

# Versuchsprotokoll

## ELEKTRIZITÄTSLEHRE

Gedämpfter LCR-Schwingkreis und  
Gekoppelte LC-Schwingkreise

*Simon Schwarz und Marius Ising*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Gedämpfter LCR-Schwingkreis</b>	<b>3</b>
1.1. Versuchsbeschreibung . . . . .	3
1.2. Versuchsaufbau . . . . .	4
1.3. Versuchsdurchführung . . . . .	5
1.4. Versuchsauswertung . . . . .	5
1.4.1. Schwingfall . . . . .	5
1.5. Fazit . . . . .	8
<b>2. Gekoppelte LC-Schwingkreise</b>	<b>8</b>
2.1. Versuchsbeschreibung . . . . .	8
2.2. Versuchsaufbau . . . . .	9
2.3. Versuchsdurchführung . . . . .	9
2.4. Versuchsauswertung . . . . .	9
2.5. Fazit . . . . .	9
<b>A. LCR-Schwingfall: Regressionen der übrigen Widerstände</b>	<b>9</b>
<b>B. LCR-Schwingfall: FFT der übrigen Widerstände</b>	<b>9</b>

# 1. Gedämpfter LCR-Schwingkreis

## 1.1. Versuchsbeschreibung

In einer Serienschaltung aus Spule  $L$ , Kondensator  $C$  und Ohmschem Widerstand  $R$  (vgl. Abb. 1) wird der Kondensator zunächst aufgeladen und anschließend die Spannungsquelle mit einem Taster überbrückt, sodass der Kondensator sich über den Widerstand entladen kann. Dabei entlädt sich der Kondensator nicht sofort, sondern er schwingt sich bei der Spannung  $U = 0$  ein. Dieser Einschwingvorgang hängt wesentlich von der Dämpfung der Schwingung durch die Ohmschen Widerstände der Schaltung ab.

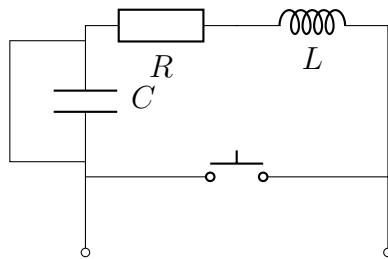


Abbildung 1: Schaltbild des LCR-Schwingkreises

Nach der Kirchhoffsschen Maschenregel gilt für die Schaltung bei gedrücktem Taster

$$0 = U_C + U_R + U_L = \frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt}$$

Mit  $I = \frac{dQ}{dt}$  erhält man folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dies ist die DGL einer gedämpften harmonischen Schwingung. Dabei bezeichnet  $\delta = \frac{R}{2L}$  die Dämpfungskonstante und  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  die Schwingungsfrequenz der ungedämpften Schwingung. Für die Lösung der DGL unterscheiden wir drei Fälle. In allen Fällen gelten die gleichen Anfangsbedingungen

$$Q(0) = CU_0 \quad \text{und} \quad I(0) = 0.$$

### Schwingfall ( $\delta < \omega_0$ )

Hier ist eine echte Schwingung zu beobachten. Es gilt

$$Q(t) = e^{-\delta t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

Aus den Anfangsbedingungen erhält man  $A = CU_0$  und  $B = A \frac{\delta}{\omega}$ . Für den Strom gilt wegen  $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I(t) = -CU_0 e^{-\delta t} \left( \omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \sin(\omega t). \quad (1)$$

### Kriechfall ( $\delta > \omega_0$ )

In diesem Fall ist die Dämpfung so stark, dass der Kondensator seine Spannung nur sehr langsam verliert. Zudem findet keine Schwingung statt.

$$Q(t) = Ae^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$A = CU_0 \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \quad \text{und} \quad B = CU_0 \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

### Aperiodischer Grenzfall ( $\delta = \omega_0$ )

Der Kondensator wird innerhalb der kürzesten Zeit entladen. Die Lösung hat die Form

$$Q(t) = e^{-\delta t}(A + Bt)$$

mit  $A = CU_0$  und  $B = \delta A$ .

