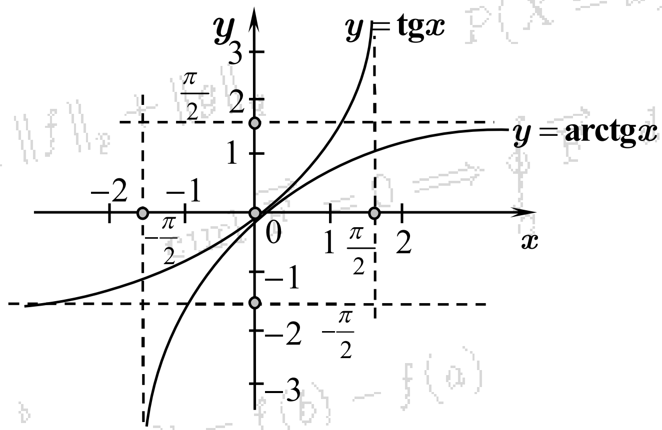
Лекция 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (2)

Дифференцирование обратной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = x(y)$ взаимно обратные функции



Теорема 7.1.

Если функция $y = y(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x обратную функцию $x = x(y)$ и функция $y(x)$ дифференцируема в точке x, тогда обратная функция $x = x(y)$ также дифференцируема в соответствующей точке $y = y(x)$ и имеет место соотношение

$$y'_x(x) = \frac{1}{x'_y(y)}$$

Доказательство.

Функция $y = y(x)$ по условию теоремы дифференцируема в точке x, значит в этой точке она и непрерывна, т.е. если функция, например, возрастает (убывает) и $\Delta x \neq 0$, то и $\Delta y \neq 0$, причем $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Тогда $$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Пусть теперь $\Delta y \to 0$, тогда в силу непрерывности и $\Delta x \to 0$, следовательно,

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Итак, $$y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Дифференцирование обратных тригонометрических функций

Доказанная теорема о дифференцировании обратной функции позволяет легко получить формулы для вычисления производных от обратных тригонометрических функций.

Рассмотрим функцию y = arcsin$x$. Она определена и строго возрастает на интервале (-1; 1).

Она служит обратной для функции x = sin$y$, определенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Следовательно $$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Итак, $$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1;+1)$$

Аналогично $$\left(\boldsymbol{\arccos x}\right)'_{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}} \quad \forall \boldsymbol{x} \in (-1;\ +1)$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на интервале (-∞; +∞) и служит обратной для функции $y = \operatorname{tg} x$, определенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, значит

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)'_x = \frac{1}{\left(\operatorname{tg} y\right)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Итак, $$\left(\operatorname{arctg} x\right)'_x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \left(-\infty; +\infty\right)$$

Аналогично можно доказать, что $$\left(\operatorname{arcctg} x\right)'_x = -\frac{1}{\left(1+x^2\right)}$$

Пример **.** Найти производную функции $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

Решение. $$y'_x = \left(e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\right)'_x = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Пример 14. Найти производную функции $y = \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arcctg} x}$

Решение.

$$y'_x = \left(\frac{\arcsin x}{\operatorname{arcctg} x}\right)'_x = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{arcctg} x - \arcsin x \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{(\operatorname{arcctg} x)^2}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $c'=0$

2. $(x^a)' = ax^{a-1} \quad (x>0)$

3. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0,\, a\neq 1)$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0,\, a\neq 1)$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)'_x = -\sin x$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$(cy(x))' = c \cdot y'$$

