

Versuchsprotokoll

MECHANIK

Pendel- und Fallexperiment zur Bestimmung der
Erdbeschleunigung

Simon Schwarz und Marius Ising

Inhaltsverzeichnis

1	Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment	3
1.1	Versuchsbeschreibung	3
1.2	Versuchsaufbau	3
1.3	Versuchsdurchführung	4
1.4	Versuchsauswertung	4
1.4.1	Messung mit dem Digitalzähler	4
1.4.2	Messung mit dem Oszilloskop	6
1.5	Fazit	8
2	Erdbeschleunigung mit dem Pendel	9
2.1	Versuchsbeschreibung	9
2.2	Versuchsaufbau und -durchführung	11
2.3	Auswertung	13
2.4	Fazit	15

1 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment

1.1 Versuchsbeschreibung

Das Ziel des folgenden Versuchs ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g . Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = a = \text{const.}$$

Durch zweifache Integration erhält man das Weg-Zeit-Gesetz dieser Bewegung

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2.$$

Dabei ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und s_0 der anfängliche Weg zum Zeitpunkt $t = 0$. Für den betrachteten freien Fall ist dabei die Beschleunigung a gleich der Erdbeschleunigung g . Aufgrund der geringen auftretenden Geschwindigkeiten werden zudem Luftreibungseffekte vernachlässigt. Durch eine Weg-Zeit-Messung lässt sich somit g bestimmen.

1.2 Versuchsaufbau

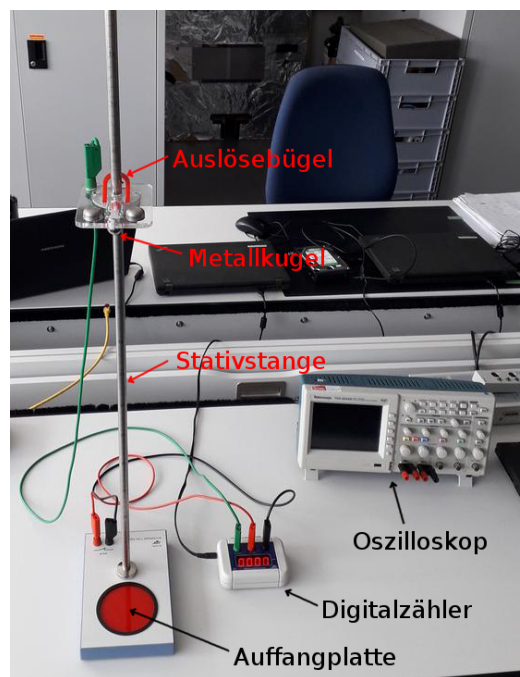


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau dient der Messung der Fallzeit einer Stahlkugel für einstellbare Höhen von 10 bis 90 mm. In eine Grundplatte mit integrierter Auffangplatte wird eine Stativstange mit Skala montiert. Zudem wird eine höhenverstellbare Startkonsole mit

Auslösevorrichtung für die Metallkugel an die Stange angebracht. Verlässt die Metallkugel die Haltezunge mit Mikromagnet, so wird ein elektrisches Startsignal ausgelöst. Beim Aufprall auf der Platte entsteht ein Stopp-Signal und die Zeitmessung wird beendet. Die Zeitmessung erfolgt dabei wahlweise mit einem Digital-Zähler oder dem Oszilloskop. Der Zähler und das Oszilloskop werden dabei gleichzeitig angeschlossen (siehe Abb. 2).

