Лекция 12

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Области в n-мерном пространстве

Понятие функции нескольких переменных

Линии уровня

Предел функции нескольких переменных

Непрерывность функции нескольких переменных

Основные теоремы о непрерывных функциях

Функции нескольких переменных. Основные понятия

Рассмотрим множество различных систем n упорядоченных вещественных чисел вида $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые мы назовем n – мерным пространством R^n а каждую такую систему чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем называть точкой этого пространства и будем обозначать ее M $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Числа $x_1, x_2 \dots x_n$ называются координатами точки M. Точку 0 (0,0,…,0) будем называть нулевой точкой пространства

Рассмотрим две различные точки $M_1 \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $M_2 \ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Величина $\quad \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$

называется расстоянием между точками M_1 и M_2.

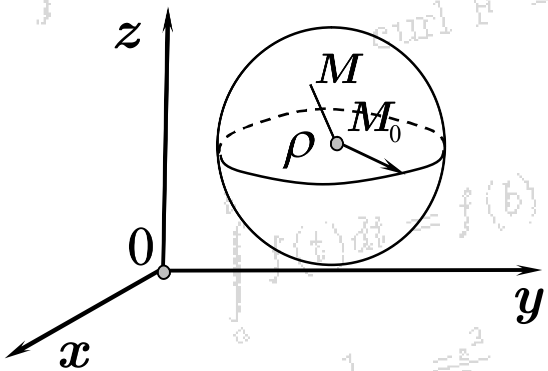
Рассмотрим некоторую n – мерную фиксированную точку $M_0 \ (x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$

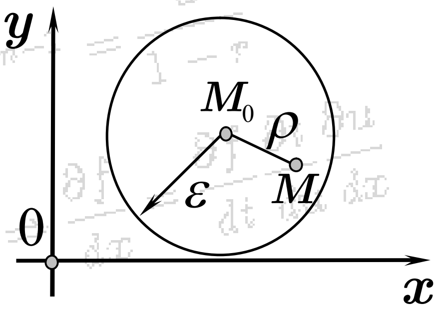
Определение 12.1

Множество точек, удаленных от точки M_0 менее, чем на ε, где $\varepsilon > 0$

называется ε – **окрестностью** точки M_0 и обозначается $U_\varepsilon(M_0)$ или $R_\varepsilon(M_0)$

В частности, в трехмерном декартовом пространстве $0xyz$ ε –окрестность точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ представляет собою множество точек, лежащих внутри шара радиуса ε с центром в точке M_0, а в двухмерном – ε –окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ – есть множество точек, лежащих внутри круга радиуса ε с центром в точке M_0.





Таким образом, $\left(M \in U(M_0,\varepsilon)_n\right) \Leftrightarrow \left(\rho(M_0,M) < \varepsilon\right)$

или $\left(M \in U(M_0,\varepsilon)\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^0\right)^2 < \varepsilon^2\right)$

При $n=1$ $\left(x \in U(x_0,\varepsilon)\right) \Leftrightarrow \left(|x - x_0|\right) < \varepsilon$

при $n=2$ $\left(x,y\right) \in U\left((x_0,y_0),\varepsilon\right) \Leftrightarrow \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\right)$

Введем понятие **области n–мерного пространства.**

Определения дадим для $n=2$

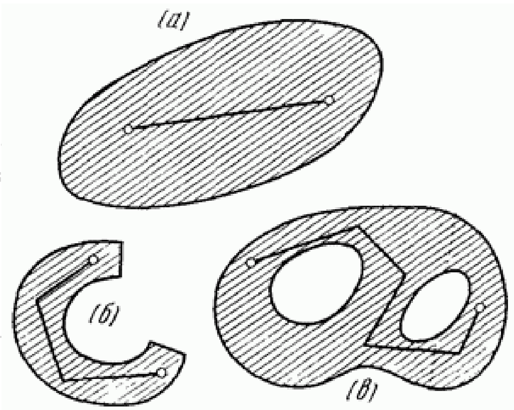
Однако их можно обобщить и для $n>2$

Определение 12.2 *Множество точек* $M(x,y)$*, обладающее свойствами* ***открытости и связности****, будем называть* ***областью****.*

При этом:

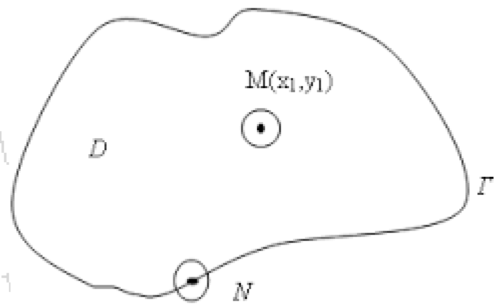
1. Свойство ***открытости*** *означает, что любая точка, принадлежащая области, принадлежит ей вместе с некоторой своей* ε *– окрестностью.*

2. Свойство ***связности*** *означает, что любые две точки, принадлежащие области, можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек, целиком принадлежащих области.*



Примером области может служить ε–окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$

Определение 12.3. *Граничной точкой области* *называется точка области, ей не принадлежащая, но такая, что любая ее ε–окрестность содержит, как точки, принадлежащие области, так и точки, ей не принадлежащие.*



Определение 12.4. *Множество всех граничных точек области называется* ***границей этой области****.*

Определение 12.5. *Замкнутой областью* *называется множество точек, которое получается в результате присоединения к открытой области D всей ее границы.*

Определение 12.6. *Область называется ограниченной**, если ее можно поместить внутрь некоторого круга(шара) конечного радиуса R.*

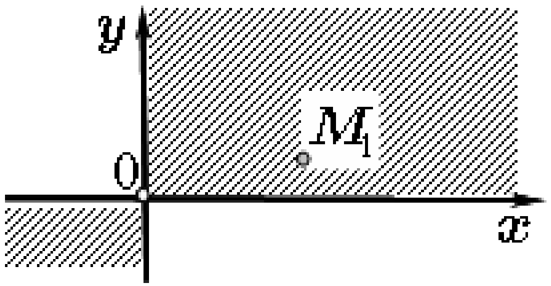
Пример. Рассмотрим множество точек $M(x, y)$, для которых

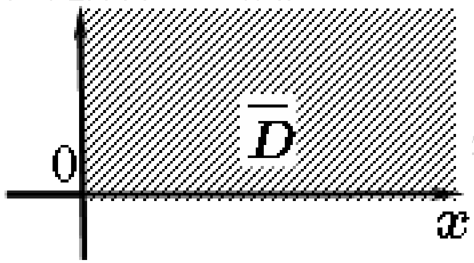
а) $x \cdot y > 0$ б) $x \geq 0, y \geq 0$

Являются ли эти множества областью?

