Лекция 24

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ(2)

Интеграл с переменным верхним пределом
Теорема существования первообразной
Формула Ньютона-Лейбница
Формула замены переменной в определенном интеграле
Формула интегрирования по частям

Приближенное вычисление определенных интегралов
Оценка определенных интегралов

Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим определенный интеграл

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$$

Такой интеграла при *t* принимающим значения из некоторого промежутка будем называть интегралом с переменным верхним пределом

Теорема 24.1 (о существовании производной у интеграла с переменным верхним пределом)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Тогда функция $\Phi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx$ имеет производную в любой точке $t\in[a;b]$, причем $\Phi'(t)=f(t)$.

Доказательство

Найдем производную функции $\Phi(t)$ по определению

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int\limits_a^{t+\Delta t} f(x)dx - \int\limits_a^{t} f(x)dx}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)dx}{\Delta t}$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[t;t+\Delta t]$ найдется такая точка t_0, что

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx = f(t_0)\cdot(t+\Delta t - t) = f(t_0)\cdot\Delta t$$

Подставим это выражение в наш предел

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0)\Delta \mathrm{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} f(t_0) = f(t),$$

поскольку t_0 лежит между t и $t+\Delta t$.

Таким образом, **производная от определенного интеграла по его верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе**.

Следовательно мы доказали следующую теорему

Теорема 24.2 (о существовании первообразной).

Если функция $f(x)$ непрерывна, для нее существует первообразная функция.

$\Phi(x)$ есть первообразная для $f(x)$, так как $\Phi'(x) = f(x)$, следовательно,.

совокупность **всех** первообразных для $f(x)$ имеет вид $F(x)=\Phi(x)+C$.

Следствие. $\Phi(x)$ находится по общим правилам интегрирования.

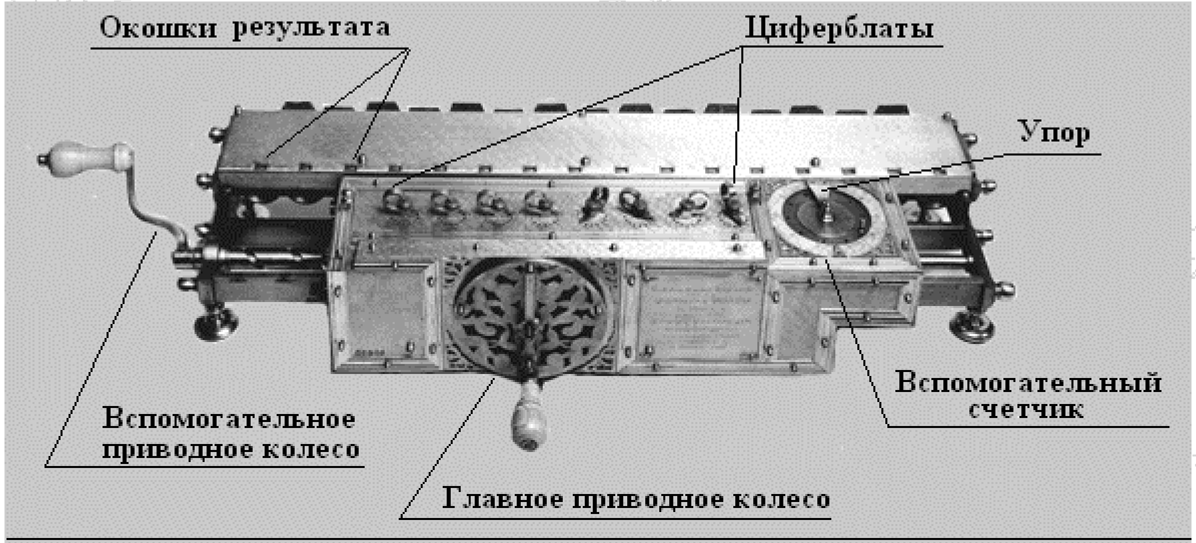
Формула Ньютона-Лейбница

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) – немецкий философ и математик, физик и юрист, историк и языковед.

