Лекция 13

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ(2)

Дифференцируемость функции нескольких переменных

Частные производные
Геометрический смысл частных производных.
Дифференцируемость функции нескольких переменных
Дифференцирование сложной функции, зависящей от одной переменной
Дифференцирование сложной функции, зависящей от нескольких переменных

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную в области D.

Приращение $\Delta_x z$, называемое частным приращением по переменной x, определяется равенством $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$.

Аналогично $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Полное приращение функции $z = f(x,y)$ определяется равенством $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Определение 13.1

Частной производной функции $z = f(x, y)$ *по переменной* x *называется предел отношения частного приращения функции* $\Delta_x z$ *к вызвавшему его приращению аргумента* Δx *при условии, что последнее стремится к нулю.*

Обозначается такая частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}$$

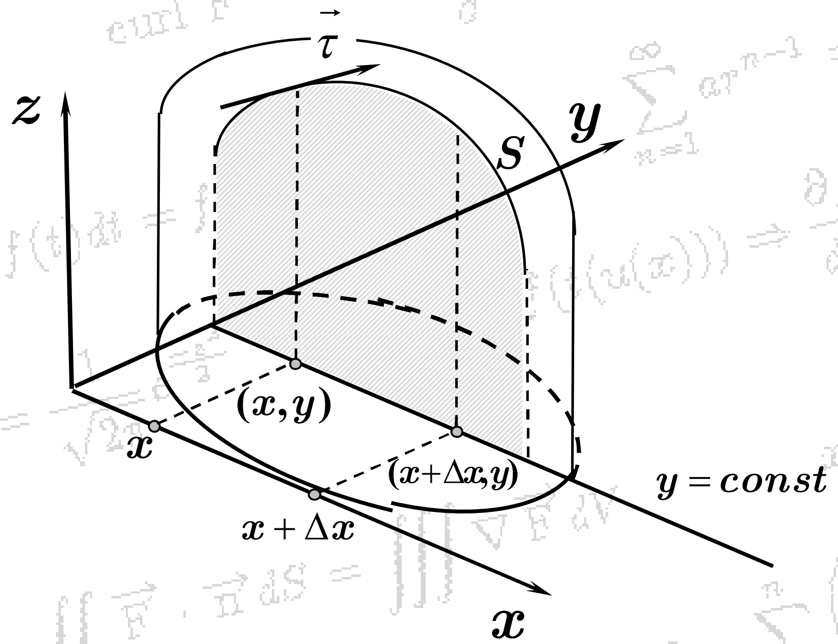
Частная производная по переменной x обозначается также $z'_x = f'_x(x, y)$.

Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$, т.е. $\frac{\partial z}{\partial y} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

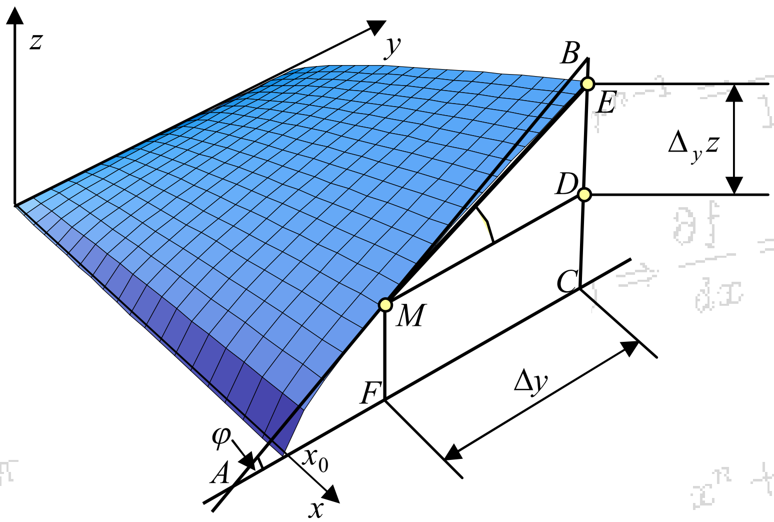
Геометрический смысл частных производных.

