Лекция 26

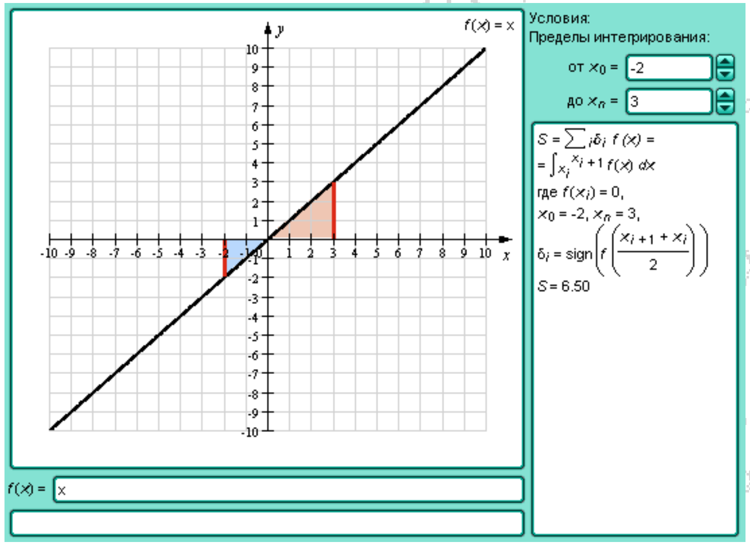
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ(4)

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь в полярных координатах
Вычисление объемов тел
Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений
Объем тел вращения
Вычисление длины дуги кривой

Вычисления в Maple



Площадь фигуры, ограниченной функцией $f\ (x)$, пересекающей ось абсцисс, определяется формулой

$$S = \sum_{i\,:\,f(x)\ge 0}\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i\,:\,f(x)<0}\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\,dx,$$

где x_i – нули функции.

Другими словами, чтобы вычислить площадь этой фигуры, нужно разбить отрезок $[a; b]$ нулями функции $f(x)$ на части, проинтегрировать функцию f по каждому из получившихся промежутков знакопостоянства, сложить отдельно интегралы по отрезкам, на которых функция f принимает разные знаки, и вычесть из первого второе.

Схемы применения определенного интеграла

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком $[a; b]$ изменения независимой переменной x. Предполагается, что эта величина A аддитивна.

Для нахождения этой величины A можно руководствоваться одной из двух схем:
I схема (или ***метод интегральных сумм***) и
II схема (или ***метод дифференциала***).

Первая схема базируется на определении **определенного интеграла**.

Разбиваем отрезок [*a;b*] на *n* частей (частичных отрезков). В соответствии с этим, интересующая нас величина *A* разобьется n «элементарных слагаемых»

Представляем каждое «элементарное слагаемое» в виде произведения некоторой функции f (определяемой из условия задачи), вычисленной в произвольной точке соответствующего частичного отрезка на его длину

При нахождении приближенного значения ΔA_i, допустимы некоторые упрощения: дугу на малом участке можно заменить хордой стягивающей ее концы; переменную скорость на малом участке можно приближенно считать постоянной и т. д.

Получим приближенное значение величины A в виде интегральной суммы:

$$A \approx f(c_1)\Delta x_1 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Искомая величина A равна пределу интегральной суммы, т. е.

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Вторая схема называется «**метод дифференциала**»

На отрезке *[a; b]* выбираем произвольное значение x и рассматриваем переменный отрезок $[a;x]$. На этом отрезке величина A становится функцией x: $A = A(x)$;

Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A = A(x)$: $dA = f(x)dx$, где $f(x)$, определяемая из условия задачи, функция переменной x (здесь также возможны различные упрощения);

Считая, что $dA \approx \Delta A$ при, находим искомую величину путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь в полярных координатах

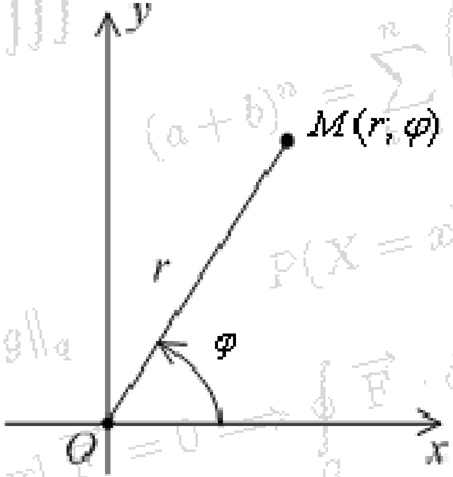
Напомним, что определением интеграла служит предел интегральных сумм, взятый при условии измельчения разбиения отрезка интегрирования.
Этим определением мы воспользуемся для нахождения площади в следующем случае.