$$[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x)$$

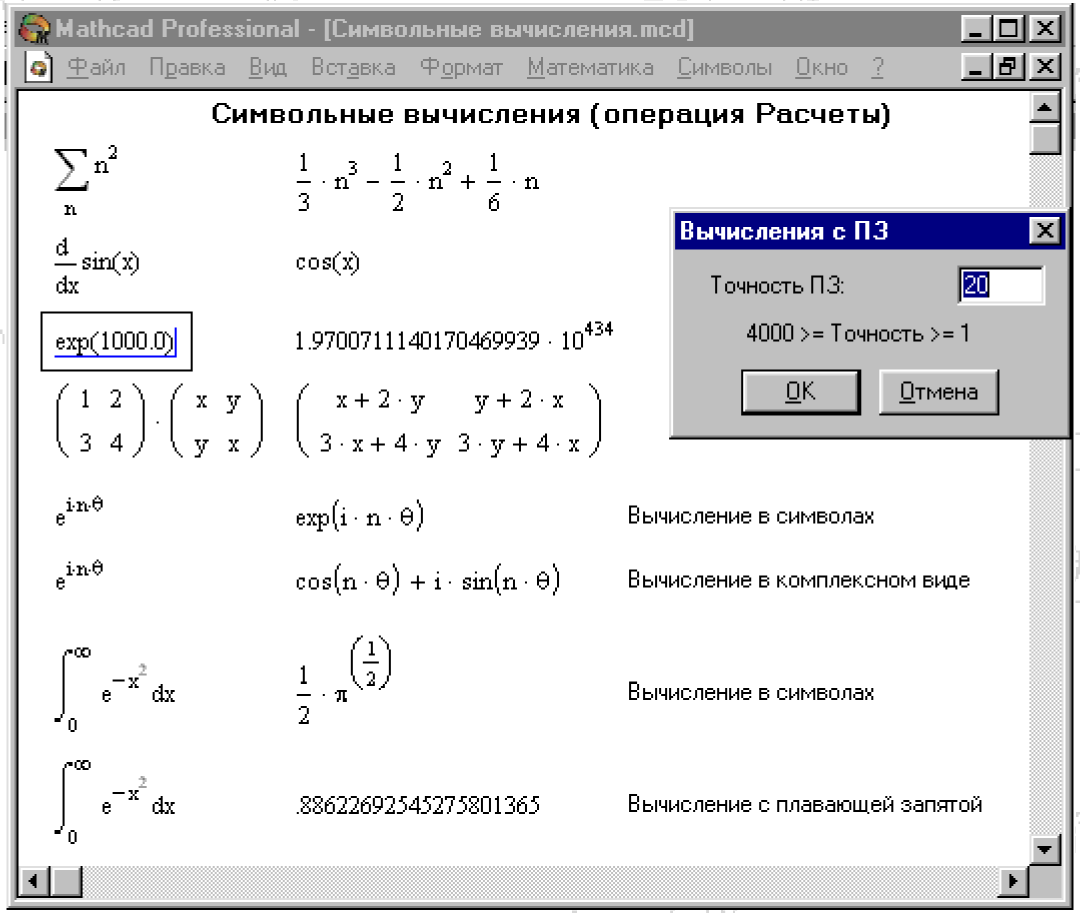
$$[U(x) \cdot V(x)]' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$$

$$\left[\frac{U(x)}{V(x)}\right]' = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V^2(x)}$$

$$\{f[U(x)]\}'_x = f'_U \cdot U'_x$$ (правило цепочки)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Символьные вычисления в системе Mathcad



Mathcad Professional - [пределы.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Вычисление предела в точке x

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to \infty} 1 - \exp(-x) \to 1$$

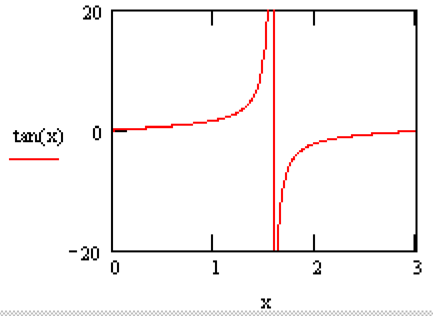
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2}{d \cdot x^2 + e \cdot x \cdot y + f \cdot y^2} \to \frac{c}{f}$$