## 1.2. Versuchsaufbau

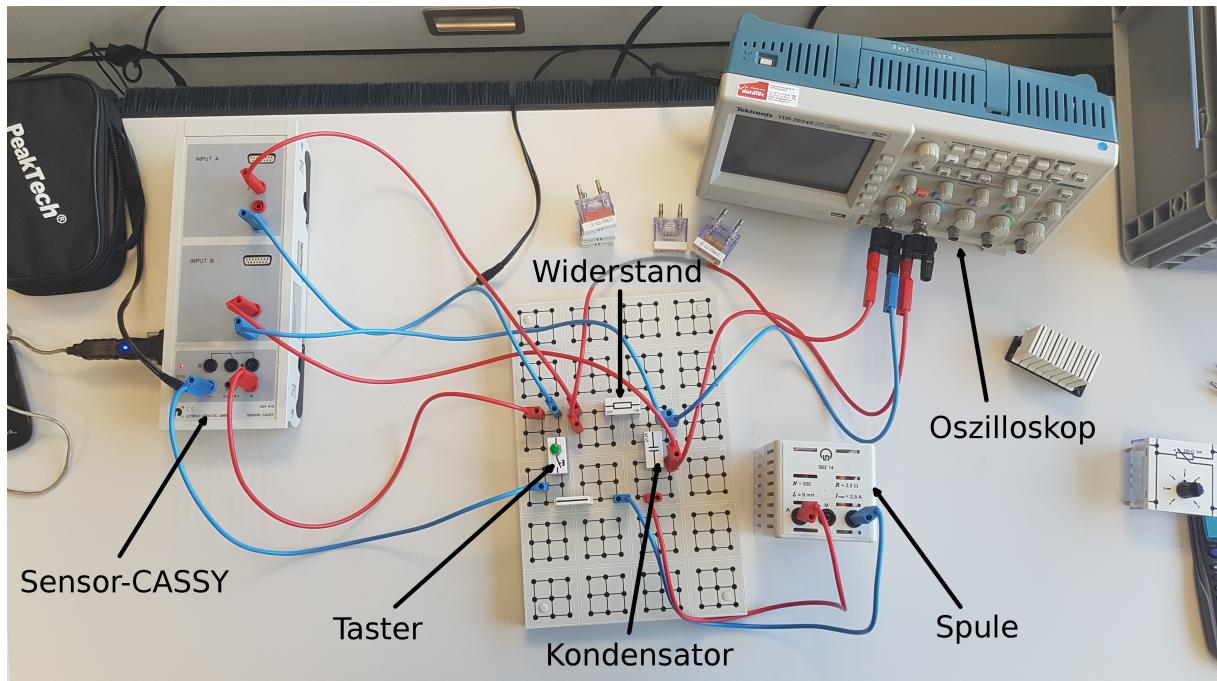


Abbildung 2: Versuchsaufbau LCR-Schwingkreis

Das Schaltbild aus Abbildung 1 wird auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Dies ist in Abbildung 2 zu sehen. Als Spannungsquelle dient die Spannungsquelle des Sensor-CASSY. Die Spannung am Kondensator wird am Eingang B und die Stromstärke am Eingang A gemessen. Zusätzlich wird die Spannung am Kondensator am Channel 1 und die Spannung am Widerstand am Channel 2 des Oszilloskops gemessen. Die Erde liegt dabei zwischen Kondensator und Widerstand.

### 1.3. Versuchsdurchführung

Im folgenden sind die verwendeten Widerstände mit Herstellerangabe und gemessenen Werten angegeben:

Herstellerangabe / $\Omega$	Gemessener Wert / $\Omega$
1	$1.008 \pm 0.001$
5.1	$5.101 \pm 0.001$
10	$9.990 \pm 0.002$
20	$19.82 \pm 0.01$
47	$46.67 \pm 0.01$
100	$99.24 \pm 0.04$
1000	$991.20 \pm 0.08$

Für alle nun folgenden Rechnungen wurden die gemessenen Widerstandswerte verwendet.

### 1.4. Versuchsauswertung

Die Rohdaten für alle verschiedenen Fälle sind in Abbildung 3 zu sehen.

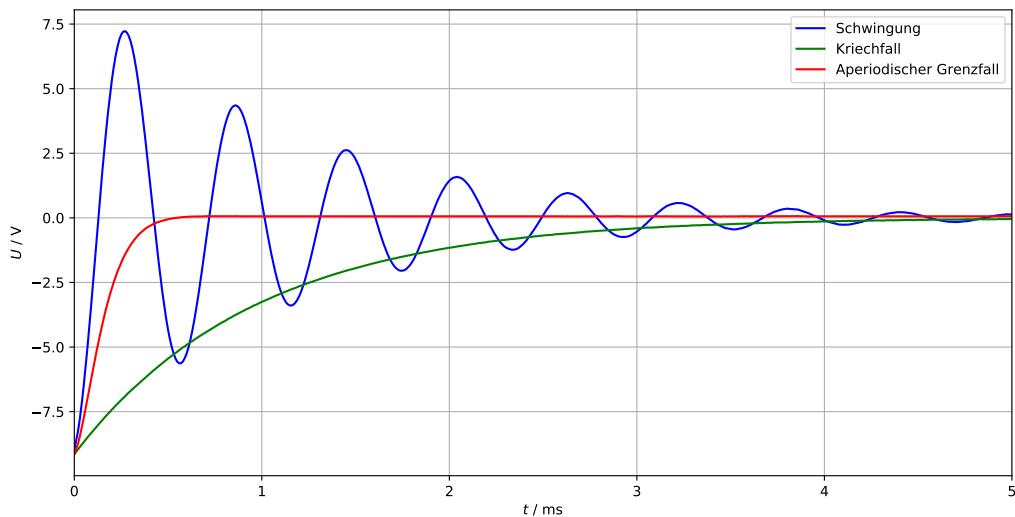


Abbildung 3: Rohdaten mit Schwing-, Kriech- und Aperiodischem Grenzfall

#### 1.4.1. Schwingfall

Zunächst bestimmen wir die Frequenzen und die Dämpfungen der aufgenommenen Schwingungen für die verschiedenen verwendeten Ohmschen Widerstände. Um die Frequenz bzw. die Periodendauer zu bestimmen, existieren zwei Möglichkeiten. Einerseits ist die Analyse mittels FFT möglich. Andererseits können die Extrema aus den Rohdaten abgelesen

