

Лекция 22

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (5)

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Квадратичные иррациональности

Выделение полного квадрата

Тригонометрическая подстановка

Интеграл вида $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Подстановки Эйлера

Дробно-линейная подстановка

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями.

Рассмотрим приемы для интегрирования некоторых типов иррациональных функций, с помощью подстановок, позволяющих преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Квадратичные иррациональности

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей

$$\frac{a}{1-t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(n)_m = (1-m)^{n-m}$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{ix} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Их можно найти следующим образом:

Под радикалом выделяют полный квадрат

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

и делают подстановку $x + b/a = t$

При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

$$f(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\vec{r} = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{r} =$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}.$$

$$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right),$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16})}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}}}.$$

$$x + \frac{1}{4} = t, \quad x = t - \frac{1}{4}, \quad dx = dt.$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} \right| + C.$$

$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{df}{dt} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{F} \cdot dV$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Пример

$$I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$6-2x-x^2 = -(x^2+2x-6) = -((x+1)^2-7) = 7-(x+1)^2$$

$$I = \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t dt}{\sqrt{7-t^2}} + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(7-t^2) + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} =$$

$$= -\sqrt{7-t^2} + 3 \cdot \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2} + C.$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих

тригонометрических подстановок:

$x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла;

$x = a \cdot \operatorname{tg} t$ для второго интеграла;

$x = a/\sin t$, для третьего интеграла.

$$f(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{dx} = u' \vec{du}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Пример.

$$I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx.$$

$$x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt, t = \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{4-4 \sin^2 t}}{4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int \frac{4 \cos^2 t}{4 \sin^2 t} dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$

$$= C - \arcsin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) = C - \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\left(\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right).$$

$$\int \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \boxed{\boxed{\quad}}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Интеграл вида

$$\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа

$$\int R(t; \sqrt{a^2 - t^2}) dt, \int R(t; \sqrt{a^2 + t^2}) dt, \int R(t; \sqrt{t^2 - a^2}) dt$$

Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{\nabla} u$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример.

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^3} dx.$$

$$x^2 + 2x - 4 = (x+1)^2 - 5 \Rightarrow x+1 = t, x = t-1 \quad dx = dt$$

$$I = \int \frac{\sqrt{t^2 - 5}}{t^3} dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}, dt = \frac{-\sqrt{5} \cdot \cos z}{\sin^2 z} dz \quad z = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} \frac{dt}{dt} \frac{du}{du}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{af}{dt} \frac{dt}{du} \frac{du}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$f(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} \approx$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z} - 5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{(-\sqrt{5}) \cos z}{\sin^2 z} dz = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2 z dz = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) + C = \\
 &= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} \right) \right) + C = \\
 &= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} \right) \right) + C = \\
 &= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t)dt = \int_0^t$$

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

Замечание

Интеграл типа

$$e^{i\pi} = -1$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(1-p)^n = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}$$

целесообразно находить с помощью подстановки $x=1/t$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$f(z)$$

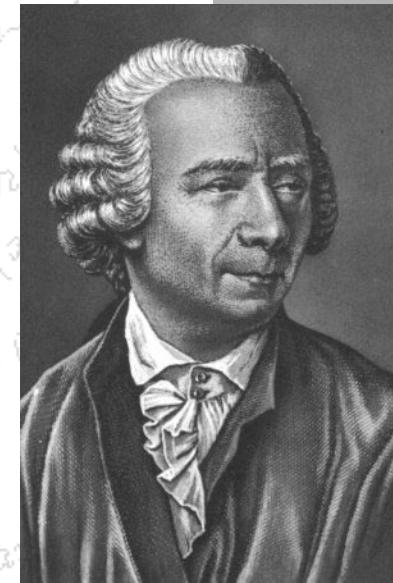
$$\int_a^b f(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Подстановки Эйлера



Они являются частным случаем общего класса интегралов

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx.$$

На квадратный трехчлен накладывается условие – его корни не равны. Рационализация (или добавление нового радикала) достигается подстановками Эйлера.

$$f(t) = \int_0^t f(s) ds$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

1. Пусть $\vec{F} = 0 \Rightarrow \iint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Тогда положим $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \varphi(x) = t - \sqrt{ax}$.