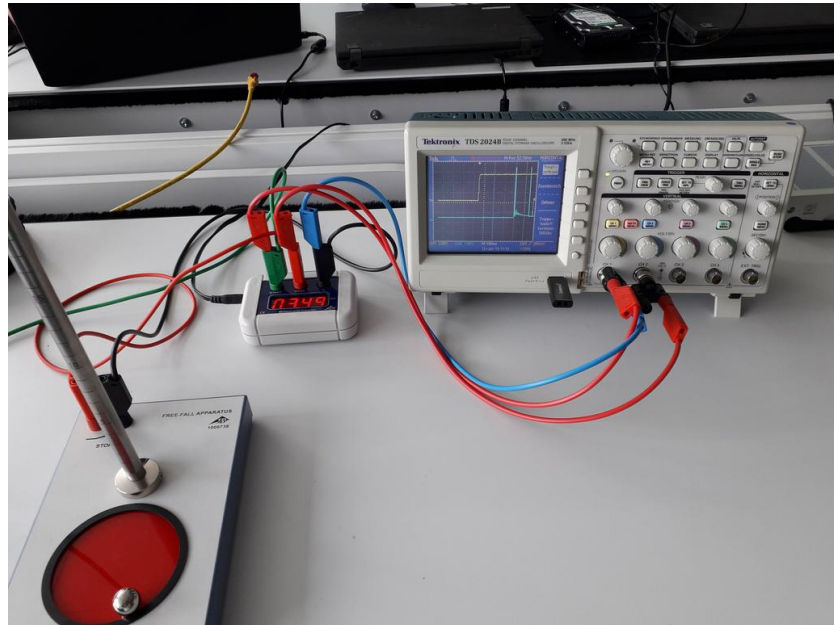


Abbildung 2: Anschluss von Digital-Zähler und Oszilloskop

1.3 Versuchsdurchführung

Die Fallzeiten werden für verschiedene Höhen von 10 bis 90 cm in Schritten von 10 cm durchgeführt. Dabei werden für jede Höhe 10 Zeitmessungen mit dem Digitalzähler und eine Messung mit dem Oszilloskop durchgeführt. Das Oszilloskop wird dabei auf Single Seq eingestellt und auf die steigende Flanke des Startsignals getriggert. Das Triggerlevel liegt dabei bei 620 mV. Um eine Startgeschwindigkeit der Kugel zu vermeiden, wird der Auslösebügel möglichst feinfühlig betätigt. Es werden stets alle Messungen für eine Höhe durchgeführt, ehe die Höhe verstellt wird. Bei der Höheneinstellung wird versucht mit der oberen Bohrungskante der Startkonsole genau den Strich der Säulenskala zu treffen.

1.4 Versuchsauswertung

1.4.1 Messung mit dem Digitalzähler

Für die Höhenmessung ist entscheidend mit welcher Genauigkeit man den Skalenstrich trifft. Dabei wird die Unsicherheit auf $\sigma_s = 1 \text{ mm}$ geschätzt. Mit dem Digitalzähler ergaben sich die Messungen aus Tabelle 1.

$s / \text{ cm}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$t / \text{ ms}$	140	200	245	284	318	348	376	403	427
	140	200	246	284	318	348	377	403	427
	140	200	246	284	318	348	376	403	427
	141	200	246	284	318	348	377	403	427
	141	200	246	284	318	348	377	402	407
	141	200	245	284	318	348	376	402	427
	141	200	246	284	318	348	376	402	427
	141	200	245	284	318	348	376	402	427
	141	200	245	284	318	348	376	403	427
	141	200	246	284	318	348	376	402	427
$\bar{t} / \text{ ms}$	140.7	200.0	245.6	284.0	318.0	348.0	376.3	402.5	427.0

Tabelle 1: Messreihe mit dem Digitalzähler

Aufgrund der geringen statistischen Effekte in der Messreihe werden statistische Unsicherheiten vernachlässigt und die Unsicherheit aufgrund der zeitlichen Auflösung des Zählers unter Annahme einer Gleichverteilung zu $\sigma_t = 1/\sqrt{12} \text{ ms} \approx 0.29 \text{ ms}$ bestimmt. Wir führen nun mit den berechneten Mittelwerten eine Regression durch. Da in unserem Experiment die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Kugel vernachlässigbar sein sollte, haben wir einen linearen Zusammenhang zwischen s und t^2 . Es gilt

$$s(t) = s_0 + mt^2.$$

Deswegen führen wir eine lineare Regression von s über t^2 durch. Dazu berechnen wir zunächst die Werte für t^2 und bestimmen den Fehler dieser gemäß

$$\sigma_{t^2} = 2|t|\sigma_t.$$

Die Ergebnisse der Regression sind in Tabelle 2 aufgelistet.

m	s_0	χ^2/n_{df}
$(4.9221 \pm 0.0084) \text{ m/s}^2$	$(0.0028 \pm 0.0009) \text{ m}$	0.14

Tabelle 2: Ausgabe der Regression

Der sehr schlechte Wert für χ^2/n_{df} spiegelt sich auch im Residuengraph wieder (Abb. 3), wo alle Fehlerbalken deutlich die Nulllinie treffen. Zusammen führt dies zu dem Schluss, dass die Fehlerabschätzungen für s und t zu grob sind. Da wir jedoch keine besseren Abschätzungen machen können, führen wir noch eine alternative Auswertung der Daten durch. Dazu berechnen wir für je zwei benachbarte Datenpunkte in unserem $s - t^2$ -Diagramm die Steigung, wobei der erste Wert nicht verwendet wird. Für die Steigung gilt

