

Versuchsprotokoll

WÄRMELEHRE

Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten
mit der Rüchardt-Methode

Simon Schwarz und Marius Ising

Inhaltsverzeichnis

1. Rüchardt-Methode	3
2. Versuchsaufbau	4
3. Versuchsdurchführung	5
4. Versuchsauswertung	6
5. Fazit	9
A. Regression der mittleren und großen Flasche	10

1. Rüchardt-Methode

Wir wollen den Adiabatenkoeffizienten $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ von Luft mit der Rüchardt-Methode bestimmen. Dabei ist c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck und c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen. Die Rüchardt-Methode beruht auf der Messung von Schwingungen einer Stahlkugel.

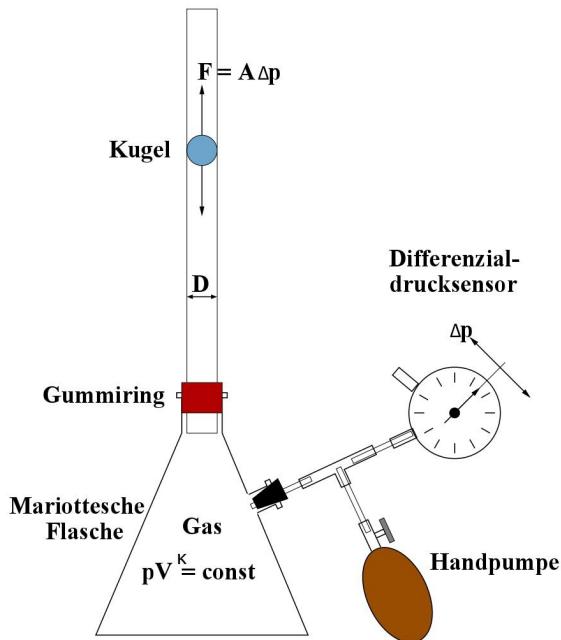


Abbildung 1: Prinzip der Messung von κ nach Rüchardt

Die Kugel befindet sich im Gleichgewicht, wenn der Druck p in der Flasche gleich der Summe aus dem Außendruck p_0 und dem Druck der Gewichtskraft der Kugel ist. Dann gilt

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}$$

mit der Querschnittsfläche $A = \pi \frac{D^2}{4}$ des Glasrohrs. Lenkt man die Kugel um eine Strecke x aus der Gleichgewichtslage aus, so ändert sich der Druck um dp und es wirkt eine Kraft $A dp$ auf die Kugel. Mit der Reibungskraft $F_R = \alpha \frac{dx}{dt}$ ergibt sich dann

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = A dp - \alpha \frac{dx}{dt}.$$

Der Prozess wird als quasi adiabatisch betrachtet, da er für einen Wärmeaustausch zu schnell abläuft. Damit gilt die Differenzialgleichung der Adiabate

$$\frac{dp}{p} = -\kappa \frac{dV}{V}.$$

Mit der Volumenänderung $dV = Ax$ erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{p\kappa A^2}{mV} x = 0.$$

Dies ist die Differenzialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung. Aus der Schwingungsfrequenz $\omega_0^2 = \frac{p\kappa A^2}{mV}$ der ungedämpften Schwingung ergibt sich dann

$$\kappa = \omega_0^2 \frac{mV}{pA^2}.$$

Mit dem Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ und der Schwingungsfrequenz ω der gedämpften Schwingung erhält man