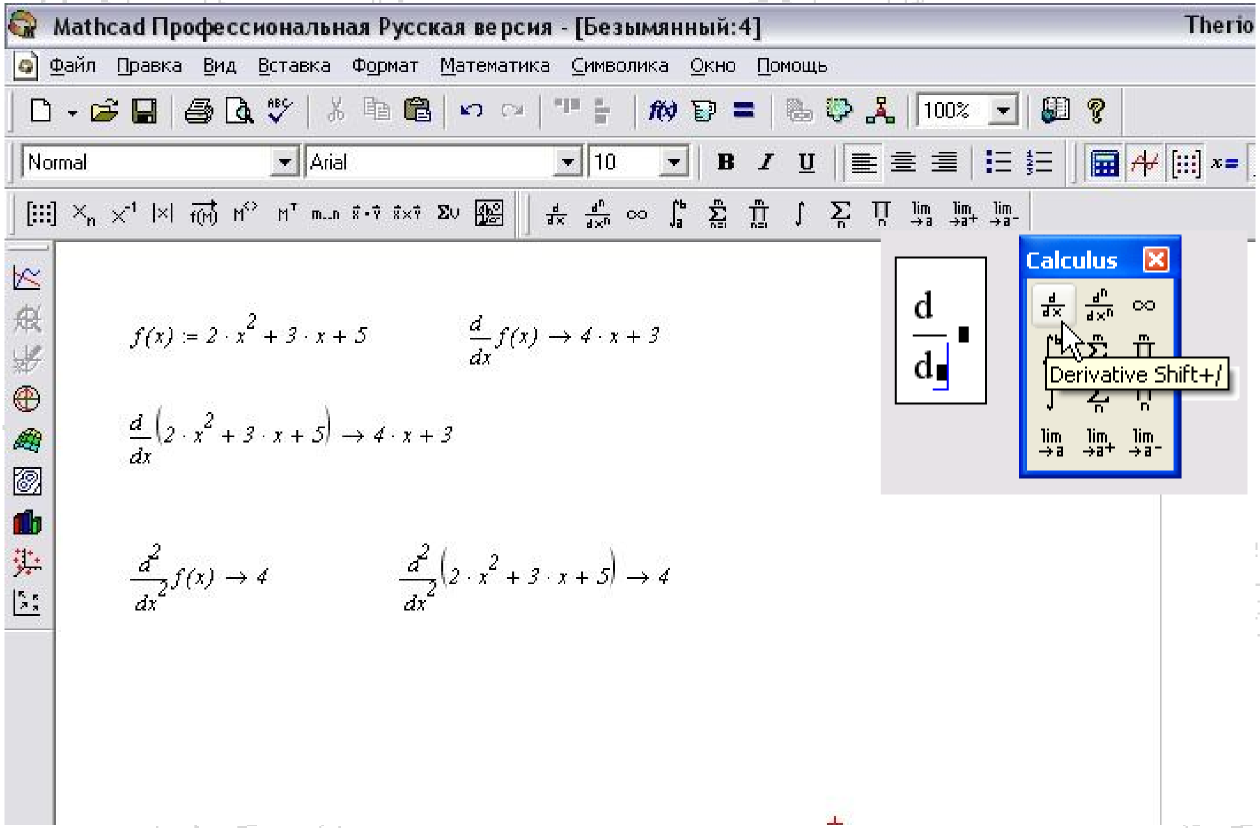
Вычисление пределов справа и слева от точки x

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) \to -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) \to \infty \qquad x := 0, 0.01 .. 3$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) \to \text{undefined}$$

Последний пример и график функции tan(x) показывают, что для этой функции при $x \to \pi/2$ предела в этой точке нет, но есть пределы справа и слева от нее.




