

Лекция 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (4)

ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Формула Тейлора для многочленов

Формула Тейлора для произвольной функции

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Маклорена

Представление функций e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ формулой Маклорена

Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{iz} =$$

В определении функции не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения $y = f(x)$

Как найти значения, например, функций $y = \sin x$, $y = \ln(1+x)$ при любых (допустимых) значениях аргумента?

Для того, чтобы вычислить значения данной функции $y = f(x)$, ее заменяют многочленом $P_n(x)$ степени n , значения которого всегда и легко вычисляемы. Возможность представлять функцию многочленом дает **формула Тейлора**.



Тейлор (Taylor) Брук (18.8.1685, Эдмонтон, Мидлсекс, — 29.12.1731, Лондон),
английский математик, член Лондонского королевского общества (1712).
Нашёл в 1712 общую формулу для разложения функций в степенные ряды
, которую опубликовал в 1715 в работе «Methodus incrementorum directa et inversa».

ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} o(\Delta x) = 0$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Иначе говоря, существует линейная функция $P_1(x) = y_0 + A(x - x_0)$

такая, что $f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$, $x \rightarrow x_0$

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), P'_1(x_0) = A = f'(x_0).$$

$$f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n , такой, что

$$e^{ix} = -1 \quad f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

$$f(x_0) = P_n(x_0), \quad f'(x_0) = P'_n(x_0), \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}_n(x_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Формула Тейлора для многочленов

Дифференцируя его n раз находим

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1},$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2},$$

.....

$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \dots n \cdot a_n.$$

Полагая во всех этих формулах $x = 0$, получаем

$$a_0 = P(0), a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \dots a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{\lambda}x$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

Таким образом,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

$$\Pr(X=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Пусть теперь

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + P(x) = \sum_{k=0}^n A_k (x - x_0)^k.$$

Полагая $t=x-x_0$, $P(t-x_0)=Q(t)$ по доказанному имеем

$$A_k = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad \Rightarrow \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Замечание

Если $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{k!} (x - x_0)^k$, то $C_k = P^{(k)}(x_0)$ при $k = \overline{0, n}$.

Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке $[a; b]$.
Допустим, что на этом промежутке $f(x)$ дифференцируема n раз.
Докажем, что $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x - a)^{n-1} + R_n$$

– формула Тейлора.

Последнее слагаемое в формуле Тейлора называется остаточным членом.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f(x) = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

Если отбросить остаточный член, то получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1}$$

Многочлен $P(x)$, стоящий справа, называется **многочленом Тейлора**. Заметим, что коэффициенты многочлена Тейлора вычисляются без труда: для этого достаточно вычислить значения функции $f(x)$ и ее производных

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x) \quad \text{в точке } a.$$

Заменив функцию ее многочленом Тейлора, мы совершим ошибку, равную отброшенному остаточному члену R_n в формуле Тейлора.

При решении практических задач эту ошибку точно указать, как правило, нельзя, однако всегда можно ее оценить, т.е. можно указать такое положительное число, которого не превосходит модуль отброшенного остаточного члена.

$$f(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} ds$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Согласно замечанию имеем $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

Положим $r(x) = f(x) - P(x)$.

Очевидно, что $r^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = \overline{0, n}$.

Применяя $n - 1$ раз правило Лопитала и принимая во внимание определение производной, имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{r^n(x_0)}{n!} = 0.$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$\int f(t)dt = \int f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \int f(t(u(x)))dt = \frac{d}{dx} \int f(t)dt$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Таким образом $r(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

То есть, имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^n)$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.



Джузеппе Пеано (итал. *Giuseppe Peano*; 27 августа 1858 — 20 апреля 1932) — итальянский математик. Внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики. Создатель вспомогательного искусственного языка латино-сине-флексионе. Более всего известен как автор стандартной аксиоматизации натуральной арифметики — арифметики Пеано.

