Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Per determinare le coordinate del centro dobbiamo scegliere due punti $X_\infty = [(1,0,0)]$, punto improprio dell'asse x, e $Y_\infty = [(0,1,0)]$, punto improprio dell'asse y. La polare di X_∞ è

$$(1,0,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (a_{11}, a_{12}, a_{13})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

Analogamente la polare di y_∞ è

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 & P_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & P_2 \end{cases}$$

Il centro C è proprio se P_1 e P_2 non sono paralleli. Se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^*| \neq 0$$

Il centro è un punto proprio. Quindi il centro è un punto proprio se C è un ellisse o un'iperbole. Quindi in questo caso i diametri sono un fascio proprio di rette di centro C.

$$F:\ \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Equazione del fascio dei diametri. Se C è una parabola $\implies |A^*| = 0 \implies P_1$ parallelo a $P_2 \implies$ il centro è un punto improprio. $\implies$ i diametri formano un fascio improprio di equazione

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + kx_3 = 0 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{C}$$

fascio improprio dei diametri della parabola.

0.1 Asintoti di una conica

Definizione 0.1.1: Asintoti

Si dicono **asintoti** di una conica le rette proprie tangenti alla conica nei suoi punti impropri.

Osservazione: Gli asintoti di una conica sono quindi le rette polari nei suoi punti impropri. Gli asintoti sono quindi dei diametri e passano per il centro. Se il centro è proprio (cioè se C è un'ellisse o un'iperbole) gli asintoti sono le rette che congiungono il centro con i punti impropri di C.

Proposizione 0.1.1

La parabola è una conica con centro improprio e priva di asintoti.

Dimostrazione: Sia C una parabola $\implies$ C è tangente alla retta impropria in un punto che chiamiamo P_∞. Quindi la retta polare di P_∞ è r_∞ $\implies$ il polo della r_∞ è P_∞ $\implies$ il punto P_∞ è il centro della parabola. Osserviamo che C ha solo un punto improprio P_∞ $\implies$ ammette solo una tangente nel suo punto improprio. Ma t è la r_∞ $\implies$ la r_∞ non è un asintoto. ☺

Definizione 0.1.2: Coniche a centro

Diremo che l'iperbole e l'ellisse sono coniche **a centro**, mentre la parabola è detta conica **non a centro**.

0.2 Proprietà metriche

Definizione 0.2.1: Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice **equilatera** se i suoi asintoti sono ortogonali.

Proposizione 0.2.1

Una conica generale è un'iperbole equilatera se, e soltanto se, $a_{11} + a_{22} = 0$.

Esempio 0.2.1

Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$:

$$C: \; 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 1 = 0$$

sia un'iperbole equilatera.

1. $2k = -(-4) \to k = 2$
2. Sostituiamo dentro all'equazione e scriviamola in forma omogenea

$$4x_1^2 + 0x_1x_2 - 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = 0 \quad A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

   $k = 2$ dà luogo ad un'iperbole equilatera.

Definizione 0.2.2: Ortogonale al punto improprio

Diremo che la retta p di parametri direttori $[(l', m')]$ è ortogonale al punto improprio $P : [(l, m, 0)]$ se $ll' + mm' = 0$.

Definizione 0.2.3: Asse di una conica

Si dice **asse** di una conica ogni diametro ortogonale al proprio polo.

Definizione 0.2.4: Vertici

Si dicono **vertici** le intersezioni proprie della conica con i propri assi.

0.3 Condizioni analitiche

Proposizione 0.3.1

Gli assi di una conica a centro (ellisse o iperbole) sono due e sono ortogonali tra loro, a meno che non si tratti di una circonferenza generalizzata, in tal caso tutti i diametri sono assi.

Dimostrazione: Per definizione i diametri sono le polari dei punti impropri. Dato $P_\infty : [(l, m, 0)]$

$$\begin{pmatrix} l & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Il generico diametro è:

$$\begin{pmatrix} la_{11} + ma_{12} & la_{12} + ma_{22} & la_{13} + ma_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(la_{11} + ma_{12})x_1 + (la_{12} + ma_{22})x_2 + (la_{13} + ma_{23})x_3 = 0$$

$$p.d.d: \ [(-la_{12} - ma_{22}, la_{11} + ma_{12})]$$

Il polo di d è $P_\infty : [(l, m, 0)]$. d è un asse se è ortogonale a P_∞ ovvero se

$$l(-la_{12} - ma_{22}) + m(la_{11} + ma_{12}) = 0$$

$$-l^2 a_{12} + ml(-a_{22} + a_{11}) + m^2 a_{12} = 0 \qquad l^2 a_{12} + ml(a_{22} - a_{11}) - m^2 a_{12} = 0$$

$$a_{12} \left(\frac{l}{m} \right)^2 + \frac{l}{m}(a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0$$

