

Versuchsprotokoll

MECHANIK

Pendel- und Fallexperiment zu Bestimmung der
Erdbeschleunigung

Simon Schwarz und Marius Ising

Inhaltsverzeichnis

1	Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment	3
1.1	Versuchsbeschreibung	3
1.2	Versuchsaufbau	3
1.3	Versuchsdurchführung	3
1.4	Versuchsauswertung	4
2	Erdbeschleunigung mit dem Pendel	5
2.1	Versuchsbeschreibung	5
2.2	Versuchsaufbau und -durchführung	7
2.3	Auswertung	7
2.4	Fazit	10

1 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment

1.1 Versuchsbeschreibung

Das Ziel des folgenden Versuchs ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g . Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = a = \text{const.}$$

Durch zweifache Integration erhält man das Weg-Zeit-Gesetz dieser Bewegung

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

Dabei ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und s_0 der anfängliche Weg zum Zeitpunkt $t = 0$. Für den betrachteten freien Fall ist dabei die Beschleunigung a gleich der Erdbeschleunigung g . Aufgrund der geringen auftretenden Geschwindigkeiten werden zudem Luftreibungseffekte vernachlässigt. Durch eine Weg-Zeit-Messung lässt sich somit g bestimmen.

1.2 Versuchsaufbau

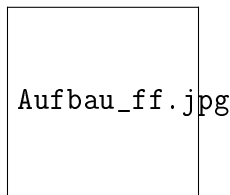


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau dient der Messung der Fallzeit einer Stahlkugel für einstellbare Höhen von 10 bis 90 mm. In eine Grundplatte mit integrierter Auffangplatte wird eine Stativstange mit Skala montiert. Zudem wird eine höhenverstellbare Startkonsole mit Auslösevorrichtung für die Metallkugel an die Stange angebracht. Verlässt die Metallkugel die Haltezunge mit Mikromagnet, so wird ein elektrisches Startsignal ausgelöst. Beim Aufprall auf der Platte entsteht ein Stopp-Signal und die Zeitmessung wird beendet. Die Zeitmessung erfolgt dabei wahlweise mit einem Digital-Zähler oder dem Oszilloskop. Der Zähler und das Oszilloskop werden dabei gleichzeitig angeschlossen.

1.3 Versuchsdurchführung

Die Fallzeiten werden für verschiedene Höhen von 10 bis 90 cm in Schritten von 10 cm durchgeführt. Dabei werden für jede Höhe 10 Zeitmessungen mit dem Digitalzähler und eine Messung mit dem Oszilloskop durchgeführt. Das Oszilloskop wird dabei auf Single Seq eingestellt und auf die steigende Flanke des Startsignals getriggert. Das Triggerlevel liegt dabei bei 620 mV. Um eine Startgeschwindigkeit der Kugel zu vermeiden, wird der

Aufbau_Detail_ff.jpg

Abbildung 2: Anschluss von Digital-Zähler und Oszilloskop

Auslösebügel möglichst feinfühlig betätigt. Es werden stets alle Messungen für eine Höhe durchgeführt, ehe die Höhe verstellt wird. Bei der Höheneinstellung wird versucht mit der oberen Bohrungskante der Startkonsole genau den Strich der Säulenskala zu treffen.

1.4 Versuchsauswertung

Mit dem Digitalzähler ergaben sich folgende Messungen

s / cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90
t / ms	140	200	245	284	318	348	376	403	427
	140	200	246	284	318	348	377	403	427
	140	200	246	284	318	348	376	403	427
	141	200	246	284	318	348	377	403	427
	141	200	246	284	318	348	377	402	407
	141	200	245	284	318	348	376	402	427
	141	200	246	284	318	348	376	402	427
	141	200	245	284	318	348	376	402	427
	141	200	245	284	318	348	376	403	427
	141	200	246	284	318	348	376	402	427
\bar{t} / ms	140.7	200	245.6	284	318	348	376.3	402.5	427