а) Множество $x \cdot y > 0$ областью не является, так как в точке O(0,0) нарушается условие связности

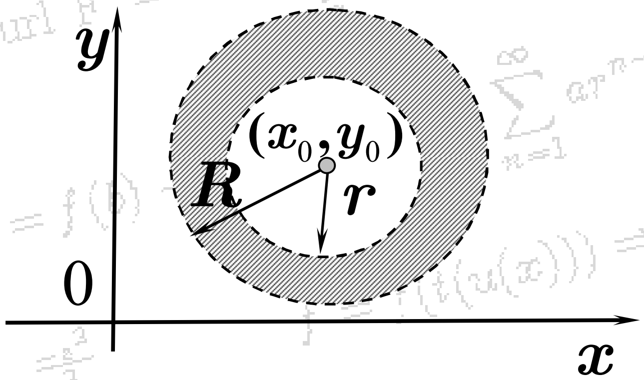
б) множество $x \geq 0, y \geq 0$ представляет собою неограниченную замкнутую область $\bar{D}$





Определение 12.7.

Число не связанных друг с другом частей, из которых состоит вся граница области, называется порядком связности области, например, область, ограниченная окружностями радиусов r и R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ представляет собой двухсвязную область



Понятие функции нескольких переменных

Переменная величина z называется ***функцией двух переменных*** x, y, если каждой совокупности их значений из данной области D соответствует единственное определенное значение z.

Соответствующая зависимость записывается в виде $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$. Если имеется n переменных величин x_1, x_2, ..., x_n, то функциональная зависимость имеет вид $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Область D, в каждой точке которой определена данная функция, называется **областью определения функции.**

В случае $n=1$ имеем функцию одного аргумента $f(x)$;

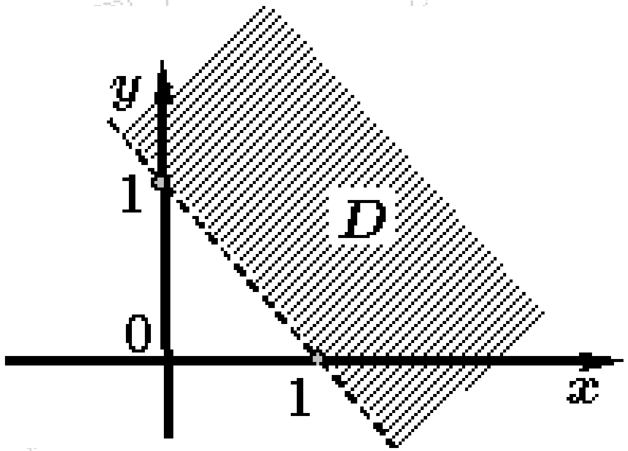
при $n=2$ имеем $f(x,y)$;

при $n=3$ будет $u=f(x,y,z)$

и т.д.

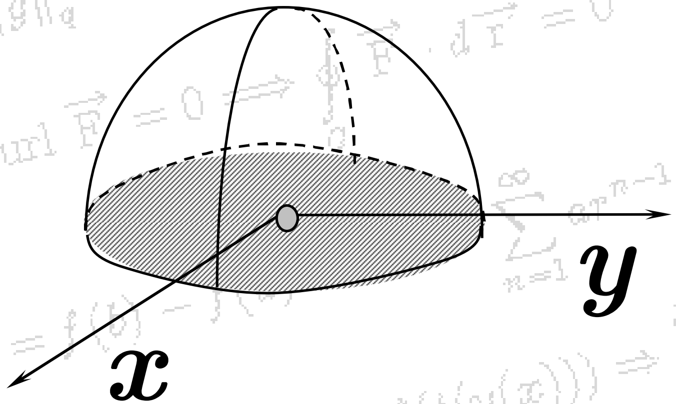
Пример **.** Функция $z = \ln(x + y - 1)$ определена, если аргумент логарифма положителен, т.е. $x + y - 1 > 0$

Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собою область определения данной функции. Это есть точки, расположенные правее и выше прямой $x + y - 1 = 0$



Пример . Функция $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ дает нам множество точек, расположенных на верхней половине сферы $x^2+y^2+z^2=1$

Областью определения этой функции является круг $x^2+y^2\le 1$

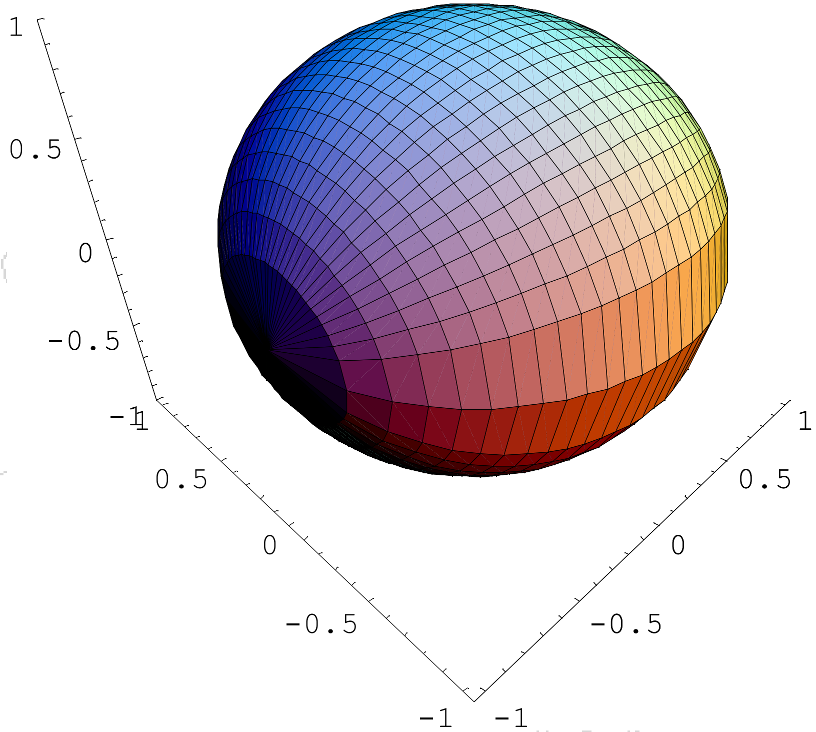


Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D на плоскости xOy. Каждой точке (x, y) на плоскости будет соответствовать точка $M(x, y, z)$ трехмерного пространства.