Джузеппе Пеано внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики. Автор более 200 книг и статей, он был одним из основателей математической логики и теории множеств.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\int f(t) dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \nabla \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$p(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$|fg| \leq M$$

Аксиомы Пеано

- 1 является натуральным числом;
- Число, следующее за натуральным, также является натуральным;
- 1 не следует ни за каким натуральным числом;
- Если натуральное число a непосредственно следует как за числом b , так и за числом c , то b и c тождественны;
- (Аксиома индукции) Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа n (индукционное предложение), вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

Рассмотрим другую форму остаточного члена. Для этого прибегнем к такому искусственному приему: допустим, что некоторое неизвестное число R определено равенством

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (b-a) - \frac{f''(a)}{2!} \cdot (b-a)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (b-a)^{n-1} - \frac{R}{n!} \cdot (b-a)^n = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

и введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} \Phi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} \cdot (b-x) - \frac{f''(x)}{2!} \cdot (b-x)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \cdot (b-x)^{n-1} - \frac{R}{n!} \cdot (b-x)^n \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

В силу равенства (9.1) $\Phi(a) = 0$. Очевидно, что $\Phi(b) = 0$. Кроме того, $\Phi(x)$ дифференцируема и непрерывна на промежутке $[a; b]$. Следовательно, $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, между точками a и b существует некоторая точка c такая, что $\Phi'(c) = 0$.

Продифференцируем равенство (9.2) почленно:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= -f'(x) - \left[\frac{f''(x)}{1!} \cdot (b-x) - \frac{f'(x)}{1!} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{f'''(x)}{2!} \cdot (b-x)^2 - \frac{f''(x)}{2!} \cdot 2 \cdot (b-x) \right] - \dots \\ &- \left[\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} \cdot (b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \cdot (n-1) \cdot (b-x)^{n-2} \right] + \frac{R}{n!} \cdot n \cdot (b-x)^{n-1} = \\ &= -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + \frac{R}{(n-1)!} \cdot (b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

Отсюда следует $\Phi'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{R}{(n-1)!} \cdot (b-c)^{n-1} = 0 \Rightarrow R = f^{(n)}(c)$

Подставим найденное значение R в формулу (9.1) и заменим в ней b на x , тогда получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Здесь c лежит между a и x .

Эта формула называется

формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.



Жозеф Луи Лагранж (фр. Joseph Louis Lagrange, итал. Giuseppe Lodovico Lagrangia; 25 января 1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером — крупнейший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала

Остаточный член в форме Пеано удобен при изучении вопросов, связанных с предельным переходом.

Остаточный член в форме Лагранжа часто позволяет получить даже количественную оценку погрешности.

С другой стороны, в сравнении с формой Пеано он установлен при более жёстких ограничениях. Кроме того, его запись содержит точку, положение которой как правило точно не известно. Следует отметить, что остаточный член в форме Лагранжа применяется наиболее часто.

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t f(t(u(x))) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^t f(t(u(x))) dt = u'(x)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Другие формы остаточного члена

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Форма Шлёмильха-Роша

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)! p} (x - x_0) p(x - \xi)^{n-p},$$

Форма Коши

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n-1)!} (1 - \theta)^{n-1} (x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t f(t(u(x))) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^t f(t(u(x))) dt = u'(x)$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Форма Коши

$$f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

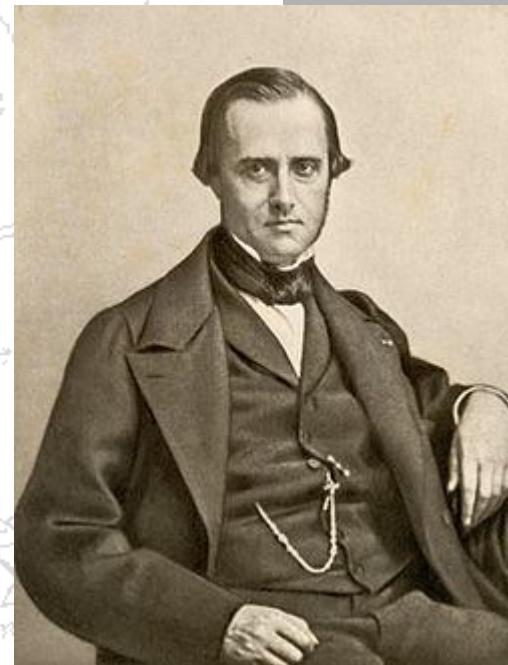
$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t f(t(u(x))) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^t f(t(u(x))) dt = u'(x)$$



Оскар Ксавер Шлёмильх (нем. *Oskar Xavier Schlömilch*; 13 апреля 1823, Веймар — 7 февраля 1901, Дрезден) — немецкий математик,



Рош, Эдуар Альбер (фр. *Édouard Albert Roche*; 17 октября 1820, Монпелье — 8 апреля 1883) — французский астроном, математик,

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(t(u(x))) \cdot u'(x)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Отметим некоторые **частные случаи формулы Тейлора**.