Пусть на плоскости фиксирована система полярных координат: полярными координатами точки ***M*** служат два числа

$$(r;\varphi)$$

$r = |OM|$ - ***полярный радиус***,

$\varphi = \angle MOx$ - ***полярный угол***.



Уравнение, задающее зависимость величины τ от полярного угла φ

$$\tau = f(\varphi),$$

задаёт некоторую линию на плоскости.

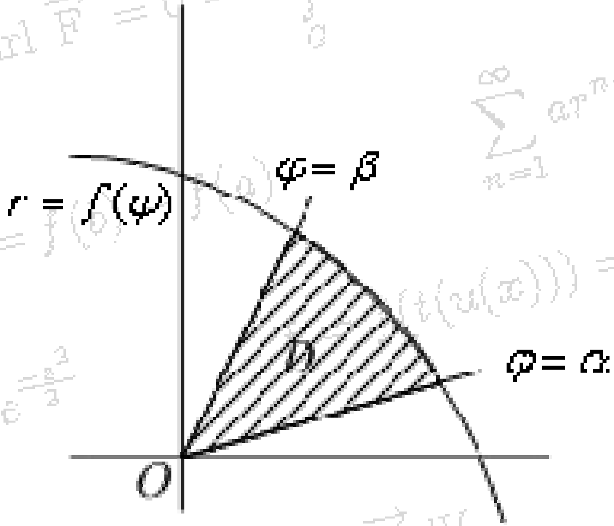
Будем предполагать, что функция $f(\varphi)$ непрерывна при $\varphi \in [\alpha; \beta]$

Рассмотрим область ***D*** на плоскости, расположенную между выходящими из начала координат лучами

$$\varphi = \alpha \quad \text{и} \quad \varphi = \beta$$

и линией

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$$



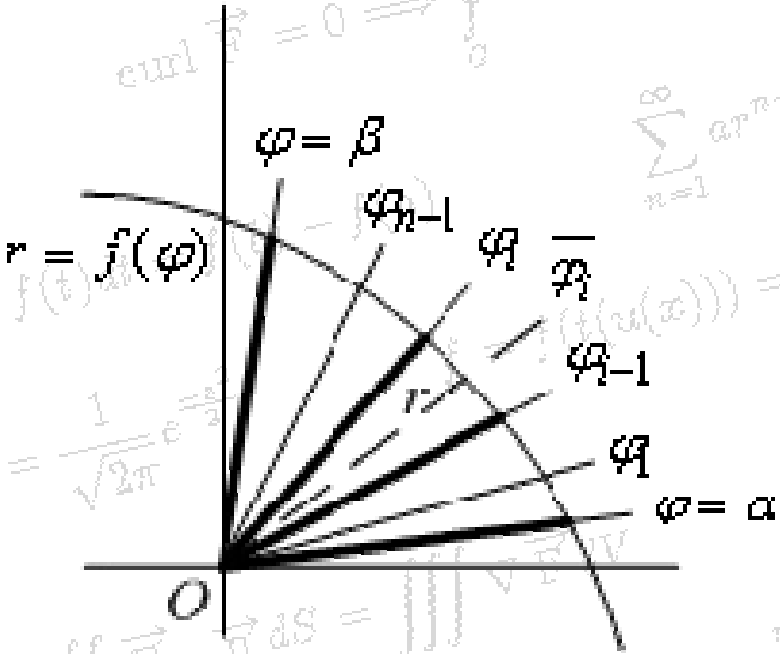
Найдём площадь области ***D***, вначале приблизив область ступенчатой фигурой следующего устройства.
Область изменения угла φ, то есть отрезок [α; β], разобьём на части точками деления

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

и выберем на каждом участке $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$ некоторую отмеченную точку $\overline{\varphi}_i$

Получаем размеченное разбиение отрезка [α; β].