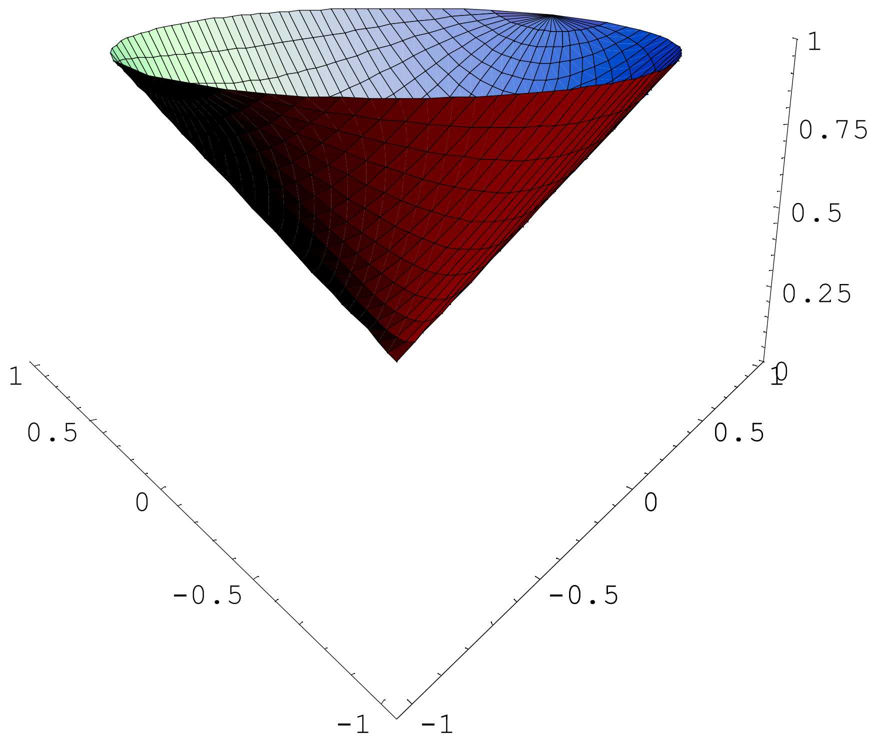
Множество таких точек $M(x, y, z)$ в трехмерной декартовой системе координат представляет собой некоторую поверхность и называется графиком функции $z = f(x, y)$.

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ можно рассматривать функции одной переменной $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$, представляющие сечения графика плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz.

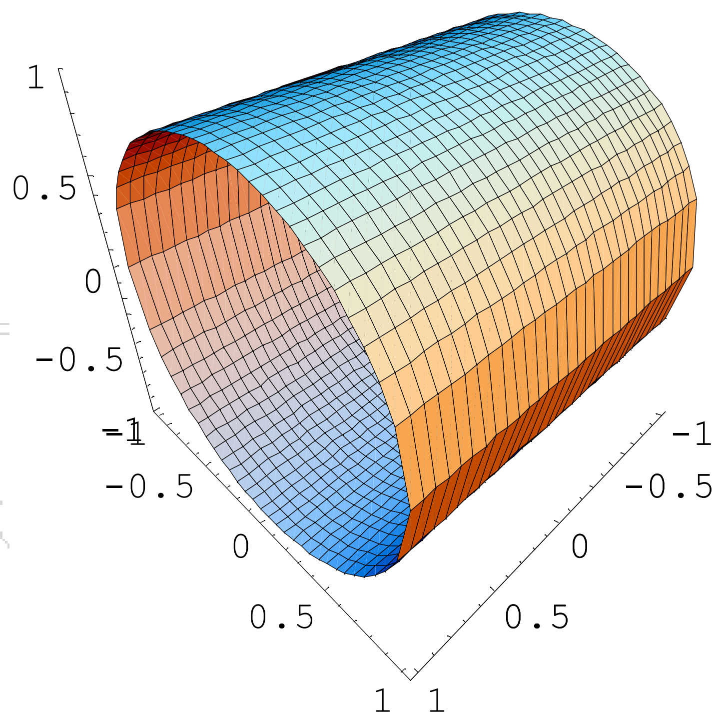
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



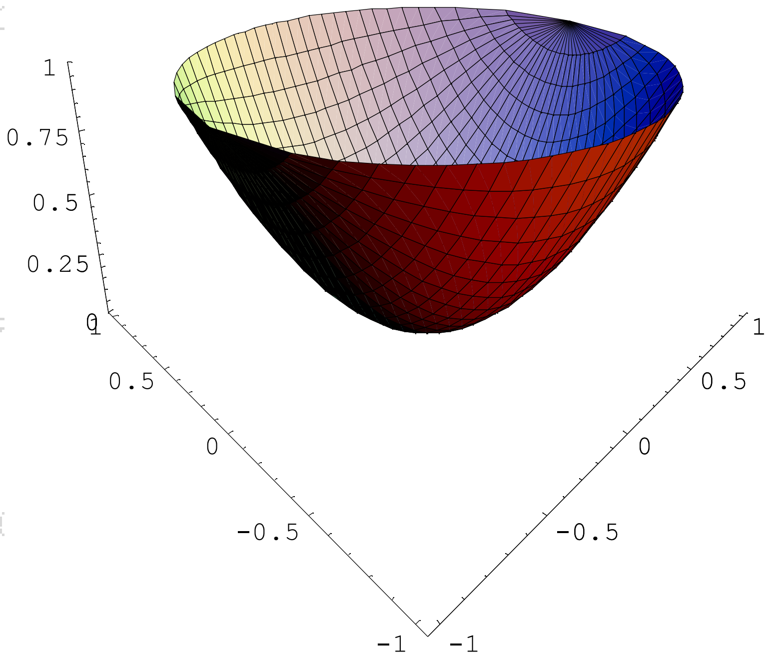
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



