Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Динамическое равновесие маятника Челомея

Студент ФН2-42Б (Группа) ______ (Подпись, дата) И. А. Емелин (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ______ (Подпись, дата) А. В. Селиванов (И. О. Фамилия)

2020 г.

Оглавление

Введение

Под *маятником Челомея* понимается механическая система, состоящая из стержня, который может поворачиваться вокруг определенной оси («оси подвеса»), и «шайбы», которая может перемещаться вдоль стержня (рис. 1). В.Н. Челомей экспериментально обнаружил, что вследствие вертикальной вибрации оси подвеса устойчивым при определенных условиях оказывается верхнее («опрокинутое») положение стержня, причем шайба занимает на стержне некоторое фиксированное положение.

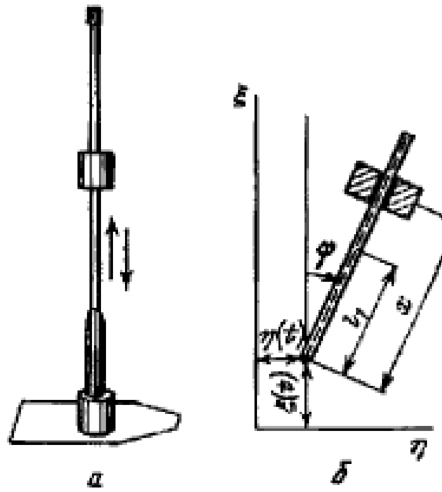

Рис. 1. Маятник Челомея с вибрирующей осью подвеса

Целью курсовой работы является изучение метода разделения движений и его приложение для решения задачи исследования равновесия маятника Челомея.

1. Постановка задачи

Согласно условию на курсовую работу требуется: рассмотреть механическую систему «Маятник Челомея», состоящую из жесткого стержня и твердого тела (шайбы), которое может перемещаться вдоль оси стержня; стержень имеет шарнирное закрепление и может поворачиваться в плоскости, перпендикулярной оси подвеса; горизонтальная ось подвеса может совершать вибрационные движения под действием внешних сил; построить математическую модель указанной механической системы и определить условия динамического равновесия шайбы на стержне в случае «опрокинутого» положения маятника.

Предполагаем, что стержень, по которому может перемещаться шайба, является прямолинейным и недеформируемым. Пусть при этом его ось подвеса колеблется по закону

$$\xi(t) = a\sin\omega t, \quad \eta(t) = b\sin(\omega t + \theta), \tag{1}$$

где a и b - амплитуды соответственно вертикальных и горизонтальных колебаний, ω - частота, θ - сдвиг фаз. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + J + mx^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + (m_1 l_1 + mx)(\dot{\eta}\cos\varphi - \dot{\xi}\sin\varphi)\dot{\varphi} + \\ + m(\dot{\eta}\sin\varphi + \dot{\xi}\cos\varphi)\dot{x} + \frac{1}{2}(m_1 + m)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2), \tag{2}$$

$$\Pi = (m_1 l_1 + mx)g\cos\varphi + (m_1 + m)g\xi. \tag{3}$$

Здесь φ угол поворота стержня; m_1, J_1 и l_1 - соответственно его масса, момент инерции относительно оси подвеса и расстояние от оси подвеса до центра тяжести; x - координата шайбы, отсчитываемая вдоль оси стержня от оси подвеса; m и J - масса и момент инерции шайбы; g - ускорение свободного падения.