und die Periodendauer mittels Regression über die Schwingungsanzahl bestimmt werden. Analog dazu besteht die Möglichkeit, die Dämpfung  $\delta$  aus Gleichung 1 durch logarithmisches Auftragen der Extrema, d.h. mit Regression, zu bestimmen: Für die Zeitpunkte  $t_i$  an denen  $I$  bzw.  $U_C$  ein Extremum annimmt, gilt

$$\sin(\omega t_i) = \pm 1$$

. Durch logarithmieren der Gleichung erhält man

$$\log|I(t_i)| = -\delta t_i + \log \left| C U_0 \left( \omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \right|$$

beziehungsweise eine analoge Form für  $U_C$ . Natürlich kann  $\delta$  durch die Verwendung eines Steigungsdreiecks auch nur bei zwei ablesbaren Maxima oder Minima bestimmt werden:

$$\delta = \frac{\log \left( \frac{U_C(t_0)}{U_C(t_1)} \right)}{t_1 - t_0}$$

Bei beiden Vorgehensweisen muss der Offset korrigiert werden. Eine Regression ist für den  $100\Omega$  Widerstand nicht praktikabel, da - aufgrund der starken Dämpfung - zu wenige Extrema genau ablesbar sind. Ein beispielhaftes Ergebnis für die Regression von abgelesenen Extrema bei der Schwingung des  $10\Omega$  Widerstand ist in Abbildung 4 dargestellt. Die übrigen durchgeföhrten Regressionen sind im Anhang A abgebildet.

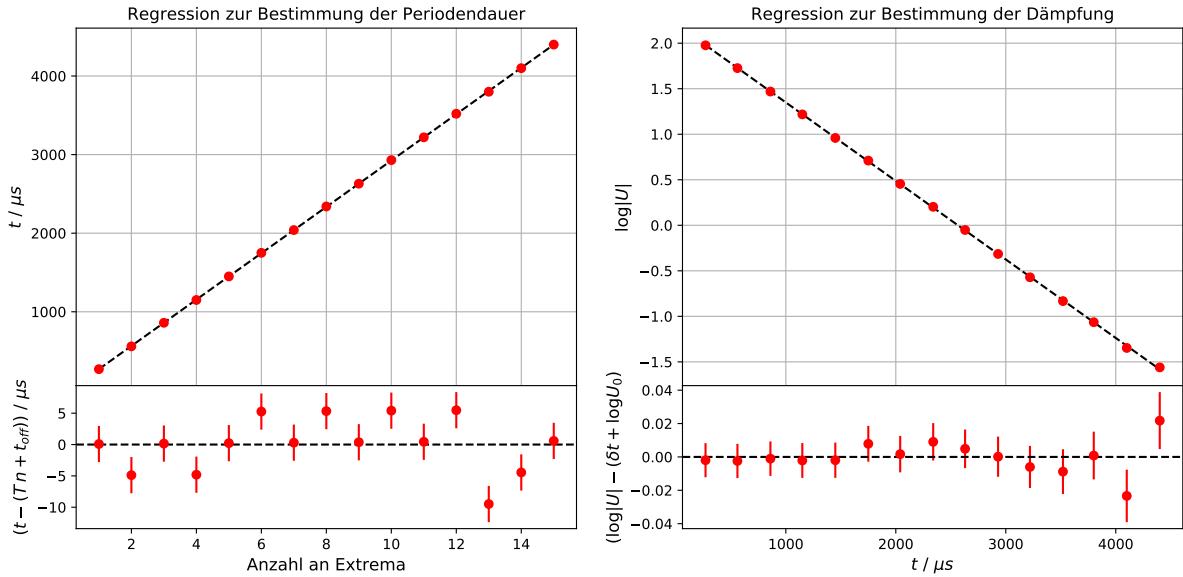


Abbildung 4: Regression für den  $10\Omega$  Widerstand.

Für die Frequenzen ergeben sich die in Tabelle 1 dargestellten Werte. Die FFT-Werte stammen aus der Peakfinder-Methode. Dabei sollte man beachten, dass der FFT-Algorithmus die Frequenz mit einer Breite von  $h \approx 49.975\text{Hz}$  diskretisiert. Dies mindert die Qualität der

