Лекция 22

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (5)

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Квадратичные иррациональности

Выделение полного квадрата

Тригонометрическая подстановка

Интеграл вида $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$

Подстановки Эйлера

Дробно-линейная подстановка

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями.

Рассмотрим приемы для интегрирования некоторых типов иррациональных функций, с помощью подстановок, позволяющих преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

.

Квадратичные иррациональности

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей

Их можно найти следующим образом:
Под радикалом выделяют полный квадрат

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

и делают подстановку ***x + b/a =t***
При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}.$$

$$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right),$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16})}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}}}.$$

$$x + \frac{1}{4} = t,\ x = t - \frac{1}{4},\ dx = dt.$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}\right| + C.$$

Пример $$I=\int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$$

$$6-2x-x^2=-(x^2+2x-6)=-((x+1)^2-7)=7-(x+1)^2$$

$$x+1=t,\ x=t-1,\ dx=dt$$

$$I=\int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(7-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7-t^2)+3\int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-t^2}}=$$

$$=-\sqrt{7-t^2}+3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}-\sqrt{6-2x-x^2}+C.$$

Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx, \int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx, \int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих ***тригонометрических подстановок***:

$x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла;

$x = a \cdot \mathrm{tg}\, t$ для второго интеграла;

$x = a/\sin t$, для третьего интеграла.

Пример.

$$I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx.$$

$$x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t\,dt,\ t = \arcsin\frac{x}{2}.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$

$$= C - \arcsin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\left(\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right).$$

Интеграл вида $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку

$$x+\frac{b}{2a}=t$$

интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа

$$\int R(t; \sqrt{a^2-t^2})\,dt \quad \int R(t; \sqrt{a^2+t^2})\,dt, \quad \int R(t; \sqrt{t^2-a^2})\,dt$$

Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx.$$

$x^2+2x-4=(x+1)^2-5$ $\quad x+1=t,\ x=t-1\ \ dx=dt$

$$I=\int\frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}\,dt$$

$t=\dfrac{\sqrt{5}}{\sin z},\ dt=\dfrac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}\,dz \qquad z=\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{t}$

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z} - 5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{(-\sqrt{5})\cos z}{\sin^2 z}\, dz = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2 z\, dz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z)\, dz = -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right) + C.$$

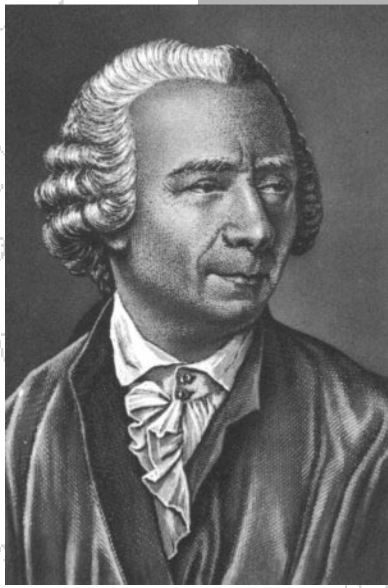
Замечание

Интеграл типа

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

целесообразно находит с помощью подстановки **x=1/t**

Подстановки Эйлера



Они являются частным случаем общего класса интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$. На квадратный трехчлен накладывается условие – его корни не равны. Рационализация (или добавление нового радикала) достигается подстановками Эйлера.

1. Пусть a>0.

Тогда положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=\varphi(x)=t-\sqrt{a}\,x$.

Имеем: $ax^2+bx+c=t^2-2xt\cdot\sqrt{a}+ax^2$ или $bx+c=t^2-2xt\sqrt{a}$, так что

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b};\qquad dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, t - \sqrt{a}\,\frac{t^2 - c}{b + 2 + \sqrt{a}}\right)\frac{2t\left(b + 2t\sqrt{a} - 2\sqrt{a\left(t^2 - c\right)}\right)}{\left(b + 2 + \sqrt{a}^2\right)}dt$$

$$= \int R^*(t)dt = \int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

где *P(t)* и *Q(t)* – многочлены.

Чтобы вернутся к исходной переменной надо положить

$$t = \varphi(x) + \sqrt{a}x$$

1. Подстановка применима и для случая *c>0*. Тогда полагаем $\varphi(x) = xt + \sqrt{c}$, $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c$, $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t$ – снова имеем уравнение I степени относительно переменной *x*. Отсюда после несложных выкладок получим $x = \dfrac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$, $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{a - t^2}$, $dx = 2\dfrac{\sqrt{c}t^2 - bt + a}{(a - t^2)^2}dt$.