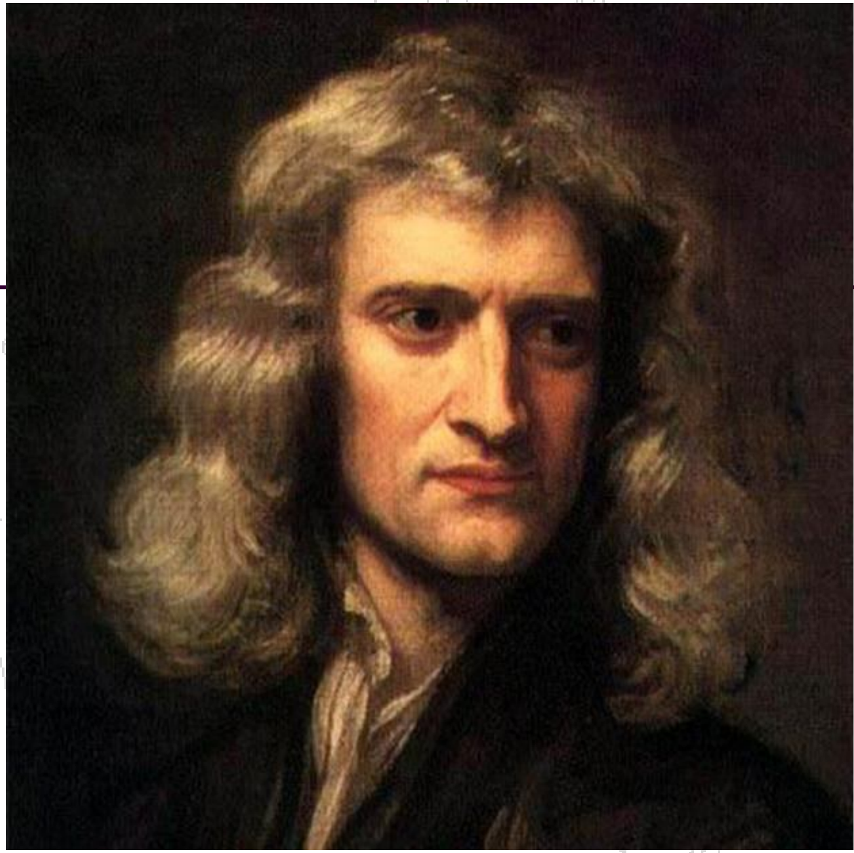
Он ввел определения дифференциала и интеграла, ему мы обязаны использованием знаков дифференциала d и интеграла $\int$, использованием терминов «функция», «переменная», «координаты», «абсцисса» и многим другим.

Описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1

Изобрел первую счетную машину, позволявшую производить умножение и деление также легко, как сложение и вычитание,



Модель калькулятора Лейбница



Английский физик и математик Исаак Ньютон (1643-1727) –родом из деревни, в юности бедный студент, чудом спасшийся во время эпидемии чумы.

С. Вавилов писал, что «на всей физике лежал индивидуальный отпечаток его мысли; без Ньютона наука развивалась бы иначе».

Закон тяготения Ньютона, бином Ньютона, формула Ньютона-Лейбница – перечень научных открытий, которыми мы обязаны ему, огромен.

Теорема 24.3 (основная формула интегрального исчисления).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $F(x)$ есть одна из первообразных на этом отрезке, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Эта формула Ньютона-Лейбница называется также ***основной формулой интегрального исчисления.***

Доказательство

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$$

Функция $\Phi(x)$ является первообразной на отрезке $[a;b]$ для функции $f(x)$. Так как $F(x)$ –первообразная для функции $f(x)$, то $\Phi(x)=F(x)+C$.

Найдем C.

При $x=a$ $\Phi(a)=0$ и $\Phi(a)=F(a)+C$. Отсюда $F(a)=-C$.

Тогда $\Phi(x)=F(x)-F(a)$ при всех $x \in [a;b]$.

В частности, при $x=b$ $\Phi(b) = F(b) - F(a)$.

Окончательно получаем $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Замечание 1. Формула Ньютона-Лейбница сводит вычисление определенного интеграла от функции *f(x)* к нахождению ее первообразной *F(x)*.

Замечание 2. Первым шагом при вычислении определенного интеграла является нахождение первообразной, вторым – вычисление значения первообразной функции в точках *b* и *a*. Поэтому удобно формулу Ньютона-Лейбница записать в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример.