Имеем: $ax^2 + bx + c = t^2 - 2xt \cdot \sqrt{a} + ax^2$ или $bx + c = t^2 - 2xt\sqrt{a}$, так что

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a} \cdot t + b} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt - c\sqrt{a}}{2\sqrt{a} \cdot t + b}; \quad dx = 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, t - \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b + 2 + \sqrt{a}}\right) \frac{2t\left(b + 2t\sqrt{a} - 2\sqrt{a(t^2 - c)}\right)}{(b + 2 + \sqrt{a})^2} dt$$

$$= \int R^*(t) dt = \int \frac{P(t)}{Q(t)} dt$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ – многочлены.

Чтобы вернуться к исходной переменной надо положить

$$t = \varphi(x) + \sqrt{a}x$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{af}{dt} \frac{dt}{du} \frac{du}{dx}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{iz} \approx$$

$$(fg) \leq M$$

$$f(z)$$

1. Подстановка применима и для случая $c > 0$. Тогда полагаем

$$\varphi(x) = xt + \sqrt{c}, \quad ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c, \quad ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t - \text{снова имеем}$$

уравнение I степени относительно переменной x . Отсюда после несложных

$$\text{выкладок получим } x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad \varphi(x) = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{a - t^2}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a}{(a - t^2)^2} dt.$$

Подставляя эти соотношения в исходный интеграл $\int R(x, \varphi(x))dx$, осуществим его рационализацию. Проинтегрировав, необходимо положить

$$t = \frac{\varphi(x) - \sqrt{c}}{x}.$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$|fg| \leq M$$

Если многочлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2 , т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то допустимы такие подстановки:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2)$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Дробно-линейная подстановка

Применяется к интегралам вида

$$\int R\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) dx \quad \text{где } n - \text{натуральное число}$$

С помощью подстановки

функция рационализируется

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \quad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n} \right)' dt;$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{ix} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Тогда

$$e^{ix} = -1$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right) \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_0^a f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{\lambda}x$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$e^{iz} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|fg| \leq M$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной **наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.**

$$\iint (\vec{f} \cdot \vec{n}) \leq \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\text{curl } \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4(\sqrt{1-2x})^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \\ \end{array} \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= -2 \int \left(t + \frac{t}{t-1} \right) dt = -2 \int t dt - 2 \int \frac{t}{t-1} dt = -t^2 - 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = -t^2 - 2t - 2 \ln|t-1| + C =$$

$$= \sqrt{1-2x} - 2\sqrt{1-2x} - 2 \ln \left| \sqrt{1-2x} - 1 \right| + C$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

$$\frac{-2dx}{4(\sqrt{1-2x})^3} = \frac{-dx}{2t^3}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t; (x-1) = t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt; \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11} dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 12 \left(\int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt + \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \right) =$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$I = 12 \left(\int \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt + \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \right) =$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$= 12 \int t dt - 12 \int \frac{tdt}{t^2 + 1} + 12 \int dt - 12 \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6 \ln(t^2 + 1) - 12 \arctan t + C =$$

$$= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) -$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} - 12 \arctan \sqrt[3]{x-1} + C.$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{n} ds = \iint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t(u(x))) \Rightarrow dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

В общем случае интегралы типа

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)$$

где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \dots, \frac{\delta}{\gamma}$.

$$f(t)dt = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u'(x)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla F dV$$

Действительно, из подстановки следует, что $x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a}$

$$dx = \frac{-dk t^{k-1} (ct^k - a) - (b - dt^k) c k t^{k-1}}{(ct^k - a)^2} dt,$$

т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t .

