ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ(3)

in a

f (8)

$$|f(a)| \leq ||f||_{2} + ||g||_{2}$$

$$|f(a)| \leq ||f||_{2} + ||g||_{2}$$

$$|f(a)| \leq ||f||_{2} + ||g||_{2}$$

$$|f(a)| = |f(b)| - |f(a)|$$

$$|f(a)| = |f(b)|$$

$$|f(a)| = |f(b)| - |f(a)|$$

$$|f(a)| = |f(b)|$$

$$|f(a)| = |$$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{a}x$ $x^n + y^n = z^n$ Теорема о неявной функции

Касательная ein = [|fg| \le ||! Касательная плоскость и нормаль к поверхности Инвариантность формы дифференциалов функции нескольких переменных Применение полного дифференциала $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ к приближенным вычислениям и оценке погрешностей f (8) $x^{n} + y^{n} = x^{n}$ $x^{n} + y^{n} = x^{n}$ $x^{n} + y^{n} = x^{n}$ MF TOS = MVEW

Теорема о неявной функции

Рассмотрим функцию аргумента x, заданную неявно, т.е. функцию y(x), заданную соотношением вида $F(x,y)\!=\!0$.

 $2^n+3^n=2^n$

ein =

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

Приведем без доказательства формулировку теоремы, дающей достаточные условия существования, единственности и дифференцируемости неявно заданной функции y = y(x), определяемой соотношением F(x,y) = 0.

f(z) = f(0) - f(0) $f = f(t)(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ $f(z) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $f(z) = \sqrt{2$

 $\frac{1-r}{2} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u}$

Теорема 14.1 (о неявной функции)

Ести —

Теорема 14.1 (о неявной функции) $Eсли \ функция \ z = F(x,y) \ y довлетворяет следующим условиям:$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$

1) F(x,y) определена в окрестности точки (x_0,y_0) , причем F(x,y) и ее ча-3) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0$. стные производные $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в указанной окрестности;

2)
$$F(x_0, y_0) = 0$$
;

3)
$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} \bigg|_{\substack{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0}} 0.$$

HT TAS = IIIVEW

 $x^n + y^n = z^n$

ein =

f (8)

[\f9\≤\\]

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ $x^n + y^n = z^n$ MF. TOS = III

 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ Тогда **существует единственная функция** y = y(x), которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и обладает следующими свойствами:

ein =

f (8)

 $\lceil |fg| \leq ||f|$

1) функция y=y(x) дифференцируема в окрестности точки x_0 ;

2)
$$y_0 = y(x_0);$$

1) функция
$$y = y(x)$$
 дифференцируема в окрестности точки x_0 ;
$$2) y_0 = y(x_0);$$

$$3) F[x, y(x)] \equiv 0.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt$$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$ $2n+3^n=2^n$ Tyctum To

n (n) an-ath Допустим теперь, что некоторая функция z = F(x, y) удовлетворяет товиям, сформуцирования z = F(x, y) удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме. Найдем производную неявно заданной функции $y'_x(x)$. $p(X=x)=\backslash x$

Продифференцируем по x обе части тождества $F[x, y(x)] \equiv 0$, принимая во внимание, правило дифференцирования сложной функции, зависящей от

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

заданной функции
$$y_x'(x)$$
. Продифференцируем по x обе части тождества $F[x,y(x)]\equiv 0$, принимая в внимание, правило дифференцирования сложной функции, зависящей с нескольких переменных, получим
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$
 откуда следует
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

HT. TAS = III VEW

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ $f(t)^{an} = \frac{1}{\sqrt{12\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ $x^n + y^n = z^n$

ичное — (| V F &V Аналогичное рассмотрение можно провести и для функции z=z(x,y), $p(X = x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} p^{2} (1 - y)$ определяемой соотношением F(x, y, z) = 0.

