

Лекция 19

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (2)

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

Понятие первообразной

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Табличные интегралы

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Методы нахождения неопределенных интегралов

Приведение к табличному виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Подведение под знак дифференциала

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{du} \frac{du}{dx}$$

Интегрирование заменой переменной, или подстановка

$$x^n + y^n = z^n$$

Интегрирование по частям

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint \nabla \vec{F} \cdot dV$$

Понятие первообразной

Основная задача интегрального исчисления - нахождение функции $y = f(x)$ по ее известной производной $y' = f'(x)$.

Определение 19.1.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке X , конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого промежутка и ее производная $F'(x) = f(x)$.

Равенство $F'(x) = f(x)$ можно записать через дифференциалы

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = f(x) \text{ или } dF = f(x) \cdot dx.$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Пример. Функция $F(x) = \frac{x^2}{2}$ является первообразной для

функции $f(x) = x$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

Замечание.

Первообразная $F(x)$ имеет конечную производную. Следовательно, она является непрерывной функцией. Это следует учитывать при нахождении неопределенных интегралов в случаях, когда область интегрирования переменной x разделяется на несколько промежутков.

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Пример.

$$e^{i\pi} = -1$$

Функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & x \leq 0 \end{cases}$$

есть первообразная для $f(x) = |x|$, $x \in R$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Теорема 19.1 (о бесконечном множестве первообразных для функции).

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X , то и функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$ на этом промежутке.

Доказательство

$$\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Таким образом, **если функция $y = f(x)$ имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных**. Между двумя различными первообразными для одной и той же функции существует тесная связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема 19.2. (об общем виде представления первообразной для функции)

Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две любые первообразные для функции $y = f(x)$, то их разность равна некоторой постоянной

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad C = \text{const.}$$

Доказательство

Пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ — первообразные для функции $f(x)$,

т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$, и пусть $L(x) = \Phi(x) - F(x)$.

Найдем производную функции $L(x)$.

$$L'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Это означает, что производная функции $L(x)$ равна нулю на всем промежутке

Возьмем на рассматриваемом промежутке отрезок $[a;x]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$L(x) - L(a) = L'(\xi) \cdot (x - a), \text{ где } a < \xi < x.$$

В любой точке промежутка, а значит, и в точке ξ отрезка $[a;x]$ имеем $L'(\xi) = 0$.

Отсюда следует $L(x) - L(a) = L'(\xi) \cdot (x - a) = 0$, или $L(x) = L(a)$ для любого значения x , принадлежащего промежутку

Это означает что функция $L(x) = \Phi(x) - F(x)$ постоянна на промежутке.

Обозначим $L(a) = C$.

Тогда $\Phi(x) - F(x) = L(a) = C$, что и требовалось доказать.

Эту теорему можно было сформулировать так:

Теорема 19.1а

Каждая функция, первообразная для $f(x)$, может быть представлена в виде

$$F(x) + C$$

Определение 19.2.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на промежутке, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

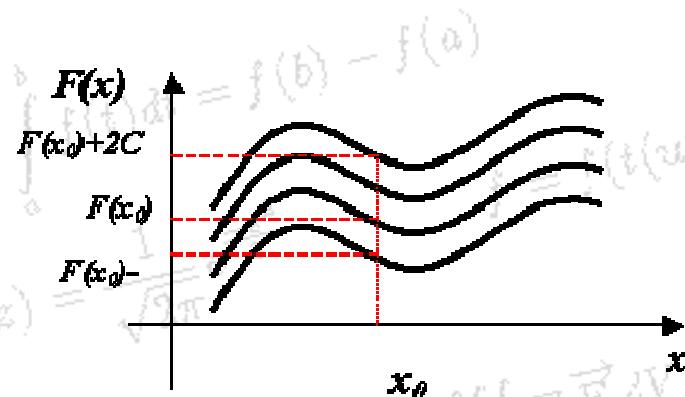
Таким образом, $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Здесь знак \int называется **знаком интеграла**,

выражение $f(x)dx$ - **подынтегральным выражением**,

сама функция $f(x)$ - **подынтегральной функцией**,

а x **называется переменной интегрирования**.



$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

По второму свойству левая часть равенства $\left(\int \alpha \cdot f(x) dx \right)' = \alpha \cdot f(x)$. По свойству производной правая часть равенства $\left(\alpha \int f(x) dx \right)' = \alpha \left(\int f(x) dx \right)' = \alpha \cdot f(x)$. Таким образом, левая и правая части равенства в четвертом свойстве равны

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

По свойству 2

$$\left(\int (f(x) \pm g(x)) dx \right)' = f(x) \pm g(x).$$

По свойству производной

$$\left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' \pm \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x).$$

Таким образом, $\int (f(x) \pm g(x)) dx$ и $\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ являются первообразными для одних и тех же функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно, **они отличаются друг от друга не более чем на некоторую постоянную величину.**

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \nabla F \cdot \vec{v} dV$$

Замечание.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

Равенства, описывающие свойства 4 и 5, справедливы и в том случае, если к любой части уравнения добавить константу C . Это означает, что **знак равенства при нахождении интегралов носит условный характер**: левая часть равенства равна правой части с точностью до произвольной постоянной величины.