При этом и каждая степень дроби

$$\int f(t)dt = f(b) - \int \frac{ax + b}{cx + d} dt$$

выражается через рациональную функцию от t .

$$f(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} ds$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{u}x$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla F dV$$

Пример

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}.$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\sqrt{x+2} = t^6, x = t^6 - 2, dx = 6t^5 dt, t = \sqrt[6]{x+2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 6 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t-1} dt = \\ &= 6 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 3t^2 + 6t + 6 \ln|t-1| + C = \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{x+2} + 6 \cdot \sqrt[6]{x+2} + 6 \ln|\sqrt[6]{x+2} - 1| + C. \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla F dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

О "неберущихся" интегралах

При вычислении производной, наличие формул для производной суммы, разности, произведения, частного и композиции - всех тех операций, при помощи которых элементарные функции образуются из минимального набора - приводит к тому, что **производная любой элементарной функции снова является элементарной функцией**

При нахождении неопределённых интегралов, однако, формул для первообразной произведения, частного и композиции нет. Это приводит к такому положению, что отнюдь **не для любой элементарной подынтегральной функции можно "взять интеграл", то есть выразить некоторую первообразную для подынтегральной функции в виде некоторого выражения, использующего лишь элементарные функции.**

$$\int f(t) dt = \int f(t(u(x))) dt = \int f(t(u(x))) u'(x) dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

Дело в принципиальной невозможности: **никакая из первообразных в случае "неберущегося" интеграла никаким образом не может быть выражена как комбинация элементарных функций**, связанных знаками арифметических действий и знаками композиции.

В науке и её приложениях в технике, экономике и других дисциплинах применяются многие неэлементарные функции; часто их называют **специальными**. К специальным функциям относятся и многие первообразные для элементарных функций, причём часто не столь уж "сложной" структуры.

$$\int_0^t f(t) dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

Интегралы, выражющиеся через такие первообразные, называются (по традиции, берущей начало в 18 веке) **неберущимися**

Определение

Интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

не берётся, если функция $F(x)$ не является элементарной.

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-r)^n$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iiint \nabla \vec{F} dV$$

Некоторые неберущиеся интегралы

(неопределенные интегралы, являющиеся неэлементарными функциями)

$$\int \frac{x dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sin x} \quad (x = \varphi)$$

$$\int \sin x^2 dx$$

$$\int \frac{x dx}{\sin^3 x}$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{x} dx$$

$$\int \cos x^2 dx$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\partial f}{dt} \frac{\partial t}{du} \frac{\partial u}{dx}$$

$$\int \frac{x dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx + y^n = z^n$$

$$\frac{a}{1-t} = \frac{\partial f}{dt} \frac{\partial t}{du} \frac{\partial u}{dx}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^t f(t(u(x))) dx$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{iz} =$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sin(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \cos(x) = - \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt$$

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = 0 \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u'(x)$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример

Неберущимся является интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \Phi(x) + C.$$

Функция $\Phi(x)$, которая выделяется из всего набора первообразных условием $\Phi(0)=0$, называется **функцией Лапласа**. Она широко применяется в теории вероятностей, физике, математической и прикладной статистике и других разделах науки и её приложений.

$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} ds$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u(x)$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