В предположении, что сопротивление колебаниям стержня с шайбой и сопротивление перемещению шайбы по стержню носят характер вязкого трения соответственно с коэффициентами h_1 и h_2, уравнения движения системы запишутся в форме

$$(J_1 + J + mx^2)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + h_1\dot{\varphi} - (m_1 l_1 + mx)(g - a\omega^2\sin\omega t)\sin\varphi - \\ (m_1 l_1 + mx)b\omega^2\sin(\omega t + \theta)\cos\varphi = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 + h_2\dot{x} + (g - a\omega^2\sin\omega t)\cos\varphi - b\omega^2\sin(\omega t + \theta)\sin\varphi = 0. \tag{5}$$

Считая, что частота вибрации ω велика по сравнению с характерными частотами свободных колебаний

$$\lambda_1 = \sqrt{(m_1 + m)l_1 g/(J_1 + J + ml^2)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{g/l_1},$$

положим

$$\frac{\lambda_1}{\omega}, \quad \frac{\lambda_2}{\omega}, \quad \frac{a}{l_1}, \quad \frac{b}{l_1}, \quad \frac{h_1}{(J_1 + J + ml_1^2)\omega}, \quad \frac{h_2}{m\omega} \sim \varepsilon,$$

то есть будем считать указанные отношения малыми величинами порядка ε.
Тогда уравнения движения можно представить в форме

$$\ddot{\varphi} = F_\varphi(\dot{\varphi}, \varphi, \dot{x}, x) + \omega\Phi_\varphi(\varphi, x, \tau), \tag{6}$$

$$\ddot{x} = F_x(\dot{\varphi}, \varphi, \dot{x}, x) + \omega\Phi_x(\varphi, x, \tau), \tag{7}$$

где

$$F_\varphi = [-2mx\dot{x}\dot{\varphi} - h_1\dot{\varphi} + (m_1 l_1 + mx)g\sin\varphi]/(J_1 + J + mx^2), \tag{8}$$

$$F_x = x\dot{\varphi}^2 - h_2\dot{x} - g\cos\varphi, \tag{9}$$

$$\Phi_\varphi = (m_1 l_1 + mx)[b\omega\cos\varphi\sin(\tau+\theta) - a\omega\sin\varphi\sin\tau]/(J_1 + J + mx^2), \tag{10}$$

$$\Phi_x = a\omega\cos\varphi\sin\tau + b\omega\sin(\tau+\theta), \tau = \omega t. \tag{11}$$

2. Метод разделения движений

Уравнения (6) и (7) сложны для анализа, попытаемся упростить задачу, применив метод разделения движений. Будем искать решения уравнений в виде:

$$\varphi = \alpha(t) + \varepsilon\psi_\varphi(t,\tau), \quad x = X(t) + \varepsilon\psi_x(t,\tau), \tag{12}$$

где α и X - медленные составляющие, а ψ_φ и ψ_x - быстрые составляющие.

Сначала подставим в уравнение (7) для $\ddot{x}$. Получим следующее выражение для правой части уравнения

$$\begin{gathered}(X + \varepsilon\psi_x)(\dot{\alpha}^2 + 2\varepsilon\dot{\psi}_\varphi\dot{\alpha} + \varepsilon^2\dot{\psi}_\varphi^2) - h_2(\dot{X} + \varepsilon\dot{\psi}_x) - \\ g\cos(\alpha + \varepsilon\psi_\varphi) + a\omega^2\cos(\alpha+\varepsilon\psi_\varphi)\sin\tau + b\omega^2\sin(\alpha+\varepsilon\psi_\varphi)\sin(\tau+\theta) = \\ X\dot{\alpha}^2 + 2\varepsilon X\dot{\psi}_\varphi\dot{\alpha} + X\varepsilon^2\dot{\psi}_\varphi^2 + \varepsilon\psi_x\dot{\alpha}^2 + 2\varepsilon^2\psi_x\dot{\psi}_\varphi\dot{\alpha} + \varepsilon^3\psi_x\dot{\psi}_\varphi^2 - \\ h_2\dot{X} - h_2\varepsilon\dot{\psi}_x - g\cos\alpha + g\sin\alpha\varepsilon\psi_\varphi + a\omega^2\cos\alpha\sin\tau - \\ a\omega^2\varepsilon\psi_\varphi\sin\tau\sin\alpha + b\omega^2\sin\alpha\sin(\tau+\theta) + b\omega^2\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha\sin(\tau+\theta).\end{gathered} \tag{13}$$

