Лекция 3

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in R$.

Как ведет себя функция по мере приближения x к точке x_0?

Определение

ε-окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Определение 3.1. (Определение предела функции по Коши).

Число А является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, заисящее от ε, что для всех x из области определения функции, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$$

Определение 3.2.

δ - окрестность точки x_0 $U(x_0, \delta)$, из которой удалена точка x_0, называется проколотой δ - окрестностью точки x_0; она обозначается

$$\overset{o}{U}(x_0, \delta)$$

т. е.

$$\overset{o}{U}(x_0, \delta) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$$

Тогда с помощью логических символов сформулированное определение можно записать так:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

В том случае, когда $A = +\infty$, x_0 - конечное число, определение предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно записать следующим образом.

Определение 3.3.

Говорят, что $+\infty$ является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

При этом пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +$

Или с помощью логических символов:

$$+ \quad = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \; \forall x \;\; \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \; : f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

В случае, когда A - конечное число, $x_0 = +\infty$, можно записать

Определение 3.4.

Говорят, что число А является **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x_0 = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всех x, удовлетворяющих условию

$$x > \frac{1}{\delta}$$

выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут:

$$\lim_{x \to +} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \ \forall x > \frac{1}{\delta} \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Очевидно, что аналогичные определения можно сформулировать, если A - конечное число, $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$ или $x_0 = \infty$; или x_0 - конечное число, $A = -\infty$ или $A = +\infty$.

Если A - конечное число, то предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

называется **конечным**; если же $A = +\infty$, $A = -\infty$ или $A = \infty$, то предел называется **бесконечным** или **несобственным**.

Отметим, что из определения предела следует: $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

а также , если $f(x) = c$, где $c = const$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

Односторонние пределы функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in R$, т. е. x_0- конечное вещественное число. Наложим ограничения на способ приближения аргумента функции x к точке x_0, а именно: будем рассматривать случаи,

1)x приближается к x_0, оставаясь больше x_0, т. е. $x > x_0$, тогда говорят, что x приближается к точке x_0 справа;

2)x приближается к x_0, оставаясь меньше x_0, т. е. $x < x_0$, то говорят, что x приближается к x_0 слева.

Определение 3.5. (правостороннего предела).

Говорят, что число **А** является **правосторонним пределом** функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in \mathrm{R}$, если $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon$.

Правосторонний предел обозначается :

$f(x_0+0)$ $\qquad \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$

$$A = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \quad \overset{\text{def}}{} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \quad (x_0, x_0 + \delta)) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение 3.6. (левостороннего предела).

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \overset{\text{def}}{\quad} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \quad (x_0 - \delta, x_0)) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Левосторонний предел обозначается

$$f(x_0 - 0) \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Теорема 3.1

Если в точке $x_0 \in R$ у функции $y = f(x)$ существует конечный предел, то в этой же точке существуют и равные между собою односторонние пределы этой функции и наоборот, т. е.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \left(f\left(x_0 - 0\right) = f\left(x_0 + 0\right) = A\right)$$

Всегда ли существует предел у данной функции $y = f(x)$, а если существует, то единственный ли он?

Теорема 3.2. (О единственности конечного предела).

Если в точке $x_0 \in R$ данная функция $y = f(x)$ имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство

Допустим, что в данной точке x_0 $\overline{R}$

существуют два различных предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A_2 \qquad (A1 \neq A2)\ .$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$:

$$(\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0) \ \ \forall x \ \ \mathring{U}_{\delta_1}(x_0) \ :\left| f(x) - A_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

$$(\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0) \ \ \forall x \ \ \mathring{U}_{\delta_2}(x_0) \ :\left| f(x) - A_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, а тогда оказывается, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \ \forall x \ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \ : |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2|$$

$$|f(x) - A_1| + |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Число ε выбирается произвольно и мы можем взять его, удовлетворяющим неравенствам $0 < \varepsilon < |A_1 - A_2|$.