Приближённо будем считать площадь $\widetilde{S}_i$ сектора области ***D***, лежащего между лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$ и $\varphi = \varphi_i$, равной площади S_i кругового сектора с тем же центральным углом $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ и радиусом, равным $r_i = f(\overline{\varphi}_i)$



Площадь кругового сектора подсчитывается по формуле

$$S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}(f(\overline{\varphi}_i))^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Значит, площадь всей области приближённо равна интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(\overline{\varphi}_i))^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

построенной по выбранному размеченному разбиению отрезка [α; β] для функции

$$g(\varphi) = \frac{1}{2}(f(\varphi))^2.$$

При неограниченном измельчении разбиения

эта интегральная сумма будет стремиться к площади области ***D***.

С другой стороны, предел интегральных сумм для функции $g(\varphi)$

даст определённый интеграл от этой функции.

Таким образом, получаем формулу площади:

$$S_D = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Более кратко эту формулу можно записать так:

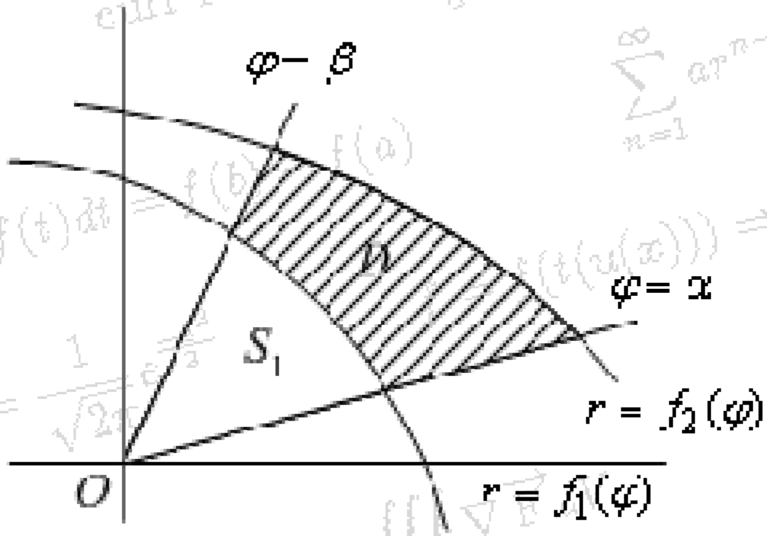
$$S_D = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi,$$

где имеется в виду, что вместо полярного радиуса r нужно подставить его выражение через полярный угол φ для зависимости, график которой ограничивает область снаружи

Если область ***D*** имеет границу, состоящую из двух отрезков лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (эти отрезки могут вырождаться в одну точку)

и двумя линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

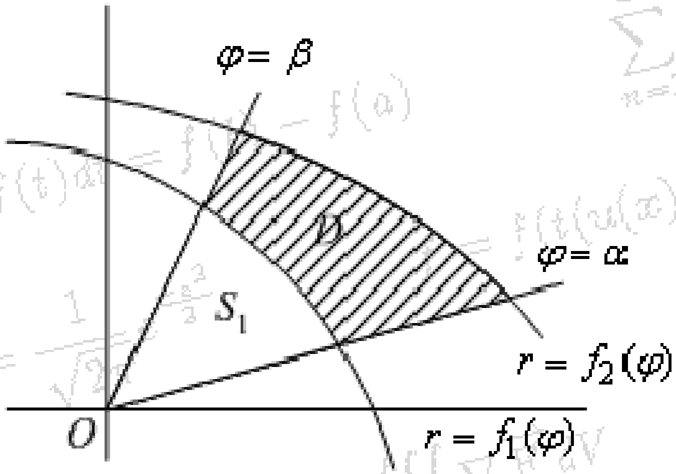
$r = f_1(\varphi)$ и $r = f_2(\varphi)$, причём $f_1(\varphi) \leqslant f_2(\varphi)$ при всех $\varphi \in [\alpha; \beta]$



то площадь ***S*** области ***D*** можно представить как разность двух площадей:

S_2 -площади области, лежащей между лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и линией $r = f_2(\varphi)$, и

S_1 -площади области, лежащей между лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi - \beta$ и линией $r = f_1(\varphi)$