Положим в формуле Тейлора $n = 1$. Тогда получим формулу

(c лежит между a и x). Это и есть ни что иное, как полученная ранее формула Лагранжа.(Этот факт станет очевидным, если заменить x на b).

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{dx} = u \vec{du}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Положим теперь в формуле Тейлора $n = 2$.

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (x - a)^2$$

и заменим в этом выражении x на $x + \Delta x$, а точку a на x , тогда получим

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (\Delta x)^2$$

Отбросим последнее слагаемое, тогда

Этой формулой можно пользоваться в приближенных вычислениях, заменяя полное приращение функции ее дифференциалом.

Погрешность таких приближенных вычислений нетрудно оценить, рассмотрев отброшенный остаточный член

$$\frac{f''(c)}{2!} \cdot (\Delta x)^2$$

Заметим, что формула Тейлора имеет очень широкое применение, поскольку позволяет любую функцию (лишь бы она была нужное число раз дифференцируема!) заменить многочленом с любой степенью точности.

ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА:

$$f(z) = \sqrt{2\pi}$$

Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то получим частный случай формулы Тейлора – так называемую **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot x^n$$

Заметим, что точка c лежит между a и x , а поэтому $c = a + \theta \cdot x$, $0 < \theta < 1$.



Колин Маклорен (англ. *Maclaurin*) (1698, Шотландия — 1746) — выдающийся английский математик. Рано осиротев, он был взят на попечение своим дядей, который, как и отец Маклорена, желал, чтобы Маклорен посвятил себя духовному званию. В 1709 г. поступил в университет города Глазго. Здесь у него блестящие математические способности столь развились, что в возрасте 15 лет он уже открыл несколько теорем, которые и изложил впоследствии в одном из своих сочинений.

Представление функций e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)\alpha$ формулой Маклорена

$y = e^x$. Очевидно, что эта функция дифференцируема сколько угодно раз на всей числовой оси. Найдем ее разложение по формуле Маклорена

$$y(x) = e^x; \quad y(0) = 1$$

$$y^{(n-1)}(x) = e^x; \quad y^{(n-1)}(0) = 1$$

$$y'(x) = e^x; \quad y'(0) = 1$$

$$y^{(n)}(x) = e^x; \quad y^{(n)}(c) = e^c$$

$$y''(x) = e^x; \quad y''(0) = 1$$

3

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{ix} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Подставим найденные значения производных в формулу Маклорена, окончательно получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!} \cdot x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f(t)_t^x = f(b) - f(a)$$

(c лежит между 0 и x).

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$y = \sin x$. Функция сколько угодно раз дифференцируема на всей числовой оси.

$$y = \sin x; \quad y(0) = 0$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y''(0) = 0$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y'''(0) = -1$$

$$y'''' = -\sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y''''(0) = 0$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y^{(n)}(c) = \sin\left(c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^t f(t) dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Подставим найденные значения производных в формулу Маклорена, получим

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{\sin\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]}{n!} \cdot x^n$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{u}x$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$y = \cos x, \vec{n} ds = \iint_{D_x} \vec{n} \cdot \vec{F} dV$$

$$y = \cos x; \quad y(0) = 1$$

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y''(0) = 1$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y'''(0) = 0$$

$$y'^n = \cos x = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y'^n(0) = 1$$

$$y^{(n-1)} = \cos\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right]; \quad y^{(n-1)}(0) = \cos(n-1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y^{(n)}(c) = \cos\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t f(t(u(x))) dt \Rightarrow \vec{u}x$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Таким образом, разложение функции $y = \cos x$ по формуле Маклорена имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{\cos(n-1)\pi}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{\cos\left[c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]}{n!} \cdot x^n$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