Mathcad Профессиональная Русская версия - [Безымянный:4]
Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символика Окно Помощь
Normal
Arial
10
100%
$f(x) := 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5$
$\frac{d}{dx} f(x) \to 4 \cdot x + 3$
$\frac{d}{dx}\left(2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5\right) \to 4 \cdot x + 3$
$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \to 4$
$\frac{d^2}{dx^2}\left(2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5\right) \to 4$
Calculus
Derivative Shift+/

Логарифмическое дифференцирование

Для нахождения производных некоторых функций, в том числе так называемых сложно-показательных (степенно-показательных), т.е. функций вида $[U(x)]^{V(x)}$, полезно применять прием, который заключается в том, что функцию, которую нужно продифференцировать, предварительно логарифмируют (предполагается при этом, что логарифм от этой функции существует).

Итак, пусть $y(x) = [U(x)]^{V(x)}$, тогда $\ln(y(x)) = V(x) \cdot \ln(U(x))$. Продифференцируем левую и правую часть этого равенства по x:

$$\frac{1}{y} \cdot y_x'(x) = V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{1}{U(x)} \cdot U'(x) \Rightarrow$$

$$y_x'(x) = [U(x)]^{V(x)} \left(V'(x) \ln U(x) + \frac{U'(x) \cdot V(x)}{U(x)} \right)$$

$$(U^V)' = U^V \cdot \ln U \cdot V' + V \cdot U^{V-1} \cdot U'$$

Правило: производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии U= const, и производной степенной функции, при условии V = const.

Пример. Найти производную функции $y = x^x \quad (x > 0, x \neq 1)$

Решение. $$\ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow \left(x^x\right)'_x = x^x (\ln x + 1)$$

Дифференцирование неявно заданных функций

Под *неявным заданием* функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x;y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x;y) = 0$. то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно у:

достаточно продифференцировать это уравнение по х, рассматривая при этом у как функцию х, и полученное затем уравнение разрешить относительно у'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример.

Найти производную функции у, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение:

Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

Отсюда следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т. е.

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$x = z(t),$

$y = y(t).$

Найдем производную y'_x

считая, что функции x, y имеют производные по t и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \left(x'(t) \neq 0\right)$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x

от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример .

Вычислить y'_x для функции y от x, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

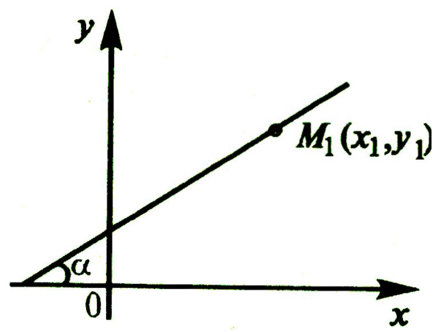
Напомним, что рассматриваемая кривая называется циклоидой.

Решение. Ясно, что $$y'_x = \frac{\left[a(1-\cos t)\right]'_t}{\left[a(t-\sin t)\right]'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi)$$

Уравнение касательной и нормали к кривой

Уравнение прямой

Пусть прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1)$ и образует с осью Ox угол α отличный от $\pi/2$.
Введем угловой коэффициент прямой $k = \text{tg}\,\alpha$



$$\forall x \quad \frac{x-x_1}{y-y_1} = tg\alpha = k$$

Отсюда, уравнение искомой прямой

$y-y_1=k(x-x_1)$

Вспоминая *геометрический смысл производной:*
производная $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции, который в свою очередь равен *угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0,*

Тогда ***уравнение касательной*** к кривой $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Пример. Составить уравнение касательной к кривой $y = 2x^2-x+5$ при $x = -0,5$.