Tabelle 1: Messreihe mit dem Digitalzähler

s / cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90
t / ms	140.8	200	245.2	283.8	318.2	348.4	376.6	402.7	427.2

Tabelle 2: Messreihe mit dem Oszilloskop

Für die Höhenmessung wird die Unsicherheit auf $\sigma_s = 1$ mm geschätzt. Aufgrund der geringen statistischen Effekte in der Messreihe der Zeitmessungen mit dem Digitalzähler werden statistische Unsicherheiten vernachlässigt und die Unsicherheit aufgrund der zeitlichen Auflösung des Zählers unter Annahme einer Gleichverteilung zu $\sigma_t = 1/\sqrt{12}$ ms ≈ 0.29 ms bestimmt.

Abbildung 3: Residuenplots

2 Erdbeschleunigung mit dem Pendel

2.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Experiment wird die Schwingung eines physikalischen Pendels untersucht, um die Erdbeschleunigung g zu bestimmen. Die Schwingungsgleichung für das physikalische Pendel lautet

$$J\ddot{\varphi} = -mgl_s \sin(\varphi).$$

Dabei ist J das Gesamtträgheitsmoment des Pendels und l_s der Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt des Pendels, sowie φ der Auslenkwinkel aus der Ruhelage. Auf der rechten Seite der Gleichung steht das rücktreibende Drehmoment, welches durch die Gravitationskraft hervorgerufen wird. Für kleine Winkel, bei denen $\sin(\varphi) \approx \varphi$ näherungsweise gilt, ergibt sich die lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgl_s}{J}\varphi.$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t).$$

Die Kreisfrequenz ω dieser Schwingung ist gegeben durch

$$\omega^2 = \frac{mgl_s}{J}.$$

Da das Trägheitsmoment J des Pendels schwierig zu bestimmen ist, umgehen wir dieses Problem. Das betrachtete Pendel besteht aus einem Winkelaufnehmer-Profil, der Pendelstange und einem zylindrischen Pendelkörper.

Wir bestimmen zunächst die Schwingungsfrequenz ω_{st} der Stange. Anschließend wird der Pendelkörper so an der Stange angebracht, dass das Pendel mit Pendelkörper und Stange die gleiche Schwingungsfrequenz hat wie die Stange allein. Sind D_{st} und D_p die maximalen Rückstellmomente von Stange und Pendelkörper und J_{st} und J_p die entsprechenden Trägheitsmomente, so gilt für die Schwingungsfrequenz der Stange allein

$$\omega_{st}^2 = \frac{D_{st}}{J_{st}}.$$

Für den Pendelkörper allein gilt analog

$$\omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p}.$$

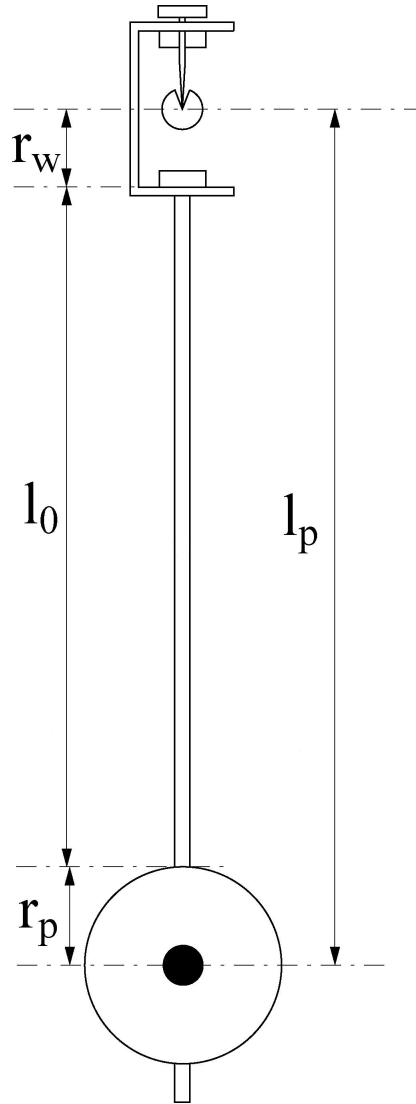


Abbildung 4: Schematische Zeichnung des Pendels

Da die Rückstellmomente und die Trägheitsmomente additiv sind, ergibt sich die Frequenz des physikalischen Pendels mit Stange und Pendelkörper zu