Допустим, что в области D функция $z = f(x, y)$ положительна. Этой функции соответствует некоторая поверхность S, расположенная над областью D

Принимая во внимание геометрический смысл обыкновенной производной, нетрудно заметить, что значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $M(x, y)$ дает нам тангенс угла наклона касательной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = const$ с положительным направлением оси 0x



Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x,y)$ соответственно равно тангенсу угла наклона касательной к линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $x=const$ с положительным направлением оси 0у.



Определение 13.2

Произведение частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ на приращения независимых переменных Δx и Δy называются частными дифференциалами и обозначаются соответственно $d_x z$ и $d_y z$, т.е.

$$d_x z \overset{def}{=} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x, \; d_y z \overset{def}{=} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Аналогично определяются и частные производные от функций, зависящих от трех и более независимых переменных.

При отыскании частной производной по *x* на все прочие переменные, входящие в выражение функции, следует смотреть как на постоянные.

Поэтому остается в силе таблица производных и правила дифференцирования, рассмотренные подробно при изучении производных функции одной переменной

Пример1. $u = xyt^2 - \sqrt{1+x^2 z}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Решение.

1. $$\frac{\partial u}{\partial x} = yt^2 - \frac{x \cdot z}{\sqrt{1+x^2 z}}$$

2. $$\frac{\partial u}{\partial y} = xt^2$$

3. $$\frac{\partial u}{\partial t} = 2x \cdot y \cdot t$$

4. $$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2 \cdot z}}$$

Дифференцируемость функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$, определенную в некоторой области D плоскости $x0$y.

Определение 13.3.

Если полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, где A и B – выражения, не зависящие от Δx и Δy, а α и β – бесконечно малые, стремящиеся к нулю, если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$,

то функция $z = f(x, y)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** (x, y).

Теорема 13.1

Если функция $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x, y), *то у нее существуют частные производные* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *в этой точке.*

Доказательство.

Итак, пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), тогда ее полное приращение равно

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

Если мы зафиксируем y, т.е. положим $\Delta y = 0$, то получим частное приращение

$$\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x .$$

Отсюда следует, что существует частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Действительно $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(A + \alpha \right)$

Т.к. A от Δx не зависит, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то получим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$.

Совершенно аналогично $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

То есть, если функция дифференцируема в точке (x, y), то ее полное приращение можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отметим, что так же, как для функции одной переменной, **из дифференцируемости $z = f(x, y)$ в точке (x, y) вытекает ее непрерывность в этой точке.**

Действительно, очевидно, что в этом случае полное приращение $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Определение 13.3

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ *называется линейная относительно* Δx *и* Δy *часть полного приращения дифференцируемой функции, т.е.*

$$dz \overset{def}{=} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Заметим, что **если *x* и *y* – независимые переменные, то дифференциалы этих переменных совпадают с их приращениями,** т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда можно уточнить форму дифференциала функции, зависящей от двух независимых переменных:

$$dz \overset{def}{=} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot dy$$

Теорема 13.2 (достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных)

Если в некоторой точке $M(x,y)$***, принадлежащей области D, функция*** $z=f(x,y)$ ***имеет непрерывные* частные производные** $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ ***и*** $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}$***, то она в этой точке дифференцируема.***

Доказательство.

Рассмотрим полное приращение функции $z = f(x, y)$ и преобразуем его так:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] +$$

$$+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

К каждой из квадратных скобок можно применить теорему Лагранжа; тогда получим

$$\Delta z = f'_x(x + \xi_1 \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y + \xi_2 \Delta y) \cdot \Delta y,$$

где ξ_1 и ξ_2 есть некоторые константы, удовлетворяющие условиям $0 < \xi_1 < 1$, $0 < \xi_2 < 1$.

По условию теоремы частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ непрерывны в точке $M(x,y)$; это означает, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x\left(x+\xi_1\Delta x, y+\Delta y\right)=f'_x\left(x,y\right),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y\left(x, y+\xi_2\Delta y\right)=f'_y\left(x,y\right).$$

Отсюда

$$f'_x\left(x+\xi_1\Delta x, y+\Delta y\right)=f'_x\left(x,y\right)+\alpha\,,$$

$$f'_y\left(x, y+\xi_2\Delta y\right)=f'_y\left(x,y\right)+\beta\,,$$

α и β – некоторые бесконечно малые,

т.е. $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Таким образом,

$$\Delta z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y\,.$$

А это и означает, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$.