Решение. Найдем производную в точке $x = -0,5$
$y' = 4x-1$, $y'(-0,5) = -3$.
Уравнение касательной имеет вид:

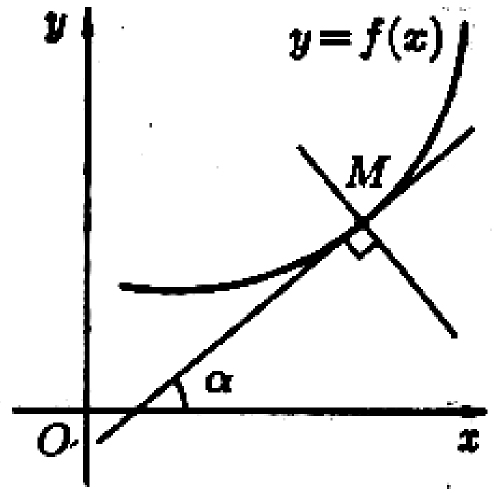
$y = 6-3(x+0,5)$ *или* $y = -3x+4,5$.

Определение 7.1.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью*** *к* кривой.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_н = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$



Поэтому ***уравнение нормали*** имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Производные высших порядков

Производная $f\,'(x)$ функции $y = f\,(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $(a;\, b)$, представляет собой функцию, также определенную на интервале $(a;\, b)$. Если эта функция $f\,'(x)$ сама является дифференцируемой в некоторой точке $x \in (a;\, b)$, то ее производную называют **второй производной** (или **производной второго порядка**) функции $y = f\,(x)$ и обозначают $f\,''(x)$, или $f^{(2)}(x)$. После того, как введено понятие второй производной, можно последовательно ввести понятие третьей производной, затем четвертой и т.д.

Таким образом, понятие n-ой производной вводится индуктивно, при переходе от первой производной к последующим из рекуррентного соотношения
$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную *n-го* порядка, называют ***n* раз дифференцируемой** на этом множестве.

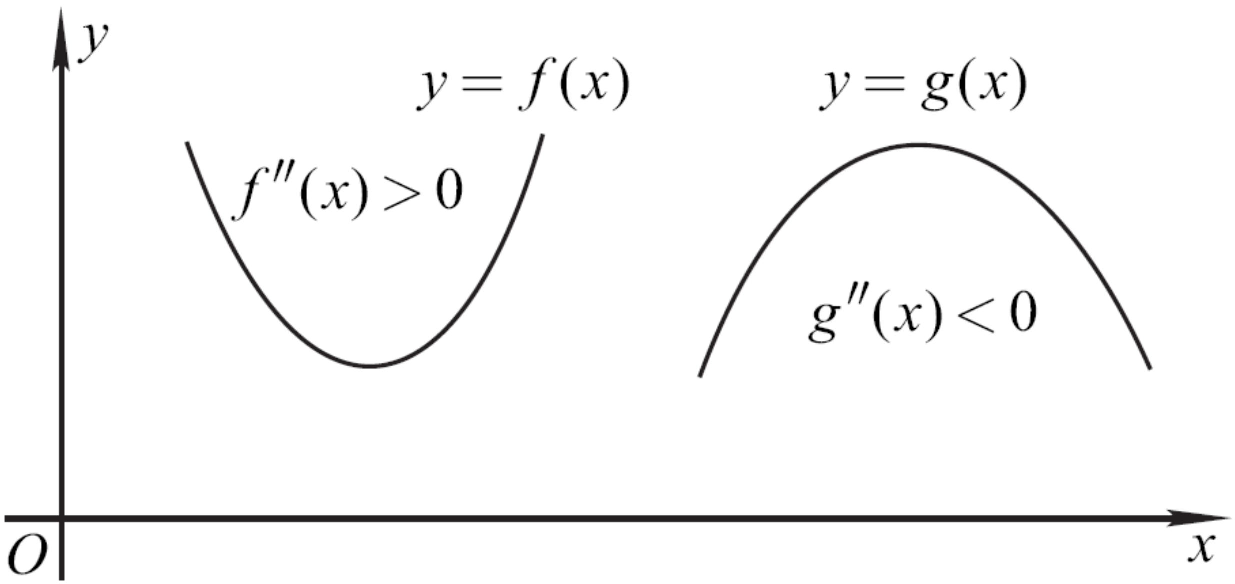
Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S' равна скорости точки в данный момент времени: $S' = V$.

