

Versuchsprotokoll

ELEKTRIZITÄTSLEHRE

Gedämpfter LCR-Schwingkreis und
Gekoppelte LC-Schwingkreise

Simon Schwarz und Marius Ising

Inhaltsverzeichnis

1. Gedämpfter LCR-Schwingkreis	3
1.1. Versuchsbeschreibung	3
1.2. Versuchsaufbau	4
1.3. Versuchsdurchführung	5

1. Gedämpfter LCR-Schwingkreis

1.1. Versuchsbeschreibung

In einer Serienschaltung aus Spule L , Kondensator C und Ohmschem Widerstand R (vgl. Abb. 1) wird der Kondensator zunächst aufgeladen und anschließend die Spannungsquelle mit einem Taster überbrückt, sodass der Kondensator sich über den Widerstand entladen kann. Dabei entlädt sich der Kondensator nicht sofort, sondern er schwingt sich bei der Spannung $U = 0$ ein. Dieser Einschwingvorgang hängt wesentlich von der Dämpfung der Schwingung durch die Ohmschen Widerstände der Schaltung ab.

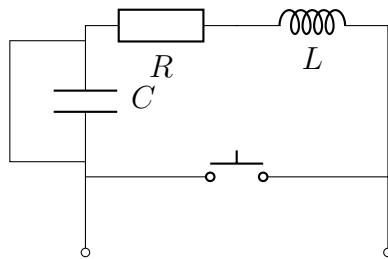


Abbildung 1: Schaltbild des LCR-Schwingkreises

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt für die Schaltung bei gedrücktem Taster

$$0 = U_C + U_R + U_L = \frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt}$$

Mit $I = \frac{dQ}{dt}$ erhält man folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dies ist die DGL einer gedämpften harmonischen Schwingung. Dabei bezeichnet $\delta = \frac{R}{2L}$ die Dämpfungskonstante und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Schwingungsfrequenz der ungedämpften Schwingung. Für die Lösung der DGL unterscheiden wir drei Fälle. In allen Fällen gelten die gleichen Anfangsbedingungen

$$Q(0) = CU_0 \quad \text{und} \quad I(0) = 0.$$

Schwingfall ($\delta < \omega_0$)

Hier ist eine echte Schwingung zu beobachten. Es gilt

$$Q(t) = e^{-\delta t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

Aus den Anfangsbedingungen erhält man $A = CU_0$ und $B = A \frac{\delta}{\omega}$. Für den Strom gilt wegen $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I(t) = -CU_0 e^{-\delta t} \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \sin(\omega t). \quad (1)$$

Kriechfall ($\delta > \omega_0$)

In diesem Fall ist die Dämpfung so stark, dass der Kondensator seine Spannung nur sehr langsam verliert. Zudem findet keine Schwingung statt.

$$Q(t) = Ae^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$A = CU_0 \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \quad \text{und} \quad B = CU_0 \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)

Der Kondensator wird innerhalb der kürzesten Zeit entladen. Die Lösung hat die Form

$$Q(t) = e^{-\delta t}(A + Bt)$$

mit $A = CU_0$ und $B = \delta A$.

1.2. Versuchsaufbau

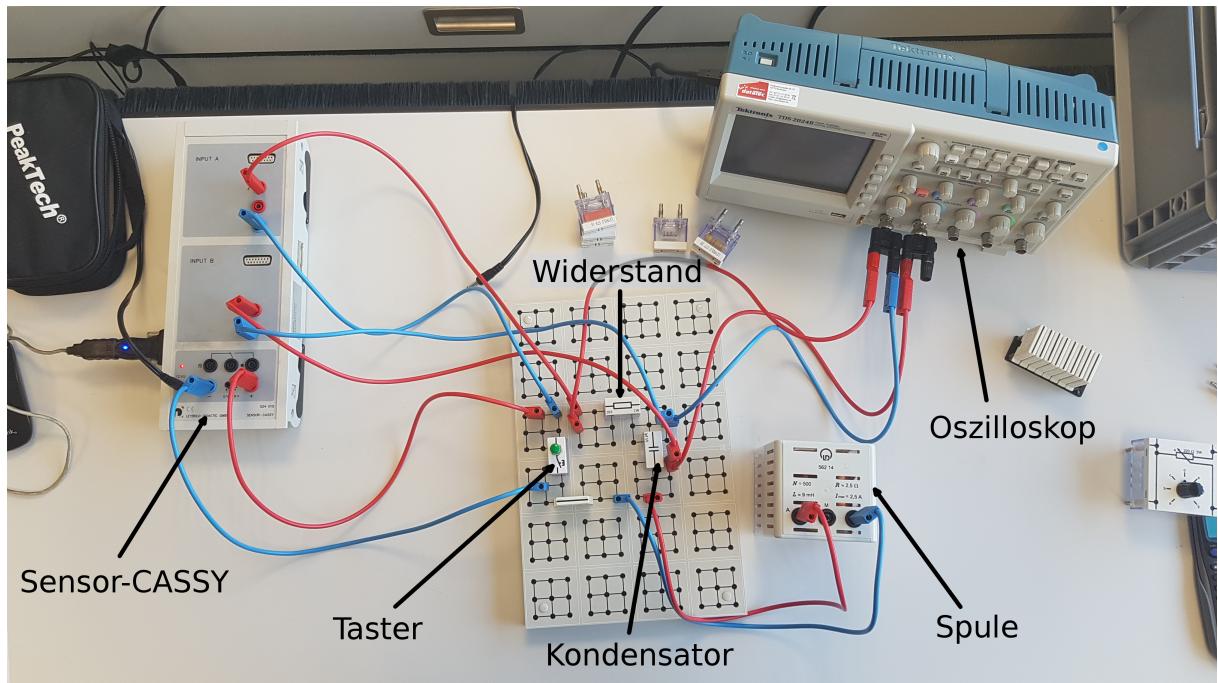


Abbildung 2: Versuchsaufbau LCR-Schwingkreis

Das Schaltbild aus Abbildung 1 wird auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Dies ist in Abbildung 2 zu sehen. Als Spannungsquelle dient die Spannungsquelle des Sensor-CASSY. Die Spannung am Kondensator wird am Eingang B und die Stromstärke am Eingang A gemessen. Zusätzlich wird die Spannung am Kondensator am Channel 1 und die Spannung am Widerstand am Channel 2 des Oszilloskops gemessen. Die Erde liegt dabei zwischen Kondensator und Widerstand.

1.3. Versuchsdurchführung

Die Schwingungen werden im Modus „automatische Aufnahme“ mit folgenden Messparametern aufgenommen:

- Messbereich Strom I : $\pm 0.3\text{A}$
- Messbereich Spannung am Kondensator U_C : $\pm 10\text{V}$
- Messintervall: $10\mu\text{s}$
- Anzahl an Messpunkten: 2000
- Messzeit: 20ms

Die Spannungsquelle des Sensor-CASSYs ist stets eingeschaltet, so dass der Kondensator geladen ist. Eine Messung wird ausgelöst, indem der Taster gedrückt und somit der Stromkreis geschlossen wird. Um möglich direkt nach Betätigung des Tasters die Aufnahme zu beginnen, wird ein Trigger verwendet. Dieser aktiviert die Messung bei einer steigenden Flanke von U_C , die den Schwellenwert von -9.2V überschreitet. Das ist sinnvoll, weil die Spannungsquelle auf $U_0 = 9.4\text{V}$ eingestellt ist und die Polung des Messgerätes zu einer gemessenen Kondensatorspannung von -9.4V bei offenem Taster führt. Vorab werden die im Versuch verwendeten Widerstände mit Hilfe eines Multimeters auf ihren tatsächlichen Widerstandswert geprüft. In Tabelle 1 sind die verwendeten Widerstände mit Herstellerangabe und gemessenen Werten angegeben.

