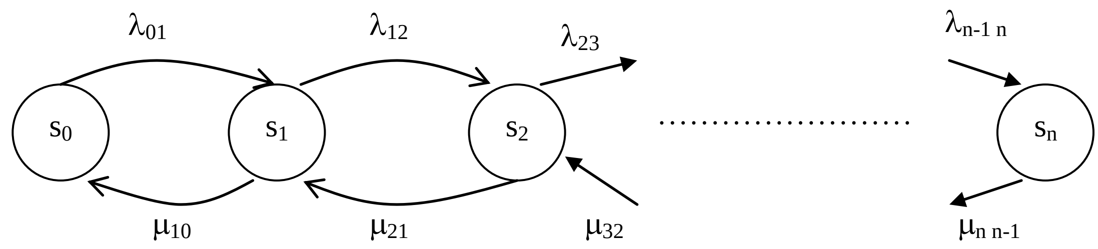
Схема «гибели и размножения»



Для финальных вероятностей состояний дифференциальные уравнения Колмогорова преобразуются в систему алгебраических уравнений:

$p_0\, \lambda_{01} = p_1\, \mu_{10} \;\Rightarrow p_1 = (\lambda_{01} / \mu_{10})\, p_0\,,$

$p_0\, \lambda_{01} + p_2\, \mu_{21} = p_1\, \mu_{10} + p_1\, \lambda_{12} \Rightarrow p_0\, \lambda_{01} + p_2\, \mu_{21} = p_0\, \lambda_{01} + p_1\, \lambda_{12} \;\Rightarrow p_2 = (\lambda_{12} / \mu_{21})\, p_1$

$$\Rightarrow\; p_2 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\mu_{10}\mu_{21}}\, p_0\,,$$

по аналогии

…………………

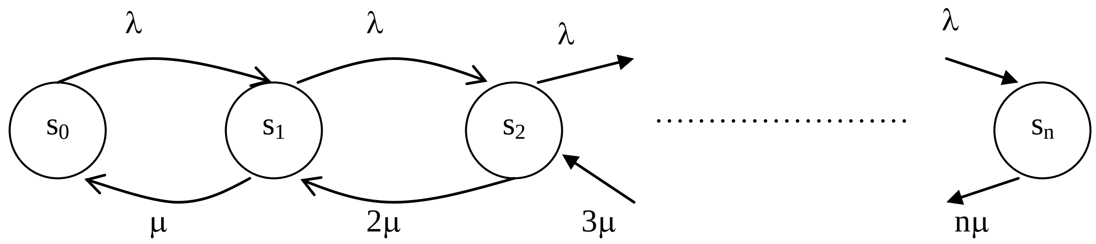
$$p_n = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}...\lambda_{n-1n}}{\mu_{10}\mu_{21}...\mu_{nn-1}}\, p_0\,.$$

Кроме того,

$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1$, если подставить и выразить p_0, то получим

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\mu_{10}\mu_{21}} + ... + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}...\lambda_{n-1n}}{\mu_{10}\mu_{21}...\mu_{nn-1}}\right)^{-1}.$$

Многоканальная СМО с отказами (задача Эрланга)



λ - интенсивность входного потока заявок, μ - интенсивность обслуживания каждого канала (все потоки пуассоновские).

Интерпретации состояний:

s_0 – все каналы свободны,

s_1 – 1 один канал занят, ….

s_n – все каналы заняты.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu \times 2\mu} + ... + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1}$$, обозначим $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - приведенная интенсивность,

тогда получаем следующие формулы Эрланга:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{1}{2!}\rho^2 + ... + \frac{1}{n!}\rho^n\right)^{-1},$$

$$p_1 = \rho p_0\,,$$

………..

$$p_n = \frac{1}{n!}\rho^n p_0.$$

Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк} = p_n$.

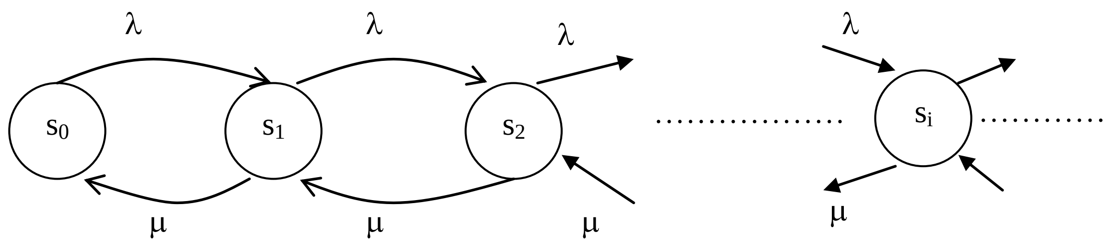
Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена: $U=1 - P_{отк} = 1 - \frac{1}{n!}\rho^n p_0$.

Абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени: $A = \lambda\, U = \lambda(1 - \frac{1}{n!}\rho^n p_0)$.