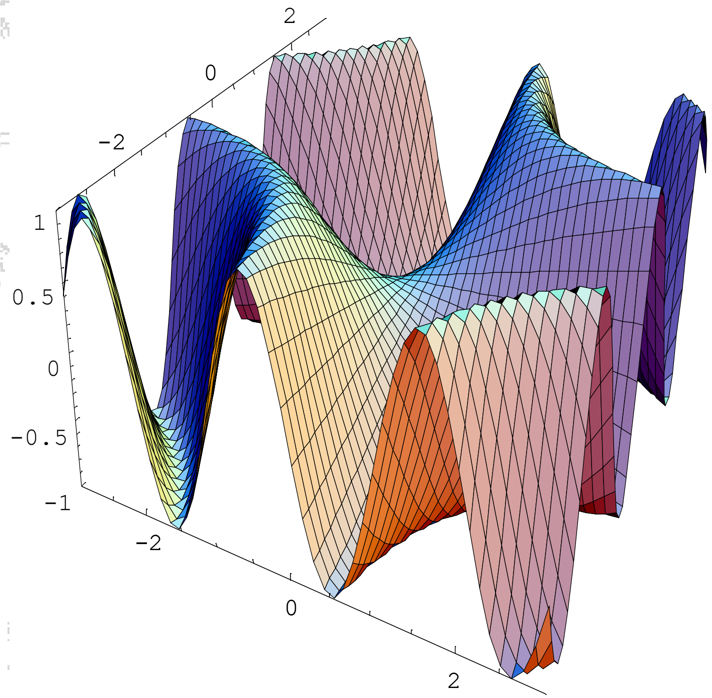
$$y^2 + z^2 = 1$$



$$z = x^2 + y^2$$



$$z = \sin xy$$



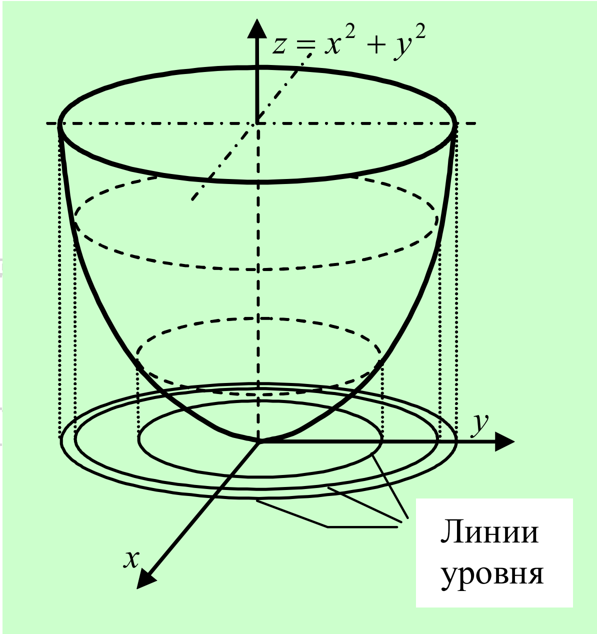
Линии уровня

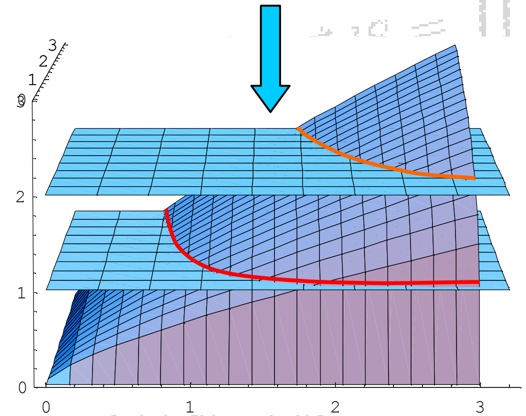
Определение 12.8

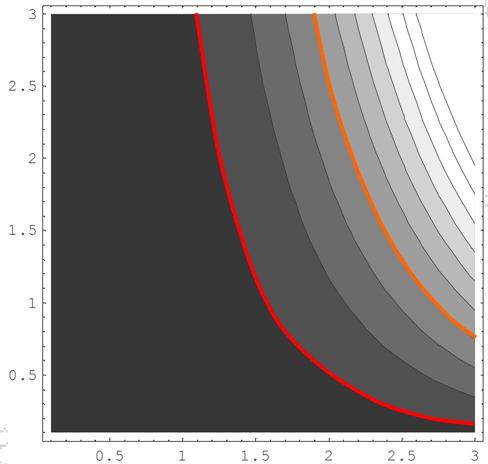
Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется такая линия $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой функция принимает постоянное значение $z = C$.

Пример

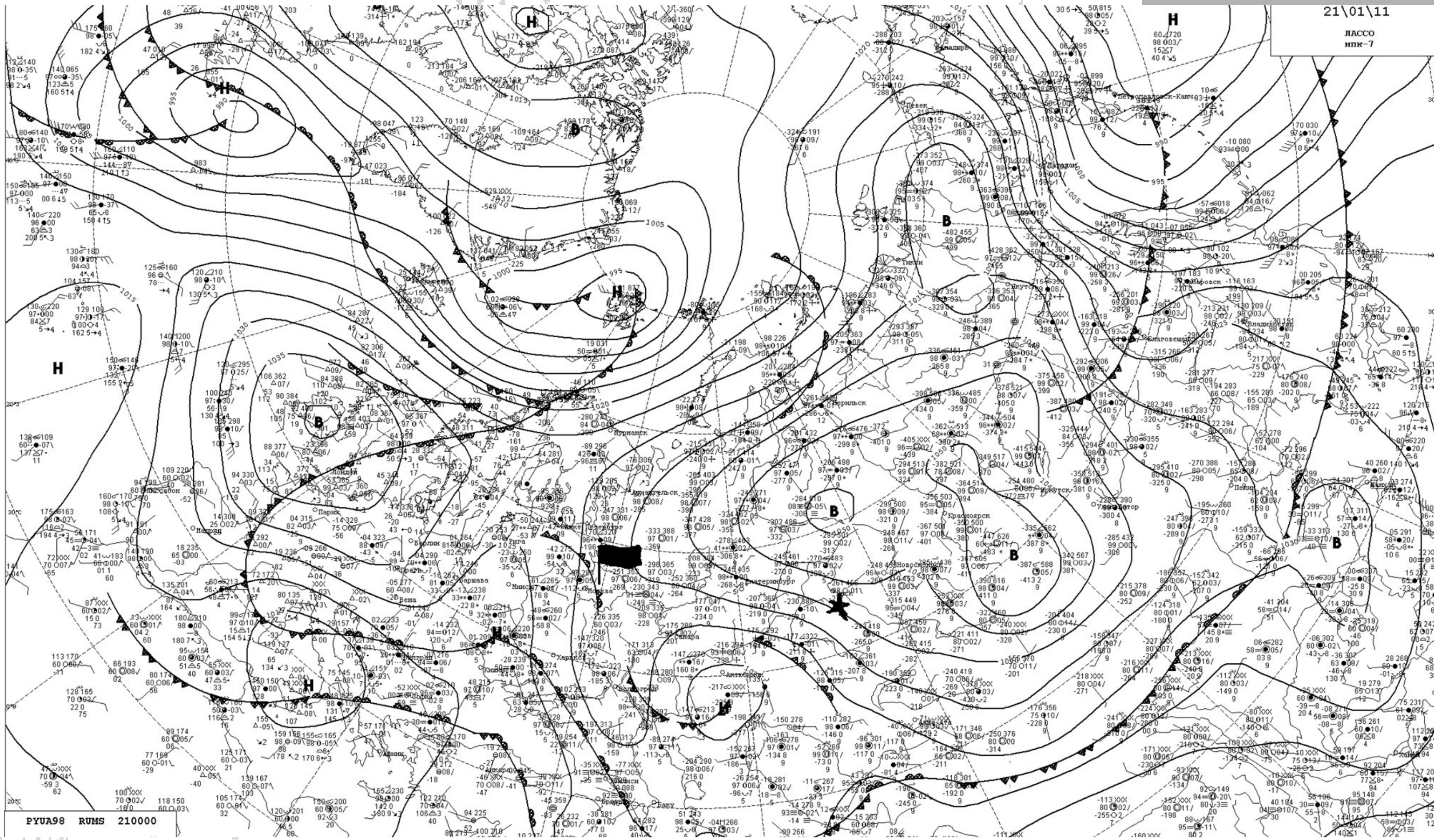
Функция $z = x^2 + y^2$, описывая поверхность, называемую параболоидом вращения, имеет линии уровня вида $x^2 + y^2 = C$. Задавая параметру C различные значения из области $C \geq 0$, получим несколько линий уровня в виде совокупности концентрических окружностей с центром в начале координат. Эта совокупность называется фрагментом карты линий уровня.