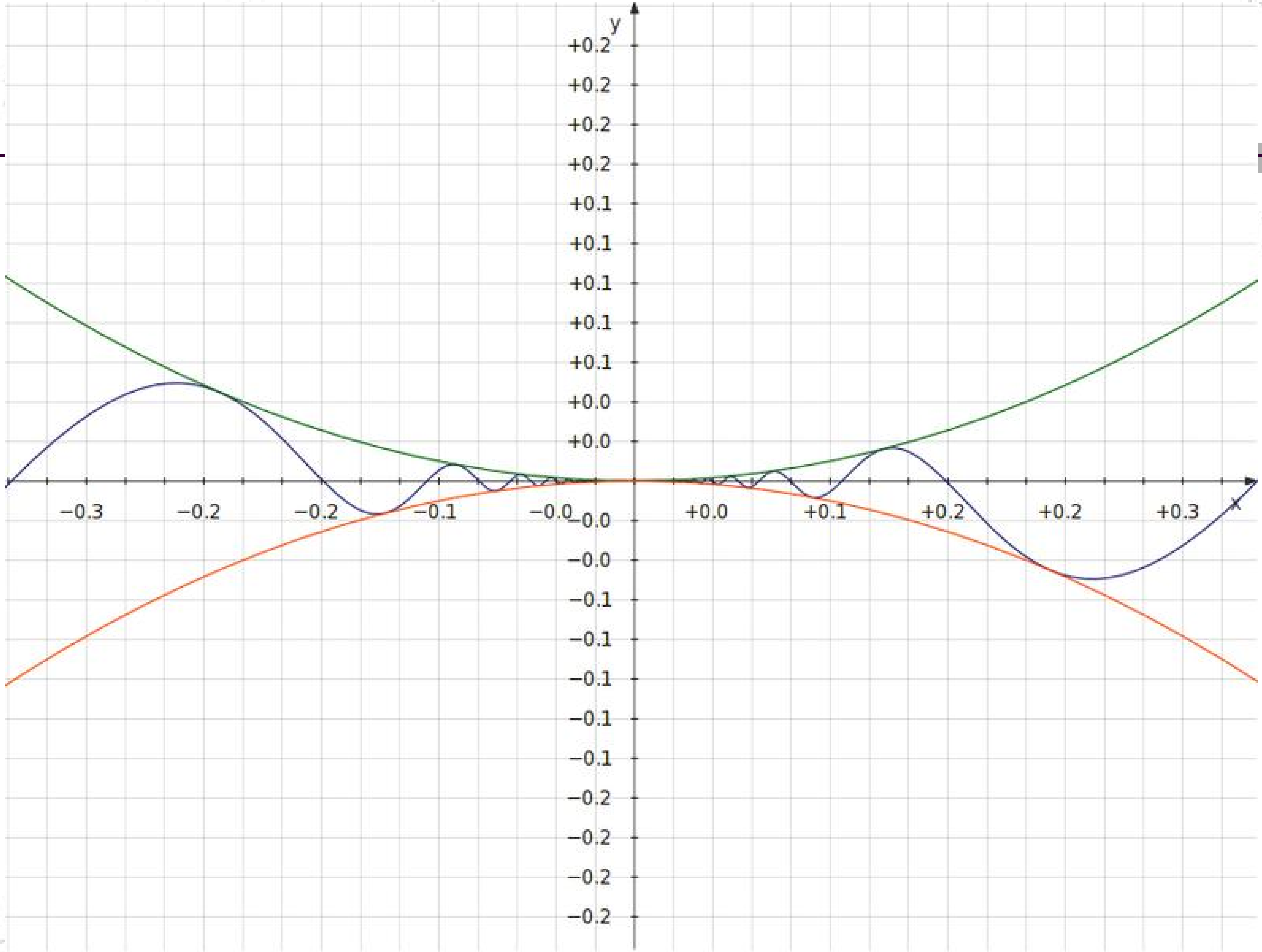
Полученное противоречие и доказывает теорему.

