$ до полных квадратов. Для этого к первому двучлену прибавим $1 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$, а ко второму $9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$. Эти же числа прибавим и к правой части равенства, куда перенесем свободный член:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -1 + 1 + 9,$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9 \text{ — это окружность}$$

с центром $C(1, -3)$ и радиусом $R = 3$.

Пример 3. Какая линия определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 65 = 0?$$

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 14y + 49) = -65 + 16 + 49,$$

$(x+4)^2+(y-7)^2 = 0$ — это уравнение определяет окружность радиуса 0, то есть точку $(-4; 7)$.

Пример 4. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 5y$ записать в полярной системе координат.

Решение. Используем связь между полярными и декартовыми координатами точки: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда уравнение окружности можно переписать в виде:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 5\rho\sin\varphi,$$

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 5\rho\sin\varphi,$$

$$\rho = 5\sin\varphi \text{ — это уравнение окружности}$$

в полярной системе координат с центром $C(0; 2,5)$ и радиусом $R = 2,5$ (рис. 37).

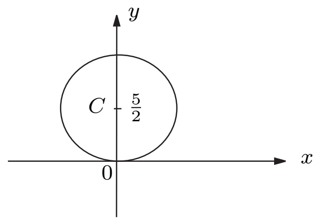


Рис. 37

Действительно, каноническое уравнение этой окружности

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Можно показать, что уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2Ry$ в полярной системе координат имеет вид $\rho = 2R\sin\varphi$.

Аналогично, $x^2 + y^2 = 2Rx \Rightarrow \rho = 2R\cos\varphi$.

Задачи

49. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $(4, -3)$ и проходящей через начало координат.

50. Найти координаты центра и радиусы окружностей:

а) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.

51. Записать в полярной системе координат уравнения окружностей, указать радиус и координаты центра:

а) $x^2 + y^2 = x$;

б) $x^2 + y^2 = -4y$.

§ 8.2. Эллипс

Эллипс — это множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние между фокусами F_1 и F_2 (рис. 38).

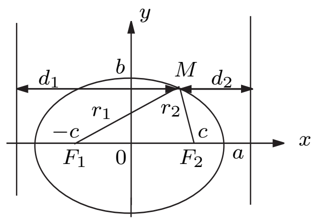


Рис. 38

Из определения следует, что $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$, и, если координаты фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, то $2a < 2c$, а каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a, b — ***полуоси эллипса***. При этом $a^2 = b^2 + c^2$, а $|\overline{F_1F_2}| = 2c$;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ — ***эксцентриситет эллипса***;

$r_1 = |\overline{F_1M}|, r_2 = |\overline{F_2M}|$ — фокальные радиусы точки M;

прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса и обладают следующим свойством:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

где d_1, d_2 — расстояния от точки M до соответствующей директрисы.

Если $a = b$, то эллипс превращается в окружность с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. Если центр эллипса находится не в начале координат, а в точке (x_0, y_0), то каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Отметим, что фокусы эллипса всегда лежат на большей оси. Приведенные выше формулы получены в предположении, что a — большая полуось ($a > b$). Если $a < b$, т. е. b — большая полуось и эллипс вытянут вдоль оси Oy (рис. 39), то фокусы будут иметь координаты $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, при этом $b^2 = a^2 + c^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$ и уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

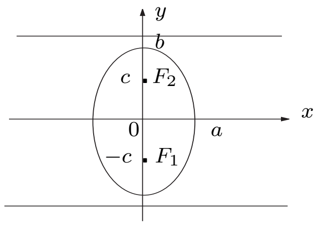


Рис. 39

Пример 5. Дано уравнение эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

Решение. Разделив обе части данного уравнения на 225, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

откуда $a^2 = 25$, $b^2 = 9$. Значит, длины полуосей равны соответственно $a = 5$, $b = 3$. Так как $a^2 = b^2 + c^2$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Тогда координаты фокусов: $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$. Находим эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$. Запишем уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{25}{4}$.

Пример 6. Составить каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно начала координат, и с фокусами, лежащими на оси Ox, если:

1) расстояние между фокусами равно 8, а его большая ось равна 10;

2) малая полуось равна 5, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

3) его большая полуось равна 4, а расстояние между директрисами равно 16.

Решение. 1) Расстояние между фокусами равно $2c = 8$, значит, $c = 4$. По условию задачи $2a = 10$, отсюда $a = 5$. Находим $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$; $b = 3$. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) Известно, что $b = 5$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - 25}$. Тогда $\frac{\sqrt{a^2-25}}{a} = \frac{12}{13}$; $\frac{a^2-25}{a^2} = \frac{144}{169}$; $a^2 = 169$; $a = 13$. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

3) Известно, что $a = 4$, а расстояние между директрисами $2d = 16$, т. е. $d = 8$ — это расстояние от начала координат до директрисы. Значит, уравнение директрисы $x = \pm 8$, с другой стороны, $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{4}{\varepsilon}$. Отсюда $\frac{4}{\varepsilon} = 8$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Из формулы $\varepsilon = \frac{c}{a}$ найдем c: $\frac{1}{2} = \frac{c}{4}$, $c = 2$. Тогда малая полуось $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $b^2 = 12$. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Пример 7. Уравнение эллипса привести к каноническому виду и найти координаты его центра C, полуоси и эксцентриситет

$$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$$

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y, для чего перепишем уравнение следующим образом:

$$4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) = 32.$$

Теперь дополним выражения в скобках до полных квадратов

$$4(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) = 32 + 4 + 12;$$

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48;$$

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1 \text{ — это уравнение эллипса}$$

с центром в точке $C(1,-2)$ и полуосями $a=\sqrt{12},\ b=4$. Тогда $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2$. Эллипс вытянут вдоль оси Oy, большая полуось $b=4$ и, следовательно, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Пример 8. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, сделать чертеж:

1) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$;

2) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$.

Решение. 1) Возведем в квадрат обе части уравнения $x^2=\frac{4}{9}(9-y^2)$ и приведем его к каноническому виду $x^2+\frac{4}{9}y^2=4$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ — это эллипс с центром в начале координат и полуосями $a=2,\ b=3$. Исходным уравнением задана левая половина эллипса (рис. 40), где $x\le 0$.

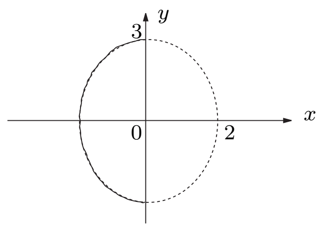


Рис. 40

Весь эллипс изобразим пунктиром, а часть, заданную исходным уравнением, сплошной линией.

2) Перепишем уравнение, отделив корень, и возведем в квадрат обе части

$$y+7=\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2};\ (y+7)^2=\frac{4}{25}(16+6x-x^2).$$

Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{4}{25}(x^2-6x)+(y+7)^2=\frac{4}{25}\cdot 16;$$

$$\frac{4}{25}(x^2-6x+9)+(y+7)^2=\frac{64}{25}+\frac{4}{25}\cdot 9;\ \frac{4}{25}(x-3)^2+(y+7)^2=4;$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1;\ C(3,-7),\ a=5;\ b=2\ (\text{рис. } 41).$$

Исходным уравнением задана верхняя половина эллипса, так как $y \geq -7$ (рис. 41).

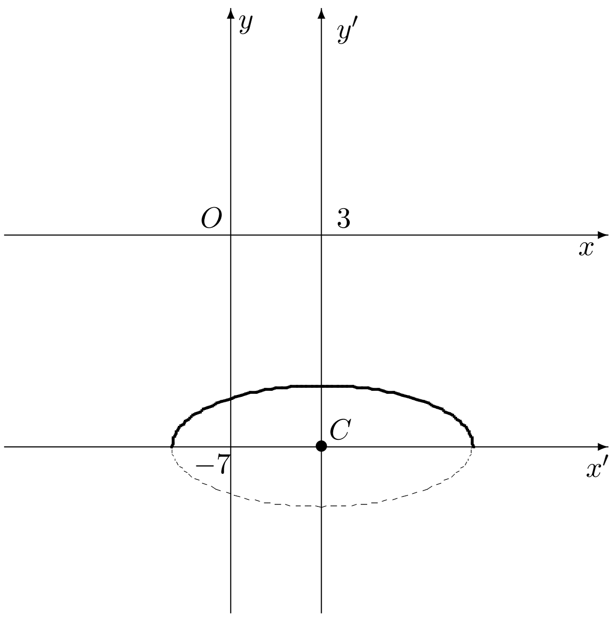


Рис. 41

Задачи

52. Дано уравнение эллипса $9x^2+5y^2=45$. Найти длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

53. Составить каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно начала координат и с фокусами, лежащими на оси Ox, если:

а) расстояние между фокусами равно 6, а большая полуось равна 5;

б) малая полуось равна 3, эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) большая ось равна 20, эксцентриситет равен $\frac{4}{5}$;

г) сумма полуосей равна 8, расстояние между фокусами 8;

д) расстояние между директрисами равно 18, большая ось равна 12.

54. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси и эксцентриситет:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

55. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, и сделать чертеж:

а) $y = -\frac{5}{3}\ \sqrt{9 - x^2}$;

б) $x = +\frac{1}{7}\ \sqrt{49 - y^2}$;

в) $y = 1 - \frac{4}{3}\ \sqrt{-6x - x^2}$;

г) $x = -5 - \frac{2}{3}\ \sqrt{8 + 2y - y^2}$.

§ 8.3. Гипербола

Гипербола — это множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (эта постоянная положительна и меньше расстояния между фокусами, ее обозначают через $2a$).

Если фокусы гиперболы $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 42), то каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$; a, b — ***полуоси гиперболы***, прямые $y = \pm\ \frac{b}{a}\ x$ —

асимптоты гиперболы, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ — эксцентриситет гиперболы.

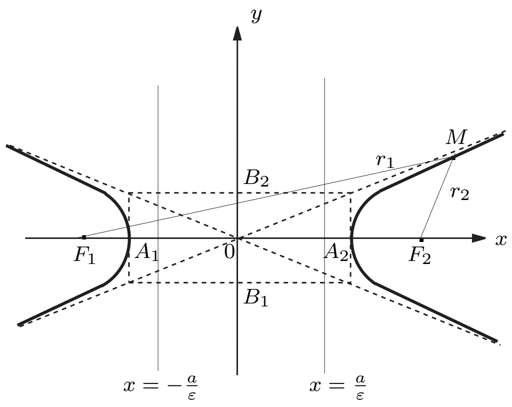


Рис. 42

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ называют ***вершинами гиперболы***, точку O — ее центром. Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2| = 2a$, называется ***действительной осью*** гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2| = 2b$ — ***мнимой осью***. Прямая F_1F_2 называется фокальной осью гиперболы. Расстояния r_1 и r_2 от точки M гиперболы до ее фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ являются ***директрисами*** гиперболы и обладают тем же свойством, что и директрисы эллипса.

Если $a = b$, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется ***равнобочной***. Ее асимптоты образуют прямой угол.

Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид $xy = m$ или $y = \dfrac{m}{x}$ и мы получим в точности «школьную» гиперболу.

Если фокусы гиперболы расположены на оси Oy, то ее уравнение имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(рис. 43)},$$

ее эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а директрисы $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.

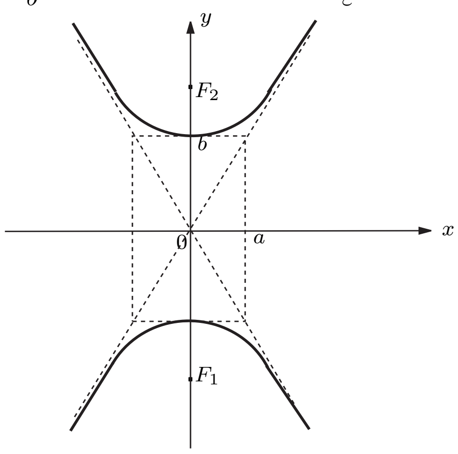


Рис. 43

Если центр гиперболы находится в точке (x_0, y_0), а фокальная ось параллельна оси Ox, то ее каноническое уравнение:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Пример 9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}\ x$ и расстояние между фокусами равно 20. Сделать чертеж.

Решение. Из условия $2c = 20$, т. е. $c = 10$. С другой стороны, $c^2 = a^2 + b^2$, а уравнения асимптот $y = \pm\ \frac{b}{a}\ \ x$. Решим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \end{cases}; \quad \begin{array}{l} b = \frac{4}{3};a,\ a^2 + \frac{16}{9}\ a^2 = 100, \\ \frac{25}{9}a^2 = 100;\ a^2 = 36;\ a = 6,\ b = 8. \end{array}$$

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Для построения асимптот строят осевой прямоугольник гиперболы со сторонами $x = a,\ x = -a,\ y = b,\ y = -b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины его, являются асимптотами гиперболы. Вершины гиперболы находятся в точках $(-6, 0)$ и $(6, 0)$ (рис. 44).

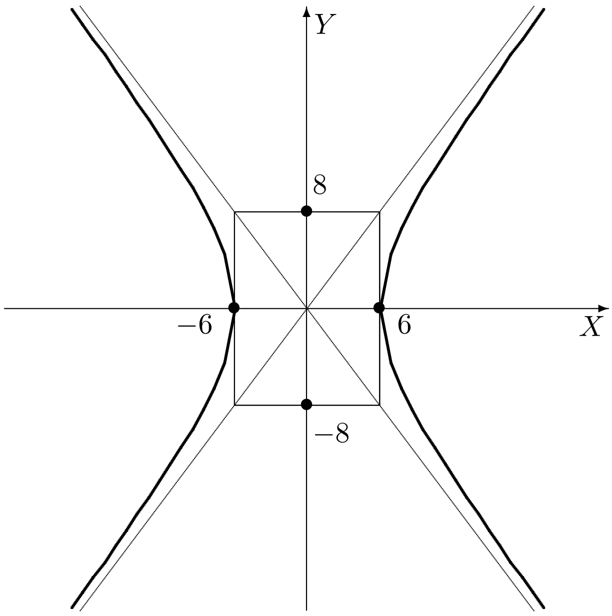


Рис. 44

Пример 10. Написать уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если расстояние между директрисами равно 8, а эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{5}/2$. Сделать чертеж.