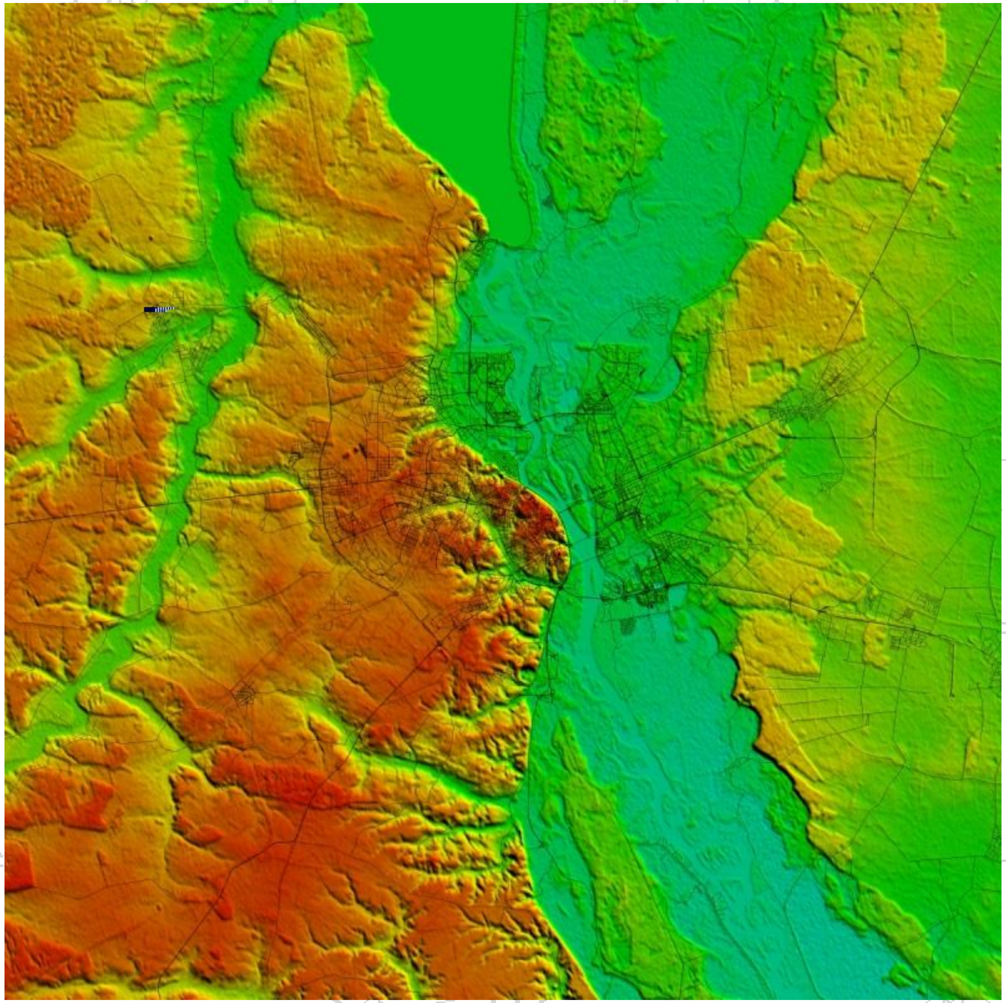






Пример. Построение фрагмента карты линий уровня функции Кобба-Дугласа $z = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$.