$$\omega^2 = \frac{D_{st} + D_p}{J_{st} + J_p} = \omega_{st}^2 \frac{1 + \frac{D_p}{D_{st}}}{1 + \frac{J_p}{J_{st}}}.$$

Ist der Pendelkörper nun so eingestellt, dass $\omega = \omega_{st}$, so muss $\frac{D_p}{D_{st}} = \frac{J_p}{J_{st}}$ gelten. Daraus erhält man schließlich

$$\omega_p = \omega_{st} = \omega.$$

Das Pendel lässt sich so betrachten als bestünde es nur aus dem Pendelkörper. Mit dem Trägheitsmoment des geometrisch einfachen Pendelkörpers und dem Satz von Steiner

ergibt sich

$$J_p = \frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2.$$

Damit lässt sich nun die Kreisfrequenz des Pendels ausdrücken

$$\omega^2 = \omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p} = \frac{m_p g l_p}{\frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2}.$$

Durch Umformen folgt schließlich die Formel für die Erdbeschleunigung

$$g = \omega^2 l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right).$$

Durch Messung des Radius r_p und der Länge l_p , sowie der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, lässt sich somit die Erdbeschleunigung bestimmen.

2.2 Versuchsaufbau und -durchführung

2.3 Auswertung

Nach der Kalibrierung der Winkelgeschwindigkeit wurden folgende Längen für das Pendel mit Pendelkörper gemessen:

r_w	l_0	r_p
$2.535\text{cm} \pm 0.005\text{cm}$	$61.5\text{cm} \pm 0.069\text{cm}$	$3.998\text{cm} \pm 0.003\text{cm}$

Tabelle 3: Ergebnisse der Längenmessungen

Das ergibt eine Pendellänge $l_p = r_w + l_0 + r_p = 68.033\text{cm}$ mit einem Fehler von $\sigma_{l_p} = 0.07\text{cm}$. Aus den mit dem Sensor-Cassy aufgenommenen Rohdaten ergeben sich folgende Zeitpunkte an denen das Pendel mit bzw. ohne Pendelkörper die n -te maximale Auslenkung annimmt:

Schwingung	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Zeitpunkt (Pendelkörper) [s]	0.48	15.38	31.94	48.48	65.04	81.56	98.11	114.68	131.28	147.84
Zeitpunkt (nur Stange) [s]	1.5	16.44	33.01	49.59	66.14	82.73	99.32	115.86	132.46	149.05

Schwingung	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Zeitpunkt (Pendelkörper) [s]	164.36	180.9	197.46	214.02	230.56	247.12	263.68	280.22	296.8	313.34
Zeitpunkt (nur Stange) [s]	165.64	182.18	198.8	215.34	231.92	248.47	265.08	281.62	298.23	314.83

Diese Datenpunkte wurden mit einer Genauigkeit von $\sigma_t = 0.02\text{s}$ bestimmt. Eine lineare Regression der Zeitpunkte mit Residuenplot ist in Abbildung 5 zu sehen und liefert eine Periodendauer von $T_p = 1.65536\text{s} \pm 7 \cdot 10^{-5}\text{s}$ ($\chi^2 = 0.73$) bzw. $T_{st} = 1.65764\text{s} \pm 7 \cdot 10^{-5}\text{s}$ ($\chi^2 = 0.80$). Die χ^2 -Werte sind dabei zufriedenstellend. Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ führt das zu den