$$m = \frac{s_{i+1} - s_i}{t_{i+1}^2 - t_i^2}.$$

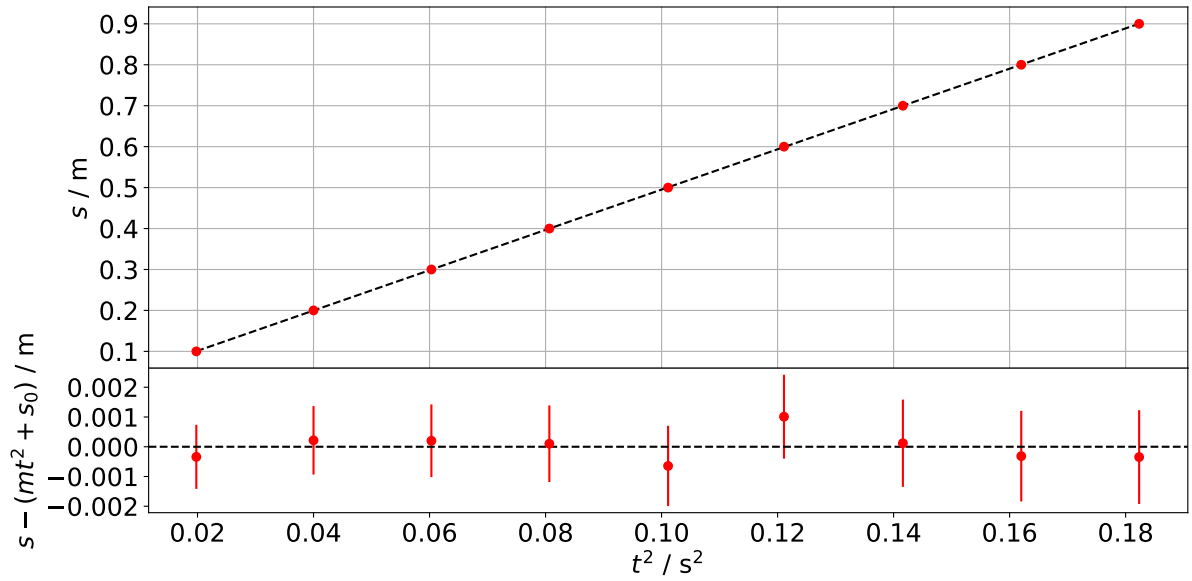


Abbildung 3: Residuenplot für den Digitalzähler

Dies liefert uns vier Schätzungen für die Steigung. Die Fehler werden mit einer Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt. Diese liefert uns

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{2}{(s_{i+1} - s_i)^2} \cdot \sigma_s^2 + \frac{4(t_{i+1}^2 + t_i^2)}{(t_{i+1}^2 - t_i^2)^2} \cdot \sigma_t^2.$$

Anschließend werden die vier Steigungswerte mit ihren Unsicherheiten gewichtet gemittelt und innerer und äußerer Fehler des Mittelwertes bestimmt. Die Ergebnisse dieser Kalkulation sind in Tabelle 3 zu sehen.

m_1	$(4.921 \pm 0.083) \text{ m/s}^2$
m_2	$(4.886 \pm 0.091) \text{ m/s}^2$
m_3	$(4.879 \pm 0.099) \text{ m/s}^2$
m_4	$(4.921 \pm 0.109) \text{ m/s}^2$
\bar{m}	4.902 m/s^2
$\sigma_{\bar{m}}^{in}$	0.047 m/s^2
$\sigma_{\bar{m}}^{au}$	0.011 m/s^2

Tabelle 3: Alternative Auswertung der Daten

Aus dem Wert der Steigung ergibt sich dann die Schätzung für die Erdbeschleunigung

$$g = (9.80 \pm 0.09) \text{ m/s}^2.$$

1.4.2 Messung mit dem Oszilloskop

Die Messungen mit dem Oszilloskop sind in Tabelle 4 aufgeführt.

$s / \text{ cm}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$t / \text{ ms}$	140.8	200.0	245.2	283.8	318.2	348.4	376.6	402.7	427.2

Tabelle 4: Messreihe mit dem Oszilloskop

Die Genauigkeit der Zeitmessung mit dem Oszilloskop wird auf $\sigma_t = 0.1 \text{ ms}$ geschätzt. Wir führen wieder eine lineare Regression von s über t^2 durch. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 5.

m	s_0	χ^2/n_{df}
$(4.9123 \pm 0.0066) \text{ m/s}^2$	$(0.0035 \pm 0.0007) \text{ m}$	0.5

Tabelle 5: Ausgabe der Regression

Der Wert für χ^2/n_{df} deutet wieder auf eine zu grobe Fehlerabschätzung hin. Dies zeigt sich auch wieder im Residuenplot (Abb. 4), wo fast alle Fehlerbalken die Nulllinie treffen. Trotzdem verwenden wir die Ergebnisse dieser Regression, da die Anpassung deutlich

