



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

*Решение уравнения Рейнольдса методом
конечных элементов*

Студент _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

И. А. Емелин

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

А. В. Селиванов

(И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Математическая модель	4
3. Метод Галёркина	5
4. Движение жидкости между параллельными пластинами	7
5. Движение жидкости в клиновидном зазоре	8
6. Численное моделирование	9
6.1. Сравнение результатов моделирования на разных сетках	9
6.2. Результаты моделирования для каналов различной формы	10
Заключение	12
Список использованной литературы	13
Приложение	14

Введение

Целью курсовой работы является построение модели для расчёта течения вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое между двумя плоскими пластинами. Подобные задачи возникают, например, при расчете жидкостных (маслянных) подшипников и уплотнений. Малость зазора между пластинами по отношению к их габаритным размерам позволяет перейти к двумерной постановке задачи на основе уравнения Рейнольдса. Для численного решения уравнения выбран метод конечных элементов.

1. Постановка задачи

В рамках курсовой работы необходимо на основе решения уравнения Рейнольдса рассчитать поле давления в тонком слое жидкости. Жидкость находится между двумя квадратными пластинами, одна из которых неподвижна, а на поверхности второй – задана скорость $U=120$ м/с (имитация вращения ротора). Ширина и длина L расчетной области равны 20 мм. Вязкость жидкости $\mu = 0.09$ Па · с.

На границах заданы условия на величину давления (рис. 1): повышенное $p_H = 200000$ Па на одной стороне и пониженное $p_L = 100000$ Па на трёх остальных.

Требуется рассмотреть три случая изменения высоты зазора: постоянный зазор, линейно сужающийся и линейно расширяющийся зазоры, реализующиеся при наклоне одной из пластин. Ширина входного зазора h_{min} во всех случаях одинакова и равна 0.2 мм.

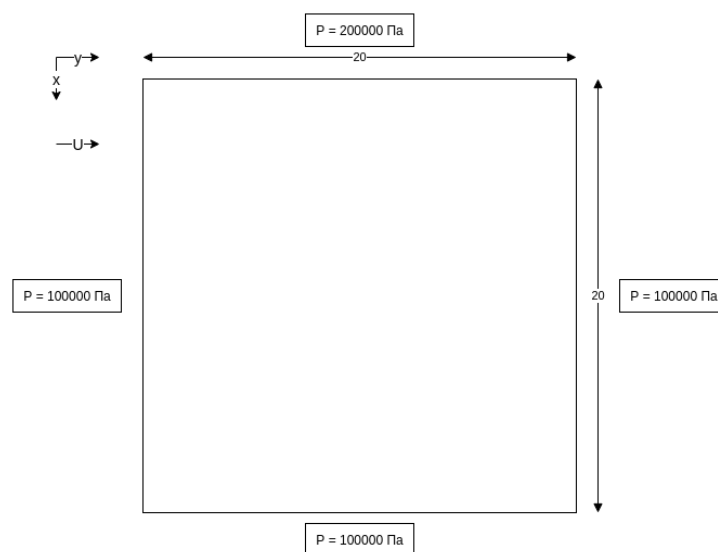


Рис. 1. Проекция расчётной области

2. Математическая модель

В силу того, что жидкость несжимаема, а зазор между пластинами намного меньше размеров пластин по осевой x и окружной y координатам, давление в слое жидкости между пластинами описывается уравнением Рейнольдса [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (1)$$

В уравнении (1) величина $h = h(x, y)$ представляет собой толщину слоя (заданное расстояние между пластинами), $p = p(x, y)$ – давление, μ – коэффициент вязкости, U – скорость в направлении оси y на одной из пластин (имитация вращения вала).

Уравнение (1) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа. Так как найти аналитическое решение не представляется возможным, то воспользуемся методом конечных элементов (МКЭ) для численного решения уравнения. Решение разрешающей системы МКЭ будем искать с помощью метода Гаусса.