Herstellerangabe / Ω	Gemessener Wert / Ω
1	1.008 ± 0.001
5.1	5.101 ± 0.001
10	9.990 ± 0.002
20	19.82 ± 0.01
47	46.67 ± 0.01
100	99.24 ± 0.04
1000	991.20 ± 0.08

Tabelle 1: Herstellerangaben für die verwendeten Widerstände und deren mittels Multimeter gemessene Widerstandswerte samt Fehler.

Die nun folgenden Rechnungen verwenden die gemessenen Widerstandswerte. Zusätzlich werden drei in Reihe geschaltete $1\text{k}\Omega$ Widerstände verwendet, um einen Widerstand von $3\text{k}\Omega$ zu erreichen. Da diese Messung jedoch nur zur Visualisierung des Kriechfalls dient, wird kein genauer Wert benötigt. Um den aperiodischen Grenzfall einzustellen, wird außerdem ein Potentiometer verwendet. Durch sukzessives Erhöhen des Widerstandes nimmt δ zu, sodass ab einem gewissen Wert keine Schwingung mehr am Oszilloskop beobachtbar ist. Dieses Vorgehen wird in Abbildung dargestellt.



1.4. Versuchsauswertung

Beispielhafte Rohdaten für alle verschiedenen Fälle sind in Abbildung 3 zu sehen.

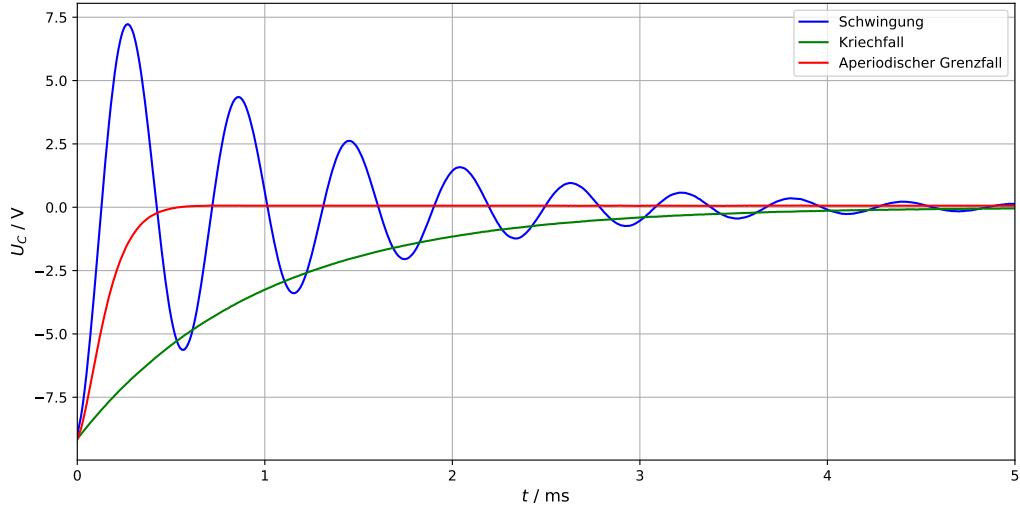


Abbildung 3: Rohdaten mit Schwing-, Kriech- und Aperiodischem Grenzfall

1.4.1. Schwingfall

Zunächst bestimmen wir die Frequenzen und die Dämpfungen der aufgenommenen Schwingungen für die verschiedenen verwendeten Ohmschen Widerstände. Um die Frequenz bzw. die Periodendauer zu bestimmen, existieren zwei Möglichkeiten. Einerseits ist die Analyse mittels FFT möglich. Andererseits können die Extrema aus den Rohdaten abgelesen und die Periodendauer mittels Regression über die Schwingungsanzahl bestimmt werden. Analog dazu besteht die Möglichkeit, die Dämpfung δ aus Gleichung 1 durch logarithmisches Auftragen der Extrema, d.h. mit Regression, zu berechnen: Es gilt

$$\sin(\omega t_i) = \pm 1$$

für die Zeitpunkte t_i an denen I bzw. U_C ein Extremum annimmt. Durch logarithmieren der Gleichung 1 erhält man für diese Zeiten t_i dann

$$\log|I(t_i)| = -\delta t_i + \log \left| C U_0 \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \right|$$

beziehungsweise eine analoge Form für U_C . Natürlich kann δ durch die Verwendung eines Steigungsdreiecks auch nur bei zwei ablesbaren Maxima oder Minima bestimmt werden:

$$\delta = \frac{\log\left(\frac{U_C(t_0)}{U_C(t_1)}\right)}{t_1 - t_0}$$

Bei beiden Vorgehensweisen muss der Offset korrigiert werden. Als zweite Option für die Berechnung von δ kann eine Exponentialfunktion als Einhüllende gefittet werden und die Dämpfung δ aus dem Fit abgelesen werden. Für den 100Ω Widerstand sind Regressionen nicht praktikabel, da - aufgrund der starken Dämpfung - zu wenige Extrema genau ablesbar sind. Ein beispielhaftes Ergebnis für die Regression von abgelesenen Extrema bei der Schwingung des 10Ω Widerstand ist in Abbildung 4 dargestellt. Die übrigen durchgeführten Regressionen sind im Anhang A abgebildet.

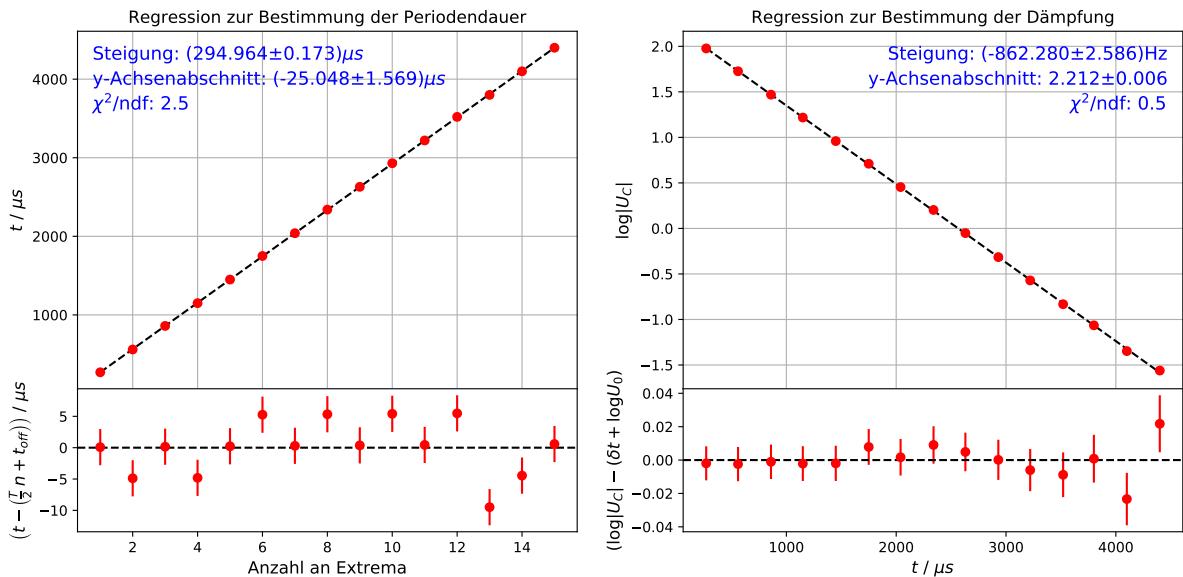


Abbildung 4: Regressionen für den 10Ω Widerstand zur Bestimmung von $\frac{T}{2}$ und δ .