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2.$$

2. Versuchsaufbau

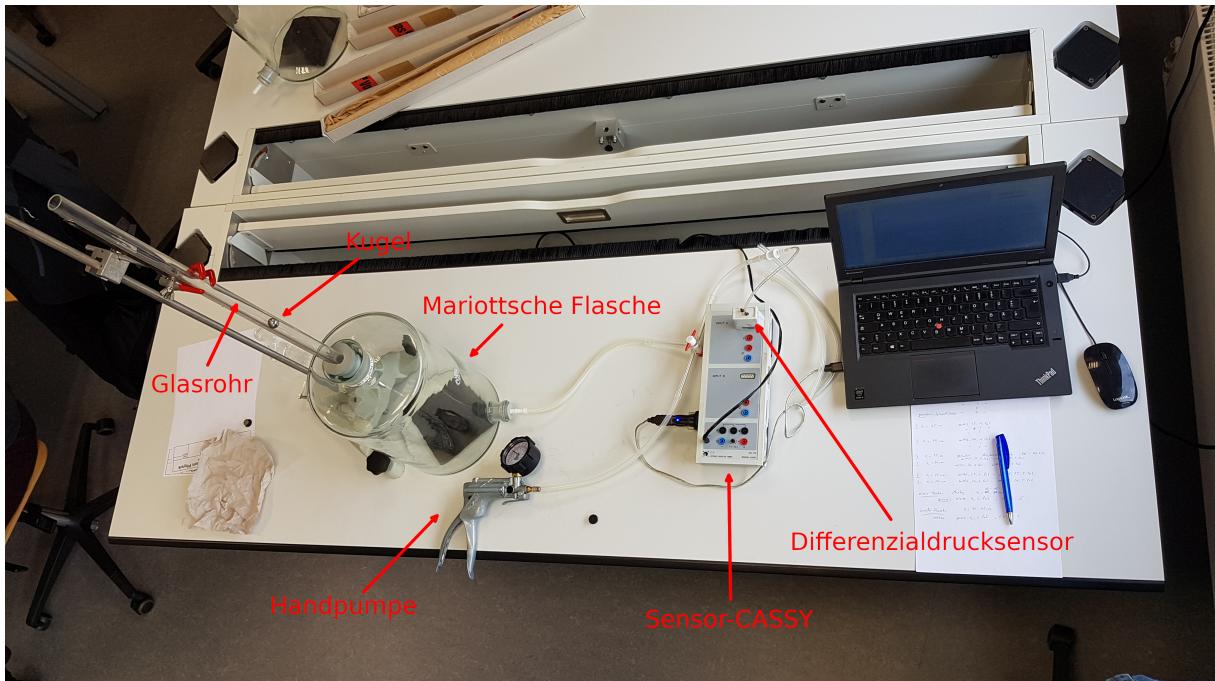


Abbildung 2: Versuchsaufbau

In die Mariotttsche Flasche wird vertikal ein Glasrohr eingeführt, welches durch einen Gummiring luftdicht abgeschlossen ist. Die vertikale Position das Rohrs wird mit einer Greifhalterung, die an einem Stativ befestigt ist, fixiert. Zusätzlich wird an die Halterung ein Metallmaßstab angebracht. In den Auslass der Mariotttschen Flasche wird über ein Schlauch und eine T-Ventil eine Handpumpe und ein Differenzialdrucksensor angeschlossen. Der Sensor wird dabei an den Eingang A des Sensor-CASSY angeschlossen. Es stehen insgesamt drei Flaschen mit unterschiedlichen Größen zur Verfügung.

3. Versuchsdurchführung

Die Masse m der Kugel wird mittels einer Digitalwaage und der Durchmesser D mit einer Mikrometerschraube gemessen. Der Außendruck p_0 wird von einer Wetterstation am Campus Hörn abgerufen. Der Versuchsaufbau wird nacheinander mit den drei Mariottischen Flaschen aufgebaut. Für jede Flasche wird die Schwingung bei 6-7 verschiedenen Starthöhen x_0 aufgezeichnet. Die Starthöhen werden zwischen 50 cm und 15 cm gewählt und in Schritten von 5 cm geändert. Dabei werden für jede Höhe 5 Messungen des Differenzialdrucksensors aufgezeichnet. Für den Relativdruck wird zwischen dem Messbereich von $\pm 21 \text{ hPa}$ und $\pm 70 \text{ hPa}$ variiert. Für die Messung mit dem Sensor-CASSY werden folgende weitere Messparameter gewählt:

- Intervall: $500 \mu\text{s}$
- Messungen: 16000
- Messzeit: 8 s

Für die Höhe $x_0 = 50 \text{ cm}$ bei der mittleren Flasche ist das Messintervall abweichend auf $200 \mu\text{s}$ festgesetzt. Zusätzlich wurde bei dieser Höhe noch eine Messung mit den anderen Parametern durchgeführt. Das Volumen der kleinen und der mittleren Flasche wird mittels Wiegung der leeren und der mit Wasser gefüllten Flasche nach dem eigentlichen Versuch bestimmt. Für das Volumen der großen Flasche wird der auf einem Aufkleber angegebene Wert benutzt.

