Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1 **Spazi affini** Pagina 4

1.1 $A_n(K)$, spazio affine di dimensione n 4

1.2 Proprietà di punti, rette e piani 7

Capitolo 1

Spazi affini

1.1 $A_n(K)$, spazio affine di dimensione n

Definizione 1.1.1: Spazio affine

Si dice **spazio affine** di dimensione n sul campo K, e si indica $\mathring{A}_n(K)$, la struttura costituita da

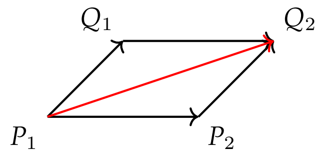
1. un insieme non vuoto A, detto insieme dei punti
2. uno spazio vettoriale $V_n(K)$
3. un'applicazione
$$f: \quad A \times A \to V_n(K)$$
con le seguenti proprietà
   (a) $\forall P \in A \ e \ \forall v \in V \quad \exists! \ Q \in A: \quad f(P,Q) = \vec{PQ} = v$
   (b) $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \quad \forall P, Q, R \in A$

Proposizione 1.1.1
In $A_n(K)$, per ogni P, Q e $R \in A$

1. il vettore $\vec{RR} = \underline{0}$
2. $\vec{PQ} = \vec{PR} \iff Q = R$
3. $\vec{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
4. $v = \vec{PQ} \implies -v = \vec{QP}$
5. $\forall P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in A$ risulta $\vec{P_1P_2} = \vec{Q_1Q_2} \iff \vec{P_1Q_1} = \vec{P_2Q_2}$

Dimostrazione: Dimostriamo ogni punto separatamente

1. $\vec{RR} + \vec{RR} = \vec{RR}$ perciò $2\vec{RR} = \vec{RR} \iff \vec{RR} = \underline{0}$
2. posto $v = \vec{PQ}$ allora $v = \vec{PR}$, ma $\exists! \ Q: \ \vec{PQ} = v \implies R = Q$
3. per la proprietà 1 $\vec{RR} = \underline{0} \implies$ per l'unicità di $Q: \vec{PQ} = \underline{0} \implies Q = P$
4. $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \underline{0} \implies \vec{PQ} = -\vec{QP}$
5. ovvio, essendo $\vec{P_1P_2} + \vec{P_2Q_2} = \vec{P_1Q_2} = \vec{P_1Q_1} + \vec{Q_1Q_2}$



☺

Definizione 1.1.2: Sottospazio affine

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio affine** di dimensione $m \leq n$ una struttura data da

1. $\emptyset \neq A' \subseteq A$, detto **sostegno del sottospazio affine**
2. $V_m(K)$ sottospazio di $V_n(K)$
3. la restrizione dell'applicazione f ad $A' \times A'$ troncata a $V_m(K)$, purché questa sia ancora un'applicazione che gode delle proprietà elencate nella definizione di spazio affine

Definizione 1.1.3: Traslazione

Fissato un vettore $v \in V_n(K)$ si dice **traslazione**, individuata da v, la corrispondenza

$$t_v : A \longrightarrow A \quad e \quad P \longrightarrow Q$$

che associa a un punto $P \in A$ il punto Q traslato di P mediante il vettore v.

Osservazione: $\forall v \in V_n(K)$ la mappa t_v è una biiezione di A, insieme di punti di $(A, V_n(K), f)$. E l'inversa di t_v è t_{-v}.

Definizione 1.1.4: Sottospazio lineare

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio lineare** l'insieme dei traslati di un punto P, detto **origine**, mediante i vettori $v \in V_h(K) \leq V_n(K)$, con h detta dimensione del sottospazio lineare. Inoltre si denota con $S_h = [P, V_h(K)]$ il sottospazio lineare dato dal punto P e dallo spazio di traslazione V_h.

