Лекция 28

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ(6)

Несобственные интегралы 1-го рода

Эталонный интеграл 1-го рода

Несобственные интегралы 2-го рода

Эталонный интеграл 2-го рода

Исследование на сходимость несобственных интегралов 1-го и 2-го рода от неотрицательных функций

Исследование на сходимость интегралов от знакопеременных функций

Признаки сходимости Дирихле и Абеля

Мы изучали понятие определенного интеграла для случая конечного промежутка и непрерывной ограниченной функции. Обобщим понятие определенного интеграла на случаи бесконечного промежутка и неограниченной на промежутке функции

Несобственные интегралы 1-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geq a$ и интегрируема на каждом конечном отрезке $[a;t]$.

Определение 28.1.

Несобственным интегралом 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Таким же образом вводятся понятия несобственного интеграла 1-го рода на неограниченных промежутках $[-\infty; a]$ и $[-\infty;+\infty]$.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{t\to-\infty \\ z\to+\infty}}\int_{t}^{z} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx + \lim_{z\to+\infty}\int_{a}^{z} f(x)dx$$

Последний интеграл называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства независимо от выбора числа a.

Пример. Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Решение.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(arctg\, x \Big|_0^t \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(arctg\, t - arctg\, 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$

Данный интеграл сходится, его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Эталонный интеграл 1-го рода

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_1^{t} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln x \Big|_1^t \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln t \right) = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, где $p \neq 1$.

Выясним условия сходимости этого интеграла.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_{1}^{t} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to +\infty} \left(\left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^t \right) = \left[\begin{array}{ll} +\infty, & p < 1, \\ \frac{1}{p\text{-}1}, & p > 1 \end{array} \right. .$$

Таким образом

несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и

расходится при $p \leq 1$.

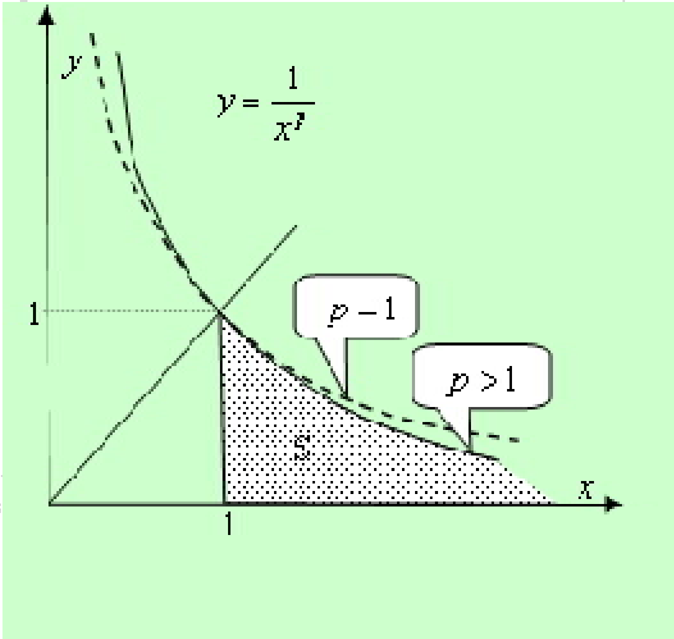
Он называется ***эталонным интегралом 1-го рода***.

Замечание. Нижний предел интегрирования был взят из соображений простоты вычислений.

Рассуждения останутся справедливыми, если вместо числа $x = 1$ взять любое число a, удовлетворяющее условию $a > 0$.

Полученные результаты имеют простой геометрический смысл.

Рассмотрим область S, ограниченную сверху кривой $y = \dfrac{1}{x^p}$, снизу - осью OX, слева прямой $x=1$.



Ее площадь оказывается конечной величиной, если p>1 , и бесконечно большой величиной, если p≤1

Несобственные интегралы 2-го рода

Пусть функция $y = f(x)$ неограниченна на конечном промежутке $[a;b)$, причем $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$.

Определение 28.2

Несобственным интегралом 2-го рода

$$\int_a^b f(x)dx$$

на промежутке $[a;b)$ называется $\lim\limits_{\delta \to +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$.

Если предел существует и конечен, несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся*** .

Аналогично,
если функция $y = f(x)$ неограниченна на конечном промежутке $(a;b]$, причем
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$,
или если функция $y = f(x)$ неограниченна на конечном промежутке $[a;b]$,
причем во внутренней точке этого промежутка обращается в бесконечность
$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty \quad a < c < b$,
то несобственный интеграл 2-го рода определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to +0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$$

или $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to +0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\gamma \to +0} \int_{c+\gamma}^b f(x)dx \, .$$

Последний интеграл называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства.