4. Versuchsauswertung

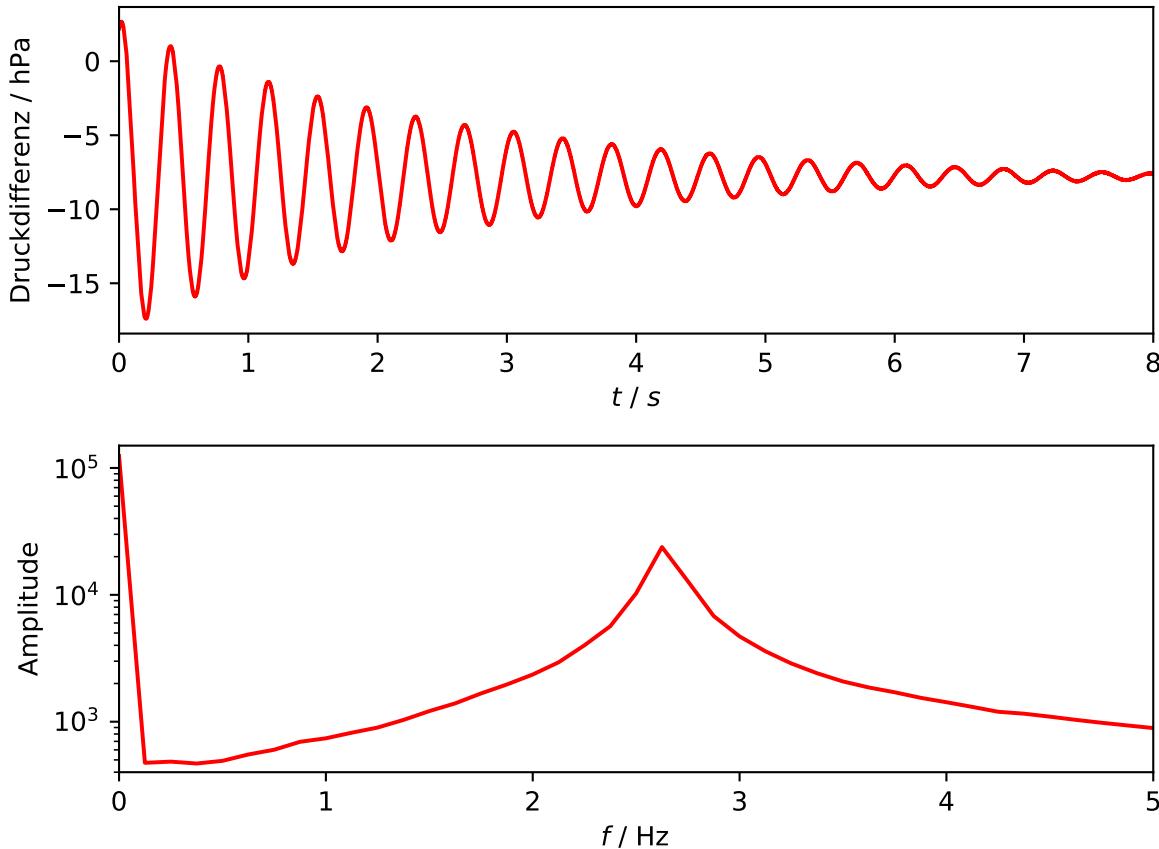


Abbildung 3: Visualisierung der Rohdaten

Eine typische Messung des Differenzialdrucksensors, sowie des daraus mittels FFT berechneten Frequenzspektrums, ist in Abbildung 3 zu sehen. Folgende Werte wurden während des Versuches gemessen: $m_{\text{Kugel}} = (16.5 \pm 0.02)\text{g}$, $d_{\text{Kugel}} = (16.00 \pm 0.002)\text{mm}$, $p_0 = 99400\text{Pa}$, $V_{\text{klein}} = 0.00031\text{m}^3$, $V_{\text{mittel}} = 0.00112\text{m}^3$ und $V_{\text{groß}} = 0.01132\text{m}^3$. Die Volumenangaben bezeichnen dabei jeweils die Flaschenvolumen der Mariottischen Flaschen und haben einen vernachlässigbar kleinen Fehler. Das Volumen V in der Formel für κ setzt sich jedoch zusammen aus dem Flaschenvolumen V_F , dem Volumen im Glasrohr $x_0 A$ und dem Restvolumen V_r . Man erhält den linearen Zusammenhang

$$(V_F + x_0 A) \left(\frac{1}{\omega_0^2} \right) = \frac{p \kappa A^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2} - V_r.$$

Die Fläche $A = \frac{\pi d_{\text{Kugel}}^2}{4} = (2.0106 \pm 0.0007) \text{m}^2$ kann mit dem Durchmesser der Kugel berechnet werden. Damit lässt sich eine lineare Regression durchführen, um das nicht gemessene V_r zu bestimmen. Die Frequenzen ω_0 werden für jede Höhe auf Grundlage aller

fünf Messungen ermittelt. Die Kreisfrequenz ω der Schwingung wird mit der Peakfinder-Methode aus der Praktikumsbibliothek bestimmt. Anschließend werden die Ergebnisse der fünf Messungen gemittelt und der Fehler des Mittelwertes als Unsicherheit genommen. Daraus ergeben sich die Werte in Tabelle 1.

