Лекция 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение производной

Пусть $y = f(x)$ определена на множестве X.
Рассмотрим $x \in X$ и приращение независимой переменной Δx, такое, что $(x + \Delta x) \in X$, (Δx – положительное или отрицательное число).

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ является приращением функции, соответствующим указанному приращению Δx.
Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Это отношение определено при всех $\Delta x \neq 0$, достаточно малых по абсолютной величине. Поскольку x фиксировано, **отношение является функцией только Δx.**

Определение 6.1.

Производной функции *y = f (x)* в точке *x* называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

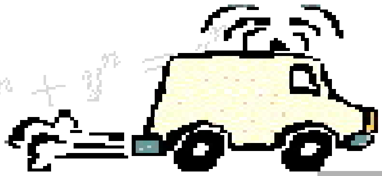
Производную функции *y = f (x)* в точке *x* будем обозначать символом $f'(x)$ или

$$y'(x) \quad y'_x(x) \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

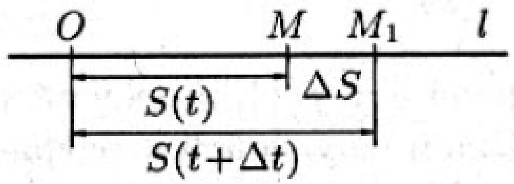
$$y'_x(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Очевидно, что производная $f'_x(x)$ представляет собою функцию, определенную на некотором множестве X_1.

Механический смысл производной



Допустим, что некоторая материальная точка M перемещается прямолинейно, а путь, пройденный этой точкой за время t, изменяется по закону $s = s(t)$.



Очевидно, что отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость точки за время Δt,

а производная $$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

есть мгновенная скорость точки в момент t.

Физический смысл производной.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – *скорость изменения величины* y *относительно величины* x .

ПРИМЕРЫ.

а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t.
Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.

б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t.
Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. *сила тока в момент времени* t_0.

в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a ; x]$.
Тогда $m'(x)$ – скорость изменения массы в точке x_0, т.е. *линейная плотность в точке* x_0.

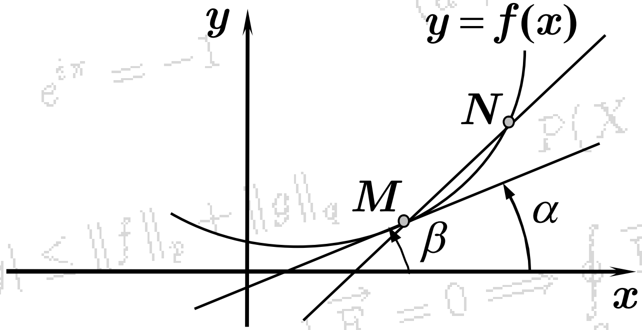
Производная от функции, описывающей закон движения материальной точки, перемещающейся прямолинейно, определяет мгновенную скорость этой точки.

Примечание

Производная может иметь смысл скорости и в том случае, когда функция не определяет закона механического движения.

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$



Возьмем на нем точку $M(x, y)$, где $y = f(x)$, и близкую к ней, тоже лежащую на кривой точку $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

При стремлении Δx к нулю точка N, оставаясь на кривой, будет неограниченно приближаться к точке M, а секущая MN будет разворачиваться и займет предельное положение – станет касательной MK, которая образует угол α с осью $0x$.

Производная $f'(x)$ равна ***тангенсу угла а, образованного касательной к кривой в точке М (х, f (х)) с положительным направлением оси 0х.***

Следовательно, существование производной связано с существованием касательной к кривой $y = f(x)$, причем угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ должен быть конечен (касательная не должна быть параллельна оси $0y$): в этом случае

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ или } \quad \alpha = \frac{3\pi}{2},$$

а тангенс такого угла равен бесконечности и при соответствующих x функция $f(x)$ не имеет производной.

Односторонние производные

Определение 6.2 (левосторонней производной)

Левосторонней производной функции *f (x)* в точке $x \in X$, где *X* – область определения функции *f (x),* называется

$$f'_{-}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 6.3 (правосторонней производной)

Правосторонней производной функции *$f(x)$ в точке $x \in X$, где X – область определения функции f (x), называется*

$$f'_{+}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Иногда левосторонняя производная обозначается $f'(x-0)$,

а правосторонняя – $f'(x+0)$

Примечание

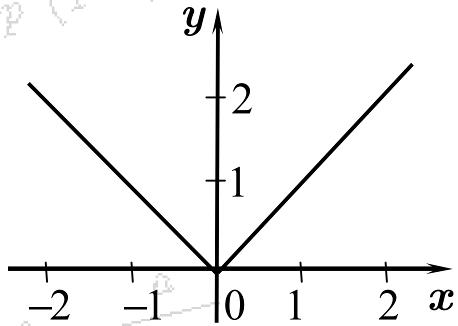
При определении производной функции $y = f(x)$ в точке x
способ стремления приращения Δx к нулю предполагается произвольным.