Признаки существования предела.

Теорема 3.3. («правило двух милиционеров»)

Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ определены в $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, причем в этой окрестности выполняются неравенства $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ и кроме того

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A \quad \text{, то и} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$


y
x
+0.2
+0.2
+0.2
+0.2
+0.1
+0.1
+0.1
+0.1
+0.1
+0.0
+0.0
−0.0
−0.0
−0.1
−0.1
−0.1
−0.1
−0.1
−0.2
−0.2
−0.2
−0.2
−0.3
−0.2
−0.2
−0.1
−0.0
+0.0
+0.1
+0.2
+0.2
+0.3

Доказательство.

По условию теоремы $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$

В силу определения предела $\forall\varepsilon>0$:

$$(\exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0)\ \forall x\ \ \overset{o}{U}(x_0,\delta_1)\ :A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon$$

$$(\exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0)\ \forall x\ \ \overset{o}{U}(x_0,\delta_2)\ :A-\varepsilon<\psi(x)<A+\varepsilon$$

Пусть $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда $A-\varepsilon<\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)<A+\varepsilon$ $\Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, а это и означает, что

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

Существование предела у монотонных функций.

Определение 3.7.

Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на промежутке X (конечном или бесконечном), если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ справедливо соотношение
$(x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

Если $(x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется **строго возрастающей**.

Определение 3.8.

Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на промежутке X (конечном или бесконечном), если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ справедливо соотношение $(x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

Если $(x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, то $f(x)$ называется **строго убывающей**.

Функции невозрастающие, строго убывающие, неубывающие и строго возрастающие называются **монотонными** на промежутке X.

Теорема 3.4.

Если функция $y = f(x)$ монотонна и ограничена в

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$$

то тогда существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Теорема 3.5.

Если функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на бесконечном промежутке X и ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 4.2.

Функция φ(x) называется **бесконечно малой в точке** x_0 $\overline{R}$,

если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$

Определение 4.3.

Функция ψ(x) называется **бесконечно большой в точке** x_0 $\overline{R}$,

если $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \psi(x) \right| = +$

Теорема 4.1.

1) Если $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция в точке x_0, то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ есть бесконечно большая функция в этой точке при условии, что $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0.

2) Если $\psi(x)$ есть бесконечно большая функция в точке x_0, то $\dfrac{1}{\psi(x)}$ есть бесконечно малая функция в точке x_0.

Доказательство.

Докажем теорему для случая, когда x_0 - конечное вещественное число.

Возьмем любое число $K > 0$.

Пусть $\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией в точке x_0.

Это означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \ \forall x \ \ \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \ :|\varphi(x)| < \varepsilon$$

Возьмем в качестве ε такое число, чтобы $\frac{1}{\varepsilon} = K$, тогда

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|\varphi(x)|} = +$$

а это и означает, что $\frac{1}{\varphi(x)}$ - бесконечно большая функция.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично

Теорема 4.2.

Следующие два утверждения эквивалентны.

1) Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

2) Функция $\varphi(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой в точке x_0.

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $x_0 \in R$, A - конечное число.

Это значит, что для $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ \forall x\ \ \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)\ :|\varphi(x)| < \varepsilon$,

где $\varphi(x) = f(x) - A$, т. е. $\varphi(x)$ есть бесконечно малая в точке x_0.

2) Пусть теперь $\varphi(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая в точке x_0

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ \forall x\ \ \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)\ :|\varphi(x)| < \varepsilon$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Следствие

Если функция *f(x)* имеем предел, равный *A,* то ее можно представить как сумму числа *A* и бесконечно малой функции α(x), т. е. если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

то $f(x) = \alpha(x) + A$

Теорема 4.3.

Если функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, а функция $\varphi(x)$ - бесконечно малая в точке x_0, то их произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$ есть функция бесконечно малая в этой точке.