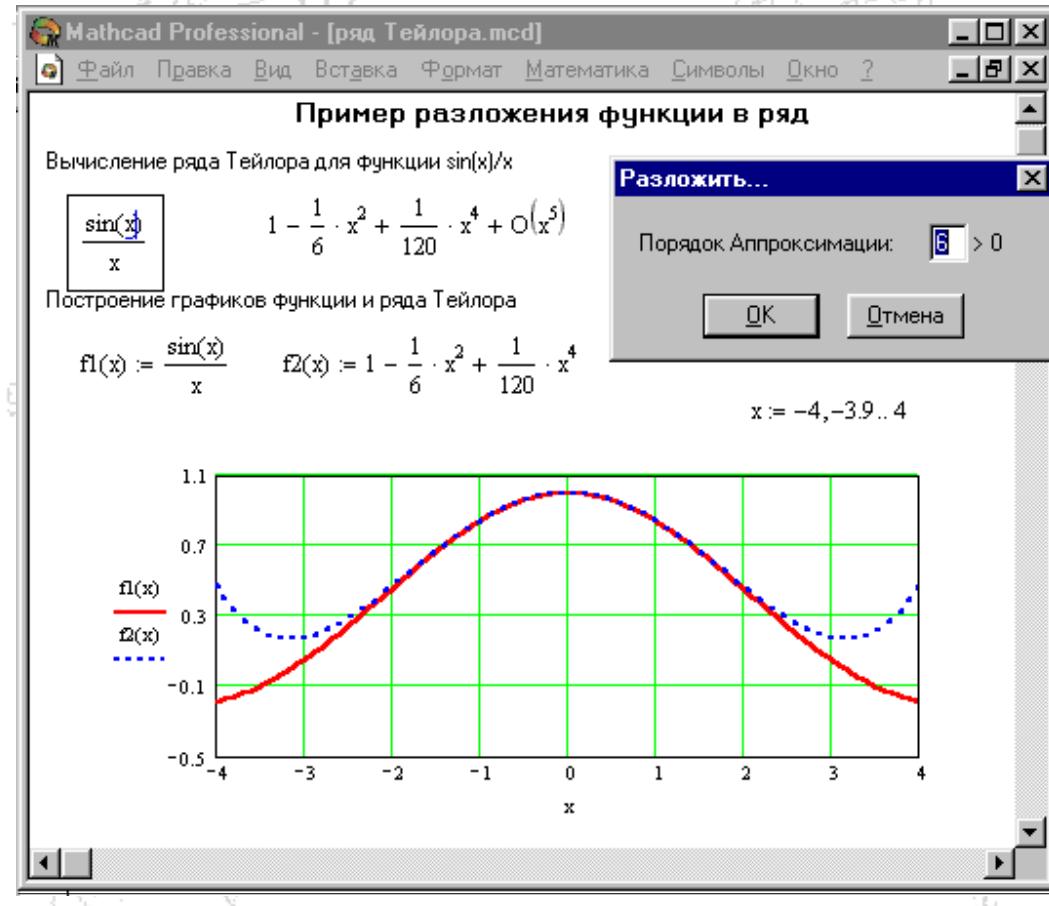
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

