Versuchsprotokoll

Wärmelehre

Bestimmung des Adiabatenkoeffizients
mit der Rüchardt-Methode

Simon Schwarz und Marius Ising

Inhaltsverzeichnis

1. Rüchardt-Methode

Wir wollen den Adiabatenkoeffizient $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ von Luft mit der Rüchardt-Methode bestimmen. Dabei ist c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck und c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen. Die Rüchardt-Methode beruht auf der Messung von Schwingungen einer Stahlkugel.

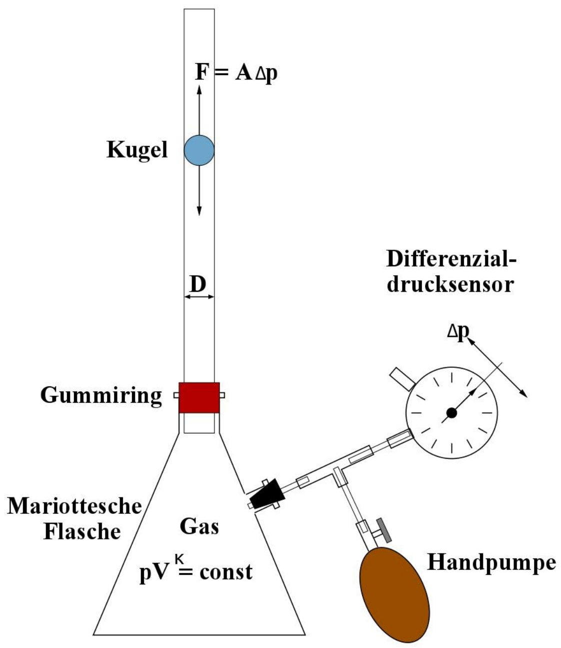

Abbildung 1: Prinzip der Messung von κ nach Rüchardt

Die Kugel befindet sich im Gleichgewicht, wenn der Druck p in der Flasche gleich der Summe aus dem Außendruck p_0 und dem Druck der Gewichtskraft der Kugel ist. Dann gilt

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}$$

mit der Querschnittsfläche $A = \pi\frac{D^2}{4}$ des Glasrohrs. Lenkt man die Kugel um eine Strecke x aus der Gleichgewichtslage aus, so ändert sich der Druck um dp und es wirkt eine Kraft Adp auf die Kugel. Mit der Reibungskraft $F_R = \alpha\frac{dx}{dt}$ ergibt sich dann

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Adp - \alpha\frac{dx}{dt}.$$

Der Prozess wird als quasi adiabatisch betrachtet, da er für einen Wärmeaustausch zu schnell abläuft. Damit gilt die Differenzialgleichung der Adiabate

$$\frac{dp}{p} = -\kappa\frac{dV}{V}.$$

Mit der Volumenänderung $dV = Ax$ erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{p\kappa A^2}{mV}x = 0.$$

Dies ist die Differenzialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung. Aus der Schwingungsfrequenz $\omega_0^2 = \frac{p\kappa A^2}{mV}$ der ungedämpften Schwingung ergibt sich dann

$$\kappa = \omega_0^2 \frac{mV}{pA^2}.$$

Mit dem Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ und der Schwingungsfrequenz ω der gedämpften Schwingung erhält man

