Лекция 11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (6)

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Исследование критических точек с помощью второй производной
Второе достаточныое условие экстремума

Выпуклость и вогнутость кривых
Точки перегиба

Асимптоты кривых

Общая схема исследования функции

Второе достаточное условие экстремума

Теорема 11.1. *Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем в этой окрестности* $f''(x)$ *непрерывна, а в точке x_0 первая производная обращается в нуль, то если* $f''(x_0)<0$ *, в точке x_0 функция имеет максимум, а если* $f''(x_0)>0$ *, в точке x_0 функция имеет минимум.*

Доказательство.

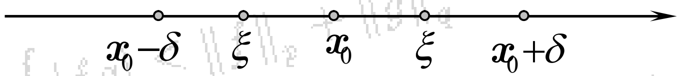
Докажем первую половину теоремы. Напишем формулу Тейлора второго порядка для данной функции $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$$

где точка ξ лежит между x и x_0. По условию теоремы, $f'(x_0)=0$, значит

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$$

Допустим, что $f''(x_0) < 0$, тогда по теореме о стабилизации знака непрерывной функции существует окрестность точки x_0 такая, что знак второй производной будет тот же, что и в точке x_0, т.е. в точке ξ вторая производная будет иметь тот же знак, что и в точке x_0, т.е.



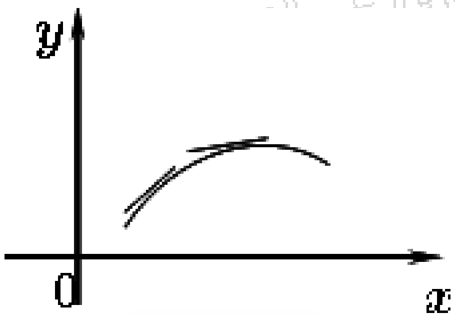
$$f''(\xi) < 0$$

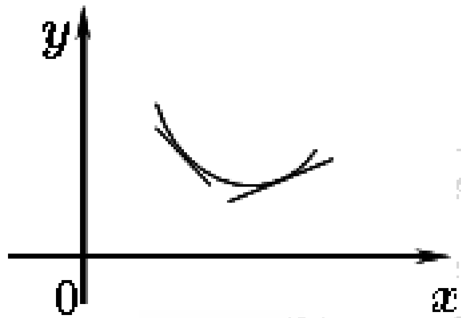
А тогда окажется, что для всех $x \in \overset{0}{U}(x_0;\delta)$: $f(x) - f(x_0) < 0$,

т.е. в точке x_0 функция имеет максимум

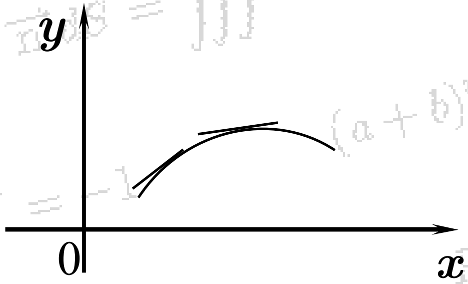
Выпуклость и вогнутость кривых

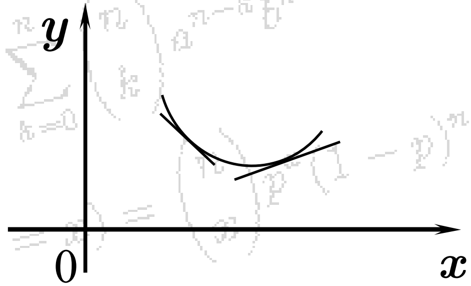
Определение 11.1. ***Н****епрерывная кривая на промежутке [a; b],* ***выпукла вверх****, или просто выпукла, если график располагается ниже касательной к графику функции, проведенной через любую точку графика*





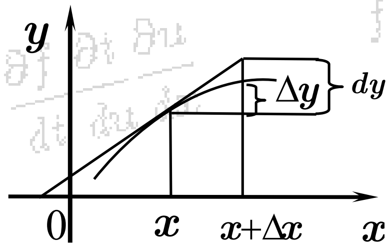
Определение 11.2. Непрерывная кривая на промежутке *[a; b]*, ***выпукла вниз, или вогнута****, если ее график располагается выше касательной к графику функции, проведенной через любую точку графика.*





Геометрически очевидно, что если кривая выпукла, то $\Delta y < dy$, т.е.

$$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\cdot \Delta x < 0$$



если кривая вогнута, то $\Delta y > dy$, т.е.

$$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\cdot \Delta x > 0$$

Теорема 11.2. *Если функция f (x) дважды дифференцируема на отрезке [a; b], причем* $f''(x)<0$ *на этом промежутке, то на промежутке [a; b], график функции выпуклый, а если* $f''(x)>0$ *, то на промежутке [a; b], график функции вогнутый.*

Доказательство.