Перед тем, как приступить к решению, перейдём к безразмерным величинам в уравнении (1)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s}, \quad (2)$$

где

$$H = \frac{h}{h_{min}}, \quad P = \frac{p}{p_L}, \quad s = \frac{y}{L}, \quad z = \frac{x}{L}. \quad (3)$$

Выполним переход к безразмерным величинам в граничных условиях

$$P|_{z=0} = \frac{p_H}{p_L} = 2, \quad P|_{s=0} = P|_{s=L} = \frac{p_L}{p_L} = 1, \quad P|_{z=L} = \frac{p_L}{p_L} = 1. \quad (4)$$

Решение поставленной задачи начнём с разбиения области на ряд конечных элементов (КЭ), в каждом из которых зададим закон изменения давления. Будем искать решение в виде линейной комбинации кусочно-гладких функций координат

$$P(z, s) = \sum_{n=1}^{M^2} p_n f_n(z, s), \quad (5)$$

где p_n – неизвестные коэффициенты (давления в узлах КЭ сетки), f_n – выбранные функции координат (функции формы КЭ). Функция формы элемента f_n равна 1 в узле n с координатами $z = z_n$, $s = s_n$ и нулю в остальных узлах.

Рассмотрим классическую реализацию МКЭ на сетке из треугольников с линейными функциями формы. Введём на рассматриваемой области равномерную сетку

из M узлов на стороне, таким образом разбив область на $2(M-1)(M-1)$ прямоугольных треугольников (рис. 2). Будем считать, что в каждом элементе давление изменяется по линейному закону, и используем функции формы вида

$$N_l(s, z) = a_l + b_ls + c_lz, \quad l = i, j, k. \quad (6)$$

Так как мы ищем приближенное решение в виде (5), то после его подстановки в уравнение (2) будем иметь $LP - f = \varepsilon$, где ε – ошибка (невязка). Чтобы искомое решение наилучшим образом удовлетворяло исходному уравнению, используем метод Галёркина для построения разрешающей системы МКЭ.

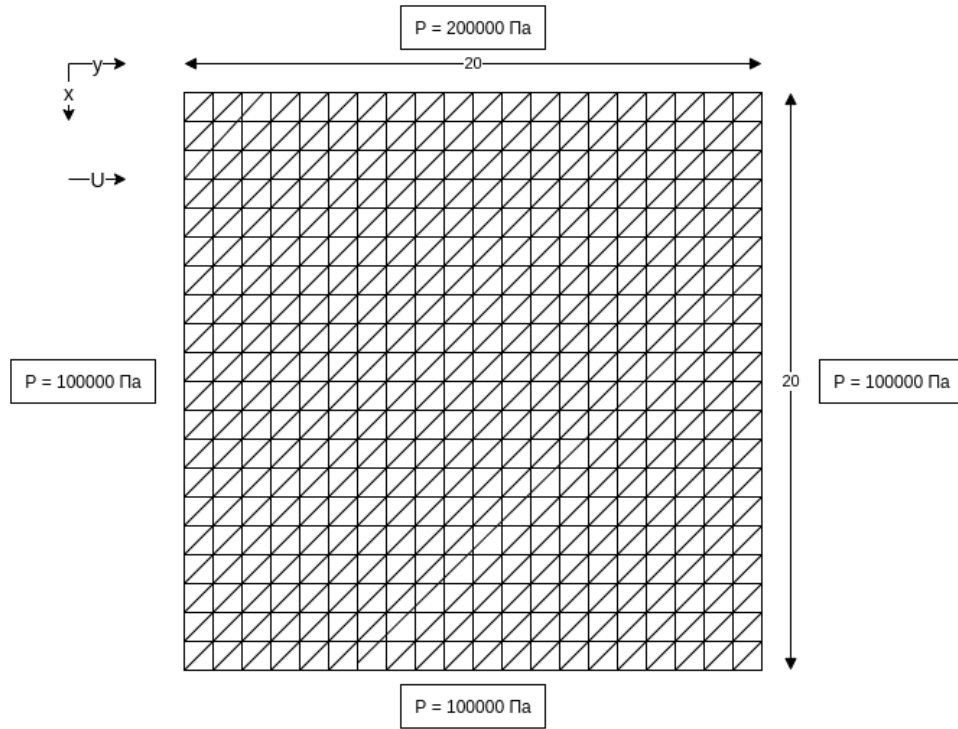


Рис. 2. Пример разбиения области на 400 элементов

3. Метод Галёркина

Запишем условие ортогональности невязки и весовых функций, в качестве которых примем функции формы конечного элемента

$$\int_S \left([N]^T \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) \right) dS = 0. \quad (7)$$

Понизим порядок производных под знаком интеграла, используя формулу дифференцирования произведения

$$\frac{\partial}{\partial s} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) = [N]^T \frac{\partial}{\partial s} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial s} H^3 \frac{\partial P}{\partial s}. \quad (8)$$