Решение. Так как фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнения директрис $y = \pm\ \dfrac{b}{\varepsilon}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$.

Расстояние между директрисами $d = \left|\dfrac{b}{\varepsilon} - \left(-\dfrac{b}{\varepsilon}\right)\right| = \dfrac{2b}{\varepsilon} = 8$, т. е. $b = 4\varepsilon = 4\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$. Но $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, или $\varepsilon^2 b^2 = a^2 + b^2$. Подставим в это равенство значения b и ε и получим $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot (2\sqrt{5})^2 = a^2 + (2\sqrt{5})^2$, $\dfrac{5}{4} \cdot 4 \cdot 5 = a^2 + 20$, отсюда $a^2 = 5$, и уравнение гипреболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

На полуосях $a = \sqrt{5},\ b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ строим осевой прямоугольник и проводим асимптоты гиперболы. Вершины гиперболы лежат в точках $(0; -2\sqrt{5})$ и $(0; 2\sqrt{5})$ (рис. 45)

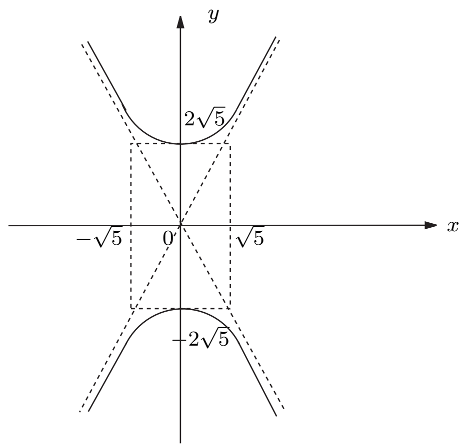


Рис. 45

Пример 11. Определить, как расположена прямая относительно гиперболы: пересекает ли, касается или проходит вне ее. Найти точку касания или точки пересечения, если они есть:

а) $x - y - 3 = 0,\ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1;$

б) $x - 2y + 1 = 0,\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$

в) $7x - 5y = 0,\ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Решение. а) Решим систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, $y = x - 3,\ x^2 - 4(x-3)^2 = 12,\ x^2 - 4x^2 + 24x - 36 - 12 = 0,\ 3x^2 - 24x + 48 = 0,\ x^2 - 8x + 16 = 0$. Дискриминант $D = 0$, значит, корни квадратного уравнения совпадают: $x_1 = x_2 = 4$. Тогда $y = 4 - 3 = 1$. Прямая касается гиперболы в точке $(4; 1)$.

б) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$, $\begin{array}{l} x = 2y - 1 \\ \frac{(2y-1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \end{array}$
$9(2y-1)^2 - 16y^2 = 16 \cdot 9;\ 36y^2 - 36y + 9 - 16y^2 - 144 = 0;$ $20y^2 - 36y - 135 = 0;\ D = 12096 \neq 0.$

Получим два решения квадратного уравнения, значит, прямая пересекает гиперболу в двух точках. Найдем точки пересечения: $y = \frac{36 \pm \sqrt{12096}}{40} = \frac{36 \pm 12\sqrt{84}}{40} = \frac{9 \pm 3\sqrt{84}}{10} \approx \frac{9 \pm 3 \cdot 9{,}16}{10}$; $y_1 \approx 3{,}65,\ x_1 \approx 6{,}3;\ y_2 \approx -1{,}85,\ x_2 \approx -4{,}7$. Итак, точки пересечения гиперболы и прямой $(6{,}3; 3{,}65)$ и $(-4{,}7; -1{,}85)$.

в) $\begin{cases} 7x - 5y = 0 \\ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$ $\begin{array}{l} y = \frac{7}{5}\,x,\ \frac{x^2}{25} - \frac{49x^2}{25 \cdot 16} = 1,\ 16x^2 - 49x^2 = 400, \\ -33x^2 = 400,\ x^2 = -\frac{400}{33}. \end{array}$

Квадратное уравнение не имеет решения среди действительных чисел, значит, прямая и гипербола не имеют общих точек, они не пересекаются.

Пример 12. Уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ привести к каноническому виду и найти координаты ее центра C, полуоси и эксцентриситет. Сделать чертеж.

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y, как это делали в примере 3 для эллипса:

$9(x^2 + 10x) - 16(y^2 - 2y) = 367,$

$9(x^2 + 10x + 5^2) - 16(y^2 - 2y + 1) = 367 + 9 \cdot 25 - 16,$

$9(x + 5)^2 - 16(y - 1)^2 = 576,$

$\dfrac{(x+5)^2}{64} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$ — это гипербола с полуосями $a = 8$, $b = 6$, центром $C(-5;1)$. Чтобы вычислить эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, из уравнения $c^2 = a^2 + b^2$ найдем $c = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, тогда $\varepsilon = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

Для построения гиперболы (рис. 46) сделаем параллельный перенос осей координат в точку $C(-5,1)$ — центр гиперболы. Вспомогательные координатные оси обозначим x' и y'. На них строим осевой прямоугольник гиперболы со сторонами $x' = 8$, $x' = -8$, $y' = 6$, $y' = -6$. Через противоположные вершины прямоугольника и его центр C проводим асимптоты гиперболы $y' = \pm\dfrac{8}{6}\, x'$ или $y' = \pm\dfrac{4}{3}\, x'$. Все вспомогательные линии наносим пунктиром. Теперь сплошной линией рисуем ветви гиперболы, вершины которой лежат на оси Cx' в точках $A_1(-8,0)$ и $A_2(8,0)$.

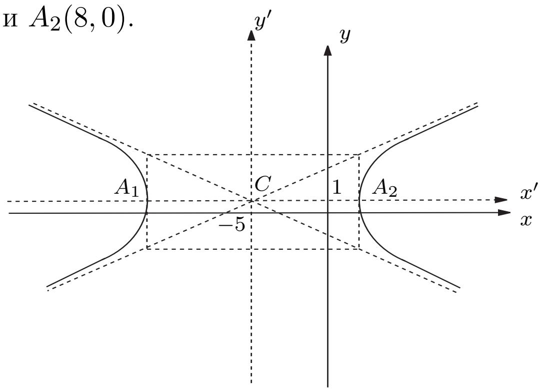


Рис. 46

Пример 13. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$. Сделать чертеж.

Решение. Перепишем уравнение, отделив корень, и возведем в квадрат обе части

$$y - 7 = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13};\ (y-7)^2 = \frac{9}{4}(x^2-6x+13).$$

Приведем уравнение к каноническому виду

$9(x^2-6x+13) - 4(y-7)^2 = 0;$

$9[(x^2-6x+9)-9+13]-4(y-7)^2=0;$

$9(x-3)^2-4(y-7)^2=-36;$

$-\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y-7)^2}{9}=1$ — это гипербола с центром в точке $C(3,7)$, полуосями $a=2$, $b=3$, и вершинами, лежащими на вспомогательной оси Cy'. Исходным уравнением задана только нижняя половина гиперболы (ниже линии $y=7$). Сделаем чертеж (рис. 47)

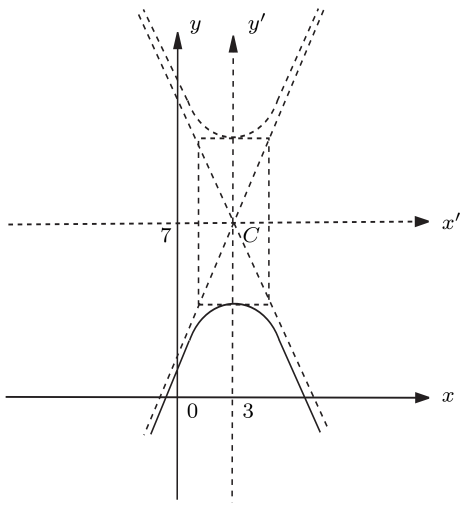


Рис. 47

Вспомогательные оси x' и y' проходят через точку $C(3,7)$. На новых осях строим прямоугольник, проводим асимптоты, а затем ветви гиперболы. Все эти построения выполняем пунктиром и только линию, заданную исходным уравнением, делаем сплошной.

Задачи

56. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox симметрично началу координат, если действительная ось равна 16 и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{5}{4}$. Сделать чертеж.

57. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Oy симметрично началу координат, если:

а) мнимая ось равна $4\sqrt{3}$, гипербола проходит через точку $(6, -4)$;

б) уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}\,x$ и расстояние между вершинами 48;

в) расстояние между директрисами $\frac{50}{7}$, эксцентриситет $\frac{7}{5}$.

58. Определить эксцентриситет равнобочной гиперболы.

59. Найти взаимное расположение прямой $4x - 3y - 16 = 0$ и гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

60. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C, полуоси и эксцентриситет. Сделать чертеж:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

61. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, и сделать чертеж:

а) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$;

б) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.

§ 8.4. Парабола

Парабола — это множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки (фокуса) и заданной прямой (директрисы). Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p. Число p называется ***параметром параболы***.

Если в системе координат Oxy уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, и фокус $F(\frac{p}{2}, 0)$, то уравнение параболы примет следующий канонический вид $y^2 = 2px$.

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (рис. 48; $p > 0$).

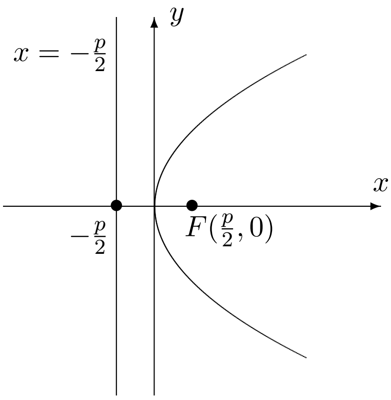


Рис. 48

Уравнение $x^2 = 2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат. Ее фокус имеет координаты $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$, а директриса — уравнение $y = -\dfrac{p}{2}$. Если ветви параболы обращены в отрицательную сторону соответствующей оси, то ее уравнение приобретает вид $y^2 = -2px$ или $x^2 = -2py$.

Если ось симметрии параболы параллельна оси Ox и ее вершина находится не в начале координат, а в точке $C(x_0, y_0)$, то каноническое уравнение параболы примет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Пример 14. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$.

Решение. Парабола задана каноническим уравнением вида $y^2 = 2px$. Следовательно, $2p = 12$, $p = 6$. Тогда координаты фокуса $F(3, 0)$, а уравнение директрисы $x = -3$.

Пример 15. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy, с центром в начале координат, если она проходит через точку $A(2, -3)$.

Решение. Искомая парабола симметрична относительно оси Oy, ее вершина лежит в начале координат, ветви ее направлены вниз, так как точка $A(2; -3)$ лежит ниже оси Ox. Поэтому уравнение искомой параболы имеет вид $x^2 = -2py$. Поскольку точка $A(2, -3)$

лежит на параболе, ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, т. е. $2^2 = -2p\cdot(-3)$, откуда $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ и $x^2 = -\frac{4}{3}y$ — уравнение параболы.

Пример 16. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины C и величину параметра p. Сделать чертеж:

а) $x^2 = 2 - y$;

б) $y = 4x^2 - 8x + 7$.

Решение. а) Перепишем уравнение $x^2 = 2 - y$ следующим образом: $x^2 = -(y-2)$, откуда следует, что $y - 2 \leq 0, y \leq 2$, то есть ветви направлены вниз. Тогда каноническое уравнение имеет вид $x^2 = -2p(y - y_0)$, откуда $-2p = -1$, $p = \frac{1}{2}$, вершина параболы C имеет координаты $C(0;2)$. Сделаем чертеж (рис. 49).

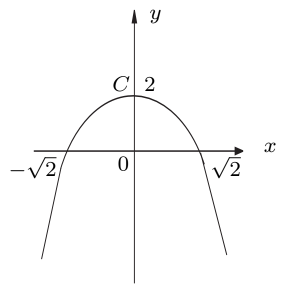


Рис. 49

б) В уравнении $y = 4x^2 - 8x + 7$ выделим полный квадрат по переменной x:

$y = 4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 7$, $\quad y - 3 = 4(x-1)^2$ или $(x-1)^2 = \frac{1}{4}(y-3)$. Сравним с каноническим уравнением параболы $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Тогда $2p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{8}$. Координаты вершины $C(1,3)$ (рис. 50).

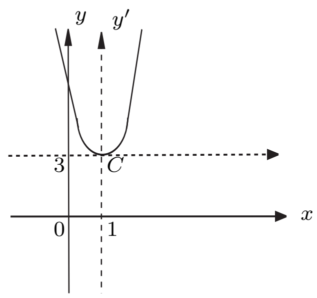


Рис. 50

Сделаем параллельный перенос осей в точку $C(1;3)$. Парабола симметрична относительно оси Cy', ветви направлены вверх, точка пересечения с осью Oy: $x=0,\ y=7$.

Пример 17. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Сделать чертеж:

а) $y=+\sqrt{-x}$;

б) $x=-4+3\sqrt{y+5}$.

Решение. а) $y=+\sqrt{-x}$. Возведем в квадрат обе части равенства $y^2=-x$. Это каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной оси абсцисс, ветви которой направлены в отрицательную сторону оси Ox. Исходным уравнением задана только верхняя половина параболы ($y>0$), поэтому ее рисуем сплошной линией, другую половину пунктиром (рис. 51).

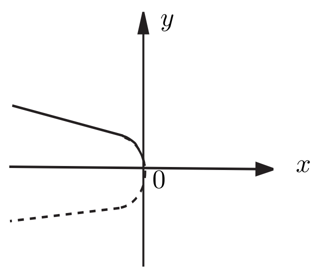


Рис. 51

б) $x=-4+3\sqrt{y+5}$. Отделим корень и возведем обе части уравнения в квадрат: $x+4=3\sqrt{y+5}$; $(x+4)^2=9(y+5)$. Это парабола с вершиной в точке $C(-4, -5)$. Исходным уравнением задана часть параболы, расположенная вправо от прямой $x = -4$ (рис. 52).

