Лекция 4

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (2)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}$.

Решение. Заметим, что в точке $x = 0$ данное выражение принимает значение равное 0. При $x = 0$ здесь нет неопределенности, таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1} = 0.$$

Пример 2. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}.$$

Решение. Примем во внимание связь между бесконечно малой и Бесконечно большой функцией. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \infty.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Решение. Очевидно, что мы имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2}{x^3+x^2+x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{x(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x^2+x+1}=0.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}$.

Решение

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1}.$

Решение. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^5}\right)}{x^5\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Замечание

Поведение многочлена на бесконечности определяется поведением его старшей степени. Поэтому при решении данного примера можно было числитель и знаменатель заменить на эквивалентные им старшие степени, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{2x^5}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}.$

Решение. Заменяя многочлены, стоящие под корнем, на эквивалентные им старшие степени, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{9}{12}}}{x^{\frac{8}{12}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}=+\infty.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение. Принимая во внимание первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

запишем данный предел так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\cdot\sin 3x}{3x}}{\dfrac{5x\cdot\sin 5x}{5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2$$

При вычислении данного предела мы учли, что $\cos 0 = 1$.

Пример 11. Вычислить $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x.$

Решение. Заметим, что мы имеем неопределенность 1^∞. Примем во внимание второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Тогда данное выражение можно преобразовать так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

е (2-ой замечательный предел)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)\frac{x}{-(x+2)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)}}_{\downarrow \atop e}\Bigg]^{\overbrace{\frac{x}{-(x+2)}}^{-1 \atop \uparrow}}=e^{-1}.$$

Величина в квадратной скобке в силу второго замечательного предела стремится к ***e***.

Вычисление пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$, $\begin{matrix} g(x)\to\infty \\ f(x)\to 1 \end{matrix}$ при $x\to a$.

Сначала представим функцию *f(x)* в виде суммы единицы и бесконечно малой величины

$$\alpha(x)=f(x)-1 \qquad f(x)=1+(f(x)-1).$$

Преобразуем показатель степени

$$g(x)=\frac{1}{\alpha(x)}g(x)\alpha(x).$$

Учитывая, что при $x\to a$

$$(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\to e$$

получим

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{g(x)\alpha(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\alpha(x)}.$$

Еще один способ вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}},$$

где α(x), β(x) бесконечно малые функции при $x \to a$, основывается на использовании тождества

$$a^b = \exp(b\ln a).$$

При этом

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\beta(x)}} =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\beta(x)}\right).$$

Сравнение бесконечно малых функций

Рассмотрим в точке x_0 бесконечно малые функции $a(x)$ и $\beta(x)$.

Определение 4.4.

$\alpha(x)$ есть **бесконечно малая более высокого порядка малости,** чем $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

При этом пишут $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Соответственно, $\beta(x)$ есть **бесконечно малая более низкого порядка малости,** чем $\alpha(x)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty.$$

Определение 4.5.

Бесконечно малые $a(x)$ и $\beta(x)$ имеют **одинаковый порядок малости**, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k,$$

где k – конечное число, $k \neq 0$.

При этом пишут $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Определение 4.6.

Говорят, что $a(x)$ и $\beta(x)$ **эквивалентные бесконечно малые** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

При этом пишут $a(x)\sim\beta(x)$.

Теорема 4.12.

Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем каждый из сомножителей.

Доказательство.

Пусть $\alpha(x) \underset{x \to x_o}{\to} 0$, $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0; \ \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0.$$

Теорема 4.13.

Для того, чтобы бесконечно малые $a(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка малости, чем каждая из них.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $a(x) \sim \beta(x)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0.$$

Достаточность.

Пусть разность $\alpha(x)$ - $\beta(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0$$

тогда $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$$

Аналогично: $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Теорема 4.14. (Принцип замены на эквивалентную).

Если в точке x_0 $a(x) \sim a_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Доказательство

По условию теоремы, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$ следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Мы доказали ранее замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Отсюда можно сделать вывод, что $\sin x \sim x$ в точке $x_0 = 0$.

Таблица основных эквивалентностей

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x \ (x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x \ (x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x \ (x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \ (x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \ (x \to 0)$;
8. $\ln(1 + x) \sim x \ (x \to 0)$;
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e \ (x \to 0)$;
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x,\ k > 0 \ (x \to 0)$

    в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$.

Приведенная таблица допускает более широкое толкование, а именно: если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$