Аналогично для второго слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial z} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = [N]^T \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} H^3 \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (9)$$

Проведём замену

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial s} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial s} H^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial z} H^3 \frac{\partial P}{\partial z} - \right. \\ \left. - [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) dS = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Грина и заменим первое и третье слагаемое под знаком интеграла

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial s} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right) dS = \oint_{\mathcal{L}} \left([N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial s} l_s + [N]^T H^3 \frac{\partial P}{\partial z} l_z \right) d\mathcal{L}. \quad (11)$$

Уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \left([N]^T \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial s} l_s + H^3 \frac{\partial P}{\partial z} l_z \right) \right) d\mathcal{L} - \int_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial s} H^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \right. \\ \left. + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} H^3 \frac{\partial P}{\partial z} + [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) dS = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Интеграл по границе \mathcal{L} вносит вклад в локальные матрицы конечных элементов на границе области, но так по условию заданы граничные условия первого рода, то узлы, на давление в которых влияет криволинейный интеграл, и узлы, в которых заданы граничные условия, совпадают. Следовательно, можно не учитывать этот интеграл (положить его равным нулю). Тогда уравнение (12) примет вид

$$\int_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial s} H^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} H^3 \frac{\partial P}{\partial z} + [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) dS = 0. \quad (13)$$

4. Движение жидкости между параллельными пластинами

В силу того, что величина зазора не изменяется, $\frac{\partial H}{\partial s}$ равно нулю и третье слагаемое в (13) исчезает. Тогда уравнение (13) преобразуется к виду

$$\int_S \left(\frac{\partial[N]^T}{\partial s} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial[N]^T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dS = 0. \quad (14)$$

Проведём интегрирование по площади конечного элемента

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \left(\frac{\partial[N]^T}{\partial s} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial[N]^T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dS &= \\ &= \int_{S_e} \left(b_l(p_i b_i + p_j b_j + p_k b_k) + c_l(p_i c_i + p_j c_j + p_k c_k) \right) dS = \\ &= S_e \left(b_l(p_i b_i + p_j b_j + p_k b_k) + c_l(p_i c_i + p_j c_j + p_k c_k) \right), \quad l = i, j, k. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, уравнение (14) примет вид

$$S_e \left(b_l(p_i b_i + p_j b_j + p_k b_k) + c_l(p_i c_i + p_j c_j + p_k c_k) \right) = 0, \quad l = i, j, k. \quad (16)$$

Перепишем (16) в виде локальной матрицы жесткости

$$S_e \cdot \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} + S_e \cdot \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Проведя ансамблирование конечных элементов путём перебора всех элементов, соберем однородную систему алгебраических уравнений. Учтём граничные условия первого рода следующим образом: вычеркнем из системы уравнения, соответствующие узлам, которые находятся на границе рассматриваемой области, и заменим их заданными условиями на давление. Запишем итоговую систему в матричном виде

$$GP = B, \quad (18)$$

где G – глобальная матрица жесткости, P – вектор давлений в узлах, B – вектор правых частей. Отметим, что вектор B не нулевой в силу граничных условий. Решение системы (18) проведём с помощью метода Гаусса, полученные результаты представлены в разделе ”Численное моделирование”.

5. Движение жидкости в клиновидном зазоре

Рассмотрим случай, когда H изменяется по линейному закону вдоль окружной координаты

$$H(s) = H_0 + ks, \quad (19)$$

где $H_0 = 1$ значение высоты входного зазора, k определяет угол наклона плоскости.

Запишем условие ортогональности невязки и весовых функций

$$\int_S \left(\frac{\partial[N]^T}{\partial s} (ks + H_0)^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial[N]^T}{\partial z} (ks + H_0)^3 \frac{\partial P}{\partial z} + [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \right) dS = 0. \quad (20)$$

Проведём интегрирование по площади верхнего треугольника (рис. 3)