Поэтому ясно, что если у функции $y = f(x)$ существует производная, то

$$f'(x) = f'_{+}(x) = f'_{-}(x)$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = |x|$ и вычислим ее односторонние производные в точке $x_0 = 0$.

По определению $$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Следовательно,

$$y'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$$

$$y'_-(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -1.$$

Односторонние производные функции в точке $x_0 = 0$ существуют, но не овпадают, значит, в нуле у данной функции производная **не существует**

Дифференцируемость функции

Определение 6.4. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется ***дифференцируемой в этой точке***, если существует конечная производная $f'(x_0)$.

Теорема 6.1. (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке)

Для того, что бы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы полное приращение функции в точке x, соответствующее приращению Δx, можно было представить в виде $\boldsymbol{\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}$, где A не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть функция дифференцируема в точке x, тогда

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x = \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, т.е. $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отсюда следует, что $\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

Остается только обозначить $y'_x = A$

и окончательно получим $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

Достаточность

Допустим, что полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Предположив, что $\Delta x \neq 0$, получим отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A,$

.

а это и означает, что функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную A, т.е.

$$y'_x = A$$

Замечание.

Иногда функцию, дифференцируемую в точке, определяют как функцию, полное приращение которой в точке x можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В силу доказанной теоремы очевидно, что оба эти определения эквивалентны.

Операцию нахождения производной от функции в дальнейшем будем называть **дифференцированием** этой функции.

Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема 6.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то в этой точке она и непрерывна.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, тогда полное приращение функции в этой точке

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

а это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Примечание

Обратное утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции в данной точке x не следует ее дифференцируемость в точке x.

Определение 6.5.

Если функция дифференцируема в каждой точке интервала (a, b),
то ее называют **дифференцируемой в этом интервале**.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

Производная постоянной.

Рассмотрим функцию $y = c$, где $c = \text{const}$ $\forall\, x \in X$, и пусть $x \in X$.

По определению $$c'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Итак, $$c' = 0$$

Дифференцирование степенной функции

Найдем производную степенной функции $y = x^a,$

где a – любое вещественное число. По определению производной

$$\left(x^a\right)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^a\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right]}{\Delta x}$$

$$\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right] \sim a\frac{\Delta x}{x}$$

Следовательно $$\left(x^a\right)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^a \cdot a \cdot \dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{a \cdot x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

Итак $$\left(x^a\right)'_x = a \cdot x^{a-1}$$

Пример 1. Найти $\left(\frac{1}{x}\right)'_x$

Решение. $\left(\frac{1}{x}\right)'_x = \left(x^{-1}\right)'_x = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Пример 2. Найти $\left(\sqrt{x}\right)'_x$

Решение. $\left(\sqrt{x}\right)'_x = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Дифференцирование логарифмической функции

Найдем производную логарифмической функции $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

Если $x > 0$ и $|\Delta x| < x$, то при $\Delta x \neq 0$ имеем:

$$(\log_a x)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{x}} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Итак, $(\log_a x)'_x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ В частности, $(\ln x)'_x = \dfrac{1}{x}$

Правила дифференцирования

Теорема 6.3.

Если функции U(x) и V(x) дифференцируемы в данной точке x, то тогда имеют место следующие правила дифференцирования.

1) $$\left[U(x) \pm V(x)\right]_x' = U_x'(x) \pm V_x'(x)$$

2) $$\left[U(x) \cdot V(x)\right]_x' = U_x'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V_x'(x)$$

3) $$\left[\frac{U(x)}{V(x)}\right]_x' = \frac{U_x'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V_x'(x)}{V^2(x)}. \qquad (V(x) \neq 0)$$

Доказательство.
Докажем п.3). Рассмотрим частное

$$\frac{U(x)}{V(x)}$$

По условию теоремы предполагается, что $V(x) \neq 0$, пусть для определенности $V(x)>0$; т.к. $V(x)$ дифференцируема в точке x, следовательно, она и непрерывна в этой точке, а значит в силу теоремы о стабилизации знака непрерывной функции, можно указать такую окрестность точки x, в которой $V(x + \Delta x) > 0$.
Тогда получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{U(x+\Delta x)}{V(x+\Delta x)} - \frac{U(x)}{V(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot V(x)\cdot V(x+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot V(x)\cdot V(x+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot \Delta V(x)}{\Delta x \cdot V(x)\cdot V(x+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta U(x)}{\Delta x}\cdot V(x) - U(x)\cdot \dfrac{\Delta V(x)}{\Delta x}}{V(x)\cdot V(x+\Delta x)} = \frac{U'(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V'(x)}{V^2(x)}$$