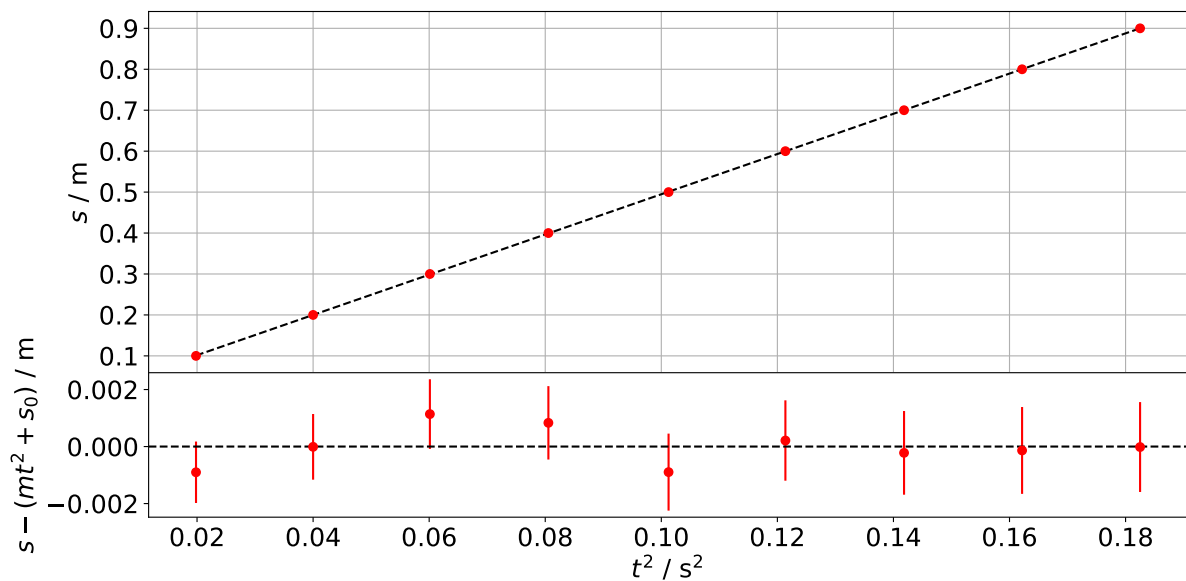


Abbildung 4: Residuenplot für das Oszilloskop

besser ist, als im Falle des Digitalzählers. Aus der Steigung ermitteln wir folgende Schätzung für die Erdbeschleunigung

$$g = (9.824 \pm 0.013) \text{ m/s}^2.$$

1.5 Fazit

Wir haben nun zwei Schätzungen für die Erdbeschleunigung g ermittelt. Wie im Fazit des zweiten Versuchs erläutert, verwenden wir als Literaturwert für die Erdbeschleunigung in Aachen $g_L = 9.811 \text{ m/s}^2$. Zur Bewertung der beiden Ergebnisse berechnen wir

$$\frac{|g_L - g_{Dz}|}{\sigma_{g_{Dz}}} = 0.12$$
$$\frac{|g_L - g_{Os}|}{\sigma_{g_{Os}}} = 1$$

In beiden Fällen liegen wir somit im 1σ -Intervall. Zur Überprüfung der Übereinstimmung der beiden Werte untereinander berechnen wir noch

$$\frac{|g_{Os} - g_{Dz}|}{\sqrt{\sigma_{g_{Dz}}^2 + \sigma_{g_{Os}}^2}} \approx 0.03 \ll 1.$$

Die beiden Werten stimmen also im Rahmen der Unsicherheiten sehr gut überein.

2 Erdbeschleunigung mit dem Pendel

2.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Experiment wird die Schwingung eines physikalischen Pendels untersucht, um die Erdbeschleunigung g zu bestimmen. Die Schwingungsgleichung für das physikalische Pendel lautet

$$J\ddot{\varphi} = -mgl_s \sin(\varphi).$$

Dabei ist J das Gesamtträgheitsmoment des Pendels und l_s der Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt des Pendels, sowie φ der Auslenkwinkel aus der Ruhelage. Auf der rechten Seite der Gleichung steht das rücktreibende Drehmoment, welches durch die Gravitationskraft hervorgerufen wird. Für kleine Winkel, bei denen $\sin(\varphi) \approx \varphi$ näherungsweise gilt, ergibt sich die lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgl_s}{J}\varphi.$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t).$$

Die Kreisfrequenz ω dieser Schwingung ist gegeben durch

$$\omega^2 = \frac{mgl_s}{J}.$$

Da das Trägheitsmoment J des Pendels schwierig zu bestimmen ist, wird dieses Problem umgangen. Das betrachtete Pendel besteht aus einem Winkelaufnehmer-Profil, der Pendelstange und einem zylindrischen Pendelkörper.

Zunächst wird die Schwingungsfrequenz ω_{st} der Stange gemessen. Anschließend wird der Pendelkörper so an der Stange angebracht, dass das Pendel mit Pendelkörper und Stange die gleiche Schwingungsfrequenz hat wie die Stange allein. Sind D_{st} und D_p die maximalen Rückstellmomente von Stange und Pendelkörper und J_{st} und J_p die entsprechenden Trägheitsmomente, so gilt für die Schwingungsfrequenz der Stange allein

$$\omega_{st}^2 = \frac{D_{st}}{J_{st}}.$$

Für den Pendelkörper allein gilt analog

$$\omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p}.$$

Da die Rückstellmomente und die Trägheitsmomente additiv sind, ergibt sich die Frequenz des physikalischen Pendels mit Stange und Pendelkörper zu

$$\omega^2 = \frac{D_{st} + D_p}{J_{st} + J_p} = \omega_{st}^2 \frac{1 + \frac{D_p}{D_{st}}}{1 + \frac{J_p}{J_{st}}}.$$