Für die Frequenzen ergeben sich die in Tabelle 2 dargestellten Werte. Die FFT-Ergebnisse sind mit der Peakfinder-Methode berechnet. Dabei sollte man beachten, dass der FFT-Algorithmus die Frequenz mit einer Breite von $h \approx 49.975\text{Hz}$ diskretisiert. Dies mindert die Qualität der Resultate spürbar. Als Fehler der Einzelmessungen wird die Differenz aus Argument-Maximum der Amplitude und Peak-Schwerpunkt verwendet. Der Fehler des gewichteten Mittels ist der innere Fehler der Einzelmessungen. Das Frequenzspektrum der ersten Messung des 10Ω Widerstands ist in Abbildung 5 zu sehen. Für die übrigen Widerstände befindet sich jeweils das Spektrum der 1. Messung im Anhang B.

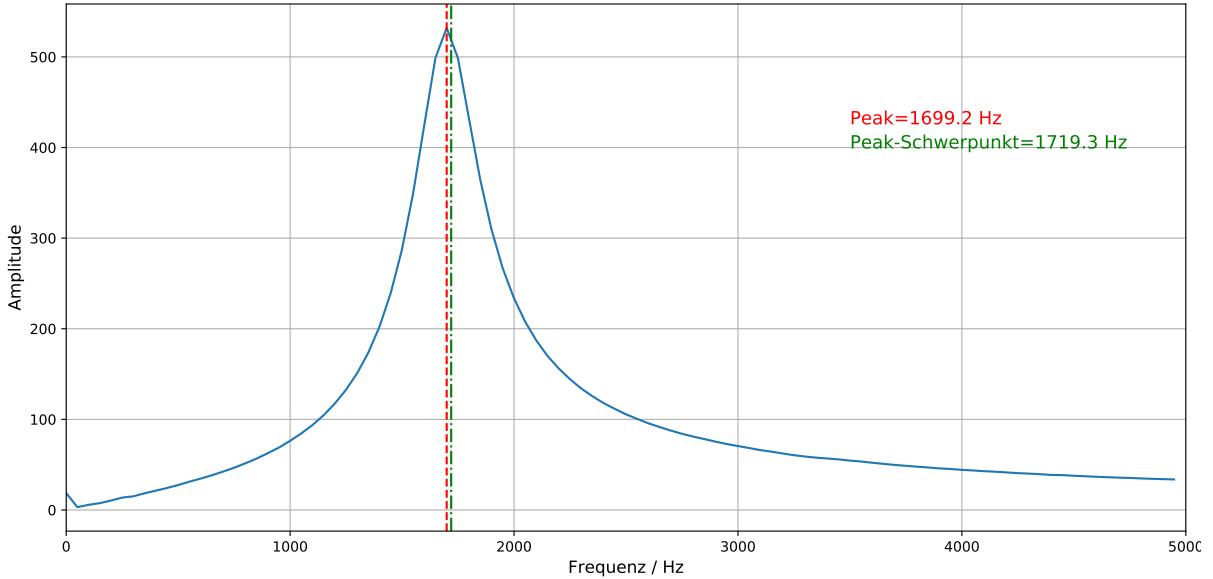


Abbildung 5: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des 10Ω Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

Ohmscher Widerstand / Ω	Regression / Hz	f mit FFT / Hz			
		Messung 1	Messung 2	Messung 3	Mittel
1	1696.9 ± 0.6	1715.7 ± 16.6	1715.2 ± 16.1	1715.3 ± 16.1	1715.4 ± 9.4
5.1	1696.3 ± 0.7	1718.9 ± 19.7	1719.0 ± 19.8	1719.0 ± 19.8	1718.9 ± 11.4
10	1695.1 ± 1.0	1719.3 ± 20.1	1719.3 ± 20.1	1719.2 ± 20.0	1719.2 ± 11.6
20	1689.2 ± 2.1	1720.4 ± 21.3	1720.3 ± 21.2	1720.3 ± 21.2	1720.4 ± 12.2
47	1628.6 ± 4.8	1761.1 ± 62.0	1761.3 ± 62.1	1741.5 ± 42.4	1751.0 ± 30.5
100	-	1294.7 ± 154.6	1293.4 ± 155.8	1339.0 ± 110.3	1316.4 ± 77.8

Tabelle 2: Mit Regression und FFT ermittelte Frequenzwerte.

Die Messungen des 100Ω Widerstands werden von nun an nicht weiter ausgewertet, da die kurze Schwingzeit keine zuverlässigen Ergebnisse ermöglicht. Des Weiteren arbeitet die Peakfinder-Methode wegen der groben Diskretisierung der Frequenz durch den FFT-Algorithmus nicht korrekt, sodass die Frequenzen der Regressionsmethode als weitere Berechnungsgrundlage dienen. Ein Indiz dafür, dass die Frequenzwerte aus dem Spektrum systematisch fehlerhaft sind, ist, dass sie mit steigendem Widerstand steigen, obwohl

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \delta^2$$

mit der korrigierten Frequenz ω_0 und der Dämpfung δ gilt und sie daher, wie die Regressionsdaten, fallen müssten.

Die aus der Regression von $\log|U_C|$ über t bestimmten Dämpfungswerte sind in Tabelle 3 einsehbar. Die Regressionen selber sind in Abbildung 4 und Anhang A geplottet. Die systematischen Fehler σ_{syst} ergeben sich aus den systematischen Fehlern von U_C . Für U_C wird ein statistischer Fehler von $\sigma_{U_C} = 4.89\text{mV}$ verwendet. Dies entspricht der Diskretisierungsbreite des Sensor-CASSYs für den vorliegenden Messbereich $\pm 10\text{V}$.

Ohmscher Widerstand / Ω	$\delta \pm \sigma_{\delta, \text{stat}} \pm \sigma_{\delta, \text{syst}}$ (mit Regression berechnet) / Hz
1	$341.02 \pm 0.26 \pm 0.02$
5.1	$565.81 \pm 0.57 \pm 0.04$
10	$860.24 \pm 1.25 \pm 0.05$
20	$1421.97 \pm 3.57 \pm 0.18$
47	$2820.46 \pm 16.19 \pm 0.92$
100	—

Tabelle 3: Mittels Regression berechnete Dämpfungswerte

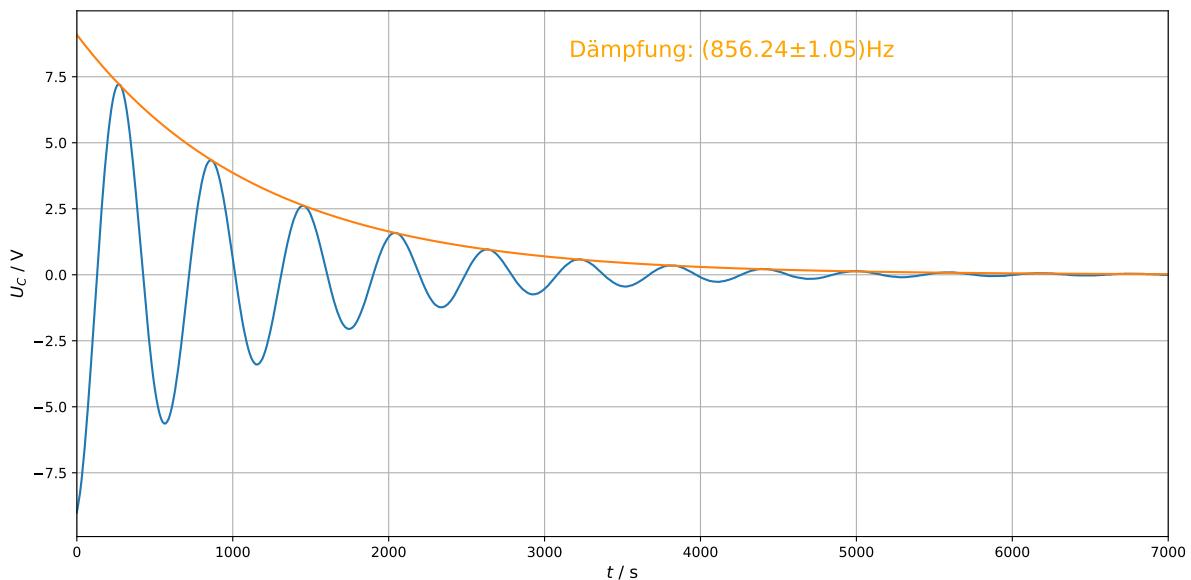


Abbildung 6: Mittels Python berechnete exponentiell Einhüllende für die zweite Messung des 10Ω Widerstands.

