Лекция 16

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ(5)

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Инвариантность формы дифференциалов второго порядка

Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Экстремумы функции нескольких переменных

Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных

Достаточные условия экстремума

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим дифференцируемую функцию $z = f(x, y)$.

Очевидно, что выполнив частное дифференцирование, найдем $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y)$, $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y)$, где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – некоторые функции, и если они в свою очередь дифференцируемы, то можно найти $\dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}$, а также $\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}$; в этом случае говорят **о частных производных второго порядка функции** $z = f(x, y)$.

При этом используются следующие обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Аналогично вводятся в рассмотрение частные производные 3$^{\text{го}}$, 4$^{\text{го}}$,…, $n^{\text{го}}$ порядка.

Например,

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right), \qquad \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1}\partial x} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}\right) \text{ и т.п.}$$

Остановимся на так называемых **смешанных производных** второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Очевидно, что эти смешанные производные отличаются только порядком выполнения операции дифференцирования. Возникает вопрос, **при выполнении каких условий эти смешанные производные совпадают, т.е. не зависят от порядка дифференцирования.**

Если в данной точке $x^{(0)}$ существуют смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1},$$

то они не обязательно равны, в чем можно убедиться на примере функции двух переменных x, y

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{при } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Теорема 15.1 (Шварца)

Если у функции $z = f(x, y)$ *в некоторой области существуют непрерывные смешанные производные* $\dfrac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y}$ *и* $\dfrac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x}$, *то они совпадают в каждой точке этой области, т.е.* $z''_{xy}(x, y) = z''_{yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$.

Доказательство. Обозначим символами $\Delta_x f$, $\Delta_y f$ приращения функции f в точке (x_0, y_0), вызванные приращением соответственно Δx аргумента x и Δy аргумента y при достаточно малых $|\Delta x|$, $|\Delta y|$. Легко убедиться, что

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0))$$

(каждая из частей равенства совпадает с $f(x_0, y_0) - - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$).

Из условий теоремы следует существование частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Применяя к левой части равенства теорему Лагранжа о конечных приращениях по аргументу x, а к правой — эту же теорему Лагранжа по y, имеем

$$\Delta_y \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\Delta x = \Delta_x \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства ту же теорему Лагранжа соответственно по аргументу y и x, имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

где $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Сокращая последнее равенство на $\Delta x \Delta y$ и переходя в нем к пределу при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, получаем утверждение теоремы.

Пример. Убедиться, что у функции $z = \sin xy^2$ совпадают смешанные производные.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos xy^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y \cos xy^2 - 2xy^3 \sin xy^2$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y \cos xy^2 - 2xy^3 \sin xy^2 .$$

Мы видим, что смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} совпадают. Их непрерывность на всей плоскости $x0y$ очевидна.

Пример Шварца

$$f(x,\,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases} \to \frac{\partial^2 f(0,\,0)}{\partial x \partial y}=-1\neq 1=\frac{\partial^2 f(0,\,0)}{\partial y \partial x}$$

То есть смешанные производные в примере Шварца не равны

Смешанные производные второго порядка равны всюду, однако, разрывны в точке (0,0).

Дифференциалы высших порядков

Итак, рассмотрим дифференцируемую функцию двух независимых переменных $z = z(x, y)$.

Ее полный дифференциал равен $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$.

Очевидно, что приращения независимых переменных Δx и Δy не зависят от того, в какой точке выполняется дифференцирование функции $z = z(x, y)$.

Будем считать, что выбрав эти приращения, мы их зафиксировали.

Тогда полный дифференциал dz может рассматриваться как некоторая функция независимых переменных x и y, а тогда можно ставить вопрос о ее дифференцировании, т.е. о существовании дифференциала от дифференциала, т.е. $d(dz)$.

Если дифференцируема не только функция $z(x,y)$, но и ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то тогда существует **дифференциал от дифференциала, который называется вторым дифференциалом функции** $z(x,y)$**, и обозначается**

$$d^2z(x,y), \text{ т.е. } d^2z(x,y) \overset{def}{=} d\left(dz(x,y)\right)$$

Очевидно, что

$$d^2z(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\cdot\Delta y\right)\cdot\Delta x+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\cdot\Delta y\right)\cdot\Delta y=$$

$$=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}\cdot(\Delta x)^2+2\cdot\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}\cdot\Delta x\cdot\Delta y+\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}\cdot(\Delta y)^2.$$

Напомним, что что x и y – независимые переменные и $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$;

Обозначая их квадраты $(\Delta x)^2 = dx^2$, $(\Delta y)^2 = dy^2$, можем записать второй дифференциал так:

$$d^2 z(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

Совершенно аналогично, определяя полный дифференциал третьего порядка функции $z = z(x, y)$ как полный дифференциал от дифференциала второго порядка,

$$d^3 z(x, y) \overset{def}{=} d\left(d^2 z(x, y)\right)$$

выполнив аналогичные преобразования, получим

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot dz^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \cdot dx^2 \cdot dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^3} \cdot dx \cdot dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \cdot \partial y^3$$

Для удобства записи полного дифференциала любого порядка вводят такую символическую запись:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^n z \ ,$$

которую следует понимать как некий “оператор”, применение которого к функции $z = z(x, y)$ предполагает выполнение частного дифференцирования функции $z = z(x, y)$, причем порядок этих частных производных определяется степенью соответствующего слагаемого в правой части, которая раскрывается как формула бинома Ньютона

Замечание

Естественно предполагается, что функция $z = z(x, y)$ дифференцируема n раз.