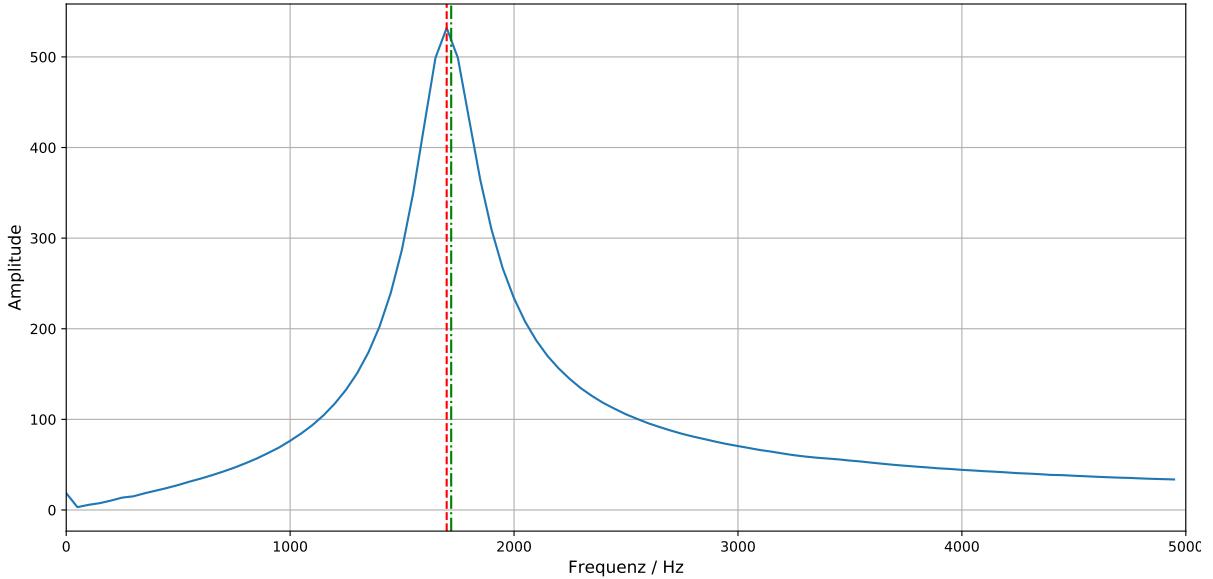


Abbildung 5: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des  $10\Omega$  Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie hingegen den Peak-Schwerpunkt.

Methode. Als Fehler der Einzelmessungen wurde die Differenz aus Argument-Maximum der Amplitude und Peak-Schwerpunkt verwendet. Der Fehler des gewichteten Mittels ist der innere Fehler der Einzelmessungen. Das Frequenzspektrum der ersten Messung des  $10\Omega$  Widerstands ist in Abbildung 5 zu sehen. Für die übrigen Widerstände befindet sich jeweils das Spektrum der 1. Messung im Anhang B.

Ohmscher Widerstand / $\Omega$	Regression / Hz	FFT / Hz			
		Messung 1	Messung 2	Messung 3	Mittel
1	$1696.9 \pm 0.6$	$1715.7 \pm 16.6$	$1715.2 \pm 16.1$	$1715.3 \pm 16.1$	$1715.4 \pm 9.4$
5.1	$1696.3 \pm 0.7$	$1718.9 \pm 19.7$	$1719.0 \pm 19.8$	$1719.0 \pm 19.8$	$1718.9 \pm 11.4$
10	$1695.1 \pm 1.0$	$1719.3 \pm 20.1$	$1719.3 \pm 20.1$	$1719.2 \pm 20.0$	$1719.2 \pm 11.6$
20	$1689.2 \pm 2.1$	$1720.4 \pm 21.3$	$1720.3 \pm 21.2$	$1720.3 \pm 21.2$	$1720.4 \pm 12.2$
47	$1628.6 \pm 4.8$	$1761.1 \pm 62.0$	$1761.3 \pm 62.1$	$1741.5 \pm 42.4$	$1751.0 \pm 30.5$
100	-	$1294.7 \pm 154.6$	$1293.4 \pm 155.8$	$1339.0 \pm 110.3$	$1316.4 \pm 77.8$

Tabelle 1: Mit Regression und FFT ermittelte Frequenzwerte.

Die Messungen des  $100\Omega$  Widerstands werden von nun an nicht weiter ausgewertet, da die kurze Schwingzeit keine zuverlässigen Ergebnisse ermöglicht. Des Weiteren arbeitet die Peakfinder-Methode wegen der groben Diskretisierung der Frequenz durch den FFT-Algorithmus nicht korrekt, sodass die Frequenzen der Regressionsmethode als weitere Berechnungsgrundlage dienen. Ein Indiz dafür, dass die systematisch fehlerhaften Frequenzwerte aus dem Spektrum ist, dass die Frequenzwerte mit steigendem Widerstand fallen müssen, da

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \delta^2$$

mit der korrigierten Frequenz  $\omega_0$  und der Dämpfung  $\delta$  gilt. Folgende Dämpfungswerte wurden berechnet:

Herstellerangabe / $\Omega$	Dämpfung / Hz
1	
5.1	
10	
20	
47	
100	

## 1.5. Fazit

## 2. Gekoppelte LC-Schwingkreise

### 2.1. Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch werden zwei Schwingkreise induktiv miteinander gekoppelt. Speziell werden hier die beiden Fundamentalschwingungen bei gleichsinniger und gegensinniger Anregung und eine Schwebung aufgezeichnet.

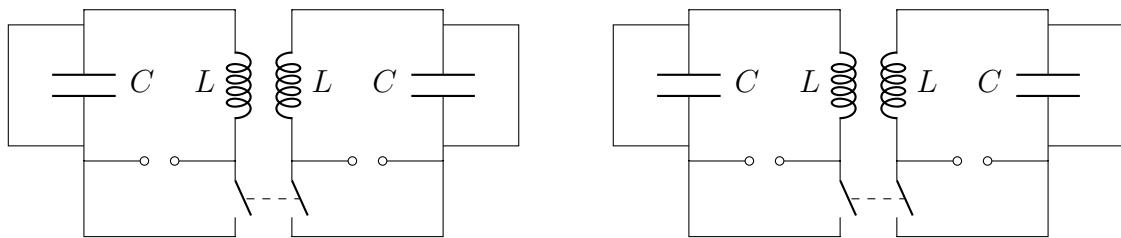


Abbildung 6: Fundamentalschwingungen der gekoppelten Schwingkreise bei gleichsinniger (links) und gegensinniger Anregung (rechts)