Die berechneten Dämpfungen mittels Fit einer einhüllenden Exponentialfunktion um die Schwingung können aus Tabelle 4 abgelesen werden. Die Größe der systematischen Fehler liegt dabei unter 1% der statistischen Fehler, so dass die systematischen Fehler vernachlässigt werden. Die Fehler der gewichteten Mittel sind die äußereren Fehler der drei Messungen. Für eine Messung mit dem 10Ω Widerstand ist die Einhüllende in Abbildung 6 geplottet. Im Anhang C befinden sich Einhüllende für jeweils eine Messung der übrigen Widerstände.

Ohmscher Widerstand / Ω	δ mit Exp-Einhüllender / Hz			
	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Mittel
1	348.56 ± 0.27	324.45 ± 0.23	325.60 ± 0.23	331.32 ± 7.38
5.1	562.21 ± 0.55	574.88 ± 0.57	575.29 ± 0.57	570.61 ± 4.34
10	858.22 ± 1.05	856.24 ± 1.05	849.17 ± 1.03	854.48 ± 2.76
20	1409.89 ± 2.51	1417.40 ± 2.54	1409.46 ± 2.51	1412.21 ± 2.57
47	2995.46 ± 13.28	2891.72 ± 8.96	2922.18 ± 12.57	2923.66 ± 29.28

Tabelle 4: Durch Anwendung der Pythonmethode `analyse.exp_einhuellende` bestimmte Dämpfungen.

1.4.2. Aperiodischer Grenzfall

1.4.3. Kriechfall

1.5. Fazit

2. Gekoppelte LC-Schwingkreise

2.1. Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch werden zwei Schwingkreise induktiv miteinander gekoppelt. Speziell werden hier die beiden Fundamentalschwingungen bei gleichsinniger und gegensinniger Anregung und eine Schwebung aufgezeichnet.

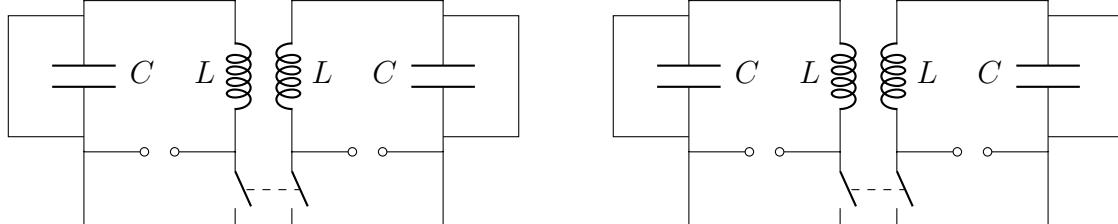


Abbildung 7: Fundamentalschwingungen der gekoppelten Schwingkreise bei gleichsinniger (links) und gegensinniger Anregung (rechts)

Bei überbrückter Spannungsquelle gelten für den gekoppelten Schwingkreis die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{I}_1 + k\ddot{I}_2 + \frac{1}{LC}I_1 &= 0 \\ \ddot{I}_2 + k\ddot{I}_1 + \frac{1}{LC}I_2 &= 0\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $k \in (0, 1)$ die Kopplung der beiden Schwingkreise. Mit den sogenannten *Fundamentalströmen* $I_+ = I_1 + I_2$ und $I_- = I_1 - I_2$ erhält man durch Addition bzw.

Subtraktion der obigen Gleichungen und anschließendem Umformen

$$\begin{aligned}\ddot{I}_+ + \frac{1}{LC(1+k)} I_+ &= 0 \\ \ddot{I}_- + \frac{1}{LC(1-k)} I_- &= 0\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_+ = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}.$$

Dabei ist $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Kreisfrequenz der ungekoppelten Schwingung. Mithilfe der Fundamentalschwingungen lässt sich dann der Kopplungsgrad bestimmen

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}.$$

Bei Messung einer Schwebung mit Schwebungsfrequenz f_s und Frequenz der gekoppelten Schwingung f_k kann man die Fundamentalschwingungen gemäß

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \quad \text{und} \quad f_s = \frac{f_- - f_+}{2}$$

bestimmen. Aufgrund der unvermeidbaren Dämpfung der beiden Schwingkreise sind die Extrema des einen Schwingkreises gegen die Nulldurchgänge des anderen verschoben. Für Kopplungen $k < 0.2$ gilt näherungsweise für die zeitliche Verschiebung

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{k}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right).$$

2.2. Schwebung

2.2.1. Versuchsaufbau

2.2.2. Versuchsdurchführung

2.2.3. Versuchsauswertung

Die Schwebung bei direkt aneinander platzierten Spulen ist in Abbildung 8 beispielhaft zu sehen.

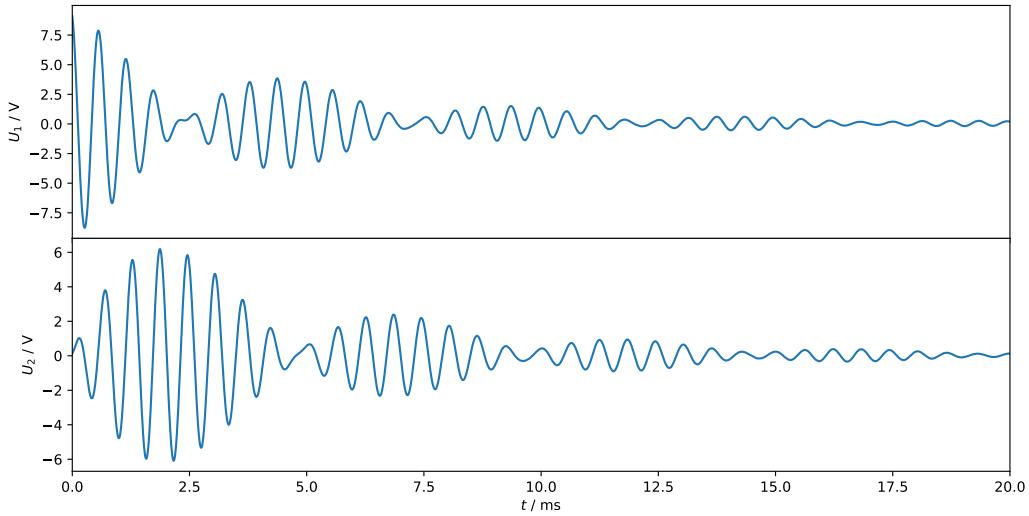


Abbildung 8: Rohdaten der Schwebung

Da sich die Periodendauer der Schwebung bei den beiden anderen Schwebungen garnicht anhand der Schwebungsmaxima bestimmen lässt, wird ausschließlich eine Auswertung mittels FFT vorgenommen. Dabei ergeben sich die Frequenzen in Tabelle 5 für die aufgezeichnete Spannung am ersten Kondensator.

Schwebung	f_+ / Hz	f_- / Hz
1	1598.65 ± 0.95	1832.1 ± 7.5
2	1639 ± 11	1727 ± 23
3	631.8 ± 6.9	1094 ± 19

Tabelle 5: Frequenzen aus FFT

Mithilfe der Frequenzen lassen sich nun die Kopplungsgrade der drei Konfigurationen berechnen. Es gilt

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}.$$

Mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung lässt sich der Fehler auf k zu

$$\sigma_k = \frac{4f_- f_+}{(f_-^2 + f_+^2)^2} \sqrt{f_+^2 \sigma_{f_-}^2 + f_-^2 \sigma_{f_+}^2}$$

bestimmen. Es ergeben sich die Werte in Tabelle 6.