Se $a_{12} = 0$ e $a_{22} = a_{11}$ l'equazione è risolta da tutte le coppie (l, m). Quindi se la conica è una circonferenza generalizzata tutti i diametri sono assi. I due assi hanno polo $P_\infty : [(l', m', 0)]$ e $Q_\infty : [(l'', m'', 0)]$. Sia p' l'asse associato al polo P_∞ e sia A_∞ il suo punto improprio. Sia a la retta che congiunge il centro al punto improprio $rt(C, P_\infty)$, per ipotesi $a \perp p'$. a contiene P_∞ che è il polo di p', quindi per il principio di reciprocità p' contiene il polo di a. Il polo di a è improprio (perché a è diametro) $\implies$ il punto improprio di a è A_∞, ma A_∞ è ortogonale alla direzione di $a \implies a$ è un asse. Quindi i due assi sono ortogonali. 😊

Proposizione 0.3.2

La parabola ha un unico asse e un solo vertice v. Inoltre la tangente alla parabola in v è ortogonale all'asse.

Dimostrazione: Il punto P_∞ di una parabola è $[(-a_{12}, a_{11}, 0)]$. I $p.d.d = [(-a_{12}, a_{11})]$. La direzione ortogonale è data da $[(a_{11}, a_{12})]$, quindi il punto P_∞ è $[(a_{11}, a_{12}, 0)]$. Da cui segue che l'asse è unico ed è la polare di $(a_{11}, a_{12}, 0)$. Sostituendo nell'equazione del fascio improprio dei diametri abbiamo che l'asse ha equazione:

$$a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Per il teorema dell'ordine a interseca la parabola $\mathcal{C}$ in due punti, ma uno è P_∞ quindi l'altro punto sarà l'unico vertice della parabola.
Ora dimostriamo la seconda parte del teorema. $v \in a$ che è il polo di t. Per il principio di reciprocità t contiene il polo di a, ovvero $P_\infty \in t$. Ma P_∞ è ortogonale ad $a \implies t \perp a$. 😊

Capitolo 1

Ampliamento di $A_3(\mathbb{R})$

Chiamiamo con $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ lo spazio reale affine ampliato. I punti possono essere

- **propri** A dei punti di $A_3(\mathbb{R})$
- **impropri** A_∞ direzioni delle rette, (spazi di traslazione di dimensione 1)

Le rette possono essere

- **proprie** rette di $A_3(\mathbb{R})$ ciascuna estesa con il suo punto improprio (ovvero la sua direzione)
- **improprie** sono le giaciture dei piani (spazi di traslazione di dimensione 2)

I piani possono essere

- **propri** i piani di $A_3(\mathbb{R})$ ciascuno esteso con la sua retta impropria (ovvero la sua giacitura)
- **piano improprio** A_∞ il luogo dei punti impropri

Proposizione 1.0.1

Diamo una serie di conseguenze senza dimostrazione

1. due rette parallele hanno la stessa direzione e quindi hanno lo stesso punto improprio
2. due piani paralleli hanno la stessa giacitura e quindi hanno la stessa retta impropria
3. il piano improprio contiene tutte e sole le rette improprie
4. ogni retta impropria contiene un solo punto improprio (la sua direzione)
5. ogni piano proprio contiene ∞^1 punti impropri, ovvero una retta (la sua giacitura).

1.1 Geometria analitica in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

Indichiamo con

$$\frac{\mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}}{\rho}$$

cioè l'insieme delle quaterne definite a meno di un fattore di proporzionalità reale e non nullo. In cui ρ indica la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità. Quindi consideriamo due terne equivalenti se sono proporzionali.

Proposizione 1.1.1

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento affine di $A_3(\mathbb{R})$ e sia

$$\phi : A \cup A_\infty \quad \to \quad \frac{\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}}{\rho}$$

sia $P \in A$ di coordinate (x, y, z)

$$\phi(P) = [(x, y, z, 1)]$$

sia $P \in A_\infty$ corrispondente alla direzione $[(l, m, n)]$

$$\phi(P) = [(l, m, n, 0)]$$

la mappa ϕ è una biiezione e le coordinate indotte da ϕ sono chiamate **coordinate omogenee**.