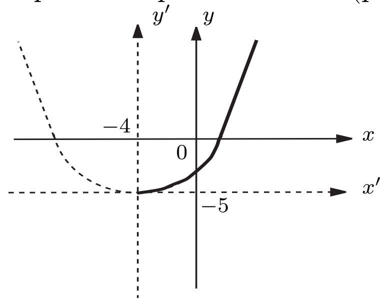


Рис. 52

Задачи

62. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев (вершина параболы в начале координат):

а) расстояние от фокуса, лежащего на оси Ox, до вершины равно 4;

б) расстояние от фокуса, расположенного на оси Oy, до директрисы равно 6;

в) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M(1; 2)$;

г) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $M(5; 1)$.

63. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины C и величину параметра p. Сделать чертеж:

а) $x^2 = 6y + 2$;

б) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

в) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

64. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Сделать чертеж:

а) $y = -3\sqrt{-2x}$;

б) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$;

в) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$.

Глава 9

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

В основе метода Гаусса лежит алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду. Поэтому прежде всего определим ступенчатый вид матрицы.

Ступенчатым видом называется такой вид матрицы, в котором каждая строка, начиная со второй, имеет нулей слева хотя бы на один больше, чем предыдущая.

$$\text{Схематично: } A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$$

Здесь $*$ означает любое ненулевое число. Вообще говоря, ступенчатая матрица не обязательно имеет ненулевой элемент на месте (11), но мы будем рассматривать именно такой случай. Важно понять, что «ступеньки» в ступенчатом виде имеют высоту ровно 1 и не больше, ширина же ступеньки может быть произвольной, но, конечно, не меньше 1.

Любая матрица приводится к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, к которым относятся:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на любое число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на какое-либо число.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду следующий.

Предположим, что в матрице A первый столбец ненулевой, т. е. в первом столбце есть хотя бы один ненулевой элемент. Тогда на первом шаге с помощью перестановки строк поставим этот элемент в верхний левый угол на место (11). На втором шаге, умножая первую строку на подходящие числа и прибавляя ее к остальным строкам, получаем нули на всех остальных местах первого столбца. После этого преобразования наша матрица выглядит так:

$$A \sim \left(\begin{array}{|cc|ccc} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

Таким образом мы устроили первую «ступеньку». Теперь мы уже не трогаем первую строку и делаем точно такие же преобразования с матрицей A', в которой первый столбец имеет хотя бы один ненулевой элемент. После этого получаем

$$A \sim \left(\begin{array}{|cc|c|cc} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cline{1-2} 0 & 0 & * & \cdots & \cdots \\ \cline{3-5} \vdots & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & A'' & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

Как видите, у нас уже две «ступеньки». Продолжив этот процесс, мы и приведем матрицу A к ступенчатому виду. Процесс закончится либо на последней строке матрицы A, либо на той строке, ниже которой все строки окажутся нулевыми.

Описанный процесс напоминает «зарабатывание» нулей в определителе. Там мы замечали, что удобнее всего это делать с помощью единицы. Поэтому и в описанном алгоритме стараются всякий раз в «угол» ступеньки поставить единицы. Правда, если, например, все числа столбца делятся на 2, то роль единицы играет двойка.

Теперь обратимся к системам. Мы уже решали системы линейных уравнений методом Крамера. Но там системы были обязательно квадратные и с определителем, не равным нулю. Метод же Гаусса применим к произвольным системам. В крамеровских системах решение было единственным, в произвольных системах это не обязательно.

Все системы подразделяются на совместные и несовместные. Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система называется ***несовместной***. Но и совместные системы тоже бывают разные. Если система имеет единственное решение, она называется ***определенной***, если бесконечно много решений — то ***неопределенной***. Значит, по числу решений все системы разделяются так:

Число решений	0	1	∞
Система	Несовместная	Определенная	Совместная неопределенная

Обращаем ваше внимание на то, что не бывает совместных систем с конечным числом решений, отличным от единицы.

Чем же определяется тип системы? Конечно же, ее матрицами. Пусть дана произвольная система линейных уравнений

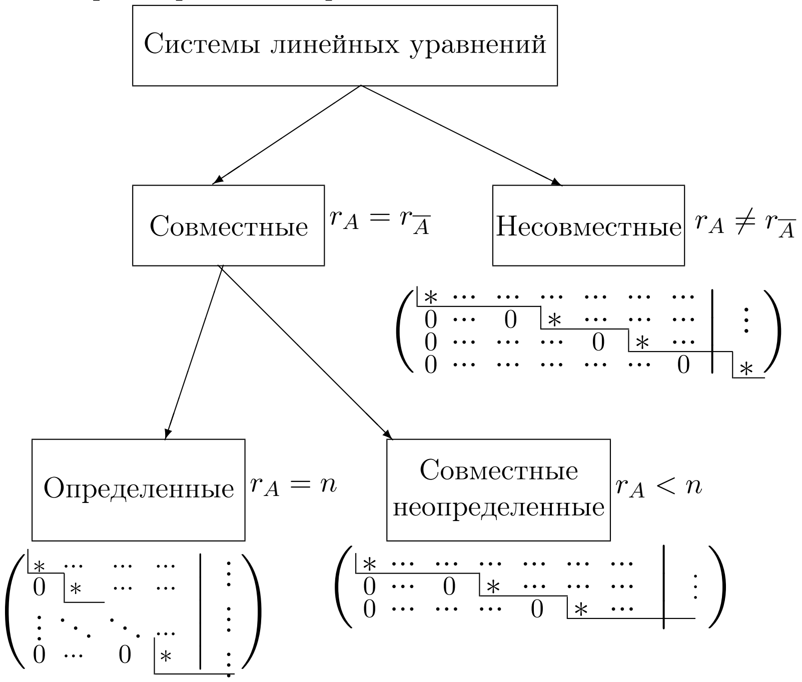
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

С ней связывают две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \text{ — } \textbf{\textit{матрица системы}},$$

$$\bar{A} = \left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{matrix} \right)$$ — ***расширенная матрица системы***.

Тип системы определяют ранги этих матриц. Напомним, что ранг матрицы равен числу ненулевых строк в ступенчатом виде этой матрицы. Обозначим $rang(A) = r_A$, $rang(\bar{A}) = r_{\bar{A}}, n$ — число неизвестных. Приведем схему типов систем в зависимости от ступенчатого вида расширенной матрицы системы



Теперь понятно: чтобы определить тип системы, нужно ее расширенную матрицу привести к ступенчатому виду. Если при приведении к ступенчатому виду появится «нехорошая» строка, в которой все нули, а за чертой не нуль, то система не совместна и решений нет. Если же такая строка не появилась, то система совместна. Если при этом ступенчатый вид получился треугольный, т. е. число ненулевых строк равно числу столбцов, или, что то же самое, $r_A = n$, то система определенная и имеет единственное решение, если же число ненулевых строк меньше числа столбцов ($r_A < n$), то система совместная неопределенная и имеет бесконечно много решений. Итак, при решении системы нужно:

1) привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду и определить тип системы;

2) если система совместна, найти ее решение.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 1 \\ -2x - y + 3z = 5 \\ 5x + 7y + 3z = 9. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Поскольку в первом столбце нет единицы, получим ее, прибавив вторую строку к первой

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Теперь с помощью этой единицы получим нули под ней

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 17 \\ 0 & -3 & -7 & -21 \end{array}\right).$$

После этого работаем с матрицей A', т. е. первую строку переписываем без изменений, а преобразования делаем со второй и третьей строками. В первом столбце матрицы A' все числа делятся на 3, поэтому получать 1 в верхнем левом углу не нужно, ее роль играет 3. Получим нуль под 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 17 \\ 0 & -3 & -7 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Приведение к ступенчатому виду закончено. У нас получилась «нехорошая» строка (третья), из чего мы делаем вывод, что система не совместна, то есть решений не имеет.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -3 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 5x - 2y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Получим единицу в верхнем левом углу и нули под этой единицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ & \\ & \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & -11 & 11 & -11 \\ 0 & -22 & 18 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ :(-11) \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -9 & 9 \end{array}\right) \sim$$

продолжим преобразования с матрицей A'

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -9 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ (-11) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

приведение к ступенчатому виду закончено.

Расширенная матрица системы привелась к треугольному виду, число ненулевых строк равно числу столбцов ($r_A = n$). Значит, система определенная и имеет единственное решение. Как его найти? Первый путь состоит в том, чтобы постепенно находить неизвестные, поднимаясь снизу вверх. Перепишем последнюю строку полученной матрицы на языке уравнений: $z = -1$. Теперь поднимемся на одну строку вверх и перепишем вторую строку на языке уравнений: $y - z = 1$, тогда $y = z + 1$, т. е. $y = -1 + 1 = 0$. Теперь перепишем первую строку на языке уравнений: $x + 4y - 3z = 4$, тогда $x = -4y + 3z + 4 = -4 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 4 = 1$. Итак, решение системы $x = 1,\ y = 0,\ z = -1$.

Другой путь состоит в применении так называемого «обратного хода» алгоритма Гаусса, т. е. получении нулей снизу вверх, вначале над последней единицей, потом над предпоследней и т. д., в результате чего матрица системы приводится к единичной, а в столбце свободных членов получаются значения неизвестных. Рассмотрим это на нашем примере.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {}_{1} \\ {}_{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {}_{(-4)} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Первая строка на языке уравнений означает, что $x = 1$, вторая, что $y = 0$, третья, что $z = -1$, т. е. мы получили решение системы: $x = 1,\ y = 0,\ z = -1$.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + y - 3z = 11 \\ x - 10y + 6z = -11. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 11 \\ 1 & -10 & 6 & -11 \end{array}\right) \sim$$

поставим третью строку на первое место

$$\sim \left(\begin{array}{lll|c} 1 & -10 & 6 & -11 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rceil(-2)\;\rceil(-5) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{lll|c} 1 & -10 & 6 & -11 \\ 0 & 17 & -11 & 22 \\ 0 & 51 & -33 & 66 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rceil(-3) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -10 & 6 & -11 \\ 0 & 17 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -$$

приведение к ступенчатому виду закончено. Мы попали в случай, когда число ненулевых строк меньше числа неизвестных, а это означает, что система совместная и неопределенная и имеет бесконечно много решений. В таких случаях рассматривают общее решение и частное решение. ***Общим решением*** в параметрической форме называется выражение неизвестных как линейных функций от некоторых параметров, которые при подстановке в исходную систему обращают все уравнения в тождества.

Для получения такого решения поступают следующим образом:

1. Все неизвестные делят на ***базисные*** и ***свободные***. В качестве базисных удобно выбирать те неизвестные, которые попали в «углы» ступенек, а в качестве свободных — все остальные.

2. В столбцах базисных неизвестных получают единичную матрицу с помощью «обратного хода» алгоритма Гаусса.

3. Переписывают строки расширенной матрицы на языке уравнений и выражают базисные неизвестные через свободные. Это и будет общим решением в параметрической форме, роль параметров играют свободные неизвестные.

4. Любое ***частное решение*** получается из общего при конкретных значениях свободных неизвестных.

Найдем общее решение нашей системы, руководствуясь приведенной схемой.

1. В «углы» ступенек попали первое и второе неизвестные, т. е. x и y, поэтому x, y — базисные неизвестные, z — свободное неизвестное.

2. Получим в первом и втором столбцах единичную матрицу, используя «обратный ход» алгоритма Гаусса. При решении системы методом Гаусса полностью нулевые строки отбрасывают, поэтому расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 6 & -11 \\ 0 & 17 & -11 & 22 \end{array}\right) {}_{\frac{10}{17}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6-\frac{110}{17} & -11+\frac{220}{17} \\ 0 & 17 & -11 & 22 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{8}{17} & \frac{33}{17} \\ 0 & 17 & -11 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :17 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{8}{17} & \frac{33}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{17} & \frac{22}{17} \end{array}\right).$$

Мы получили единичную матрицу в первом и втором столбцах. Теперь легко выразить базисные неизвестные x и y через свободное неизвестное z.

3. Перепишем строки расширенной матрицы на языке уравнений:

$$x - \frac{8}{17}z = \frac{33}{17}$$

$$y - \frac{11}{17}z = \frac{22}{17}.$$

Выразим базисные неизвестные через свободное:

$$x = \frac{8}{17}z + \frac{33}{17}$$

$$y = \frac{11}{17}z + \frac{22}{17}.$$

Это и есть общее решение системы в параметрической форме.

Давайте в этом убедимся. Подставим эти выражения в первое уравнение системы:

$$2\left(\frac{8}{17}z + \frac{33}{17}\right) - 3\left(\frac{11}{17}z + \frac{22}{17}\right) + z = 0.$$

Убедимся, что это уравнение обращается в тождество

$$\frac{16}{17}z+\frac{66}{17}-\frac{33}{17}z-\frac{66}{17}+z=-z+z=0.$$

Подставим во второе и третье уравнения

$$5\left(\frac{8}{17}z+\frac{33}{17}\right)+\frac{11}{17}z+\frac{22}{17}-3z=\frac{40}{17}z+\frac{11}{17}z+\frac{165}{17}+\frac{22}{17}-3z=$$

$$=\frac{187}{17}=11.$$

$$\frac{8}{17}z+\frac{33}{17}-10\left(\frac{11}{17}z+\frac{22}{17}\right)+6z=\frac{8}{17}z+\frac{33}{17}-\frac{110}{17}z-\frac{220}{17}+6z=$$

$$=-\frac{102}{17}z+6z-\frac{187}{17}=-11.$$

Как видим, и эти уравнения обратились в тождества. Значит, найденное нами общее решение верно.

4. Чтобы получить частное решение, придадим z любое значение, например, пусть $z=-2$. Тогда $x=-\frac{16}{17}+\frac{33}{17}=\frac{17}{17}=1$, $y=-\frac{22}{17}+\frac{22}{17}=0$. Частное решение $x=1,\ y=0,\ z=-2$. Понятно, что, придавая z бесконечно много частных значений, мы получим бесконечно много частных решений. Вот почему, как только при решении системы появляется хотя бы одно свободное неизвестное, система имеет бесконечно много решений.