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \nabla F \cdot \vec{v} dV$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t)dt = \int f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

Рассмотрим некоторые элементарные функции $F(x)$ и их производные $f(x)$. Формулу, их связывающую: $F'(x) = f(x)$ - запишем в виде $dF(x) = f(x)dx$.

По известному дифференциалу $dF(x)$ функции $F(x)$ восстановим саму функцию, пользуясь свойством 3:

$$\int dF(x) = F(x) + C = \int f(x)dx,$$

где $C - \text{const.}$

Таким путем получаются основные интегралы, представленные ниже в виде таблицы

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Табличные интегралы

$$\int 0 \cdot dx = C.$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ где } \alpha \neq -1, x > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \iint \nabla \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

«высокий» логарифм

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

«длинный» логарифм

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \nabla \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(z)$$

$$|(fg)| \leq M$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

Замечание. $\vec{n} dS = \iint \vec{F} \cdot \vec{n} dV$

Не все интегралы можно свести к табличным. Если операция дифференцирования элементарных функций всегда приводит к элементарным функциям, то **операция интегрирования непрерывных функций может привести к таким функциям, которые не выражаются через элементарные.**

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z)$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

Теорема

Любая функция, непрерывная на промежутке, имеет первообразную.

Обсудить доказательство этого утверждения можно будет только после того, как появится понятие определенного интеграла. Далеко не у каждой элементарной функции имеется первообразная, выражаящаяся элементарной функцией. Например, функция e^{-x^2} непрерывная, следовательно, имеет первообразную (интеграл Пуассона), но первообразная не является элементарной функцией (а значит ее невозможно записать с помощью известных функций). В некоторых случаях неэлементарные первообразные получили специальные обозначения и названия. Так,

первообразная для функции $\frac{\sin x}{x}$, $x > 0$, обозначается $\text{Si}(x)$ и называется синус интегральный.

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

Замечание

Операция сведения интегралов к табличным может быть достаточно сложной как с идеейной, так и с технической точек зрения. Существует огромное количество различных методов, позволяющих это сделать.

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(z)$$

Примеры вычислений связанных с неопределенным интегралом

Пример 1.

Найти уравнение кривой, угловой коэффициент которой в точке (x,y) равен $k = 2 - \frac{x}{2}$, если известно, что она проходит через точку $(2,3)$.

Решение.

Если $y=y(x)$ – уравнение искомой кривой, то

угловой коэффициент в точке x равен $k = \frac{dy}{dx}$.

Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = \int \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = 2x - \frac{x^2}{4} + c$$

Кроме того, по условию задачи:

$$y(2) = 3 \Rightarrow 3 = 4 - 1 + c \Rightarrow c = 0$$

Следовательно $y = 2x - x^2/4$

Замечание.

Рассмотренный пример показывает, что неопределенная константа c может быть вычислена, если задано значение первообразной в некоторой точке x .

$$\int f(t)dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$p(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Пример.

Скорость химической реакции пропорциональна количеству вещества, вступившего в реакцию. Найти функцию $m(t)$, где t – время, а $m(t)$ – количество вещества, вступившего в реакцию в момент времени t , если задано:

$$m(0)=m_0 \text{ и } m(1)=m_1.$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\int f(t)dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

Решение:

По условию задачи:

$$\frac{dm}{dt} = -km, \text{ где } k > 0 \text{ — некоторая константа.}$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{dm}{m} = -kdt \text{ или}$$

$$d(\ln(m)) = -kdt \Rightarrow \int d(\ln m) = -k \int dt \Rightarrow \ln m = kt + c \Rightarrow m(t) = e^{-kt+c}$$

Используя условия: $m(0) = m_0$ и $m(1) = m_1$, получим равенство:

