

# Versuchsprotokoll

## AKUSTIK

Schallgeschwindigkeit in Festkörpern und die Physik der Gitarre

*Simon Schwarz und Marius Ising*

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Schallgeschwindigkeit in Festkörpern</b> | <b>3</b> |
| 1.1      | Versuchsbeschreibung . . . . .              | 3        |
| 1.2      | Versuchsaufbau . . . . .                    | 3        |
| 1.3      | Versuchsdurchführung . . . . .              | 3        |
| 1.4      | Versuchsauswertung . . . . .                | 4        |
| 1.4.1    | Messung mit dem Digitalzähler . . . . .     | 4        |
| 1.4.2    | Messung mit dem Oszilloskop . . . . .       | 5        |
| 1.5      | Fazit . . . . .                             | 6        |

# 1 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

## 1.1 Versuchsbeschreibung

Das Ziel des folgenden Versuchs ist die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und des Elastizitätsmoduls von vier verschiedenen Metallen. Das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

ist eine Materialkonstante und gibt die relative Längenausdehnung in Abhängigkeit von der angreifenden Zugspannung an. Eine Messung ist über die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

möglich, wobei  $\rho$  die Dichte des Materials bezeichnet. Die dynamische Bestimmung von  $E$  durch das direkte Messen der Längenausdehnung ist bei Metallstäben nicht praktikabel, da für Metalle  $E$  in der Größenordnung  $10^{11} \text{ N/m}^2$  liegt. Der Metallstab hat als Zylinder mit Länge  $L$ , Durchmesser  $D$  und Masse  $M$  die Dichte

$$\rho = \frac{4M}{\pi L D^2},$$

so dass sich mit

$$v_l = 2L f_0$$

das Elastizitätsmodul

$$E = 16 f_0^2 L M \frac{1}{\pi D^2}$$

ergibt.

## 1.2 Versuchsaufbau

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau dient der Messung der Fallzeit einer Stahlkugel für einstellbare Höhen von 10 bis 90 mm. In eine Grundplatte mit integrierter Auffangplatte wird eine Stativstange mit Skala montiert. Zudem wird eine höhenverstellbare Startkonsole mit Auslösevorrichtung für die Metallkugel an die Stange angebracht. Verlässt die Metallkugel die Haltezunge mit Mikromagnet, so wird ein elektrisches Startsignal ausgelöst. Beim Aufprall auf der Platte entsteht ein Stopp-Signal und die Zeitmessung wird beendet. Die Zeitmessung erfolgt dabei wahlweise mit einem Digital-Zähler oder dem Oszilloskop. Der Zähler und das Oszilloskop werden dabei gleichzeitig angeschlossen (siehe Abb. 2).

### 1.3 Versuchsdurchführung

Die Fallzeiten werden für verschiedene Höhen von 10 bis 90 cm in Schritten von 10 cm durchgeführt. Dabei werden für jede Höhe 10 Zeitmessungen mit dem Digitalzähler und eine Messung mit dem Oszilloskop durchgeführt. Das Oszilloskop wird dabei auf Single Seq eingestellt und auf die steigende Flanke des Startsignals getriggert. Das Triggerlevel liegt dabei bei 620 mV. Um eine Startgeschwindigkeit der Kugel zu vermeiden, wird der Auslösebügel möglichst feinfühlig betätigt. Es werden stets alle Messungen für eine Höhe durchgeführt, ehe die Höhe verstellt wird. Bei der Höheneinstellung wird versucht mit der oberen Bohrungskante der Startkonsole genau den Strich der Säulenskala zu treffen.