Подставляя эти соотношения в исходный интеграл $\int R(x, \varphi(x))dx$, осуществим его рационализацию. Проинтегрировав, необходимо положить

$$t = \frac{\varphi(x) - \sqrt{c}}{x}.$$

Если многочлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то допустимы такие подстановки:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$$

Дробно-линейная подстановка

Применяется к интегралам вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

где n- натуральное число

С помощью подстановки

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

функция рационализируется

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)'dt=\int r(t$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной **наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.**

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= -2\int\left(t + \frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int t\,dt - 2\int \frac{t}{t-1}dt = -t^2 - 2\int\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln\left|t-1\right| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{\begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ dx=12t^{11}dt; \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= 12\left(\int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) =$$

$$= 12\int t\,dt - 12\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + 12\int dt - 12\int \frac{dt}{1+t^3} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12\,arctg\,t + C =$$

$$= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1) -$$

$$-12\,arctg\sqrt[12]{x-1} + C.$$

В общем случае интегралы типа

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)$$

где *a*, *b*, *c*,*d* — действительные числа, α,β,γ,δ,— натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

где *к* — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \ldots, \frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки следует, что $$x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a}$$

$$dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k - a) - (b - dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k - a)^2}\,dt,$$

т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t.

При этом и каждая степень дроби

$$\frac{ax + b}{cx + d}$$

выражается через рациональную функцию от t.

Пример

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}.$$

$$x+2=t^6,\ x=t^6-2,\ dx=6t^5\,dt,\ t=\sqrt[6]{x+2}.$$

$$I=\int\frac{6t^5\,dt}{t^4-t^3}=6\int\frac{t^2\,dt}{t-1}=6\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt=$$

$$=6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{x+2}+6\cdot\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C.$$

О "неберущихся" интегралах

При вычислении производной, наличие формул для производной суммы, разности, произведения, частного и композиции - всех тех операций, при помощи которых элементарные функции образуются из минимального набора - приводит к тому, что **производная любой элементарной функции снова является элементарной функцией**

При нахождении неопределённых интегралов, однако, формул для первообразной произведения, частного и композиции нет. Это приводит к такому положению, что отнюдь **не для любой элементарной подынтегральной функции можно "взять интеграл", то есть выразить некоторую первообразную для подынтегральной функции в виде некоторого выражения, использующего лишь элементарные функции.**

Дело в принципиальной невозможности: **никакая из первообразных в случае "неберущегося" интеграла никаким образом не может быть выражена как комбинация элементарных функций**, связанных знаками арифметических действий и знаками композиции.

В науке и её приложениях в технике, экономике и других дисциплинах применяются многие неэлементарные функции; часто их называют ***специальными.*** К специальным функциям относятся и многие первообразные для элементарных функций, причём часто не столь уж "сложной" структуры.

Интегралы, выражающиеся через такие первообразные, называются (по традиции, берущей начало в 18 веке) ***неберущимися***

Определение

Интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

не берётся, если функция $F(x)$ не является элементарной.

Некоторые неберущиеся интегралы

(неопределенные интегралы, являющиеся неэлементарными функциями)

$$\int \frac{x\,dx}{\sin x}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^3 x}.$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x}.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sin x}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$$