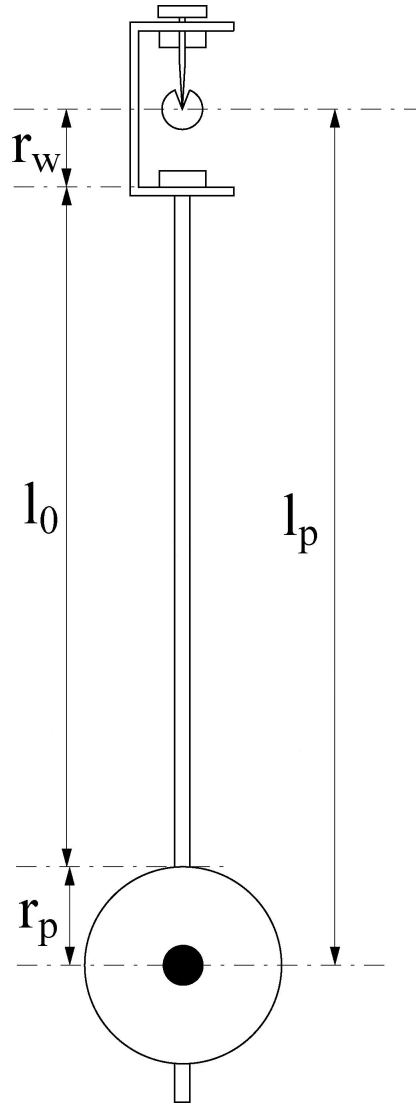


Abbildung 5: Schematische Zeichnung des Pendels

Ist der Pendelkörper nun so eingestellt, dass $\omega = \omega_{st}$, so muss $\frac{D_p}{D_{st}} = \frac{J_p}{J_{st}}$ gelten. Daraus erhält man schließlich

$$\omega_p = \omega_{st} = \omega.$$

Das Pendel lässt sich so betrachten als bestünde es nur aus dem Pendelkörper. Mit dem Trägheitsmoment des geometrisch einfachen Pendelkörpers und dem Satz von Steiner ergibt sich

$$J_p = \frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2.$$

Damit lässt sich nun die Kreisfrequenz des Pendels ausdrücken

$$\omega^2 = \omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p} = \frac{m_p g l_p}{\frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2}.$$

Durch Umformen folgt schließlich die Formel für die Erdbeschleunigung

$$g = \omega^2 l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right).$$

Durch Messung des Radius r_p und der Länge l_p , sowie der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, lässt sich somit die Erdbeschleunigung bestimmen.

2.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Für den Versuch benötigt man folgende Geräte: Sensor-Cassy, Winkelaufnehmer, Pendelstangen, Pendelkörper, Kabel, Tischklemmen, Kreuzmuffen und Stativstangen in zwei Längen.

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 6 und 7 dargestellt. Die Winkelaufnehmer benötigen eine Spannungsquelle und sind mit dem Sensor-Cassy verbunden. Durch zwei Permanentmagneten wird ein Magnetfeld verursacht, dessen Ausrichtung mit dem Pendel oszilliert. Dieses Magnetfeld wird durch den Hall-Effekt vom Winkelaufnehmer gemessen und damit auch die Auslenkung des Pendels aus dem Lot.