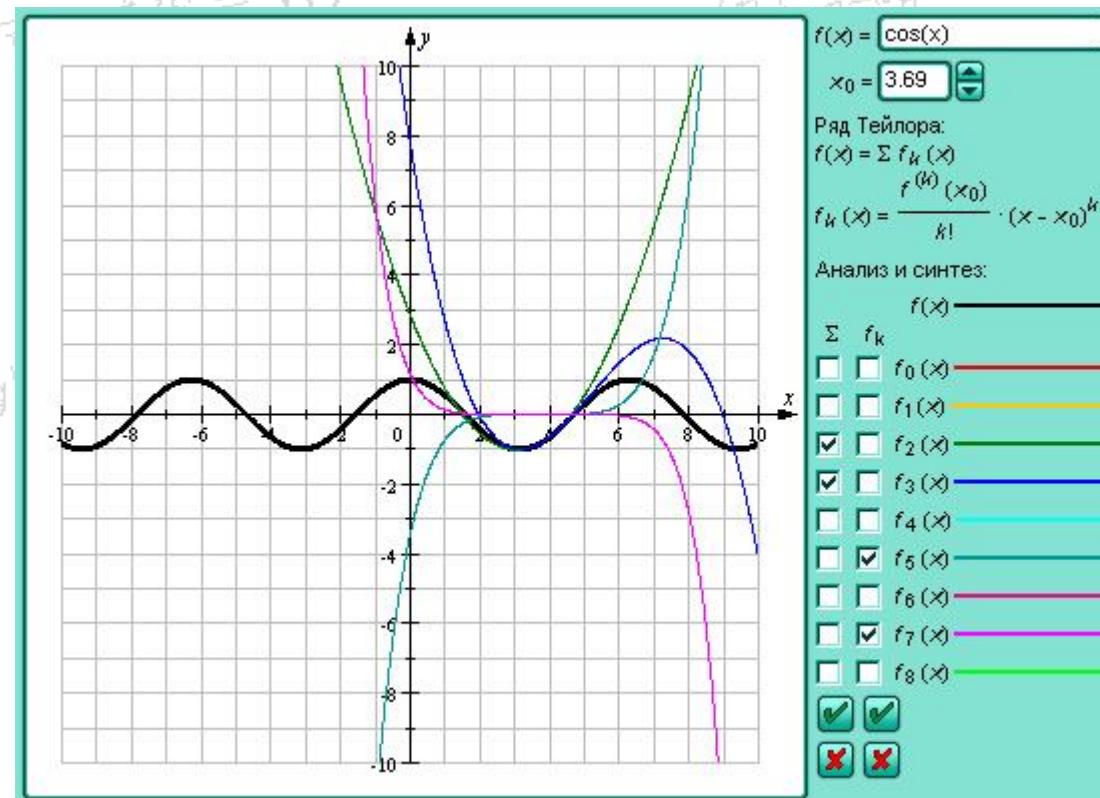
$$f(z)$$



$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$



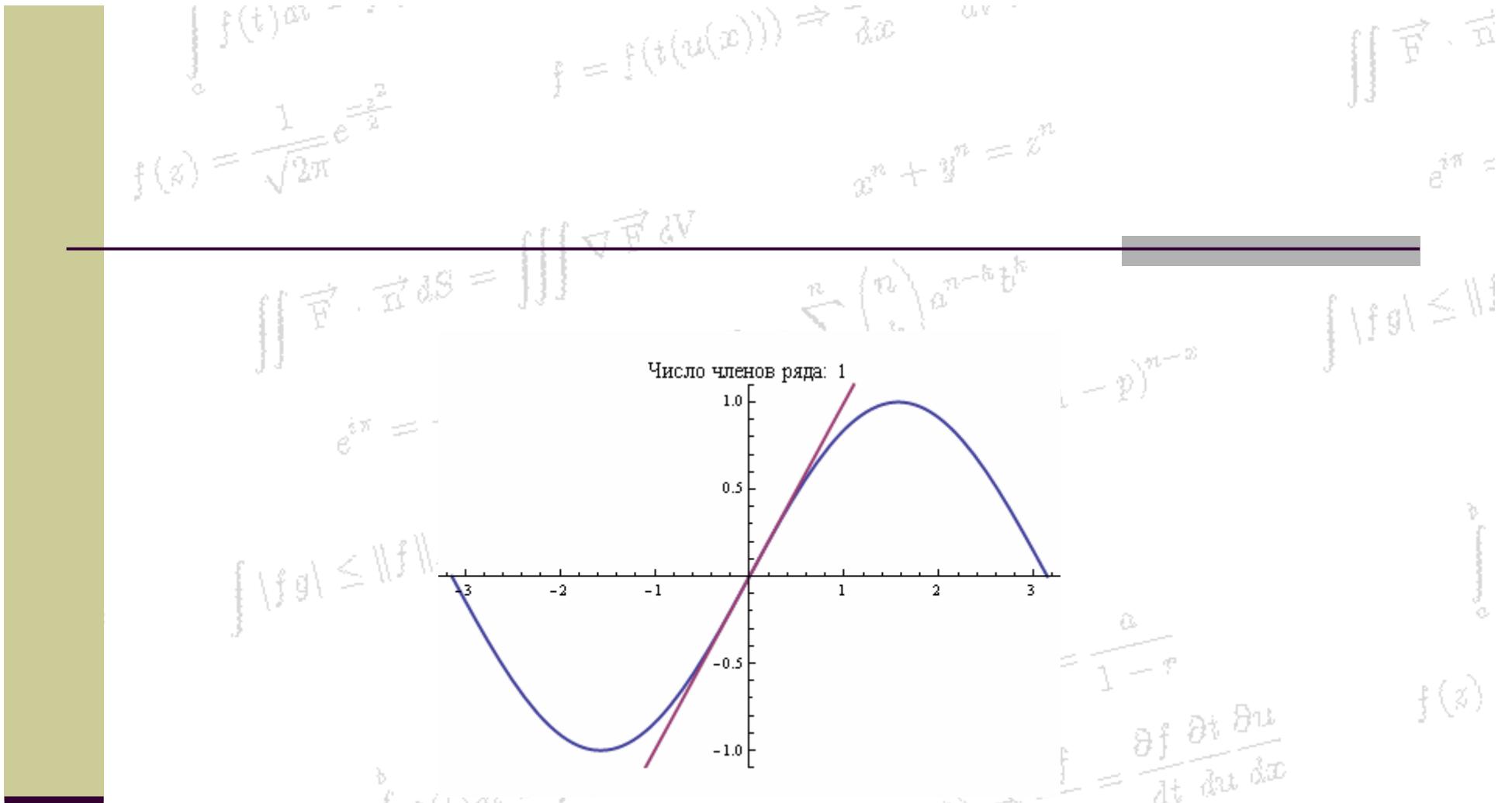
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$



