Лекция 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (3)

ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Теорема 8.1 (Ролля)

Если функция $f(x)$
непрерывна на отрезке [a; b],
в каждой точке интервала (a; b) существует конечная производная $f'(x)$
и, кроме того, $f(a) = f(b)$,

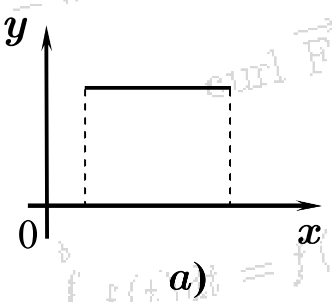
то тогда между точками a и b найдется хотя бы одна точка c $(a < c < b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

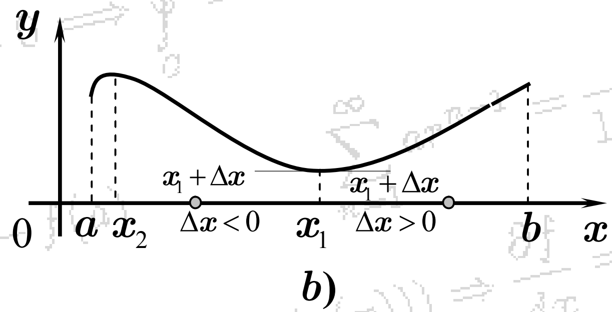
Мишель Ролль (фр. *Michel Rolle*, 21 апреля 1652, Амбер (Франция) — 8 ноября 1719 , Париж) — французский математик

Доказательство.

Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$, следовательно, на этом промежутке она принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M.

Если окажется, что $m = M$, то $f(x)$ постоянна на промежутке $[a; b]$, т.е. $f(x) = \text{const}$, следовательно, $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in [a; b]$, в частности и в некоторой точке $c \in (a; b)$.





Если $m < M$, то существует точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем, если бы оказалось, что точки x_1 и x_2 находятся на концах отрезка $[a; b]$, то мы пришли бы к первому случаю, поэтому хотя бы одна из точек x_1 или x_2 лежит внутри промежутка $[a; b]$.

Пусть для определенности $a < x_1 < b$ и $f(x_1) = m$. Тогда при любом достаточно малом по модулю Δx будет $f(x_1+\Delta x) > f(x_1)$, откуда следует, что

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \text{при } \Delta x > 0;$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \text{при } \Delta x < 0.$$

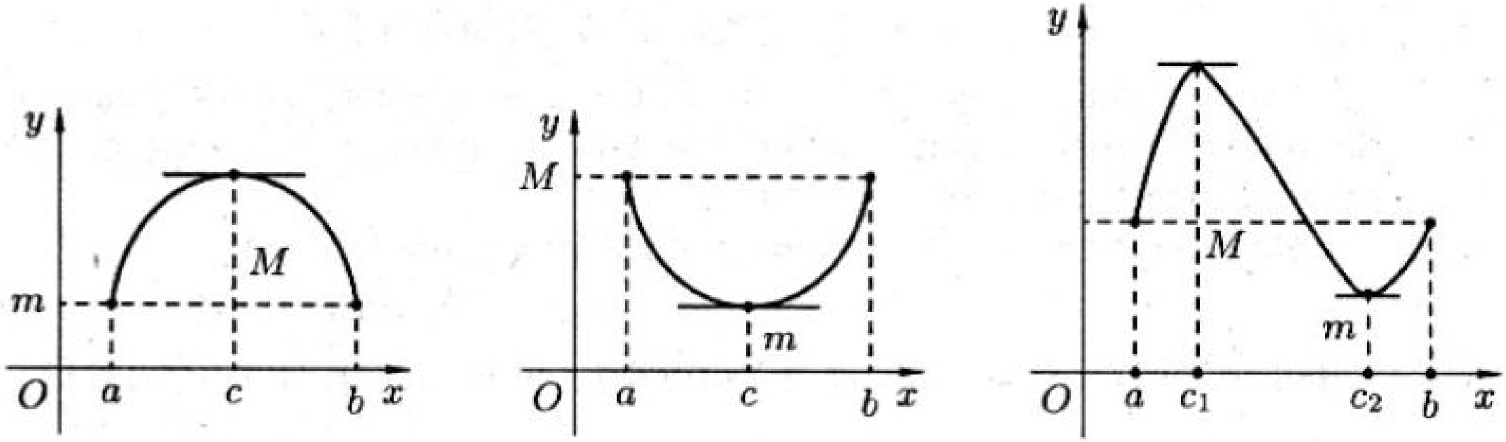
Устремим теперь Δx к нулю. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то это значит, что предел первой дроби должен быть равен пределу второй дроби, а это может быть только 0.