Итак,

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)'_x = \frac{U'(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V'(x)}{V^2(x)}$$

Пример 3. Найти $\left(\sqrt[3]{x^2}+\ln x\right)'_x$

Решение. $\left(\sqrt[3]{x^2}+\ln x\right)'_x=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'_x+(\ln x)'_x=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x}$

Пример 4. Найти $\left(x^2\cdot e^x\right)'_x$

.***Решение.*** $\left(x^2\cdot e^x\right)'_x=\left(x^2\right)'_x\cdot e^x+x^2\cdot\left(e^x\right)'_x=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+2x\right)\cdot e^x$

Пример 5. Найти $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'_x$

Решение. $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'_x=\frac{\left(x^2+1\right)'_x\cdot x-\left(x^2+1\right)\cdot x'_x}{x^2}=\frac{2x\cdot x-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

Дифференцирование тригонометрических функций

1) Найдем производную функции $y = \sin x$

$$(\sin x)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \Delta x}{2 \cdot \Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Итак, $(\sin x)'_x = \cos x$

2) Аналогично можно доказать, что $(\cos x)'_x = -\sin x$

3) $$(\operatorname{tg} x)'_x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'_x = \frac{(\sin x)'_x \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'_x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)'_x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

4) Аналогично можно показать, что

$$(\operatorname{ctg} x)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Правило дифференцирования сложной функции

Теорема 6.4.

Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x, причем

$$\{f[\varphi(x)]\}'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x(x)$$

Доказательство.

Функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, значит ,

$$\Delta u = \varphi_x' \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha(\Delta x) \to 0 \quad \text{при } \Delta x \to 0.$$

В свою очередь, функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, тогда ,

$$\Delta y = f_u' \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u, \quad \text{где при } \Delta u \to 0,$$

значит $$\Delta y = f_u' \cdot \left(\varphi_x' \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\right) + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда в силу непрерывности дифференцируемой функции окажется, что также и $\Delta u \to 0$, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f_u' \cdot \left[\varphi_x' + \alpha(\Delta x)\right] + \beta(\Delta y) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right]$$

Здесь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u_x'$; $\beta(\Delta u) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.к. $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Окончательно получим $\left(f\left[u(x)\right]\right)_x' = f_u' \cdot u_x'$ **(правило цепочки).**

Правило цепочки можно обобщить на большее число промежуточных аргументов, если выполнены соответствующие условия:

$$\left(y\{u[v(t < x >)]\}\right)_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_t' \cdot t_x'$$

Пример 6. Найти производную функции $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{1+\sin x}}$

Решение. $y'_x=\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{1+\sin x}}\right)'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{1+\sin x}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{(1+\sin x)^2}\right)\cdot\cos x$

Пример 7. Найти производную функции $y=\log_2\log_3 x$

Решение. $y'_x=(\log_2\log_3 x)'_x=\dfrac{1}{(\log_3 x)\cdot\ln 2}\cdot\dfrac{1}{x\cdot\ln 3}$

Пример 8. Найти производную функции $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Решение. $y'_x = \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

Пример 9. Найти производную функции $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

Решение.

$$y'_x = \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Пример 10. Найти производную функции $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Решение.

$$y'_x=\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

Пример 11. Найти производную функции $y = 3^{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$

Решение. $$y'_x = \left(3^{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}\right)'_x = 3^{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \ln 3 \cdot \left(\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot 3$$

Пример 12. Найти производную функции $y = e^{\frac{1}{1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$

Решение.

$$y'_x = \left(e^{\frac{1}{1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}\right)'_x = e^{\frac{1}{1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(-\frac{1}{\left(1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}\right) \cdot \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Пример 13. Найти производную функции $y = 5^{\operatorname{tg} 2^{\cos^2 x}}$

Решение.

$$y'_x = \left(5^{\operatorname{tg} 2^{\cos^2 x}}\right)'_x = 5^{\operatorname{tg} 2^{\cos^2 x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 2^{\cos^2 x}} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)$$

Пример 14. Найти производную функции $y=\log_5 3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\frac{\pi}{3}}\right)}$

Решение.

$$y'_x=\left(\log_5 3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\frac{\pi}{3}}\right)}\right)'_x=\frac{1}{3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\frac{\pi}{3}}\right)}\cdot\ln 5}\cdot 3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\frac{\pi}{3}}\right)}\cdot\ln 3\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^2}\right)$$

Пример 15. Найти производную функции

$$y = e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \cos\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Решение.

$$y'_x = \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \cos\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right)'_x = e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right) + e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left[-\sin\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot 4x.$$