$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tu} u^{t-1} du$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq \|f\| \|g\|$$

$$(1-x)^{(n-1)}$$

$$|fg| \leq \|f\| \|g\|$$

$$=\frac{a}{1-r}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z)$$

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tu} u^{t-1} du$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\hat{f}(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

order

$$v = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{dx} = uv$$

$$n + n^n = v^n$$

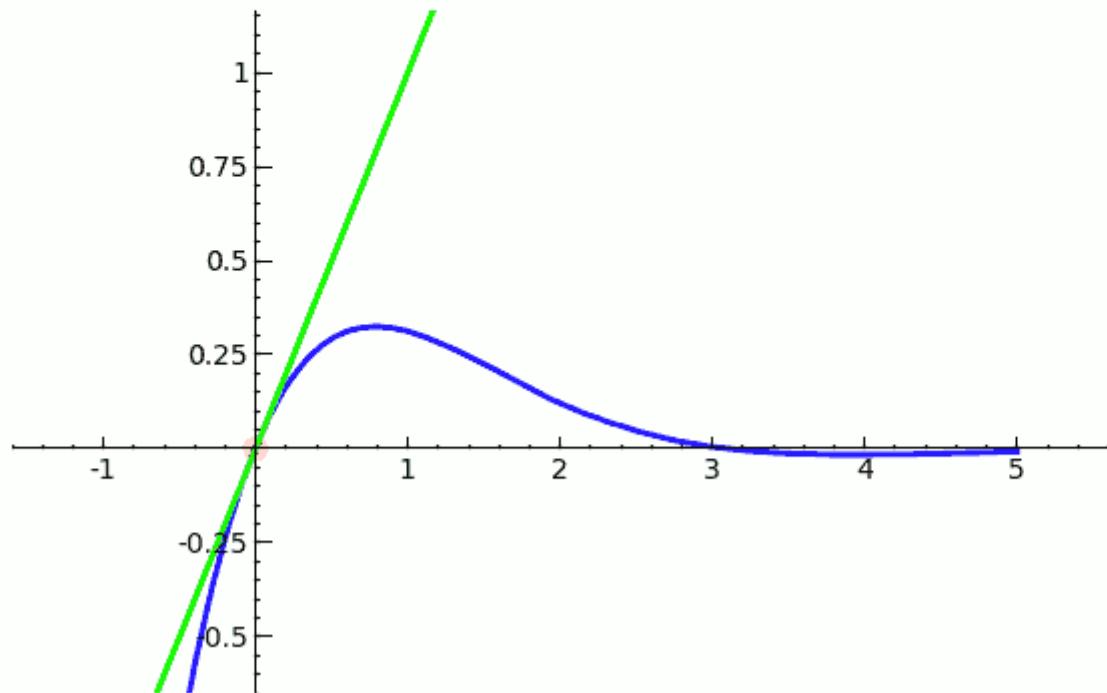
$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} \approx$$