Höhe [cm]	ω / Hz		
	Kleine Flasche	Mittlere Flasche	Große Flasche
15	30.130 ± 0.116		
20	29.773 ± 0.065	16.817 ± 0.042	5.963 ± 0.028
25	29.487 ± 0.095	16.756 ± 0.005	5.672 ± 0.010
30	28.998 ± 0.085	16.776 ± 0.035	5.655 ± 0.005
35	28.576 ± 0.115	16.625 ± 0.071	5.668 ± 0.001
40	28.258 ± 0.090	16.576 ± 0.073	5.682 ± 0.003
45	27.749 ± 0.065	16.508 ± 0.096	5.690 ± 0.014
50		16.282 ± 0.017	

Tabelle 1: Gemittelte Schwingungsfrequenzen

Die Dämpfung wird durch eine numerische Fittung eines Modells der Form

$$p(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + B$$

an die Daten bestimmt. Dabei wird wieder aus den fünf Messungen gemittelt und der Fehler auf den Mittelwert genommen. Die Werte sind in Tabelle 2 und der genaue Algorithmus ist in `frequenzen.py` einsehbar.

Höhe [cm]	δ		
	Kleine Flasche	Mittlere Flasche	Große Flasche
15	1.032 ± 0.050		
20	0.912 ± 0.015	0.465 ± 0.022	0.334 ± 0.004
25	0.894 ± 0.020	0.441 ± 0.012	0.248 ± 0.015
30	0.861 ± 0.005	0.493 ± 0.015	0.204 ± 0.005
35	0.928 ± 0.018	0.482 ± 0.016	0.228 ± 0.006
40	0.973 ± 0.036	0.461 ± 0.016	0.247 ± 0.007
45	0.921 ± 0.035	0.470 ± 0.038	0.259 ± 0.021
50		0.539 ± 0.027	

Tabelle 2: Gemittelte Dämpfungskonstanten

Die Anpassung für den Dämpfungskoeffizienten liefert durchaus gute Ergebnisse. Beispielhaft ist dies in Abbildung 4 gezeigt. Andererseits spielt der Fehler auf δ nur eine untergeordnete Rolle bei der Bestimmung von ω_0 .

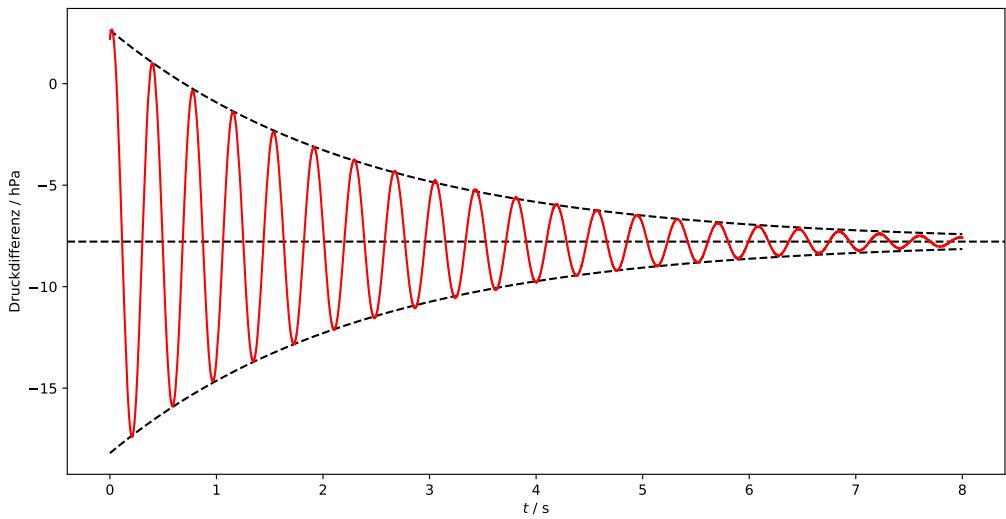


Abbildung 4: Beispiel für die Numerische Bestimmung von δ

Anschließend werden die Frequenzen $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$ bestimmt. Die Fehler werden mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt. Es gilt

$$\sigma_{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\omega^2 \sigma_\omega^2 + \delta^2 \sigma_\delta^2}.$$

Die Regression für die kleine Flasche ist in Abbildung 5 abgebildet.