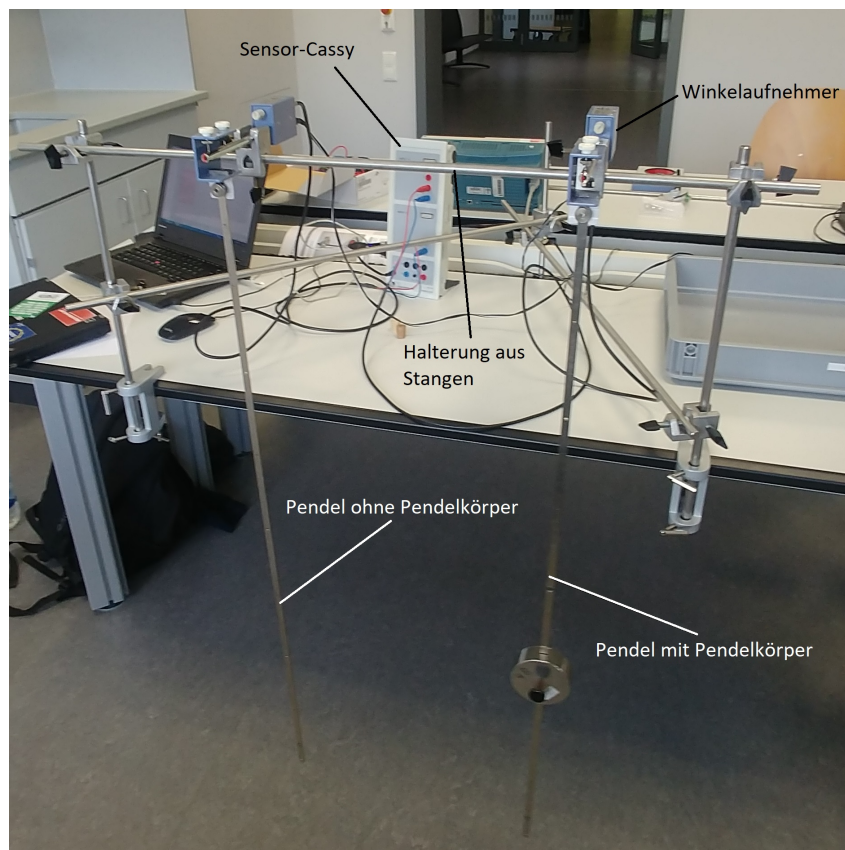


Abbildung 6: Aufbau des Versuchs

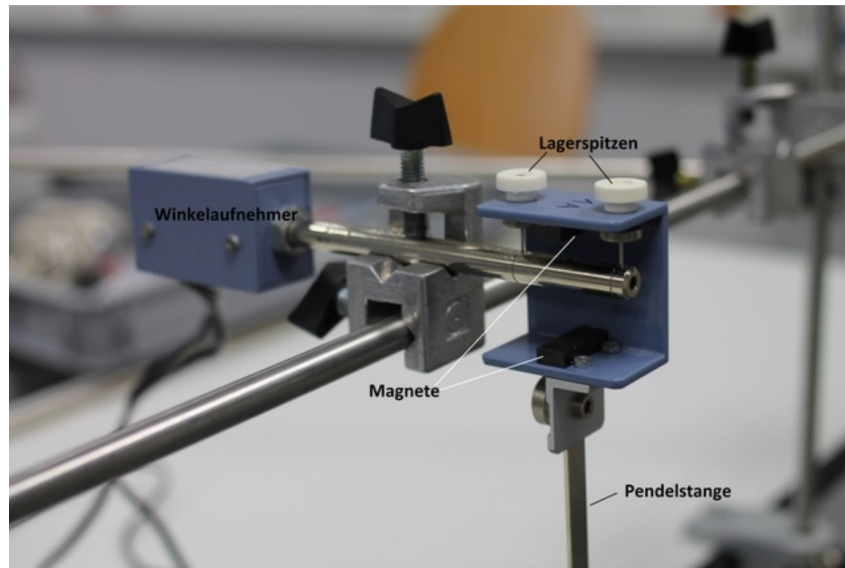


Abbildung 7: Winkelaufnehmer und Lagerung der Pendelstange

Im ersten Schritt des Versuchs muss der Pendelkörper so eingestellt werden, dass die Schwingungsfrequenz beider Pendel identisch ist. Dazu passt man die Höhe der Aufhängung des Pendelkörpers sukzessive an, während das Pendel ohne Pendelkörper schwingt. Eine grobe Übereinstimmung ist schon ohne weitere Hilfsmittel erreichbar. Für eine feinere Konfiguration kann eine vergleichende Messung durchgeführt werden. Anschließend werden beide Schwingungen mit Hilfe des Sensor-Cassys aufgenommen. Bei der vorliegenden Messung hatte das Sensor-Cassy die Messparameter:

1. Messbereich: -3 bis 3 V
2. Intervall: 10 ms
3. Messungen: 16000
4. Messzeit: 320 s

Um die Erdbeschleunigung zu berechnen, werden dann die Längen r_w , l_0 und r_p gemessen.

2.3 Auswertung

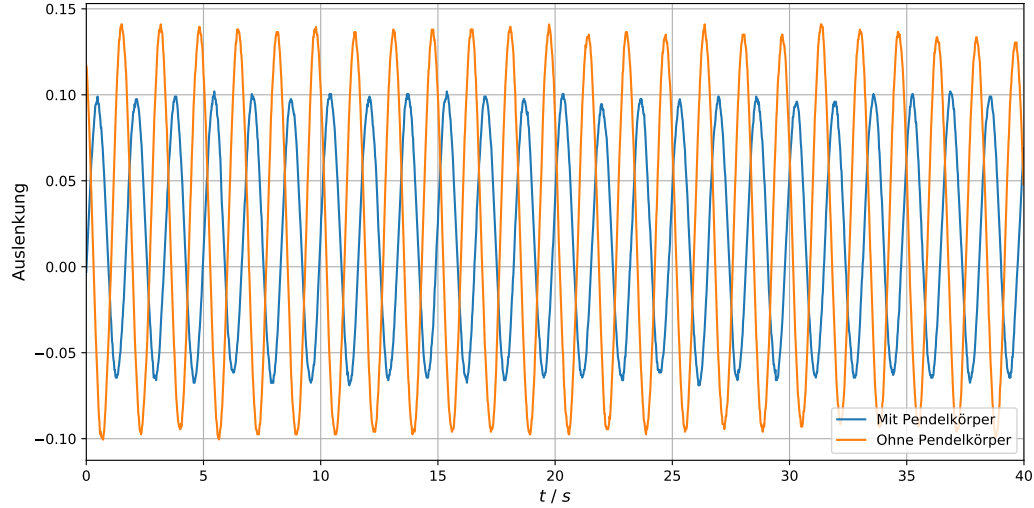


Abbildung 8: Visualisierung der Schwingungen in den ersten 40 s

Nach der Kalibrierung der Winkelgeschwindigkeit wurden folgende Längen für das Pendel mit Pendelkörper gemessen:

r_w	l_0	r_p
$2.535\text{cm} \pm 0.005\text{cm}$	$61.5\text{cm} \pm 0.069\text{cm}$	$3.998\text{cm} \pm 0.003\text{cm}$