откуда следует $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}.$ функция z = z(x, y) определяется этим соотношением, $F[x, y, z(x, y)] \equiv 0$. Выполняя частное дифференцирование, получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}$$

ein =

$$= \iiint \sqrt{F} dV$$

$$= \iiint \sqrt{n} dn^{-n} d^{n}$$

MT TOS = MVTW

Пример. Найти производную y_x' функции y = y(x), заданной неявным уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

 $x^n + y^n = z^n$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

Решение. Заметим, что данное уравнение определяет окружность. Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ почленно по x как сложную функцию: $2x + 2y \cdot y_x' = 0$. Откуда следует $y_x' = -\frac{x}{y}$. Ясно, что в точках, где y = 0, производная обращается в ∞ (касательная перпендикулярна к оси 0x).

$$F(x,y) = x^{2} + y^{2} - 1$$

$$F'_{x} = 2x; \quad F'_{y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} y'_{x} = -\frac{x^{4}}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} y'_{x} = -\frac{x^{4}}{y}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

[\fs\ ≤\\!

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция z = f(x; y) дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$ некоторой области D. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z. плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$

at at au da

 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$

Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции z = f(x; y) вместо x числа x_0 . Точка $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$. при надлежит кривой $z_0(y)$.

В силу дифференцируемости функции z точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y=y_0$. Следовательно, в этой точке к плоскости $x=x_0$ к кривой $z_0(y)$. может быть проведена касательная I_1 .

 $f(t) = \begin{cases} z_0(y) & z_0(x) \\ M_0 & z_0(x) \\ M_0 & y \\ 0 & dx \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} z_0(x) & dt \\ dt & dt \\ dt & dt \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} z_0(x) & dt \\ dt & dt \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} z_0(x) & dt \\ dt & dt \end{cases}$

 $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $f = f(t(u(x))) \Rightarrow dx$ $x^n + y^n = x^n$

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную I_2 к кривой $z_0(x)$

Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α , которая называется касательной плоскостью к поверхности α точке M_0

 $(t) d = \begin{cases} x_0(y) & x_0(y) \\ x_0(y) & x_0(y) \\ x_0(y) & x_0(y) \end{cases}$ $(x_0; y_0) = \begin{cases} x_0(x) & x_0(y) \\ x_0(y) & x_0(y) \end{cases}$ $(x_0; y_0) = \begin{cases} x_0(x) & x_0(y) \\ x_0(y) & x_0(y) \end{cases}$

af at au

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$ $2c^n+3l^n=2^n$

Составим ее уравнение. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ может быть записано в виде

$$|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

Или, разделив уравнение на -C и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1$, $\frac{B}{-C} = B_1$

ли, разделив уравнение на -
$$C$$
 и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1$, $\frac{B}{-C} = B_1$ $z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0)$

$$f(z) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

ein =

f (8)

[\fs\≤\\]

 $\nabla = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} \right) a^{n-k} b^k$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ $2^n+3^n=2^n$

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0;$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0$$

Касательная I_1 лежит в плоскости α , следовательно, координаты всех точек 1, удовлетворяют уравнению

| \fg\ ≤ \\!

$$z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$$

Этот факт можно записать в виде системы
$$\begin{cases} z-z_0=f_y'(x_0;y_0)(y-y_0),\\ x=x_0,\\ z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0). \end{cases}$$

 $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \partial x$ $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Разрешая эту систему относительно B_{l} , получим, что

$$B_1 = f'_y(x_0; y_0).$$

Аналогично $A_1 = f'_x(x_0; y_0).$

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение, получаем уравнение касательной плоскости:

$$z$$
 касательной плоскости: $z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).$

 $f(z) = \sqrt{2\pi}$ $\frac{1}{dt} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ $f(z) = \sqrt{2\pi}$ $\text{If } \vec{F} \cdot \vec{\pi} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$

 $V = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n} \right) a^{n-n} b^n$

e^{in z}

[\f9\≤\!!

Если поверхность задана уравнением F(x;y;z) = 0, то уравнение касательной плоскости имеет вид (с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции):

 $2^n+3^n=2^n$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$

$$f'_x(x_0;y_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}, \quad f'_y(x_0;y_0) = -\frac{F'_y(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}$$

примет вид

оимет вид
$$F_x'(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+F_y'(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)+F_z'(x_0;y_0)\cdot(z-z_0)=0$$