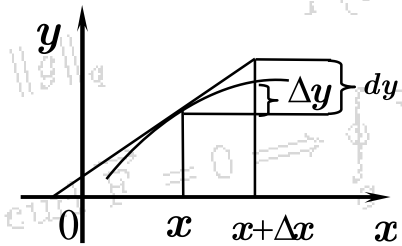
Пусть $f''(x)<0$ на промежутке $[a;\, b]$. Возьмем точки $x \in [a;b]$ и $(x+\Delta x) \in [a;b]$, тогда имеем разложение Тейлора:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\cdot \Delta x + \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot (\Delta x)^2,$$

где точка ξ лежит между x и $x+\Delta x$.

Следовательно, $f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\cdot\Delta x=\dfrac{f''(\xi)}{2!}\cdot(\Delta x)^2$,т.е. $\Delta f-df<0$,

а это и означает, что кривая – выпуклая.

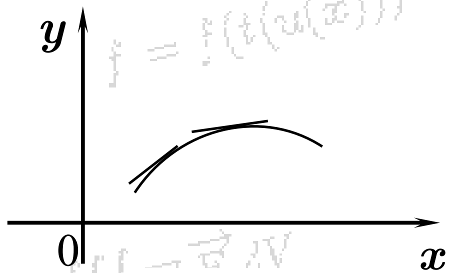


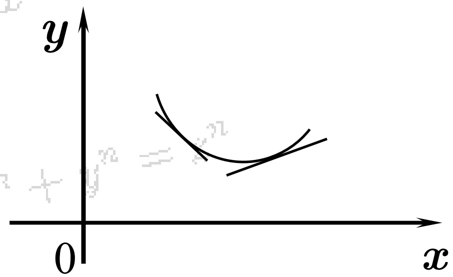
Вторая половина теоремы доказывается аналогично.

Геометрически

$f''(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)$ возрастает

$f''(x)\leq 0 \Rightarrow f'(x)$ убывает





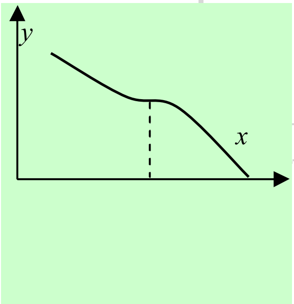
Точки перегиба

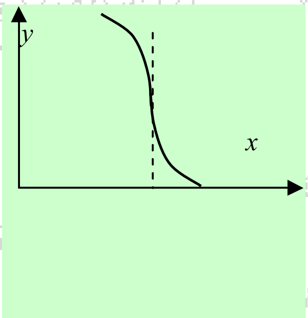
Определение 11.3.

Точка на графике функции $f(x)$, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется точкой перегиба

Из определения следует, что при прохождении через точку перегиба вторая производная меняет знак.
Если x_0– абсцисса точки перегиба, то

$f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) = \infty$ или $f''(x_0)$ не существует.



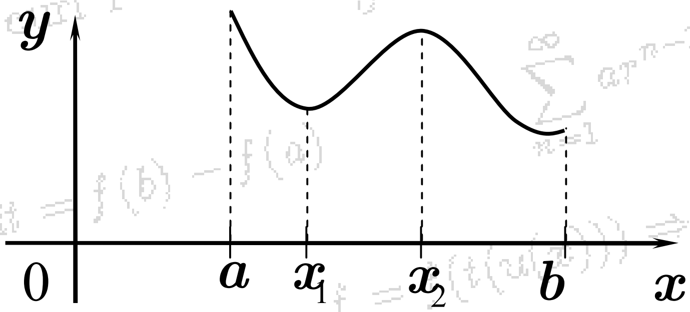


Теорема 11.4 (достаточное условие существования точек перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

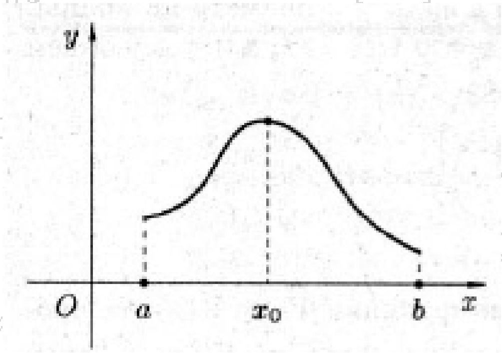
Наибольшее и наименьшее значение функции

Допустим, что некоторая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$, тогда на этом промежутке она имеет наибольшее и наименьшее значения. Чтобы их найти, нужно отыскать все максимумы и минимумы функции, вычислить ее значения на концах промежутка, а затем сравнить их между собой и выбрать наименьшее и наибольшее.