Пример 4. Найти общее решение в параметрической форме.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2\\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3\\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2\\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Как видите, в первом столбце все числа делятся на 3, поэтому здесь не нужно устраивать 1 в верхнем левом углу, роль единицы играет 3. Получим нули под 3 в первом столбце.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) & (-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim$$

В первом столбце оставшейся матрицы все числа делятся на 6, поэтому опять не нужно получать единицу. Получим нули под шестеркой

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Приведение к ступенчатому виду закончено. Мы видим, что система совместная неопределенная. Будем искать общее решение в параметрической форме. Для этого прежде всего определим, какие неизвестные можно взять за базисные. Поскольку в «углы» ступенек попали x_1 и x_3, они и будут базисными, тогда x_2, x_4 — свободные. Отбросим нулевую строку и получим в столбцах базисных неизвестных единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right) \tfrac{5}{6} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} :3 \\ :(-6) \end{matrix} \sim$$

Для получения единичной матрицы в первом и третьем столбцах осталось первую строку разделить на 3, вторую — на (-6)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Перепишем строки матрицы на языке уравнений и выразим базисные неизвестные через свободные

$x_1 - \dfrac{2}{3}x_2 - \dfrac{1}{18}x_4 = \dfrac{7}{18}$

$x_3 + \dfrac{5}{6}x_4 = \dfrac{1}{6}$,

отсюда

$$x_1 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{18}x_4 + \frac{7}{18}$$

$$x_3 = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6}.$$

Это и есть общее решение системы в параметрической форме. Убедитесь в этом самостоятельно, подставив полученные выражения в исходную систему.

Пример 5. Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

получим 1 на месте (21)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim$$

переставим первую и вторую строки и получим нули под единицей

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-3)\ (-5) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Приведение к ступенчатому виду закончено. Поскольку появилась «нехорошая» строка (третья), делаем вывод, что система несовместна.

Задачи

Исследовать системы на совместность и, если совместны, найти решение.

65. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 5. \end{cases}$

66. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

67. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

69. $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

Глава 10

Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все правые части уравнений нулевые. Заметим сразу, что однородная система уравнений всегда совместна, так как хотя бы одно решение она всегда имеет, а именно, нулевое, т. е. когда все неизвестные равны нулю. Если однородная система оказывается определенной, то нулевое решение — единственное, если неопределенной, то имеется бесконечно много решений. Пусть дана однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Определение. ***Фундаментальной системой решений* (ФСР)** системы уравнений (1) называются такие решения

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \ldots,\ C_k = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

системы (1), которые:

1) линейно независимы;

2) любое решение системы (1) есть линейная комбинация решений $C_1, \dots, C_k$.

Таким образом, если $X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ — какое-то решение системы (1), то найдутся действительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ такие, что $X_0 = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_k C_k$. И, наоборот, при любых действительных значениях $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$X = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_k C_k$$

является решением системы (1). Такая запись называется ***векторной формой*** записи общего решения.

Сразу заметим, что число решений в ФСР равно $(n - r)$, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы системы.

ФСР находят следующим образом.

1) Находят общее решение в параметрической форме.

2) Свободным неизвестным (а их в точности $(n - r)$) придают линейно независимые наборы значений. В качестве таких наборов удобно брать столбцы единичной матрицы порядка $(n - r)$.

3) Для каждого такого набора находят частное решение. Вот эти $(n - r)$ частных решений и составляют ФСР.

Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Найти ФСР и записать решение в векторной форме.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение в параметрической форме, как мы это делали в предыдущей главе.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-3)\quad(-4)\quad(-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0$, $x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0$,

$x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ — это и есть общее решение в параметрической форме. Теперь свободным неизвестным x_3 и x_4 придаем линейно независимые наборы значений. Как уже говорилось, удобнее всего в качестве таких наборов взять столбцы единичной матрицы порядка $(n - r) = 4 - 2 = 2$.

x_3	1	0
x_4	0	1

Для первого набора $x_3 = 1,\ x_4 = 0$ находим частное решение, подставляя эти значения свободных переменных в общее решение

$x_1 = 8 \cdot 1 - 7 \cdot 0 = 8$;

$x_2 = -6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -6$.

Значит, первое частное решение имеет вид $x_1 = 8,\ x_2 = -6,$ $x_3 = 1,\ x_4 = 0$ или $C_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найдем второе частное решение, соответствующее второму набору свободных переменных.

$x_1 = 8 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -7$;

$x_2 = -6 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5; \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Значит, ФСР: $C_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Общее решение в векторной форме:

$$X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти ФСР и записать решение в векторной форме.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 0 \end{array}\right) \;{}_{(-1)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 0 \end{array}\right) \;{}^{3}\;{}^{4} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 15 & 0 \end{array}\right) \;{}^{(-3)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right) \;{}_{(-\frac{1}{7})} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 - 2x_2 - \frac{2}{7}x_4 = 0$, $x_3 + \frac{5}{7}x_4 = 0$,

$x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4$, $x_3 = -\frac{5}{7}x_4$.

Глядя на формулы общего решения, можно для удобства придать x_4 значение не 1, а 7.

x_2	1	0
x_4	0	7

$x_1 = 2 \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 0 = 2;$

$x_3 = -\frac{5}{7} \cdot 0 = 0.$ $\qquad C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$x_1 = 2 \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot 7 = 2;$

$x_3 = -\frac{5}{7} \cdot 7 = -5;$ $\qquad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$

ФСР: $C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Общее решение в векторной форме:

$$X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.Найти ФСР и записать решение в векторной форме.

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 & 0\\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 & 0\\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 0\\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7 & 0\\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 & 0\\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\ (-3)\ (-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-3)\ (-4) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \end{array} \sim$$

$x_1,\ x_3$ — базисные неизвестные,

$x_2,\ x_4,\ x_5$ — свободные неизвестные.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :3 \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{2}{3}x_4 + \dfrac{5}{3}x_5 = 0,$

$x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{3}{2}x_5 = 0.$

$x_1 = \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}x_4 - \dfrac{5}{3}x_5,$

$x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_5.$

Чтобы получить ФСР в целых числах, можно свободным переменным придать такие значения, чтобы базисные переменные получились целые.

Например,

x_2	3	0	0
x_4	0	6	0
x_5	0	0	6

.

Тогда имеем для первого набора

$x_1 = \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 0 = 1;$

$x_3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 0, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Для второго набора

$x_1 = \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{5}{3} \cdot 0 = -4;$

$x_3 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot 0 = -3. \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Для третьего набора

$x_1 = \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 6 = -10;$

$x_3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 6 = 9. \qquad C_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$

$$X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Для неоднородных систем тоже существует векторная форма записи общего решения

$$X = X_0 + \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_{n-r} C_{n-r}.$$

Здесь X_0 — частное решение неоднородной системы, $C_1, \dots, C_{n-r}$ — ФСР соответствующей однородной системы.

Из этой записи понятно, что общее решение неоднородной системы равно сумме частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.

Пример 4. Найти общее решение в векторной форме.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 9. \end{cases}$$

Решение. Соответствующая однородная система получается из исходной приравниванием всех свободных членов нулю. Матрица системы при этом остается без изменения. Тогда понятно, что при нахождении ФСР соответствующей однородной системы с матрицей системы делают точно те же элементарные преобразования, что и для нахождения общего решения в параметрической форме неоднородной системы. Поэтому решаем, как обычно.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) & (-1) \\ & \\ & \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-5) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -4 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - 4x_4 + \dfrac{11}{2}$, $x_3 + 3x_4 = -2$,
$x_1 = \dfrac{1}{2}x_2 + 4x_4 + \dfrac{11}{2}$, $x_3 = -3x_4 - 2$.

Чтобы найти X_0 — частное решение неоднородной системы, нужно свободным неизвестным придать произвольные значения, например, $x_2 = x_4 = 0$. Тогда $x_1 = \frac{11}{2}$, $x_3 = -2$ и частное решение неоднородной системы имеет вид $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для нахождения ФСР соответсвующей однородной системы в общем решении отбросим свободные члены

$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + 4x_4$

$x_3 = -3x_4$

и придадим свободным переменным линейно независимые наборы значений

x_2	2	0
x_4	0	1

$x_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 1;$

$x_3 = -3 \cdot 0 = 0. \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$x_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4;$

$x_3 = -3 \cdot 1 = -3; \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Теперь выписываем общее решение неоднородной системы в векторной форме:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи

Найти ФСР и записать общее решение в векторной форме.

70. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

71. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

73. $\begin{cases} 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \\ 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Найти общее решение неоднородной системы в векторной форме.

74. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 = 19. \end{cases}$

75. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = -1 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

76. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

77. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

Глава 11

Линейные операторы

Линейным оператором φ линейного пространства V называется такое преобразование пространства V в себя, которое удовлетворяет следующим условиям для любых двух элементов x, y пространства V и любого числа α:

(1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ – аддитивность;

(2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ – однородность.

Как только мы фиксируем базис $(e) = (e_1, ..., e_n)$ пространства V, так сразу любому линейному оператору φ этого пространства однозначно ставится в соответствие матрица $[\varphi]_e$ этого оператора в базисе (e). И, наоборот, любой квадратичной матрице A в фиксированном базисе (e) однозначно ставится в соответствие порядка линейный оператор φ_A пространства V. При этом $[\varphi_A]_e = A$.

Столбцами матрицы $[\varphi]_e$ служат координаты образов элементов базиса (e) под действием оператора φ, т.е. первый столбец — это координаты элемента $\varphi(e_1)$, второй столбец — координаты элемента $\varphi(e_2)$ и т.д. Это однозначное соответствие между операторами и матрицами переносится на операции над операторами, а именно:

$[\varphi + \psi]_e = [\varphi]_e + [\psi]_e$

$[\varphi \cdot \psi]_e = [\varphi]_e \cdot [\psi]_e$

$[\alpha\varphi]_e = \alpha[\varphi]_e$

Напомним, что $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$, $(\varphi\cdot\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$, $(\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x)$.

Пример 1. Найти матрицы линейных операторов пространства V_3 в базисе $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$:

а) симметрия относительно оси Ox;

б) поворот вокруг оси Oz на 60° против часовой стрелки;

в) проектирование на плоскость xOy;

г) проектирование на плоскость xOy и поворот проекции вокруг оси Oz на 60° против часовой стрелки;

д) симметрия относительно плоскости $y = z$;

е) проекция на плоскость $y = z$;

ж) симметрия относительно плоскости $y = z$ и растяжение вдоль оси Oz в три раза;

з) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2, -x_2)$;

и) $\overline{x} \longrightarrow (\overline{x} \cdot \overline{a})\overline{b}$, где $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j}, \overline{b} = \overline{j} - \overline{k}$.

Как сказано выше, для составления матрицы линейного оператора в базисе $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ нужно найти образы векторов $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ под действием данного оператора и расположить координаты этих образов соответственно, в первом, втором и третьем столбцах матрицы.

а) Пусть φ — оператор симметрии относительно оси Ox. Тогда $\varphi(\overline{i}) = \overline{i} = (1,0,0), \varphi(\overline{j}) = -\overline{j} = (0,-1,0), \varphi(\overline{k}) = -\overline{k} = (0,0,-1)$. Отсюда $[\varphi]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{pmatrix}$

б) Пусть φ — оператор поворота вокруг оси Oz на 60° против часовой стрелки. Понятно, что $\varphi(\overline{k}) = \overline{k} = (0,0,1)$. Чтобы найти $\varphi(\overline{i})$ и $\varphi(\overline{j})$, сделаем чертеж на плоскости xOy;

$\varphi(\overline{i}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

$\varphi(\overline{j}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

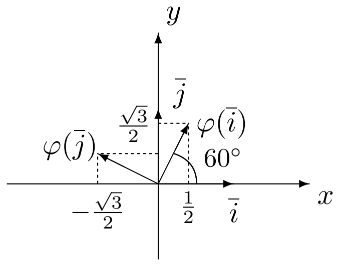


Рис. 53

Теперь понятно, что $[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{4}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$

в) Пусть φ — оператор проектирования на плоскость xOy. Тогда $\varphi(\bar{i}) = \bar{i} = (1,0,0), \varphi(\bar{j}) = \bar{j} = (0,1,0), \varphi(\bar{k}) = \bar{0} = (0,0,0)$. Соответственно

$$[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

г) Пусть φ — оператор проектирования на плоскость xOy и поворота вокруг оси Oz на угол 60° против часовой стрелки. Так как проектирование на плоскость xOy векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ не меняет, то $\varphi(\bar{i}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \varphi(\bar{j}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, как в пункте б). Вектор $\bar{k}$ при проектировании на плоскость xOy переходит в нулевой вектор, а любой линейный оператор нулевой вектор оставляет нулевым, т.е. $\varphi(\bar{k}) = \bar{0}$. Окончательно получаем,

$$[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что этот же результат получился бы и при умножении матриц. Ведь если φ_1 — оператор проектирования, φ_2 — оператор поворота, то $\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$, то есть $\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1$, тогда $[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} =$ $[\varphi_2]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} \cdot [\varphi_1]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

д) Пусть φ — оператор симметрии относительно плоскости $y = z$. Прежде всего поймем, что плоскость $y = z$ или $y - z = 0$ паралельна оси Ox, так как коэффициент при x равен нулю, и проходит через начало координат, так как свободный член равен нулю, т.е. эта плоскость проходит через ось Ox и, следовательно, перпендикулярна плоскости yOz. Поэтому симметрия относительно этой плоскости на плоскости yOz превращается в симметрию относительно прямой $y = z$. Сделаем чертеж

$\varphi(\bar{i}) = \bar{i}$ так как $\bar{i}$ лежит на плоскости $y = z$

$\varphi(\bar{j}) = \bar{k} = (0, 0, 1)$

$\varphi(\bar{k}) = \bar{j} = (0, 1, 0)$ (смотри чертеж)

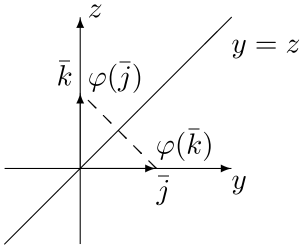


Рис. 54

Получаем $[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

е) Пусть φ — оператор поектирования на плоскость $y = z$. Аналогично пункту д) проектирование на плоскость $y = z$ на плоскости yOz превращается в проектирование на прямую $y = z$. И тогда становится понятным, что $\varphi(\bar{i}) = \bar{i}$,

$\varphi(\bar{j}) = \varphi(\bar{k}) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

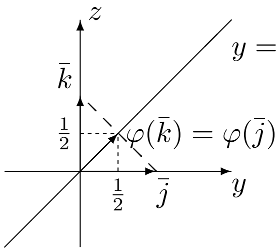


Рис. 55

ж) Пусть φ — оператор симметрии относительно плоскости $y = z$ и растяжения вдоль оси Oz в три раза. Поступаем аналогично пункту г). Пусть φ_1 — оператор симметрии относительно плоскости $y = z$, φ_2 — оператор растяжения вдоль оси Oz в три раза.