Формулу для полного дифференциала, приведенную выше, можно доказать методом полной, т.е. математической индукции.

Нетрудно доказать, что если некоторая функция $u = u(x, y, z)$ зависит от трех независимых аргументов, и ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz,$$

то для обозначения полного дифференциала $n^{\text{го}}$ порядка такой функции, если он существует, имеет место такая символическая запись:

$$d^n u(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \cdot dz \right)^n \cdot u(x, y, z)$$

Пример. Найти третий дифференциал от функции двух переменных.

Решение. Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет непрерывные вторые частные производные. Для раскрытия скобок в выражении для третьего дифференциала

$$d^3 z(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z$$

воспользуемся алгебраической формулой сокращенного умножения

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Получим

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 .$$

Инвариантность формы дифференциалов второго порядка

Рассмотрим полный дифференциал второго порядка:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dx\cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2$$

и выясним, сохраняется ли форма второго полного дифференциала, если переменные x и y не независимые, а являются функциями некоторого аргумента t, т.е $x = x(t),\ y = y(t)$;

другими словами, выясним, **обладает ли полный дифференциал второго порядка свойством инвариантности своей формы ?**

Итак, полагаем $z = z[x(t), y(t)]$.

Тогда $dz = z'_t \cdot dt = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$

(т.е. первый дифференциал свойством инвариантности своей формы обладает).

$$d^2z = d\left(dz\right) = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right]_t' \cdot dt = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x_t'\cdot dt + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot y_t'\cdot dt\right]_t' \cdot dt =$$

$$= \left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x_t' + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot y_t'\right]_t' \cdot dt^2 = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\left(x_t'\right)^2 + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot x_t'y_t' + \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot x_{tt}'' + \\ + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot y_t'x_t' + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(y_t'\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot y_{tt}'' \end{array}\right]\cdot dt^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx' + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy' =$$

$$= d^2z\left(x,y\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx' + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy' \neq d^2z$$

Вывод: второй дифференциал не обладает свойством инвариантности своей формы. Аналогично не обладают такими свойствами и дифференциалы более высоких порядков.

Замечание

Исключение составляет тот случай, когда *x* и *y* являются линейными функциями аргумента *t*, т.е. $x = a_1 t + b_1$**,** $y = a_2 t + b_2$**.**

Причем это остается в силе для сложной функции любого числа аргументов, т.е. в этом случае полный дифференциал функции нескольких переменных порядка, выше второго, обладает свойством инвариантности своей формы.

Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Формула Тейлора для функции одного аргумента имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(x-a)^n,$$

где ξ лежит между x и a.

Напомним, что для представимости функции $y = f(x)$ формулой Тейлора достаточно, чтобы в окрестности точки $x = a$ функция $y = f(x)$ была бы дифференцируема n раз.

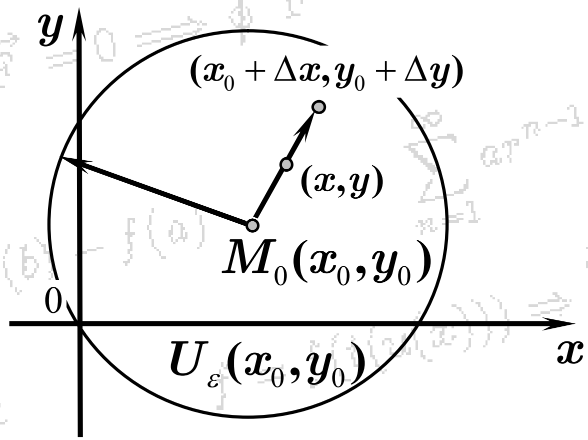
Рассмотрим случай функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Допустим, что эта функция дифференцируема n раз по своим аргументам в окрестности $\boldsymbol{U}_{\varepsilon}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ точки (x_0, y_0), принадлежащей некоторой области D плоскости xOy.

Пусть точка $(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$ не выпадает из этой окрестности.

Зафиксируем Δx и Δy и введем в рассмотрение сложную функцию аргумента t, определенную следующим образом: $F(t) = f(x, y)$, где $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$, где $t \in [0,1]$.