Schwebung	k
1	0.1355 ± 0.0041
2	0.0522 ± 0.0146
3	0.4999 ± 0.0155

Tabelle 6: Berechnete Kopplungsgrade

2.2.4. Fazit

A. LCR-Schwingfall: Regressionen der übrigen Widerstände

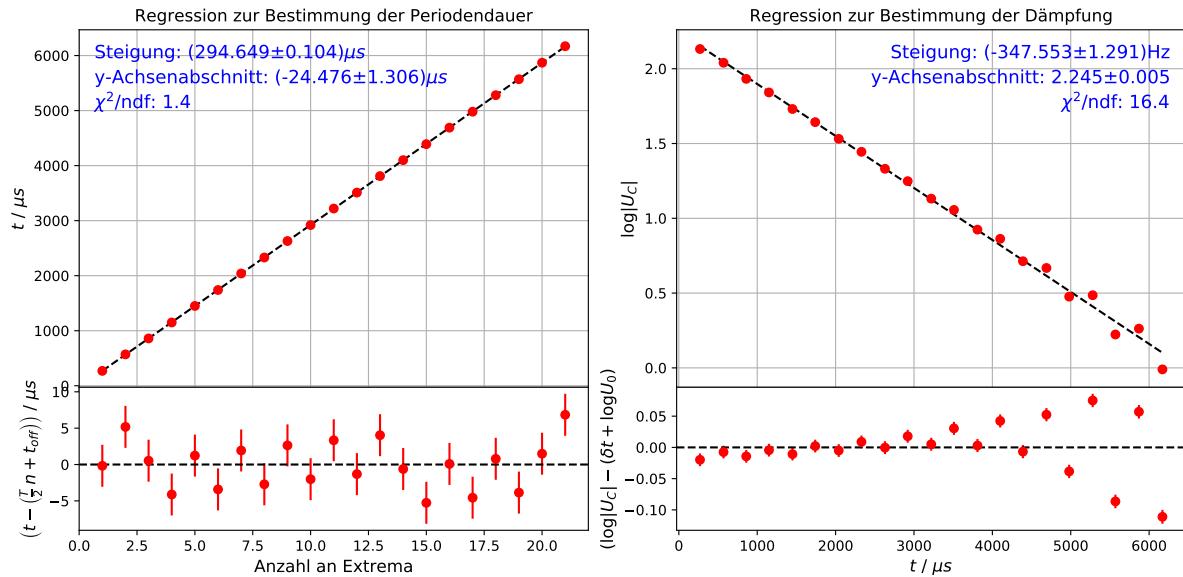


Abbildung 9: Regressionen für den 1Ω Widerstand zur Bestimmung von $\frac{T}{2}$ und δ

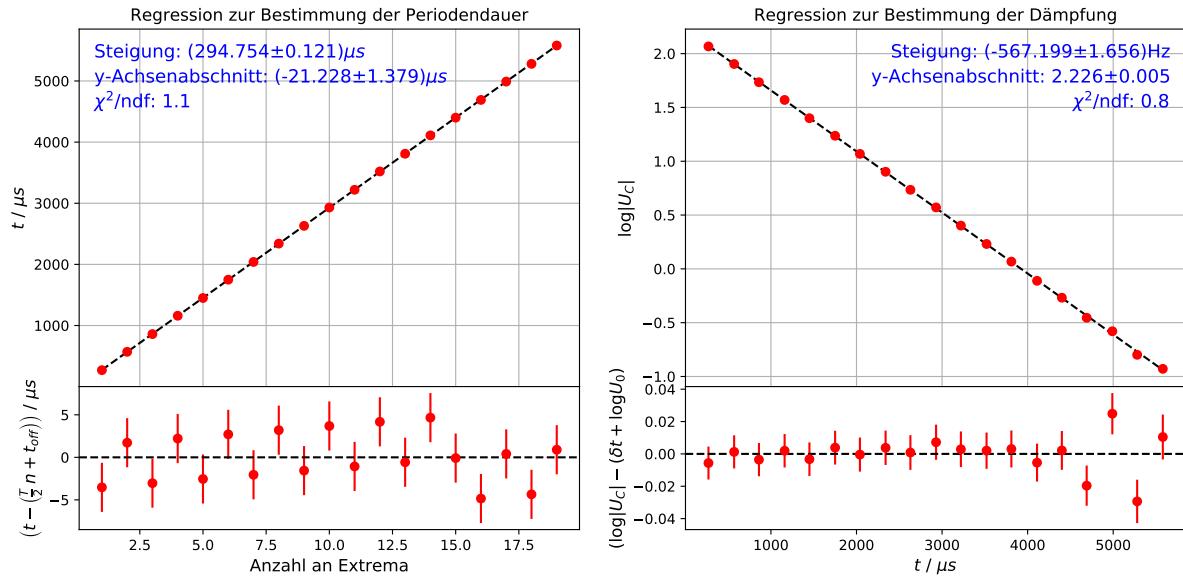


Abbildung 10: Regressionen für den 5.1Ω Widerstand zur Bestimmung von $\frac{T}{2}$ und δ

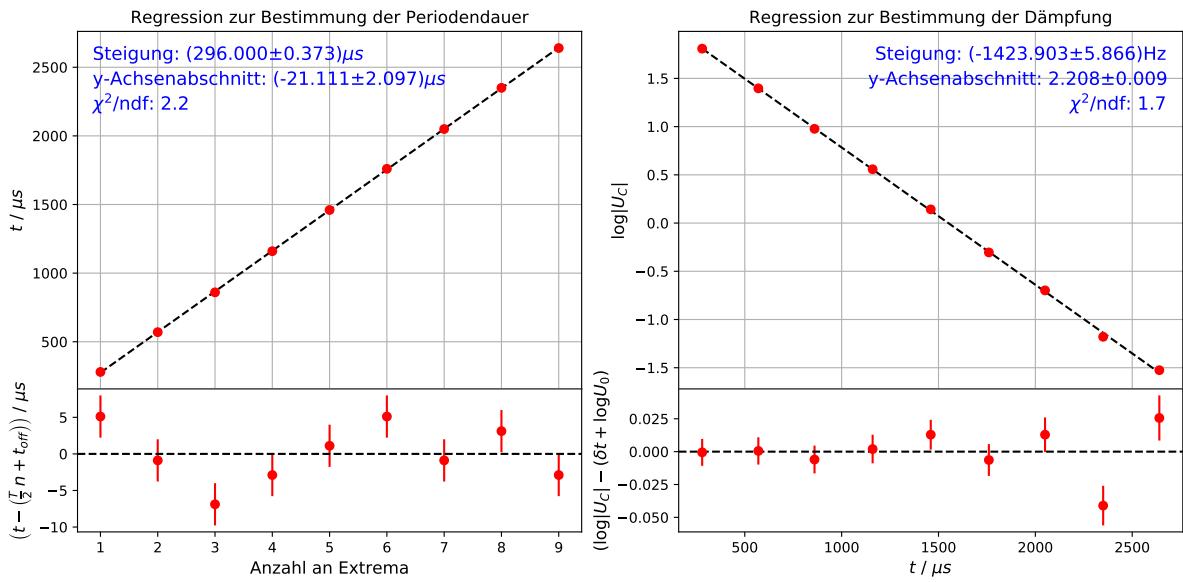


Abbildung 11: Regressionen für den 20Ω Widerstand zur Bestimmung von $\frac{T}{2}$ und δ