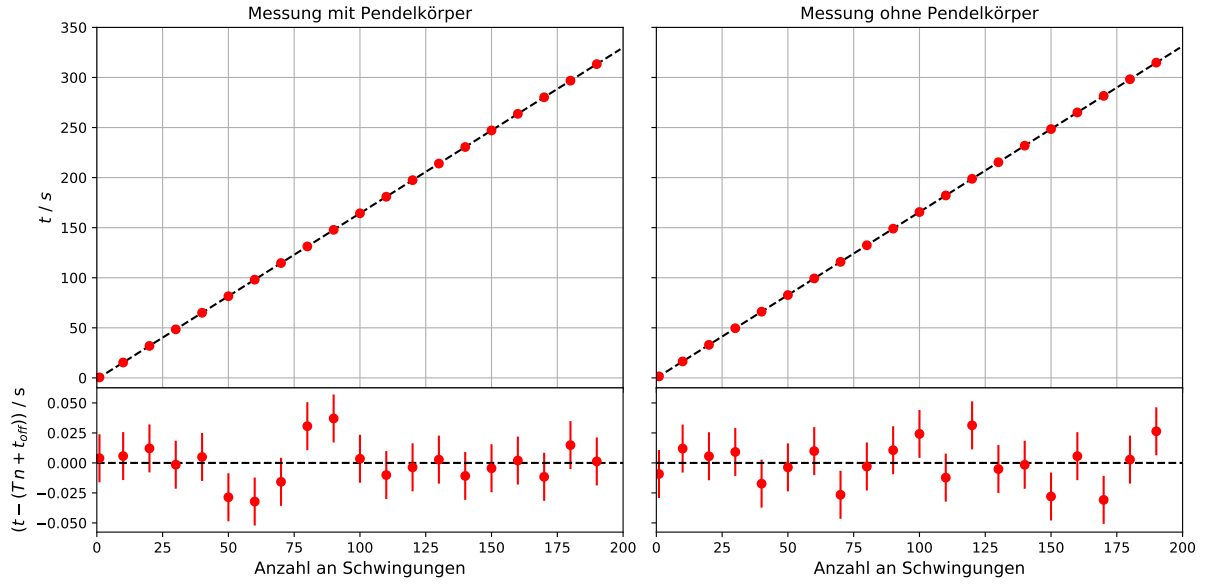


Abbildung 5: Regression und Residuenplot für Datenpunkte aus dem Versuch mit und ohne Pendelkörper

Kreisfrequenzen $\omega_p = 3.79566 \text{ Hz} \pm 0.00018 \text{ Hz}$ und $\omega_{st} = 3.79043 \text{ Hz} \pm 0.00018 \text{ Hz}$. Dabei ist der Fehler in ω nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung durch

$$\sigma_\omega = \left| \frac{\partial \omega(T)}{\partial T} \right| \sigma_T = \frac{2\pi}{T^2} \sigma_T$$

gegeben.

Eine Analyse der Schwingung mit Hilfe einer FFT liefert die Ergebnisse $\omega_p = 2\pi f_p = 3.79567 \text{ Hz}$ und $\omega_{st} = 2\pi f_s = 3.79093 \text{ Hz}$ und passt somit zu den Werten, die die Regressionsanalyse liefert. Der Plot davon ist in Abbildung 6 dargestellt. Aufgrund der mangelnden Fehleranalyse wird ausschließlich mit den Werten aus der Regressionsanalyse weitergearbeitet.