Каждую из площадей S_1 и S_2 можно подсчитать по формуле

$$S_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi,$$

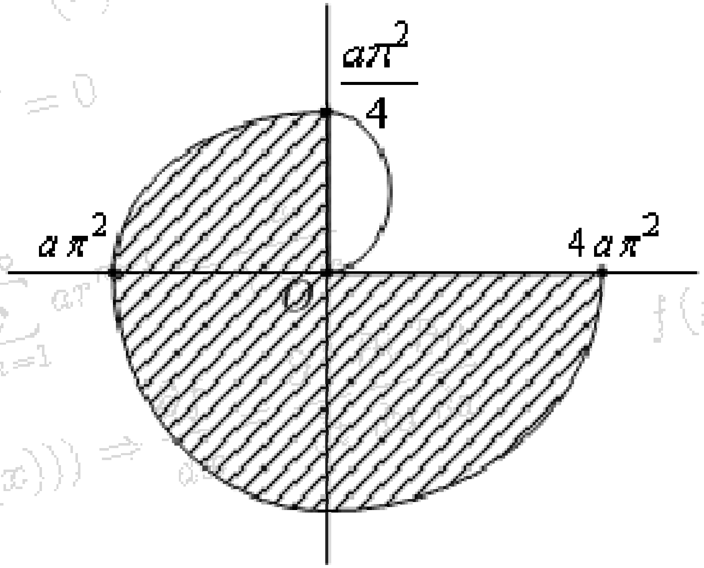
Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}\Big(\int_{\alpha}^{\beta} (f_2(\varphi))^2 \, d\varphi - \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(\varphi))^2 \, d\varphi\Big) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big((f_2(\varphi))^2 - (f_1(\varphi))^2\big) \, d\varphi.$$

Пример.

Найдём площадь ***S*** области, ограниченной частью спирали $r = a\varphi^2$

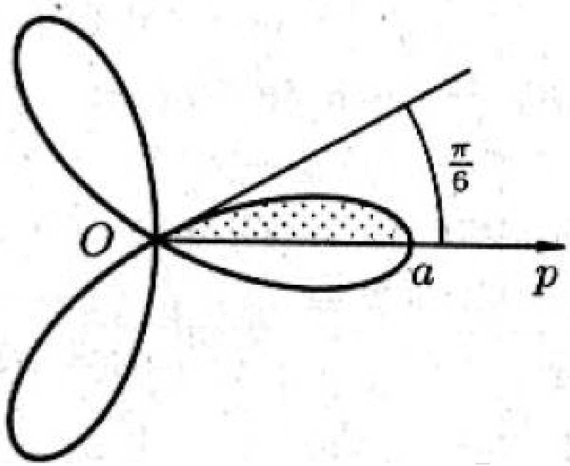
($a > 0$) при $\varphi \in [0; 2\pi]$ и отрезком $[0; 4\pi^2 a]$ оси ***Ox***



Применяя формулу $S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\varphi$,

получаем:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\varphi^2)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^5}{5}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{10}(2\pi)^5 = \frac{16a^2\pi^5}{5}.$$

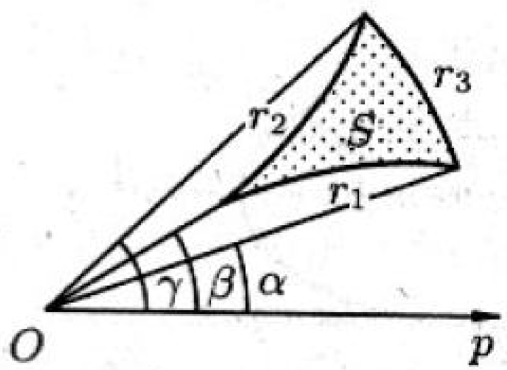


$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi a^2}{24}$$

$$S = \frac{\pi a^2}{4}$$

Пример:



Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади.

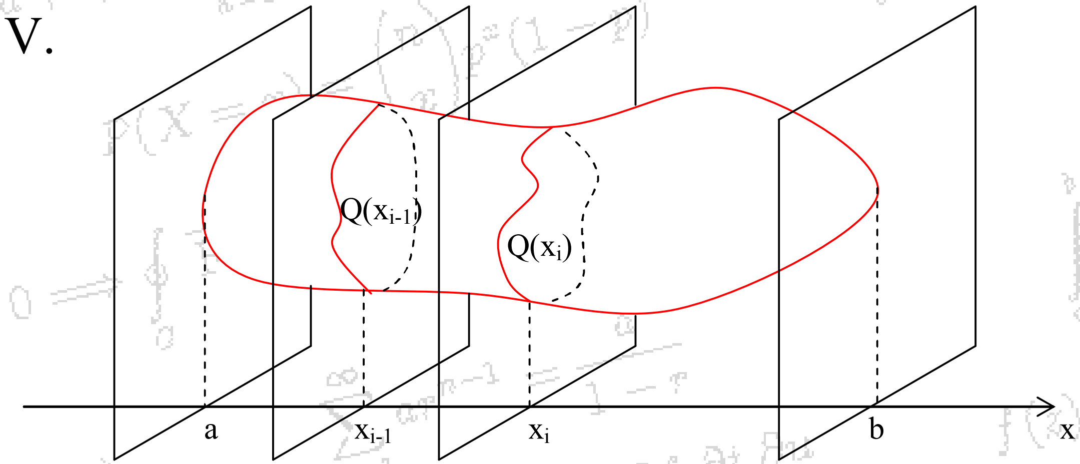
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\gamma} r_3^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r_1^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\gamma} r_2^2\,d\varphi.$$

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений

Пусть имеется тело объема V.

Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x).



Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b].

Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

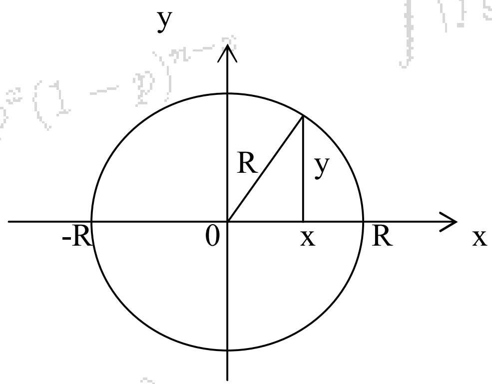
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x) dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.



В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y.

В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$

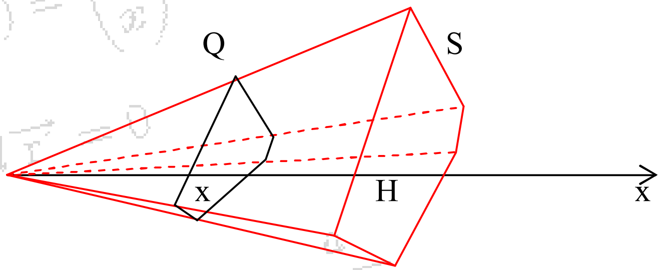
Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Пример:

Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.

При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию.



Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

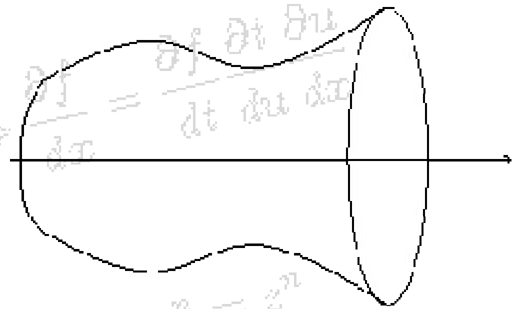
Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2} x^2.$

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{Sx^3}{3H^2} \Big|_0^H = \frac{1}{3} SH$

Объем тел вращения

Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x).
Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b].
Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.

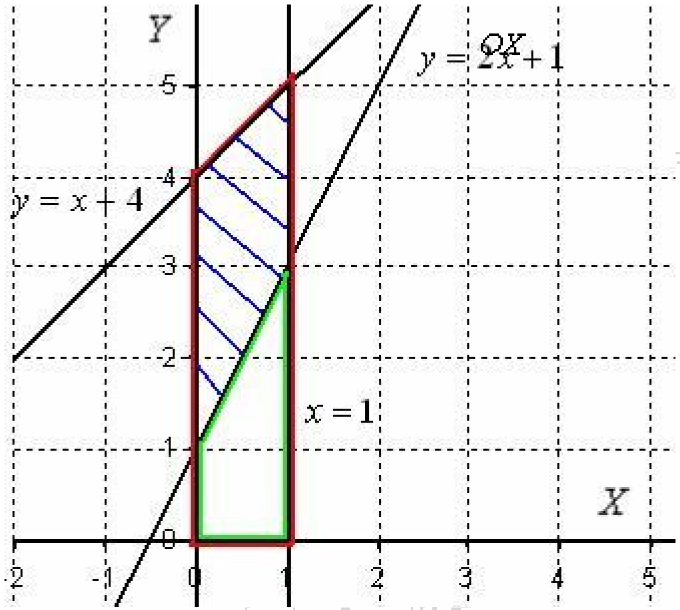
Каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$,



Объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x+1$, $y = x+4$, $x = 0$ и $x = 1$



Искомая фигура заштрихована синим цветом. При её вращении вокруг оси абсцисс получается такой сюрреалистический бублик с четырьмя углами.

Объем тела вращения вычислим как *разность объемов тел*.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси OX получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси OX, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2.