Несложно показать, что ***вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки***.

Геометрический смысл второй производной.

Позже будет установлено, что знак второй производной определяет направление выпуклости графика функции y = f(x)



Пример .

Найти $y'''(x)$, если $y(x) = x \cdot e^x$

Решение.

$$y'_x = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$$

$$y''_{xx} = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

$$y'''_{xxx} = e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x$$

Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x;y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную).

Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'.

Подставляя уже найденное значение y'
в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример. Найти $y''(x)$, если $x^2+y^2=1$

Решение.

Дифференцируем уравнение $x^2+y^2-1=0$ по x: $2x+2y\cdot y'=0$. Отсюда $y'=-\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y''=-\frac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}$, т. е. $y''=-\frac{y-x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=$ $=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}$ (так как $x^2+y^2=1$).

Производные высших порядков функций, заданных параметрически.

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы по переменной t на множестве, где эти функции определены. Тогда

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \left(x'(t) \neq 0\right)$$

Вычисленная производная является функцией аргумента t, т.е. $y'_x = y'_x(t)$

Тогда можно ставить вопрос об отыскании второй производной y''_{xx}

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$$

Пример .

Вычислить y'_x , y''_{xx}

для функции y от x, заданной параметрически: $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty.$

Решение.

$$y'_x = \frac{[a(1-\cos t)]'_t}{[a(t-\sin t)]'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi)$$

Отсюда

$$y''_{xx} = \frac{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)'_t}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$$

Дифференциал функции, его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. приращение этой функции в точке x может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых:

первое слагаемое является линейной относительно Δx частью приращения функции. Это слагаемое является бесконечно малой того же порядка малости, что и Δx;

второе слагаемое $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ представляет собой бесконечно малую более высокого порядка малости, чем Δx, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

Первое слагаемое, т.е. выражение $f'(x)\Delta x$, называется также ***главной частью*** приращения дифференцируемой функции.

Определение 7.2.

Линейная относительно Δx часть приращения дифференцируемой функции y = f (x) называется **дифференциалом этой функции** и обозначается *dy*, т.е.

$$\boldsymbol{dy \overset{def}{=} y'_x \cdot \Delta x}$$

Заметим, что дифференциал данной функции *dy* зависит от того, какая точка закреплена, т.е. он зависит от *x* и, кроме того, он является функцией приращения независимой переменной Δ*x*.

Если мы будем искать дифференциал функции *y* = *x,* то ясно, что

$$\boldsymbol{dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x}$$

т.е. **дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением**. Следовательно, дифференциал можно записать так:

$$dy = y'_x \cdot dx$$

Отсюда следует обозначение производной:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}$$ (обозначение Лейбница).

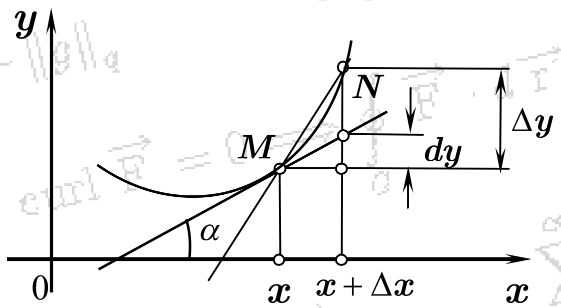
Поскольку дифференциал функции пропорционален ее производной, то для дифференциала справедливы те же правила вычисления, что и для производной.

Например, если $y = \frac{U(x)}{V(x)}$

и функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы в точке x, то,

$$dy = \frac{V(x)dU - U(x)dV}{V^2(x)}$$

Дифференциал функции dy в точке x, вообще говоря, не равен приращению Δy в этой точке.



Замена приращения функции ее дифференциалом означает замену участка графика функции на промежутке [x, x + Δx] участком касательной к графику функции, проведенной через точку M(x, y)

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

В этом и состоит **геометрический смысл дифференциала.**

Физический смысл дифференциала.