Доказательство.

Функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0,;значит, существует такое число $K > 0$, что $\forall x \quad U(x_0, \delta) : |f(x)| < K$

Функция $\varphi(x)$ бесконечно малая в точке x_0, значит

$$\forall \frac{\varepsilon}{K} \quad (\exists \delta = \delta(\varepsilon)) \quad \forall x \quad \overset{o}{U}(x_0, \delta) \quad : |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{K},$$

Тогда :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon)) \quad \forall x \quad \overset{o}{U}(x_0, \delta) \quad : |f(x)\varphi(x)| < \varepsilon$$

а это и означает, что $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть бесконечно малая функция в точке x_0.

Следствие 1.

Произведение постоянной c на бесконечно малую функцию $\varphi(x)$ $c \cdot \varphi(x)$ в точке x_0 есть бесконечно малая функция.

Следствие 2.

Произведение двух бесконечно малых функций в точке x_0 $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$ есть бесконечно малая функция в этой точке.

Действительно, поскольку $\varphi_1(x)$ - бесконечно малая в точке x_0, то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \ \ \forall x \ \ \overset{o}{U}(x_0, \delta) \ :|\varphi_1(x)| < \varepsilon$$

,т. е.

$-\varepsilon < \varphi_1(x) < \varepsilon$, а это означает, что $\varphi_1(x)$ ограничена в окрестности точки x_0.

Тогда на произведение функций $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$ можно смотреть как на произведение бесконечно малой и ограниченной функции.

Теорема 4.4.

Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел, отличный от нуля, а функция $g(x)$ - бесконечно большая в этой точке, то их произведение $f(x)\cdot g(x)$ есть функция, бесконечно большая в точке x_0.

Сумма двух бесконечно больших величин одного знака есть бесконечно большая величина того же знака.

Сумма бесконечно большой и ограниченной величины одного знака есть бесконечно большая величина.

При переходе к функциям более сложного вида мы обязательно столкнемся с появлением выражений, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределенностями.**

Перечислим все **основные виды неопределенностей**:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\bullet\infty;\ (\infty-\infty);\ 1^{\infty};\ 0^{\infty};\ 0^{0}$$

Теоремы о конечных пределах

Теорема 4.5 (ограниченность функции, имеющей конечный предел).

Если в точке $x \in R$ функция $f(x)$ имеет конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta)$ функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство.

По условию теоремы, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечный предел A.

:

Это означает

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon))\quad \forall x\ \ \overset{o}{U}(x_0, \delta)\quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

$|f(x) - A| < \varepsilon$ $\quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т.е. функция $y = f(x)$

ограничена в проколотой окрестности точки x_0.

Теорема 4.6.

Если в окрестности точки x_0 имеет место неравенство $\varphi(x) \le \psi(x)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A, \ \lim_{x\to x_0} \psi(x) = B,$$

то $A \le B$.

Если в точке $x_0 \quad R$

функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = B \quad ,$$

то можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 4.8

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Теорема 4.9

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)-f_2(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)-\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Теорема 4.10

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\quad f_2(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)$$

Теорема 4.11

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}\quad (\lim_{x\to x_0} f_2(x)\quad 0).$$

Теорема 4.10

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\ \ f_2(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\ \ \lim_{x\to x_0}f_2(x)$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=B,$