Bei überbrückter Spannungsquelle gelten für den gekoppelten Schwingkreis die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{I}_1 + k\ddot{I}_2 + \frac{1}{LC}I_1 &= 0 \\ \ddot{I}_2 + k\ddot{I}_1 + \frac{1}{LC}I_2 &= 0\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $k \in (0, 1)$  die Kopplung der beiden Schwingkreise. Mit den sogenannten *Fundamentalströmen*  $I_+ = I_1 + I_2$  und  $I_- = I_1 - I_2$  erhält man durch Addition bzw. Subtraktion der obigen Gleichungen und anschließendem Umformen

$$\begin{aligned}\ddot{I}_+ + \frac{1}{LC(1+k)}I_+ &= 0 \\ \ddot{I}_- + \frac{1}{LC(1-k)}I_- &= 0\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_+ = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}.$$

Dabei ist  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  die Kreisfrequenz der ungekoppelten Schwingung. Mithilfe der Fundamentalschwingungen lässt sich dann der Kopplungsgrad bestimmen

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}.$$

Bei Messung einer Schwebung mit Schwebungsfrequenz  $f_s$  und Frequenz der gekoppelten Schwingung  $f_k$  kann man die Fundamentalschwingungen gemäß

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \quad \text{und} \quad f_s = \frac{f_- - f_+}{2}$$

bestimmen. Aufgrund der unvermeidbaren Dämpfung der beiden Schwingkreise sind die Extrema des einen Schwingkreises gegen die Nulldurchgänge des anderen verschoben. Für Kopplungen  $k < 0.2$  gilt näherungsweise für die zeitliche Verschiebung

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_s} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{k}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right).$$