ИЛИ

$$F'_{m{z}}(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+F'_{m{y}}(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)+F'_{m{z}}(x_0;y_0)\cdot(z-z_0)=0$$
 или
$$\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{M_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{M_0}\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{M_0}\cdot(z-z_0)=0$$

$$f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

$$f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

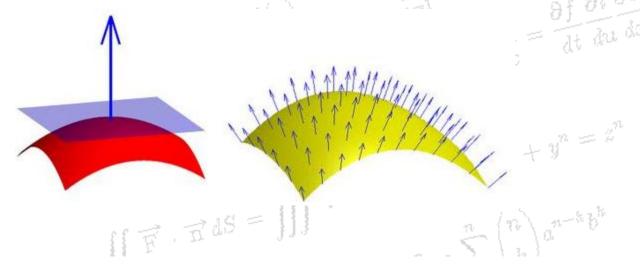
Определение 14.1

Определение 14.1 Прямая, проходящая через точку \mathbf{M}_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее нормалью.

{\f9\≤\!!

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0$$

$$\vec{N} = \vec{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$



 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ $x^n + y^n = z^n$

Принимая за направляющий вектор прямой, перпендикулярной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, вектор $\vec{N} = \vec{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$, получим канонические уравнения этой нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ для случая, когда поверхность задана уравнением F(x;y;z) = 0,

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}} = \frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}} = \frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}}.$$

В случае уравнения z = f(x; y)

$$Z = f(x; y)$$

$$\frac{z}{f'_{x}(x_{0}; y_{0})} = \frac{y - y_{0}}{f'_{y}(x_{0}; y_{0})} = \frac{z - z_{0}}{-1}.$$

INT TOS = III VEW

n (n) an-tab

 $f(t)^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{12\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$ $x^n + y^n = z^n$ MF. Ids = III

Замечание F(x,y,z) дифференцируема, и ни в одной точке поверхности S все три частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ в ноль не обращаются, т.е. на поверхности S нет особых точек.

eⁱⁿ =

f (8)

| \fs\ ≤ \\!

 $f(t)^{2t} = f(b) - f(a)$ $f(t)^{2t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^{-\frac{2}{3}}$ $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^{-\frac{2}{3}}$ $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ HT TAS = IIIVEN

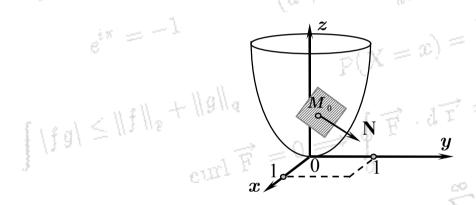
Пример. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке $M_0(1,1,2)$, если уравнение поверхностей $z=x^2+y^2$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

 $x^n + y^n = z^n$

|\fs\ ≤\!!

f (8)



Решение. Запишем уравнение поверхности (это параболоид вращения)

так:
$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$$
. Найдем $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

Следовательно в точке $M_0(1,1,2)$ нормаль к поверхности $\vec{N} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Тогда касательная плоскость имеет уравнение 2(x-1)+2(y-1)-1(z-2)=0,

T.e.
$$2x + 2y - z - 2 = 0$$
.

$$f(t)^{m}$$
 $f(t)^{m}$ $f(t)^{m}$

Соответственно, прямая, на которой лежит нормальный вектор \vec{N} ,

$$f(z) = \sqrt{2\pi}$$

$$(z) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

eⁱⁿ =

f (8)

полный дифференциал

Определение 14.2. Дифференциалом функции z = f(x,y) называется линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения дифференцируемой функции, т.е.

 $x^n + y^n = z^n$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

$$dz = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Заметим, что если x и y — независимые переменные, то дифференциалы этих переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда можно уточнить форму дифференциала функции, зависящей от двух независимых переменных:

$$dz = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot dy$$

$$f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

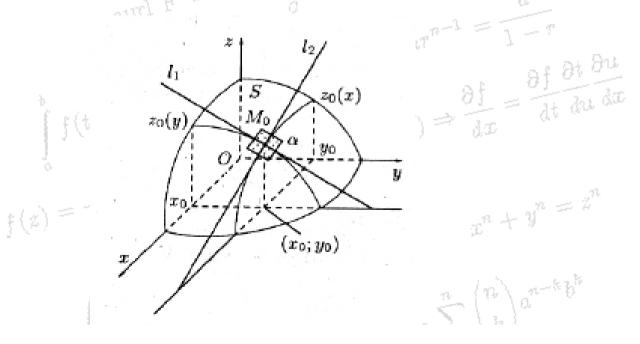
$$f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Запишем уравнение касательной плоскости в виде

запишем уравнение касательной плоскости в виде
$$\Delta z = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot \Delta y$$
 Отсюда очевиден геометрический смысл полного дифференциала

Отсюда очевиден геометрический смысл полного дифференциала



ein =

f (8)

|\fs\\ \le \\!