Пример. Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрируется на конечном промежутке.

При $x \to 1-0$ функция $f(x) \to +\infty$.

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to+0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to+0} \left(\arcsin x\Big|_0^{1-\delta}\right) = \lim_{\delta\to+0} \arcsin(1-\delta) = \frac{\pi}{2}$$

Эталонный интеграл 2-го рода

Рассмотрим два интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ и $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, где $p \neq 1$.

Их величины

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to +0} \ln x \Big|_\delta^1 = \lim_{\delta \to +0} \left(\ln 1 - \ln \delta \right) = +\infty ,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta \to +0} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_\delta^1 \right) = \lim_{\delta \to +0} \left(\frac{1}{1-p} \left(1 - \delta^{1-p} \right) \right) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1 \end{array} \right.$$

Суммируя результаты, можем сказать, что несобственный интеграл 2-го рода (он называется ***эталонным интегралом 2-го рода***) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

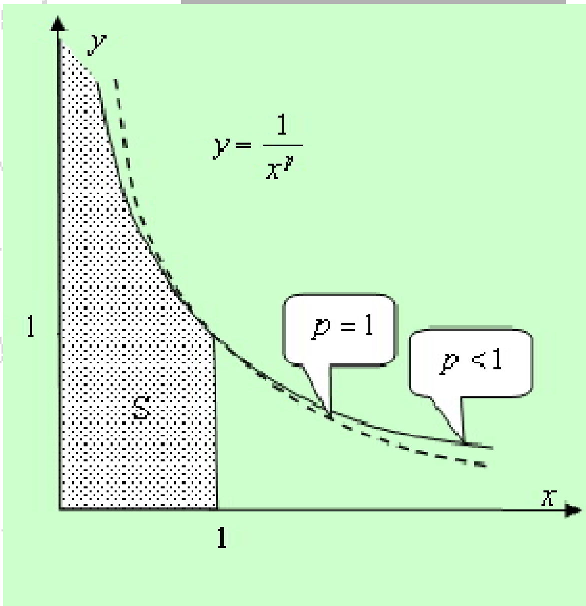
сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Замечание. Верхний предел интегрирования был взят из соображений простоты вычислений, как и в случае несобственного интеграла 1-го рода.

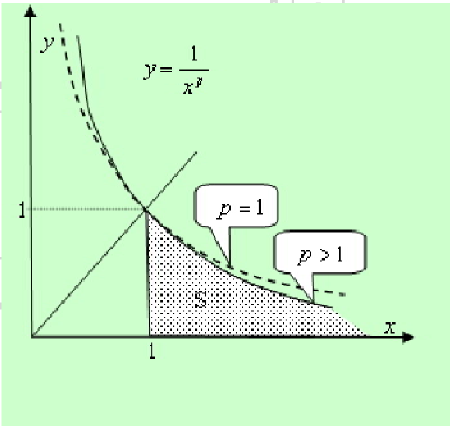
Рассуждения останутся справедливыми, если вместо числа $x = 1$ взять любое число a, удовлетворяющее условию $a > 0$.

Геометрическая интерпретация

Рассмотрим область S, ограниченную сверху кривой $y = \dfrac{1}{x^p}$, снизу — осью OX, слева и справа прямыми $x=0$ и $x=1$



Ее площадь оказывается конечной величиной, если $p<1$, и бесконечно большой величиной, если $p \geq 1$



С помощью предельного перехода на несобственные интегралы переносится ряд свойств определенного интеграла.

1° Пусть несобственный интеграл сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a^*} f(x)\,dx + \int_{a^*}^b f(x)\,dx \quad \forall\, a^* \in [a,b).$$

2° Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся. Тогда при λ, $\mu \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

3°. (Интегрирование неравенств). Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся и $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4°. (Формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, Φ — первообразная для f на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b-0) - \Phi(a),$$

если хотя бы один из пределов, стоящих в левой и правой частях, существует и конечен.

Исследование на сходимость несобственных интегралов 1-го и 2-го рода от неотрицательных функций

Как известно, нахождение интеграла может представлять собой достаточно сложную задачу.

Поэтому представляют интерес методы, позволяющие без серьезных вычислений по одному виду функции сделать заключение о сходимости или расходимости несобственного интеграла.

Теоремы сравнения, которые будут рассмотрены ниже, в значительной степени помогают исследовать несобственные интегралы на сходимость.

Пусть $f(x) \geq 0$. Тогда функции

$$F_1(t) = \int_a^t f(x)dx \text{ и } F_2(-\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

являются монотонно возрастающими от переменных t или $-\delta$ (поскольку берем $\delta > 0$, $-\delta$ стремится к нулю слева).