Найти $\int_0^1 xdx$.

Решение. $\int_0^1 xd = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Замечание. Этот интеграл был приведен в качестве примера в лекции 23 для иллюстрации того факта, что, не зная способа нахождения интеграла, мы тем не менее смогли узнать, чему равна его величина.

Теперь у нас есть инструмент для его вычисления.

Это формула Ньютона-Лейбница.

Пример.

Найти $\int_0^{\pi} \sin x dx$

Решение.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Теорема 24.4 (о замене переменной под знаком интеграла)

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Введем новую переменную равенством $x = \varphi(t)$, где

1) между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие;

2) $x = \varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$;

3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$;

4) $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$.

Тогда $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство

$F(x)$ есть **первообразная** для $f(x)$,

$F(\varphi(t))$ - **первообразная** для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Поэтому $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$

Это и означает справедливость рассматриваемого равенства

Пример.

Найти $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Решение. Сделаем замену $x = \sin t$.

Функция $\sin t$ является непрерывной вместе со своей производной.

При $0 \le x \le 1$ справедливо неравенство $0 \le \sin t \le 1$, решение которого $2\pi n \le t \le \pi + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Из этого бесконечного множества промежутков выберем промежуток $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, в пределах которого каждому значению переменной t соответствует единственное значение переменной x и обратно, причем при изменении переменной x от 0 до 1 переменная t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Получим

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt$$

На промежутке $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ функция $\cos t$ неотрицательна, поэтому модуль раскрывается со знаком плюс.

Далее используем формулу $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$.

Тогда $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t\Big|_0^{\pi/2}}{2} + \frac{\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}}{4} = \frac{\pi}{4}$

Формула интегрирования по частям

Теорма 24.4 (об интегрировании по частям)

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные.

Тогда имеет место равенство $$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Доказательство

Функция uv является первообразной для функции $u'v+v'u$.

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b (u'v+v'u)dx = uv\Big|_a^b$$

Преобразуем левую часть

$$\int_a^b (u'v+v'u)dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b v'udx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

Из равенства $\int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b$ получаем искомую формулу

Пример

Вычислить $\int_0^{\pi} x\cos x dx$

Решение

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \int_0^{\pi} xd(\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Точное вычисление определенного интеграла может представлять собой трудоемкую задачу, а иногда и невозможно.

Поэтому развиты приближенные методы вычисления, позволяющие с заранее заданной точностью найти значение интеграла.

Квадратурная формула центральных прямоугольников

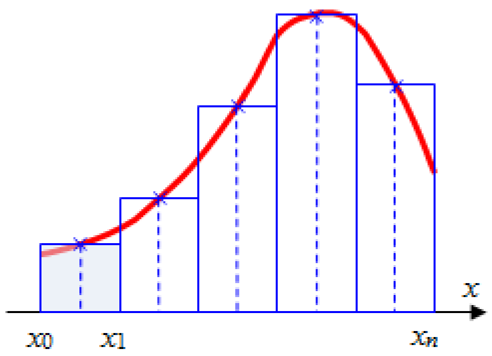
Снова рассмотрим отрезки разбиения $[x_{i-1}; x_i]$

где $i = 1, \dots, n$ и $x_0 = a$, $x_n = b$

и выберем в качестве точек разметки середины каждого из этих отрезков, то есть точки