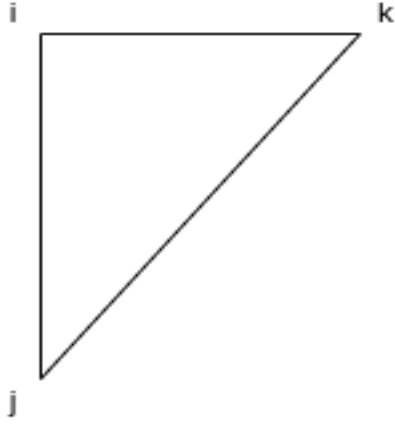


Рис. 3. Верхний треугольник

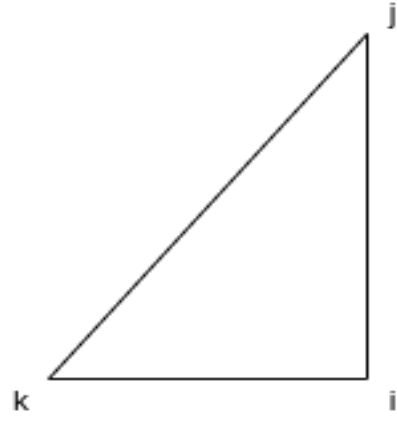


Рис. 4. Нижний треугольник

$$\int_{s_i}^{s_k} \int_d^{z_k} \left(b_l (ks + H_0)^3 (p_i b_i + p_j b_j + p_k b_k) + c_l (ks + H_0)^3 (p_i c_i + p_j c_j + p_k c_k) + (a_l + b_l s + c_l z) \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \right) dz ds = 0, \quad (21)$$

где $d = \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} s - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j$, $l = i, j, k$.

Интеграл (21) вычислен аналитически. Чтобы не загромождать изложение, приведём ниже только общий вид локальной матрицы жесткости и локального вектора правых частей, а конкретные значения коэффициентов вынесем в приложение.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 a_i + \lambda_3 b_i + \lambda_4 c_i \\ \lambda_2 a_j + \lambda_3 b_j + \lambda_4 c_j \\ \lambda_2 a_k + \lambda_3 b_k + \lambda_4 c_k \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Аналогичным образом проведём интегрирование по площади нижнего треугольника (рис. 4).

Составим глобальную матрицу жесткости с помощью метода перебора элементов. Для каждого конечного элемента определим, какими частями локальной матрицы жесткости в какие уравнения он делает вклад и запишем систему уравнений. Учтем наличие граничных условий аналогично случаю параллельных пластин и заменим соответствующие уравнения. Запишем разрешающую систему в матричном виде

$$GP = B, \quad (23)$$

где G – глобальная матрица жесткости, P – вектор давлений в узлах, B – вектор правых частей. Решение системы (23) проведём с помощью метода Гаусса, полученные результаты представлены ниже.

6. Численное моделирование

Для реализации описанного выше алгоритма МКЭ разработана программа расчёта на языке C++. Результаты численного моделирования для различных типов зазоров приведены далее.

6.1. Сравнение результатов моделирования на разных сетках

Предварительно рассмотрим чувствительность результатов расчета к разбиению расчётной области на КЭ. На рис. 5 показано сравнение значений давления в центральном сечении. На графиках представлены результаты расчётов для сеток 16×16 (красный), 32×32 (синий) и 64×64 (зеленый). Как видно, имеет место хорошее совпадение расчётных результатов.