Нетрудно видеть, что параметрические уравнения $\left.\begin{matrix} x = x_0 + t\Delta x \\ y = y_0 + t\Delta y \end{matrix}\right\}$ дают нам уравнения отрезка прямой, соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$



Напомним, что при такой зависимости переменных x и y от параметра t, обладает свойством инвариантности не только первый полный дифференциал функции $f(x,y)$, но и полные дифференциалы порядков

$d^2 f(x,y)$, $d^3 f(x,y)$, …, $d^n f(x,y)$, т.е.

$$d^k F(t) = d^k f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+t\Delta x \\ y=y_0+t\Delta y}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^k \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+t\Delta x \\ y=y_0+t\Delta y}}$$

При этом $dx = \Delta x \cdot dt$, $dy = \Delta y \cdot dt$.

Напишем формулу Тейлора для функции $F(t)$ заменив в ней *a* на *t*, а *x* на $t+\Delta t$. Тогда получим

$$F(t+\Delta t)=F(t)+\frac{F'(t)}{1!}\cdot\Delta t+\ldots+\frac{F^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\cdot(\Delta t)^{n-1}+\frac{F^{(n)}(c)}{n!}\cdot(\Delta t)^{n},$$

где $c=t+\theta\cdot\Delta t$, $(0<\theta<1)$, т.е. *c* есть точка, лежащая между *t* и $t+\Delta t$.

Эту формулу можно переписать так:

$$F(t+\Delta t)-F(t)=dF(t)+\frac{1}{2!}\cdot d^2F(t)+...+\frac{1}{(n-1)!}\cdot d^{n-1}F(t)+\frac{1}{n!}\cdot d^nF(t+\theta\cdot\Delta t)$$

$(0<\theta<1)$.

Положим теперь здесь $t=0$, $\Delta t=1$ и напомним, что при $t=0$

мы имеем точку (x_0,y_0),

а при $\Delta t=1$ точку $(x_0+\Delta x, y_o+\Delta y)$,

кроме того $F(0)=f(x_0,y_o)$, $F(1)=(x_0+\Delta x, y_o+\Delta y)$, тогда получим

$$f\left(x_0+\Delta x, y_o+\Delta y\right)=f\left(x_0, y_0\right)+df\left(x, y\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}+\frac{1}{2!}\cdot d^2 f\left(x, y\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{\left(n-1\right)!}\cdot d^{n-1} f\left(x, y\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}+\frac{1}{n!}\cdot d^n f\left(x, y\right)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}},$$

Здесь следует положить $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.
т.к. $\Delta t = dt$,а мы положили $\Delta t = 1$,
следовательно, действительно из соотношений $dx = \Delta x \cdot dt$, $dy = \Delta y \cdot dt$ следует, что в данном случае $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

Итак, здесь в правой части равенства дифференциалы dx и dy совпали с заранее взятыми приращениями Δx и Δy переменных x и y, т.е. в правой части стоят полные дифференциалы различных порядков функции $f(x,y)$ двух независимых переменных x и y.

Введем полное приращение этой функции

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_o+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

тогда выведенную формулу можно переписать так:

$$\Delta f\left(x_0,y_0\right)=df\left(x_0,y_o\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(x_0,y_0\right)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot d^{n-1}f\left(x_0,y_0\right)+$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot d^n f\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y\right),\qquad (0<\theta<1).$$

Полученная формула называется **формулой Тейлора $n^{\underline{го}}$ порядка**. Последнее слагаемое, как и ранее, называется **остаточным членом в форме Лагранжа.**

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)^n \Bigg|_{(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y)}$$

Таким образом , справедлива

Теорема 16.1.

Пусть $\delta > 0$ и функция f n раз непрерывно дифференцируема на δ -окрестности точки (x_0,y_0) . Тогда для функции f при $|\Delta x| < \delta$ справедлива формула Тейлора

Отбрасывая остаточный член, мы получаем приближенное равенство, точность которого следует оценить, оценивая сверху модуль отброшенного остаточного члена. И в частности, **заменяя полное приращение функции двух независимых переменных ее дифференциалом,** мы можем оценить погрешность, оценивая модуль отброшенного остаточного члена

$$R = \frac{1}{2!} \cdot \left[\begin{array}{l} f''_{xx}\left(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y\right) \Delta x^2 + 2 \cdot f''_{xy}\left(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \\ + f''_{yy}\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \cdot \Delta y^2 \end{array} \right]$$

Аналогичная формула Тейлора имеет место для функции любого числа независимых переменных.

Замечание . Каждое слагаемое в разложении есть бесконечно малая величина по сравнению с предыдущим слагаемым при $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$. Для обоснования этого факта найдем отношение k-го слагаемого a_k к $(k-1)$-му a_{k-1}.