## 2.2. Versuchsaufbau

## 2.3. Versuchsdurchführung

## 2.4. Versuchsauswertung

## 2.5. Fazit

## A. LCR-Schwingfall: Regressionen der übrigen Widerstände

## B. LCR-Schwingfall: FFT der übrigen Widerstände

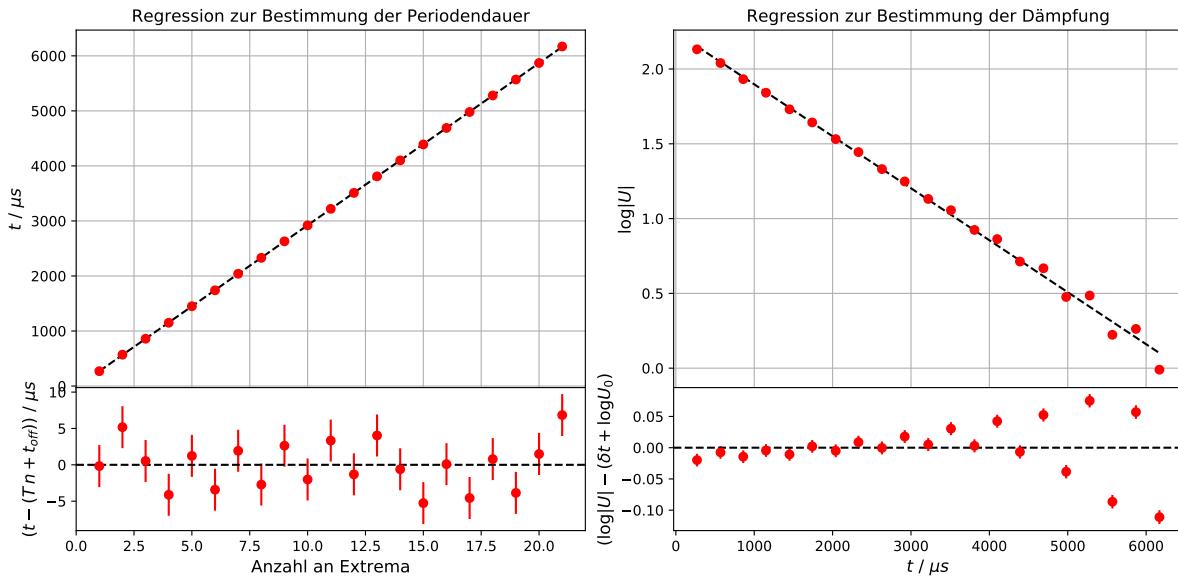


Abbildung 7: Regression für den  $1\Omega$  Widerstand

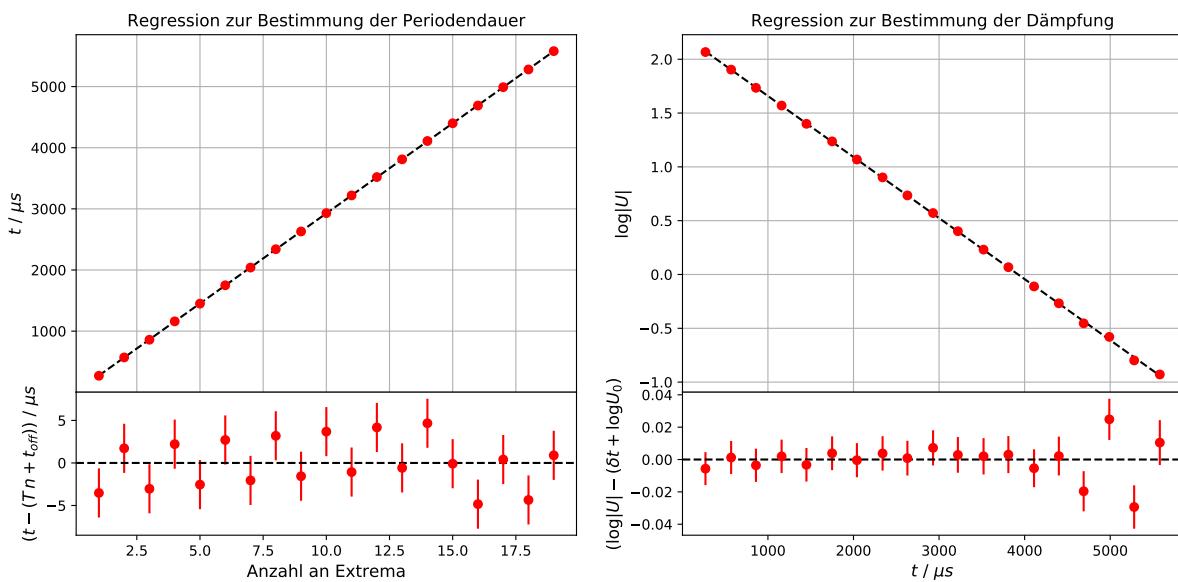


Abbildung 8: Regression für den  $5.1\Omega$  Widerstand

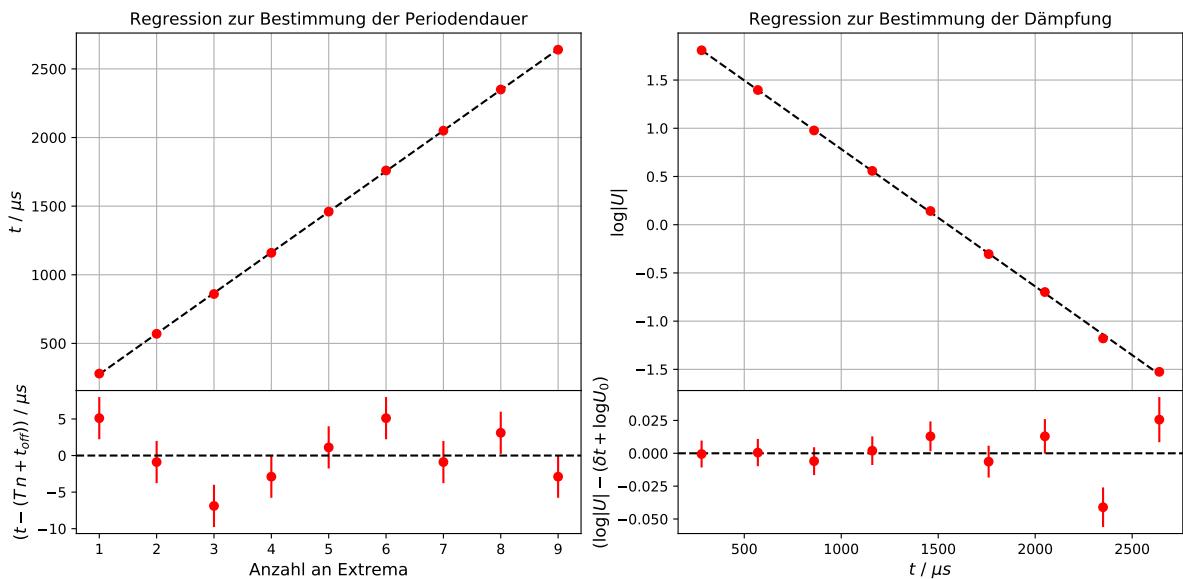


Abbildung 9: Regression für den  $20\Omega$  Widerstand

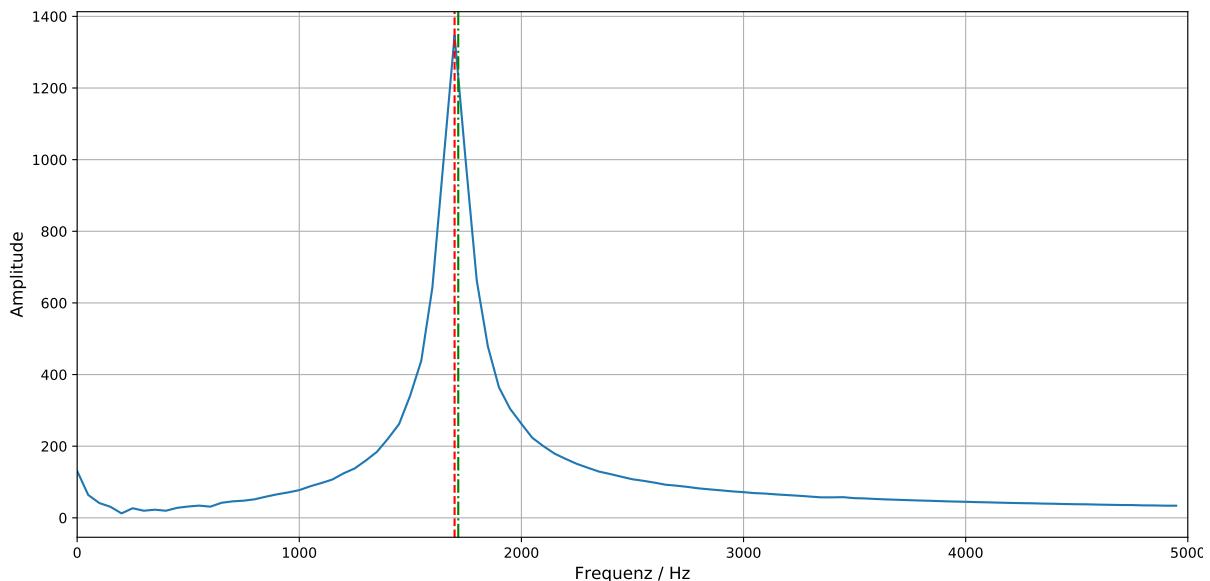