Aus den bisher bestimmten Größen ergibt sich eine Erdbeschleunigung von

$$g = \omega_p^2 l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right) = 9.8184 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Um die Fehlerbetrachtung durchzuführen, wird g als Funktion in ω_p , l_p und r_p betrachtet. Wie in der Praktikumsanleitung für den Versuch diskutiert, kann der Fehler in r_p vernachlässigt werden. Die relative Abweichung von Schwingung mit und ohne Pendelkörper beträgt

$$\frac{|\omega_p - \omega_{st}|}{\omega_p} = 0.0014$$

und wird daher ebenfalls vernachlässigt. Für die relevanten partiellen Ableitungen von g gilt

$$\frac{\partial g}{\partial \omega_p} = 2\omega_p l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right) \text{ und}$$

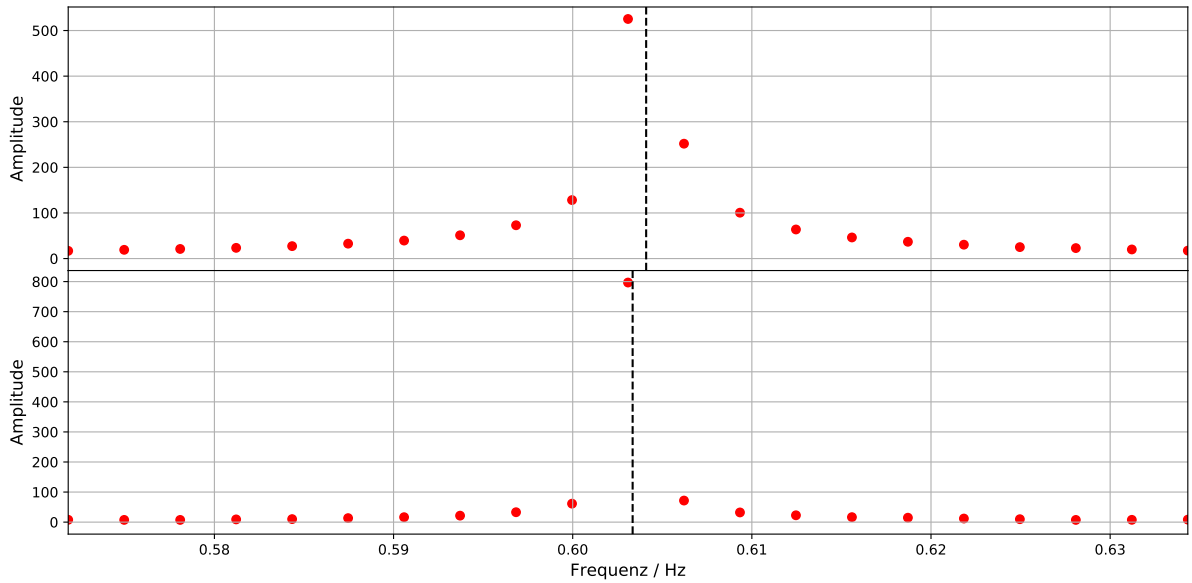


Abbildung 6: FFT der Rohdaten und Peakanalyse - oben mit Pendelkörper und unten ohne Pendelkörper

$$\frac{\partial g}{\partial l_p} = \omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right).$$

Das ergibt einen Fehler von

$$\sigma_g = 0.010 \frac{m}{s^2}.$$

2.4 Fazit

Die Physikalisch-Technische Bundesanstalt gibt in einer ihrer Publikationen¹ die Erdbeschleunigung für die Stadt Brüssel mit $g = 9.811 \frac{m}{s^2}$ an. Da Aachen und Brüssel näherungsweise den gleichen Breitengrad haben (Brüssel: 50.84, Aachen: 50.78), wird dieser Wert als Literaturwert verwendet.

Der Literaturwert liegt im 1σ -Intervall des im Experiment bestimmten Wert $9.818 \frac{m}{s^2} \pm 0.010 \frac{m}{s^2}$ und somit innerhalb der Fehlertoleranz. Der schwerwiegendste Fehler im Experiment wurde durch die Messung der Länge l_0 gemacht.

¹https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_1/1.1_masse/1.15/gravzonen.pdf