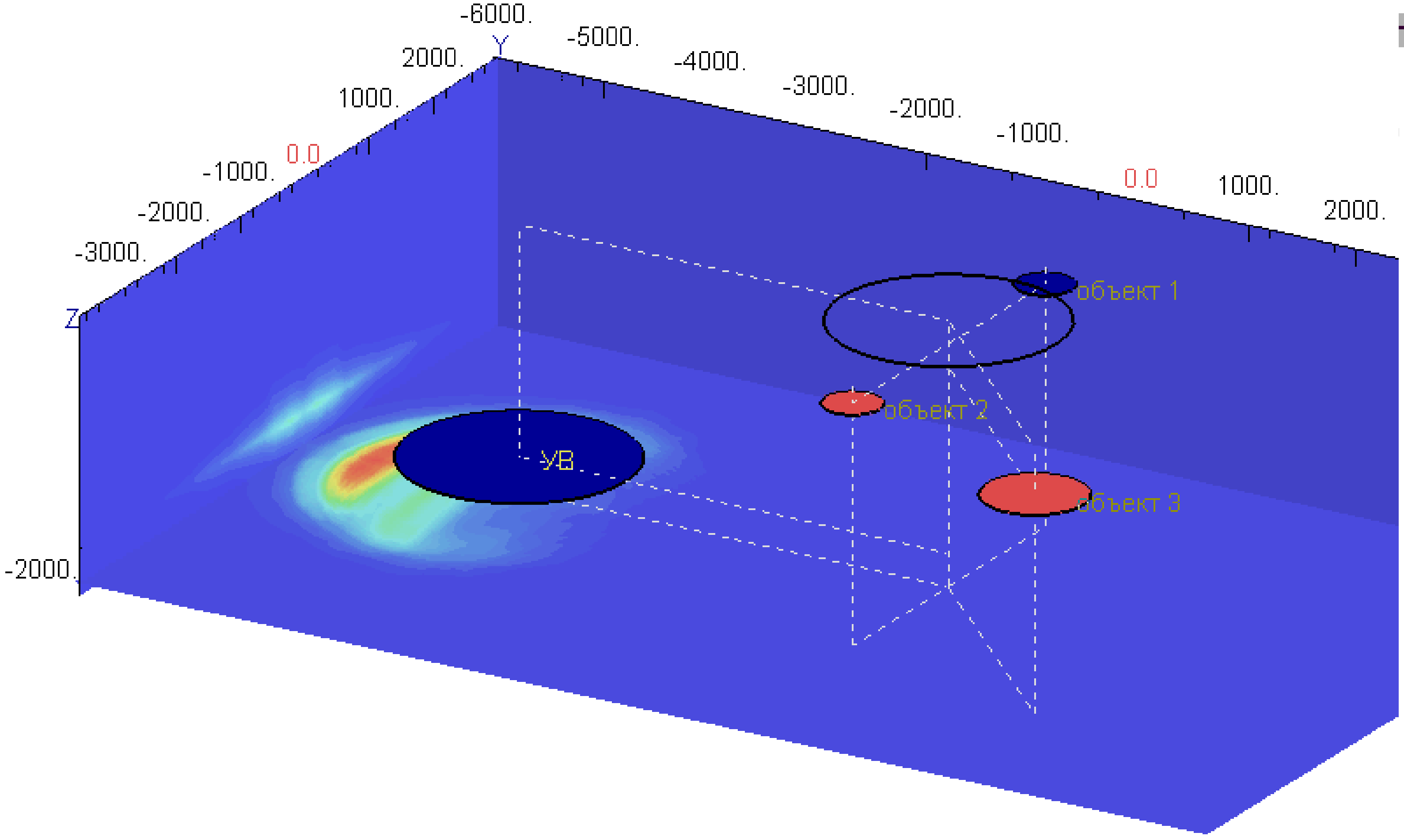

21\01\11
ЛАССО
мпк-7
PYUA98 RUMS 210000



Поверхности уровня

Поверхностью уровня скалярной функции $u = f(x,y,z)$ называется множество точек пространства, в которых функция u принимает одно и то же значение c, то есть поверхность уровня определяется уравнением $f(x,y,z) = c$.

T=0.014 мс



-6000.
Y
2000.
-5000.
-4000.
1000.
-3000.
-2000.
-1000.
0.0
-1000.
0.0
1000.
-2000.
2000.
-3000.
Z
объект 1
объект 2
УВ
объект 3
-2000.

Предел функции

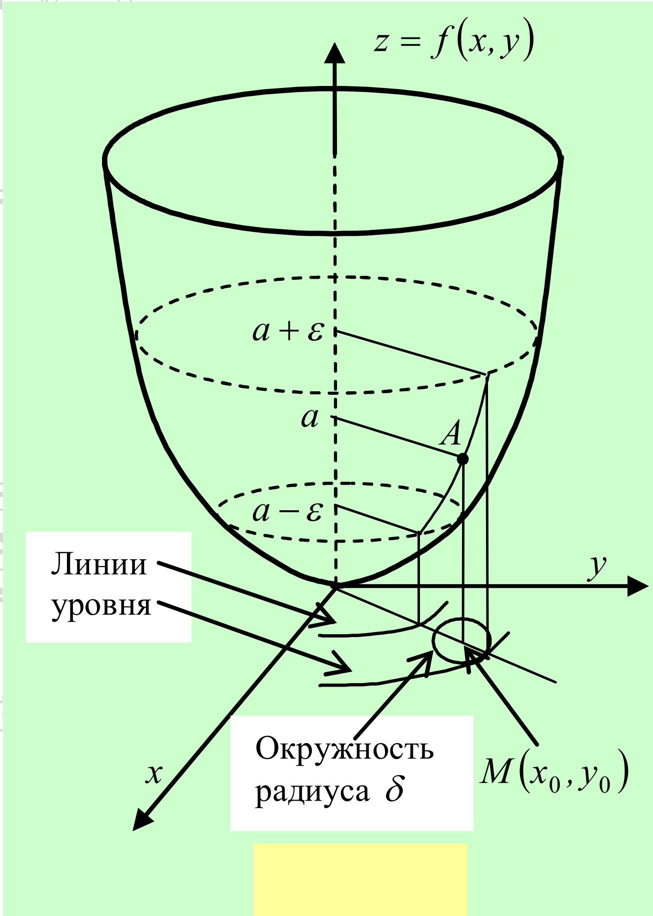
Пусть функция $f(M)$, где $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, причем в самой точке M_0 функция может быть и не определена.

Определение 12.9.

Число А называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ (или в точке (x_0, y_0)), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x, y)$, отличных от точки $M_0(x_0, y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0 < \rho < \delta)$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Математическое обозначение:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{M \to M_0} f(x, y) = A$$

.



Аналогичные определения предела можно дать и для случая, когда M_0 – бесконечно удаленная точка, а A – имеет конечное или бесконечное значение.

Эти различные формулировки определения конечного или бесконечного предела в конечной или бесконечной точке можно записать лаконично с помощью введенных ранее логических символов.