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2.$$

2. Versuchsaufbau

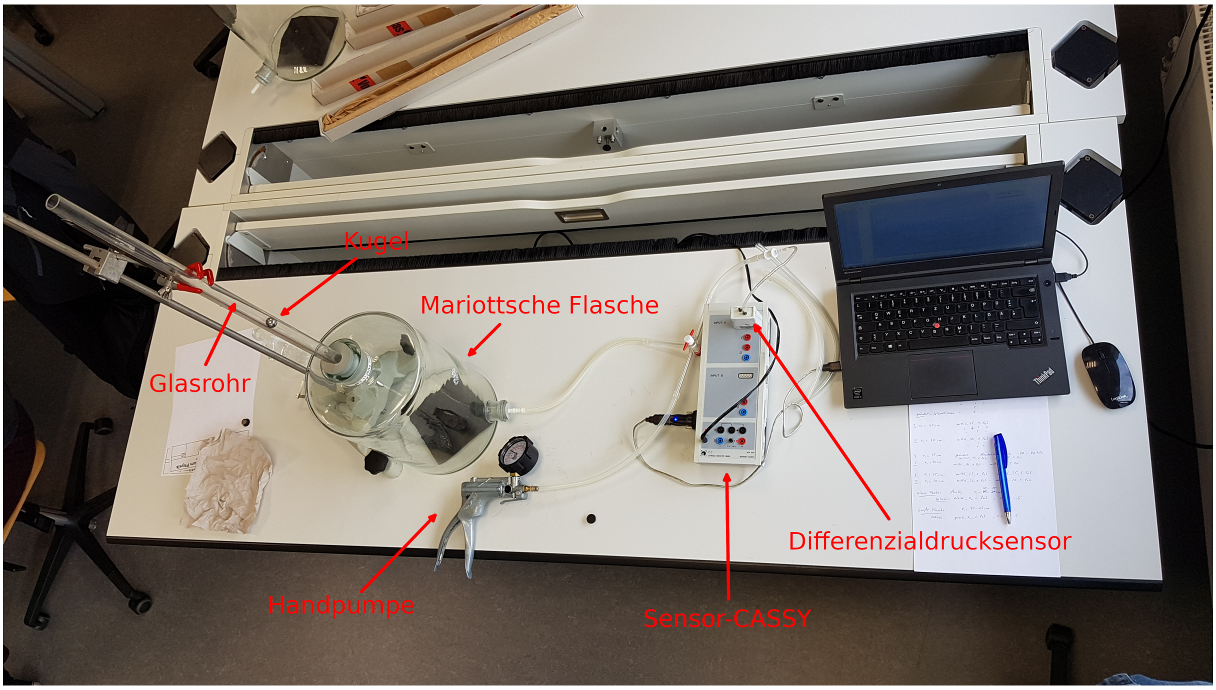

Abbildung 2: Versuchsaufbau

In die Mariottsche Flasche wird vertikal ein Glasrohr eingeführt, welches durch einen Gummiring luftdicht abgeschlossen ist. Die vertikale Position das Rohrs wird mit einer Greifhalterung, die an einem Stativ befestigt ist, fixiert. Zusätzlich wird an die Halterung ein Metallmaßstab angebracht. In den Auslass der Mariottschen Flasche wird über ein Schlauch und eine T-Ventil eine Handpumpe und ein Differenzialdrucksensor angeschlossen. Der Sensor wird dabei an den Eingang A des Sensor-CASSY angeschlossen. Es stehen insgesamt drei Flaschen mit unterschiedlichen Größen zur Verfügung.

3. Versuchsdurchführung

Die Masse m der Kugel wird mittels einer Digitalwaage und der Durchmesser D mit einer Mikrometerschraube gemesssen. Der Außendruck p_0 wird von einer Wetterstation am Campus Hörn abgerufen. Der Versuchsaufbau wird nacheinander mit den drei Mariottschen Flaschen aufgebaut. Für jede Flasche wird die Schwingung bei 6-7 verschiedenen Starthöhen x_0 aufgezeichnet. Die Starthöhen werden zwischen 50 cm und 15 cm gewählt und in Schritten von 5 cm geändert. Dabei werden für jede Höhe 5 Messungen des Differenzialdrucksensors aufgezeichnet. Für den Relativdruck wird zwischen dem Messbereich von $\pm 21\,\mathrm{hPa}$ und $\pm 70\,\mathrm{hPa}$ variiert. Für die Messung mit dem Sensor-CASSY werden folgende weitere Messparameter gewählt:

- Intervall: $500\,\mu\mathrm{s}$
- Messungen: 16000
- Messzeit: 8 s

Für die Höhe $x_0 = 50\,\mathrm{cm}$ bei der mittleren Flasche ist das Messintervall abweichend auf $200\,\mu\mathrm{s}$ festgesetzt. Zusätzlich wurde bei dieser Höhe noch eine Messung mit den anderen Parametern durchgeführt. Das Volumen der kleinen und der mittleren Flasche wird mittels Wiegung der leeren und der mit Wasser gefüllten Flasche nach dem eigentlichen Versuch bestimmt. Für das Volumen der großen Flasche wird der auf einem Aufkleber angegebene Wert benutzt.