В преобразовании (13) воспользовались тригонометрическими формулами для синуса и косинуса суммы

$$\sin(\alpha + \varepsilon\psi_\varphi) = \sin(\alpha)\cos(\varepsilon\psi_\varphi) + \cos(\alpha)\sin(\varepsilon\psi_\varphi), \tag{14}$$

$$\cos(\alpha + \varepsilon\psi_\varphi) = \cos(\alpha)\cos(\varepsilon\psi_\varphi) - \sin(\alpha)\sin(\varepsilon\psi_\varphi). \tag{15}$$

Так как $\varepsilon\psi_\varphi$ мало, считаем $\sin(\varepsilon\psi_\varphi)$ равным $\varepsilon\psi_\varphi$, а $\cos(\varepsilon\psi_\varphi)$ равным единице. Таким образом, уравнение (7) примет вид:

$$\begin{gathered}\ddot{X} + \varepsilon\ddot{\psi}_x = X\dot{\alpha}^2 + 2\varepsilon X\dot{\psi}_\varphi\dot{\alpha} + X\varepsilon^2\dot{\psi}_\varphi^2 + \varepsilon\psi_x\dot{\alpha}^2 + 2\varepsilon^2\psi_x\dot{\psi}_\varphi\dot{\alpha} + \varepsilon^3\psi_x\dot{\psi}_\varphi^2 - \\ h_2\dot{X} - h_2\varepsilon\dot{\psi}_x - g\cos\alpha + g\sin\alpha\varepsilon\psi_\varphi + a\omega^2\cos\alpha\sin\tau - \\ a\omega^2\varepsilon\psi_\varphi\sin\tau\sin\alpha + b\omega^2\sin\alpha\sin(\tau+\theta) + b\omega^2\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha\sin(\tau+\theta)\end{gathered} \tag{16}$$

Проведем замену (12) в уравнении (6) для $\ddot{\varphi}$. Перенесем $J_1 + J + mx^2$ в левую часть и заменим x. Таким образом, получим в левой части уравнения

$$\begin{gathered}(J_1 + J + mx^2)(\ddot{\alpha} + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi) = J_1\ddot{\alpha} + J\ddot{\alpha} + mx^2\ddot{\alpha} + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi J_1 + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi J + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi mx^2 = \\ mX^2\ddot{\alpha} + m\ddot{\alpha}\varepsilon^2\psi_x^2 + 2\ddot{\alpha}m\varepsilon\psi_x X + J_1\ddot{\alpha} + J\ddot{\alpha} + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi J_1 + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi J + \\ \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi mX^2 + \varepsilon^3\ddot{\psi}_\varphi m\psi_x^2 + 2m\varepsilon^2\ddot{\psi}_\varphi\psi_x X.\end{gathered} \tag{17}$$

Для F_φ получим следующее выражение в правой части уравнения

$$-2m(X+\varepsilon\psi_x)(\dot X+\varepsilon\dot\psi_x)(\dot\alpha+\varepsilon\dot\psi_\varphi)-h_1(\dot\alpha+\varepsilon\dot\psi_\varphi)+ \\ (m_1l_1+m(X+\varepsilon\psi_x))g\sin(\alpha+\varepsilon\psi_\varphi)=-2m\dot\alpha X\dot X-2m\varepsilon X\dot X\dot\psi_\varphi- \\ 2m\dot\alpha\dot X\varepsilon\psi_x-2m\varepsilon^2\dot X\psi_x\dot\psi_\varphi-2m\varepsilon\dot\alpha X\dot\psi_x-2m\varepsilon^2\dot\alpha\psi_x\dot\psi_x-2m\varepsilon^3\psi_x\dot\psi_x\dot\psi_\varphi- \\ 2m\varepsilon^2X\dot\psi_x\dot\psi_\varphi-\dot\alpha h_1-\varepsilon h_1\dot\psi_\varphi+m_1l_1g\sin\alpha+mg\varepsilon\psi_x\sin\alpha+mgX\sin\alpha+ \\ m_1l_1g\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha+mXg\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha+m\varepsilon^2\psi_x\psi_\varphi g\cos\alpha. \quad (18)$$

