

Versuchsprotokoll

ELEKTRIZITÄTSLEHRE

Gedämpfter LCR-Schwingkreis und
Gekoppelte LC-Schwingkreise

Simon Schwarz und Marius Ising

Inhaltsverzeichnis

1. Gedämpfter LCR-Schwingkreis	3
1.1. Versuchsbeschreibung	3
1.2. Versuchsaufbau	4
1.3. Versuchsdurchführung	5
1.4. Versuchsauswertung	5
1.4.1. Schwingfall	5
1.5. Fazit	7
2. Gekoppelte LC-Schwingkreise	7
2.1. Versuchsbeschreibung	7
2.2. Versuchsaufbau	8
2.3. Versuchsdurchführung	8
2.4. Versuchsauswertung	8
2.5. Fazit	8
A. Regressionen der übrigen Widerstände	8

1. Gedämpfter LCR-Schwingkreis

1.1. Versuchsbeschreibung

In einer Serienschaltung aus Spule L , Kondensator C und Ohmschem Widerstand R (vgl. Abb. 1) wird der Kondensator zunächst aufgeladen und anschließend die Spannungsquelle mit einem Taster überbrückt, sodass der Kondensator sich über den Widerstand entladen kann. Dabei entlädt sich der Kondensator nicht sofort, sondern er schwingt sich bei der Spannung $U = 0$ ein. Dieser Einschwingvorgang hängt wesentlich von der Dämpfung der Schwingung durch die Ohmschen Widerstände der Schaltung ab.

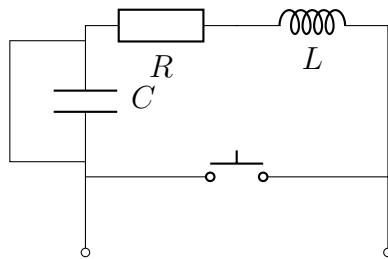


Abbildung 1: Schaltbild des LCR-Schwingkreises

Nach der Kirchhoffsschen Maschenregel gilt für die Schaltung bei gedrücktem Taster

$$0 = U_C + U_R + U_L = \frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt}$$

Mit $I = \frac{dQ}{dt}$ erhält man folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dies ist die DGL einer gedämpften harmonischen Schwingung. Dabei bezeichnet $\delta = \frac{R}{2L}$ die Dämpfungskonstante und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Schwingungsfrequenz der ungedämpften Schwingung. Für die Lösung der DGL unterscheiden wir drei Fälle. In allen Fällen gelten die gleichen Anfangsbedingungen

$$Q(0) = CU_0 \quad \text{und} \quad I(0) = 0.$$

Schwingfall ($\delta < \omega_0$)

Hier ist eine echte Schwingung zu beobachten. Es gilt

$$Q(t) = e^{-\delta t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

Aus den Anfangsbedingungen erhält man $A = CU_0$ und $B = A \frac{\delta}{\omega}$. Für den Strom gilt wegen $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I(t) = -CU_0 e^{-\delta t} \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \sin(\omega t). \quad (1)$$

Kriechfall ($\delta > \omega_0$)

In diesem Fall ist die Dämpfung so stark, dass der Kondensator seine Spannung nur sehr langsam verliert. Zudem findet keine Schwingung statt.

$$Q(t) = Ae^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$A = CU_0 \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \quad \text{und} \quad B = CU_0 \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)

Der Kondensator wird innerhalb der kürzesten Zeit entladen. Die Lösung hat die Form

$$Q(t) = e^{-\delta t}(A + Bt)$$

mit $A = CU_0$ und $B = \delta A$.