Замечание

Если функция $y = f(x)$ на отрезке [a; b] имеет ***лишь одну критическую точку*** и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение.



Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ ***не имеет критических точек***, то это означает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, наибольшее значение *(M)* функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее (m) — на другом.

Четность и нечетность функции

При исследовании функции всегда нелишне проверить, является ли данная функция четной или нечетной, так как в таком случае достаточно исследовать функцию только для $x \ge 0$, а затем отобразить ее для отрицательных x симметрично относительно оси $0y$ или симметрично относительно начала координат.

Определение 11.4. *Функция f (x) называется* ***четной****, если* $f(-x) = f(x)$ *для любой точки x из области определения функции.*

$$y = \cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

Определение 11.5. *Функция f (x) называется* ***нечетной****, если* $f(-x) = -f(x)$.

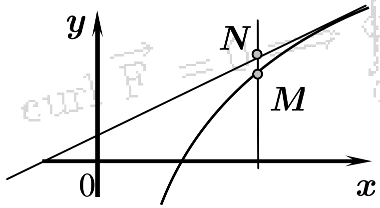
$$y = x^3$$

$$y(-x) = \left(-x^3\right) = -x^3$$

Асимптоты кривых

Определение 11.5.

*Прямая линия называется **асимптотой** графика **функции*** $y = f(x)$ *если расстояние между текущей точкой графика и этой прямой стремится к нулю по мере удаления точки от начала координат*



Итак, предположим, что график функции имеет наклонную асимптоту

$$y = kx + b \quad (k \neq \pm\infty)$$

тогда очевидно, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x) - y_{ac}| = 0$, т.е.

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Предельное равенство может иметь место, лишь когда выражение в квадратной скобке стремится к нулю

Вследствие того, что $\frac{b}{x} \to 0$, при $x \to \pm\infty$, то

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Если k найдено, то нетрудно найти и b:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

В частности, если $k = 0$, то мы будем иметь частный случай наклонной асимптоты – **горизонтальную асимптоту**.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой**, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование.

Построение сразу по точкам, за исключением элементарных случаев, может привести к потере на графике важных свойств функции.

Примерная схема исследования функции с целью построения ее графика может быть представлена в виде

1. Определить область существования функции.
2. Выяснить, является данная функция четной или нечетной.
3. Найти точки, подозрительные на экстремум и выяснить характер экстремумовс помощью первой или второй производной, а также вычислитьy_{min} , y_{max}

4. Определить интервалы возрастания и убывания функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции.
6. Найти точки перегиба.
7. Найти асимптоты графика функции.
8. Вычислить значение функции в некоторых контрольных точках (например, значение функции в начале координат), точки пересечения с координатными осями.

Нарисовать график функции.

Пример1. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 1}{|x|}$

Решение.

1) Область существования функции $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) Функция четная, так как $\frac{(-x^2) - 1}{|-x|} = \frac{x^2 - 1}{|x|}$

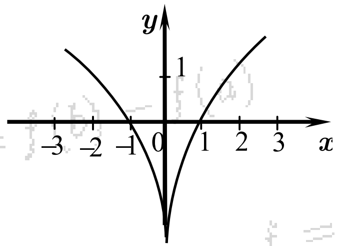
3) $$y = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x}, x > 0 \\ \frac{1 - x^2}{x}, x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x^2}, x > 0 \\ -\frac{x^2 + 1}{x^2}, x < 0 \end{cases}$$

Функция имеет критическую точку $x_1 = 0$, в которой производная не существует, но в этой точке функция уходит на $-\infty$, следовательно, функция не имеет ни максимумов, ни минимумов.

4) Функция убывает, когда $x \in (-\infty, 0)$ и возрастает, если $x \in (0, +\infty)$

5,6) $$y'' = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^3}, x > 0 \\ \dfrac{2}{x^3}, x < 0 \end{cases}, \quad y''(0) = -\infty$$

Кривая везде выпукла, а точка $x_1 = 0$ не является точкой перегиба, так как мы установили ранее, что в этой точке функция не определена.