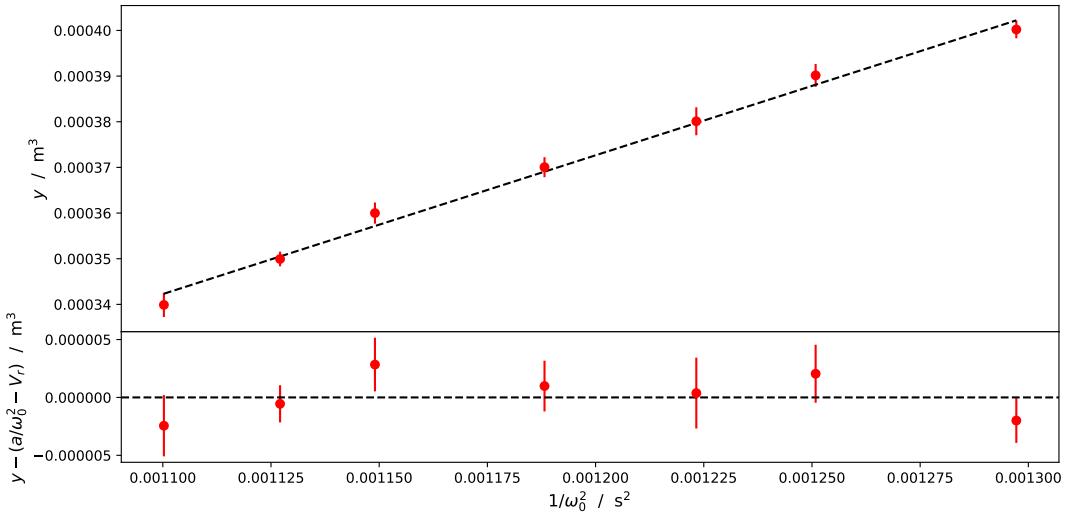


Abbildung 5: Regression für die kleine Mariottesche Flasche mit $\chi^2/\text{ndf} = 0.88$

Es ergibt sich $V_r = (-7.91 \pm 14,48) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Der Wert ist offensichtlich nicht akzeptabel. Dennoch führen auch die Regressionen der mittleren und großen Flasche zu keinem besseren Ergebnis, wie in Anhang A zu sehen ist. Deshalb wird von nun an der Fehler durch die Vernachlässigung des unbestimmbaren Volumens V_r mit einem Fehler $\sigma_V = 1.448 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ auf $V = V_F + x_0 A$ modelliert. Aus den Formeln

$$\kappa = \omega_0^2 \frac{mV}{pA^2}$$

und

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}$$

ergeben sich die folgenden Adiabatenkoeffizienten:

Höhe [cm]	Kleine Flasche	Mittlere Flasche	Große Flasche
15	1.258 ± 0.055	-	-
20	1.265 ± 0.053	1.336 ± 0.019	1.504 ± 0.021
25	1.276 ± 0.053	1.338 ± 0.017	1.492 ± 0.008
30	1.269 ± 0.051	1.353 ± 0.019	1.483 ± 0.005
35	1.266 ± 0.050	1.340 ± 0.023	1.492 ± 0.004
40	1.270 ± 0.049	1.343 ± 0.023	1.502 ± 0.004
45	1.257 ± 0.046	1.344 ± 0.027	1.507 ± 0.018
50	-	1.318 ± 0.016	-
Mittel	1.266 ± 0.019	1.337 ± 0.007	1.494 ± 0.003

Die Fehler wurden mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet. Für die Mittelwerte in der Tabelle wurde das gewichtete Mittel und das Maximums des äußeren und inneren Fehlers verwendet. Das gewichtete Mittel über alle Flaschengrößen beträgt 1.465 mit einem äußeren Fehler von 0.045.

5. Fazit

Der Wert $\kappa = 1.465 \pm 0.045$ hat nur eine Abweichung von weniger als 1.5σ zum Literaturwert $\kappa_{\text{Lit}} = \frac{7}{5} = 1.4$. Dennoch zeigen die Regressionen und Einzelergebnisse mit Abweichungen von 7σ (kleine Flasche), 9σ (mittlere Flasche) und 31σ (große Flasche), dass die Resultate unter keinen Umständen zufriedenstellend sind und der gute gewichtete Mittelwert trügt. Der genaue Ursprung der Fehler ist für uns nicht identifizierbar. Es scheint als sei das Auslesen der Frequenzen und die Bestimmung des Dämpfungsfaktors das Problem, da dies die sehr fehlerhaften Ergebnisse der Regression erklären würde. Doch auch wiederholte Prüfungen des Algorithmus und der Rohdaten unterstützen die durch den Algorithmus ermittelten Frequenzen und Dämpfungen.