4. Versuchsauswertung

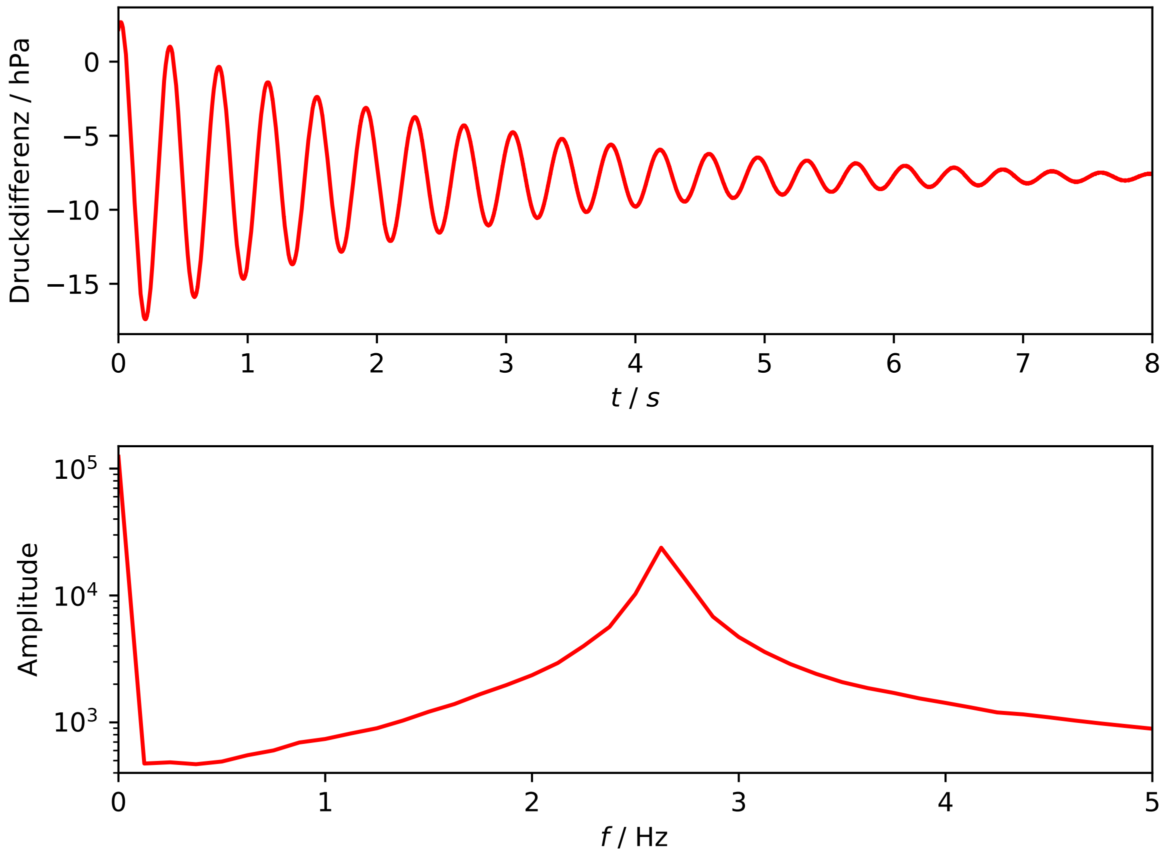

Abbildung 3: Visualisierung der Rohdaten

Eine typische Messung des Differenzialdrucksensors, sowie des daraus mittels FFT berechneten Frequenzspektrums, ist in Abbildung 3 zu sehen. Folgende Werte wurden während des Versuches gemessen: $m_{\text{Kugel}} = (16.5 \pm 0.02)$g, $d_{\text{Kugel}} = (16.00 \pm 0.002)$mm, $p_0 = 99400$Pa, $V_{\text{klein}} = 0.00031\text{m}^3$, $V_{\text{mittel}} = 0.00112\text{m}^3$ und $V_{\text{groß}} = 0.01132\text{m}^3$. Die Volumenangaben bezeichnen dabei jeweils die Flaschenvolumen der Mariottschen Flaschen und haben einen vernachlässigbar kleinen Fehler. Das Volumen V in der Formel für κ setzt sich jedoch zusammen aus dem Flaschenvolumen V_F, dem Volumen im Glasrohr $x_0 A$ und dem Restvolumen V_r. Man erhält den linearen Zusammenhang

$$(V_F + x_0 A)\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) = \frac{p\kappa A^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2} - V_r.$$

Die Fläche $A = \frac{\pi d_{\text{Kugel}}^2}{4} = (2.0106 \pm 0.0007)\,\text{m}^2$ kann mit dem Duchmesser der Kugel berechnet werden. Damit lässt sich eine lineare Regression durchführen, um das nicht gemessene V_r zu bestimmen. Die Regression für die kleine Flasche ist in Abbildung 4 abgebildet. Die ω_0 werden für jede Höhe auf Grundlage aller fünf Messreihen ermittelt. Dabei wird die Dämpfung numerisch bestimmt und der aus dem Spektrum abgelesene Peak mit dem jeweiligen Wert korrigiert. Der genaue Algorithmus ist in `frequenzen.py` einsehbar.