$[\varphi_1]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}}$ мы знаем из пункта д). Найдем $[\varphi_2]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}}$

$\varphi_2(\overline{i}) = \overline{i} = (1, 0, 0), \varphi_2(\overline{j}) = \overline{j} = (0, 1, 0), \varphi_2(\overline{k}) = 3\overline{k} = (0, 0, 3)$

$[\varphi_2]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Так как $\varphi_{(x)} = \varphi_2(\varphi_1(x))$, то

$$[\varphi]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}} = [\varphi_2]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}} \cdot [\varphi_1]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обращаем внимание на то, что здесь в отличие от пункта г) важен порядок произведения операторов и, следовательно, их матриц. Поймем это на примере вектора $\overline{k}$. По заданию оператора φ мы должны вначале взять вектор, симметричный вектору $\overline{k}$ относительно плоскости $y = z$, а потом у полученного вектора увеличить третью координату в три раза. Получаем, что $\overline{k}$ переходит в $\overline{j}$ по симметрии, а при растяжении $\overline{j}$ не меняется, так как его третья координата равно нулю, т.е. $\varphi(\overline{k}) = \overline{j} = (0, 1, 0)$. Если бы мы поступили с $\overline{k}$ в обратном порядке, т.е. вначале растянули по оси Oz в три раза, а потом взяли симметричный вектор, то получили бы вначале $3\overline{k}$, а после симметрии $3\overline{j}$, т.е. имели бы $\varphi(\overline{k}) = 3\overline{j} = (0, 3, 0)$, что не соответствует заданию оператора.

з) Здесь оператор φ задается аналитическим действием на координаты вектора. Чтобы найти $\varphi(\overline{i})$, нужно в задании оператора вместо x_1, x_2, x_3 подставить координаты вектора $\overline{i}$, т.е. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$. Тогда получим

$\varphi(\overline{i}) = (1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0, 0, -0) = (1, 0, 0)$

Аналогично для $\overline{j}$ и $\overline{k}$.

$\varphi(\overline{j}) = (0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 1, -1) = (2, 1, -1)$

$\varphi(\overline{k}) = (0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, 0, -0) = (3, 0, 0)$

$[\varphi]_{\overline{i},\overline{j},\overline{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

и) Чтобы найти образы векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ под действием данного оператора, нужно в задание оператора вместо $\overline{x}$ подставить последовательно $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.

$$\varphi(\bar{i})=(\bar{i}\cdot\bar{a})\bar{b}=(\bar{i}\cdot(\bar{i}+2\bar{j}))(\bar{j}-\bar{k})=(1-0)(\bar{j}-\bar{k})=\bar{j}-\bar{k}=(0,1,-1);$$

$$\varphi(\bar{j})=(\bar{j}\cdot\bar{a})\bar{b}=(\bar{j}(\bar{i}+2\bar{j}))(\bar{j}-\bar{k})=(0+2)(\bar{j}-\bar{k})=2\bar{j}-2\bar{k}=(0,2,-2);$$

$$\varphi(\bar{k})=(\bar{k}\cdot\bar{a})\bar{b}=(\bar{k}(\bar{i}+2\bar{j}))(\bar{j}-\bar{k})=(0+0)(\bar{j}-\bar{k})=\bar{0}=(0,0,0).$$

$$[\varphi]_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 0.\end{pmatrix}$$

Пример 2. Дана матрица линейного оператора в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Найти его геометрический смысл.

а) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & \end{pmatrix}$

ж) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ з) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

а) Исходя из вида матрицы, имеем $\varphi(\bar{i})=(0,1,0)=\bar{j},\varphi(\bar{j})=(-1,0,0)=-\bar{i},\varphi(\bar{k})=2\bar{k}$

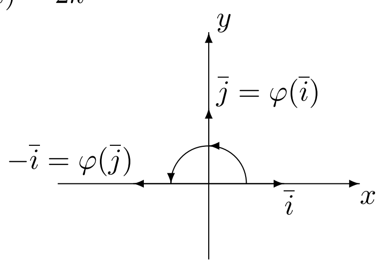


Рис. 56

Понятно, что на плоскости xOy происходит поворот на 90° против часовой стрелки вокруг оси Oz, а по оси Oz проходит растяжение в 2 раза.

б) $\varphi(\overline{i}) = (1,0,0) = \overline{i}, \varphi(\overline{j}) = (0,1,0) = \overline{j}, \varphi(\overline{k}) = (0,0,-1) = -\overline{k}$.

Данный оператор задает симметрию относительно плоскости xOy.

в) $\varphi(\overline{i}) = (1,0,0) = \overline{i}, \varphi(\overline{j}) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{k}, \varphi(\overline{k}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{k}$. Так как вектор $\overline{i}$ не меняется, посмотрим, что происходит на плоскости yOz. Из чертежа понятно, что на плоскости yOz происходит поворот вокруг оси Ox на 45° против часовой стрелки, т.е. данный оператор задает поворот вокруг оси Ox на 45° против часовой стрелки.

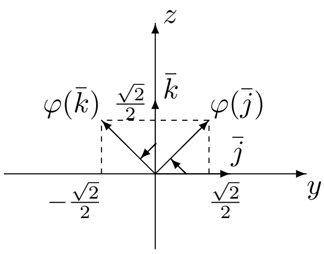


Рис. 57

г) $\varphi(\overline{i}) = (-1,0,0) = -\overline{i}, \varphi(\overline{j}) = (0,-1,0) = -\overline{j}, \varphi(\overline{k}) = (0,0,-1) = -\overline{k}$.

Очевидно, что это симметрия относительно начала координат.

д) $\varphi(\overline{i}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}\overline{i} - \frac{1}{2}\overline{j}, \varphi(\overline{j}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}, \varphi(\overline{k}) = \overline{0}$. Последнее равенство говорит о том, что происходит проекция на плоскость xOy. Посмотрим, что происходит на плоскости xOy. Из чертежа видно, что векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$ проектируются на $y = -x$. Отсюда следует, что данный оператор можно описать как проекцию на плоскости $z = 0$ и $y = -x$, либо, как проекцию на прямую $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$, которая служит пересечением данных плоскостей.

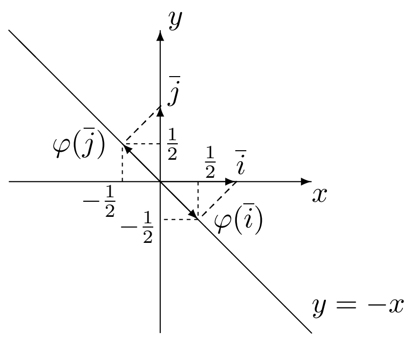


Рис. 58

е) $\varphi(\bar{i}) = (-1,0,0) = -\bar{i}, \varphi(\bar{j}) = (0,0,-1) = -\bar{k}, \varphi(\bar{k}) = (0,-1,0) = -\bar{j}$

Посмотрим на плоскость yOz:

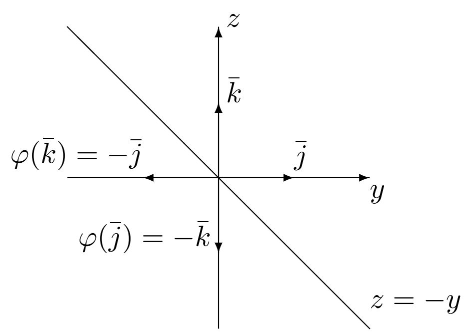


Рис. 59

Происходит симметрия относительно прямой $z = -y$, в пространстве это соответствует симметрии относительно плоскости $z = -y$. А так как $\varphi(\bar{i}) = -\bar{i}$, то происходит симметрия относительно плоскости $x = 0$. Значит, данный оператор задает симметрию относительно прямой $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, которая служит пересечением этих плоскостей.

ж) $\varphi(\bar{i}) = (0,-1,0) = -\bar{j}, \varphi(\bar{j}) = (1,0,0) = \bar{i}, \varphi(\bar{k}) = (0,0,-1) = -\bar{k}$. Посмотрим на плоскость xOy:

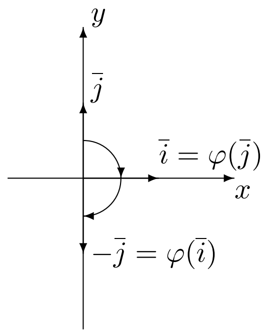


Рис. 60

Происходит поворот на $90°$ по часовой стрелке вокруг оси Oz. Так как $\varphi(\bar{k}) = -\bar{k}$, то данный оператор задает симметрию относительно плоскости xOy и поворот на $90°$ по часовой стрелке вокруг оси Oz.

з) $\varphi(\bar{i}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}, \varphi(\bar{j}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}, \varphi(\bar{k}) = (0, 0, 1) = \bar{k}$

Посмотрим на плоскость xOy:

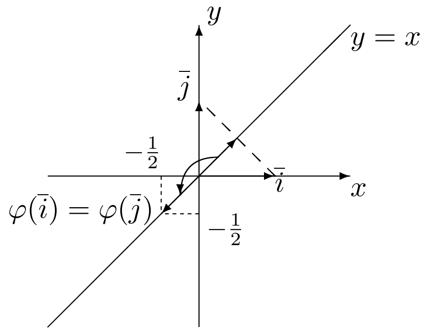


Рис. 61

Происходит проекция на прямую $x = y$ и поворот этой проекции на $180°$ вокруг оси Oz. Значит, этот оператор задает проекцию на плоскость $x = y$ и поворот вокруг оси Oz на $180°$.

Задачи.

78. Составить матрицы линейных преобразований пространства V_3 в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

а) поворот вокруг оси Ox на 90° по часовой стрелке и растяжение по оси Oy в 2 раза;

б) симметрия относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$;

в) проекция на плоскость $x = y$;

г) проекция на прямую $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$:

д) симметрия относительно плоскости $x = -z$;

е) $\varphi(\overline{x}) = (\overline{x} \times \overline{a}) \times \overline{b}$, где $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j}, \overline{b} = \overline{i} + \overline{k}$;

ж) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_1)$.

79. Дана матрица линейного оператора в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Найти геометрический смысл.

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ответы.

а) проекция на плоскость xOz и поворот вокруг оси Oy на 45° по часовой стрелке;

б) поворот вокруг оси Oy на 90° по часовой стрелке;

в) поворот вокруг оси Ox на 180°;

г) проекция на прямую $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$;

д) проекция на ось Oz и поворот вокруг оси Ox на 45° по часовой стрелке;

е) поворот на 180° вокруг прямой $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Пример 3. Найти собственные векторы линейных операторов, заданных следующими матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A, находятся в два этапа.

1. Находятся собственные числа матрицы A.

2. Для каждого собственного числа находятся собственные векторы, относящиеся к данному собственному числу.

Собственные числа матрицы A — это действительные корни характеристического многочлена данной матрицы $f_A(\lambda) = |A - \lambda E|$. Существуют удобные формулы для характеристического многочлена матрицы A, которые позволяют не раскрывать определитель $|A-\lambda E|$, а сразу выписывать коэффициенты характеристического многочлена, выраженные через элементы матрицы A. Для матриц второго и третьего порядков эти формулы имеют вид:

(1) $|A - \lambda E| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|$

(2) $|A - \lambda E| = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2-$

$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda + |A|.$$

Для нахождения собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному числу λ, нужно составить однородную систему линейных уравнений с матрицей $(A-\lambda E)$ и найти ее решение, т.е. решить однородную систему линейных уравнений вида $(A-\lambda E)X = 0$

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение по формуле (1):

$\lambda^2 - (1+5)\lambda + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

Найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 1, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2.$

Для $\lambda_1 = 4$ составим однородную систему линейных уравнений с матрицей

$(A - 4E) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & -3 \\ 1 & 5-4 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Решим эту систему

$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim (1\ \ 1|0).$

Общее решение $x_1 = -x_2$, ФСР: $C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Векторы вида αC_1 при $\alpha \neq 0$ и являются собственными векторами матрицы A, относящимися к собственному числу $\alpha_1 = 4$. В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Вспомним определение собственного вектора.

Ненулевой вектор X является собственным вектором матрицы A, относящимся к собственному значению λ, если выполняется равенство $AX = \lambda X$.

Значит, нам нужно проверить равенство $AC_1 = 4C_1$. Проверяем: $AC_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4C_1.$

Итак, для $\lambda_1 = 4$ собственные векторы $e_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $\alpha_1 \neq 0$.

Аналогично найдем собственные векторы, относящиеся к собственному значению $\lambda_2 = 2$.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & -3 & 0 \\ 1 & 5-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$ $(1\ \ 3|0)$; $x_1 = -3x_2$; $C_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 \neq 0.$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение по формуле (1):

$\lambda^2 - (2+4)\lambda + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 23 = 0.$ $D = 36 - 92 < 0.$

Действительных корней нет, значит, и собственных чисел матрица A не имеет.

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение по формуле (1) и найдем его корни:

$\lambda^2 - (2+4)\lambda + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$ $\lambda_{1,2} = 3.$

Найдем собственные векторы.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ -1 & 4-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$(1\ \ -1|0)$; $x_1=x_2$; $C_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $e_1=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha\neq 0$.

г) $A=\begin{pmatrix}0&-4&0\\1&-4&0\\1&-2&-2\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение по формуле (2) и найдем его корни:

$-\lambda^3+(0-4-2)\lambda^2-\left(\begin{vmatrix}0&-4\\1&-4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-4&0\\-2&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\1&-2\end{vmatrix}\right)\lambda+$ $\begin{vmatrix}0&-4&0\\1&-4&0\\1&-2&-2\end{vmatrix}=-\lambda^3-6\lambda^2-(4+8+0)\lambda-8=-\lambda^3-6\lambda^2-12\lambda-8=$ $-(\lambda+2)^3=0$. $\lambda_{1,2,3}=-2$.