Например, пусть M_0 – конечная точка, $A = +\infty$, то запись $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ означает:

$$\left(\lim_{M \to M_0} f(M) = A\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) : (0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow f(M) > \frac{1}{\varepsilon}$$

В случае $M = M(x, y, z)$, $A = -\infty$, $(x, y, z) \to \infty$, тогда

$$\left(\lim_{(x,y,z)\to\infty} f(x,y,z) = -\infty \right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \right):$$

$$:\left(\left(x^2 + y^2 + z^2 \right) > \frac{1}{\delta^2} \right) \Rightarrow f(x,y,z) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Напомним, что если A – число, то предел называется **конечным**, если же A равно ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то предел называется **бесконечным** или **несобственным**.

Нетрудно заметить, что **определение предела функции нескольких переменных аналогично соответствующему определению предела для функции одной переменной.**

Замечание.

Вычисление пределов функции двух переменных является более сложной задачей по сравнению с вычислением пределов функции одной переменной.

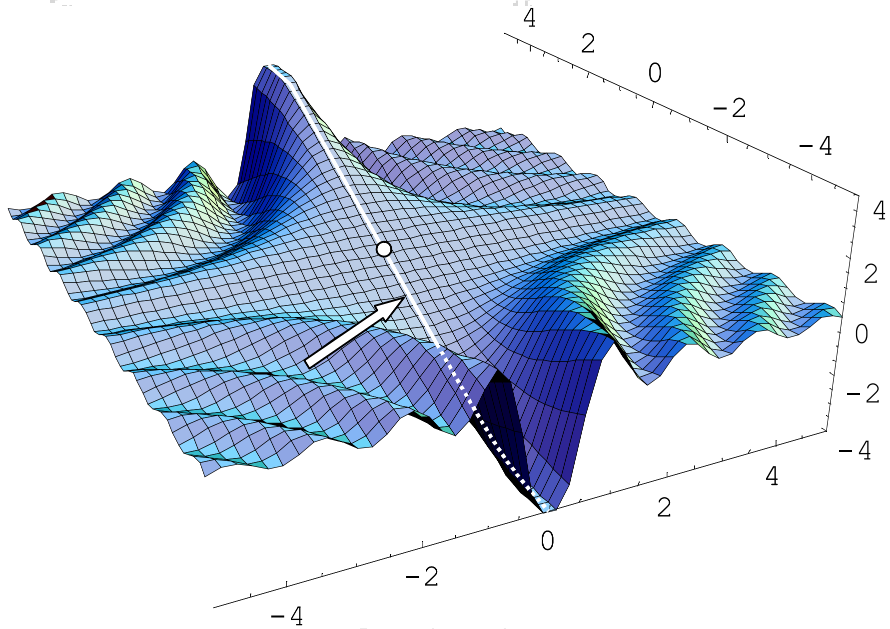
Это связано с тем, что точка N может стремиться к точке M по любому направлению на плоскости в отличие от функции одной переменной, где переменная x может стремиться к числу x_0 на числовой прямой только справа или слева.

Получающиеся при этом многочисленные пределы функции двух переменных должны совпадать друг с другом.

Пример. Найти предел функции $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{y}$ при $x\to 0,\ y\to 0$.

Решение. Функция $f(x,y)$ определена всюду, кроме линии $y=0$. Функция в точке $(0{,}0)$ не определена. При нахождении предела следует умножить числитель и знаменатель на x, сделать замену $xy=\rho$, а затем воспользоваться 1-м замечательным пределом

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\sin xy}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \rho\to 0}}\left(x\cdot\frac{\sin\rho}{\rho}\right)=0.$$



Пример. Существует ли предел у функции $f(x,y)=\sqrt{\frac{y}{x}}$ при $x\to 0,\ y\to 0$?

Решение. Выберем направление движения к точке $(0{,}0)$ по линии $y=kx$. Ясно, что при $x\to 0$ переменная $y\to 0$. Получим

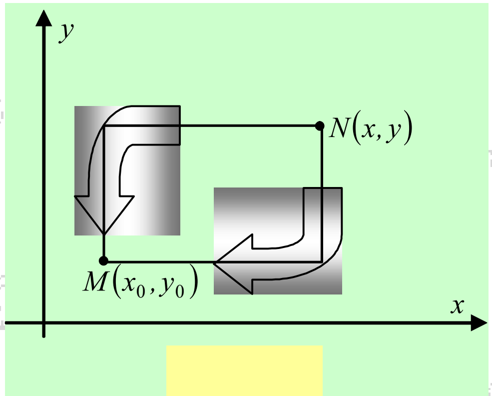
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\frac{y}{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{kx}{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{k}=\sqrt{k}.$$

При различных значениях k предел имеет различные значения. Наблюдается зависимость величины предела от пути, по которому точка (x,y) стремится к точке $(0{,}0)$. Предел не существует

Понятие предела функции нескольких переменных предполагает **одновременное стремление всех аргументов к своим предельным значениям**. Наряду с понятием предела вводится понятие повторного предела.

Определение 12.10.

Предел называется ***повторным,*** если он получен при последовательном стремлении каждого аргумента к предельному значению при фиксированных остальных аргументах аргумента x, затем y.



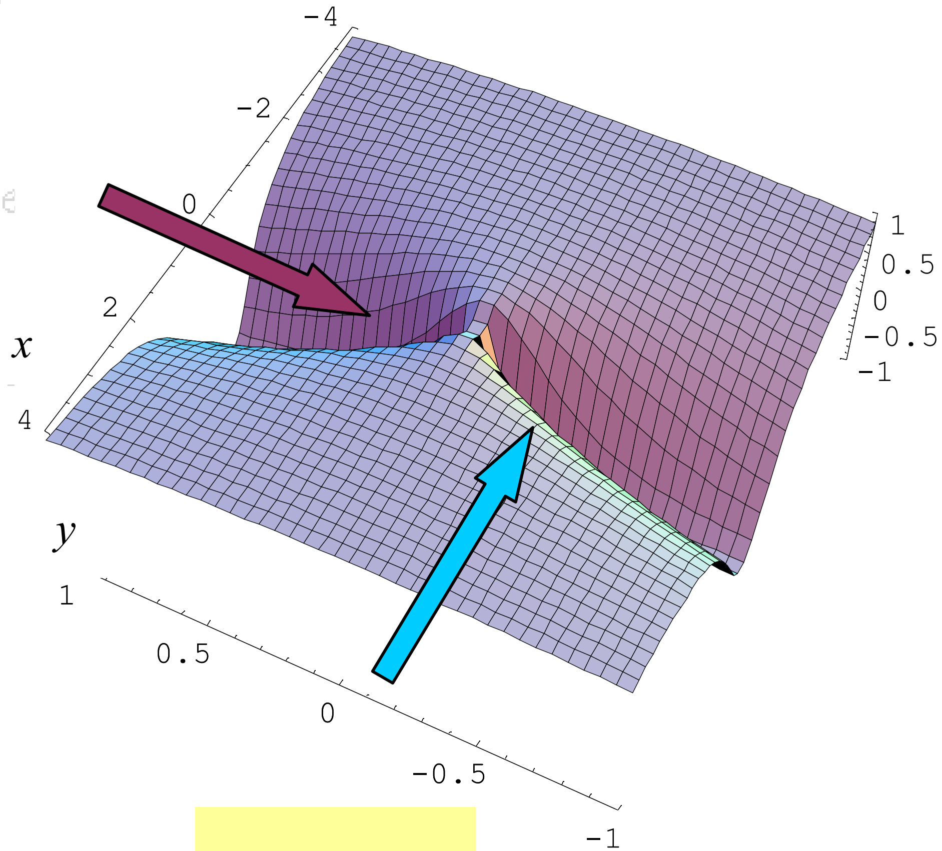
Пример. Найти повторные пределы функции $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $|x|\le 4$, $|y|\le 1$ при $x\to 0,\ y\to 0$.