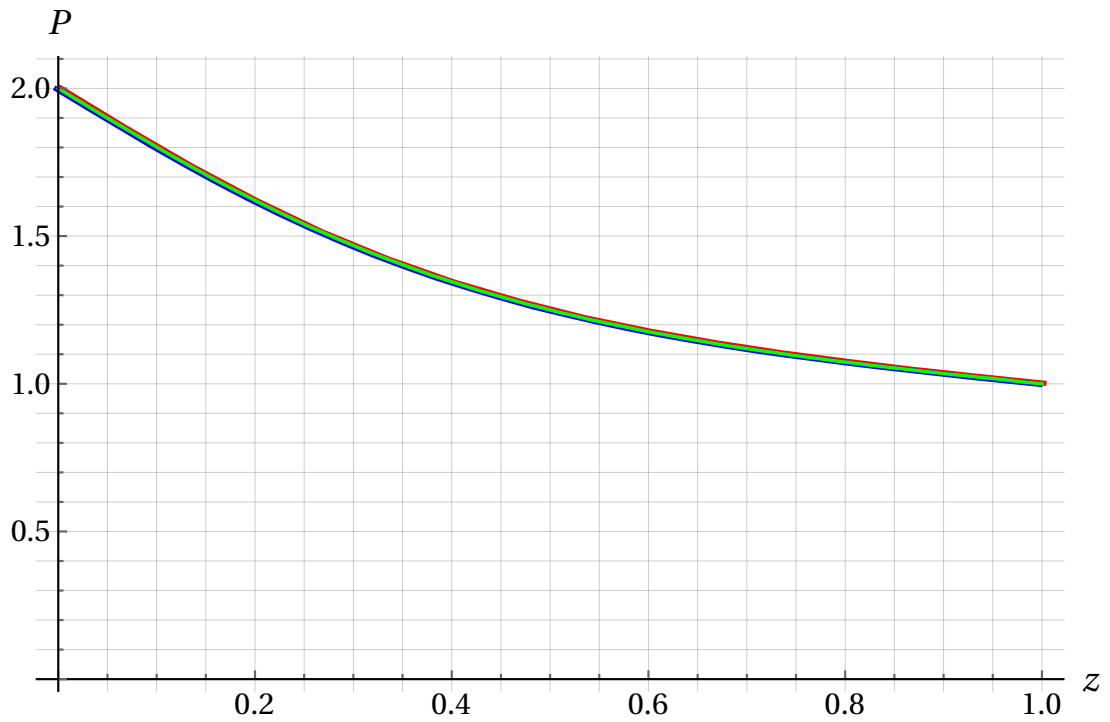


Рис. 5. Распределение давления в центральном сечении канала для сеток с различным числом элементов

6.2. Результаты моделирования для каналов различной формы

На рис. 6 показаны распределения давления жидкости в канале постоянного сечения, на рис. 7 – в сходящемся (по направлению скорости U) канале, на рис. 8 – в расширяющемся (по направлению скорости U) канале.