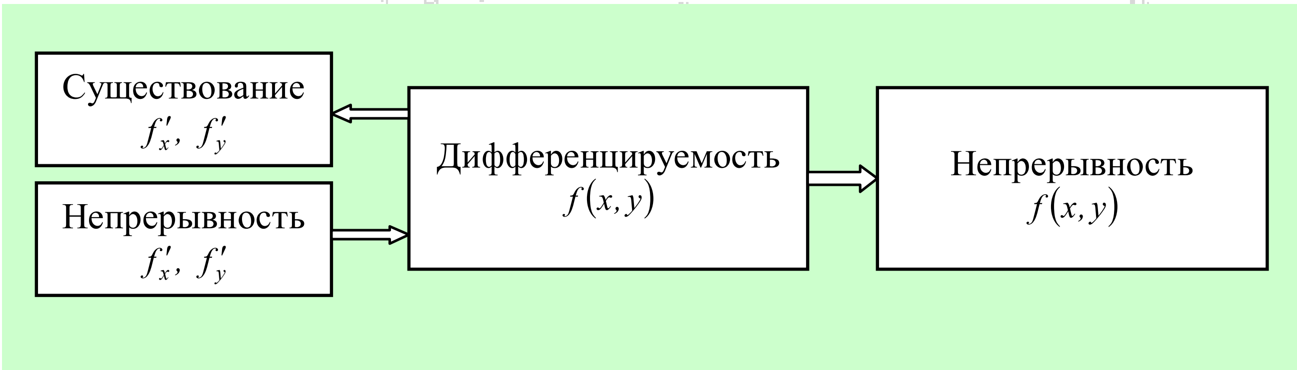
Определение 13.4

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в некоторой области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

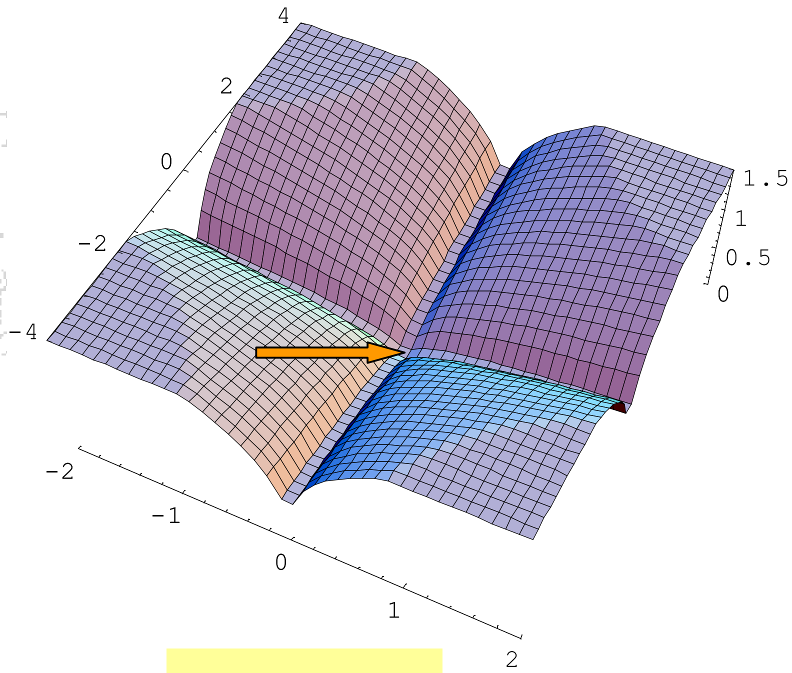
Замечание

Все, сказанное выше, распространяется на функции, зависящие от любого числа независимых переменных.