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой $y=x+4$, поэтому:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2+8x+16)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}+4x^3+16x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}+4+16\right) = \frac{61\pi}{3}$$

Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой y=2x+1, поэтому:

$$V_2 = \pi\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi\int_0^1 (4x^2+4x+1)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3}+2x^2+x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{4}{3}+2+1\right) = \frac{13\pi}{3}$$

Объем искомого тела вращения:

$$V = V_1 \quad V_2 = \frac{61\pi}{3} \quad \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$$

$$V = 16\pi \text{ ед.}^3 \approx 50{,}3 \text{ ед}^3.$$

В данном случае решение можно проверить, используя школьную формулу для вычисления объема усеченного конуса.
Само решение чаще оформляют короче, примерно в таком духе:

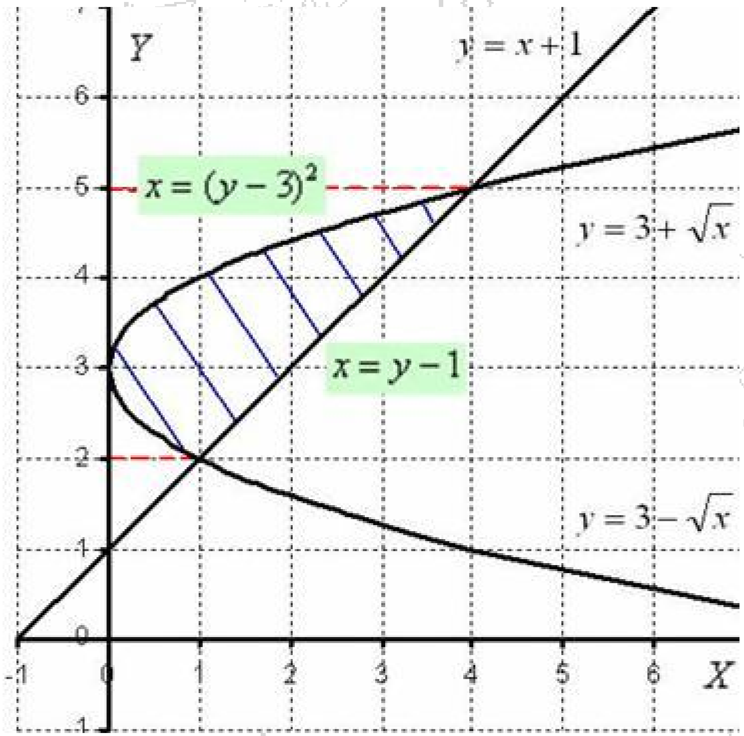
$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 (x+4)^2 dx - \pi\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \ldots$$

Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси ординат

Дана плоская фигура, ограниченная линиями

$$y - 3 + \sqrt{x} \quad y = 3 - \sqrt{x} \quad y = x + 1$$

1) Найти площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями.
2) Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси ординат



Нужная фигура, площадь которой предстоит найти, заштрихована синим цветом

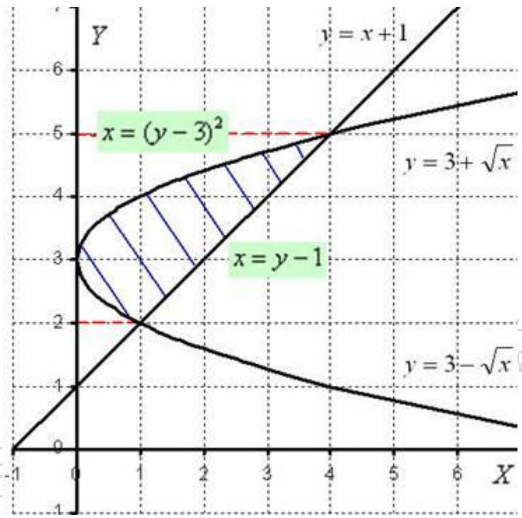
Площадь фигуры находится как сумма площадей

$$S = \int_0^1 (3+\sqrt{x} - (3-\sqrt{x}))dx + \int_1^4 (3+\sqrt{x} - (x+1))dx$$

Есть более рациональный путь решения: он состоит в переходе к обратным функциям и интегрированию по оси OY

$$y = 3 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = y - 3 \Rightarrow x = (y-3)^2$$

$$y = 3 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - y \Rightarrow x = (3-y)^2 \Rightarrow x = (y-3)^2$$