Итак, нашлась точка $c = x_1$ такая, что $f'(c) = 0$.

Для точки x_2, в которой функция достигает наибольшего значения, доказательство аналогично.

Геометрический смысл теоремы Ролля

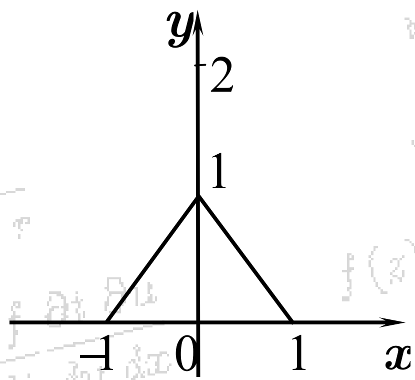
Если выполнены условия теоремы Ролля, то в некоторой точке $x = c$ $f'(c) = 0$, а это означает, что ***касательная к графику функции y = f (x) в точке x = c параллельна оси 0x.***



Замечание

Если хотя бы в одной точке промежутка $[a; b]$ функция не дифференцируема, то производная функции $f(x)$ может в нуль и не обратиться

Например, функция $y = 1 - |x|$ непрерывна на отрезке $[-1; +1]$, дифференцируема в интервале $(-1;+1)$ за исключением точки $x_0 = 0$, причем $f(-1) = f(1) = 0$,
т.е. условие теоремы Ролля нарушено в единственной точке $x_0 = 0$ (в ней функция не дифференцируется).



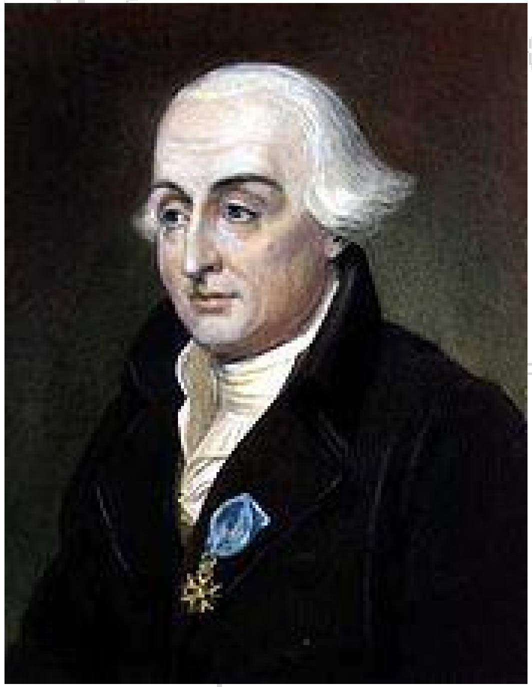
Очевидно, что ни в одной точке графика функции на промежутке $[-1; 1]$ касательная к графику не параллельна оси $0x$.

Теорема 8.2 (Лагранжа)

Если функция y = f (x) непрерывна на отрезке [a; b] и дифференцируема в интервале (a; b), то внутри отрезка [a; b] найдется хотя бы одна точка c (a < c < b) такая, что будет иметь место равенство

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

– формула конечных приращений Лагранжа.



Жозе́ф Луи́ Лагра́нж (фр. *Joseph Louis Lagrange*, итал. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; 25 января1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж) — французский математик, астроном и механикитальянского происхождения. Наряду с Эйлером — крупнейший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала

Доказательство.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - [f(b) - f(a)](x - a).$$

Функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ как сложная функция непрерывных функций; кроме того, она дифференцируема на интервале $(a; b$, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. Следовательно, функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля; значит, найдется точка c, лежащая внутри промежутка $[a; b]$ такая, что $\Phi'(c) = 0$.

$$\Phi'(x) = f'(x) \cdot (b - a) - (f(b) - f(a)).$$

Полагая $x = c$, получим $\Phi'(c) = f'(c) \cdot (b - a) - (f(b) - f(a)) = 0.$

Отсюда

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Формулу конечных приращений Лагранжа можно записать несколько иначе, если положить $b = x + \Delta x$, $a = x$ и обозначить $c = x + \theta \cdot \Delta x$, где θ – некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \theta < 1$. А именно: формула Лагранжа будет иметь вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \qquad (0 < \theta < 1).$$

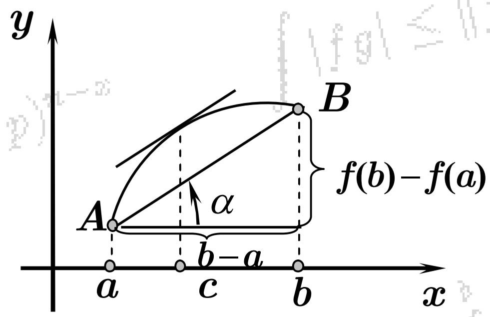
Таким образом,

Приращение дифференцируемой функции на отрезке [a;b] равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Пусть выполнены условия теоремы Лагранжа, тогда справедлива формула конечных приращений Лагранжа.