Abbildung 10: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des  $1\Omega$  Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie hingegen den Peak-Schwerpunkt.

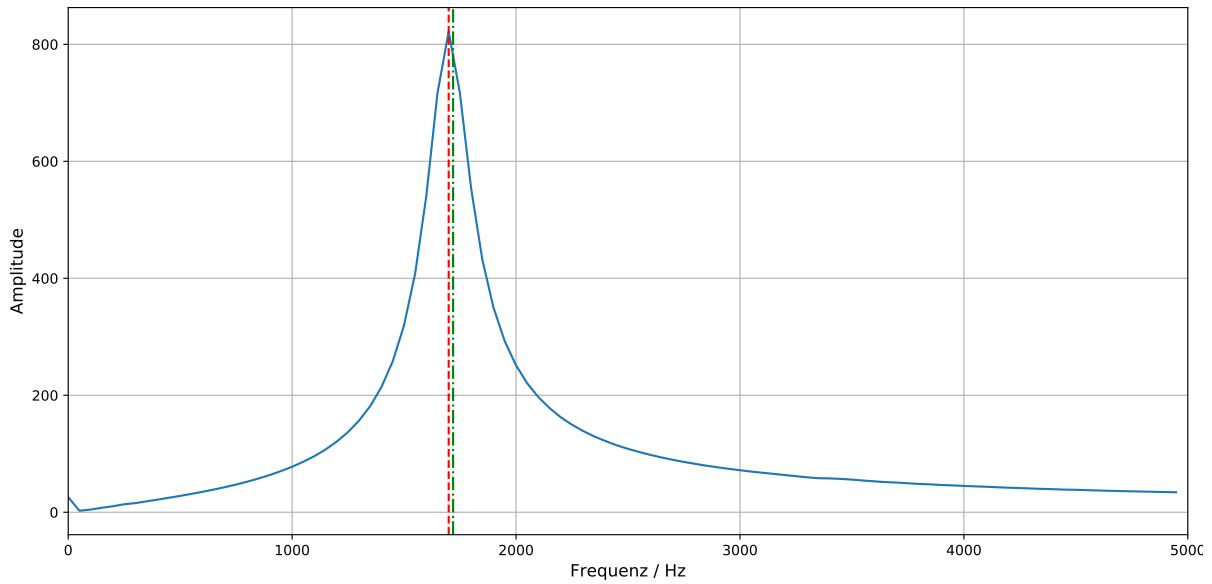


Abbildung 11: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des  $5.1\Omega$  Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

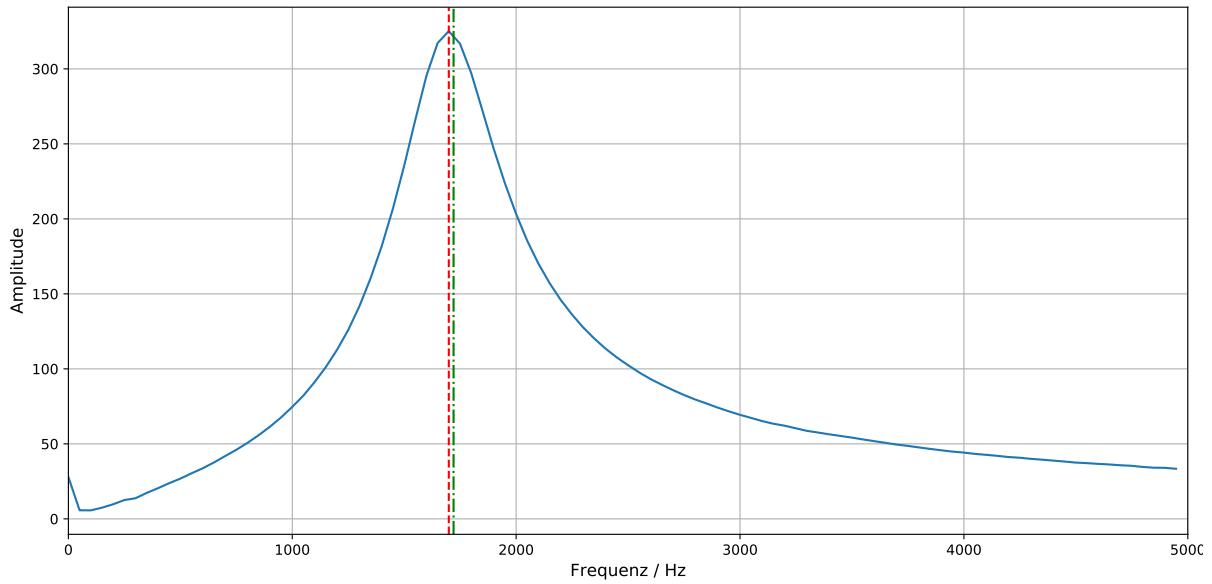


Abbildung 12: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des  $20\Omega$  Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