1.2. Versuchsaufbau

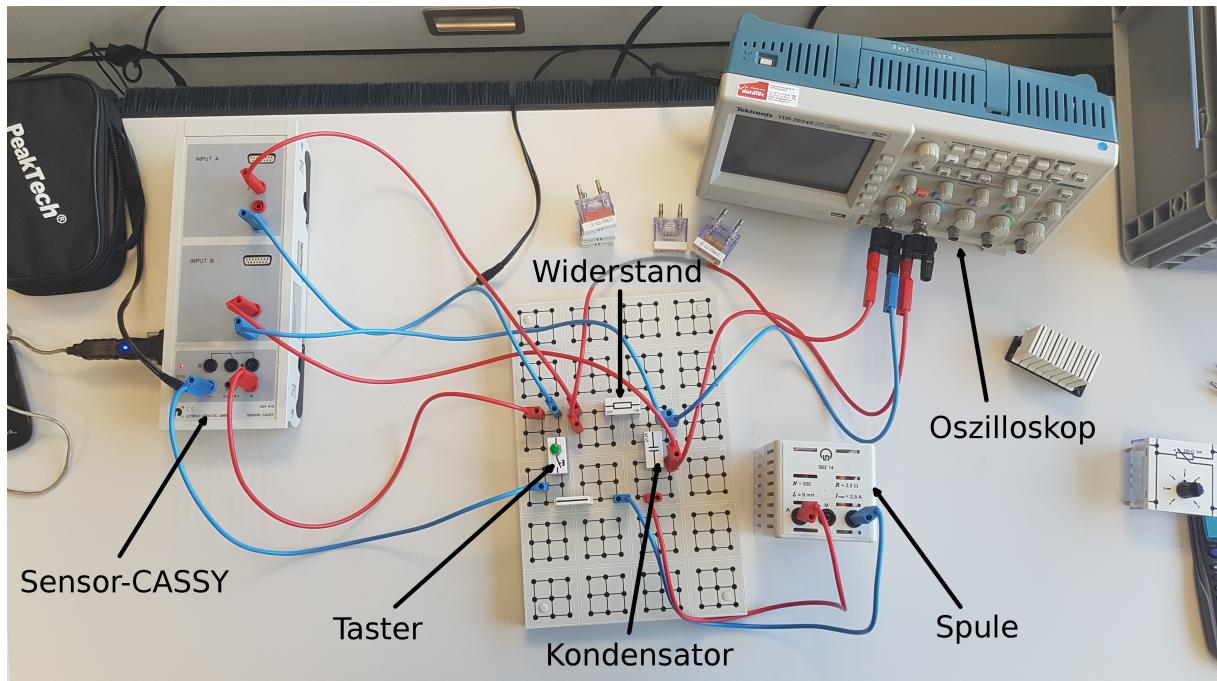


Abbildung 2: Versuchsaufbau LCR-Schwingkreis

Das Schaltbild aus Abbildung 1 wird auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Dies ist in Abbildung 2 zu sehen. Als Spannungsquelle dient die Spannungsquelle des Sensor-CASSY. Die Spannung am Kondensator wird am Eingang B und die Stromstärke am Eingang A gemessen. Zusätzlich wird die Spannung am Kondensator am Channel 1 und die Spannung am Widerstand am Channel 2 des Oszilloskops gemessen. Die Erde liegt dabei zwischen Kondensator und Widerstand.

1.3. Versuchsdurchführung

1.4. Versuchsauswertung

Die Rohdaten für alle verschiedenen Fälle sind in Abbildung 3 zu sehen.

