Лекция 20

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (3)

Интегрирование рациональных дробей

Метод неопределенных коэффициентов

Интегрирование рациональных дробей

Определение 20.1.

Рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется ***правильной***, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, т. е. $m < n$.

Если $m \geq n$, дробь называется ***неправильной***.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, можно получить многочлен плюс правильную дробь.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Пример.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$$

неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & -5x & +9 & x-2 \\
\cline{6-6}
-\,x^4 & -2x^3 & & & & x^3+2x^2+4x+3 \\
\cline{1-2}
 & 2x^3 & & -5x & +9 & \\
 & -\,2x^3 & -4x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 4x^2 & -5x & +9 & \\
 & & -\,4x^2 & -8x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 3x & +9 & \\
 & & & -\,3x & -6 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 15. & \\
\end{array}
$$

$$
\frac{x^4-5x+9}{x-2} = x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}.
$$

Пример. Найти $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} dx$

Решение.

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x - 1} \right) dx = 0{,}5x^2 - x + ln|x - 1| + C$$

Если дробь правильная, рассмотрим следующие случаи:

а) В знаменателе подынтегральной функции стоит линейный двучлен $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a} ln\left|x+\frac{b}{a}\right| + C$$

$$\frac{1}{(ax+b)^m};$$

Соответствующий интеграл приводятся к табличному подстановкой $t = ax + b$.

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

б) В знаменателе интегрируемой функции квадратный трехчлен $f(x)=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Преобразуем его, выделив полный квадрат

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

Мы получили табличный интеграл, величина которого

равна арктангенсу, если $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$,

и «высокому» логарифму, если $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} < 0$.

Другой подход к решению заключается во введении новой переменной, за которую принимается производная квадратного трехчлена $t = 2ax + b$

Это приведет к исчезновению в знаменателе линейного слагаемого, в результате чего получится табличный интеграл.

Действительно $x = \dfrac{t-b}{2a}$ и $dx = \dfrac{dt}{2a}$

После подстановки в исходный интеграл

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{\frac{dt}{2a}}{a\left(\frac{t-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{t-b}{2a}\right) + c}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим интеграл

$$\int \frac{2dt}{t^2 + \left(4ac - b^2\right)},$$

который в зависимости от знака числа $4ac - b^2$ даст либо арктангенс, либо «высокий» логарифм.

в) Подынтегральная функция имеет вид

$$f(x) = \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$$

Аналогично вводится подстановка $t = 2ax + b$, в результате интеграл приводится к сумме двух интегралов

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \alpha \int \frac{tdt}{t^2 + \gamma} + \beta \int \frac{dt}{t^2 + \gamma} \quad ,$$

где α, β, γ - некие коэффициенты.

Первый из этих интегралов приводит к логарифму

$$\alpha\int\frac{tdt}{t^2+\gamma}=\frac{\alpha}{2}\int\frac{d\left(t^2+\gamma\right)}{t^2+\gamma}=\frac{\alpha}{2}ln\left|t^2+\gamma\right|,$$

а значение второго интеграла есть либо арктангенс, либо «высокий» логарифм.

Немного другая запись

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям

$$\left\{ \begin{aligned} & dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ & v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{aligned} \right\}$$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее *n-1* раз, то получится табличный интеграл

$$\int \frac{du}{u^2+s}$$

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = 2ax+b; & du = 2adx; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n} du =$$

$$\frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2+s)^n} \right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному

$$\int \frac{dt}{t^n},$$

а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую компьютерную реализацию этого метода.

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = x-2; & du = dx; \\ x = u+2; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{matrix} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg \frac{u}{\sqrt{3}} + C =$$

$$-\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Определение 20.1.

Сомножители вида $(x-a)^n$, $\left(x^2+px+q\right)^k$, где $n,k\in N$, называются простыми

Определение 20.2.

Простыми дробями называются следующие рациональные дроби

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ и } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \text{ где } n,m\geq 1,\ p^2-4q<0$$

Метод основан на использовании двух теорем

Теорема 20.1. (о разложении многочлена на множители).