Найдем собственные векторы

$\left(\begin{array}{ccc|c}0-(-2)&-4&0&0\\1&-4-(-2)&0&0\\1&-2&-2-(-2)&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&0&0\\1&-2&0&0\\1&-2&0&0\end{array}\right)\sim$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim(1\ \ -2\ \ 0|0)$ $x_1=2x_2$

Здесь x_1 — базисное неизвестное, x_2, x_3 — свободные неизвестные. Найдем ФСР:

Для первого набора имеем:

$x_1=2, x_2=1, x_3=0, C_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Для второго набора имеем:

$x_1=0, x_2=0, x_3=1$. $C_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Векторы C_1, C_2 и образуют базис пространства собственных векторов, относящихся к собственному числу $\lambda=-2$. Произвольный собственный вектор, относящийся к этому собственному числу, есть ненулевая линейная комбинация векторов C_1, C_2:

$$e_1=\alpha_1C_1+\alpha_2C_2, \alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0.$$

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7. \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение по формуле (2) и найдем его корни:

$$-\lambda^3 + (1-7+7)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \right)\lambda +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - (5+7-17)\lambda + 3 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0.$$

Здесь мы имеем дело с так называемым приведенным уравнением с целыми коэффициентами. Уравнение называется приведенным, если коэффициент при старшем члене равен ± 1. Если в таком уравнении имеются целые корни, они являются делителями свободного члена. Таким образом, целые корни данного уравнения можно искать среди чисел $\pm 1, \pm 3$, последовательно подставляя их в уравнение. Подставляем число 1: $-1+1+5+3 \neq 0$, т.е. 1 не является корнем. Подставим число (-1): $-(1)^3 + (-1)^2 + 5(-1) + 3 = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$. Значит, $\lambda_1 = -1$ — корень данного уравнения. Теперь мы можем уменьшить степень уравнения, разделив левую часть на разность $\lambda - \lambda_1 = \lambda + 1$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3 + \lambda^2 } & \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ -2\lambda^2 - 5\lambda & \\ \underline{-2\lambda^2 - 2\lambda } & \\ -3\lambda - 3 & \\ \underline{-3\lambda - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

После этого остается найти корни квадратного уравнения $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$; $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2$; $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. Итак, мы нашли собственные числа $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 3$. Переходим к собственным векторам.

$$\lambda_{1,2} = -1; \left(\begin{array}{ccc|c} 1-(-1) & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -7-(-1) & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 7-(-1) & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right);\ x_1 = x_3\ , x_2 = 2x_3.$$

x_1, x_2 — базисные неизвестные, x_3 — свободное неизвестное. При $x_3 = 1$ получаем $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_1 \neq 0$

$$\lambda_3 = 3; \left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -7-3 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 7-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\ x_1 = \tfrac{1}{2}x_3\ , x_2 = x_3.$$

x_1, x_2 — базисные неизвестные, x_3 — свободное неизвестное, при $x_3 = 2$ получаем $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 \neq 0$

е) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение по формуле (2) и найдем его корни:

$$-\lambda^3 + (4+3+0)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)\lambda +$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - (12 - 2 + 2)\lambda + 0 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda = 0$$

$\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0.\ \lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 3,\ \ \lambda_3 = 4.$

Найдем собственные векторы

$$\lambda_1 = 0; \left(\begin{array}{ccc|c} 4-0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3-0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0-0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0. \end{array}\right)$$

$$x_1 = \tfrac{2}{3}x_3 \ , x_2 = \tfrac{2}{3}x_3, \ \ C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \ e_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 \neq 0.$$

$$\lambda_2 = 3; \left(\begin{array}{ccc|c} 4-3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3-3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = x_2 \ , x_3 = 0, \ \ C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ e_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 \neq 0$$

$$\lambda_3 = 4; \left(\begin{array}{ccc|c} 4-4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3-4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 2x_3 \ , x_2 = -2x_3, \ \ C_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ e_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 \neq 0.$$

Очень важным бывает вопрос о приведении матрицы к диагональному виду. Квадратная матрица порядка n приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис пространства, состоящий из собственных векторов этой матрицы, т.е. когда существует n линейно независимых собственных векторов данной матрицы. При этом в диагональном виде матрицы по диагонали стоят собственные числа. Напомним, что собственные векторы, относящиеся к разным собственным значениям, линейно независимы.

Теперь легко ответить на вопрос о приведении рассмотренных матриц к диагональному виду.

а) приводится, так как имеются два линейно независимых собственных вектора C_1 и C_2, вид матрицы оператора в этом базисе: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

б) не приводится, так как не имеется собственных векторов.

в) не приводится, так как не имеется базиса из собственных векторов.

г) не приводится, так как не имеется базиса из собственных векторов, т.е. линейно незавсимых собственных векторов только два, а не три.

д) не приводится аналогично г).

е) приводится, так как имеются три линейно независимых собственных вектора, вид матрицы оператора в этом базисе: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задачи

80. Найти собственные числа и собственные векторы операторов, заданных следующими матрицами. Определить, приводится ли матрица к диагональному виду, и, если приводится, указать этот диагональный вид.

а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 \\ 5 & -9 & 11 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;
д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & -5 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;
з $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ -12 & -24 & 1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Линейный оператор φ имеет в базисе $(e) = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ матрицу $[\varphi]_e$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(e') = (e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$.

$e_1 = (1, -2, 3), e_2 = (0, 3, 1), e_3 = (2, -1, 4),$
$e'_1 = (-1, -1, -1), e'_2 = (1, 4, 5), e'_3 = (2, 2, 5),$
$[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Для решения этой задачи нужно прежде всего вспомнить определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Определение это не однозначно, поэтому, решая задачи с помощью матрицы перехода, нужно уточнять ее определение, поскольку от этого зависит вид формул. Мы придерживаемся того же определения, которое принято в нашем учебнике [1] и задачнике [2]. По этому определению столбцы матрицы перехода от старого базиса (e) к новому базису (e') состоят из координат элементов старого базиса (e) в новом базисе (e'). Значит, чтобы найти первый столбец матрицы перехода, нужно вектор e_1 разложить по базису $e_1^{'}$, $e_2^{'}$, $e_3^{'}$. А для этого аналогично примеру 3 из главы 4 нужно решить систему уравнений, столбцами матрицы которой служат координаты векторов базиса $e_1^{'}$, $e_2^{'}$, $e_3^{'}$, а столбцом свободных членов — координаты вектора e_1. Для решения такой системы методом Гаусса мы составляем расширенную матрицу вида $\left(\begin{array}{ccc|c} e'_1 & e'_2 & e'_3 & e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$, элементарными преобразованиями строк получаем слева единичную матрицу, тогда в столбце свободных членов получается решение системы, т.е. как раз первый столбец матрицы перехода. Для получения второго столбца нужно проделать то же самое, только в качестве столбца свободных членов взять координаты вектора e_2 и т.д. Теперь понятно, что матрица перехода от (e) к (e') получается по следующей схеме:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \sim ... \sim$$

новый базис   старый базис

где E — единичная матрица S — матрица перехода

С так определенной матрицей перехода формула преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису выглядит так:

$$[\varphi]_{e'} = S[\varphi]_e S^{-1}.$$

Отсюда следует, что для решения задачи мы должны вначале найти матрицу перехода.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right), S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу оператора в новом базисе

$$[\varphi]_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти матрицу линейного оператора, заданного матрицей, A в базисе (b):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, b_1 = (2,-1,1), b_2 = (0,3,-2), b_3 = (-1,1,-1)$$

В этой задаче старый базис не указан, это означает, что в качестве старого базиса нужно взять канонический базис $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. И дальше все происходит, как в предыдущем примере.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -6. \end{array}\right)$$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$

$$[\varphi_A]_b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -19 & 26 & 16 \\ 8 & -13 & -7 \\ -43 & 61 & 36. \end{pmatrix}$$

Задачи.

81. Линейный оператор φ имеет в базисе $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ матрицу $[\varphi]_e$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(e') = (e'_1, e'_2, e'_3)$

а) $e_1 = (0, 1, -1), e_2 = (2, 4, -3), e_3 = (1, 3, -2), e'_1 = (2, 3, -5), e'_2 = (-3, 1, -2), e'_3 = (4, 2, -3), [\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

б) $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (0, -1, -3), e_3 = (1, 3, 6), e'_1 = (-3, 0, 4), e'_2 = (-2, -1, 0), e'_3 = (-4, -1, 3), [\varphi]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

82. Найти матрицу линейного оператора, заданного матрицей A в базисе $b_1 = (3, -1, 2), b_2 = (-2, -7, 7), b_3 = (-1, -3, 3)$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 6. Выписать квадратичную форму, определяемую данной симметрической матрицей A. Найти канонический вид этой формы и установить, является ли она положительно определенной.

а)$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, б)$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ -6 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Матрица $A = (a_{ij})$ называется симметрической, если выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$ при всех $i \neq j$, или, что то же самое, если $A^T = A$. Квадратичная форма, определяемая симметрической матрицей $A = (a_{ij})$, имеет вид:

$Q(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{ij}x_ix_j + ... + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$,

где $i < j, i = 1, ..., n-1, j = 2, ..., n$.

Эта квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$Q(x_1^{'}, ..., x_n^{'} = \lambda_1 x_1^{\prime 2} + ... + \lambda_n x_n^{\prime 2}$, где, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ — собственные числа матрицы A. Квадратичная форма называется положительно определенной, если при любых значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, квадратичная форма принимает строго положительное значение. Отсюда следует, что в каноническом виде положительно определенной квадратичной формы все коэффициенты должны быть строго положительны.

а)$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Здесь $a_{11} = 3, a_{22} = 2, a_{33} = 4, a_{12} = 2, a_{13} = 2, a_{23} = 0$. Поэтому матрица A определяет квадратичную форму $\phi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$. Чтобы найти канонический вид, нужно найти собственные числа матрицы A. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$-\lambda^3 + \lambda^2(3+2+4) - \lambda\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) + |A| =$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda(2+8+8) + 0 = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0.$$

$$\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0. \quad \lambda_1 = 0. \quad \lambda_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}, \quad \lambda_2 = 6, \;\; \lambda_3 = 3.$$

Канонический вид: $Q(x_1', x_2', x_3') = 0 \cdot x_1'^2 + 6 \cdot x_2'^2 + 3 \cdot x_3'^2 = 6x_2^{'2} + 3x_3^{'2}$. Так как не все собственные числа строго положительны, квадратичная форма не является положительно определенной.

б)$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ -6 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

$Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 - 12x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

Находим собственные числа матрицы A

$$-\lambda^3+\lambda^2(9+8+4)-\lambda\left(\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \right)+|A| =$$

$$= -\lambda^3 + 21\lambda^2 - \lambda(36 + 16 + 32) + 64 = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 84\lambda + 64 = 0.$$

Ищем целые корни среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$. Подставляем 1: $-1 + 21 - 84 + 64 = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = 1$. Делим характеристический многочлен на разность $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 - 21\lambda^2 + 84\lambda - 64 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} \lambda^3 - \lambda^2 \quad\quad\quad\quad\quad & \lambda^2 - 20\lambda + 64 \\ \cline{1-1} -\ -20\lambda^2 + 84\lambda \quad\quad & \\ -20\lambda^2 + 20\lambda \quad\quad & \\ \cline{1-1} -\ 64\lambda - 64 & \\ 64\lambda - 64 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$\lambda_{2,3} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$ $\lambda_2 = 16, \lambda_3 = 4$.

Канонический вид: $Q(x_1', x_2', x_3') = x_1'^2 + 16x_2'^2 + 4x_3'^2$. Так как все собственные числа строго положительны, то квадратичная форма является положительно определенной.

Глава 12

Приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Вспомним канонические уравнения эллипса и гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$. Первые два уравнения содержат только квадраты переменных и свободный член, третье уравнение содержит квадрат одной переменной и первую степень другой. Таким образом, канонические уравнения кривых второго порядка не содержат смешанных произведений. Теперь обратим внимание на то, что первые три слагаемых общего уравнения (1)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \tag{2}$$

представляют собой квадратичную форму. А приведение квадратичной формы к каноническому виду и означает такое преобразование переменных, при котором исчезают смешанные произведения. Значит, для приведения уравнения (1) к каноническому виду нужно прежде всего привести к каноническому виду квадратичную форму (2). Этот процесс очень подробно описан в [1]. Идея состоит в том, чтобы составить симметрическую матрицу квадратичной формы и найти для нее такой ортонормированный базис, в котором данная матрица имеет диагональный вид, а квадратичная форма, соответственно, приводится к каноническому виду. Покажем все это на конкретных примерах.

Примеры 1-2. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.

1) $6x^2 + 4\sqrt{5}xy - 2y^2 = 16$

2) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$

Для обеих кривых:

а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.

б) Найти матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица ортогональна, объяснить ее геометрический смысл.

в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.

г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Решение примера 1.

$6x^2 + 4\sqrt{5}xy - 2y^2 = 16.$

Левая часть этого уравнения является квадратичной формой от двух переменных:

$Q(x, y) = 6x^2 + 4\sqrt{5}xy - 2y^2.$

Приведем ее к каноническому виду. Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}.$$

Она всегда симметрическая.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Найдем его корни:

$(6-\lambda)(-2-\lambda) - 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 0,$

$\lambda^2-4\lambda-12-20=0$,
$\lambda^2-4\lambda-32=0$.
Его корни $\lambda_1=8; \lambda_2=-4$.

Это собственные числа. Найдем соответствующие собственные векторы, решая систему уравнений

$$\begin{cases} (6-\lambda)\alpha+2\sqrt{5}\beta=0 \\ 2\sqrt{5}\alpha+(-2-\lambda)\beta=0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda=\lambda_1=8$, тогда получим систему

$$\begin{cases} -2\alpha+2\sqrt{5}\beta=0 \\ 2\sqrt{5}\alpha-10\beta=0. \end{cases}$$

В матричном виде
$$\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} :(-2) \\ :(2\sqrt{5}) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ 1 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Осталось одно уравнение: $\alpha-\sqrt{5}\beta=0$, т.е. $\begin{cases} \alpha=\sqrt{5}\beta, \\ \beta=\beta, \end{cases}$ где β — свободная переменная, которая может принимать любые значения. Пусть $\beta=1$. Тогда собственный вектор $\overline{e}_1=(\sqrt{5},1)$. Найдем орт этого вектора $\overline{e}_1^0=\frac{\overline{e}_1}{|\overline{e}_1|}$, $|\overline{e}_1|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$, $\overline{e}_1^0=\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\sqrt{\frac{5}{6}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\overline{j}$.