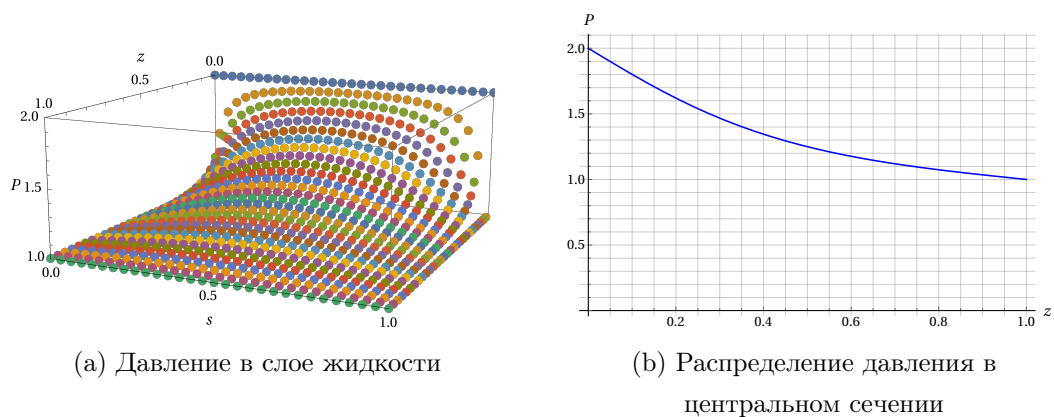
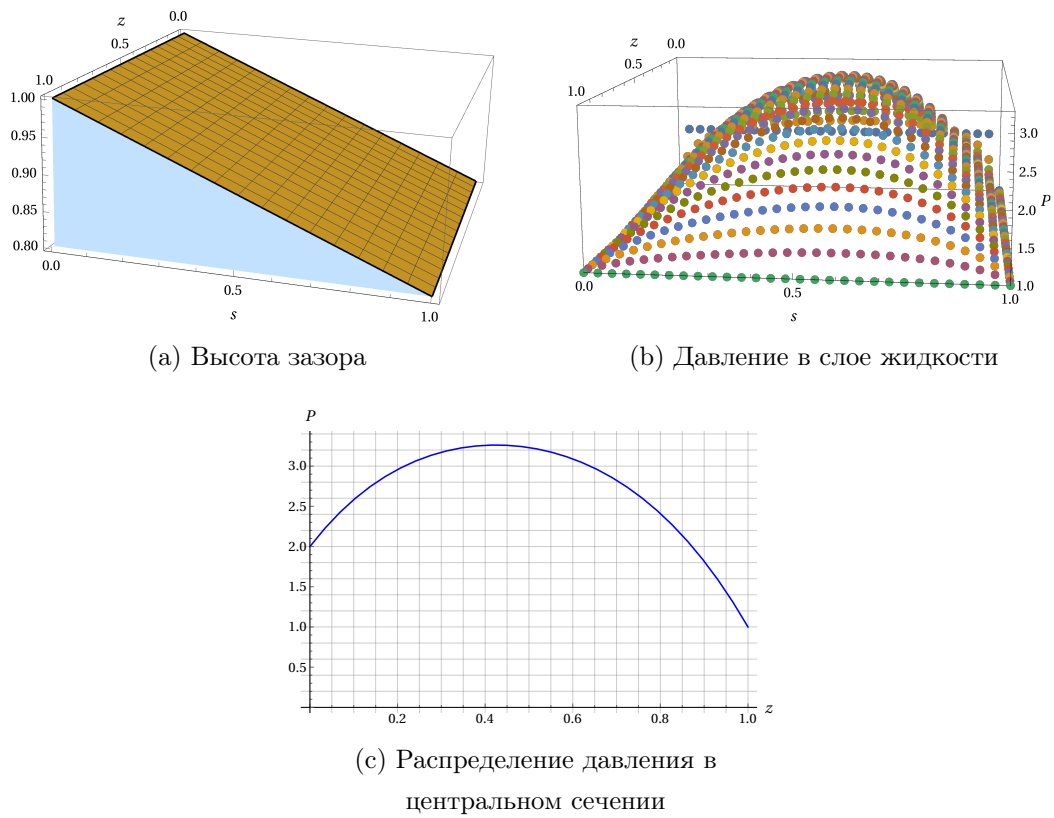
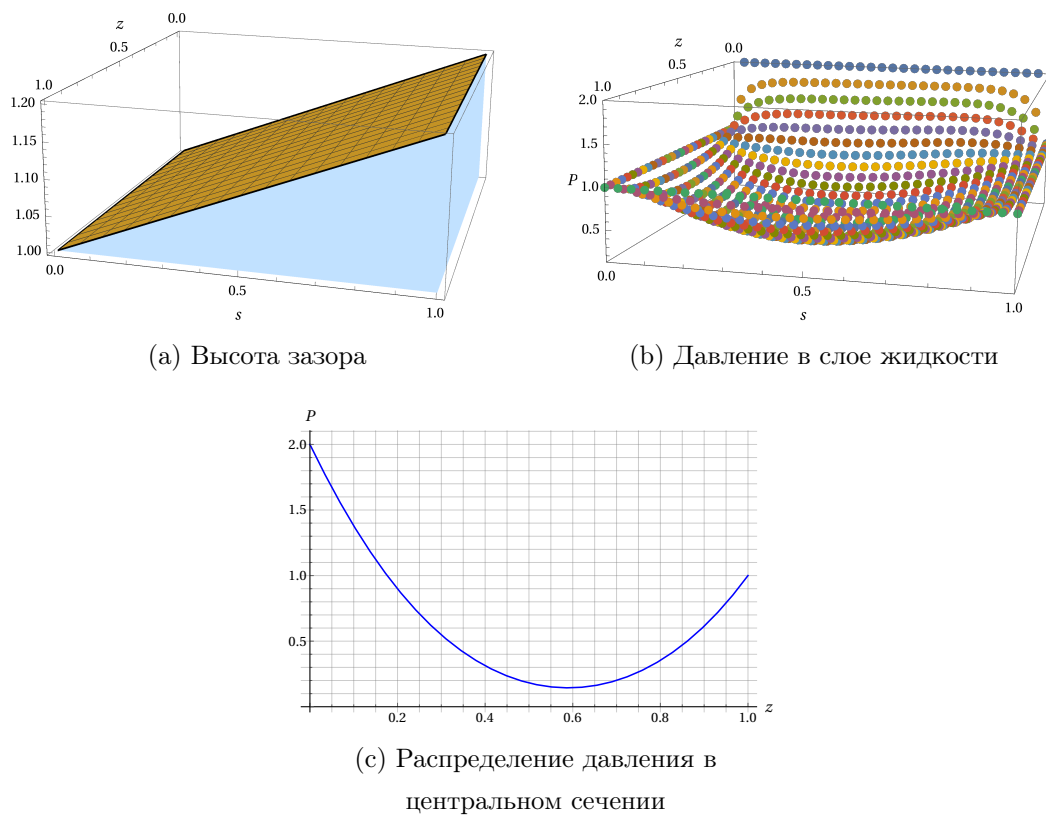