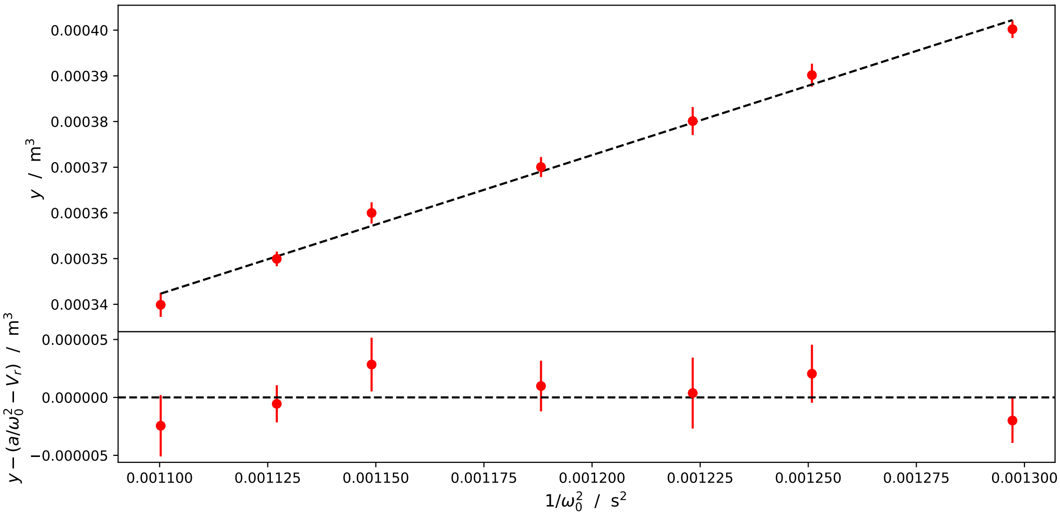

Abbildung 4: Regression für die kleine Mariottesche Flasche mit $\chi^2/\mathrm{ndf} = 0.63$

Es ergibt sich $V_r = (-7.91 \pm 14,48) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$. Der Wert ist offensichtlich nicht akzeptabel. Dennoch führen auch die Regressionen der mittleren und großen Flasche zu keinem besseren Ergebnis, wie in Anhang A zu sehen ist. Deshalb wird von nun an der Fehler durch die Vernachlässigung des unbestimmbaren Volumens V_r mit einem Fehler $\sigma_V = 1.448 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$ auf $V = V_F + x_0 A$ modelliert. Aus den Formeln

$$\kappa = \omega_0^2 \frac{mV}{pA^2}$$

und

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}$$

ergeben sich die folgenden Adiabatenkoeffizienten:

Höhe [cm]	Kleine Flasche	Mittlere Flasche	Große Flasche
15	1.258 ± 0.055	-	-
20	1.265 ± 0.053	1.336 ± 0.019	1.504 ± 0.021
25	1.276 ± 0.053	1.338 ± 0.017	1.492 ± 0.008
30	1.269 ± 0.051	1.353 ± 0.019	1.483 ± 0.005
35	1.266 ± 0.050	1.340 ± 0.023	1.492 ± 0.004
40	1.270 ± 0.049	1.343 ± 0.023	1.502 ± 0.004
45	1.257 ± 0.046	1.344 ± 0.027	1.507 ± 0.018
50	-	1.318 ± 0.016	-
Mittel	1.266 ± 0.019	1.337 ± 0.007	1.494 ± 0.003

Die Fehler wurden mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet. Für die Mittelwerte in der Tabelle wurde das gewichtete Mittel und das Maximums des äußeren und inneren Fehlers verwendet. Das gewichtete Mittel über alle Flaschengrößen beträgt 1.465 mit einem äußeren Fehler von 0.045.

5. Fazit

Der Wert $\kappa = 1.465 \pm 0.045$ hat nur eine Abweichung von weniger als 1.5σ zum Literaturwert $\kappa_{\mathrm{Lit}} = \frac{7}{5} = 1.4$. Dennoch zeigen die Regressionen und Einzelergebnisse mit Abweichungen von 7σ (kleine Flasche), 9σ (mittlere Flasche) und 31σ (große Flasche), dass die Resulatate unter keinen Umständen zufriedenstellend sind und der gute gewichtete Mittelwert trügt. Der genaue Ursprung der Fehler ist für uns nicht identifizierbar. Es scheint als sei das Auslesen der Frequenzen und die Bestimmung des Dämpfungsfaktors das Problem, da dies die sehr fehlerhaften Ergebnisse der Regression erklären würde. Doch auch wiederholte Prüfungen des Algorithmus und der Rohdaten unterstützen die durch den Algorithmus ermittelten Frequenzen und Dämpfungen.

