Лекция 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ(3)

Теорема о неявной функции

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Инвариантность формы дифференциалов функции нескольких переменных

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям и оценке погрешностей

Теорема о неявной функции

Рассмотрим функцию аргумента x, заданную неявно, т.е. функцию $y(x)$, заданную соотношением вида $F(x,y)=0$.

Приведем без доказательства формулировку **теоремы, дающей достаточные условия существования, единственности и дифференцируемости неявно заданной функции $y=y(x)$, определяемой соотношением $F(x,y)=0$.**

Теорема 14.1 (о неявной функции)

Если функция $z = F(x, y)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $F(x, y)$ *определена в окрестности точки* (x_0, y_0), *причем* $F(x, y)$ *и ее частные производные* $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны в указанной окрестности;*

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $\left.\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \neq 0$.

Тогда **существует единственная функция** $y = y(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и обладает следующими свойствами:

1) функция $y = y(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0;

2) $y_0 = y(x_0)$;

3) $F[x, y(x)] \equiv 0$.

Допустим теперь, что некоторая функция $z = F(x, y)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме. Найдем производную неявно заданной функции $y'_x(x)$.

Продифференцируем по x обе части тождества $F[x, y(x)] \equiv 0$, принимая во внимание, правило дифференцирования сложной функции, зависящей от нескольких переменных, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Аналогичное рассмотрение можно провести и для функции $z = z(x, y)$, определяемой соотношением $F(x, y, z) = 0$.

Если функция $z = z(x, y)$ определяется этим соотношением, то $F[x, y, z(x, y)] \equiv 0$. Выполняя частное дифференцирование, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

откуда следует $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z}, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}.$

Пример. Найти производную y'_x функции $y = y(x)$, заданной неявным уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Решение. Заметим, что данное уравнение определяет окружность. Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ почленно по x как сложную функцию: $2x + 2y \cdot y'_x = 0$. Откуда следует $y'_x = -\dfrac{x}{y}$. Ясно, что в точках, где $y = 0$, производная обращается в ∞ (касательная перпендикулярна к оси 0x).

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

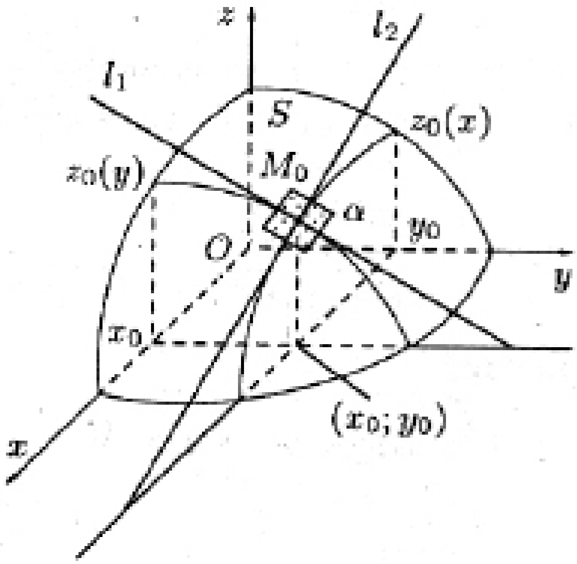
$$F'_x = 2x; \quad F'_y = 2y$$

$$y'_x = -\frac{x}{y}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

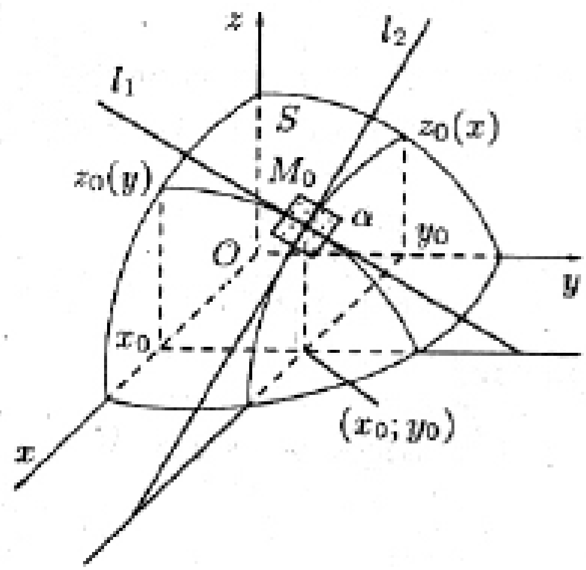
Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ некоторой области D. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z. плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$