Среднее число занятых каналов будет – среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, разделить на интенсивность обслуживания одним каналом:

$$\bar{k} = A/\mu = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right).$$

Одноканальная СМО с неограниченной очередью



Состояния:

s_0 – канал свободен очередь пуста;

s_1 – канал занят очередь пуста;

s_2 – канал занят, в очереди одно требование;

s_3 – канал занят, в очереди два требования;

……………

Финальные вероятности существуют, если $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, в противном случае, очередь неограниченно растет.

$p_0 = (1+\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots)^{-1}$

$\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots$ - сходящийся бесконечный ряд, сумма которого равна $\frac{\rho}{1-\rho}$, тогда $p_0 = 1 - \rho$, $p_1 = p_0\rho$, $p_2 = p_0\rho^2, \ldots,$

Среднее число заявок в системе:

$$\overline{Q}_{сист} = 0\times p_0 + 1\times p_1 + 2\times p_2 + \ldots. = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k,$$

$$\overline{Q}_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho),$$

$$\overline{Q}_{сист} = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1},$$

$\overline{Q}_{сист} = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k$, меняем знак суммы и дифференцирования

$\overline{Q}_{сист} = \rho(1-\rho)\dfrac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$, сумма бесконечно убывающего ряда равна $\dfrac{\rho}{1-\rho}$,

$\overline{Q}_{сист} = \rho(1-\rho)\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{\rho}{1-\rho}\right)$,

$\overline{Q}_{сист} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$.

По формуле Литтла среднее время нахождения требования в системе:

$\overline{T}_{сист} = \dfrac{\overline{Q}_{сист}}{\lambda} = \dfrac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Среднее число заявок в очереди – это среднее число заявок в системе минус среднее число заявок под обслуживанием. Среднее число заявок под обслуживанием: $0\times p_0 + 1\times(1-p_0) = \rho$.

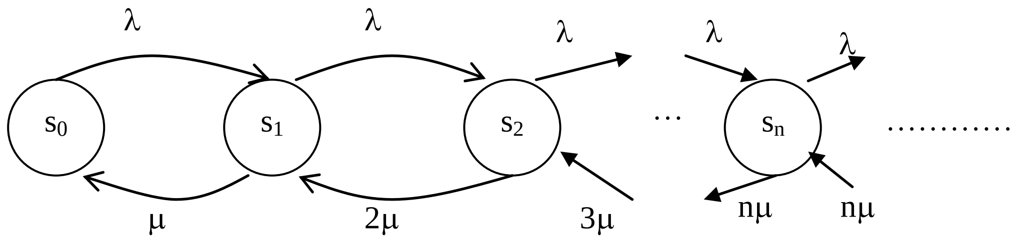
$\overline{Q}_{очер} = \overline{Q}_{сист} - \rho = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$.

По формуле Литтла среднее время ожидания в очереди:

$\overline{T}_{очер} = \dfrac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$.

Загрузка канала обслуживания: *1-p₀ = ρ*.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью



Состояния:

s_0 – каналы свободны, очередь пуста;

s_1 – 1 канал занят очередь пуста;

s_2 – 2 канала занято, очередь пуста;

……………………………..

s_n – n каналов занято, очередь пуста;

s_{n+1} – n каналов занято, в очереди одна заявка;

………………………………………..

Финальные вероятности существуют, если $\dfrac{\rho}{n}<1$, в противном случае, очередь неограниченно растет

$p_0 = \left[1+\rho+\dfrac{\rho^2}{2!}+\ldots+\dfrac{\rho^n}{n!}+\dfrac{\rho^{n+1}}{n!\,n}+\dfrac{\rho^{n+2}}{n!\,n^2}+\ldots+\dfrac{\rho^{n+r}}{n!\,n^r}+\ldots\right]^{-1}$, выразим выделенную часть, зная сумму бесконечно убывающего ряда:

$\dfrac{\rho^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^k = \dfrac{\rho^n}{n!}\dfrac{\rho/n}{1-\rho/n} = \dfrac{\rho^n}{n!}\dfrac{\rho}{n-\rho}$, тогда

$$p_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}.$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

По аналогии с предыдущим примером можно найти среднее число заявок в очереди:

$$\bar{Q}_{очер} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^{n+k}}{n! n^k} p_0 = p_0 \frac{\rho^n \rho}{n! n} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-1} = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{n! n \left(1 - {\rho}/{n}\right)^2} = p_0 \frac{\rho^{n+1} n}{n!(n-\rho)^2}.$$

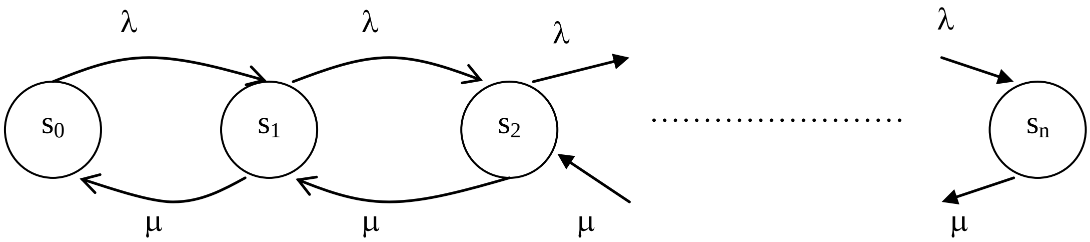
Среднее число заявок в системе:

$$\bar{Q}_{сист} = \bar{Q}_{очер} + \bar{k} = \bar{Q}_{очер} + \rho.$$

По формуле Литтла находим средние времена пребывания заявок в очереди и в системе:

$$\bar{T}_{очер} = \frac{1}{\lambda} \bar{Q}_{очер}, \; \bar{T}_{сист} = \frac{1}{\lambda} \bar{Q}_{сист}.$$

Одноканальная СМО с ограниченной очередью



Финальное распределение вероятностей в данной системе существует всегда.