A. Regression der mittleren und großen Flasche

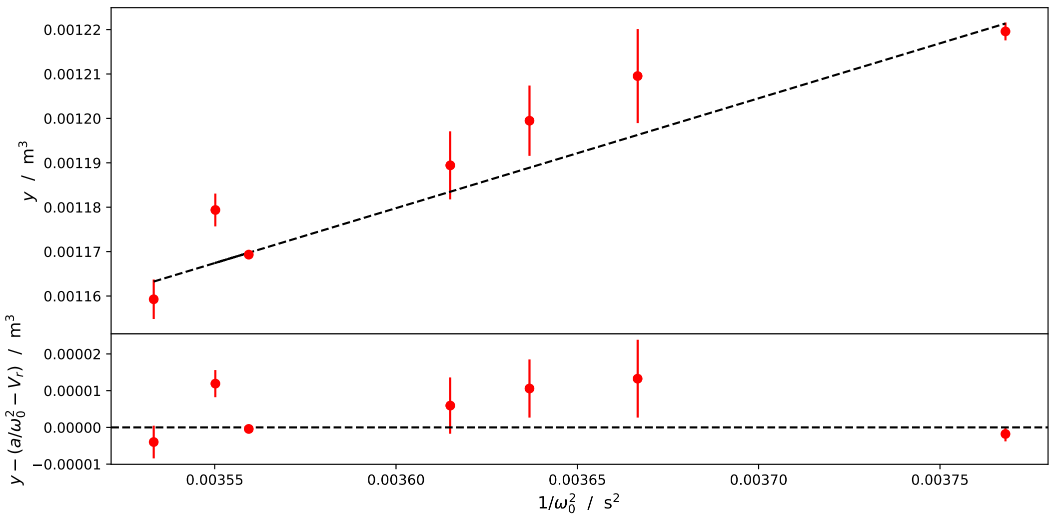

Abbildung 5: Regression für die mittlere Mariottesche Flasche mit $V_r = (5.203 \pm 0.372) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$ und $\chi^2/\mathrm{ndf} = 2.31$

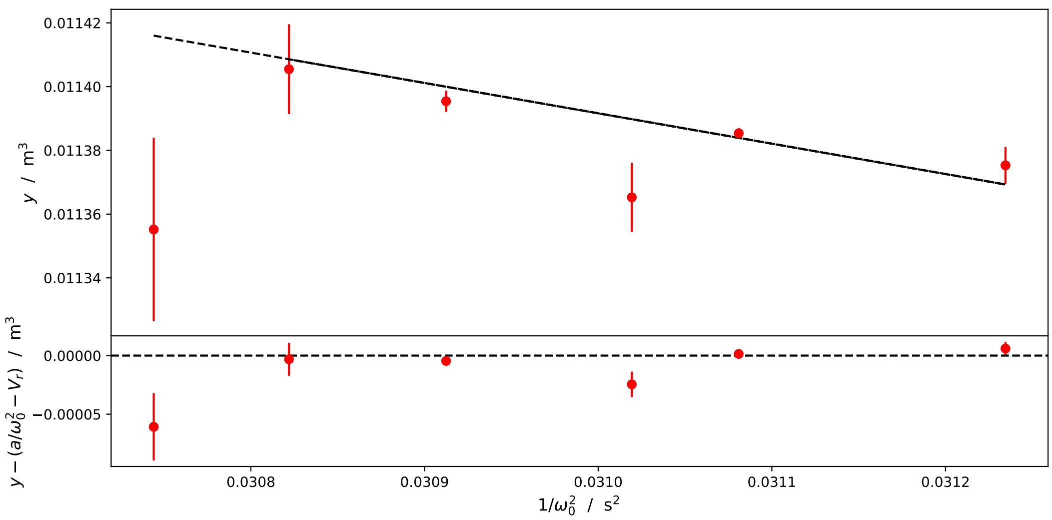

Abbildung 6: Regression für die große Mariottesche Flasche mit $V_r = (-3.339 \pm 0.686) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ und $\chi^2/\mathrm{ndf} = 2.22$