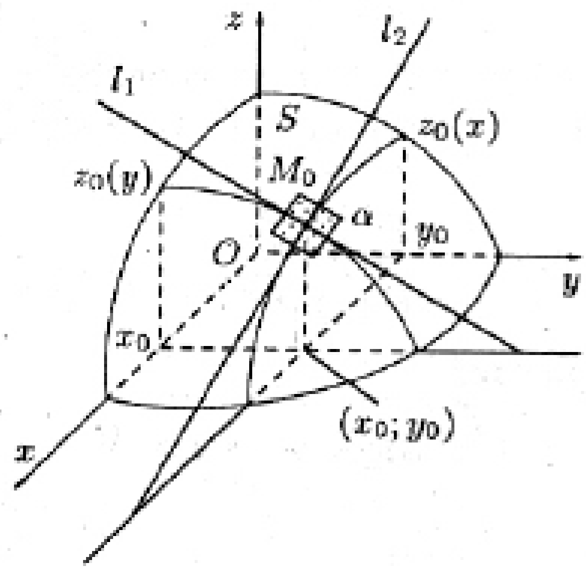
Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x; y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$. при надлежит кривой $z_0(y)$.

В силу дифференцируемости функции z точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке к плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$. может быть проведена касательная l_1.



Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$

Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется ***касательной плоскостью*** к поверхности α точке M_0



Составим ее уравнение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0\ ;z_0)$ может быть записано в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

Или, разделив уравнение на $-C$ и обозначив $\frac{A}{-C}=A_1,\ \frac{B}{-C}=B_1$

$$z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$$

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0;$$
$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0$$

Касательная l_1 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_1 удовлетворяют уравнению

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0)$$

Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно B_1, получим, что

$$B_1 = f'_y(x_0; y_0).$$

Аналогично

$$A_1 = f'_x(x_0; y_0).$$

Подставив значения A_1 и B_1 *в* уравнение, получаем ***уравнение касательной плоскости***:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).}$$

Если поверхность задана уравнением $F(x;y;z) = 0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид (с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции):

$$f'_x(x_0;y_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}, \quad f'_y(x_0;y_0) = -\frac{F'_y(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}$$

примет вид

$$F'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0)\cdot(z-z_0) = 0$$

или

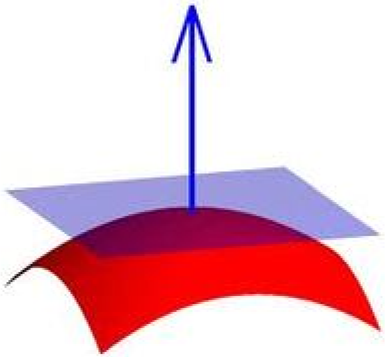
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot(x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot(y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot(z-z_0) = 0$$

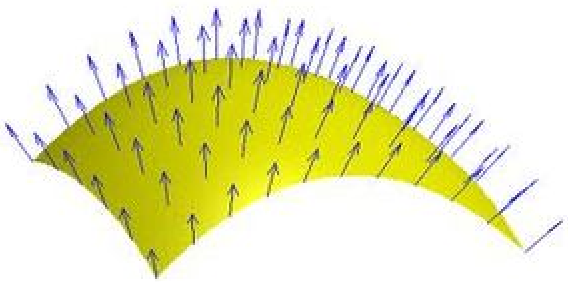
Определение 14.1

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее ***нормалью.***

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot(z-z_0)=0$$

$$\vec{N}=\vec{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$





Принимая за направляющий вектор прямой, перпендикулярной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, вектор $\vec{N} = \vec{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, получим канонические уравнения этой нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$для случая, когда поверхность задана уравнением $F(x;y;z) = 0$,

$$\frac{(x - x_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{(y - y_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{(z - z_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