Tabelle 6: Ergebnisse der Längenmessungen

Das ergibt eine Pendellänge $l_p = r_w + l_0 + r_p = 68.033\text{cm}$ mit einem Fehler von $\sigma_{l_p} = 0.07\text{cm}$. Die ersten 40 Sekunden der mit dem Sensor-Cassy aufgenommenen Schwingungen sind in Abbildung 8 dargestellt. Aus den Rohdaten ergeben sich folgende Zeitpunkte, an denen das Pendel mit bzw. ohne Pendelkörper die n -te maximale Auslenkung annimmt:

Schwingung	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Zeitpunkt (Pendelkörper) [s]	0.48	15.38	31.94	48.48	65.04	81.56	98.11	114.68	131.28	147.84
Zeitpunkt (nur Stange) [s]	1.5	16.44	33.01	49.59	66.14	82.73	99.32	115.86	132.46	149.05

Schwingung	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Zeitpunkt (Pendelkörper) [s]	164.36	180.9	197.46	214.02	230.56	247.12	263.68	280.22	296.8	313.34
Zeitpunkt (nur Stange) [s]	165.64	182.18	198.8	215.34	231.92	248.47	265.08	281.62	298.23	314.83

Diese Datenpunkte wurden mit einer Genauigkeit von $\sigma_t = 0.02\text{s}$ bestimmt. Eine lineare Regression der Zeitpunkte mit Residuenplot ist in Abbildung 9 zu sehen. Die bestimmten Parameter a, b aus der Geradengleichung $t = an + b$ sind in Tabelle 7 aufgeführt.

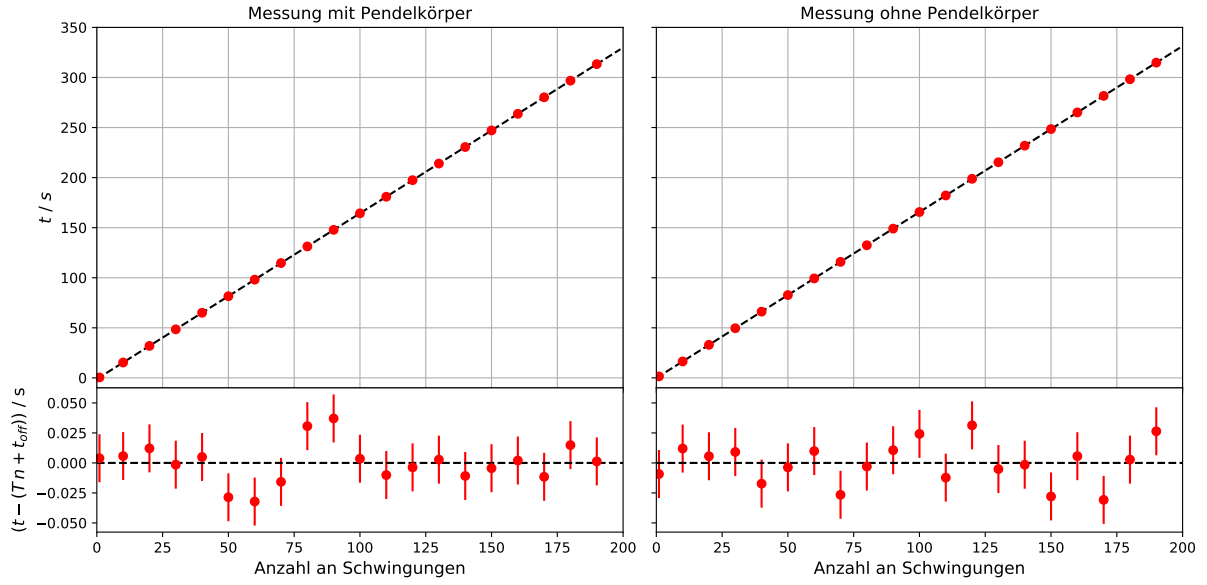


Abbildung 9: Regression und Residuenplot für Datenpunkte aus dem Versuch mit und ohne Pendelkörper

	a [s]	σ_a [s]	b [s]	σ_b [s]	χ^2/ndf
mit Pendelkörper	1.65536	$7 \cdot 10^{-5}$	-1.17929	0.00863	0.73
ohne Pendelkörper	1.65764	$7 \cdot 10^{-5}$	-0.14841	0.00863	0.80

Tabelle 7: In der Regression bestimmte Parameter mit Fehler

Somit ergibt sich eine Periodendauer von $T_p = 1.65536\text{s} \pm 7 \cdot 10^{-5}\text{s}$ bzw. $T_{st} = 1.65764\text{s} \pm 7 \cdot 10^{-5}\text{s}$. Die χ^2/ndf -Werte sind dabei zufriedenstellend. Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ führt das zu den Kreisfrequenzen $\omega_p = 3.79566\text{Hz} \pm 0.00018\text{Hz}$ und $\omega_{st} = 3.79043\text{Hz} \pm 0.00018\text{Hz}$. Dabei ist der Fehler in ω nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung durch

$$\sigma_\omega = \left| \frac{\partial \omega(T)}{\partial T} \right| \sigma_T = \frac{2\pi}{T^2} \sigma_T$$

gegeben.