$$\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

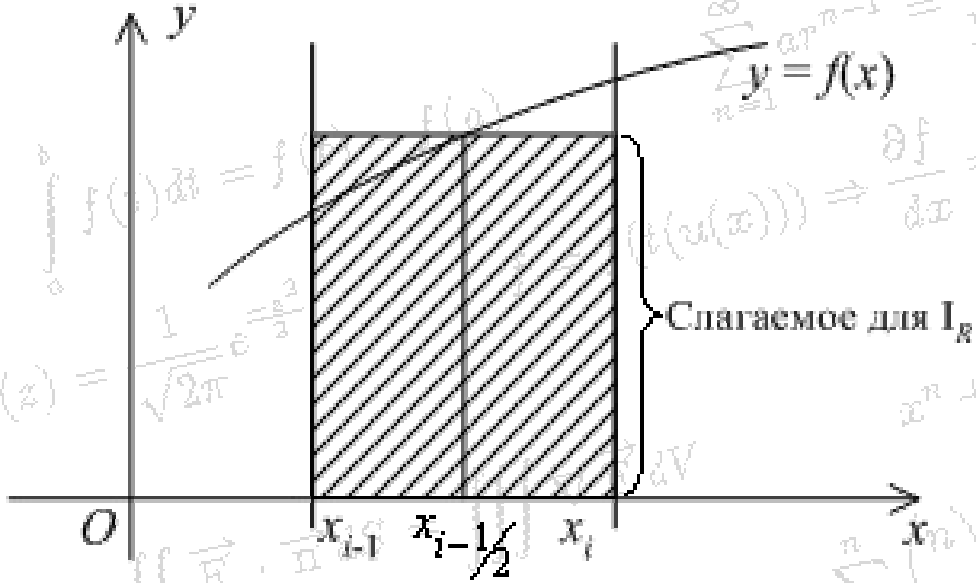
Будем эти середины обозначать $x_{i-\frac{1}{2}}$



Возьмём за приближённое значение интеграла интегральную сумму, построенную по такому размеченному разбиению.
Каждое слагаемое в этой сумме, равное

$$S_i = f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right),$$

выражает площадь прямоугольника с основанием $[x_{i-1}; x_i]$ и высотой, равной значению функции в середине этого отрезка .



Получим тогда квадратурную формулу $I \approx I_R = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})(x_i - x_{i-1})$,

называемую ***формулой центральных прямоугольников***.

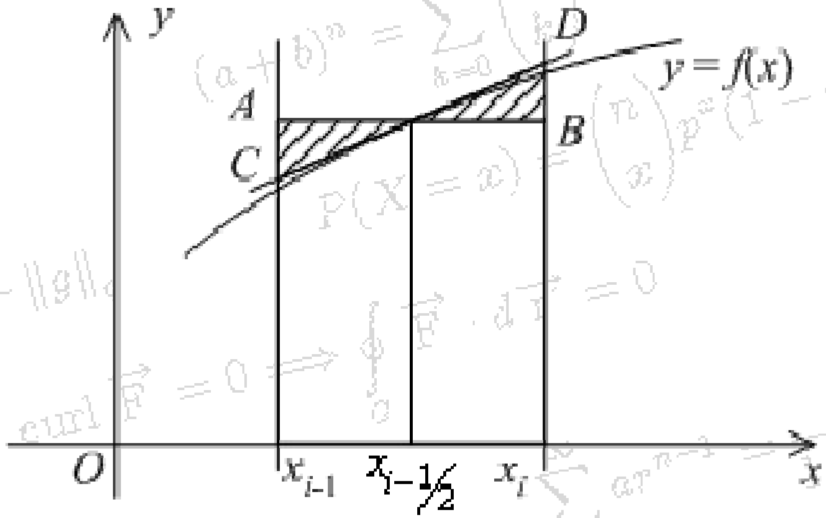
Если взять все отрезки разбиения равной длины $h = \dfrac{b-a}{n}$,

то эта квадратурная формула принимает вид

$$I \approx I_R - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}).$$

Заметим, что в этом случае $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2} = a + ih - \frac{h}{2}$.

Для выяснения характера ошибки $\varepsilon_R = I - I_R$, возникающей при замене I на I_R, заметим, что если функция $f(x)$ дифференцируема, то прямоугольник площади S_i равновелик трапеции, верхней стороной которой служит касательная к графику $y = f(x)$ проведённая при $x = x_{i-\frac{1}{2}}$



Действительно, заштрихованные на рисунке треугольники равны, отчего равны площади прямоугольника $x_{i-1}ABx_i$

и трапеции $x_{i-1}CDx_i$

Отсюда следует, что если функция $f(x)$ имеет вторую производную, то

при $f''(x) < 0$ график является выпуклым кверху и $I_R > I$,

так как из чертежа видно, что площадь трапеции, равная S_i,

больше площади под графиком функции, а при $f''(x) > 0$

график является выпуклым книзу и $I_R < I$

Значит, при $f''(x) < 0$ на $[a; b]$ получаем $\varepsilon_R < 0$,

а при $f''(x) > 0$ - $\varepsilon_R > 0$

Если функция имеет кусочно- непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