Esempio 1.1.1

$$Q = [(2, 0, 3, -2)] \qquad -2 \neq 0 \implies Q \text{ è proprio}$$

$$Q = \left[\left(\frac{2}{-2}, \frac{0}{-2}, -\frac{3}{2}, 1\right)\right] \implies Q = \left(-1, 0, -\frac{3}{2}\right)$$

$$P = [(2, 1, 0, 0)] \implies [(2, 1, 0)]$$

Definizione 1.1.1: Rappresentazione dei piani

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$$

questa è l'equazione omogenea dei piani in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ (e si ottiene in modo analogo all'equazione omogenea delle rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$).

Osservazione:

1. se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ allora il piano è proprio ed ha equazione affine

$$ax + by + cz + d = 0$$

2. se $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ allora $d \neq 0$ e otteniamo $x_4 = 0$ (che definisce il piano improprio).

Definizione 1.1.2: Rappresentazione di rette

Una retta è intersezione di 2 piani distinti

$$r : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad \rho\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

questa è la rappresentazione della generica retta di $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

- se

$$\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

  r è propria

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

- se
$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$
  ho due casi possibili
  - i due piani sono paralleli e distinti
  - uno dei due è il piano improprio e quindi $x_4 = 0$

  in entrambi i casi r è impropria

1.2 Complessificazione di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

$\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ è lo spazio ampliato e complessificato. I suoi punti sono le quaterne di
$$\frac{\mathbb{C}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}}{\rho}$$
cioè le classi di proporzionalità delle quaterne complesse. La relazione di proporzionalità è chiaramente da intendersi in $\mathbb{C}$. All'interno dello spazio definiamo

- le **rette** sono i punti tali che
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad a, a', b, b', c, c', d, d' \in C$$
  e tali che
$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$
- un **piano** è costituito dai punti
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$$

Definizione 1.2.1: Punti, rette e piani reali

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ i punti, le rette e i piani si dicono **reali** se ammettono almeno una rappresentazione con coefficienti reali. Si dicono immaginari altrimenti.

Definizione 1.2.2: Rette immaginarie di prima e seconda specie

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ una retta r immaginaria è detta **immaginaria di prima specie** se è complanare con la propria coniugata $\overline{r}$. r è detta **immaginaria di seconda specie** se è sghemba con $\overline{r}$.

Proposizione 1.2.1

1. La retta congiungente due punti immaginari e coniugati è reale
2. se una retta (o un piano) reale contiene un punto P immaginario allora contiene anche $\overline{P}$
3. se P è immaginario l'unica retta reale per P è $rt(P, \overline{P})$
4. l'intersezione tra un piano π immaginario e $\overline{\pi}$ è una retta reale
5. un piano π immaginario contiene un'unica retta reale : $\pi \cap \overline{\pi}$
6. se r è una retta immaginaria allora

(a) r è contenuta in al più un piano reale

(b) r contiene al più un punto immaginario

in particolare se r è immaginaria di prima specie il piano contenente r e $\overline{r}$ è reale e $r \cap \overline{r}$ è un punto reale. Se invece r è immaginaria di seconda specie allora r non è contenuta in alcuno piano reale e non contiene alcun punto reale.

Definizione 1.2.3: Superfici algebriche reali in $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

Una superficie algebrica reale di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ è l'insieme delle classi di autosoluzioni complesse di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \text{ove} \quad F \text{ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali in } x_1, x_2, x_3, x_4$$

il grado di F è chiamato ordine della superficie. Se F è fattorizzabile in polinomi di grado positivo la superficie si dice riducibile in componenti

$$\text{fattori di } F \leftrightarrow \text{componenti della superficie}$$

Teorema 1.2.1 Primo teorema dell'ordine

L'ordine di una superficie algebrica Σ reale è uguale al numero di punti in comune a Σ e a una qualsiasi retta r non contenuta in Σ a patto di contarli con la dovuta molteplicità.

Corollario 1.2.1

$$\text{Se } |r \cap \Sigma| > \operatorname{ord}(\Sigma) \implies r \subseteq \Sigma$$

.

Teorema 1.2.2 Secondo teorema dell'ordine

L'intersezione tra una superficie algebrica reale Σ e un piano α non componente di Σ è una curva dello stesso ordine di Σ.

Corollario 1.2.2

Se $\Sigma \cap \pi$ contiene una curva C con $\operatorname{ord}(C) > \operatorname{ord}(\Sigma) \implies \pi$ è componente di Σ.

Definizione 1.2.4

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$, data una superficie algebrica reale Σ, un punto $P \in \Sigma$ è detto **r-uplo** se la generica retta per P ha molteplicità di intersezione con Σ in P uguale a r.