Решение. Функция $f(x,y)$ определена всюду, кроме точки $O(0,0)$. Устремим переменную x к нулю, оставляя переменную y постоянной и не равной нулю. Затем устремим переменную y к нулю. Тогда

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=\mathbf{-1}.$$

Теперь оставляем постоянной величину y, а переменную x устремим к нулю. Потом находим предел при $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{y\to 0}(1)=\mathbf{1}.$$


-4
-2
0
2
4
x
y
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1

Нетрудно показать, что имеют место теоремы о пределах, сформулированные и доказанные для функции одной переменной $f(x)$, в частности, теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций нескольких переменных.

$$\lim_{M\to M_0}\left[f_1(M)\pm f_2(M)\right]=\lim_{M\to M_0} f_1(M)\pm\lim_{M\to M_0} f_2(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\left[f_1(M)\cdot f_2(M)\right]=\lim_{M\to M_0} f_1(M)\cdot\lim_{M\to M_0} f_2(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\left[\frac{f_1(M)}{f_2(M)}\right]=\frac{\lim\limits_{M\to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} f_2(M)}\quad (\lim_{M\to M_0} f_2(M)\neq 0)$$

Непрерывность функции

Понятие непрерывности, подробно рассмотренное ранее для функции одной переменной, можно обобщить также и для функции нескольких переменных, причем, как и ранее, понятие непрерывности тесно связано с понятием предела функции в точке. Приведем несколько различных определений непрерывности функции в точке, которые эквивалентны между собой.

Определение 12.11. Функция $f(M)$ ***называется непрерывной в точке*** *M_0, если*

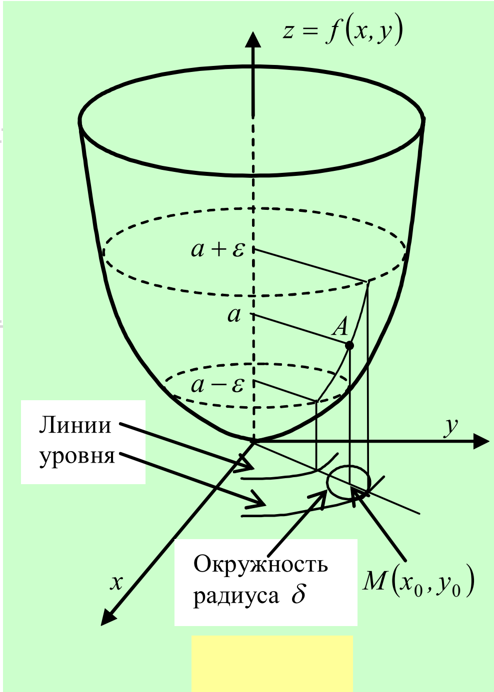
$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Для функции двух переменных то дадим более развернутое определение.

Определение 12.12. Функция $f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$,

если для любого $\varepsilon > 0$ *всегда можно указать такое число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ *что для всех точек* $M(x,y)$ *, попадающих в проколотую* $\delta -$ *окрестность точки* $M_0(x_0,y_0)$ *, будет выполняться неравенство* $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

Т.е. для функции непрерывной в некоторой точке достаточно малым изменениям координат этой точки соответствуют малые изменения значения самой функции.



Производя дальнейшие аналогии, будем называть функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывной в некоторой области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если в некоторой точке функция не является непрерывной, то она называется разрывной в этой точке.
Функция нескольких переменных может претерпевать разрыв не только в точке, но и на некоторой кривой и т.п.

Для функций, непрерывных в точке, можно сформулировать несколько теорем, аналогичных соответствующим теоремам, рассмотренным ранее для функции одной переменной.

Теорема 12.1.

Если функции $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *и* $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *непрерывны в точке* $M_0\left(x_1{}^0,x_2{}^0,\ldots,x_n{}^0\right)$, *то в этой точке:*

непрерывно произведение $c\cdot f_1(M)$, *где* $c=const$;

непрерывна сумма $f_1(M)\pm f_2(M)$;

непрерывно произведение $f_1(M)\cdot f_2(M)$;

непрерывно частное $\dfrac{f_1(M)}{f_2(M)}$, $\left(f_2(M_0)\neq 0\right)$

Функции нескольких переменных, непрерывные в области, обладают такими же свойствами, что и функции одной переменной, непрерывные на отрезке..

Теорема 12.2. *Если функция* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *непрерывна в замкнутой ограниченной области* $\overline{D}$ *, то в этой области она принимает наименьшее значение k и наибольшее значение K, т.е. существуют точки* M_1 *и* M_2 *такие, что* $f(M_1) = k$, $f(M_2) = K$ *и при этом для всех точек* $M \in \overline{D}$: $k \le f(M) \le K$

Теорема 12.3. *Если функция* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *непрерывна в ограниченной замкнутой области* $\overline{D}$ *, то в* $\overline{D}$ *она принимает по крайне мере хотя бы один раз любое значение, заключенное между ее наименьшим значением k и наибольшим значение K.*

Теорема 12.3. *Если функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *непрерывна в ограниченной замкнутой области* $\overline{D}$ *, то она в этой области ограничена, т.е. существует* $R > 0$ *такое, что* $\forall M \in \overline{D}$: $|f(M)| \leq R$