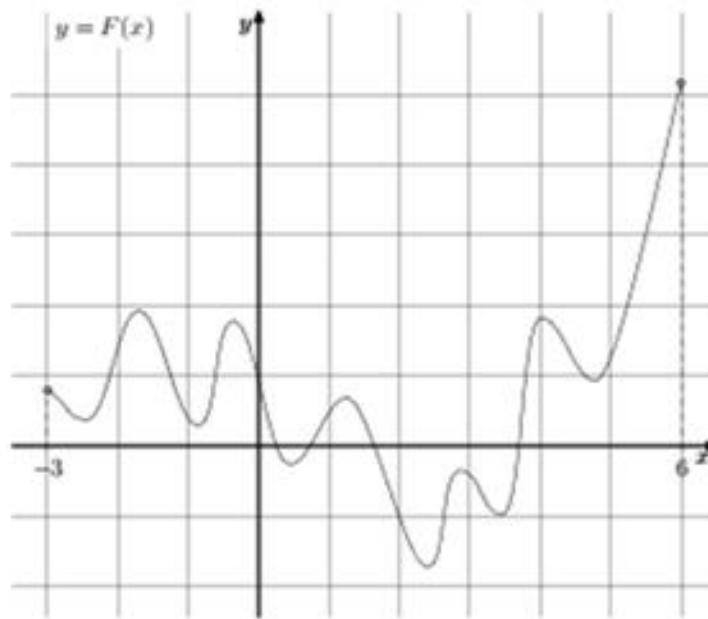
$$m_0 = e^c \text{ и } m_1 = e^{-k+1} = m_0 e^{-k}$$

Следовательно, окончательно получаем:

$$m(t) = m_0 \cdot m_1^{-t}$$

Задача

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ - одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Приведение к табличному виду (непосредственное интегрирование)

С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

$$f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Пример Найти $\int (ax^2 + bx + c)dx$

Решение.

$$\int (ax^2 + bx + c)dx = \int ax^2 dx + \int bx dx + \int c dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$$

Пример Найти $\int 2^{3x-1} dx$

Решение.

$$\int 2^{3x-1} dx = \int \frac{8^x}{2} dx = \frac{2^{3x}}{6 \ln 2} + C$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{af}{dt} \frac{dt}{du} \frac{du}{dx}$$

Подведение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина dx означает, что берется дифференциал от переменной x .

Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла.

Для этого воспользуемся формулой $y'(x)dx = dy(x)$. Если нужная функция $y(x)$ отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Пример.

$$dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x+3)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

Решение.

$$\|\vec{v}\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x) = \frac{1}{2} \cdot d(2x+3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(z)$$

$$d\text{Volume}$$

$$f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'(x)$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$|fg| \leq M$$

Пример. Внести переменную x под знак дифференциала

$$e^{ix} = -1$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Решение. Если перед дифференциалом dx стоит переменная x ,

то легко получить под знаком дифференциала функцию x^2 :

$$f(t)dt = x \cdot dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot d(x^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Пример. Внести функцию $\cos 2x$ под знак дифференциала

$$e^{i\pi} = -1$$

$$P(X=x) = \binom{p}{x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{Решение. } \cos 2x \cdot dx = \cos 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) = \frac{1}{2} \cdot d(\sin 2x)$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f'(x)$$

$$f(z)$$

$$\int_0^a f(t) dt = \int_a^0 f(t(u(x))) \cdot u'(x) dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Теорема 19.1

Справедливо равенство

$$\int f(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx = \int f(y(x)) \cdot dy(x)$$

Доказательство

Находим производные интегралов, стоящих в его левой и правой частях.

Производная по x от левого интеграла равна

$$\left(\int f(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx \right)'_x = f(y(x)) \cdot y'(x).$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

Производная по x от правого интеграла находится как производная сложной функции

$$\left(\int f(y(x)) \cdot dy(x) \right)'_x = (F(y(x)) + C)'_x = F'(y(x)) \cdot y'(x) = f(y(x)) \cdot y'(x)$$

Правые части последних двух равенств одинаковы, следовательно, исходное равенство верно с точностью до константы

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{3-5x}$

$$(n)_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\text{Решение. } \int \frac{dx}{3-5x} = \int \frac{1}{-5} \frac{d(-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(3-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5} \ln|3-5x| + C$$

$$\int_0^a f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(z)$$

$$f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

Пример. Найти $\int xe^{x^2} dx$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \binom{n}{0} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

$$\text{Решение. } \int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$f(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(z)$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx =$$

$$\left\{ t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx; \right\} =$$

$$-\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$p(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Интегрирование заменой переменной, или подстановка

Теорема 19.2

Пусть $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, а между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие.

Тогда справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Доказательство

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Отметим, что

$$dx = \varphi'(t)dt$$

Берем производные от обеих частей равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$\left(\int f(x) dx \right)_x = f(x) (u(x)) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t(u(x))) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(t) dt = f(t(u(x))) u'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

Производную по x от правого интеграла находим по правилу дифференцирования сложной функции с промежуточным аргументом t .

