Решение уравнения Рейнольдса методом конечных элементов

Студент: И.А. Емелин
Группа ФН2-62Б
Науч. рук.: А.В. Селиванов

4 июня 2021 г.

Постановка задачи

Цель

Построение модели для расчёта течения вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое между двумя плоскими пластинами с помощью метода конечных элементов

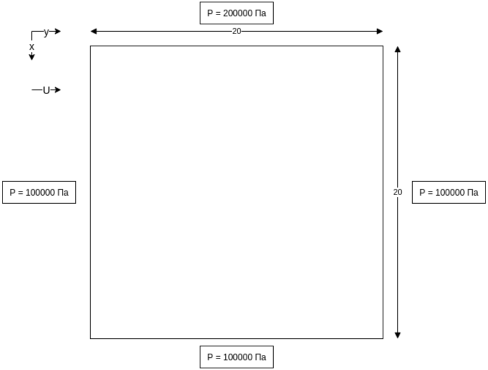


Рис. 1: Проекция расчётной области

Математическая модель

Дифференциальное уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right)=6\mu U\frac{\partial h}{\partial y}$$

$h = h(x, y)$ – толщина слоя
$p = p(x, y)$ – давление
μ – коэффициент вязкости
Граничные условия:
U – скорость в направлении оси y на одной из пластин
$p_H = 200000$ Па повышенное давление
$p_L = 100000$ Па пониженное давление
$U = 120$ м/с

Обезразмеривание

Уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(H^3\frac{\partial P}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(H^3\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2}\frac{\partial H}{\partial s}$$

$$H=\frac{h}{h_{min}},\quad P=\frac{p}{p_L},\quad s=\frac{y}{L},\quad z=\frac{x}{L}$$

Граничные условия

$$P|_{z=0}=\frac{p_H}{p_L}=2,\ P|_{s=0}=P|_{s=L}=P|_{z=L}=\frac{p_L}{p_L}=1$$

Метод конечных элементов

Решение

$$P(z,s) = \sum_{n=1}^{M^2} p_n N(z,s)$$

$N(z,s)$ – функции формы,
p_n – неизвестные коэффициенты

Функции формы

$$N_l(s,z) = a_l + b_l s + c_l z, \quad l = i,\ j,\ k$$

Невязка

$$LP - f = \varepsilon$$

Метод Галёркина

Условие ортогональности невязки и весовых функций

$$\int\limits_S [N]^T \left(\frac{\partial}{\partial s}\left(H^3 \frac{\partial P}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(H^3 \frac{\partial P}{\partial z}\right) - \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) dS = 0$$

Применение формулы Грина

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \left([N]^T \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial s} l_s + H^3 \frac{\partial P}{\partial z} l_z \right) \right) d\mathcal{L} - \int\limits_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial s} H^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} H^3 \frac{\partial P}{\partial z} + [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) dS = 0$$

Условие ортогональности невязки и весовых функций

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial s} H^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} H^3 \frac{\partial P}{\partial z} + [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} \frac{\partial H}{\partial s} \right) dS = 0$$

Движение жидкости в разных зазорах

Движение жидкости в постоянном зазоре

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial s} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dS = 0$$

$$S_e \cdot \begin{pmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Движение жидкости в клиновидном зазоре

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial s} (ks + H_0)^3 \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} (ks + H_0)^3 \frac{\partial P}{\partial z} + [N]^T \frac{6\mu LU}{p_L h_{min}^2} k \right) dS = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 a_i + \lambda_3 b_i + \lambda_4 c_i \\ \lambda_2 a_j + \lambda_3 b_j + \lambda_4 c_j \\ \lambda_2 a_k + \lambda_3 b_k + \lambda_4 c_k \end{pmatrix}$$

Система уравнений МКЭ

Система уравнений МКЭ

$$GP = B$$

G – глобальная матрица жесткости
P – вектор давлений в узлах
B – вектор правых частей