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$



Пусть точки A и B, лежащие на графике функции, имеют координаты A $(a; f(a))$, B $(b; f(b))$, тогда очевидно, что величина дроби

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

равна тангенсу угла наклона хорды AB к оси $0x$, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

С другой стороны, $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$.
Значит, в точке $x = c$ касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна хорде, стягивающей дугу кривой AB.

В этом и заключается геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое

Теорема 8.3 (Коши)

Если на отрезке [a; b] функции φ (x) и ψ (x) непрерывны и дифференцируемы в каждой точке интервала (a; b), причем ψ′(x) ≠ 0 ни в одной точке этого интервала, то тогда между точками a и b существует такая точка c (a < c < b), что имеет место равенство

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}$$ (формула Коши).

Доказательство.

Прежде всего, заметим, что $\psi(b) \neq \psi(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля нашлась бы точка c такая, что было бы $\psi'(c) = 0$. Введем вспомогательную функцию

$\Phi(x) = [\varphi(x) - \varphi(a)] \cdot [\psi(b) - \psi(a)] - [\varphi(b) - \varphi(a)] \cdot [\psi(x) - \psi(a)]$.

Ясно, что функция Ф (x) определена и непрерывна на промежутке [a; b] как сложная функция непрерывных функций, кроме того, она дифференцируема на интервале (a; b). Заметим, что Ф (a) = Ф (b) = 0, т.е. Ф (x) *удовлетворяет условиям теоремы Ролля.*

Следовательно, найдется точка c такая, что будет $\Phi'(c) = 0$,

$$\Phi'(x) = \varphi'(x) \cdot [\psi(b) - \psi(a)] - \psi'(x) \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)],$$

откуда следует, что

$$\varphi'(c) \cdot [\psi(b) - \psi(a)] - \psi'(c) \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] = 0;$$

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}$$ - формула Коши.

Геометрический смысл теоремы Коши

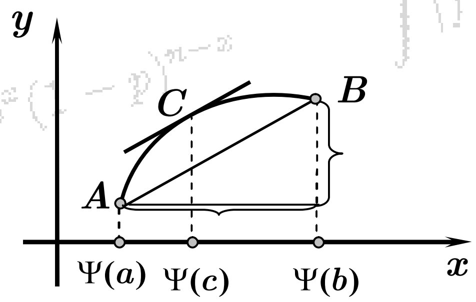
Нетрудно убедиться в том, что геометрический смысл теоремы Коши совпадает с геометрическим смыслом теоремы Лагранжа. Действительно рассмотрим кривую AB заданную параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \psi(t) \\ y &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

причем функции φ (t) и ψ (t) удовлетворяют условиям теоремы Коши.

Рассмотрим график кривой, заданной этими параметрическими уравнениями

Пусть параметр $t\in[a;\, b]$, тогда A (ψ (a), φ (a)), B (ψ (b), φ (a)).



Угловой коэффициент касательной к графику кривой AB в некоторой точке C (ψ (c), φ (c)) равен

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

в силу теоремы Коши он совпадает с угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки A и B. Итак, если выполнены условия теоремы Коши, то на графике кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x=\psi(t) \\ y=\varphi(t) \end{array}\right\}, \quad t\in[a;\, b],$$

найдется хотя бы одна точка C, такая, что касательная к графику этой кривой параллельно хорде, проведенной через точки A и B.

Огюсте́н Луи́ Коши́ (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 21 августа 1789, Париж — 23 мая 1857, Со, Франция) — великий французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий

Правило Лопиталя

Теорема 8.4.