### 1.4 Versuchsauswertung

#### 1.4.1 Messung mit dem Digitalzähler

Für die Höhenmessung ist entscheidend mit welcher Genauigkeit man den Skalenstrich trifft. Dabei wird die Unsicherheit auf  $\sigma_s = 1$  mm geschätzt. Mit dem Digitalzähler ergaben sich die Messungen aus Tabelle 1.

| $s$ / cm       | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90    |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t$ / ms       | 140   | 200   | 245   | 284   | 318   | 348   | 376   | 403   | 427   |
|                | 140   | 200   | 246   | 284   | 318   | 348   | 377   | 403   | 427   |
|                | 140   | 200   | 246   | 284   | 318   | 348   | 376   | 403   | 427   |
|                | 141   | 200   | 246   | 284   | 318   | 348   | 377   | 403   | 427   |
|                | 141   | 200   | 246   | 284   | 318   | 348   | 377   | 402   | 407   |
|                | 141   | 200   | 245   | 284   | 318   | 348   | 376   | 402   | 427   |
|                | 141   | 200   | 246   | 284   | 318   | 348   | 376   | 402   | 427   |
|                | 141   | 200   | 245   | 284   | 318   | 348   | 376   | 402   | 427   |
|                | 141   | 200   | 245   | 284   | 318   | 348   | 376   | 403   | 427   |
|                | 141   | 200   | 246   | 284   | 318   | 348   | 376   | 402   | 427   |
| $\bar{t}$ / ms | 140.7 | 200.0 | 245.6 | 284.0 | 318.0 | 348.0 | 376.3 | 402.5 | 427.0 |

Tabelle 1: Messreihe mit dem Digitalzähler

Aufgrund der geringen statistischen Effekte in der Messreihe werden statistische Unsicherheiten vernachlässigt und die Unsicherheit aufgrund der zeitlichen Auflösung des Zählers unter Annahme einer Gleichverteilung zu  $\sigma_t = 1/\sqrt{12}$  ms  $\approx 0.29$  ms bestimmt. Wir führen nun mit den berechneten Mittelwerten eine Regression durch. Da in unserem Experiment die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  der Kugel vernachlässigbar sein sollte, haben wir einen linearen Zusammenhang zwischen  $s$  und  $t^2$ . Es gilt

$$s(t) = s_0 + mt^2.$$

Deswegen führen wir eine lineare Regression von  $s$  über  $t^2$  durch. Dazu berechnen wir zunächst die Werte für  $t^2$  und bestimmen den Fehler dieser gemäß

$$\sigma_{t^2} = 2|t|\sigma_t.$$

Die Ergebnisse der Regression sind in Tabelle 2 aufgelistet.

| $m$                                 | $s_0$                           | $\chi^2/n_{df}$ |
|-------------------------------------|---------------------------------|-----------------|
| $(4.9221 \pm 0.0084) \text{ m/s}^2$ | $(0.0028 \pm 0.0009) \text{ m}$ | 0.14            |

Tabelle 2: Ausgabe der Regression

Abbildung 3: Residuenplot für den Digitalzähler

Der sehr schlechte Wert für  $\chi^2/n_{df}$  spiegelt sich auch im Residuengraph wieder (Abb. 3), wo alle Fehlerbalken deutlich die Nulllinie treffen. Zusammen führt dies zu dem Schluss, dass die Fehlerabschätzungen für  $s$  und  $t$  zu grob sind. Da wir jedoch keine besseren Abschätzungen machen können, führen wir noch eine alternative Auswertung der Daten durch. Dazu berechnen wir für je zwei benachbarte Datenpunkte in unserem  $s - t^2$ -Diagramm die Steigung, wobei der erste Wert nicht verwendet wird. Für die Steigung gilt

$$m = \frac{s_{i+1} - s_i}{t_{i+1}^2 - t_i^2}.$$

Dies liefert uns vier Schätzungen für die Steigung. Die Fehler werden mit einer Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt. Diese liefert uns

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{2}{(s_{i+1} - s_i)^2} \cdot \sigma_s^2 + \frac{4(t_{i+1}^2 + t_i^2)}{(t_{i+1}^2 - t_i^2)^2} \cdot \sigma_t^2.$$