Многочлен n-ой степени может быть разложен на произведение простых сомножителей, причем:

1) квадратный трехчлен раскладывается так:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ \text{если}\ b^2 - 4ac \geq 0$$

2) многочлен 3-й степени:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ \text{или}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x^2 + px + q),\ \text{если}\ D = p^2 - 4q < 0$$

3) многочлен 4-й степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

или

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + px + q)\,,\ D = p^2 - 4q < 0$$

или

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)\,,$$

если $D = p_1^2 - 4q_1 < 0\,,\ D = p_2^2 - 4q_2 < 0$

Теорема 20.2.(о разложении правильной рациональной дроби на сумму простых дробей)

Каждая правильная рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$,

знаменатель которой имеет вид:

$$Q_n(x) = (x - x_1)^n (x - x_2)^m \ldots (x^2 + p_1 x + q_1)^k \ldots,$$

может быть разложена и притом единственным образом на сумму простых дробей по правилу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n} + \frac{B_1}{x - x_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_m}{(x - x_2)^m} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{C_k x + D_k}{\left(x^2 + p_k x + q_k\right)^k} + \ldots$$

где все *A, B, C, D* - действительные постоянные числа, часть которых в разложении может обратиться в нуль.

В частности, если в знаменателе стоит квадратный трехчлен, то

$$\frac{P_1(x)}{(x\text{-}x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

где $P_1(x)=\left[\begin{array}{l} a \\ ax+b \end{array}\right.$

если многочлен 3-й степени, то в зависимости от числа и кратности действительных корней разложение будет иметь вид:

$$\frac{P_2(x)}{(x\text{-}x_1)(x-x_2)(x\text{-}x_3)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}$$

или

$$\frac{P_2(x)}{(x\text{-}x_1)(x-x_2)^2}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{(x-x_2)^2}$$

или

$$\frac{P_2(x)}{(x-x_1)(x^2+px+q)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q},$$

где $P_2(x) = \left[\begin{array}{l} a \\ ax+b \\ ax^2+bx+c \end{array}\right.,$

Замечание .

Метод неопределенных коэффициентов позволяет проинтегрировать любую рациональную дробь. При этом могут получиться лишь многочлены, рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.

Замечание.

Разложение имеет место для любых x из области определения.

Это утверждение лежит в основе нахождения неизвестных постоянных A, B, C, D.

Для нахождения этих постоянных правую часть разложения приведем к общему знаменателю. Приравнивая числители левой и правой частей разложения, получим равенство двух многочленов, тождественное относительно x.

Теперь можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

Получим систему уравнений, из которой находим искомые постоянные.

Второй способ нахождения искомых коэффициентов состоит в том, что в получаемом относительно x тождестве аргументу x придают значения корней, в результате чего получаются уравнения для нахождения постоянных.

Он более удобен, если корни некратные.

На практике чаще используется комбинация обоих способов.

Последовательность нахождения интеграла методом неопределенных коэффициентов

1.Если рациональная дробь является неправильной, то надо разделить «уголком» числитель на знаменатель, в результате чего получим многочлен и правильную дробь;

2.Знаменатель полученной правильной дроби разложить на произведение линейных и квадратичных множителей;

3) Правильную дробь разложить на сумму простейших дробей;

4) Найти постоянные коэффициенты;

5) Найти интегралы от каждого слагаемого в отдельности и просуммировать результат.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$

Решение

Дробь является правильной.
Знаменатель раскладывается на множители

$$x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2).$$

Тогда подынтегральное выражение может быть разложено на сумму простых дробей так:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители.

Получим

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

Раскроем скобки и напишем равенство в виде многочлена относительно x

$$(A + B + C - 3)x^2 + (-3A - 2B - C + 6)x + (2A - 2) = 0$$

Этот многочлен тождественно (т.е. при любых x) должен быть равен нулю. Последнее возможно в том единственном случае, когда все коэффициенты равны нулю. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A + B + C - 3 = 0 \\ -3A - 2B - C + 6 = 0 \\ 2A - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая ее, найдем $A = 1, B = 1, C = 1$

Вторым способом найти постоянные будет проще

В равенстве

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

Полагая

x=0, получим 2=2A, откуда A=1;

x=1, получим -1=-B, откуда B=1;

x=2, получим 2=2C, откуда C=1.

Наш интеграл теперь можно представить в виде суммы интегралов и найти ее.

$$\int \frac{3\mathrm{x}^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx =$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{x}}dx+\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$\ln|x|+\ln|x-1|+\ln|x-2| = \ln\left|x^3-3x^2+2x\right|+C$$