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)^k}{\dfrac{1}{(k-1)!}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)^{k-1}}$$

Разделим и умножим числитель и знаменатель на величину $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Получим

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\Delta x}{\rho} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\Delta y}{\rho}\right)^k \cdot \rho^k}{\dfrac{1}{(k-1)!}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\Delta x}{\rho} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\Delta y}{\rho}\right)^{k-1} \cdot \rho^{k-1}} \approx K \cdot \rho,$$

При условии

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}\neq 0$$

величина K конечна. При $\Delta x \to 0,\quad \Delta y \to 0$ величина $\rho \to 0$. Таким образом, каждый последующий член разложения, включая и остаточный, в $\rho\,(\,\rho \to 0\,)$ раз меньше предыдущего, т.е. представляет собой бесконечно малую функцию по отношению к предыдущему члену

$$a_k \approx K\cdot\rho\cdot a_{k-1} \text{ или } a_k = o\left(a_{k-1}\right) = o\left(\rho^{k-1}\right).$$

Замечание . Формулу Тейлора можно записать с остаточным членом в форме Пеано

$$\Delta z\Big|_{(x_0,y_0)} = dz\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{1}{2!}d^2z\Big|_{(x_0,y_0)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{(n-1)}z\Big|_{(x_0,y_0)} + o\left(\rho^{n-1}\right).$$

Замечание. Из формулы Тейлора легко получается, как частный случай, формула Маклорена, когда рассматривается разложение в окрестности точки $(0,0)$. Положив $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\quad \Delta x = x,\ \Delta y = y$, напишем формулу разложения в ряд Маклорена до третьего порядка

$$z(x,y) - z(0,0) = z'_x(0,0)\cdot x + z'_y(0,0)\cdot y + \frac{1}{2!}\left[z''_{xx}(0,0)\cdot x^2 + 2z''_{xy}(0,0)xy + z''_{yy}(0,0)\cdot y^2\right] + o\left(\rho^2\right)$$

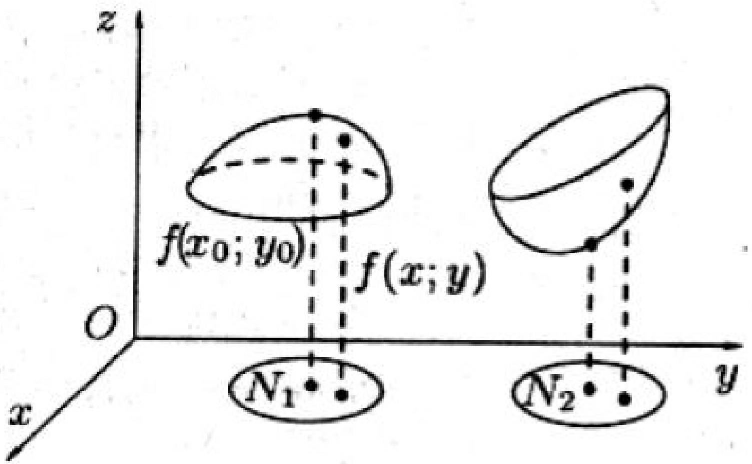
Экстремумы функции нескольких переменных

Аналогично тому, как это было сделано для функции одной переменной, вводятся определения экстремума функции нескольких переменных. Рассмотрение проведем для функции двух независимых переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости xOy, и пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой этой области.

Определение 16.1. В точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет максимум, если существует ε – окрестность точки M_0 $\boldsymbol{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ такая, что для всех точек M из этой окрестности (причем $M \neq M_0$) имеет место неравенство $f(M) < f(M_0)$.

Определение 16.2. В в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет минимум, если существует ε – окрестность точки M_0 $\boldsymbol{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ такая, что для всех точек M из этой окрестности имеет место неравенство $f(M) > f(M_0)$ $(M \neq M_0)$.



Максимальное и минимальное значение функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют просто максимум и минимум функции $f(x,y)$ и обозначают $\max f(x,y)$ и $\min f(x,y)$.

Максимумы и минимумы, как и ранее, называют экстремумами.

$$\left(\mathbf{max}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right)\Leftrightarrow(\exists\varepsilon>0\text{, что }\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),$$
$$M\neq M_0: f(x,y)<f(x_0,y_0));$$

$$\left(\mathbf{min}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right)\Leftrightarrow(\exists\varepsilon>0\text{, что }\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),$$
$$M\neq M_0: f(x,y)>f(x_0,y_0)).$$

Теорема 16.2.
(Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных).

Если функция $f(x,y)$, *определенная в области* D *плоскости* xOy, *имеет в точке* $(x_0,y_0)\in D$ *экстремум, то ее частные производные первого порядка в этой точке обращаются в ноль, т.е.*

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} &= 0 \\ \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Или, что то же самое, в точке (x_0,y_0) обращается в ноль полный дифференциал первого порядка данной функции.

Доказательство

Допустим, что эта функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $u_\varepsilon(x_0, y_0)$ и имеет в ней экстремумы (max и min).

Пусть для определенности в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет максимум.

Это означает, что $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) : f(x, y) < f(x_0, y_0)$ и, в частности, $f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$.

Отсюда следует, что функция одной переменной $f(x, y_0)$ в точке (x_0) имеет максимум.