Примем вектор $\overline{e}_1^0$ за направление новой оси Ox'.

Теперь возьмем $\lambda=\lambda_2=-4$ и решим систему

$$\begin{cases} 10\alpha+2\sqrt{5}\beta=0, \\ 2\sqrt{5}\alpha+2\beta=0, \end{cases}$$

чтобы найти второй собственный вектор.

$$\begin{pmatrix} 10 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} :(2) \\ :(2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \ :(\sqrt{5}) \sim \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$\sqrt{5}\alpha+\beta=0$, $\begin{cases} \alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta \\ \beta=\beta \end{cases}$

Пусть $\beta = \sqrt{5}$, тогда собственный вектор $\overline{e}_2 = (-1, \sqrt{5})$; нормируем его

$$|\overline{e}_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6};$$

$$\overline{e}_2^0 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\overline{i} + \sqrt{\frac{5}{6}}\overline{j}.$$

Примем вектор $\overline{e}_2^0$ за направление новой оси Oy'.

Векторы $\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$ образуют ортонормированный базис, называемый каноническим.

Итак, мы перешли от ортонормированного базиса $\overline{i}, \overline{j}$ к ортонормированному базису $\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$.

В нашем определении столбцы матрицы перехода — это координаты векторов старого базиса в новом. Поэтому матрица перехода от базиса $\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$ к базису $\overline{i}, \overline{j}$ имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}}. \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\overline{e}_1^0$, $\overline{e}_2^0$ — старый базис, $\overline{i}, \overline{j}$ — новый.

Заметим, что S — ортогональная матрица, т.к. $S^T S = E$. Действительно,

$$S^T S = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} \\ -\frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Геометрический смысл ее (соответствующего оператора) — это поворот декартовой системы координат xOy на угол φ (см. рис. 62).

Пусть теперь $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — координаты в новом базисе $\overline{i}, \overline{j}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ — в старом базисе $\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$. Формулы перобразования координат при переходе к базису $\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$ получаем из матричного уравнения $X = SX'$:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \sqrt{\frac{5}{6}}y'. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в квадратичную форму $Q(x, y)$, получаем ее канонический вид относительно переменных x', y'

$Q(x', y') = 6(\sqrt{\frac{5}{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y')^2 + 4\sqrt{5}(\sqrt{\frac{5}{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y')(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \sqrt{\frac{5}{6}}y') - 2(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \sqrt{\frac{5}{6}}y')^2 = 8(x')^2 - 4(y')^2$.

Однако этот результат можно написать сразу, так как $Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Приравнивая квадратичную форму к правой части исходного уравнения, получаем уравнение кривой относительно новых координат x' и y':

$$8x'^2 - 4y'^2 = 16.$$

Делим обе части уравнения на 16 и получаем канонический вид нашей кривой: $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{4} = 1$. Это гипербола с центром в начале координат и полуосями $a = \sqrt{2}; b = 2$. Так как переменная x' входит в уравнение со знаком "+", гипербола пересекает ось Ox'.

Построим ее в исходной системе координат. Сначала в этой системе построим базисные векторы $\overline{e}_1^0 = (\sqrt{\frac{5}{6}}, +\frac{1}{\sqrt{6}})$ и $\overline{e}_2^0 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}})$. Это направления новых осей Ox' и Oy', проведем их пунктиром. И уже на этих осях строим гиперболу.

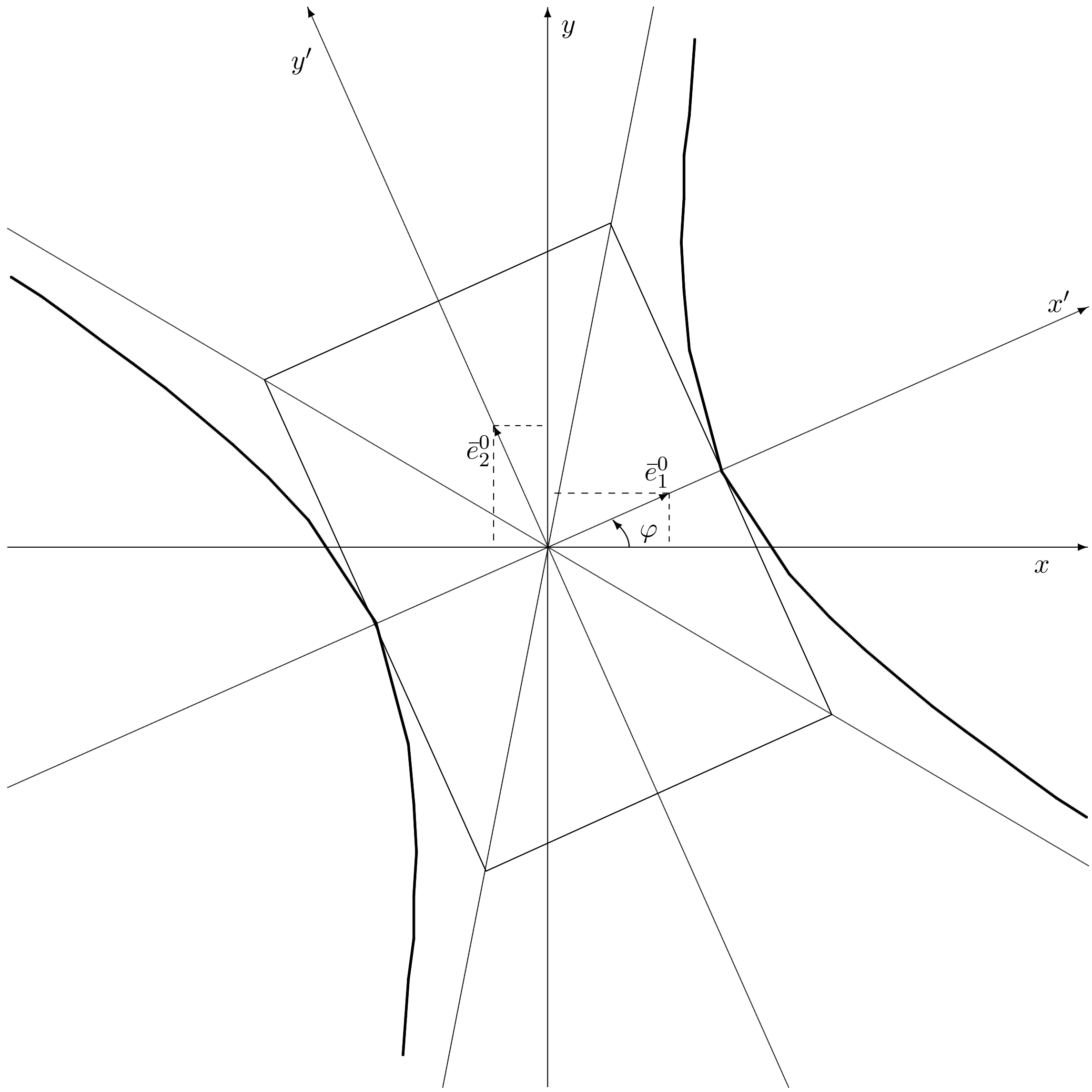


Рис. 62

Решение примера 2.

$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$

Выделим квадратичную форму. Это те слагаемые, которые содержат квадраты переменных или их попарные произведения. В нашем случае это $Q(x, y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$. Приведем ее к каноническому виду.

Матрица этой квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем ее собственные числа и собственные векторы.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0;$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$ являются собственными числами матрицы A. Найдем соответствующие собственные векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, орты которых $\overline{e}_1^0$, $\overline{e}_2^0$ образуют новый канонический базис и задают направление новых осей Ox' и Oy'.

Решаем однородную систему для каждого собственного числа

$$\begin{cases} (9-\lambda)\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha + (6-\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

$\lambda_1 = 10, \begin{cases} -\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha - 4\beta = 0 \end{cases}, \alpha + 2\beta = 0, \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = \beta. \end{cases}$

Собственный вектор $\overline{e}_1 = (-2, 1); |\overline{e}_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $\overline{e}_1^0 = \frac{\overline{e}_1}{|\overline{e}_1|}$; $\overline{e}_1^0 = (\frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$

$\lambda_2 = 5, \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim (2 - 1)$

$2\alpha - \beta = 0$, $\beta = 2\alpha$, α — свободная переменная.

$\begin{cases} \alpha = \alpha \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$. Пусть $\alpha = 1$ и второй собственный вектор $\overline{e}_2^0 = (1, 2); |\overline{e}_2| = \sqrt{5}; \overline{e}_2^0 = \frac{\overline{e}_2}{|\overline{e}_2|}; \overline{e}_2^0 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

$\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$ — канонический ортонормированный базис, $\overline{e}_1^0$ — направление оси Ox', $\overline{e}_2^0$ — направление оси Oy'.

Матрица перехода от $\overline{e}_1^0,\ \overline{e}_2^0$ к базису $\overline{i}, \overline{j}$
$S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$

S — ортогональная матрица, так как $S^T S = S \cdot S^T = E$. Проверьте самостоятельно так же, как в примере 1. И геометрический смысл тот же самый.

Формулы преобразования координат получаем из матричного уравнения $X = SX'$, где $X = \binom{x}{y}, X' = \binom{x'}{y'}$ — соответственно координаты в базисе $\overline{i}, \overline{j}$ и в базисе $\overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0$. Они связаны системой уравнений:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Квадратичная форма в новой системе координат будет иметь вид $Q(x', y') = 10x'^2 + 5y^2$.

Мы написали это сразу, однако знаем, что в базисе $\overline{e}_1^0,\ \overline{e}_2^0$ матрица квадратичной формы вычисляется по формуле

$$B = S^T A S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

а по этой матрице мы напишем то же самое $Q(x', y') = 10x'^2 + 5y'^2$.

Вернемся к исходному уравнению. Запишем его в базисе $\overline{e}_1^0,\ \overline{e}_1^0$, т.е. в координатах x', y'. Для этого квадратичную форму заменим новым выражением, а в линейной части уравнения вместо x и y подставим их выражения через x' и y':

$$10x'^2 + 5y'^2 + 16(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y') - 8(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y') - 2 = 0,$$

$$10x'^2 + 5y'^2 - \frac{32}{\sqrt{5}}x' + \frac{16}{\sqrt{5}}y' - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{16}{\sqrt{5}}y' - 2 = 0,$$

$$10x'^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}x' + 5y'^2 = 2.$$

Выделим полный квадрат по x':
$10(x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + (\frac{2}{\sqrt{5}})^2) + 5y'^2 = 2 + \frac{40}{5}$
$10(x' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + 5y'^2 = 10$. Разделим уравнение на 10.
$\frac{(x'-\frac{2}{\sqrt{5}})^2}{1} + \frac{y'^2}{2} = 1$ — это эллипс с цетром в точке $C(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0)$ и полуосями $a = 1; b = \sqrt{2}$.

Сделаем чертеж.

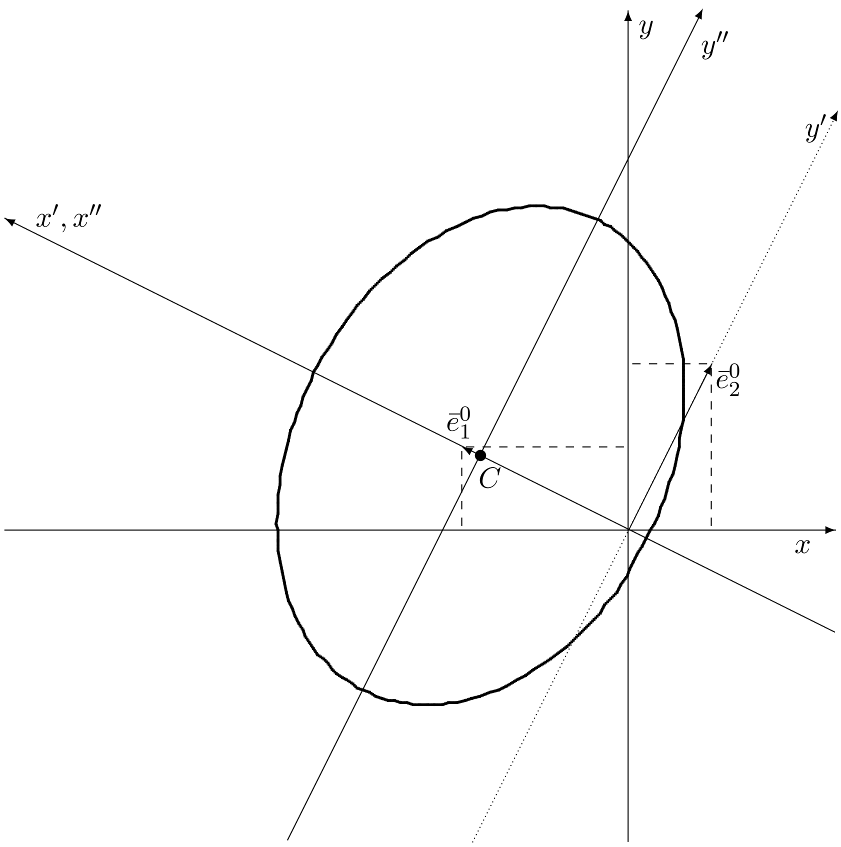


Рис. 63

Задачи

84. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат xOy.

1) Найти канонический базис.

2) Найти матрицу перехода от канонического базиса к исходному.

3) Привести уравнения к каноническому виду.

4) Изобразить кривые в первоначальной системе координат.

а) $24xy + 7y^2 = 144$,

б) $8x^2 - 4\sqrt{5}xy + 7y^2 = 12$,

в) $8x^2 - 4\sqrt{2}xy + y^2 - 12x - 24\sqrt{2}y = 0$,

г) $8x^2 + 12xy + 17y^2 + 20\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 45 = 0$,

д) $5x^2 - 24xy - 5y^2 + 26x - 130y + 13 = 0$.