Рис. 6. Результат для канала постоянного сечения

Рис. 7. Результат для сужающегося (по направлению скорости U) каналаРис. 8. Результат для расширяющегося (по направлению скорости U) канала

Заключение

1. Результаты численного решения уравнения Рейнольдса для давления в тонкой плёнке жидкости для различных функций зазора качественно совпадают с ожидаемыми распределениями:

- в канале постоянного сечения имеет место практически симметричное поле давлений с плавным изменением к краям расчётной области;
- в сужающемся (по направлению поперечной скорости) зазоре реализуется распределение с внутренним ”горбом”, определяющим подъемный клин;
- в расширяющемся зазоре, наоборот, проявляется эффект подсосывания – внутренняя зона пониженного давления;

2. Анализ чувствительности результатов расчётов к измельчению конечно-элементной сетки показал приемлемый уровень расхождения.

Список использованной литературы

1. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1955.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир. 1979.

Приложение

Коэффициенты локальной матрицы жесткости в случае линейного изменения высоты можно рассчитать по следующим формулам.

Для верхнего треугольника

$$\begin{aligned}\lambda_1 = & -k^3 \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(\frac{s_k^5}{5} - \frac{s_i^5}{5} \right) + \\ & + \left(k^3 \left(z_k + s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} - z_j \right) - 3H_0 k^2 \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right) \left(\frac{s_k^4}{4} - \frac{s_i^4}{4} \right) + \\ & + \left(3h_{min} k^2 \left(z_k + s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} - z_j \right) - 3H_0^2 k \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right) \left(\frac{s_k^3}{3} - \frac{s_i^3}{3} \right) + \\ & + \left(-H_0^3 \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + 3H_0^2 k \left(z_k + s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} - z_j \right) \right) \left(\frac{s_k^2}{2} - \frac{s_i^2}{2} \right) + \\ & + H_0^3 \left(z_k + s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} - z_j \right) (s_k - s_i),\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \left(-\frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(\frac{s_k^2}{2} - \frac{s_i^2}{2} \right) + \left(z_k + s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} - z_j \right) (s_k - s_i) \right),$$

$$\lambda_3 = \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \left(-\frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(\frac{s_k^3}{3} - \frac{s_i^3}{3} \right) + \left(z_k + s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} - z_j \right) \left(\frac{s_k^2}{2} - \frac{s_i^2}{2} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 = & \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right)^2 \left(\frac{s_k^3}{3} - \frac{s_i^3}{3} \right) - \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(z_j - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right) \left(\frac{s_k^2}{2} - \frac{s_i^2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(z_k^2 - \left(z_j - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right)^2 \right) (s_k - s_i) \right).\end{aligned}$$

Коэффициенты для нижнего треугольника

$$\begin{aligned}\lambda_1 = & k^3 \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(\frac{s_i^5}{5} - \frac{s_k^5}{5} \right) + \\ & + \left(k^3 \left(-z_k - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j \right) + 3H_0 k^2 \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right) \left(\frac{s_i^4}{4} - \frac{s_k^4}{4} \right) + \\ & + \left(3H_0 k^2 \left(-z_k - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j \right) + 3H_0^2 k \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right) \left(\frac{s_i^3}{3} - \frac{s_k^3}{3} \right) + \\ & + \left(H_0^3 \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + 3H_0^2 k \left(-z_k - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j \right) \right) \left(\frac{s_i^2}{2} - \frac{s_k^2}{2} \right) + \\ & + H_0^3 \left(-z_k - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j \right) (s_i - s_k),\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \left(\frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(\frac{s_i^2}{2} - \frac{s_k^2}{2} \right) + \left(-z_k - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j \right) (s_i - s_k) \right),$$

$$\lambda_3 = \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \left(\frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(\frac{s_i^3}{3} - \frac{s_k^3}{3} \right) + \left(-z_k - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} + z_j \right) \left(\frac{s_i^2}{2} - \frac{s_k^2}{2} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 = \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right)^2 \left(\frac{s_i^3}{3} - \frac{s_k^3}{3} \right) + \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \left(z_j - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right) \left(\frac{s_i^2}{2} - \frac{s_k^2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(z_k^2 - \left(z_j - s_j \frac{z_k - z_j}{s_k - s_j} \right)^2 \right) (s_i - s_k) \right). \end{aligned}$$