Definizione 1.1.5: Punti, rette, piani e iperpiani

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dicono

- **punti** i sottospazi lineari di dimensione 0

$$S_0 = [P, \{\underline{0}\}] = \{P\}$$

- **rette** i sottospazi lineari di dimensione 1

$$S_1 = [P, \mathcal{L}(v)] \quad \text{con } v \neq \underline{0} \quad e \quad v \in V_n(K)$$

- **piani** i sottospazi lineari di dimensione 2

$$S_2 = [P, \mathcal{L}(v_1, v_2)] \quad \text{con } v_1, v_2 \neq \underline{0} \quad e \quad v_1, v_2 \in V_n(K)$$

- **iperpiani** sono i sottospazi di dimensione $n - 1$

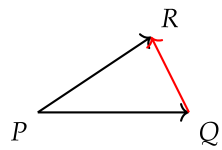
Proposizione 1.1.2

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di dimensione h sottospazio di $A_n(K)$.

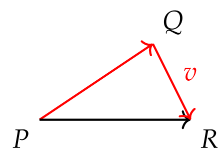
1. siano $Q, R \in S_h \implies \vec{QR} \in V_h(K)$
2. se $Q \in S_h$ e $v \in V_h$, allora $R = t_v(Q) \in S_h$

Dimostrazione: Dimostriamo entrambi i punti separatamente

1. Per ipotesi $Q \in S_h$, quindi $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h(K)$. $v = \vec{PQ} \in V_h$ e analogamente $\vec{PR} \in V_h$. Ma allora $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h$.

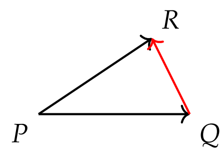


2. Poiché $Q \in S_h$, $\vec{PQ} \in V_h$. Allora $\vec{PR} + \vec{QR} = \vec{PQ} + \vec{v} \in V_h \implies \vec{PR} \in V_h$. Posto $w = \vec{PR}$, $t_w(P) = R$ con $w \in V_h \implies R \in S_h$.



Proposizione 1.1.3
Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di $A_n(K)$. Ogni punto di S_h può essere scelto come origine di S_h. Cioè dato $Q \in S_h$ abbiamo che $[Q, V_h(K)] = S_h$.

Dimostrazione: Sia $R \in S_h$. Allora $\vec{PR} \in V_n$ e $\vec{PQ} \in V_n$. Quindi $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h \implies \vec{QR} \in V_h$.



Detto $w = \vec{QR}$ abbiamo che $R = t_v(Q)$. R è traslato di Q tramite il vettore $w \in V_h \implies R \in [Q, V_h]$, quindi

$$S_h \subseteq [Q, V_h]$$

con lo stesso ragionamento scambiamo P e Q si dimostra che

$$[Q, V_h] \subseteq [P, V_h] = S_h$$

e ciò vale solo se $S_h = [Q, V_h]$.

Proposizione 1.1.4
Siano S_h e S_k due sottospazi lineari di $A_n(K)$. Allora $S_h \subseteq S_k \iff S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e $V_h \leq V_k$.

Dimostrazione: " $\implies$ " Ovviamente $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Potremo scrivere $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. Sia $v \in V_h$ e sia $Q = t_v(P) \in S_h \subseteq S_k \implies Q \in S_k$ e sia $Q = t_v(P)$ ovvero $\vec{PQ} = v \in V_k \implies V_h \leq V_k$.
" $\impliedby$ " Sia $P \in S_h \implies [P, V_h] \subseteq [P, V_k]$ (poiché per ipotesi $V_h \subseteq V_k$) $[P, V_h] = S_h$ e $[P, V_k] = S_k \implies S_h \subseteq S_k$.