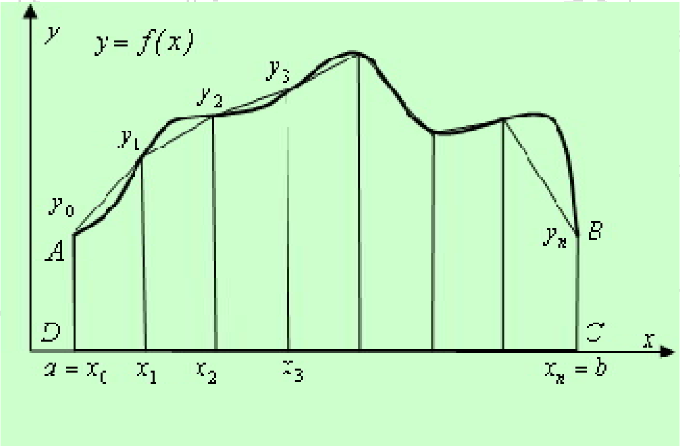
$$f'(x)| \le M_1$$

то погрешность формулы прямоугольников подчиняется неравенству

$$\left|R_N(f)\right| \le \frac{M_1(b-a)^2}{4N}$$

f'

Квадратурная формула трапеций

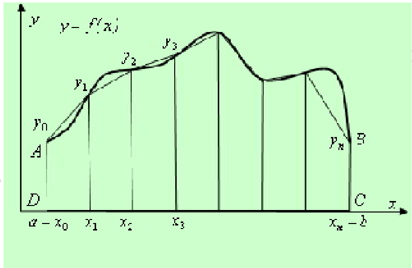


Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Для упрощения рассуждений будем считать, что $f(x) \geq 0$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Через эти точки проведем вертикальные прямые до пересечения с графиком функции $f(x)$ и соседние точки пересечения соединим между собой



Получим n прямолинейных и прямоугольных трапеций.

Пусть $f(a) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$ - основания трапеций, их высоты $\frac{b-a}{n}$.

Сумма площадей этих трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции $ABCD$.

Получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b\text{-}a}{2n}(y_0+y_1)+\frac{b\text{-}a}{2n}(y_1+y_2)+\ldots+\frac{b\text{-}a}{2n}(y_{n-1}+y_n)=$$

$$=\frac{b\text{-}a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b\text{-}a}{2n}\left(y_0+y_n+2\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right)$$

Замечание 1. Данная формула получила название формулы трапеций. Ее точность зависит от n и при возрастании n погрешность формулы убывает.

Замечание 2. Для величины погрешности ε при вычислении интеграла по формуле трапеций было получено ограничение сверху:

$$|\varepsilon| \le \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Если функция имеет кусочно- непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$\left|f'(x)\right| \le M_1$$

то погрешность формулы трапеций подчиняется неравенству

$$\left|R_N(f)\right| \le \frac{M_1 (b-a)^2}{4N}$$

Пример

Вычислить приближенно интеграл $\int_0^5 e^{-x^2}dx$

Решение. Разобьем отрезок $[0;5]$ на пять равных частей.

Получим

$$\int_0^5 e^{-x^2}dx \approx \frac{5-0}{5}\left(\frac{e^0+e^{-25}}{2}+e^{-1}+e^{-4}+e^{-9}+e^{-16}\right)=0{,}9.$$

Погрешность при n=5 довольно велика (~100%).

Оценка определенных интегралов

В некоторых случаях можно отказаться от приближенного вычисления, достаточно сделать оценку интеграла.

Она основана на восьмом свойстве определенных интегралов.

Если функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$, т.е. $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ПРИМЕР. Оценить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - sin^2 x} dx$.

Решение. Оценим подынтегральное выражение.

Поскольку $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$0 \le sin^2 x \le 1$$

$$1 \le 2 - sin^2 x \le 2$$

$$1 \le \sqrt{2 - sin^2 x} \le \sqrt{2}$$

Теперь мы сможем оценить сам интеграл

$$1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\le\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-sin^{2}\,x}dx\le\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

Окончательно

$$1{,}57\approx\frac{\pi}{2}\le\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-sin^{2}\,x}dx\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}\approx 2{,}23$$