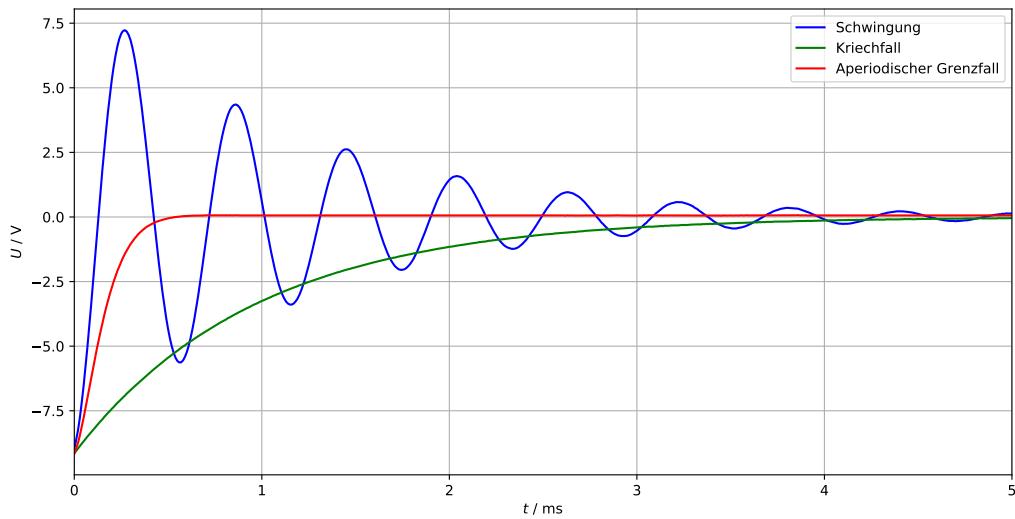


Abbildung 3: Rohdaten mit Schwing-, Kriech- und Aperiodischem Grenzfall

1.4.1. Schwingfall

Zunächst bestimmen wir die Frequenzen und die Dämpfungen der aufgenommenen Schwingungen für die verschiedenen verwendeten Ohmschen Widerstände. Im folgenden sind die verwendeten Widerstände mit Herstellerangabe und gemessenen Werten angegeben:

Herstellerangabe / Ω	Gemessener Wert / Ω
1	1.008 ± 0.001
5.1	5.101 ± 0.001
10	9.990 ± 0.002
20	19.82 ± 0.01
47	46.67 ± 0.01
100	99.24 ± 0.04

Für alle nun folgenden Rechnungen wurden die gemessenen Widerstandswerte verwendet. Es existieren zwei Möglichkeiten, um die Frequenz bzw. die Periodendauer zu bestimmen. Einerseits ist die Analyse mittels FFT möglich. Andererseits können die Extrema aus den Rohdaten abgelesen und die Periodendauer mittels Regression über die Schwingungsanzahl bestimmt werden. Analog dazu besteht die Möglichkeit, die Dämpfung δ aus Gleichung 1 durch logarithmisches Auftragen der Extrema, d.h. mit Regression, zu

bestimmen: Für die Zeitpunkte t_i an denen I bzw. U_C ein Extremum annimmt, gilt

$$\sin(\omega t_i) = \pm 1$$

. Durch logarithmieren der Gleichung erhält man

$$\log|I(t_i)| = -\delta t_i + \log \left| C U_0 \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \right|$$

beziehungsweise eine analoge Form für U_C . Natürlich kann δ durch die Verwendung eines Steigungsdreiecks auch nur bei zwei ablesbaren Maxima oder Minima bestimmt werden:

$$\delta = \frac{\log \left(\frac{U_C(t_0)}{U_C(t_1)} \right)}{t_1 - t_0}$$

Bei beiden Vorgehensweisen muss der Offset korrigiert werden. Eine Regression ist für den 100Ω Widerstand nicht praktikabel, da aufgrund der starken Dämpfung zu wenige Extrema genau ablesbar sind. Ein beispielhaftes Ergebnis für die Regression von abgelesenen Extrema bei der Schwingung des 10Ω Widerstand ist in Abbildung 8 dargestellt. Die übrigen durchgeföhrten Regressionen sind im Anhang A abgebildet.