Если при возрастании аргументов функции $F_1(t)$ и $F_2(-\delta)$ остаются ограниченными сверху, это означает, что соответствующие несобственные интегралы сходятся.

На этом основана первая теорема сравнения для интегралов от неотрицательных функций.

Теорема 28.1 (признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода)

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \geq a$ выполнены условия:

1) $0 \leq f(x) \leq g(x)$;

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны.

Тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$,

а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство

Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Поскольку $0 \le f(x) \le g(x)$ и функции непрерывны, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx .$$

По условию интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечную величину.

Следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится также.

Пусть теперь интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Предположим, что интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится также, но тогда должен сходиться интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, что противоречит условию.

Наше предположение неверно, интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Теорема 28.2 (признак сравнения для несобственных интегралов 2-го рода).

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;b)$ выполнены условия:

1) $0 \le f(x) \le g(x)$;

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны;

3) $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = +\infty$.

Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство теоремы для несобственных интегралов 2-го рода в точности совпадает с доказательством теоремы для несобственных интегралов 1-го рода.

Отличие состоит лишь в обозначениях несобственного интеграла.

Замечание.

Если интегралы умножить на произвольные не равные нулю числа m и n, выводы теорем останутся справедливыми.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

Функция $y = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ непрерывна и положительна

на промежутке $[2;+\infty)$, причем $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} > \frac{1}{x^{1/2}}$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ представляет собой эталонный интеграл 1-го рода, который при $p = 1/2 < 1$ является расходящимся, следовательно,

по 1-й теореме сравнения для несобственных интегралов 1-го рода интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ расходится также.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$

Решение. Функция $y=\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ непрерывна, положительна на промежутке $[0;2]$, неограниченно возрастает при $x \to +0$.

Для нее при $x \to +0$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} < \frac{1}{x^{1/2}}$.

Несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^{1/2}}$ есть эталонный интеграл 2-го рода, который при $p = 1/2 < 1$ сходится, следовательно, по 1-й теореме сравнения для несобственных интегралов 2-го рода интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ сходится также.

Теорема 28.3 (предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода).

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ выполнены условия:

1) $f(x)>0,\ g(x)>0$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k>0$.

Тогда интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Из равенства $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ по определению предела следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \mid \forall x \geq x_0 \ \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon \ .$$

Возьмем любое ε, например $\varepsilon = k/2$.

Тогда $\quad -k/2 < \dfrac{f(x)}{g(x)} - k < k/2$.

Прибавим ко всем частям неравенства число k и умножим неравенство на $g(x) > 0$.

Получим

$$0{,}5k \cdot g(x) < f(x) < 1{,}5k \cdot g(x) \ .$$

По 1-й теореме сравнения из сходимости интеграла $\int_{x_0}^{+\infty} 1{,}5k \cdot g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_{x_0}^{+\infty} 0{,}5k \cdot g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$.

Полученные выводы справедливы для интегралов $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ при $a \neq x_0$, поскольку интегралы $\int_{x_0}^{a} f(x)dx$ и $\int_{x_0}^{a} g(x)dx$ являются собственными, а значит, конечными и на сходимость исследуемых несобственных интегралов не влияют.

Теорема 28.4 (предельный признак сравнения для несобственных интегралов 2-го рода).

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;b)$ выполнены условия

1) $f(x) > 0,\ g(x) > 0$;
2) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны;
3) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty$
4) $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0$.

Тогда интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство справедливости утверждения в точности совпадает с доказательством теоремы 28.3, следует лишь внести изменения в обозначения интегралов.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x}+1}$

Решение. Функция $y=\frac{x}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x}+1}$ непрерывна и положительна.

При $x\to+\infty$ $\frac{x}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x}+1}\sim\frac{1}{x^{3/2}}$

Действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x}+1}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{5/2}}{x^{5/2}+x^{1/2}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{x^{1/2}}{x^{5/2}}+\dfrac{1}{x^{5/2}}}=1$.

Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ есть эталонный интеграл 1-го рода, который при $p=3/2>1$ сходится, следовательно, сходится и исходный интеграл.

Исследование на сходимость интегралов от знакопеременных функций

Определение28.3.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл от модуля функции $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Определение 28.4.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***условно сходящимся*** интегралом.

Теорема 28.5(о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится также.

Доказательство

Из очевидно верного неравенства

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

следует $0 \le |f(x)| + f(x) \le 2|f(x)|$.