Учитывая, что производная обратной функции равна

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\phi'(t)}, \text{ получим}$$

$$\left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt \right)'_x = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt \right)'_t \cdot t'_x = f(\phi(t))\phi'(t) \cdot \frac{1}{\phi'(t)} = f(x)$$

Так как производные интегралов равны, то эти интегралы определяют одно и то же семейство первообразных

$$\int_0^t f(t)dt = \int_0^t$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

Таким образом для неопределенного интеграла имеет место
инвариантность формулы интегрирования

Если

$$e^{i\pi} = -1$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

для любой функции $u=\varphi(x)$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{1-2x}$

Решение. Положим $t = 1-2x$,

откуда $x = 0,5 - 0,5t$,

т.е. вводится функция $x = \varphi(t)$, имеющая непрерывную производную и однозначно связывающая переменные x и t .

Находим $dx = -0,5dt$.

Подставляем это в интеграл

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{-0,5dt}{t} = -0,5 \int \frac{dt}{t} = -0,5 \ln|t| + C = -0,5 \ln|1-2x| + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема 19.3

Для функции $u(x)$ и $v(x)$ имеющих непрерывные производные справедлива формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$

Тогда, по правилу дифференцирования произведения, будем иметь

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

$$f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'v$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Отсюда, используя $v'(x)dx = dv$ и $u'(x)dx = du$, получим

$$P(X=x) = \binom{n}{x}$$

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt$$

$$\int f(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = \int u dv + \int v du$$

$$= \frac{df}{dt} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Таким образом

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\int (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int u dv + \int v du = uv$$

$$p(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

Окончательно

$$\int u dv = uv - \int v du = 0$$

Интегрирование по этой формуле называется **интегрированием по частям**

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \nabla F \cdot \vec{v}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Замечание 1. При нахождении функции v по ее дифференциальному dv можно брать любое значение постоянной интегрирования C ,

так как она в конечный результат не входит

(для проверки этого достаточно в последнюю формулу подставить $v+C$ вместо v).

Поэтому для удобства следует брать $C=0$.

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'(x)$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Замечание 2. Использование формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда **дифференцирование упрощает один из сомножителей, в то время как интегрирование не усложняет другой.**

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow \int dx$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \int dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Основные случаи, когда применяется данный способ интегрирования:

1) подинтегральная функция содержит

- произведение многочлена от x на показательную функцию от x ;
- произведение многочлена от x на $\sin(x)$ или $\cos(x)$;
- произведение многочлена от x на $\ln(x)$;

2) подинтегральная функция представляет собой одну из обратных тригонометрических функций $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ и т.д.;

3) подинтегральная функция есть произведение показательной функции на $\sin(x)$ или $\cos(x)$.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\int x^n \cdot \begin{vmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{vmatrix} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^n, du = nx^{n-1} \\ dv = \begin{vmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{vmatrix} dx, v = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} e^{ax} \\ -\cos ax \\ \sin ax \end{vmatrix} \end{array} \right|, n = 1, 2, \dots$$

Здесь после применения формулы интегрирования по частям показатель степени у множителя x^n уменьшается на единицу, а после n — кратного применения формулы этот множитель исчезает.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\int x^a \cdot \begin{vmatrix} \ln^n x \\ \arcsin x \\ \arctg x \end{vmatrix} dx = \boxed{u = \begin{vmatrix} \ln^n x \\ \arcsin x \\ \arctg x \end{vmatrix}, du = \begin{vmatrix} n \ln^{n-1} x \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} dx, n = 1, 2, \dots; a \geq 0.}$$

$$dv = x^a dx, v = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

В этом случае после интегрирования по частям исчезают "плохие" функции – логарифм, арксинус, арктангенс. Точно так же интегрируются арккосинус и арккотангенс.

$$f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Замечание 3. При интегрировании по частям удобно использовать определенную форму записи, позволяющую избежать ошибок подстановки типа «берем не то и подставляем не туда».

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{df}{dx} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример. Найти интеграл $\int x \cdot \cos x dx$

Решение. Здесь следует ввести $u(x) = x$ и $dv = \cos x dx = d(\sin x)$.

Тогда

$$\int x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$uv = x \sin x$$

$$\int v du = \int \sin x dx .$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint \nabla \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Замечание 4. К нахождению интеграла $\int v du$ в правой части формулы можно снова применять интегрирование по частям.

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t(u(x))) u'(x) dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Пример. Найти $\int x^2 e^x dx$.

Решение. $\int x^2 e^x dx = \begin{cases} u = x^2, & du = 2x dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{cases} = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$.

Последний интеграл возьмем тем же методом:

$$\int x e^x dx = \begin{cases} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{cases} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$e^{ix} \approx$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Окончательно получим

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$p(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$e^{ix} = -1$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C$$

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint \vec{F} \cdot d\vec{I} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(z)$$

Циклическое интегрирование

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = \\ &= e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x + \\ &\quad + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx\end{aligned}$$

$$\int f(t)dt = \int f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

И окончательно получим

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(u(x)) dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Еще пример нахождения неопределенного интеграла приведением к табличным.