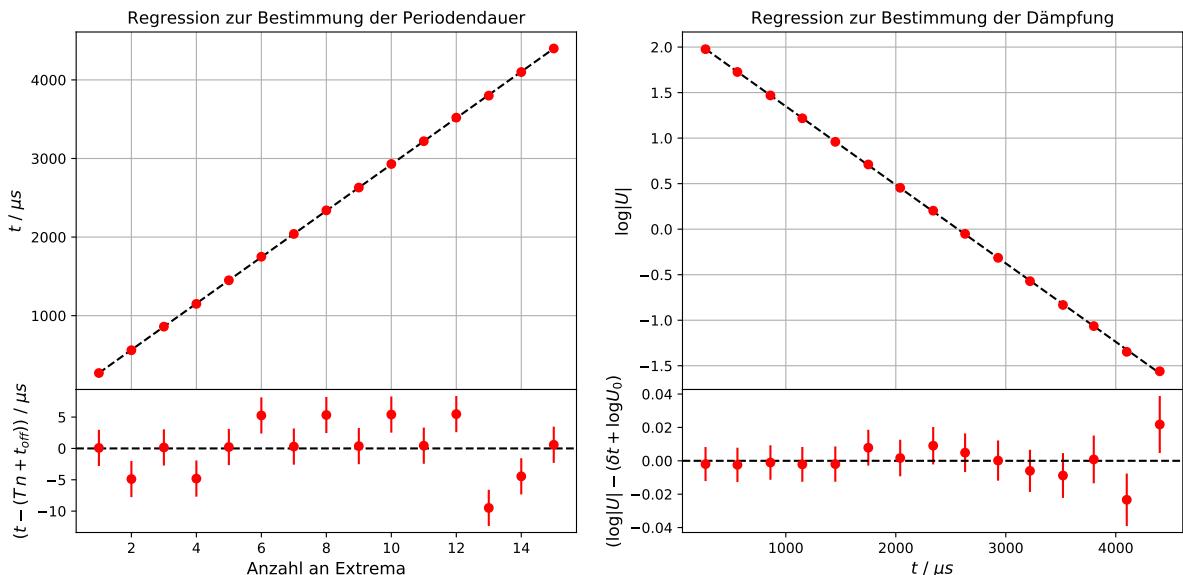


Abbildung 4: Regression für den 10Ω Widerstand

Für die Frequenzen ergeben sich folgende Werte:

Ohmscher Widerstand / Ω	Regression / Hz	FFT / Hz
1	3393.9 ± 1.2	
5.1	3392.7 ± 1.4	
10	3390.2 ± 2.0	
20	3378.4 ± 4.3	
47	3257.3 ± 9.7	
100	-	

Folgende Dämpfungswerte wurden berechnet:

Herstellerangabe / Ω	Dämpfung / Hz
1	
5.1	
10	
20	
47	
100	

1.5. Fazit

2. Gekoppelte LC-Schwingkreise

2.1. Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch werden zwei Schwingkreise induktiv miteinander gekoppelt. Speziell werden hier die beiden Fundamentalschwingungen bei gleichsinniger und gegensinniger Anregung und eine Schwebung aufgezeichnet.

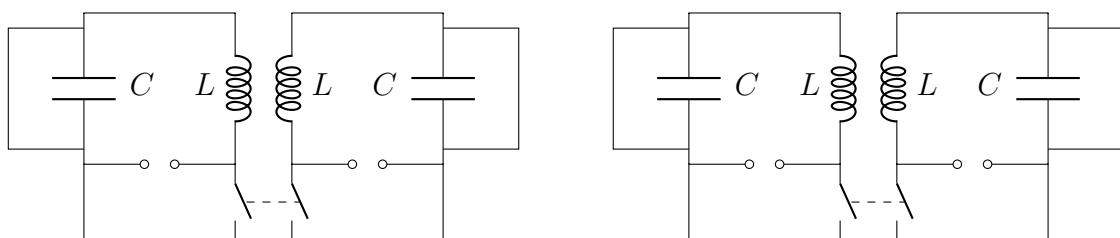


Abbildung 5: Fundamentalschwingungen der gekoppelten Schwingkreise bei gleichsinniger (links) und gegensinniger Anregung (rechts)

Bei überbrückter Spannungsquelle gelten für den gekoppelten Schwingkreis die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{I}_1 + k\ddot{I}_2 + \frac{1}{LC}I_1 &= 0 \\ \ddot{I}_2 + k\ddot{I}_1 + \frac{1}{LC}I_2 &= 0\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $k \in (0, 1)$ die Kopplung der beiden Schwingkreise. Mit den sogenannten *Fundamentalströmen* $I_+ = I_1 + I_2$ und $I_- = I_1 - I_2$ erhält man durch Addition bzw. Subtraktion der obigen Gleichungen und anschließendem Umformen

$$\begin{aligned}\ddot{I}_+ + \frac{1}{LC(1+k)}I_+ &= 0 \\ \ddot{I}_- + \frac{1}{LC(1-k)}I_- &= 0\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_+ = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}.$$