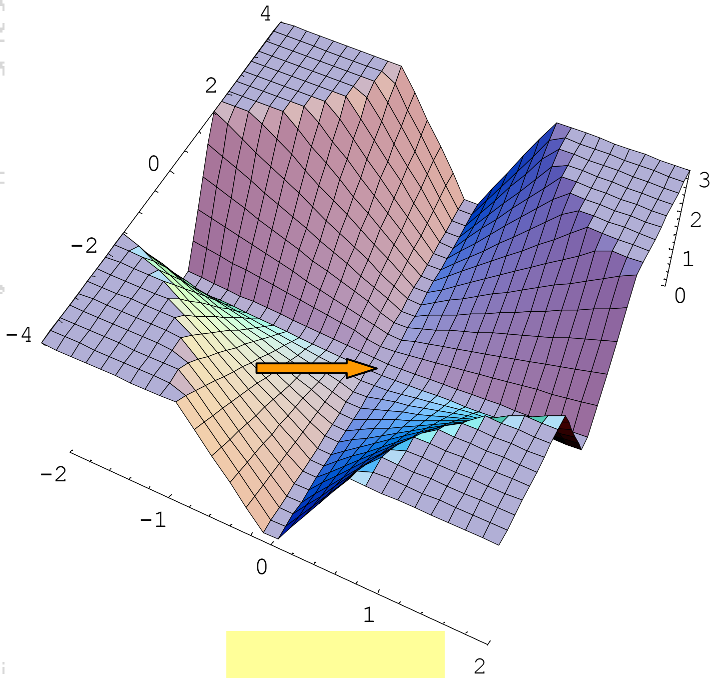
Дифференцируемость функции в точке, как мы установили, приводит к ее непрерывности. Поэтому **из непрерывности частных производных функции вытекает непрерывность самой функции** в точке. Для исследование функции нескольких переменных на непрерывность в рассматриваемой точке достаточно установить факт непрерывности частных производных этой функции в данной точке.



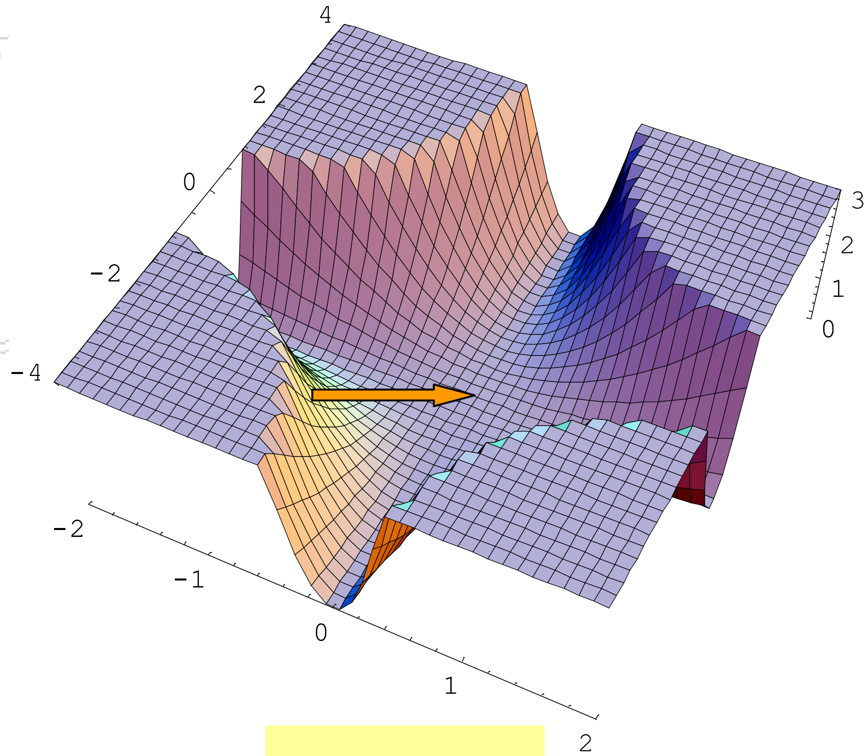
$$z = \left|\sqrt[3]{xy}\right|$$



$$z = |xy|$$



$$z = x^2 y^2$$



ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дифференцирование сложной функции зависящей от одной переменной

Рассмотрим функцию двух аргументов $z = f(x, y)$. Пусть, в свою очередь аргументы x и y являются функциями некоторого аргумента t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда ясно, что z является сложной функцией аргумента t, причем x и y выступают здесь в качестве промежуточных аргументов, т.е.

$$z = f[x(t), y(t)].$$

Предположим, что функция $f(x,y)$ дифференцируема в некоторой точке $M(x,y)$, а функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы по переменной t. Тогда ясно, что если переменная t получит приращение Δt, то переменные $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy, следовательно, функция $z = f[x, y]$ получит полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Разделим обе части этого равенства на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Устремим теперь Δt к нулю, тогда и $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, причем $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{dy}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$.