Но тогда в этой точке $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Совершенно аналогично в этой точке $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

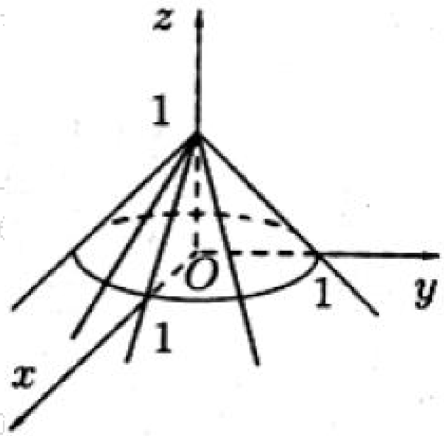
Если бы мы положили, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум, то получили бы точно такой же вывод.

Замечание. Отметим, что не всякая точка, в которой обращаются в нуль все частные производные первого порядка данной функции, является точкой, в которой функция имеет экстремум.

Иными словами, равенство нулю частных производных первого порядка в точке (x_0, y_0) есть необходимое, но не достаточное условие экстремума.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$



имеет максимум в точке O(0;0) но не имеет в этой точке частных производных.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю называется ***стационарной точкой*** функции z.

Однородные функции

Определение 16.3

Функция $z = z(x, y)$ называется **однородной функцией степени p**, если для любой точки (x, y) из области определения и переменной t выполняется равенство $z(tx, ty) = t^p z(x, y)$. Это равенство является тождеством, так как справедливо для любой точки (x, y). Например, функция $z = xy^4 - x^3 y^2$ является однородной функцией 5-й степени. Действительно,

$$z(tx, ty) = (tx)(ty)^4 - (tx)^3 (ty)^2 = t^5 \left(xy^4 - x^3 y^2\right) = t^5 z(x, y).$$

Соотношение Эйлера для дифференцируемых однородных функций.

Если функция $z = z(x, y)$ на некотором множестве дифференцируема и является однородной степени p, то выполняется равенство

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot y = p \cdot z(x,y)$$

Скалярное произведение градиента дифференцируемых однородных функций на вектор своих переменных пропорционально самой функции с коэффициентом, равным порядку однородности

Достаточные условия экстремума

По-прежнему для большей компактности изложения будем рассматривать функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Итак, допустим, что мы нашли точку $M_0(x_0, y_0)$, в которой выполнены необходимые условия экстремума, т.е. точку, в которой обращаются в нуль частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Как и ранее, точку $M_0(x_0, y_0)$ мы можем назвать **подозрительной на экстремум**.

Каковы же достаточные условия, при выполнении которых в этой точке функция будет иметь максимум или минимум?

Допустим, что функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируема трижды. Напишем формулу Тейлора третьего порядка для этой функции в точке M_0:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \cdot d^2 f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{3!} d^3 f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_o + \theta_2 \Delta y), \quad (0 < \theta_1 < 1), (0 < \theta_2 < 1),$$

Δx и Δy – произвольные приращения, которые предполагаются достаточно малыми по абсолютной величине.

В силу того, что необходимые условия экстремума выполнены, очевидно, что $df(x_0, y_0) = 0$, а тогда

$$f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} \cdot d^2 f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot d^3 f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_o + \theta_2 \Delta y)$$

Ясно, что если Δx и Δy достаточно малы по модулю, то знак правой части этого равенства определяется знаком его первого слагаемого,

т.е. знаком $\frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0, y_0)$, т.к. здесь в правой части стоят однородные многочлены относительно Δx и Δy соответственно второй и третьей степени.

Рассмотрим подробнее выражение для этого слагаемого:

$$\frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\cdot\left[\begin{array}{l} f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot(\Delta x)^2 + 2\cdot f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot\Delta x\Delta y + \\ + f''_{yy}(x_0, y_0)\cdot(\Delta y)^2 \end{array}\right]$$

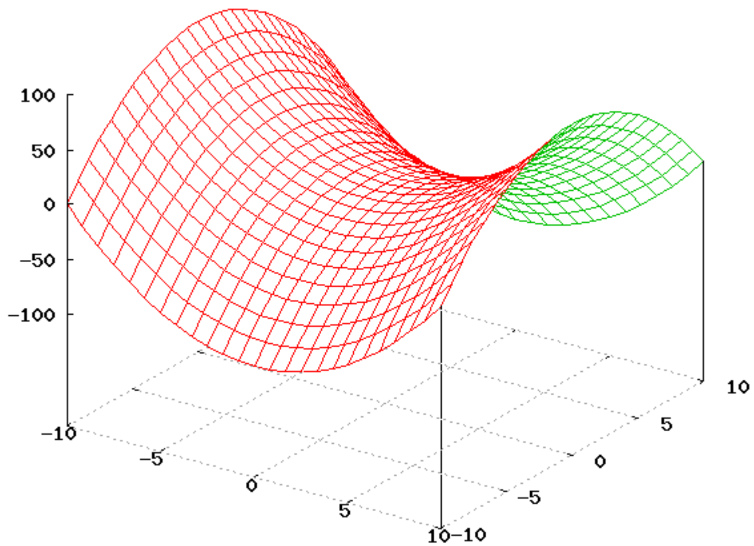
Если $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум, т.к. в этом случае $f(x_0, y_0) < f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$.