Anschließend werden die vier Steigungswerte mit ihren Unsicherheiten gewichtet gemittelt und innerer und äußerer Fehler des Mittelwertes bestimmt. Die Ergebnisse dieser Kalkulation sind in Tabelle 3 zu sehen.

|                         |                                   |
|-------------------------|-----------------------------------|
| $m_1$                   | $(4.921 \pm 0.083) \text{ m/s}^2$ |
| $m_2$                   | $(4.886 \pm 0.091) \text{ m/s}^2$ |
| $m_3$                   | $(4.879 \pm 0.099) \text{ m/s}^2$ |
| $m_4$                   | $(4.921 \pm 0.109) \text{ m/s}^2$ |
| $\bar{m}$               | $4.902 \text{ m/s}^2$             |
| $\sigma_{\bar{m}}^{in}$ | $0.047 \text{ m/s}^2$             |
| $\sigma_{\bar{m}}^{au}$ | $0.011 \text{ m/s}^2$             |

Tabelle 3: Alternative Auswertung der Daten

Aus dem Wert der Steigung ergibt sich dann die Schätzung für die Erdbeschleunigung

$$g = (9.80 \pm 0.09) \text{ m/s}^2.$$

### 1.4.2 Messung mit dem Oszilloskop

Die Messungen mit dem Oszilloskop sind in Tabelle 4 aufgeführt.

|                  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $s / \text{ cm}$ | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90    |
| $t / \text{ ms}$ | 140.8 | 200.0 | 245.2 | 283.8 | 318.2 | 348.4 | 376.6 | 402.7 | 427.2 |

Tabelle 4: Messreihe mit dem Oszilloskop

Die Genauigkeit der Zeitmessung mit dem Oszilloskop wird auf  $\sigma_t = 0.1 \text{ ms}$  geschätzt. Wir führen wieder eine lineare Regression von  $s$  über  $t^2$  durch. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 5.

|                                     |                                 |                 |
|-------------------------------------|---------------------------------|-----------------|
| $m$                                 | $s_0$                           | $\chi^2/n_{df}$ |
| $(4.9123 \pm 0.0066) \text{ m/s}^2$ | $(0.0035 \pm 0.0007) \text{ m}$ | 0.5             |

Tabelle 5: Ausgabe der Regression

Der Wert für  $\chi^2/n_{df}$  deutet wieder auf eine zu grobe Fehlerabschätzung hin. Dies zeigt sich auch wieder im Residuenplot (Abb. 4), wo fast alle Fehlerbalken die Nulllinie treffen. Trotzdem verwenden wir die Ergebnisse dieser Regression, da die Anpassung deutlich

Abbildung 4: Residuenplot für das Oszilloskop

besser ist, als im Falle des Digitalzählers. Aus der Steigung ermitteln wir folgende Schätzung für die Erdbeschleunigung

$$g = (9.824 \pm 0.013) \text{ m/s}^2.$$

## 1.5 Fazit

Wir haben nun zwei Schätzungen für die Erdbeschleunigung  $g$  ermittelt. Wie im Fazit des zweiten Versuchs erläutert, verwenden wir als Literaturwert für die Erdbeschleunigung in Aachen  $g_L = 9.811 \text{ m/s}^2$ . Zur Bewertung der beiden Ergebnisse berechnen wir

$$\frac{|g_L - g_{Dz}|}{\sigma_{g_{Dz}}} = 0.12$$

$$\frac{|g_L - g_{Os}|}{\sigma_{g_{Os}}} = 1$$

In beiden Fällen liegen wir somit im  $1\sigma$ -Intervall. Zur Überprüfung der Übereinstimmung der beiden Werte untereinander berechnen wir noch

$$\frac{|g_{Os} - g_{Dz}|}{\sqrt{\sigma_{g_{Dz}}^2 + \sigma_{g_{Os}}^2}} \approx 0.03 \ll 1.$$

Die beiden Werten stimmen also im Rahmen der Unsicherheiten sehr gut überein.