7) Очевидно, что $x = 0$ является вертикальной асимптотой. Действительно

$$\lim_{x \to 0+\varepsilon} y = \lim_{x \to 0+\varepsilon} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0-\varepsilon} y = \lim_{x \to 0-\varepsilon} \frac{1 - x^2}{x} = -\infty$$

а) $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2-1}{x} - x\right] = 0$$

Итак, $y = x$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$

б) $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2} = -1$

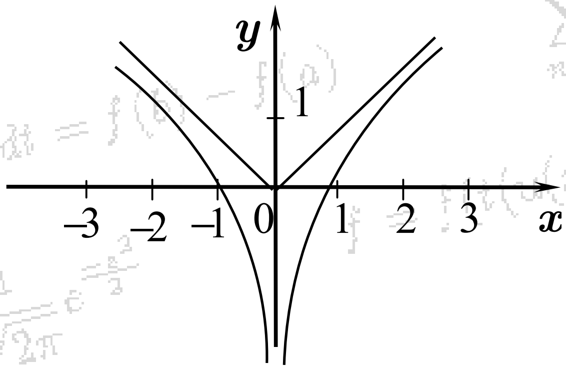
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1-x^2}{x} + x\right] = 0$$

Таким образом, $y = -x$ является наклонной асимптотой при $x \to -\infty$

8) Вычислим те значения x, при которых $y = 0$; ясно, что это $x = \pm 1$

.

9) Построим график функции



Пример 2. *Провести полное исследование функции*

$y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ *и построить график.*

1. Область определения функции $x \neq 1$,
т.е. $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

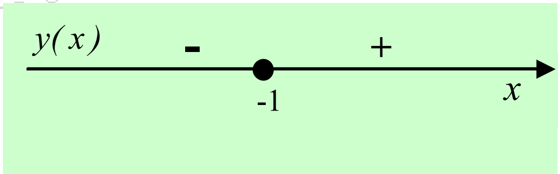
Так как при $x=-1$ $y<0$, а при $x>-1$ $y>0$, и,

$\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$

то множество значений функции $E(y) = (-\infty;+\infty)$.

2. Функция *y(x)* не является периодической. Она ни четная, ни нечетная, т.е. ее график не обладает симметрией.

3. В точке $x=1$ функция имеет разрыв второго рода, т.к.



$$\lim_{x\to 1-0} y(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 1+0} y(x) = +\infty.$$

4. Точки пересечения с осями координат: $x=0$, $y=1$, *и* $x=-1$, $y=0$. Промежутки постоянного знака представлены на рисунке.

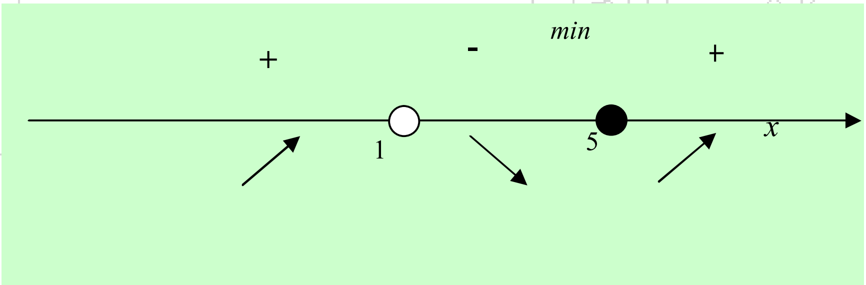
5. Найдем интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции. Для этого вычислим первую производную:

$$y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

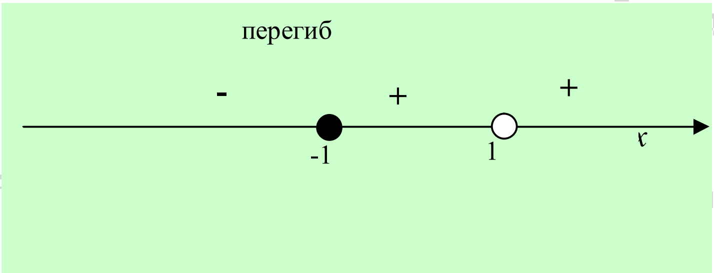
Отсюда получим

а) $y'>0$ при $x<1$ и $x>5$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает, а при $x \in (1,5)$ $y'<0$ и функция убывает.;

б) $y'=0$ при $x=5$ и в точке (5;27/2) функция имеет локальный минимум. Точка x=-1 тоже является критической точкой $y(-1)=0$, но локального экстремума функции в этой точке нет.