Если производная позволяет оценить скорость изменения некоторой величины, то

$$ds = f'(t_1)dt$$

равен расстоянию, которое прошла бы точка за Δt ,
если бы двигалась равномерно со скоростью,
равной мгновенной скорости момент t_0 .

Основные свойства дифференциала легко получить, используя связь дифференциала и производной функции $dy = f'(x)dx$ и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y = c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy = c'\,dx = 0 \bullet dx = 0$.

Инвариантность формы первого дифференциала

Итак, если x – независимая переменная, а $y = f(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$dy = y'_x \cdot dx$$

Покажем, что если x является функцией другой независимой переменной, то дифференциал **сохраняет свою форму.**

Пусть $x = x(t)$ – дифференцируемая функция переменной t.

Следовательно, $y = y[x(t)]$ – сложная функция переменной t, а тогда

$$dy = y'_t \cdot dt = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx \qquad \text{т.е.} \qquad dy = y'_x dx$$

Такое свойство первого дифференциала функции $y = f(x)$ называется свойством **инвариантности формы** первого дифференциала.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Приращение Δy функции в точке x может быть представлено в виде

$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отбрасывая бесконечно малую $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx , получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Пример

Вычислить $\ln 1{,}2$.

Решение.

Будем пользоваться формулой $\Delta y \approx dy = y'(x_0)dx$.

$y(x) = \ln x$

$x_0 = 1$, $\Delta x = dx = 0{,}2$,

$\Delta y = y(x) - y(x_0) \rightarrow \ln 1{,}2 \approx y'(1) \cdot 0{,}2$;

$y(x) = \ln x \rightarrow y'(x) = 1/x$. Таким образом, $y'(x_0) = 1$.

Подставляя все полученные значения в формулу $\Delta y \approx dy = y'(x_0)dx$, получаем $\ln 1{,}2 \approx 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$;

Ответ: 0,2.

Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность их формы

Если $y = f(x)$ дифференцируема, то $dy = f'(x) \cdot dx$.

Пусть x – независимая переменная, тогда dx от x не зависит и при дальнейшем дифференцировании выносится за знак производной как постоянная.

Учитывая это, мы можем рассматривать dy, как функцию от x; если функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то можно найти дифференциал от dy; он называется **дифференциалом второго порядка** первоначальной функции $f(x)$ и обозначается d^2y или $d^2f(x)$.

Предположив существование третьей производной $f'''(x)$, придем к дифференциалу третьего порядка:

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = \left(f''(x) \cdot dx^2\right)'_x \cdot dx = f'''(x) \cdot dx^3$$

Предположив, что функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема, последовательно, по индукции, придем к понятию дифференциала n-го порядка: $d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$.
Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Обладают ли дифференциалы высших порядков свойством инвариантности?

Для дифференциала первого порядка $dy = f'(x) \cdot dx$, где x – независимая переменная, и форма дифференциала сохраняется для случая, когда x – функция какого-то другого аргумента.

Рассмотрим дифференциал второго порядка.
Пусть $y = f(x)$ и, в свою очередь, $x = x(t)$, причем функции $f(x)$ и $x(t)$ дифференцируемы дважды.

Тогда

$$d^2y = d(dy) = d\left(y_t^{'} \cdot dt\right) = y_{tt}^{''}dt^2 = \left(y_x^{'} \cdot x_t^{'}\right)_t^{'} \cdot dt^2 =$$

$$= \left[y_{xx}^{''} \cdot \left(x_t^{'}\right)^2 + y_x^{'} \cdot x_{tt}^{''}\right] \cdot dt^2 = y_{xx}^{''}dx^2 + y_x^{'} \cdot d^2x \Rightarrow y_{tt}^{''}dt^2 \neq y_{xx}^{''}dx^2$$

т.е. форма второго дифференциала свойством инвариантности не обладает точно так же, как и не обладает свойством инвариантности и форма дифференциала любого порядка выше первого.