- se $r = 1$ P è detto **semplice**
- se $r > 1$ P è detto **multiplo**

Teorema 1.2.3

I punti multipli di una curva algebrica reale di equazione $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sono le classi di autosoluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0 \end{cases}$$

Capitolo 2

Quadriche

Definizione 2.0.1: Quadrica

Si dice **quadrica** una superficie algebrica reale del secondo ordine. Analiticamente si indica come

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0$$

con almeno un $a_{ij} \neq 0$. Ponendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{si ha che} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

è tale che

$$Q : \ {}^tXAX = \underline{0}$$

Quindi dipende da 10 coefficienti e abbiamo ∞^9 quadriche.

Proposizione 2.0.1

Se una quadrica è riducibile, si riduce in due piani che possono essere reali e coincidenti, reali e distinti o immaginari e coniugati. Inoltre tutte le sue sezioni sono riducibili.

Dimostrazione: F è di secondo grado (Q è del second'ordine), quindi se si fattorizza in due polinomi di primo grado, essendo F reale, le possibilità sono quelle elencate. Sia $Q = \alpha \cup \beta$ e sia γ un terzo piano abbiamo che

$$Q \cap \gamma = (\alpha \cup \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$$

è unione di due rette, quindi è riducibile. ☺

2.1 Coni e cilindri

Definizione 2.1.1: Cono e cilindro

Si dice **cono** quadrico il luogo delle rette che proiettano dal punto V, chiamato **vertice**, i punti di una conica generale C, chiamata **direttrice**, dove C appartiene ad un piano non contenente il V. Se V è proprio otteniamo un **cono**, se V è improprio otteniamo un **cilindro**.

Punti multipli di una quadrica

Teorema 2.1.1
Una quadrica non ha punti tripli e i punti multipli di una quadrica sono i punti doppi.

Dimostrazione: Poiché la quadrica Q ha ordine 2, per il primo teorema dell'ordine r non può intersecare Q in un punto P con molteplicità 3. ☺

Teorema 2.1.2
Una quadrica Q ha almeno 2 punti doppi se, e soltanto se, è riducibile.

Dimostrazione: " $\Longrightarrow$ " Siano R e S due punti doppi distinti e sia $H \in Q$, ma non appartenente a $rt(R,S)$. Prima di tutto osserviamo che $rt(R,S)$ ha molteplicità di intersezione con Q almeno di $2+2=4$ $(|R|+|S|)$. Quindi per il primo teorema dell'ordine la $rt(R,S) \subseteq Q$. Allo stesso modo $rt(R,H)$ (ma analogamente anche $rt(S,H)$) ha molteplicità di intersezione con Q, almeno di $1+2=3>2 \implies$ per il primo teorema dell'ordine $rt(R,H) \subseteq Q$, ugualmente per $rt(S,H) \subseteq Q$. Chiamiamo π il piano contenente R, S e H.

$$Q \cap \pi \supseteq \underbrace{rt(R,S) \cup rt(R,H) \cup rt(S,H)}_{\text{curva } C \text{ di ordine } 3}$$

quindi poiché $\operatorname{ord}(C) > \operatorname{ord}(Q) = 2$ per il secondo teorema dell'ordine il piano π è componente di Q, per questo motivo Q è riducibile.
" $\Longleftarrow$ " Sia $Q = \alpha \cup \beta$ e sia $P \in \alpha \cap \beta$. Osserviamo che data r retta passante per P non in $\alpha \cup \beta$ abbiamo che $r \cap (Q) = r \cap (\alpha \cup \beta) = (r \cap \alpha) \cup (r \cap \beta)$, cioè l'unione dello stesso punto, quindi P è punto doppio. Di conseguenza abbiamo che ogni punto di $\alpha \cap \beta$ è doppio e abbiamo due possibili casi

- ∞^1 punti (se $\alpha \neq \beta$)
- ∞^2 punti (se $\alpha = \beta$)

☺

Teorema 2.1.3
Una quadrica ha un unico punto doppio se, e soltanto se, è un cono o un cilindro quadrico.

Dimostrazione: " $\Longrightarrow$ " Sia V l'unico punto doppio della quadrica Q. Ora dimostriamo prima di tutto che tutte le rette r contenute in Q passano per V. Sia, per assurdo, r contenuta in Q con $v \notin r$. Siano $A, B \in r$ due punti distinti. Osserviamo che la retta $rt(V,A)$ ha molteplicità di intersezione con Q pari ad almeno 1 in A e esattamente 2 in V, quindi ha molteplicità di intersezione almeno 3. Quindi per il primo teorema dell'ordine $rt(V,A) \subseteq Q$. Analogamente $rt(V,B)$ è contenuta in Q. Chiamiamo π il piano contenente r e V.