Результаты численного моделирования

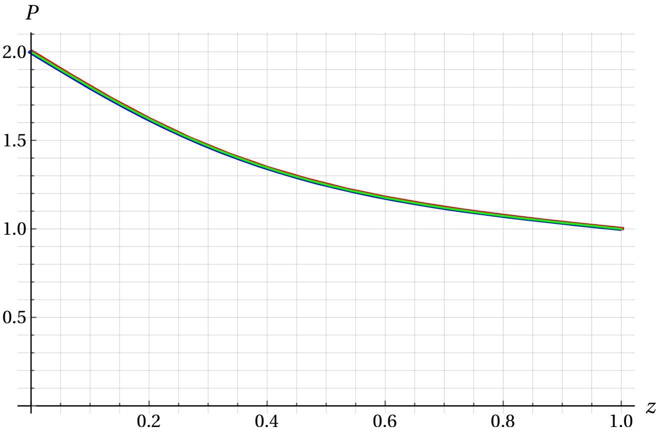
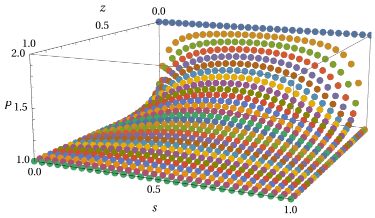
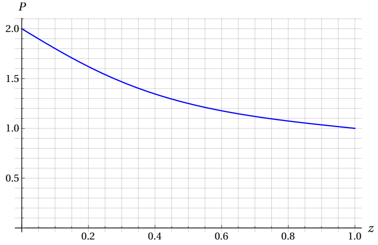


Рис. 2: Распределение давления в центральном сечении канала для сеток с различным числом элементов(16×16 (красный), 32×32 (синий) и 64×64 (зеленый))

Результаты численного моделирования



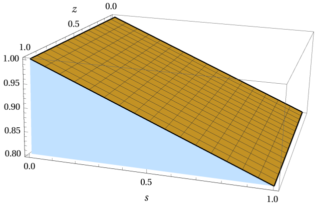
(a) Давление в слое жидкости



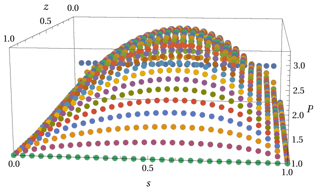
(b) Распределение давления в центральном сечении

Рис. 3: Результат для канала постоянного сечения

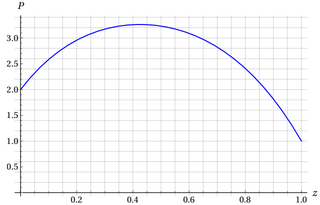
Результаты численного моделирования



(a) Высота зазора



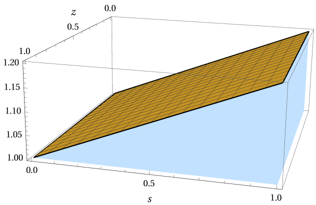
(b) Давление в слое жидкости



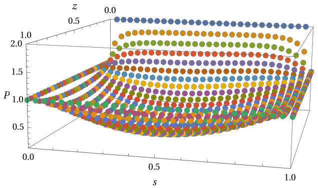
(c) Распределение давления в центральном сечении

Рис. 4: Результат для сужающегося (по направлению скорости U) канала

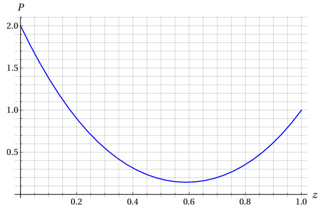
Результаты численного моделирования



(a) Высота зазора



(b) Давление в слое жидкости



(c) Распределение давления в центральном сечении

Рис. 5: Результат для расширяющегося (по направлению скорости U) канала

Выводы

Результаты

1. Качественное соответствие результатов расчетов и реальных картин течения в жидких пленках для трех типов зазоров позволяет рекомендовать использование МКЭ для решения задач теории смазки.
2. Анализ чувствительности результатов расчётов к измельчению сетки показал приемлемый уровень расхождения для рассмотренных случаев.
3. Для задач с большими градиентами давления рекомендуется повышение порядка конечных элементов.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!