$$\int \sin x^2\,dx$$

$$\int \cos x^2\,dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$$

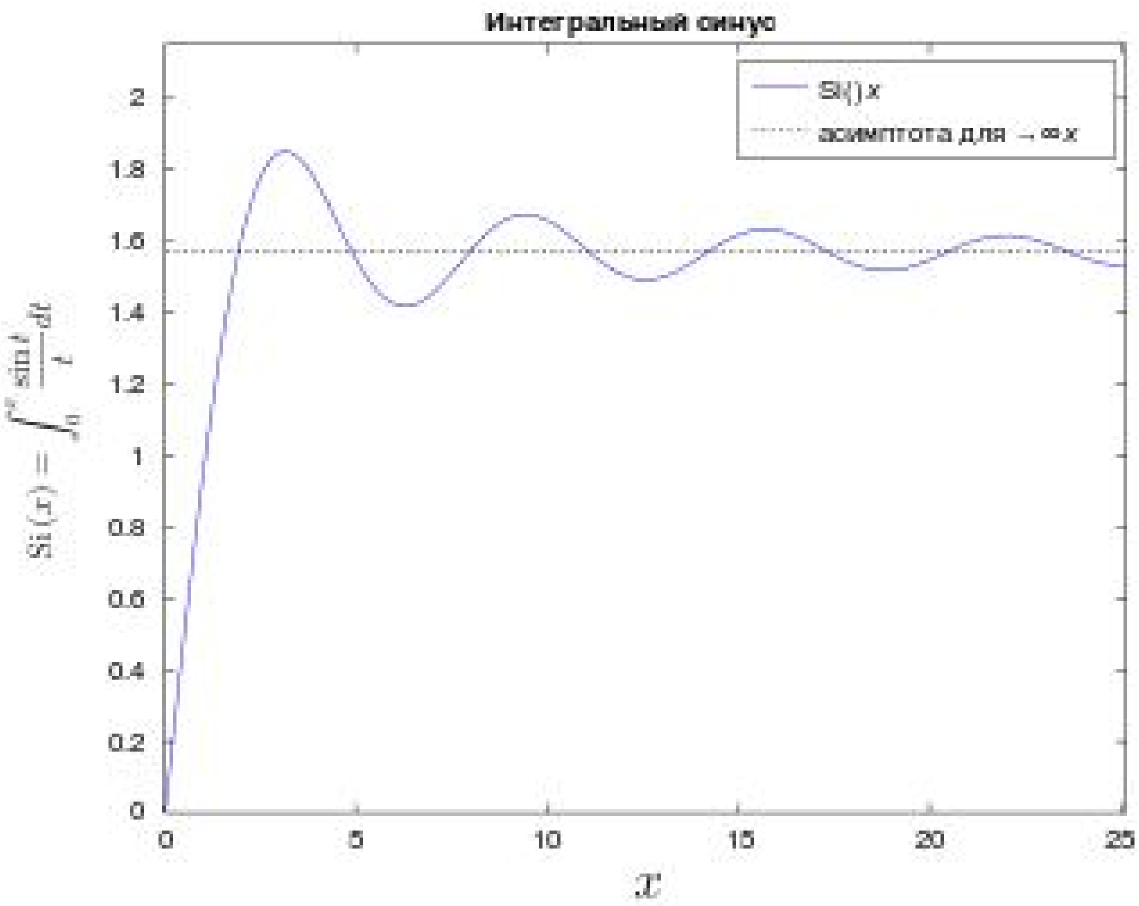
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$$

Пример

Неберущимся является интеграл

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}\Phi(x) + C.$$

Функция Ф(х), которая выделяется из всего набора первообразных условием **Ф(0)=0**. называется ***функцией Лапласа***. Она широко применяется в теории вероятностей, физике, математической и прикладной статистике и других разделах науки и её приложений.


Интегральный синус
Si( ) x
асимптота для → ∞ x
$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$
x
0
5
10
15
20
25
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

Пример

Неберущимся также является интеграл

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Si}(x) + C.$$

Доопределим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

полагая её равной 1 при x=0. В соответствии с тем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

доопределённая функция будет непрерывна на всей числовой оси. Среди её первообразных F(x) выделим ту, для которой F(0)=0. Эта неэлементарная функция называется ***интегральным синусом*** и обозначается Si(x).

Пример

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \mathrm{Ci}(x) + C.$$

Одна из первообразных -обозначается Ci(x) и называется ***интегральным косинусом***

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \mathrm{Ei}(x) + C$$

Одна из первообразных, Ei(x) , - специальная функция, называющаяся ***интегральной экспонентой***

Пример

Выразим через функцию Лапласа следующий интеграл

$$\int e^{-x^2}dx.$$

Для этого сделаем замену переменной $z = \sqrt{2}\,x$

$$\int e^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt{2}x \\ x^2 = \frac{z^2}{2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dz \end{array} \right| =$$

$$= \int e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \Phi(z) + C = \sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{2}x) + C.$$

Первообразная

$$\int e^{-x^2} dx = F(x) + C$$

для которой F(0)=0 обозначается

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} x$$

Функция **erf x** называется в теории вероятностей и статистике ***функцией ошибок***.