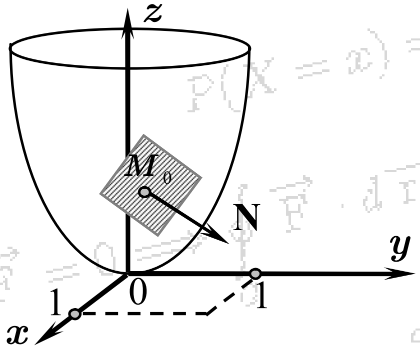
В случае уравнения $z = f(\mathrm{x}; y)$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.}$$

Замечание

Мы предполагали, что функция $F(x,y,z)$ дифференцируема, и ни в одной точке поверхности S все три частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ в ноль не обращаются, т.е. на поверхности S нет особых точек.

Пример. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке $M_0(1,1,2)$, если уравнение поверхностей $z = x^2 + y^2$



Решение. Запишем уравнение поверхности (это параболоид вращения) так: $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$. Найдем $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

Следовательно в точке $M_0(1,1,2)$ нормаль к поверхности $\vec{N} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Тогда касательная плоскость имеет уравнение $2(x-1) + 2(y-1) - 1(z-2) = 0$,

т.е. $2x + 2y - z - 2 = 0$.

Соответственно, прямая, на которой лежит нормальный вектор $\vec{N}$, такова:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Определение 14.2. ***Дифференциалом функции*** $z=f(x,y)$ *называется линейная относительно* Δx *и* Δy *часть полного приращения дифференцируемой функции, т.е.*

$$dz \overset{def}{=} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\cdot\Delta y$$

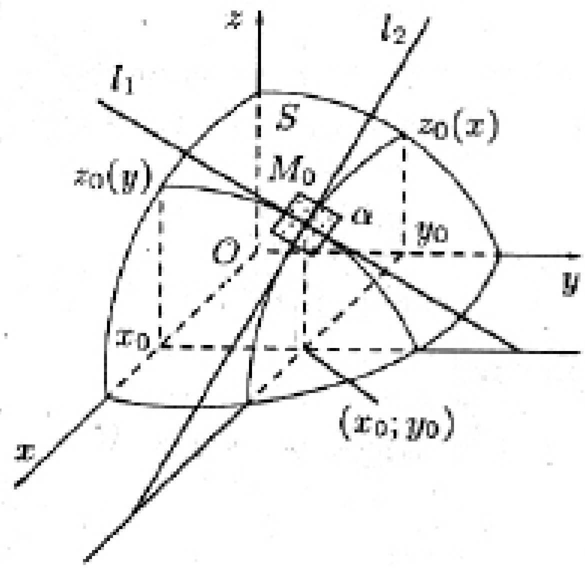
Заметим, что если x и y – независимые переменные, то дифференциалы этих переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. Тогда можно уточнить форму дифференциала функции, зависящей от двух независимых переменных:

$$dz \overset{def}{=} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\cdot dy$$

Запишем уравнение касательной плоскости в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z\left(x, y\right)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z\left(x, y\right)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Отсюда очевиден геометрический смысл полного дифференциала



Пример. Найти полный дифференциал функции $u = \sqrt{x^2 + x \cdot y + x \cdot y \cdot z^2}$.

Решение. Очевидно, что $du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz$, при этом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x + y + yz^2}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x + xz^2}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}.$$

Следовательно, $du = \frac{\left(2x + y + yz^2\right) \cdot dx + \left(x + xz^2\right) \cdot dy + 2xyz \cdot dz}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}$.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим дифференцируемую функцию $z = z(x, y)$ и запишем ее полный дифференциал

$$dz(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \cdot dy\,.$$

Покажем, что эта форма дифференциала обладает свойством инвариантности и в том случае, когда переменные x и y не независимые, а являются функциями некоторого аргумента t, т.е. $z = z[x(t), y(t)]$.

Действительно:

$$dz = z'_t \cdot dt = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right] \cdot dt = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

т.е. $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Теперь предположим, что x и y зависят не от одного, а от двух независимых аргументов, т.е. $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$.