Dabei ist $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Kreisfrequenz der ungekoppelten Schwingung. Mithilfe der Fundamentalschwingungen lässt sich dann der Kopplungsgrad bestimmen

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}.$$

Bei Messung einer Schwebung mit Schwebungsfrequenz f_s und Frequenz der gekoppelten Schwingung f_k kann man die Fundamentalschwingungen gemäß

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \quad \text{und} \quad f_s = \frac{f_- - f_+}{2}$$

bestimmen. Aufgrund der unvermeidbaren Dämpfung der beiden Schwingkreise sind die Extrema des einen Schwingkreises gegen die Nulldurchgänge des anderen verschoben. Für Kopplungen $k < 0.2$ gilt näherungsweise für die zeitliche Verschiebung

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{k}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right).$$

2.2. Versuchsaufbau

2.3. Versuchsdurchführung

2.4. Versuchsauswertung

2.5. Fazit

A. Regressionen der übrigen Widerstände

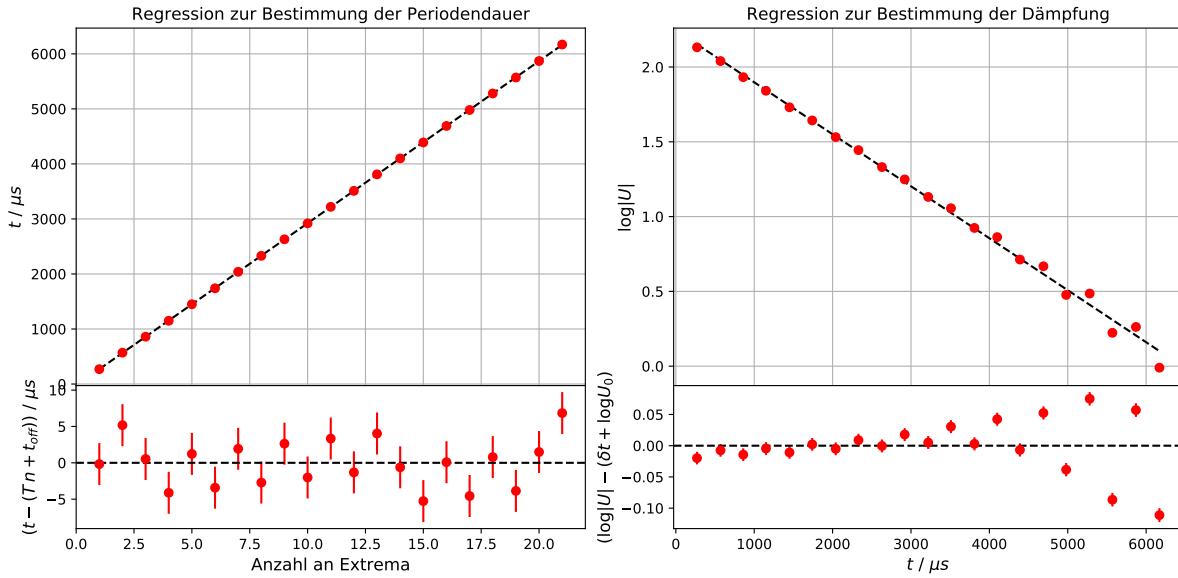


Abbildung 6: Regression für den 1Ω Widerstand

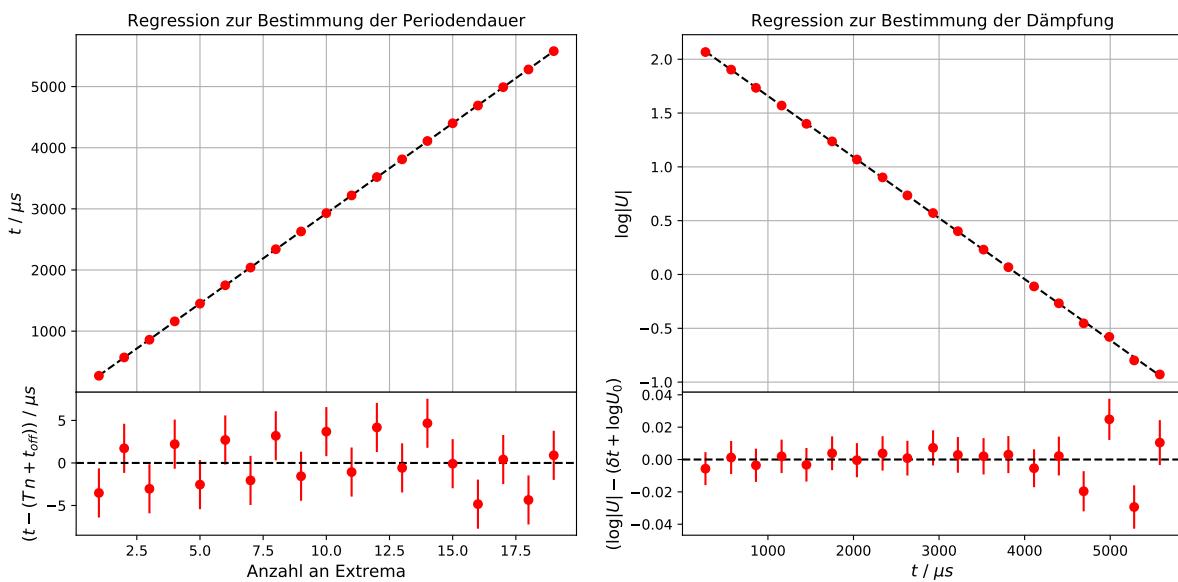


Abbildung 7: Regression für den 5.1Ω Widerstand

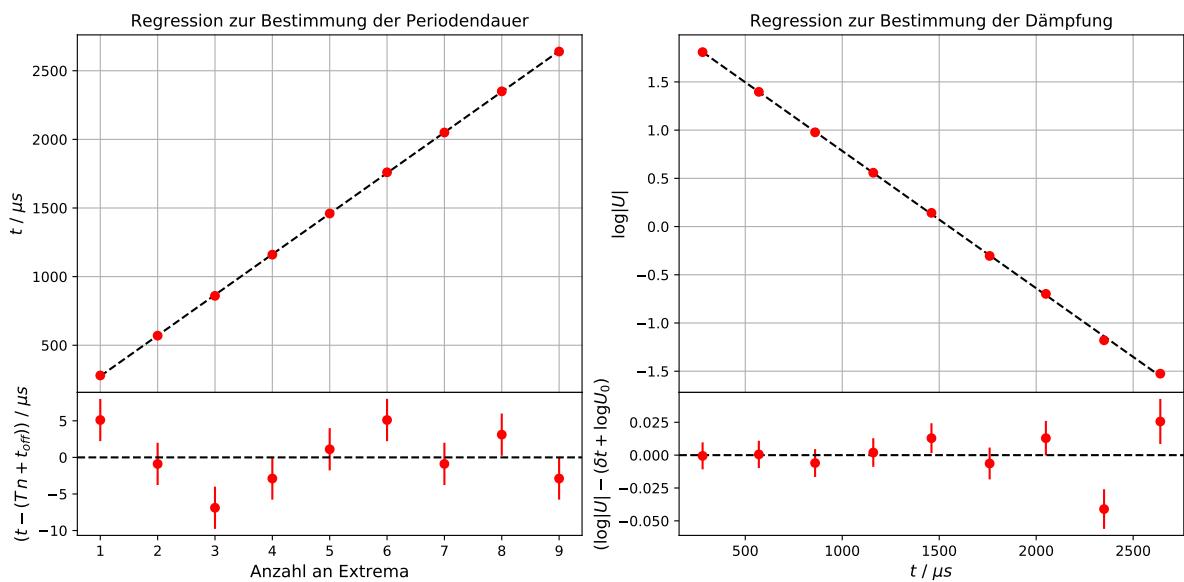


Abbildung 8: Regression für den 20Ω Widerstand