Если функции φ (x) и ψ (x) дифференцируемы в окрестности точки a и,

кроме того, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$, причем в окрестности точки a $\psi'(x)\neq 0$,

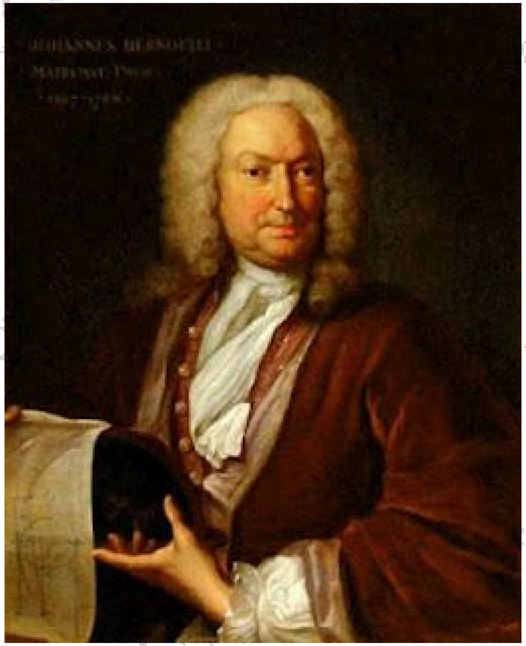
то тогда
$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

при условии, что второй предел существует (здесь a – конечное число, или $a=-\infty$,

или $a=+\infty$, или $a=\infty$)

Гийом Франсуа Лопиталь (фр. *Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital*; 1661 — 1704) — французский математик, автор первого учебника по математическому анализу, маркиз

Способ раскрытия такого рода неопределённостей был опубликован в учебнике «Analyse des Infiniment Petits» 1696 года за авторствомГийома Лопиталя. Метод был сообщён Лопиталю в письме его первооткрывателем Иоганном Бернулли.



Иога́нн Берну́лли (нем. *Johann Bernoulli*, 27 июля 1667, Базель — 1 января 1748, там же) — швейцарский математик, механик, врач и филолог-классицист, самый знаменитый представитель семейства Бернулли, младший брат Якоба Бернулли, отец Даниила Бернулли

Доказательство.

Докажем теорему для случая, когда a конечное число. По условию теоремы функции φ (x) и ψ (x) дифференцируемы в окрестности этой точки, а следовательно и непрерывны в точке a, это означает, что

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)=0, \qquad \lim_{x\to a}\psi(x)=\psi(a)=0$$

Пусть x – точка, принадлежащая окрестности точки a, тогда выполнены условия теоремы Коши и имеет место формула $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$,

где c лежит между a и x. Если $x\to a$, то и $c\to a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\lim_{c\to a}\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Следовательно, $$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Замечание.

Теорема остается в силе и в том случае, когда в точке $x = a$ функции $\varphi\,(x)$ и $\psi\,(x)$ обращаются в бесконечность.

Принимая во внимание доказанную теорему, можно сформулировать следующее правило.

Правило Лопиталя.

Для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

надо **заменить предел отношения двух функций пределом отношения их производных**. Если окажется, что отношение производных имеет конечный предел, то к этому же пределу стремится и отношение данных фукций.

Для раскрытия других неопределенностей $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0}$ и т. п.

эти неопределенности следует путем тождественных преобразований. предварительно преобразовать к неопределенности вида

$$\frac{0}{0} \quad \text{или} \quad \frac{\infty}{\infty},$$

для чего их предварительно иногда приходится прологарифмировать

Если неопределенность не раскрылась после применения правила Лопиталя, это правило можно применить еще раз, но уже к отношению производных

(при условии, что отношение производных $\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ порождает неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}3x)'}{x'}=3$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

Пример 3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_5 x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 5}}{1}=0$$

Пример 4. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}=\frac{1}{2}$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \left(1^{\infty}\right)$

Обозначим $A = (1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} \Rightarrow \ln A = \dfrac{1}{\sin x}\ln(1+3x)$

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\ln A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{1+3x}}{\cos x} = 3$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\ln A = \ln\lim\limits_{x\to 0} A = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} A = e^3$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^3$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{\ln(1-2x)}$$

Гораздо проще решить этот пример на основе применение **эквивалентности**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{\ln(1-2x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2+x)'}{(\ln(1-2x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2x+1}{\frac{1}{(1-2x)}\cdot(1-2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+1}{\frac{-2}{(1-2x)}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(6x^{\to 0}+1)(1-2x^{\to 0})=-\frac{1}{2}$$

После дифференцирования настоятельно рекомендуется избавляться от многоэтажности дроби и проводить максимальные упрощения.

Вычислить предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg3x}{tgx}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg3x}{tgx} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(tg3x)'}{(tgx)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x} = \frac{0}{0} =$$

$$= 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 x)'}{(\cos^2 3x)'} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x\cdot(\cos x)'}{2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos 3x\cdot(-3\sin 3x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot\sin x}{\cos 3x\cdot\sin 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot(\sin x)^{\to 1}}{\cos 3x\cdot(\sin 3x)^{\to -1}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \frac{0}{0} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{(\cos 3x)'} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\to 1}}{(\sin 3x)^{\to -1}} = \frac{1}{3}$$