Ответы

Глава 1

1) 40; 2) -3; 3) 18; 4) 5.

Глава 2

5) $(1, 2, -1)$; 6) $(1, -1, 2)$;
7) Не решается методом Крамера;
8) $(-2, 0, 1, -1)$.

Глава 3
3.1

9) $-12 - 13i$; 10) $4i$; 11)$3 + i$;
12) -2; 13) $\pm(1 + 4i)$; 14) $\pm(2 - 2i)$; 15) $\pm(5 + 6i)$;
16.
а) $x_1 = 3 - i,\ x_2 = -1 + 2i$;
б) $x_1 = 2 + i,\ x_2 = 1 - 3i$;
в) $x_1 = 1 - i,\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$;
г) $x_{1,2} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right);\ x_{3,4} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$.

3.2

17.
а) $7\sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)) = 7\sqrt{2}e^{-i\dfrac{\pi}{4}}$;
б) $2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\dfrac{5\pi}{6}}$
в) $2(\cos 0 + i\sin 0) = 2e^{i0}$;

г) $5(\cos\pi + i\sin\pi) = 5e^{i\pi}$;
д) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$;
е) $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$.
18) $3^{13}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.
19.
а) $2(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)),\ k = 0, 1, 2, 3$;
б) $5(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)),\ k = 0, 1, 2$;
в) $\frac{1}{2}(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right)),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;
г) $\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{7}\right)),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
20.
а) $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3},\ z_{3,4} = \pm\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ z_{5,6} = \pm\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;
б) $z_{1,2} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ z_{3,4} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$,
$z_{5,6} = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ z_{7,8} = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Глава 4

21) $\angle A = \frac{\pi}{2},\ h = 2\sqrt{\frac{37}{5}},\ AM = \frac{1}{2}\sqrt{185}$.
22) $S_{ABC} = \frac{7}{2},\ h = 2,\ \cos\alpha = \frac{11}{17}$.
23) $\bar{s} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + 4\bar{c}$.
24) $\sqrt{70}; 6; \frac{3}{2}\sqrt{55}$.

Глава 5

25) $(6; 0),\ (0; -4)$.
26) $x + 1 = 0$.
27) $3x - 5y + 5 = 0,\ x - y = 0,\ y - 1 = 0$.
28.
а) $3x - 2y - 7 = 0,\ 2\sqrt{13}$.
б) $10x - 11y - 6 = 0$.
в) $2x + 3y + 4 = 0,\ \sqrt{13}$.
г)$5x + y - 3 = 0$.
29) $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1,\ \frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1,\ \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$.
30) $A = \pm 8$.

31) $(-12;5)$.
32) $\dfrac{x}{\pm 2}+\dfrac{y}{\pm 5}=1$ или $\dfrac{x}{\pm 5}+\dfrac{y}{\pm 2}=1$.
33) $3x-4y-9=0,\ 3x-4y+16=0,\ 4x+3y-37=0$ или $4x+3y+13=0$.
34.
а) $4x+1=0,\ 8y+13=0$;
б) $14x-8y-3=0,\ 64x+112y-23=0$.
35) $x-5y+3=0$ или $5x+y-11=0$.
36) $\varphi=\arccos\dfrac{3}{5};\ \overline{AD}\perp\overline{CD}$.

Глава 6

37) $y+2z=0$.
38) $x-3y+z-10=0$.
39) $x-y-z=0$.
40) Могут.
41) $378\sqrt{14}$.
42) $x+y-2z+1=0,\ d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Глава 7

43) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-1}{19}$.
44) Нет.
45) $K(1,-2,5)$.
46) $S=\dfrac{98}{9}$.
47) $y+z-1=0$.
48) Да.

Глава 8
8.1

49) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$.
50.
а) $C(-3;4),\ R=6$;
б) $C(3;0)$. $R=4$.
51.
а) $\rho=\cos\varphi,\ R=\frac{1}{2},\ C(\frac{1}{2};0)$;
б) $\rho=-4\sin\varphi,\ R=2,\ C(0;-2)$.

8.2

52) $a=\sqrt{5},\ b=3,\ F_1(0;-2),\ F_2(0;2),\ \varepsilon=\dfrac{2}{3},\ y=\pm\dfrac{9}{2}$.

53.

а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$;

б) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$;

г) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

д) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

54.

а) $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{5}=1,\ \varepsilon=\dfrac{2}{3},\ C(3;-1),\ a=3,\ b=\sqrt{5}$;

б) $\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1,\ \varepsilon=\dfrac{3}{5},\ C(-1;2),\ a=5,\ b=4$.

55.

а) нижняя половина эллипса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$;

б) правая половина эллипса $x^2+\dfrac{y^2}{49}=1$;

в) нижняя половина эллипса $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$;

г) левая половина эллипса $\dfrac{(x+5)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$.

8.3

56. $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

57.

а) $-\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

б) $-\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{576}=1$;

в) $-\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

58. $\varepsilon=\sqrt{2}$.

59. $(\dfrac{25}{4};3)$ — точка касания прямой и гиперболы.

60. а) $C(2;-3),\ a=3,\ b=4,\ \varepsilon=\dfrac{5}{3},\ \dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$;

б) $C(2;-1),\ a=3,\ b=4,\ \varepsilon=\dfrac{5}{4},\ \dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=-1$.

61. а) часть гиперболы $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$, расположенная над прямой $y+1=0$;

б) ветвь гиперболы $\dfrac{(x-9)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$, расположенная влево от прямой $x - 9 = 0$.

8.4

62.

а) $y^2 = \pm 16x$;

б) $x^2 = \pm 12y$;

в) $y^2 = 4x$;

г) $x^2 = 25y$.

63.

а) $C(0; -\frac{1}{3}),\ p = 3$;

б) $C(-2; 1),\ p = 2$;

в) $C(-4; 3),\ p = \frac{1}{4}$.

64.

а) часть параболы $y^2 = -18x$, расположенная ниже оси Ox;

б) часть параболы $(x-2)^2 = -2(y-3)$, расположенная влево от прямой $x - 2 = 0$;

в) часть параболы $(y+5)^2 = -3(x+7)$, расположенная ниже прямой $y + 5 = 0$.

Глава 9

65. Несовместна.

66. $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

67. $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{16}x_4 + 1, \quad x_3 = \frac{17}{8}x_4 + 1$.

68. $x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11}, \quad x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11}$.

69. Несовместна.

Глава 10

70. $X = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

71. Только нулевое решение.

72. $X = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

73. $X = \alpha_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

74. $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

75. $X = \begin{pmatrix} -31 \\ 48 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

76. $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

77. $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Глава 11

78. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
ж) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

79.

а) проекция на плоскость xOz и поворот вокруг оси Oy на 45° по часовой стрелке;

б) поворот вокруг оси Oy на 90° по часовой стрелке;

в) поворот вокруг оси Ox на 180°;

г) проекция на прямую $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$;

д) проекция на ось Oz и поворот вокруг оси Ox на 45° по часовой стрелке;

е) поворот на 180° вокруг прямой $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

80.

а) $\lambda_1 = 3, e_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha \neq 0, \lambda_2 = -2, e_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$,
$\beta \neq 0; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, e = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0;$ не приводится;

в) собственных чисел и векторов нет;

г) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, e = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha \neq 0,$ не приводится;

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, e = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha^2 +$
$\beta^2 \neq 0;$ не приводится;

е) $\lambda_1 = 1, e_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, e_2 = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$
$\beta \neq 0,$ не приводится;

ж) $\lambda_1 = 1, e_1 = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, e_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$\alpha \neq 0, \beta^2 + \gamma^2 \neq 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2; \end{pmatrix}$

з) $\lambda_1 = -1, e_1 = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, e_2 = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq$
$0, \beta^2 + \gamma^2 \neq 0, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1; \end{pmatrix}$

и) $\lambda_1 = 1, e = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$ не приводится.

82.

1. а) $[\varphi]_{e'} = \begin{pmatrix} -183 & -160 & 44 \\ 152 & 135 & 35 \\ 205 & 181 & 48 \end{pmatrix}$,

б) $[\varphi]_{e'} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 7 \\ -17 & -11 & -20 \\ 12 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$

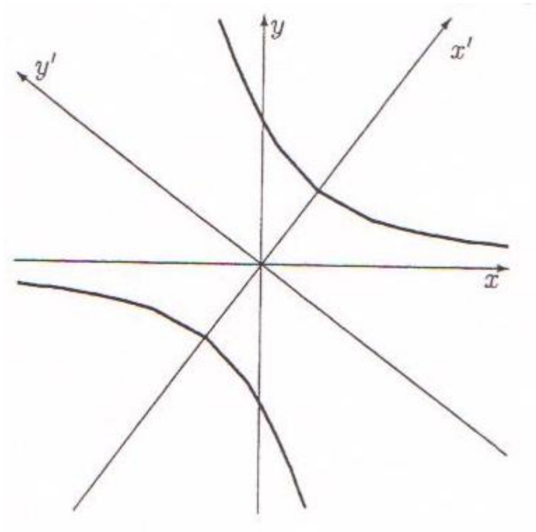
2. $[\varphi_A]_b = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 10 & 128 & 55 \\ -25 & -298 & -128 \end{pmatrix}.$

83.

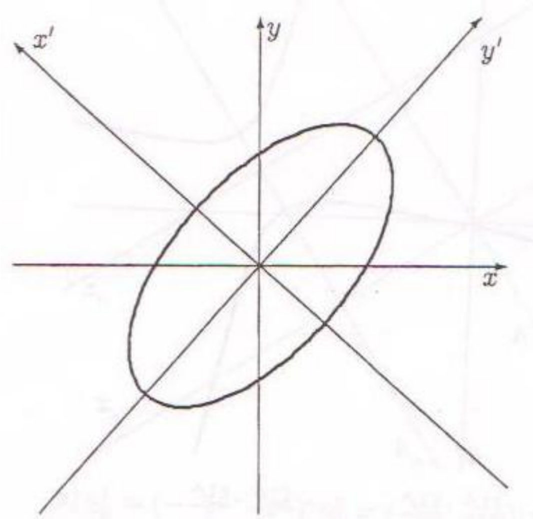
Глава 12

84.

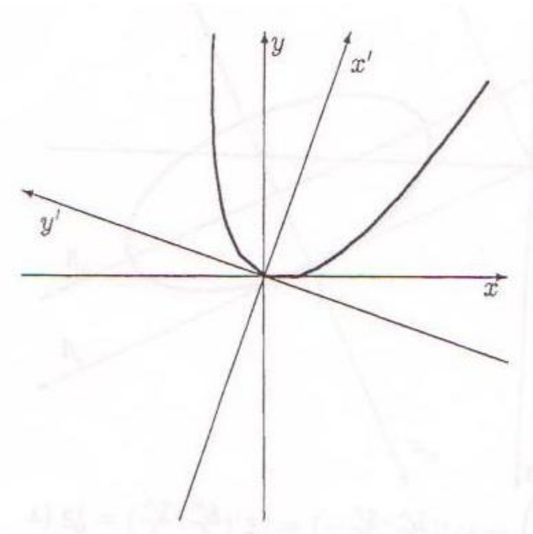
а) $\overline{e}_1^0 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \overline{e}_2^0 = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}), S = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 1;$



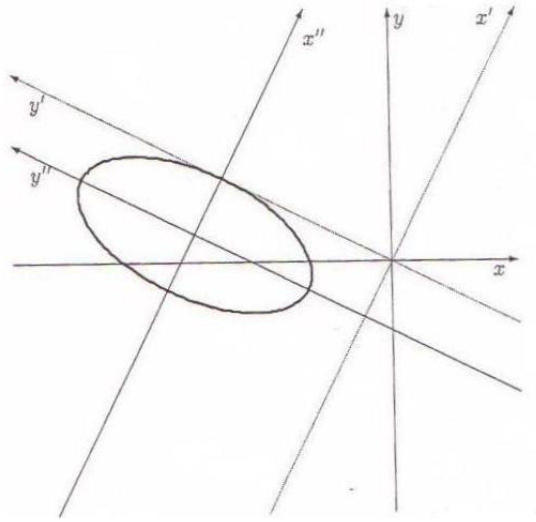
б) $\overline{e}_1^0 = (-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}), \overline{e}_2^0 = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}), S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}; \frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{4} = 1;$



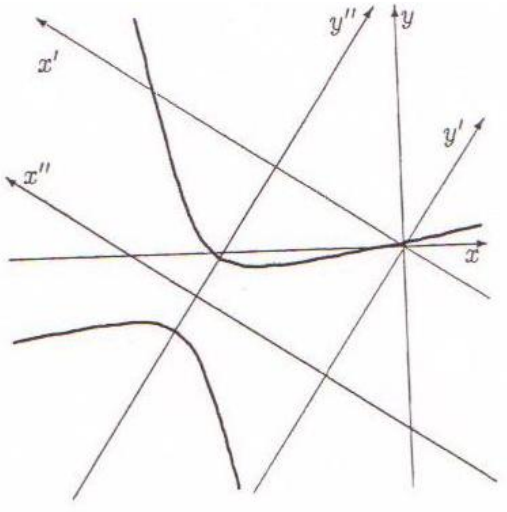
в) $\overline{e}_1^0 = (\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}), \overline{e}_2^0 = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}), S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; y'^2 = \frac{20}{9}x';$



г) $\overline{e}_1^0=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}),\overline{e}_2^0=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}),S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix};\frac{x''^2}{1}+\frac{y''^2}{4}=1;$



д) $\overline{e}_1^0=(-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}),\overline{e}_2^0=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}),S=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix};\frac{y''^2}{1}-\frac{x''^2}{1}=1;$



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] *Ивлева А.М., Пинус А.Г., Чехонадских А.В.* Основы алгебры и аналитической геометрии. — Новосибирск, 2003.

[2] *Ивлева А.М., Прилуцкая П.И., Черных И.Д.* Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. — Новосибирск, 2006.

[3] Задачник-практикум по аналитической геометрии и высшей алгебре, под редакцией В.А. Волкова. — Л., 1986.

[4] *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М., 1972.

[5] *Данко П.Е.,Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — Ч. I. — М., 1986.

Оглавление