Выражение для Φ_φ в правой части примет вид:

$$\omega(m_1l_1+m(X+\varepsilon\psi_x))(b\omega\cos(\alpha+\varepsilon\psi_\varphi)\sin(\tau+\theta)-a\omega\sin(\alpha+\varepsilon\psi_\varphi)\sin\tau)= \\ bm_1l_1\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)-am_1l_1\omega^2\sin\alpha\sin\tau+bmX\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)-amX\omega^2\sin\alpha\sin\tau+ \\ \varepsilon m\psi_xb\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)-a\varepsilon m\psi_x\omega^2\sin\alpha\sin\tau-am_1l_1\varepsilon\psi_\varphi\omega^2\cos\alpha\sin\tau- \\ amX\varepsilon\psi_\varphi\omega^2\cos\alpha\sin\tau-am\varepsilon^2\psi_\varphi\psi_x\omega^2\cos\alpha\sin\tau-bm_1l_1\varepsilon\psi_\varphi\omega^2\sin\alpha\sin(\theta+\tau)- \\ bmX\varepsilon\psi_\varphi\omega^2\sin\alpha\sin(\theta+\tau)-bm\varepsilon^2\psi_\varphi\psi_x\omega^2\sin\alpha\sin(\theta+\tau). \quad (19)$$

Уравнение (6) для $\ddot\varphi$

$$mX^2\ddot\alpha+m\ddot\alpha\varepsilon^2\psi_x^2+2\ddot\alpha m\varepsilon\psi_xX+J_1\ddot\alpha+J\ddot\alpha+\varepsilon\ddot\psi_\varphi J_1+\varepsilon\ddot\psi_\varphi J+\varepsilon\ddot\psi_\varphi mX^2+ \\ \varepsilon^3\ddot\psi_\varphi m\psi_x^2+2m\varepsilon^2\ddot\psi_\varphi\psi_xX=-2m\dot\alpha X\dot X-2m\varepsilon X\dot X\dot\psi_\varphi-2m\dot\alpha\dot X\varepsilon\psi_x-2m\varepsilon^2\dot X\psi_x\dot\psi_\varphi- \\ 2m\varepsilon\dot\alpha X\dot\psi_x-2m\varepsilon^2\dot\alpha\psi_x\dot\psi_x-2m\varepsilon^3\psi_x\dot\psi_x\dot\psi_\varphi-2m\varepsilon^2X\dot\psi_x\dot\psi_\varphi-\dot\alpha h_1-\varepsilon h_1\dot\psi_\varphi+ \\ m_1l_1g\sin\alpha+mg\varepsilon\psi_x\sin\alpha+mg\sin\alpha X+m_1l_1g\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha+mgX\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha+ \\ m\varepsilon^2\psi_x\psi_\varphi g\cos\alpha+bm_1l_1\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)-am_1l_1\omega^2\sin\alpha\sin\tau+ \\ bmX\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)-amX\omega^2\sin\alpha\sin\tau+bm\psi_x\omega\cos\alpha\sin(\tau+\theta)- \\ am\psi_x\omega\sin\alpha\sin\tau-am_1l_1\psi_\varphi\omega\cos\alpha\sin\tau-amX\psi_\varphi\omega\cos\alpha\sin\tau- \\ am\psi_\varphi\psi_x\cos\alpha\sin\tau-bm_1l_1\psi_\varphi\omega\sin\alpha\sin(\theta+\tau)-bmX\psi_\varphi\omega\sin\alpha\sin(\theta+\tau)- \\ bm\psi_\varphi\psi_x\sin\alpha\sin(\theta+\tau). \quad (20)$$