Если $d^2 f(x_0, y_0) < 0$, то максимум, т.к. тогда $\Delta f(x_0, y_0) < 0$, т.е. $f(x_0, y_0) > f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$.

Может, однако, оказаться, что при одних сочетаниях Δx и Δy $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, а при других < 0.

Это означает, что в точке M_0 у функции $f(x, y)$ экстремума нет.

Говорят, что в этом случае функция имеет “**минимакс**”.


100
50
0
−50
−100
−10
−5
0
5
10
−10
−5
0
5
10

Если же это выражение знака не меняет, но может обращаться в нуль, то это означает лишь то, что по знаку $d^2 f(x_0, y_0)$ нельзя судить о наличии экстремума у функции $f(x, y)$ в точке M_0.

В этом случае следует рассмотреть формулу Тейлора четвертого порядка и провести аналогичные исследования.

Аналогичные результаты справедливы для функции, зависящей от любого числа независимых переменных.

Попытаемся теперь получить простые и удобные в применении достаточные условия экстремума для функции $f(x,y)$, выраженные через значения частных производных второго порядка функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Для этого обозначим $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$ и обозначим $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=t$ (для определенности считаем, что $\Delta y \neq 0$).

Очевидно, что

$$\frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\cdot\left(At^2 + 2\cdot Bt + C\right)\cdot(\Delta y)^2.$$

Ясно, что знак этого выражения определяется знаком квадратного трехчлена $\varphi(t) = At^2 + Bt + C$.

Его дискриминант $D = B^2 - AC$.

Если $D<0$, то график функции $\varphi(t)$ не пересекает ось Ot (корни комплексные);

если $D>0$, то график функции $\varphi(t)$ пересекает ось Ot в двух точках (корни вещественные);

если $D=0$, то график функции $\varphi(t)$ касается оси Ot (корни вещественные и равные).

Введем теперь в рассмотрение величину $\Delta = AC - B^2$ = -*D*.

Принимая во внимание все вышесказанное, можем сделать следующие выводы:

Если $\Delta > 0$**, то для всех** Δx **и** Δy Δf **сохраняет знак.**

При этом, если $A > 0$**, то и** $\Delta f > 0$**.**

Следовательно, в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет **минимум**.

Если же $A < 0$**, то и** $\Delta f < 0$**,** следовательно, в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет **максимум**.

Если $\Delta < 0$, **то** для различных Δx и Δy функция $\varphi(t)$ имеет различные знаки, в силу чего Δf **изменяет знак в окрестности точки** (x_0, y_0)**.**
Следовательно, в точке (x_0, y_0) функция **экстремума не имеет**

Если $\Delta = 0$, то Δf знака не меняет, но может обращаться в нуль.

Значит, **вопрос о наличии экстремума в точке (x_0, y_0) остается открытым**.

Заметим теперь, что функции нескольких переменных могут иметь экстремум не только в тех точках, где частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ обращаются в нуль, но и в точках, где функция недифференцируема, лишь бы только в этих точках она была непрерывна.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области $\overline{D}$.

Тогда заведомо функция в этой области имеет наибольшее и наименьшее значение.

Для их отыскания нужно исследовать точки, подозрительные на экстремум и лежащие внутри области D.

Затем нужно исследовать поведение функции на границе области, т.е. найти на границе наибольшее и наименьшее значение функции.

И в заключение следует сравнить экстремальные значения, которые функция принимает в области D с ее значениями на границе.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 3 - x^2 - y^2$ в области $\vec{D}$, ограниченной прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Приравниваем к нулю частные производные : $-2x = 0$, $-2y = 0$.

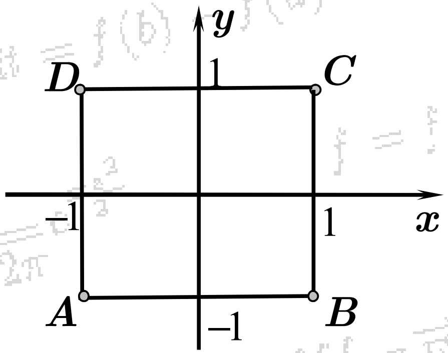
Получаем точку $(0,0)$ – точку, подозрительную на экстремум.

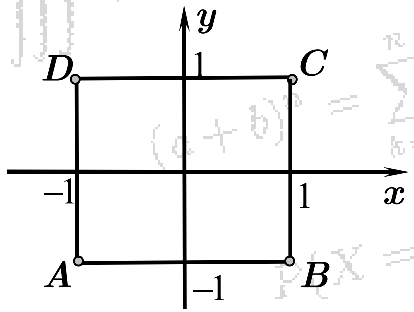
Вычисляем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$.