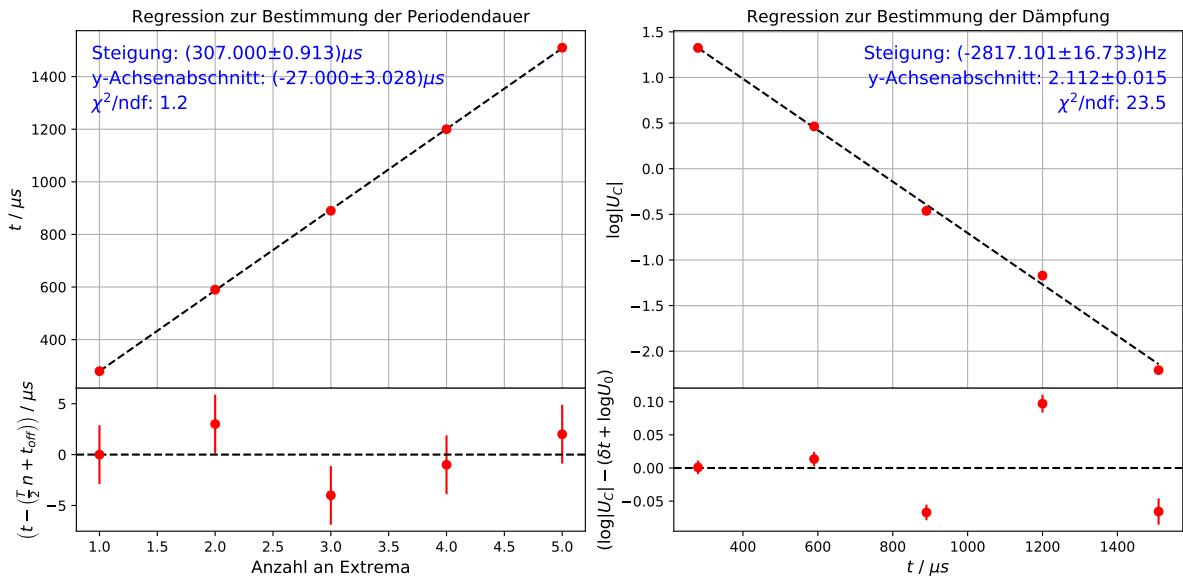


Abbildung 12: Regressionen für den 47Ω Widerstand zur Bestimmung von $\frac{T}{2}$ und δ

B. LCR-Schwingfall: FFT der übrigen Widerstände

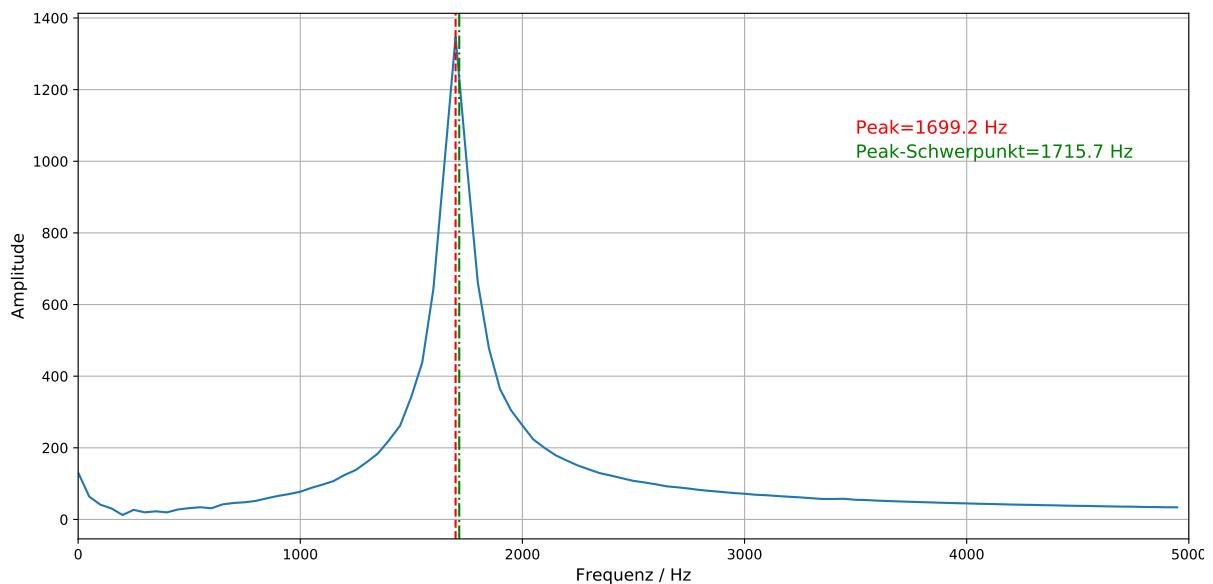


Abbildung 13: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des 1Ω Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

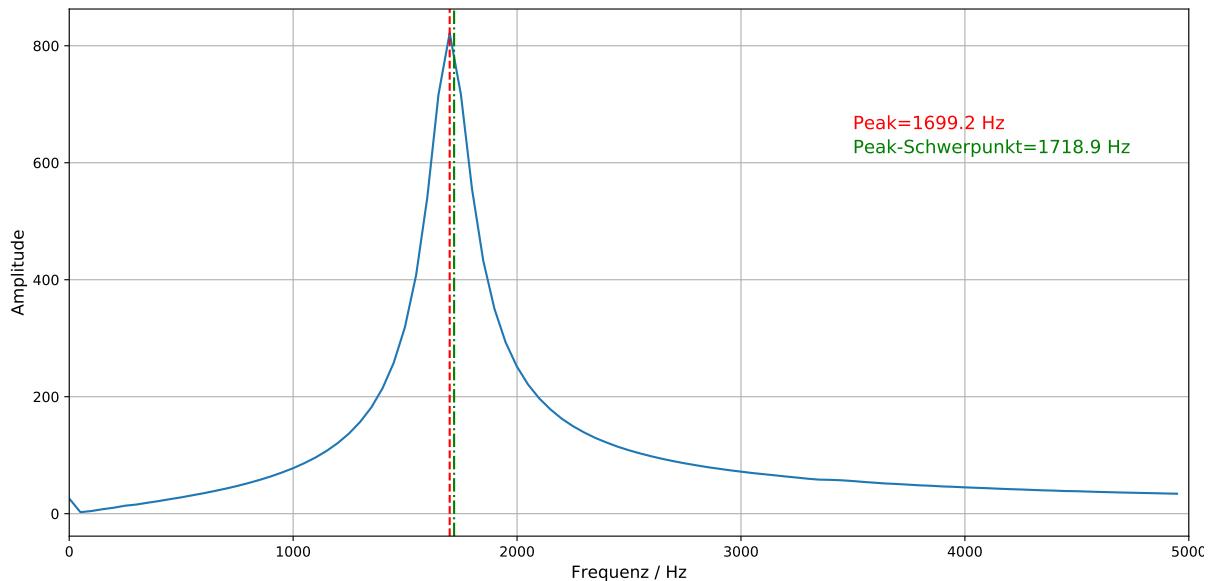


Abbildung 14: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des 5.1Ω Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