Мы получили два уравнения и две неизвестные величины, решить пока эти уравнения мы не можем, так как они слишком сложные. Усредним уравнения по малому периоду. Получим два типа слагаемых: величины, которые изменяются медленно и поэтому их среднее значение можно считать константой, и быстроизменяющиеся величины, среднее значение которых почти ноль, так как они представляют какую-то комбинацию синусов и косинусов, среднее значение которых на периоде ноль. Составим из этих двух типов слагаемых дополнительные уравнения, то есть составим уравнение, в котором малые величины в левой части уравнения для $\ddot x$ равны малым величинам в правой части уравнения для $\ddot{x}$, и аналогично поступим с уравнением для $\ddot{\varphi}$. Таким образом, уравнение для малых величин для $\ddot{x}$

$$< \varepsilon\ddot{\psi}_x > = < 2\varepsilon X\dot{\alpha}\dot{\psi}_\varphi + \varepsilon\psi_x\dot{\alpha}^2 + \varepsilon^3\psi_x\dot{\psi}_\varphi^2 - h_2\varepsilon\dot{\psi}_x + \varepsilon\psi_\varphi g\sin\alpha + a\omega^2\sin\tau\cos\alpha + b\omega^2\sin(\tau+\theta)\sin\alpha > . \quad (21)$$

Для больших

$$< \ddot{X} > = < X\dot{\alpha}^2 + X\varepsilon^2\dot{\psi}_\varphi^2 + 2\varepsilon^2\psi_x\dot{\psi}_\varphi\dot{\alpha} - h_2\dot{X} - g\cos\alpha - a\omega^2\varepsilon\psi_\varphi\sin\tau\sin\alpha + b\omega^2\varepsilon\psi_\varphi\cos\alpha\sin(\tau+\theta) > . \quad (22)$$

Для малых величин в уравнении для $\ddot{\varphi}$

$$< \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi J_1 + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi J + 2\ddot{\alpha}m\psi_x\varepsilon X + \varepsilon\ddot{\psi}_\varphi mX^2 + \varepsilon^3\ddot{\psi}_\varphi m\psi_x^2 > = < -2m\varepsilon X\dot{X}\dot{\psi}_\varphi - 2m\dot{\alpha}\dot{X}\varepsilon\psi_x - 2m\varepsilon\dot{\alpha}X\dot{\psi}_x - 2m\varepsilon^3\psi_x\dot{\psi}_x\dot{\psi}_\varphi - \varepsilon h_1\dot{\psi}_\varphi + m_1l_1g\psi_\varphi\varepsilon\cos\alpha + mg\varepsilon\psi_x\sin\alpha + mgX\psi_\varphi\varepsilon\cos\alpha + bm_1l_1\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta) - am_1l_1\omega^2\sin\alpha\sin\tau + bmX\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta) - amX\omega^2\sin\alpha\sin\tau - am\psi_\varphi\psi_x\cos\alpha\sin\tau - bm\psi_\varphi\psi_x\sin\alpha\sin(\theta+\tau) > . \quad (23)$$

Для больших

$$< J_1\ddot{\alpha} + J\ddot{\alpha} + mX^2\ddot{\alpha} + m\ddot{\alpha}\varepsilon^2\psi_x^2 + 2m\varepsilon^2X\ddot{\psi}_\varphi\psi_x > = < -2m\dot{\alpha}X\dot{X} - 2m\varepsilon^2\dot{X}\psi_x\psi_\varphi - 2m\varepsilon^2\dot{\alpha}\psi_x\dot{\psi}_x - 2m\varepsilon^2\dot{X}\dot{\psi}_x\dot{\psi}_\varphi - \dot{\alpha}h_1 + m_1l_1g\sin\alpha + mg\varepsilon\psi_x\cos\alpha\psi_\varphi + mgX\sin\alpha + m\psi_x b\omega\cos\alpha\sin(\tau+\theta) - am\psi_x\omega\sin\alpha\sin\tau - am_1l_1\psi_\varphi\omega\cos\alpha\sin\tau - amX\psi_\varphi\omega\cos\alpha\sin\tau - bm_1l_1\psi_\varphi\omega\sin\alpha\sin(\theta+\tau) - bmX\psi_\varphi\omega\sin\alpha\sin(\theta+\tau) > . \quad (24)$$

Итак, мы получили четыре уравнения и четыре неизвестные величины. С помощью этих уравнений определим вид функций ψ_φ, ψ_x.