Следовательно $\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 > 0$, $A < 0$.

Значит, в точке $(0,0)$ функция имеет максимум.

Исследуем теперь поведение функции на границе области, т.е. на контуре $ABCD$, где $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$





На AB: $y=-1$, $z_1=z(x,y)\big|_{y=-1}=2-x^2, x\in[-1,1]$; $z_1'(x)=-2x$; точка $x=0$ подозрительна на экстремум: $z_1(0)=2$; $z_1(A)=z_1(-1)=1$, $z_1(B)=z_1(1)=1$.

На BC: $x=1$, $z_2=z(x,y)\big|_{x=1}=2-y^2, y\in[-1,+1]$; $z_2'(y)=-2y$; точка $y=0$ подозрительна на экстремум: $z_2(0)=2$; $z_2(B)=z_1(B)=1$, $z_2(C)=z_2(1)=1$.

На DC: $y=1$, $z_3=z(x,y)\big|_{y=1}=2-x^2$; $z_3'=-2x$; точка $x=0$ подозрительна на экстремум: $z_3(0)=2$; $z_3(C)=z_2(C)=1$; $z_3(D)=z_3(-1)=1$.

На AD: $x=-1$, $z_4=z(x,y)\big|_{x=-1}=2-y^2$; $z_4'(x)=-2y$; точка $y=0$ подозрительна на экстремум: $z_4(0)=2$; $z_4(A)=z_1(A)=1$; $z_4(D)=z_3(D)=1$.

Вывод. Внутри квадрата функция $z(x,y)$ имеет максимум в точке $(0,0)$: $z_{\max}=3$.

На границе области функция принимает наименьшее значение в точках A,B,C,D: $z(A)=z(B)=z(C)=z(D)=1$, а наибольшее в точках $(0,-1), (1,0), (0,1), (-1,0)$, причем $z(0,-1)=z(1,0)=z(0,1)=z(D-1,0)=2$.

Ответ. наибольшее значение функция принимает в точке $(0,0)$, оно совпадает с максимальным значением функции $z_{\max}=z_{\text{наиб.}}=z(0,0)=3$; наименьшее значение функция принимает в точках A,B,C,D; причем $z_{\text{наим.}}=1$.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Мы рассмотрели экстремумы функции нескольких переменных, считая только, что эти точки лежат внутри некоторой области D.

Такие экстремумы называются безусловными.

Однако часто приходится отыскивать экстремумы функции $f(x,y)$ в области D в предположении, что кроме того выполняются условия вида:

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$$

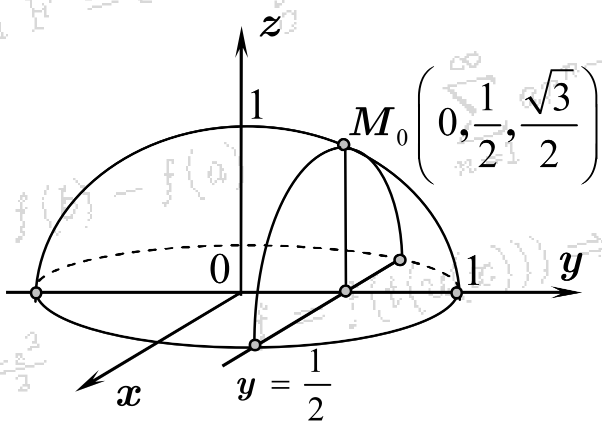
Экстремумы, удовлетворяющие таким условиям, называются условными.
случае аргументы x и y данной функции $f(x,y)$ нельзя считать независимыми переменными.

Очевидно, что их связывает уравнение $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$, которое и называется уравнением связи.

Будем предполагать , что для фукции φ выполняются условия для неяно заданной функции

Геометрически это означает, что условный экстремум отыскивается не для всех точек (x, y), принадлежащих области D, а для точек, принадлежащих области D, и лежащих на некоторой кривой l, уравнение которой $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Например, очевидно, что функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ достигает безусловного максимума в точке $0(0,0)$: $z_{\max} = 1$ (рис. 3.10.1)