6. Найдем интервалы выпуклости функции. Для этого вычислим вторую производную: $y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Тогда $y''<0$ при $x<-1$ и функция выпукла вверх, а на промежутках $-1<x<1$ и $x>1$ $y''>0$ и функция выпукла вниз. Точка (-1,0) - точка перегиба графика функции.



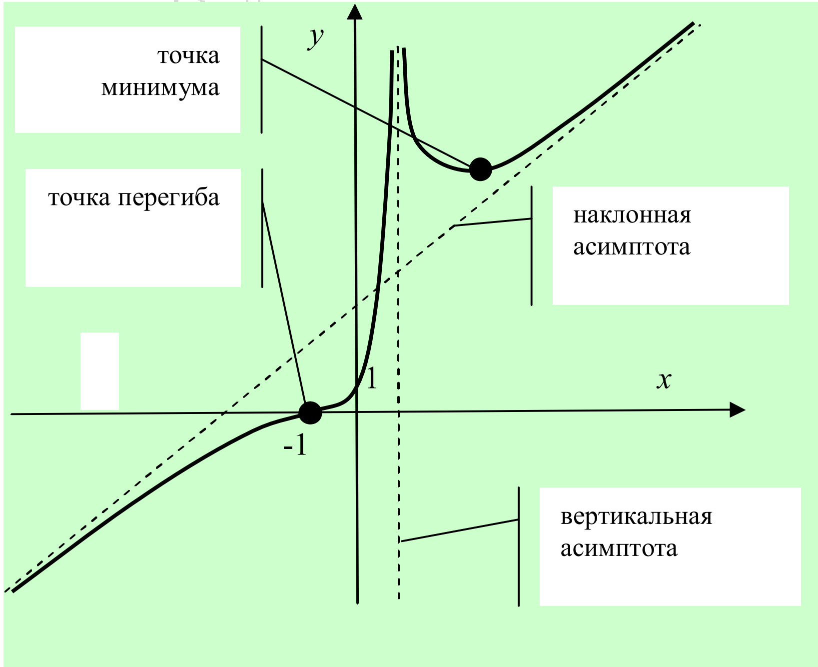
7. Прямая $x=1$ будет вертикальной асимптотой графика функции. Наклонными асимптотами графика функции будут прямые, заданные уравнением $y=kx+b$, где коэффициенты k и b определяются равенствами

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx).$$

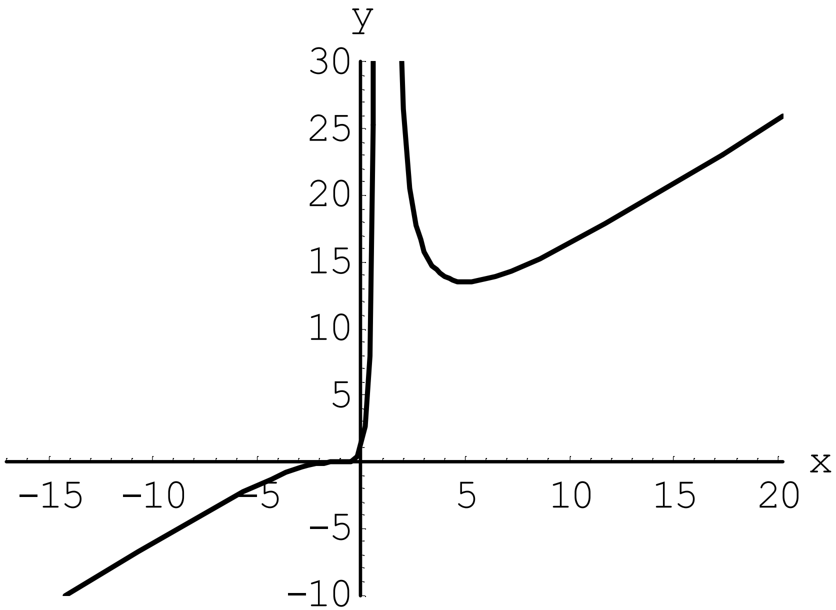
Поскольку

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2 x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) = 5,$$

то единственной наклонной асимптотой будет прямая $y=x+5$.



График,построенный по результатам исследования



График, рассчитанный и построенный компьютерной программой «Mathematica 5.0».