Снимем усреднение с уравнений для малых величин. Так как уравнение (21) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, в котором есть слагаемые с перекрестным умножением на ψ_φ, $\dot{\psi}_\varphi^2$ и т.д., мы не можем его решить. Постараемся его привести к решаемому виду путем отсечения слагаемых по порядку малости. Оценим по $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$. Оставим в уравнении слагаемые $a\omega^2\sin\tau\cos\alpha$ и $b\omega^2\sin(\tau+\theta)\sin\alpha$, так как они имеют второй порядок по ω. Рассмотрим $\varepsilon\ddot{\psi}_x(t,\tau)$. Мы считаем, что функция ψ_x представляет собой какую-то комбинацию синусов и косинусов, а так как в аргументе у нее находится ωt, то дважды продифференцировав эту функцию по правилу дифференцирования сложной функции получим коэффициент ω^2, который принимает большие значения. Учтем это слагаемое, так как после взаимного уничтожения с ε оно будет иметь первый порядок по ω. Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение второго порядка с разделенными переменными. Полагаем, что $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ константы, так как мы рассматриваем малые, быстроизменяющиеся величины, а это большие величины, которые изменяются медленно. Будем интегрировать по малому периоду. Поделим на ε и приведем уравнение к виду:

$$\ddot{\psi}_x = \frac{1}{\varepsilon^2}\Phi_x(\alpha, X, \tau). \tag{25}$$

После двойного интегрирования получим:

$$\psi_x = -a\omega\cos\alpha\sin\omega t - b\omega\sin\alpha\sin(\theta+\omega t) + C_1 t + C_2. \tag{26}$$

Теперь нам необходимо определить константы интегрирования C_1 и C_2. Сначала рассмотрим C_1. Так как мы получили решение для малого быстрого движения, а при ненулевом коэффиценте C_1 вклад слагаемого с этим коэффициентом может стать очень большим, и тогда это перестанет быть малой величиной, то будем считать, что C_1 равен нулю. Коэффициент C_2 равен нулю из соображений симметрии, так как колебания происходят возле положения нуля. Таким образом:

$$\psi_x = -a\omega\cos\alpha\sin\omega t - b\omega\sin\alpha\sin(\theta+\omega t). \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение для малых величин для $\ddot{\varphi}$. Также как и в случае с уравнением для $\ddot{x}$ мы имеем дифференциальное уравнение второго порядка, в котором есть слагаемые с перекрестным умножением на ψ_φ, $\dot{\psi}_\varphi^2$ и т.д., и мы также не можем его решить. Постараемся его привести к решаемому виду путем отсечения слагаемых по порядку малости. Оценим по $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, учитывая вид функции ψ_φ, оставим в уравнении величины второго порядка по ω: $\ddot{\psi}_\varphi J$, $\ddot{\psi}_\varphi mX^2$, $bm_1l_1\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)$, $\ddot{\psi}_\varphi J_1$, $am_1l_1\omega^2\sin\alpha\sin\tau$, $bmX\omega^2\cos\alpha\sin(\tau+\theta)$ и $amX\omega^2\sin\alpha\sin\tau$. Приведем уравнение к виду

$$\ddot{\psi}_\varphi = \frac{1}{\varepsilon^2}\Phi_\varphi(\alpha, X, \tau). \tag{28}$$

Таким образом, мы снова получили дифференциальное уравнение второго порядка с разделенными переменными. Дважды проинтегрируем и получим

$$\psi_\varphi = \frac{\omega(m_1l_1 + mX)}{J_1 + J + mX^2}(a\sin\alpha\sin\tau - b\cos\alpha\sin(\theta+\tau)). \tag{29}$$