$$Q \cap \pi \supseteq \underbrace{r \cup rt(V,A) \cup rt(V,B)}_{\text{curva } C \text{ di ordine } 3}$$

poiché $\operatorname{ord}(C) > \operatorname{ord}(Q) \implies \pi \subseteq Q$. Quindi π è componente di Q, di conseguenza Q è riducibile e ha almeno ∞^1 punti doppi. **Assurdo!** Perciò tutte le rette di Q passano per V. Sia α piano non contenente V. α non è componente di Q, poiché Q è irriducibile, perciò $\alpha \cap Q$ è una conica (per il secondo teorema dell'ordine). Poiché C non si riduce in due rette C è generale. Sia ora $P \in C$ la retta $rt(P,V)$ ha molteplicità di intersezione con Q di almeno $1+2=3>\operatorname{ord}(Q)=2$, quindi per il primo teorema dell'ordine $rt(P,V) \subseteq Q$ per ogni punto di C. Di conseguenza Q è un cono o un cilindro quadrico.
" $\Longleftarrow$ " Sia Q un cono o un cilindro quadrico con vertice V. Q ha al più un punto doppio, altrimenti sarebbe riducibile. Sia r una retta non contenuta in Q e passante per V, l'unico punto di intersezione è $r \cap Q = V$. Poiché per il primo teorema dell'ordine la somma delle intersezioni (contate con la dovuta molteplicità) è 2, segue che v è doppio. ☺

2.2 Condizioni analitiche

Definizione 2.2.1

Una quadrica $Q \in \tilde{A}_3(\mathbb{C})$ si dice

- **generale** se è priva di punti doppi
- **semplicemente degenere** se ha 1 unico punto doppio (cono o cilindro)
- **doppiamente degenere** se ha ∞^1 punti doppi
- **tre volte degenere** se ha ∞^2 punti doppi

Inoltre le quadriche doppiamente e tre volte degeneri sono **riducibili**.

Proposizione 2.2.1

I punti doppi di una quadrica $Q : {}^tXAX = \underline{0}$ sono le classi di autosoluzioni del sistema omogeneo $AX = \underline{0}$.

Teorema 2.2.1

Sia la quadrica $Q : {}^tXAX = \underline{0}$. Abbiamo le seguenti possibilità

- Se $\rho(A) = 4$, allora Q è generale
- Se $\rho(A) = 3$, allora Q è semplicemente degenere
- Se $\rho(A) = 2$, allora Q è doppiamente degenere
- se $\rho(A) = 1$, allora Q è tre volte degenere

Sezioni piane riducibili

Dati data una quadrica Q e un piano π abbiamo $C = Q \cap \pi$, se $\pi \nsubseteq Q$, allora C è una conica per il secondo teorema dell'ordine.

Note:-

Se Q è una quadrica riducibile, allora C è riducibile.

Teorema 2.2.2

Sia Q una quadrica irriducibile (cioè cono, cilindro o quadrica generale) e sia $P \in Q$ e sia α un piano contenente P. Allora

- se P è doppio, allora P è doppio anche per $C = Q \cap \pi$, quindi C è riducibile
- se P è un punto semplice, allora P è doppio per $C = Q \cap \alpha$ se, e soltanto se, α è il piano tangente in P a Q, quindi C è riducibile

Note:-

Se Q è generale, allora le sezioni piane di $Q \cap \alpha$ sono riducibili se, e soltanto se, α è un piano tangente a Q.

2.3 Conica impropria di una quadrica irriducibile

Cono o cilindro

Proposizione 2.3.1

Sia Q un cono e sia $C_\infty = Q \cap \pi_\infty$ la sua conica impropria, allora

1. C_∞ è una conica generale
2. se C_∞ è reale, il cono ha generatrici reali ed è detto **a falda reale**
3. se C_∞ non ha punti reali, allora l'unico punto reale di Q è il vertice V del cono, quindi il cono ha generatrici a coppie immaginarie e coniugate ed è detto **privo di falda reale**

Proposizione 2.3.2

La conica impropria $C_\infty = Q \cap \pi_\infty$ di un cilindro Q è riducibile.

Dimostrazione: V, vertice del cilindro, appartiene a π_∞, quindi V è doppio anche in $Q \cap \pi_\infty = C$, di conseguenza C ha un punto doppio ed è riducibile. 😃

Classificazione affine dei cilindri

Un cilindro Q è detto

1. **iperbolico**, se C_∞ è unione di due rette reali e distinte
2. **ellittico**, se C_∞ è unione di due rette immaginarie e coniugate
3. **parabolico**, se C_∞ è unione di una retta contata 2 volte