 $f(z) = \sqrt{2\pi} e^{-z^2}$ $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \lambda x$ $z^n + z^n = z^n$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = \sqrt{x^2 + x \cdot y + x \cdot y \cdot z^2}$.

ein =

f (8)

 $P(X = x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} p^{x} (1 - p)^{x}$

Решение. Очевидно, что $du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz$, при этом

 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x + y + yz^2}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x + xz^2}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}.$

n (n) an-habit

Следовательно, $du = \frac{\left(2x + y + yz^2\right) \cdot dx + \left(x + xz^2\right) \cdot dy + 2xyz \cdot dz}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}$.

= Of Ot Other | Table = | | VEW

$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ФУНКЦИИ 2"+1"=" THE TOS = JOHN

eⁱⁿ =

f (8)

[/fg/≤//!

Рассмотрим дифференцируемую функцию z=z(x,y) и запишем ее полный дифференциал

Рассмотрим дифференцируемую функцию
$$z = z(x,y)$$
 и запишем ее полн дифференциал
$$dz(x,y) = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot dy.$$

MT Tas = MVEW

ем, что эт Покажем, что эта форма дифференциала обладает свойством инвариантности и в том случае, когда переменные x и y не независимые, а являются функциями некоторого аргумента t, т.е. z = z[x(t), y(t)].

 $2^n+3^n=2^n$

ein =

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

Действительно:

 $f(t)^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Цействительно:
$$dz = z_t' \cdot dt = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right] \cdot dt = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$
 т.е.
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$
 где $x = x(t), y = y(t).$

т.е.
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$
, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$(z) = \sqrt{2\pi}^{-\frac{1}{2}}$$

$$(z) = \sqrt{2\pi}^{-\frac{$$

Теперь предположим, что x и y зависят не от одного, а от двух независимых аргументов, т.е. $x = x(s,t), \ y = y(s,t).$

 $2^n+3^n=2^n$

Тогда z = z[x(s,t),y(s,t)], причем функции x(s,t) и y(s,t) предполагаются дифференцируемыми по переменным s и t. Очевидно, что

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) \cdot ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right) \cdot dt =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot dt\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot dt\right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt\right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

IN THE TAS = III VEW

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ Таким образом, окончательно $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy,$ $x^n + y^n = z^n$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy,$$

ein =

f (8)

[\fg\≤\\!

т.е. форма полного дифференциала сохраняется в том случае, если x и yзависят в свою очередь от двух независимых переменных s и t.

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Рассмотрим некоторую функцию z=f(x,y), определенную в области D и дифференцируемую в точке $M(x,y)\!\in\! D$.

{\fg\≤\!!

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

Тогда ее полное приращение можно записать так:

$$\Delta z = f_x'(x,y) \cdot \Delta x + f_y'(x,y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \text{ где } \alpha \to 0, \ \beta \to 0$$
 при $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0, \text{ т.e. } \Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.$

В приближенных вычислениях иногда заменяют полное приращение функции ее дифференциалом, т.е. полагают

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y$$

(2) - V2M (2) - V2M (3) - V2M (3) - V2M (4) - V2M (5) - V2M (7) - V2M (8) - V2M (8) - V2M (9) - V2M (1) - V2M $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Замечание

ние ность же таких вычислений можно опенит

ein =

[/fs/ < ///

Погрешность же таких вычислений можно оценить, оценив отброшенные слагаемые $\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$. Делается это с помощью формулы Тейлора для функции нескольких переменных

функции нескольких переменных. f(t)dt = f(b) - f(a) f(t)dt = f(b) - f(a) f(t)dt = f(b) - f(a) f(t)dt = f(b) - f(a)

 $f(z) = \sqrt{2\pi}e^{-z^2}$ $z^n + y^n = z^n$

HT. TAS = III VEW

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$ $x^n + y^n = z^n$

Пример. Вычислить приближенное значение $\sqrt{(1,01)^2 + (2,99)^2 + 6}$, заменив полное приращение функции $z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$ в точке M(1,3)ее дифференциалом.