В уравнении (29) константы интегрирования обнуляются по тем же причинам, что и в уравнении (26). Итак, мы получили вторую малую функцию. Далее нам необходимо подставить получившиеся выражения для двух малых функций в уравнения для больших и провести усреднение. В случае двух степеней свободы выражения для вибрационных сил будут иметь вид [1]

$$V_\alpha =< F_\varphi(\dot\alpha + \frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\tau}, \alpha, \dot X + \frac{\partial\psi_x}{\partial\tau}, X) - F_\varphi(\dot\alpha, \alpha, \dot X, X) > + \\ < \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial\alpha}\psi_\varphi + \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial X}\psi_x > . \quad (30)$$

$$V_X =< F_x(\dot\alpha + \frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\tau}, \alpha, \dot X + \frac{\partial\psi_x}{\partial\tau}, X) - F_x(\dot\alpha, \alpha, \dot X, X) > + \\ < \frac{\partial\Phi_x}{\partial\alpha}\psi_\varphi + \frac{\partial\Phi_x}{\partial X}\psi_x > . \quad (31)$$

Проведя по этим формулам вычисления, придем к следующим выражениям для обобщенных вибрационных сил:

$$V_\alpha = V_\alpha(\alpha, X) = \frac{\omega^2}{4}\left(\frac{(m_1l_1 + mX)^2}{J_1 + J + mX^2} - m\right)\cdot\Big(2ab\cos 2\alpha\cos\theta - (a^2 - b^2)\sin 2\alpha\Big) \quad (32)$$

$$V_X = V_\alpha(\alpha, X) = \frac{\omega^2}{2}\left(X\left(\frac{m_1l_1 + mX}{J_1 + J + mX^2}\right)^2 - \right. \\ \left. \frac{m_1l_1 + mX}{J_1 + J + mX^2}\right)\Big(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - ab\sin 2\alpha\cos\theta\Big) \quad (33)$$

В результате, уравнения медленных движений можно представить в виде

$$(J_1 + J + mX^2)\ddot\alpha + 2mX\dot X\alpha + h_1\dot\alpha = (m_1l_1 + mX)g\sin\alpha + V_\alpha, \quad (34)$$

$$\ddot X - X\dot\alpha^2 + h_2\dot X = -g\cos\alpha + V_X. \quad (35)$$

3. Анализ результатов

Проанализируем возможность вертикального верхнего и нижнего положений динамического равновесия. Верхнему положению динамического равновесия соответствует угол $\alpha = 0$, нижнему $\alpha = \pi$. В положении динамического равновесия скорости и ускорения равны нулю. Таким образом, после подстановки этих значений в уравнения для больших величин, получим условия динамического равновесия в верхнем положении

$$-g - \frac{b^2\omega^2}{2}\frac{(m_1l_1 + mX)(J_1 + J - m_1l_1X)}{(J_1 + J + mX^2)^2} = 0 \quad (36)$$

и нижнем положении

$$g - \frac{b^2\omega^2}{2}\frac{(m_1l_1 + mX)(J_1 + J - m_1l_1X)}{(J_1 + J + mX^2)^2} = 0. \quad (37)$$

Если параметры маятника и вибраций удовлетворяют уравнениям (36), (37), то наблюдается положение динамического равновесия. Рассмотрим верхнее положение маятника. Для того, чтобы оно было положением динамического равновесия, необходимо выполнение неравенства $J_1 + J < m_1 l_1 X$, так как g положительное. По той же причине для того, чтобы нижнее положение маятника было положением динамического равновесия, необходимо выполнение неравенства $J_1 + J > m_1 l_1 X$. Анализ устойчивости найденных положений динамического равновесия выходит за рамки курсовой работы.

Заключение

1. Проанализирована реализация метода разделения движений на примере системы «Маятник Челомея».

2. Получены условия вертикальных верхнего и нижнего положений динамического равновесия маятника Челомея.

Список использованной литературы

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. –М.: Физматлит, 1994.–400 с.