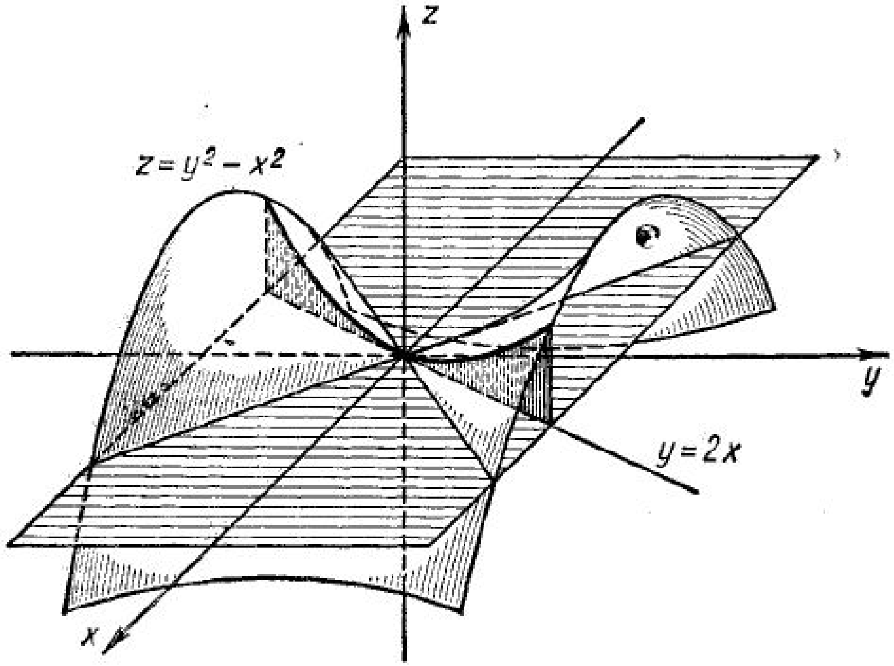
Если же потребовать: найти условный экстремум функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ на прямой $y = \frac{1}{2}$, то очевидно, что он достигается в точке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отыскание условного экстремума функции можно свести к отысканию безусловного экстремума некоторой другой функции.

Например, в данном случае достаточно исследовать функцию

$$z(x, y)\Big|_{y=\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}\,.$$

Однако такой способ не всегда бывает удобен


z
z = y² − x²
y
y = 2x
x

Рассмотрим другой способ отыскания условного экстремума, который называется **методом множителей Лагранжа**.

Итак, допустим, что нам нужно найти условный экстремум функции $z(x, y)$, причем уравнение связи

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Допустим, что точка $M_0(x_0, y_0)$– точка условного экстремума, значит, в этой точке производная по x от функции $z = f(x, y)$ с учетом уравнения связи должна быть равна нулю, что равносильно равенству нулю $df(x, y)$ в точке M_0.

Итак в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$df(x,y) = \frac{df(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{df(x,y)}{\partial y} \cdot dy = 0 \qquad (2)$$

С другой стороны, продифференцируем уравнение связи $\varphi(x,y) = 0$, получим

$$d\varphi(x,y) = \frac{d\varphi(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{d\varphi(x,y)}{\partial y} \cdot dy = 0 \qquad (3)$$

Умножим соотношение (3) почленно на некоторый множитель λ и прибавим к соотношению $\varphi(x, y) = 0$:

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right) \cdot dx + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dy = 0 \qquad (4)$$

Выберем теперь число λ так, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

Заметим, что это возможно, т. к. мы предполагаем, что выполняются условия теоремы существования неявно заданной функции в силу которой $\varphi'_y(x, y) \neq 0$.

Тогда очевидно, что выполняется и второе условие:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

Рассмотрим теперь функцию $F(x,y)= f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$.

Очевидно, что условия $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=0$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=0$ дают нам необходимые условия экстремума функции $F(x,y)$, которая называется функцией Лагранжа, параметр λ при этом называется множителем Лагранжа.

Итак, для того, чтобы найти точки, в которых данная функция $z = f(x, y)$ может иметь условный экстремум, определенный уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$, необходимо решить систему таких трех уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} F'_x(x, y) = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}$$

Найденные таким образом точки, естественно, подлежат дополнительному исследованию.

Пример. Найти наибольшее значение функции $u=\sqrt[3]{xyz}$ при условии, что $x+y+z=a$, $(a>0)$.

Решение. Итак, необходимо найти условный максимум функции $u=\sqrt[3]{xyz}$, если уравнение связи $x+y+z-a=0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F=\sqrt[3]{xyz}+\lambda\cdot(x+y+z-a)$.

Найдем ее частные производные по x, y и z и приравняем их к нулю, а также добавим к ним уравнение связи:

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{1}{3}(xyz)^{-\frac{2}{3}} \cdot yz + \lambda = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{x} + \lambda = 0 \\ F'_y = \dfrac{1}{3}(xyz)^{-\frac{2}{3}} \cdot xz + \lambda = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{y} + \lambda = 0 \\ F'_z = \dfrac{1}{3}(xyz)^{-\frac{2}{3}} \cdot xy + \lambda = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{z} + \lambda = 0 \\ x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему и исключая параметр λ, получим $x = y = z = \frac{a}{3}$.

Следовательно, данная функция $\sqrt[3]{xyz}$ имеет максимум в точке $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ и при этом $u_{\max} = \frac{a}{3}$.

Таким образом, для любых положительных чисел x, y, z связанных соотношением $x + y + z = a$, выполняется неравенство $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{a}{3}$,

но $a = x + y + z$.

Следовательно, имеем $\sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{x+y+z}{3}$.

Обобщая полученный результат на любое число переменных, можем сделать полезный вывод:

Среднее геометрическое нескольких чисел не превосходит их среднего арифметического.