тогда $f_{1(}x) = A + \alpha(x),\ f_2(x) = B + \beta(x),$

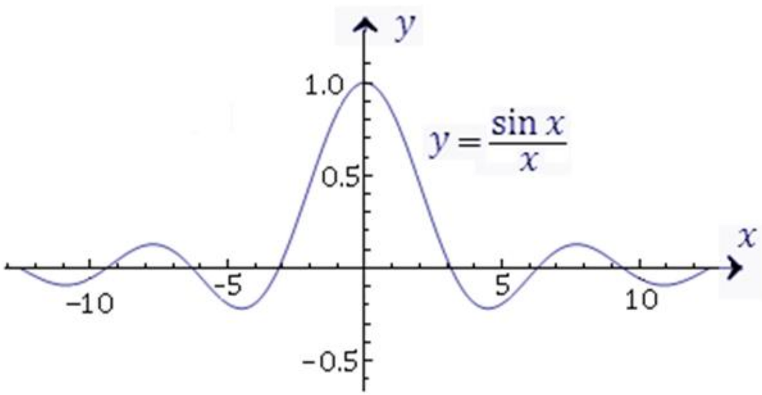
где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции в точке x_0.

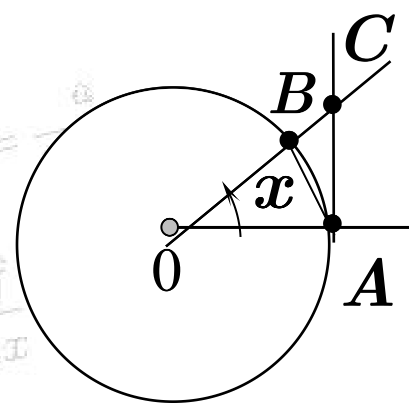
Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f_1(x)\ \ f_2(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[(A+\alpha(x))\ \ (B+\beta(x))\right]=$

$$=\lim_{x\to x_0}(A\ \ B)+B\lim_{x\to x_0}\alpha(x)+A\lim_{x\to x_0}\beta(x)+\lim_{x\to x_0}\left[\alpha(x)\ \ \beta(x)\right]=A\ \ B.$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$





Допустим, что x - некоторый острый угол

Из рисунка ясно, что $S\Delta OAB < S$сект.$OAB < S\Delta OAC$, т. е

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2 x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x \qquad \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Мы предположили, что x острый угол, значит $\sin x > 0$, а тогда имеем

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \qquad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

Мы предположили, что x острый угол, значит $\sin x > 0$. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$.

В силу определения предела для $\forall \varepsilon > 0$

существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, а именно $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, что если положить $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$

то тогда $|1 - \cos x| = 2\sin^2 \dfrac{x}{2} < \dfrac{x^2}{2} < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$,

Следовательно, можно сделать вывод, что в силу доказанной выше теоремы

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Допустим теперь, что $x < 0$ и найдем $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin x}{x}$

Положим $-x = y$, тогда $\sin x = \sin(-y) = -\sin y$.

Имеем $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y>0}} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y>0}} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Итак, окончательно получим предел, который называется

первым замечательным пределом

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

В общем случае этот предел можно записать в виде $$\lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Второй замечательный предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Предел последовательности

Определение. Говорят, что число A является пределом последовательности (варианты) a_n, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех n, для которых имеет место неравенство $n > N(\varepsilon)$, следует $|A - a_n| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \quad |A - a_n| < \varepsilon$$

Поскольку последовательность является частным случаем функции,

то достаточно очевидно, что для предела последовательности имеют место

основные теоремы, справедливые для предела функции.

Рассмотрим еще одно определение предела фукции

Определение предела (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число *A* называется *пределом* ***функции y*** *= f(x) в точке* x_0 если **для любой последовательности** допустимых значений аргумента x_n, $n \in N$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т. е.,

$$\lim_{n\to} x_n = x_0$$

последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится **к** числу *A т. е.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Генрих Эдуард Гейне 1821—1881, немецкий математик

Второй замечательный предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$ **Натуральные логарифмы**

Докажем, что последовательность $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел при $n \to \infty$.

Для этого достаточно доказать, что она строго возрастает и ограничена сверху.