По 1-й теореме сравнения интеграл

$$\int_a^{+\infty} (|f(x)| + f(x))dx$$

сходится в силу сходимости по условию интеграла

$$\int_a^{+\infty} 2|f(x)|dx .$$

Представим $f(x) = \left(f(x) + |f(x)|\right) - |f(x)|$,

откуда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(|f(x)| + f(x)\right)dx - \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Первое слагаемое в правой части равенства сходится по доказанному, второе слагаемое конечно по условию, следовательно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ есть конечная величина, т.е. он сходится.

Замечание.

В другой формулировке теорема выглядит так:
если интеграл абсолютно сходится, то он сходится.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Решение.

Найдем для подынтегральной функции границу сверху и воспользуемся 1-й теоремой сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}.$$

Интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится как эталонный интеграл 1-го рода.

Тогда сходится интеграл $\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$,

а по доказанной теореме и интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Установим два признака сходимости несобственного интеграла от произведения двух функций:

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$$

Теорема 28.6 (признак Дирихле).

Пусть

1- функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную F(x) на $[a, \infty)$ ($|F(x)| < M$);

2- функция g непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, +\infty)$;

3- $g(x) \longrightarrow 0$ *при* $x \longrightarrow +\infty$.

Тогда интеграл.

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

сходится

Петер Густав Лежен Дирихле (1805-1859), великий немецкий математик, изучал арифметику (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии), математический анализ (признак сходимости Дирихле, ряды Дирихле), механику и математическую физику. Он, разумеется, и не подозревал, что его именем назовут столь простой и важный принцип.

«Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов»

Доказательство.

Пусть F - первообразная для f. Интегрируя по частям произведение fg на отрезке $[a, b]$, имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Уменьшаемое в правой части стремится, очевидно, к конечному пределу при $b \to +\infty$. Вычитаемое стремится к абсолютно сходящемуся интегралу.

Для определенности положим $g' > 0$.

$$\int_a^\infty |F(f)g'(x)|\,dx \leqslant M \int_a^\infty |g'(x)|\,dx = -M \int_a^\infty g'(x)\,dx =$$
$$= -M\ g(x)\Big|_a^{+\infty} = M|g(a)|.$$

Отсюда следует, что интеграл сходится.

Теорема 28.7 (признак Абеля).

Пусть

1-функция f непрерывна на $[a, +\infty)$ *и сходится интеграл*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

2- функция g непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$;

Тогда интеграл

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

сходится

Нильс Хе́нрик А́бель (норв. *Niels Henrik Abel*; 5 августа *1802*, *Фингё* — 6 апреля *1829*, *Фроланд* близ *Арендаля*) — норвежский математик

Сёрфинг на плечах гигантов (памятник математику Нильсу Хенрику Абелю)

Доказательство.

Покажем, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле.

Заметим сначала, что функция f имеет на $[a, b)$ первообразную

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

ограниченность которой следует из ее непрерывности и существования конечного предела

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_a^\infty f(t)\,dt$$

В силу монотонности и ограниченности функции g существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ равный некоторой константе c. Тогда функция

$$\tilde{g} := g - c$$

непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, +\infty)$ и $\tilde{g}(x) \to 0$

Поэтому интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\tilde{g}(x)\,dx + \int_a^{+\infty} cf(x)\,dx$$

сходится как сумма двух сходящихся интегралов
-первый из них по признаку Дирихле,
- второй по условию теоремы.

Примеры несобственных интегралов

1. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{sh\,ax} = \frac{\pi^2}{4a^2}$, **здесь и далее** $a > 0$;
2. $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{sh\,ax} = \frac{\pi^4}{8a^4}$;
3. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{sh^2 ax} = \frac{\pi^2}{6a^2}$;
4. $\int_0^\infty \frac{dx}{ch\,ax} = \frac{\pi}{2a}$;
5. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{ch\,ax} = \frac{\pi^3}{8a^3}$;
6. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{ch^2 ax} = \frac{\ln 2}{a^2}$;
7. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{ch^2 ax} = \frac{\pi^2}{12a^3}$;
8. $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{sh\,ax} dx = \frac{\pi}{2a} th \frac{\pi m}{2a}$;
9. $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{ch\,ax} dx = \frac{\pi}{2a} cth \frac{\pi m}{2a}$;
10. $\int_0^\infty e^{-ax} sh\,bx \cdot dx = \frac{b}{a^2 - b^2}$, $a > b \ge 0$;
11. $\int_0^\infty e^{-ax} ch\,bx \cdot dx = \frac{a}{a^2 - b^2}$, $a > b \ge 0$.