e^{in z}

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx z(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Решение. Итак, примем во внимание, что
$$z(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx z(x,y)+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y,$$
 получим
$$\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2+6}\approx \sqrt{x^2+y^2+6}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+6}}\cdot\Delta x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+6}}\cdot\Delta y$$

$$f(z) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{z}{2}}$$

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$ $x^n + y^n = z^n$ ein = $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ [\fg| ≤ \\! Положим здесь x = 1, y = 3, $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = -0.01$, тогда будет $\sqrt{(1,01)^2 + (2,99)^2 + 6} \approx \sqrt{1+9+6} + \frac{0,01}{\sqrt{1+9+6}} + \frac{3 \cdot (-0,01)}{\sqrt{1+9+6}} = 4 + \frac{0,01}{4} - \frac{0,03}{4} = 4 - 0,005 = 3,995$ $f(x) = \sqrt{2\pi}$ f(x) = f(x) - f(x) f(x) = f(x) f (8) The man to be the state of the MF. Bas = MVEW

Оценка погрешностей с помощью полного дифференциала

При выполнении различных экспериментов приходится снимать показания с приборов, а затем вычислять интересующую нас физическую величину по некоторой формуле.

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \overline{dx}$

 $x^n + y^n = z^n$

| \f9\ ≤ \\!

Естественно, что при этом экспериментатора интересуют погрешности таких измерений. Рассмотрение проведем для случая функции, зависящей от двух независимых переменных, т.е. z = f(x, y).

Пусть мы измеряем величины x и y с погрешностями Δx и Δy . Погрешности эти нам не известны, но мы можем оценить их сверху: $|\Delta x| \leq \Delta_1$, $|\Delta y| \leq \Delta_2$.

Здесь положительные величины Δ_1 и Δ_2 дают нам абсолютные погрешности измерений величин x и y.

Допустим, что нам надо оценить абсолютную погрешность вычисления личины z=f(x,y). Очевидно, что ошибка вычисления величины z: величины z = f(x, y).

 $x^n + y^n = z^n$

ein =

 $f = f(t(u(x))) \Rightarrow \bar{d}x$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если приращения Δx и Δy малы по абсолютной величине, то, заменяя полное приращение функции ее дифференциалом, получим

ли приращения
$$\Delta x$$
 и Δy малы по абсолютной величине, то, заменяя ре приращение функции ее дифференциалом, получим
$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

$$(z) = \sqrt{2\pi}^{c}$$

$$\prod \sqrt{r} \, dV$$

MF TAS = MINVEW

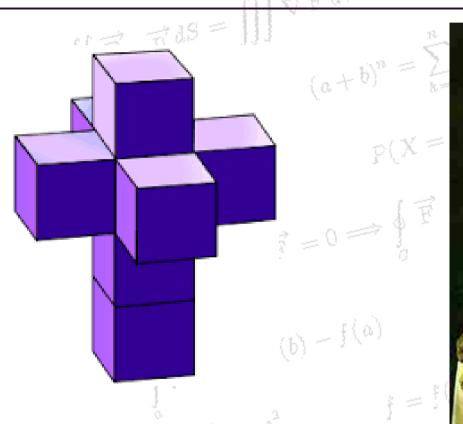
$$f(x) = \sqrt{2\pi}$$
 $f(x)(x) = \sqrt{2\pi}$ $f(x)(x) = \sqrt{$

Отсюда следует, что абсолютную погрешность измерений можно оценить так:
$$|\Delta z| \approx \frac{|\partial z|}{|\partial x|} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y \le \frac{|\partial z|}{|\partial x|} \cdot |\Delta x| + \frac{|\partial z|}{|\partial y|} \cdot |\Delta y| \le \frac{|\partial z|}{|\partial x|} \cdot \Delta_1 + \frac{|\partial z|}{|\partial y|} \cdot \Delta_2$$

$$f(t) dt = f(t) dt$$

f (8)

 $f(x) = \int_{0}^{\infty} f(t) dx - dx$ $f = f(t)(u(x))) \Rightarrow dx$ $f(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-t^{2}} dx$



Развертка четырехмерного куба

С.Дали. Распятие

iπ =