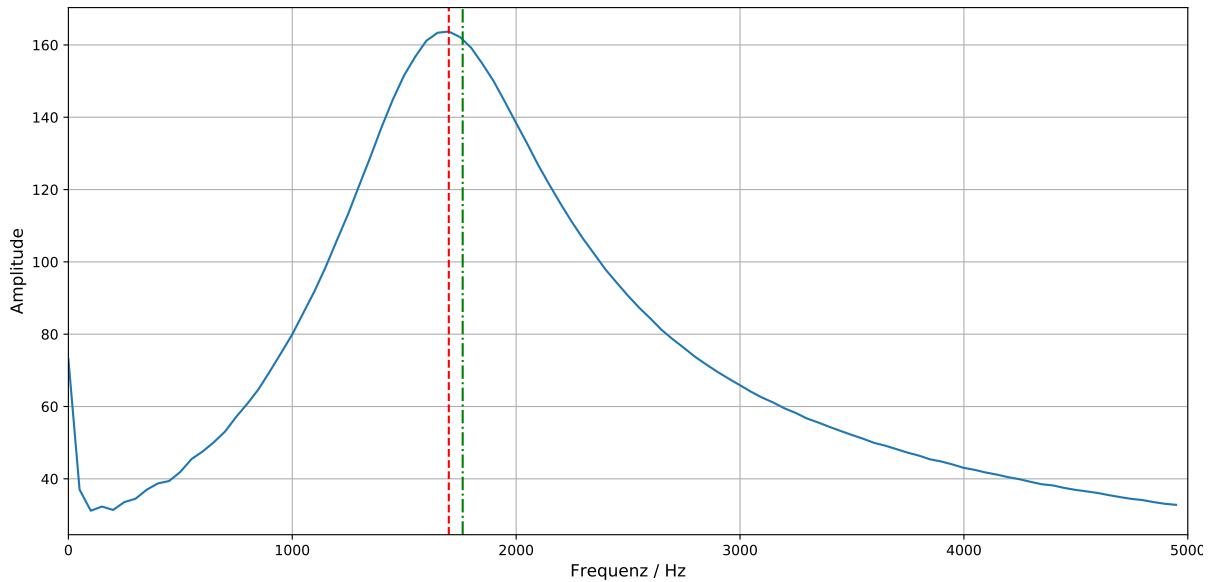


Abbildung 13: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des  $47\Omega$  Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.

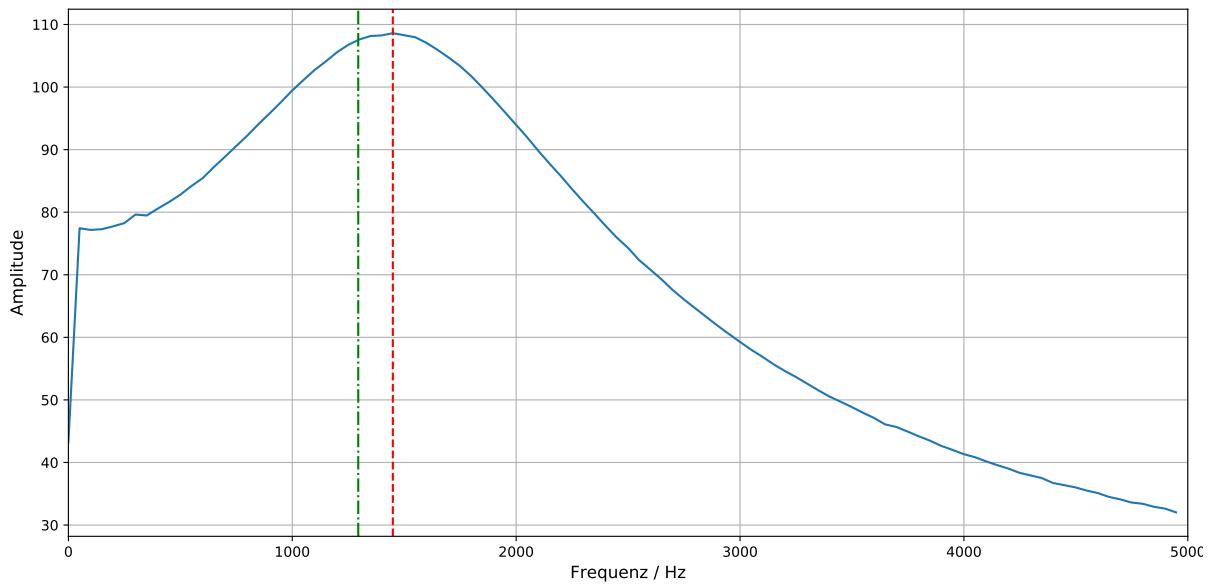


Abbildung 14: Mittels FFT berechnetes Spektrum für die erste Messung des  $100\Omega$  Widerstands. Die rote Linie zeigt das Argument-Maximum an. Die grüne Linie Hingegen den Peak-Schwerpunkt.