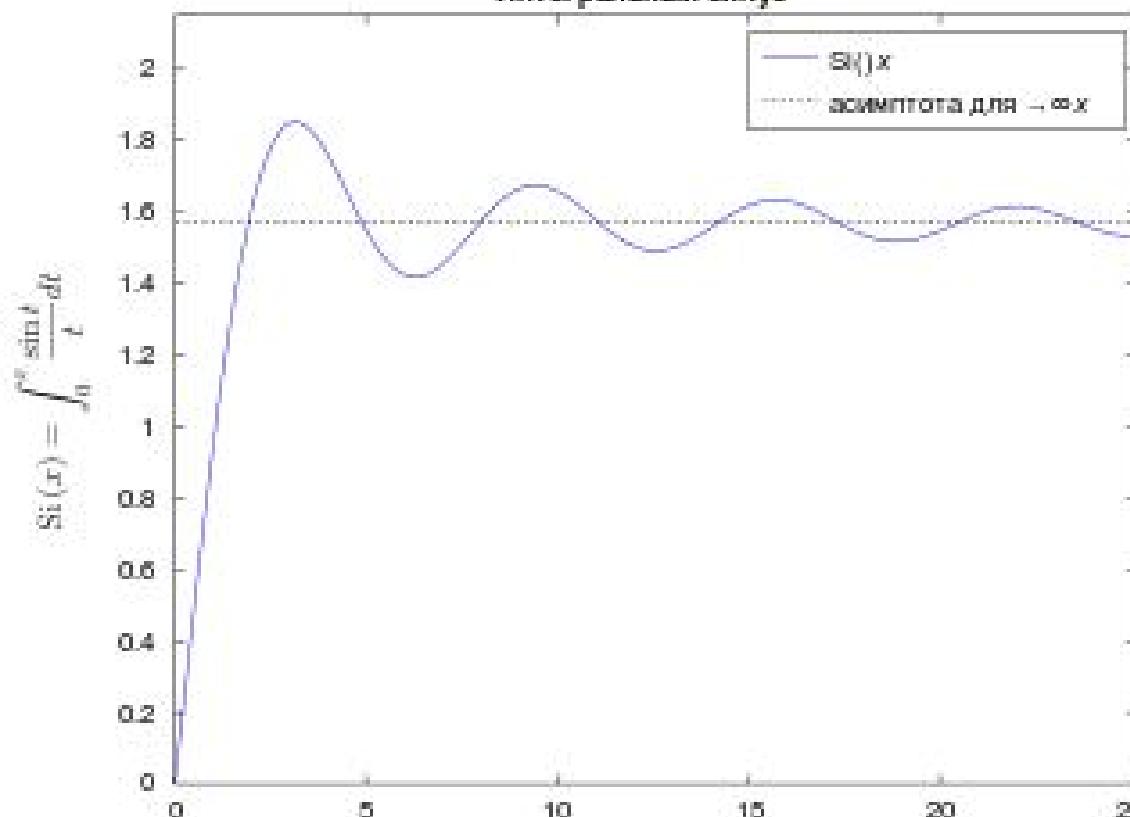
$$e^{i\pi} =$$

$$\int \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$\sim (n) a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

Интегральный синус



$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z)$$

$$z^{\alpha^n}$$

$$\int \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint$$

$$\sim (n) a^{n-k} b^k$$

Пример

Неберущимся также является интеграл

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \text{Si}(x) + C.$$

Доопределим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

полагая её равной 1 при $x=0$. В соответствии с тем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

доопределённая функция будет непрерывна на всей числовой оси.

Среди её первообразных $F(x)$ выделим ту, для которой $F(0)=0$.

Эта неэлементарная функция называется **интегральным синусом** и обозначается $\text{Si}(x)$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{\nabla} u$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$e^{i\pi} =$$

Пример

$$e^{ix} = - \int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) + C.$$

Одна из первообразных - обозначается $Ci(x)$ и называется **интегральным косинусом**

$$\int \frac{e^x}{x} dx = Ei(x) + C$$

Одна из первообразных, $Ei(x)$, - специальная функция, называющаяся **интегральной экспонентой**

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u' v$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint f \nabla F \cdot \vec{n} dV$$

Пример

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Выразим через функцию Лапласа следующий интеграл

$$\int e^{-x^2} dx.$$

Для этого сделаем замену переменной $z = \sqrt{2} x$

$$\int e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt{2}x \\ x^2 = \frac{z^2}{2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dz \end{array} \right| = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \int e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \Phi(z) + C = \sqrt{\pi} \Phi(\sqrt{2}x) + C.$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \vec{u}x$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$e^{i\pi} =$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

Первообразная

$$e^{ix} = -1$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\int e^{-x^2} dx = F(x) + C$$

для которой $F(0)=0$ обозначается

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Функция $\operatorname{erf} x$ называется в теории вероятностей и статистике **функцией ошибок**.

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$