A. Regression der mittleren und großen Flasche

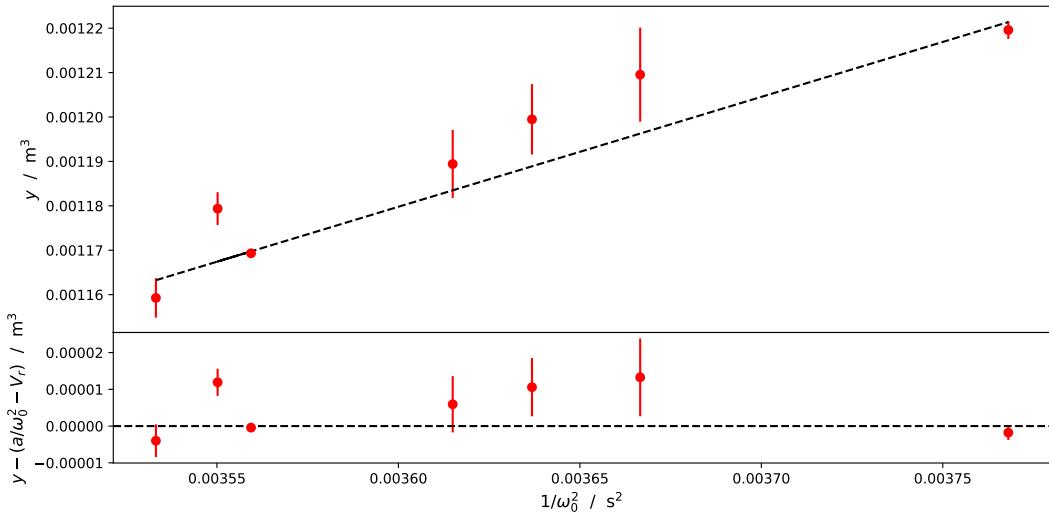


Abbildung 6: Regression für die mittlere Mariottesche Flasche mit $V_r = (5.203 \pm 0.372) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ und $\chi^2/\text{ndf} = 3.24$

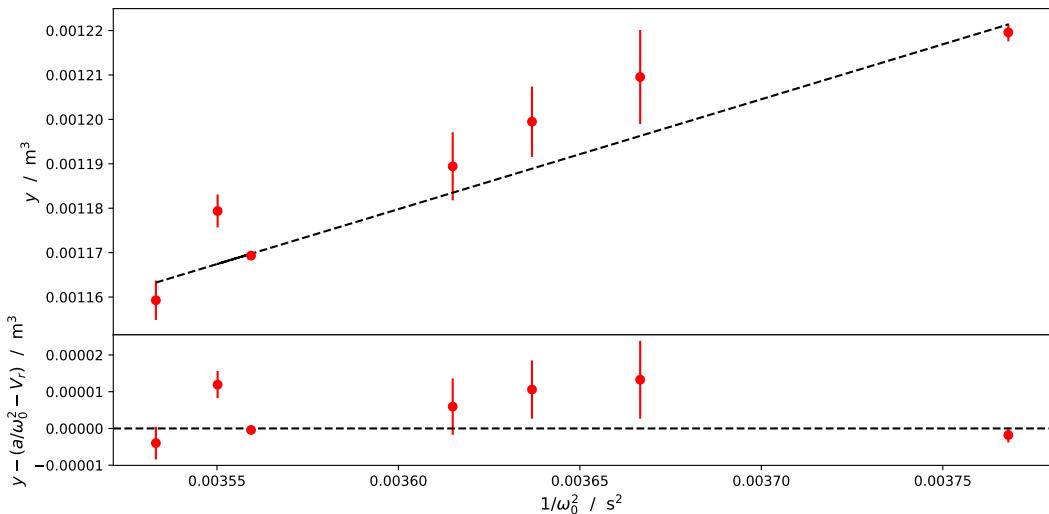


Abbildung 7: Regression für die große Mariottesche Flasche mit $V_r = (-3.339 \pm 0.686) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ und $\chi^2/\text{ndf} = 3.34$