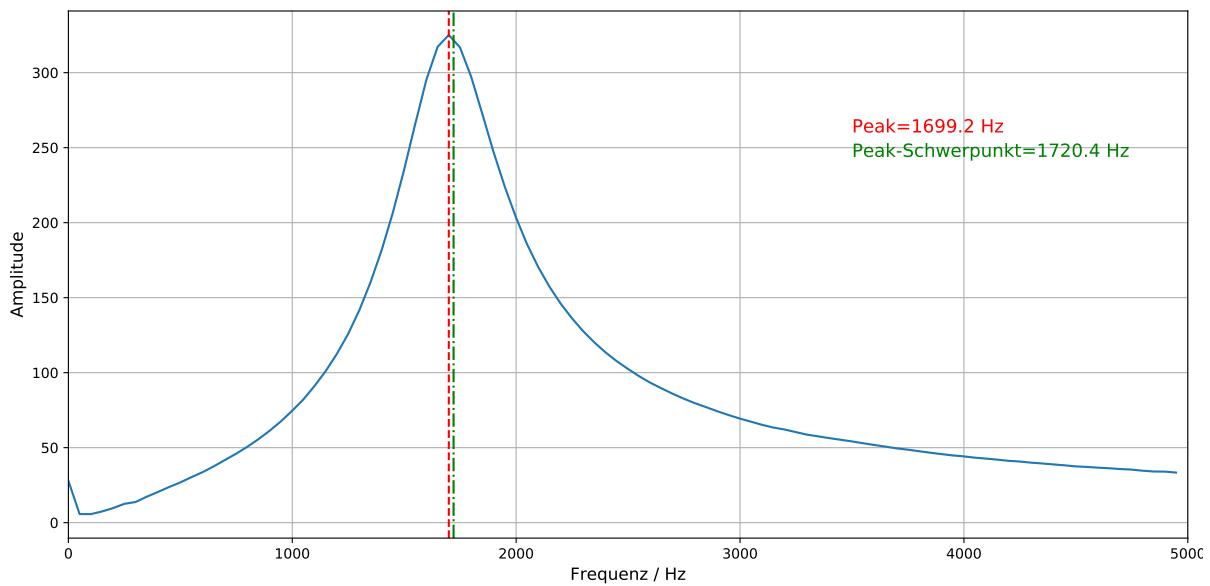


Abbildung 15: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des 20Ω Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

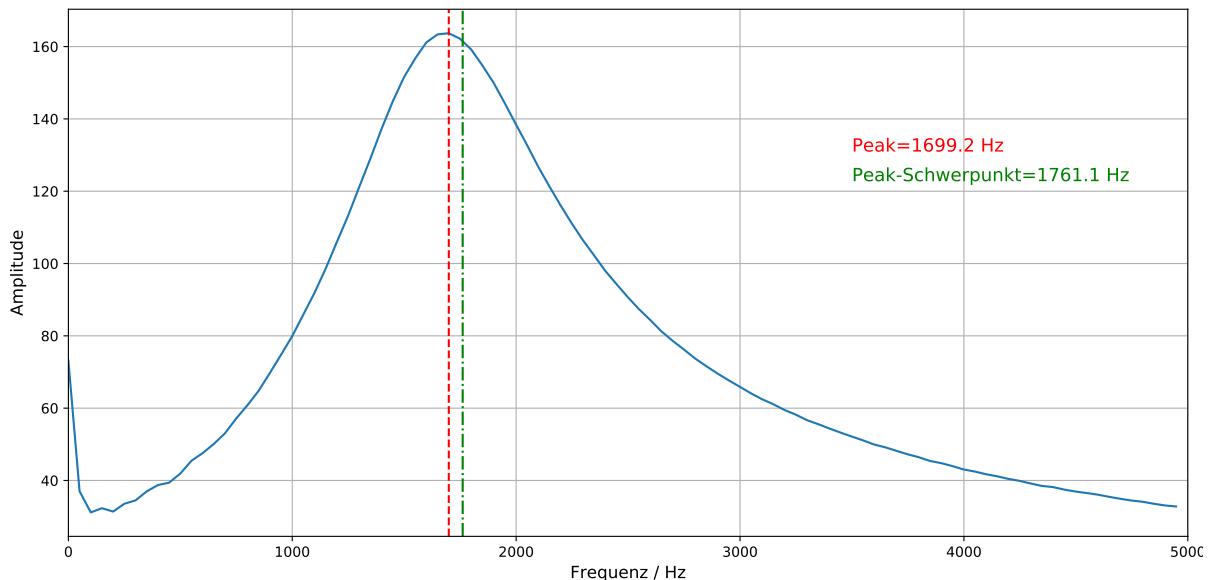


Abbildung 16: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des 47Ω Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

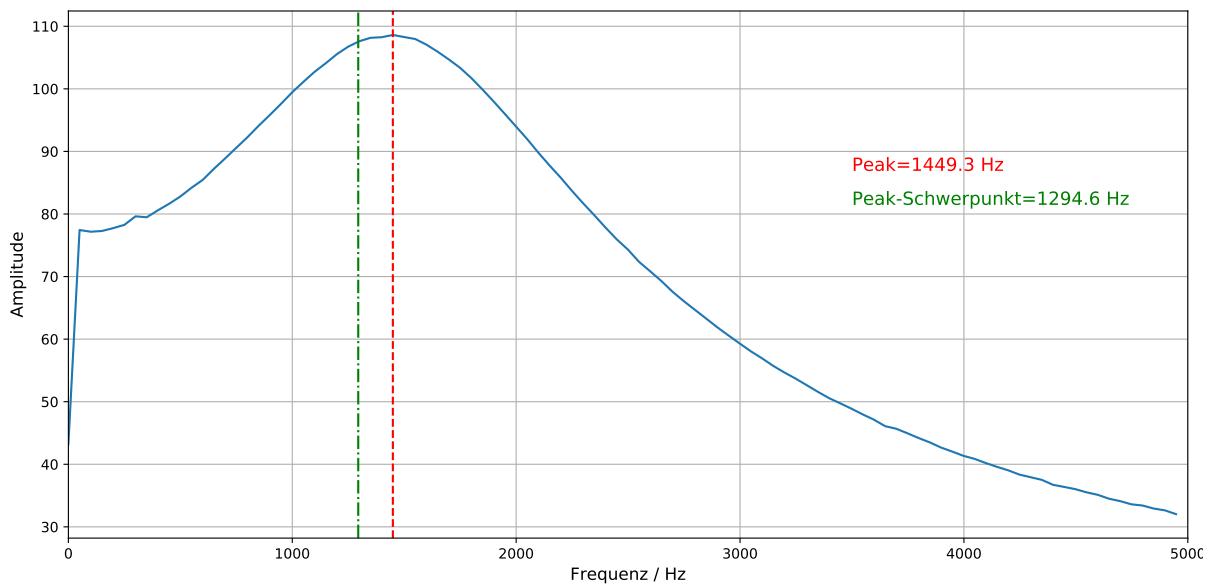


Abbildung 17: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des 100Ω Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

C. LCR-Schwingfall: Exp-Einhüllende der übrigen Widerstände

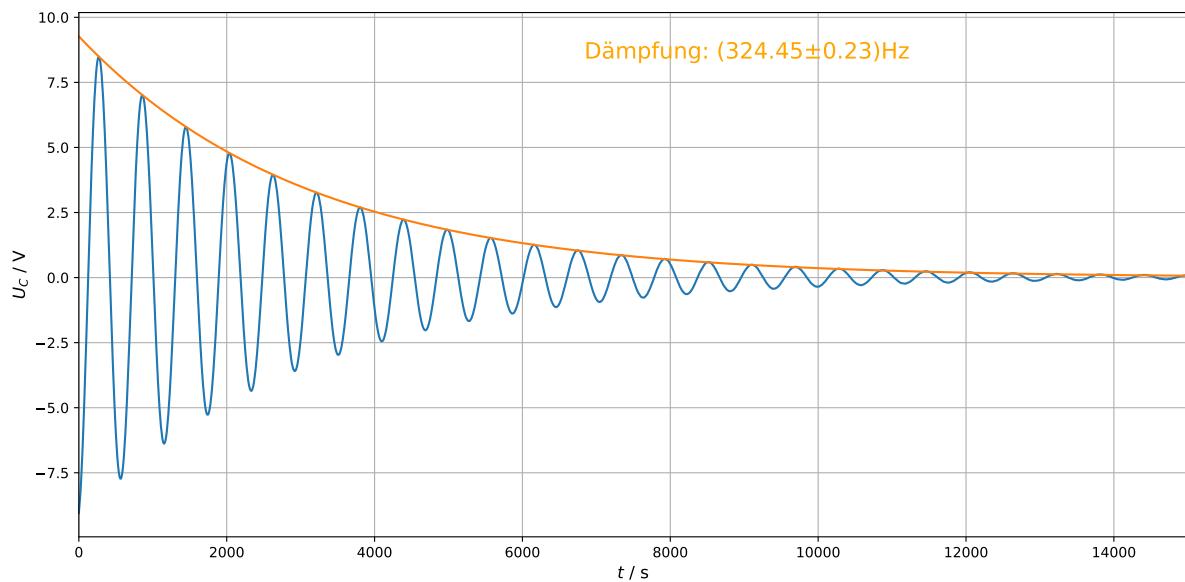


Abbildung 18: Mittels Python berechnete exponentiell Einhüllende für die zweite Messung des 1Ω Widerstands.