Состояния:

s_0 – канал свободен очередь пуста;

s_1 – канал занят очередь пуста;

s_2 – канал занят, в очереди одно требование;

……….

s_n – канал занят, в очереди n-1 требования.

Максимальная длина очереди: n-1 .

$p_0 = (1+\rho + \rho^2 + \ ... \ + \rho^n)^{-1}$,

…..

$$p_i = \rho^i p_0, \forall i = 1,2,...,n.$$

Рассмотрим 2 случая:

1. Когда $\rho \neq 1$, то сумма n членов геометрической прогрессии равна:

$s_n = \dfrac{a_0 - a_n \rho}{1-\rho}$, тогда

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}},$$

…………

$$p_i = \rho^i \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}, \forall i = 1,2,...,n.$$

2. Когда $\rho = 1$, то

$$p_0 = p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n+1}.$$

Коэффициент загрузки канала равен вероятности того, что канал занят:

$P_{зан} = 1 - p_0$.

Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$U = 1 - P_{отк} = 1 - p_0\rho^n$.

Абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени: $A = \lambda U = \lambda(1 - \rho^n p_0) = (1 - p_0)\mu$.

Среднее число заявок в системе:

$$\overline{Q}_{сист} = p_0 \sum_{k=1}^{n} k\rho^k .$$

По формуле Литтла среднее время пребывания заявки в системе:

$$\overline{T}_{сист} = \frac{\overline{Q}_{сист}}{A} = \frac{\overline{Q}_{сист}}{(1-p_0)\mu} .$$

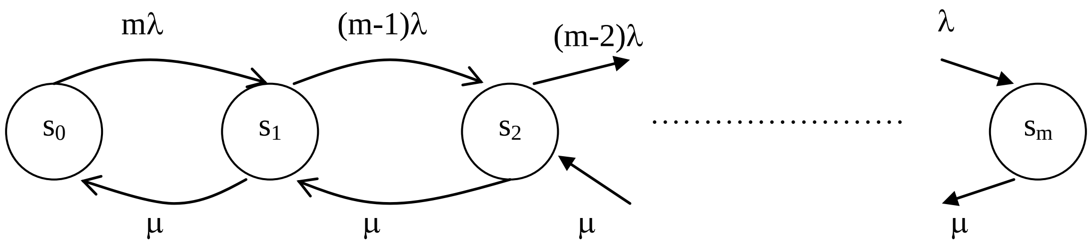
Средняя длина очереди:

$$\overline{Q}_{очер} = \overline{Q}_{сист} - (1 - p_0).$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$\overline{T}_{очер} = \frac{\overline{Q}_{очер}}{(1-p_0)\mu} = \overline{T}_{сист} - \frac{1}{\mu}.$$

Замкнутая СМО с одним каналом и m – источников заявок



Финальное распределение вероятностей в данной системе существует всегда. (Пример подобных систем – наладчик обслуживает несколько станков, на каждом их которых могут возникать неисправности).

Состояния:

s_0 – канал свободен очередь пуста;

s_1 – канал занят очередь пуста;

s_2 – канал занят, в очереди заявка из одного источника;

……….

s_m – канал занят, в очереди заявки из m-1 источников.

$$p_0 = \left(1 + m\rho + m(m-1)\rho^2 + m(m-1)(m-2)\rho^3 + ... + m(m-1)(m-2)...2\rho^m\right)^{-1},$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k m!}{(m-k)!}},$$

$$p_i = p_0\rho^i \frac{m!}{(m-i)!}, \forall i = 1,2,...,m .$$

Коэффициент загрузки канала: $1\text{-}p_0$.

Среднее число заявок в системе определяется исходя из того, что в стационарном режиме интенсивность входного потока заявок равна интенсивности выходного потока.

$$\left(m-\overline{Q}_{сист}\right)\lambda=\left(1-p_0\right)\mu,$$

$$\overline{Q}_{сист}=m-\frac{1-p_0}{\rho}.$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{Q}_{очер}=\overline{Q}_{сист}-\left(1-p_0\right).$$

Средние времена нахождения заявки в системе и в очереди по формуле Литтла:

$$\overline{T}_{сист}=\frac{\overline{Q}_{сист}}{\left(1-p_0\right)\mu},$$

$$\overline{T}_{очер}=\frac{\overline{Q}_{очер}}{\left(1-p_0\right)\mu}.$$