Eine Analyse der Schwingung mit Hilfe einer FFT liefert die Ergebnisse $\omega_p = 2\pi f_p = 3.79567\text{Hz}$ und $\omega_{st} = 2\pi f_s = 3.79093\text{Hz}$ und passt somit zu den Werten, die die Regressionsanalyse liefert. Der Plot davon ist in Abbildung 10 dargestellt. Aufgrund der mangelnden Fehleranalyse wird ausschließlich mit den Werten aus der Regressionsanalyse weitergearbeitet.

Aus den bisher bestimmten Größen ergibt sich eine Erdbeschleunigung von

$$g = \omega_p^2 l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right) = 9.8184 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Um die Fehlerbetrachtung durchzuführen, wird g als Funktion in ω_p , l_p und r_p betrachtet. Wie in der Praktikumsanleitung für den Versuch diskutiert, kann der Fehler in r_p ver-

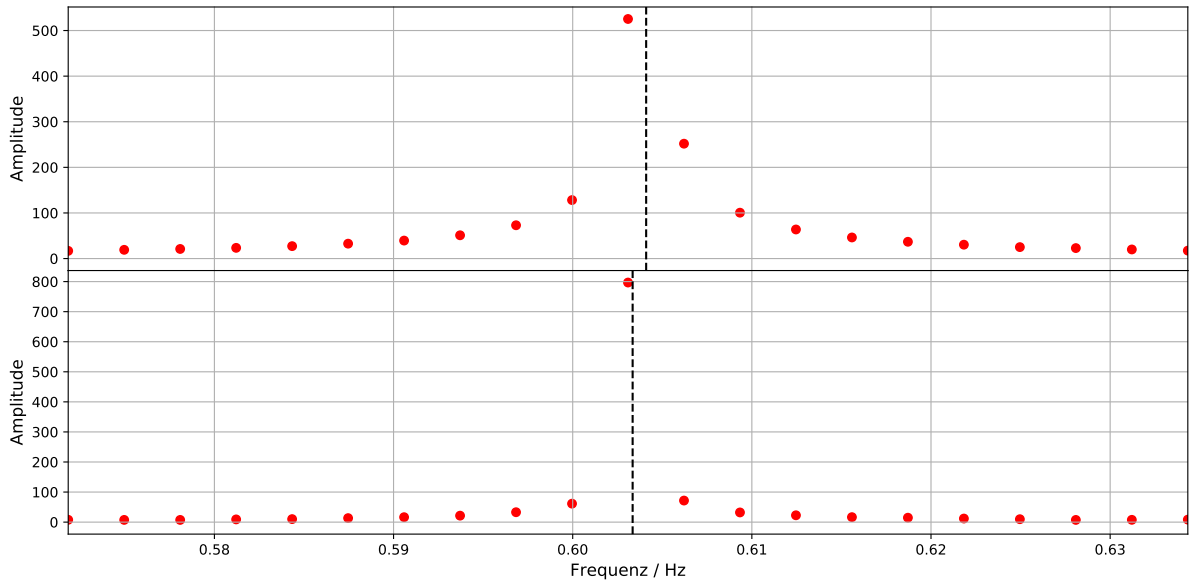


Abbildung 10: FFT der Rohdaten und Peakanalyse - oben mit Pendelkörper und unten ohne Pendelkörper

nachlässigt werden. Die relative Abweichung von Schwingung mit und ohne Pendelkörper beträgt

$$\frac{|\omega_p - \omega_{st}|}{\omega_p} = 0.0014$$

und wird daher ebenfalls vernachlässigt. Für die relevanten partiellen Ableitungen von g gilt

$$\frac{\partial g}{\partial \omega_p} = 2\omega_p l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2}\right) \text{ und}$$

$$\frac{\partial g}{\partial l_p} = \omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2}\right).$$

Das ergibt einen Fehler von

$$\sigma_g = 0.010 \frac{m}{s^2}.$$

2.4 Fazit

Die Physikalisch-Technische Bundesanstalt gibt die Erdbeschleunigung für die Stadt Brüssel mit $g = 9.811 \frac{m}{s^2}$ an¹. Da Aachen und Brüssel näherungsweise den gleichen Breitengrad haben (Brüssel: 50.84°, Aachen: 50.78°), wird dieser Wert als Literaturwert verwendet. Der Literaturwert liegt im 1σ -Intervall des im Experiment bestimmten Wert $9.818 \frac{m}{s^2} \pm 0.010 \frac{m}{s^2}$ und somit innerhalb der Fehlertoleranz. Der schwerwiegendste Fehler im Experiment wurde durch die Messung der Länge l_0 gemacht.

¹https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_1/1.1_masse/1.15/gravzonen.pdf