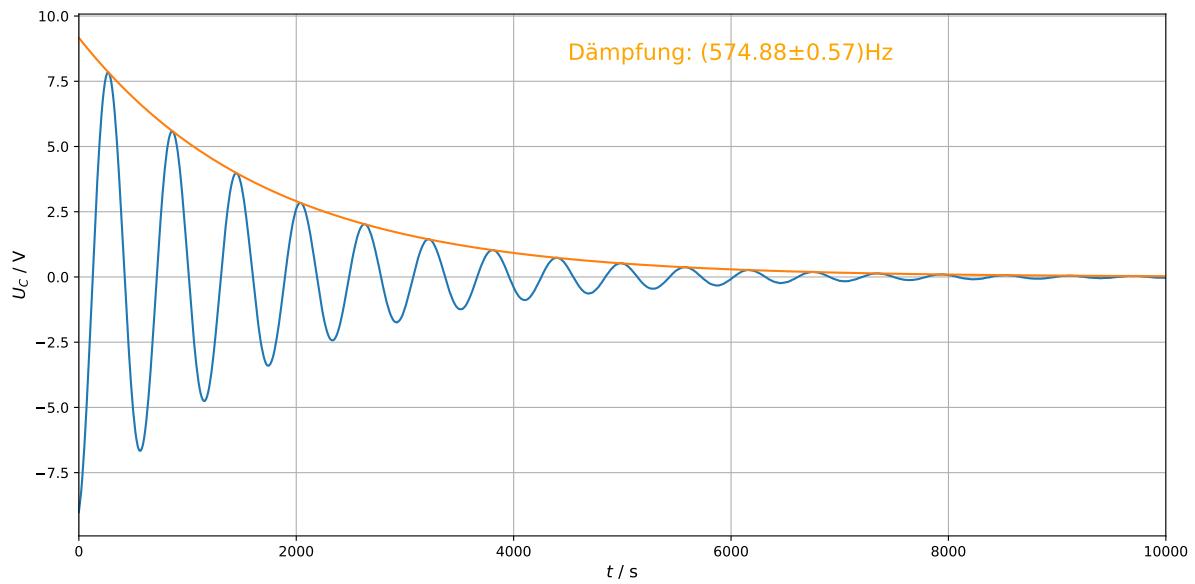


Abbildung 19: Mittels Python berechnete exponentiell Einhüllende für die zweite Messung des 5.1Ω Widerstands.

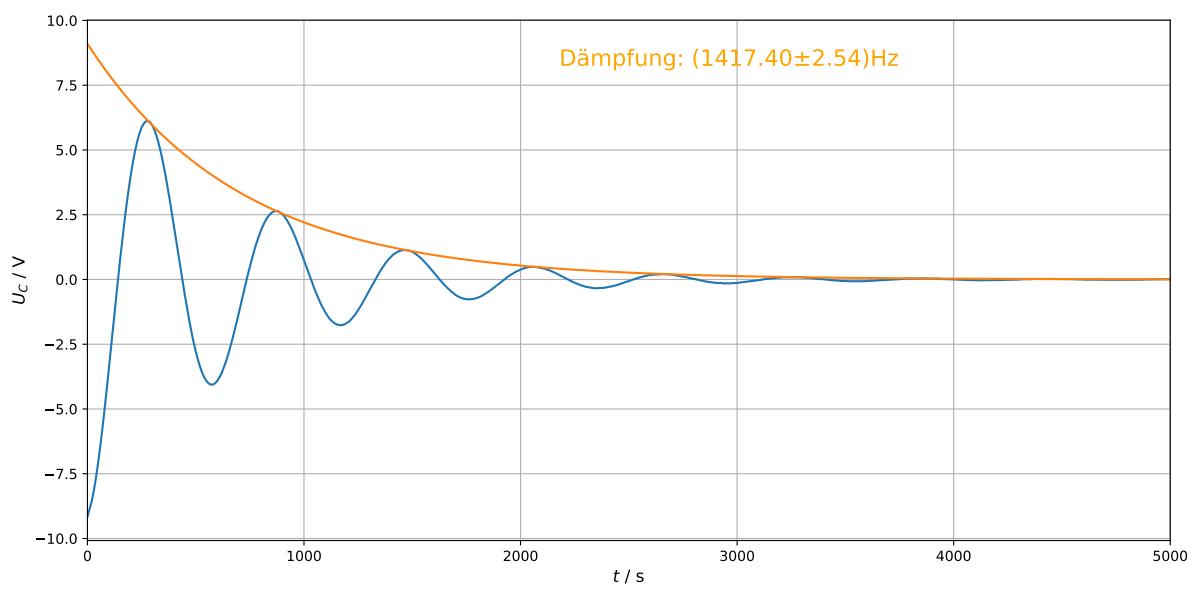


Abbildung 20: Mittels Python berechnete exponentiell Einhüllende für die zweite Messung des 20Ω Widerstands.

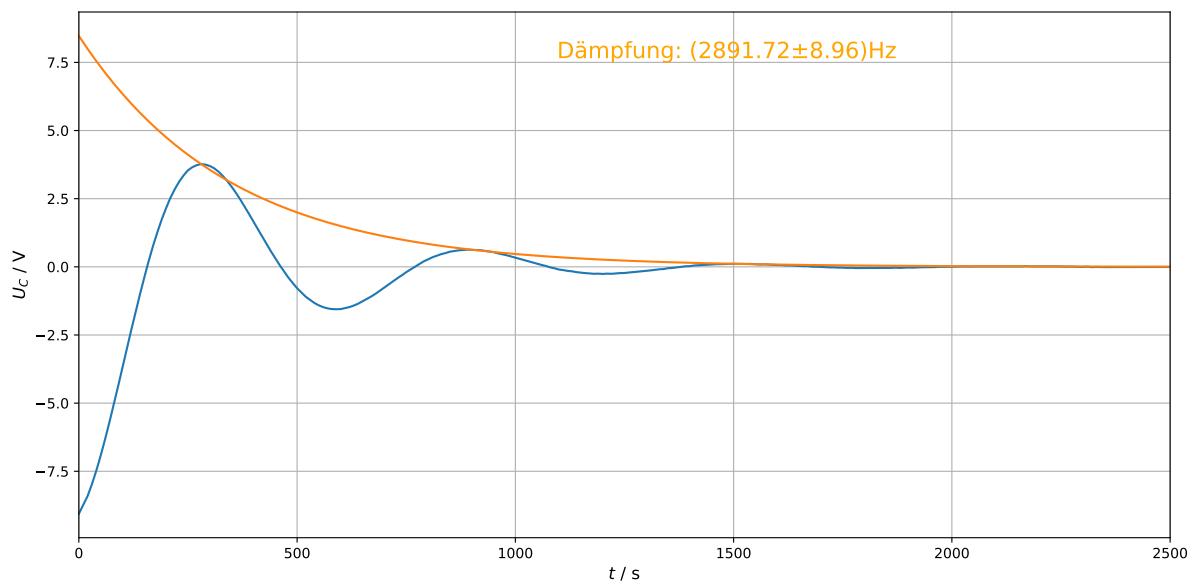


Abbildung 21: Mittels Python berechnete exponentiell Einhüllende für die zweite Messung des 47Ω Widerstands.