$$f(x) = e^{-x} \sin(x)$$

$$\hat{f}(x; 0) = x + \mathcal{O}(x^2)$$

$$|\langle fg \rangle| \leq W$$



$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{df}{dt} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \sqrt{z^n}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{\partial}x$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$e^{i\pi} =$$

$y = \ln(1+x)$ Функция определена и дифференцируема $\forall x > -1$.

$$y(x) = \ln(1+x)$$

$$y(0) = \ln 1 = 0$$

$$y'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$y'(0) = 1$$

$$y''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''(0) = -1$$

$$y'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3}$$

$$y'''(0) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$y'^v(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4}$$

$$y'^v(0) = (-1)^3 \cdot 3!$$

$$y^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot (1+x)^{-(n-1)}$$

$$y^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-2} \cdot (n-2)!$$

$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$$

$$y^{(n)}(c) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+c)^n}$$

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Таким образом, имеем разложение

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n \cdot (1+c)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z)$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$y = (1+x)^\alpha, \alpha - \text{любое число}, x \neq -1.$$

$$y(x) = (1+x)^{\alpha-1}$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$

$$y'(0) = \alpha$$

$$y''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$$

$$y''(0) = \alpha \cdot (\alpha-1)$$

$$y'''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (1+x)^{\alpha-3}$$

$$y'''(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)$$

$$y^{(n-1)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n+1}$$

$$y^{(n-1)}(0) = \alpha \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)$$

$$f(t)dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$y^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1 + x)^{\alpha - n}$$

$$y^{(n)}(c) = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{(1 + c)^{n - \alpha}}$$

Итак, разложение функции $y = (1 + x)^\alpha$ имеет вид

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 2)}{(n - 1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n! \cdot (1 + c)^{n - \alpha}} \cdot x^n$$

Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

Если функцию можно представить формулой Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n,$$

то, отбросив последнее слагаемое (остаточный член), получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

Таким образом, если нужно вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке x_0 , то мы получим

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x_0 - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x_0 - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x_0 - a)^{n-1}$$

Если указано, сколько членов разложения следует взять, то погрешность вычислений нетрудно оценить, оценив модуль отброшенного остаточного члена. **Иногда в приближенных вычислениях требуется выполнить вычисления с заданной точностью**, т.е. указывается число, которого не должен превосходить модуль отброшенного члена; число слагаемых, которое следует взять в формуле Тейлора при этих вычислениях, определяется с учетом заранее заданной точности.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Пример 1. Вычислить \sqrt{e} , разложив функцию e^x по формуле Маклорена.

Взять шесть членов разложения. Оценить погрешность вычислений.

Решение. Разложение функции e^x по формуле Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^c}{6!} \cdot x^6 \quad (c \text{ лежит между } 0 \text{ и } x).$$

Тогда, отбросив остаточный член и положив $x = \frac{1}{2}$, получим

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Прежде чем подсчитать приближенное значение суммы слагаемых, стоящих справа, оценим погрешность.

$$|R_6| = \frac{e^c}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{6!2^6} < \frac{\sqrt{3}}{6!2^6} < \frac{1.8}{6!2^6} < 0.00001$$

Сделанная оценка погрешности гарантирует нам, что в приближенном вычислении \sqrt{e} пять знаков после запятой будут вычислены правильно.