Напомним формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}a^k b^{n-k} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\ldots n}b^n$$

Следовательно,

$$U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n}\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Очевидно, что

$$U_{n+1} = \ 1+\frac{1}{n+1}^{\,n+1} = 2+\frac{1}{1\ \ 2}\ 1-\frac{1}{n+1}\ +\frac{1}{1\ \ 2\ \ 3}\ 1-\frac{1}{n+1}\ \ 1-\frac{2}{n+1}\ +\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\ \ 2\ \ 3\ldots n(n+1)}\ 1-\frac{1}{n+1}\ \ 1-\frac{2}{n+1}\ \ \ldots\ 1-\frac{n}{n+1}$$

Очевидно, что при любом $n \in \mathrm{N}$ имеет место неравенство $U_n < U_{n+1}$.
Действительно, сравнив правые части разложений U_n и U_{n+1},
отметим прежде всего, что все слагаемые положительны,
в правой части разложения U_{n+1} на одно слагаемое больше,
чем в правой части разложения U_n и, кроме того, начиная со второго слагаемого,
в правой части U_{n+1} стоят выражения, большие, чем соответствующие слагаемые
в разложении U_n.

Оценим теперь U_n сверху. Очевидно, что

$$U_n < 2 + \frac{1}{1\;2} + \frac{1}{1\;2\;3} + \ldots + \frac{1}{1\;2\;3\ldots(n-1)n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Итак, мы доказали, что последовательность U_n монотонно возрастает и ограничена сверху, т. е. $U_n < U_{n+1}$ и $U_n < 3$.
Нетрудно заметить, что $U_1 = 2$, $U_2 = 2{,}25$, $U_3 = 2\frac{10}{27}$,…, т. е. $2 < U_n < 3$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ есть иррациональное число.

Обозначается оно *e*, где *e*=2,718281828…, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

e = 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274 2746639193 2003059921 8174135966 2904357290 0334295260 5956307381 3232862794 3490763233 8298807531 9525101901 1573834187 9307021540 8914993488 4167509244 7614606680 8226480016 8477411853 7423454424 3710753907 7744992069 5517027618 3860626133 1384583000 7520449338 2656029760 6737113200 7093287091 2744374704 7230696977 2093101416 9283681902 5515108657 4637721112 5238978442 5056953696 7707854499 6996794686 4454905987 9316368892 3009879312 7736178215 4249992295 7635148220 8269895193 6680331825 2886939849 6465105820 9392398294 8879332036 2509443117 3012381970 6841614039 7019837679 3206832823 7646480429 5311802328 7825098194 5581530175 6717361332 0698112509 9618188159 3041690351 5988885193 4580727386 6738589422 8792284998 9208680582 5749279610 4841984443 6346324496 8487560233 6248270419 7862320900 2160990235 3043699418 4914631409 3431738143 6405462531 5209618369 0888707016 7683964243 7814059271 4563549061 3031072085 1038375051 0115747704 1718986106 8739696552 1267154688 9570350354

Этот предел называется **вторым замечательным пределом**,
а число ***e*** является во многих отношениях замечательным числом.
Данное число иногда называют неперовым в честь шотландского учёного Непера, автора работы «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614 год). Однако это название не совсем корректно, так как у него логарифм числа x был равен $10^7 \cdot \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right)$

Можно доказать также, что

$$\lim_{x\to+} 1+\frac{1}{x}^{\,x} = e, \quad \lim_{x\to-} 1+\frac{1}{x}^{\,x} = e, \quad \lim_{x\to+} 1+\frac{1}{x}^{\,x} = e$$

Тогда очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

В самом общем виде при $\alpha(x) \to 0$ можно записать

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e \quad \text{или} \quad \lim_{\beta(x)\to} 1+\frac{1}{\beta(x)}^{\,\beta(x)} = e$$

Число ***e*** положено в основание логарифмов, которые называются **натуральными логарифмами** и обозначаются так: **log *e N* = ln *N*.**

В курсе математики часто встречается функция $y = e^x$,
которая называется **экспонентой** и иногда обозначается $y = \exp x$,

Функции $\mathbf{y = \ln x}$, $\mathbf{y = \exp x}$ взаимно обратны, возрастают и графики их симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатного угла.