Окончательно получим $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$.

Пример. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\sqrt{x^2+y}$, $x=\cos t^2$, $y=\operatorname{tg} t$.

Решение. Имеем $\frac{dx}{dt}=-\sin t^2\cdot 2t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}},$$

тогда

$$\frac{dz}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y}}\cdot\left(-2t\cdot\sin t^2\right)+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{1-4t\cdot\cos^3 t^2\cdot\sin t^2}{2\cos^2 t\cdot\sqrt{\cos^2 t^2+\operatorname{tg} t}}.$$

Нетрудно обобщить сказанное на случай $\boldsymbol{z=f\left[t,x(t),y(t)\right]}$. Получим

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Пример. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x \cdot y \cdot t^2$, $x = \ln\sqrt{t}$, $y = e^{\operatorname{arctg} t}$.

Решение. Ясно, что $\frac{\partial z}{\partial t} = 2xyt$, $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot t^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot t^2$,

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2t}$, $\frac{dy}{dt} = e^{arctgt} \cdot \frac{1}{1+t^2}$, получим

$$\frac{dz}{dt} = 2xyt + yt^2 \cdot \frac{1}{2t} + xt^2 \cdot \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2} = 2\ln\sqrt{t} \cdot e^{arctgt} \cdot t + e^{arctgt} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2t} + \frac{\ln\sqrt{t} \cdot t^2 \cdot e^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2}$$

Дифференцирование сложной функции зависящей от нескольких переменных

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании функции $z = z(u, \upsilon)$, где в свою очередь, $u = u(x, y)$, $\upsilon = \upsilon(x, y)$, причем функция $z = z(u, \upsilon)$ дифференцируема по своим аргументам u и υ, а функции $u(x, y)$ и $\upsilon(x, y)$, в свою очередь, дифференцируемы по переменным x и y.

Дадим приращение переменной x, тогда функции $u(x, y)$ и $\upsilon(x, y)$ получают частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x \upsilon$, функция $z = z(u, \upsilon)$ получит полное приращение, вызванное изменениями переменных u и υ, но по отношению к переменной x это приращение будет частным, т.е. получим

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \Delta_x \upsilon + \alpha \cdot \Delta_x u + \beta \cdot \Delta_x \upsilon,$$

где α и β стремятся к нулю при $\Delta_x u$ и $\Delta_x \upsilon$, стремящихся к нулю.

Разделим левую и правую часть этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\Delta_x \upsilon}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \cdot \frac{\Delta_x \upsilon}{\Delta x}.$$

Устремляя Δx к нулю, получим $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial x}$.

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial y}$.

Пример. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\sqrt{u^2+u\upsilon}$, $u=\sin 3xy$, $\upsilon=\cos\frac{y}{x}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u+\upsilon}{2\cdot\sqrt{u^2+u\upsilon}}$; $\frac{\partial z}{\partial \upsilon}=\frac{u}{2\cdot\sqrt{u^2+u\upsilon}}$,

$\frac{\partial u}{\partial x}=3y\cos 3xy$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3x\cos 3xy$.

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$.

Принимая во внимание полученные выше выражения для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u + \upsilon}{2 \cdot \sqrt{u^2 + u\upsilon}} \cdot 3y\cos 3xy + \frac{u}{2 \cdot \sqrt{u^2 + u\upsilon}} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \sin\frac{y}{x} =$$

$$= \frac{\left(2\sin 3xy + \cos\frac{y}{x}\right) \cdot 3y\cos 3xy}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 3xy + \sin 3xy \cdot \cos\frac{y}{x}}} + \frac{(\sin 3xy) \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \sin\frac{y}{x}}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 3xy + \sin 3xy \cdot \cos\frac{y}{x}}}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}$ находится аналогично