Тогда $z = z[x(s,t), y(s,t)]$, причем функции $x(s,t)$ и $y(s,t)$ предполагаются дифференцируемыми по переменным s и t. Очевидно, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \cdot ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot dt =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot dt \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt \right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot dt \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Таким образом, окончательно

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\,,$$

т.е. форма полного дифференциала сохраняется в том случае, если x и y зависят в свою очередь от двух независимых переменных s и t.

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Рассмотрим некоторую функцию $z = f(x, y)$, определенную в области D и дифференцируемую в точке $M(x, y) \in D$.

Тогда ее полное приращение можно записать так:

$\Delta z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т.е. $\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$.

В приближенных вычислениях иногда заменяют полное приращение функции ее дифференциалом, т.е. полагают

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y$$

Замечание

Погрешность же таких вычислений можно оценить, оценив отброшенные слагаемые $\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$. Делается это с помощью формулы Тейлора для функции нескольких переменных.

Пример. Вычислить приближенное значение $\sqrt{(1{,}01)^2+(2{,}99)^2+6}$, заменив полное приращение функции $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+6}$ в точке $M(1,3)$ ее дифференциалом.

Решение. Итак, примем во внимание, что

$$z(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx z(x,y)+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y,$$

получим

$$\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2+6}\approx\sqrt{x^2+y^2+6}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+6}}\cdot\Delta x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+6}}\cdot\Delta y$$

Положим здесь $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = -0{,}01$, тогда будет

$$\sqrt{(1{,}01)^2 + (2{,}99)^2 + 6} \approx \sqrt{1+9+6} + \frac{0{,}01}{\sqrt{1+9+6}} + \frac{3\cdot(-0{,}01)}{\sqrt{1+9+6}} = 4 + \frac{0{,}01}{4} - \frac{0{,}03}{4} =$$

$$= 4 - 0{,}005 = 3{,}995$$

Оценка погрешностей с помощью полного дифференциала

При выполнении различных экспериментов приходится снимать показания с приборов, а затем вычислять интересующую нас физическую величину по некоторой формуле.

Естественно, что при этом экспериментатора интересуют погрешности таких измерений. Рассмотрение проведем для случая функции, зависящей от двух независимых переменных, т.е. $z = f(x, y)$.

Пусть мы измеряем величины x и y с погрешностями Δx и Δy. Погрешности эти нам не известны, но мы можем оценить их сверху: $|\Delta x| \le \Delta_1$, $|\Delta y| \le \Delta_2$.

Здесь положительные величины Δ_1 и Δ_2 дают нам абсолютные погрешности измерений величин x и y.

Допустим, что нам надо оценить абсолютную погрешность вычисления величины $z = f(x, y)$.

Очевидно, что ошибка вычисления величины z :

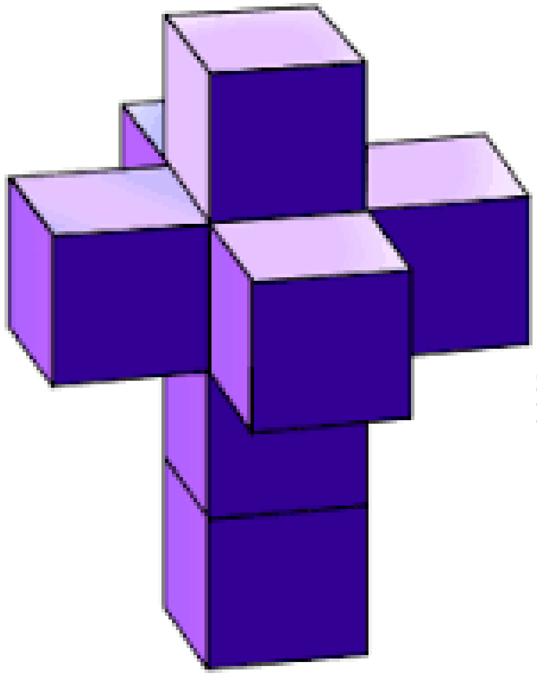
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если приращения Δx и Δy малы по абсолютной величине, то, заменяя полное приращение функции ее дифференциалом, получим

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y .$$

Отсюда следует, что абсолютную погрешность измерений можно оценить так:

$$|\Delta z| \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y\right| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\cdot\Delta_1+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\cdot\Delta_2$$



Развертка четырехмерного куба

С.Дали. Распятие