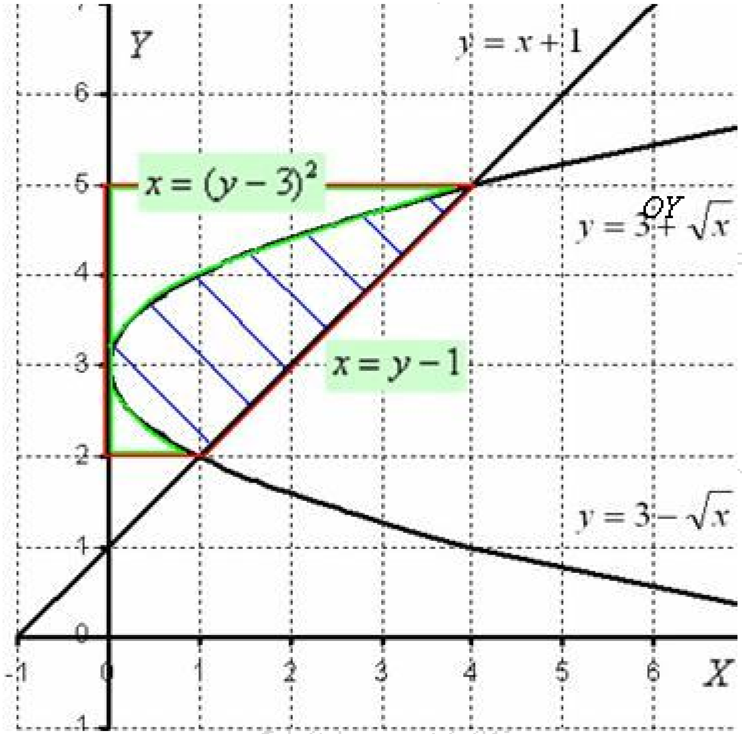


$$S = \int_a^b (f(y) - g(y))\,dy$$

$$S = \int_2^5 (y - 1 - (y-3)^2)\,dy = \int_2^5 (y-1)\,dy - \int_2^5 (y-3)^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}(y-1)^2\Big|_2^5 - \frac{1}{3}(y-3)^3\Big|_2^5 = \frac{1}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(8-(-1)) = \frac{15}{2} - 3 = 4\frac{1}{2}$$

Вычислим объем тела, образованного вращением данной фигуры, вокруг оси OY .



Итак, фигура, заштрихованная синим цветом, вращается вокруг оси OY . В результате получается «зависшая бабочка», которая вертится вокруг своей оси.

Вращаем фигуру, обведенную красным цветом и получаем объем V_1

Вращаем фигуру, обведенную зеленым цветом и получаем объем V_2

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \pi\int_{a}^{b} f^2(y)\,dy$$

OX

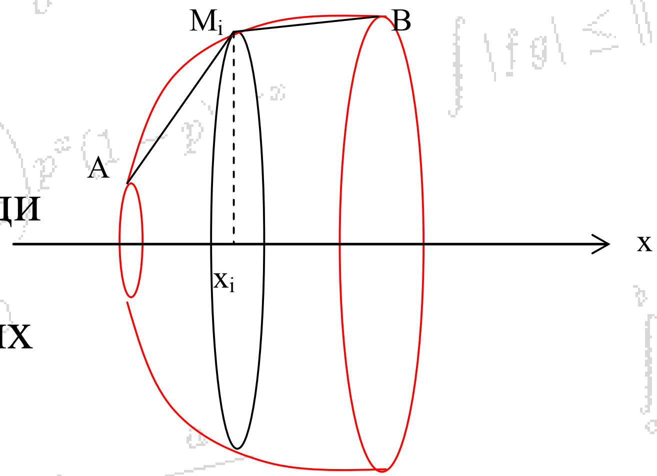
$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^5 (y-1)^2\,dy - \pi\int_2^5 ((y-3)^2)^2\,dy = \pi\int_2^5 (y-1)^2\,dy - \pi\int_2^5 (y-3)^4\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(y-1)^3\Big|_2^5 - \frac{\pi}{5}(y-3)^5\Big|_2^5 = \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{5}(32-(-1)) = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}$$

Замечание. Если эту же плоскую фигуру вращать вокруг оси OX , то получится совершенно другое тело вращения, другого, естественно, объема.

Площадь поверхности тела вращения

Определение: **Площадью поверхности вращения** кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных



Разобьем дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i.

При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i.

Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа к отношению $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 - f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

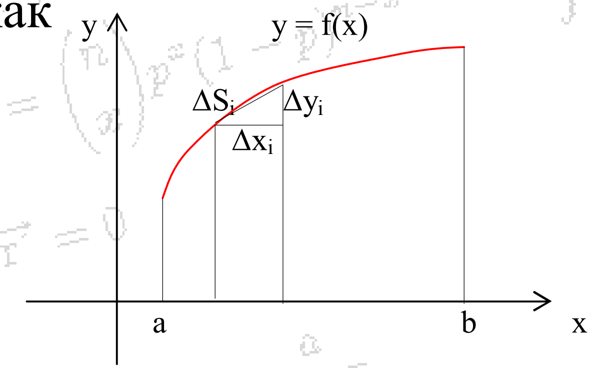
Тогда получаем формулу вычисления **площади поверхности тела вращения.**

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Вычисление длины дуги кривой

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$



Длина дуги может быть определена, как

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Тогда можно показать, что $$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Т.е. $$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Вычислить длину дуги параболы $y = x^2$

от точки $A(1;\,1)$ до точки $B(2,\,4)$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+((x^2)')^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx = (*)$$

$$I = \int \sqrt{1+4x^2}\,dx = (**)$$ по частям

$$u = \sqrt{1+4x^2} \rightarrow du = \frac{8x\,dx}{2\sqrt{1+4x^2}} = \frac{4x\,dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int u\,dv = uv \quad \int v\,du$$

$$(**) = x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{1+4x^2}} = x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{(1+4x^2-1)dx}{\sqrt{1+4x^2}} = x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1+(2x)^2}} = x\sqrt{1+4x^2} - I + \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|$$

$$I = x\sqrt{1+4x^2} - I + \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|$$

$$2I = x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|$$

$$I = \int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|$$

Возвращаемся к основному решению и используем **формулу Ньютона-Лейбница**:

$$(*) = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\right]\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+16} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{1+16}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+4} - \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{1+4}) =$$

$$= \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17}) - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}\right)$$

$$L = \left[\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}\right)\right] \text{ед.} \approx 3{,}17 \text{ ед.}$$

Если уравнение кривой задано **параметрически,**

где x = φ(t) и y = ψ(t).

то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции получаем ,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\, dt$$

Вычислить длину дуги астроиды

$$\begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$$

$$x_t' = (7\cos^3 t)' = 7 \cdot 3\cos^2 t \cdot (\cos t)' = -21\cos^2 t \sin t$$

$$y_t' = (7\sin^3 t)' = 7 \cdot 3\sin^2 t \cdot (\sin t)' = 21\sin^2 t \cos t$$

Упростим сумму квадратов

$$(x_t')^2+(y_t')^2=(-21\cos^2 t\sin t)^2+(21\sin^2 t\cos t)^2=441\cos^4 t\sin^2 t+441\sin^4 t\cos^2 t=$$

$$=441\sin^2 t\cos^2 t\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)=441\sin^2 t\cos^2 t\cdot 1=441\sin^2 t\cos^2 t$$

$u(t)\ge 0$ $[t_1;t_2]$

$u(t)\le 0$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{441\sin^2 t\cos^2 t}\,dt=21\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{(\sin t\cos t)^2}\,dt=(*)$$

$\sqrt{u^2(t)}=u(t)$ если функция положительна на промежутке интегрирования

$\sqrt{u^2(t)}=-u(t)$ если функция отрицательна на промежутке интегрирования

$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ $\sin t\ge 0;\ \cos t\le 0$ $\sqrt{(\sin t\cos t)^2}=-\sin t\cos t$

Заканчиваем решение

$$(*) = -21\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \cos t\,dt = -\frac{21}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\ 2t\,dt = -\frac{21}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(\cos 2t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{21}{4}\cdot(\cos 2\pi - \cos\pi) = \frac{21}{4}\cdot(1+1) = \frac{21}{4}\cdot 2 = \frac{21}{2}$$

$$L = \frac{21}{2}\,ед. = 10{,}5\,ед.$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, $\rho = f(\varphi)$.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}.$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1 способ. Выразим из уравнения переменную y: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тогда $\dfrac{1}{4} S = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int\limits_0^r \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \cdot \arcsin \dfrac{x}{r}\Big|_0^r = r\dfrac{\pi}{2}$

Тогда $S = 2\pi r$. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим:

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\quad \rho' = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$

тогда $\quad S = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\, d\varphi = r\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$