Подсчитываем

$$\sqrt{e} = 1.0$$

$$0.5$$

$$0.125$$

$$0.020833$$

$$0.0026041$$

$$\underline{0.00026041}$$

$$1.64869751 \approx 1.64869$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Пример 2. Вычислить приближенное значение $\sqrt[5]{33}$, разложив по степеням ($x - 32$). Вычисление выполнить с точностью до 0.0001.

Решение. Разложим функцию $y = \sqrt[5]{x}$ по формуле Тейлора в окрестности

$$\text{точки } x_0 = 32$$

$$y = x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow 0 \Rightarrow y(32) = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$$

$$y' = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}}$$

$$y'(32) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$y'' = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot x^{-\frac{9}{5}} \Rightarrow y''(32) = \frac{-4}{5^2 \cdot 2^9}$$

$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \dots [5 \cdot (n-1)-1]}{5^n} \cdot x^{-\frac{5n-1}{5}}$$

$$\int f(t)dt = \int f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \int f(t(u(x))) dt = \frac{d}{dx} u(x)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Итак, разложение функции $y = \sqrt[5]{x}$ в окрестности точки $x_0 = 32$

будет иметь следующий вид:

$$\sqrt[5]{x} = 2 + \frac{1}{1! 5 \cdot 2^4} \cdot (x - 32) - \frac{4}{2! 5^2 \cdot 2^9} \cdot (x - 32)^2 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \dots [5 \cdot (n-1)-1]}{n! 5^n} \cdot (x - 32)^n,$$

(c лежит между 32 и x).

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Положим теперь в этом разложении $x = 33$. Тогда получим

$$\sqrt{33} = 2 + \frac{1}{1! 5 \cdot 2^4} - \frac{4}{2! 5^2 \cdot 2^9} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \dots [5 \cdot (n-1)-1]}{n! 5^n \cdot c^{\frac{5n-1}{5}}}, \quad 32 < c < 33$$

Попробуем подобрать такое наименьшее число слагаемых в правой части, чтобы отброшенный остаточный член был меньше 0.0001. При $n = 2$ имеем

$$|R_2| = \frac{4}{2! 5^2 \cdot c^{\frac{9}{5}}} < \frac{4}{2! 5^2 \cdot (32)^{\frac{9}{5}}} = \frac{4}{2! 5^2 \cdot 2^9} \approx 0.000156 > 0.0001$$

$$\int f(t)dt = \int f(t(u(x))) \Rightarrow \int dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Следовательно, чтобы выполнить вычисления с заданной точностью, недостаточно взять два члена разложения, так как точность вычислений не гарантирована.

Возьмем $n = 3$. Получим

$$|R_3| = \frac{4 \cdot 9}{3! 5^3 \cdot c^5} < \frac{4 \cdot 9}{3! 5^3 \cdot (32)^{\frac{14}{5}}} = \frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 2^{14}} \ll 0.0001$$

Очевидно, что три члена, взятые в разложении в силу сделанной оценки, гарантируют необходимую точность вычислений.

Нахождение пределов с помощью формулы Тейлора.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5}$. Так как в знаменателе стоит x^5 , то при представлении функций, стоящих в

числителе, по формуле Маклорена, мы должны брать многочлены не ниже пятой степени:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5); \sqrt[6]{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}-1\right)(-x^2)^2 + o(x^5) = (\text{следующий член разложения имеет шестую степень})$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}-1\right)(-x^2)^2 + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{5x^4}{72} + o(x^5),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x\sqrt[6]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^5) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7(x^5 + o(x^5))}{90x^5} = \frac{7}{90}.$$

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{\nabla} f$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$. Здесь мы в выкладках обязаны удерживать члены до четвёртой степени:

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + o(\sin^4 x) = 1 - \frac{(x - x^3/3 + o(x^4))^2}{2!} + \frac{(x - x^3/3 + o(x^4))^4}{4!} + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{x^2 - 2x \cdot x^3/3 + o(x^4)}{2} + \frac{x^4 + o(x^4)}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2+x^4} &= (1-x^2+x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2+x^4) + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (-x^2+x^4)^2 + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4); \end{aligned}$$

поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left[\left(\frac{5}{24} - \frac{3}{8} \right) x^4 + o(x^4) \right] = -\frac{1}{6}$.