Proposizione 1.1.5

Siano S_h e S_k sottospazi lineari di $A_n(K)$. Sia $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Allora

$$S_h \cap S_k = [P, V_h \cap V_k]$$

Dimostrazione: Sia $Q \in S_h \cap S_k$. Osserviamo che $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h$ (perché $Q \in S_h$). Ma $Q = t_v(P)$ con $v \in V_k$ (perché $Q \in S_k$). Quindi $Q \in [P, V_h \cap V_k]$ perché $v \in V_h \cap V_k$, cioè

$$S_h \cap S_k \subseteq [P, V_h \cap V_k]$$

Viceversa dato $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h \cap V_k \implies Q$ appartiene sia a S_h che ad S_k, quindi $Q \in S_h \cap S_k$, ovvero

$$[P, V_h \cap V_k] \subseteq S_h \cap S_k$$

$$\implies [P, V_h \cap V_k] = S_h \cap S_k$$

😄

Definizione 1.1.6: Parallelismo tra sottospazi

Due sottospazi lineari, $S_p = [P, V_p]$ ed $S_q = [Q, V_q]$, di $A_n(K)$ si dicono **paralleli**, e si scrive $S_p || S_q$, se i rispettivi spazi di traslazione sono confrontabili, ovvero quando $V_p \subseteq V_q$, oppure $V_q \subseteq V_p$.

Osservazione 1: La relazione di parallelismo non è transitiva. E' invece riflessiva e simmetrica. Non è quindi una relazione d'equivalenza.

Osservazione 2: Due sottospazi lineari della stessa dimensione sono paralleli se, e soltanto se, hanno lo stesso spazio di traslazione. Quindi la relazione di parallelismo considerata tra spazi della stessa dimensione è una relazione d'equivalenza.

Proposizione 1.1.6

Due sottospazi lineari paralleli e di uguale dimensione o coincidono oppure hanno intersezione vuota.

Definizione 1.1.7

- Sia $S = [P, V_1]$ una retta. Lo spazio V_1 si dice **direzione** della retta S. Quindi due rette sono parallele se, e soltanto se, hanno la stessa direzione
- Sia $\pi = [P, V_2] \subseteq A_n(K)$ con $n \geq 2$. Lo spazio V_2 è detto **giacitura** di π. Quindi due piani sono paralleli se, e soltanto se, hanno la stessa giacitura.
- Tre o più punti si dicono **allineati** se esiste una retta che li contiene tutti.
- Due o più rette si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene tutte.

1.2 Proprietà di punti, rette e piani

Proposizione 1.2.1

In $A_n(k)$, con $n \geq 2$

1. per ogni due punti distinti passa un'unica retta
2. per due rette distinte, parallele o incidenti, passa un unico piano
3. due rette complanari, aventi intersezione vuota, sono parallele
4. per un punto passa un'unica retta parallela a una retta data (V Postulato di Euclide)

5. per un punto passa un unico piano, parallelo ad un piano dato
6. per tre punti, non allineati, passa un unico piano
7. una retta, avente due punti distinti in un piano, giace nel piano
8. per un punto passano almeno due rette distinte

Proposizione 1.2.2

In $A_3(K)$,

1. una retta e un piano, aventi intersezione vuota, sono paralleli
2. due piani, aventi intersezione vuota, sono paralleli
3. due piani distinti, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta per quel punto
4. per una retta passano almeno due piani distinti

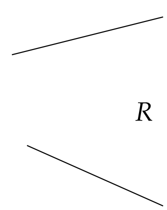
Definizione 1.2.1: Rette sghembe

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, due rette non complanari si dicono **sghembe**.

Proposizione 1.2.3

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, esistono due rette r_1 e r_2 sghembe tra loro. Inoltre due rette sghembe r_1 e r_2, sono contenute su due piani π_1 e π_2 paralleli tra loro e distinti.

Dimostrazione: Per ipotesi, $A_n(K)$ ha dimensione almeno 3, quindi esistono nello spazio vettoriale $V_n(K)$ almeno 3 vettori linearmente indipendenti. Siano essi u, v, w. Siano inoltre, P un punto di A e Q il traslato di P mediante il vettore u ($Q = t_u(P)$). Dimostriamo che le rette $r = [P, \mathcal{L}(v)]$ ed $s = [Q, \mathcal{L}(w)]$ sono sghembe. Se infatti, esistesse un piano $\pi = [P, V_2]$ che le contiene entrambe, lo spazio di traslazione di π conterrebbe 3 vettori linearmente indipendenti, cioè v, w e $u = \vec{PQ}$ e ciò è un **assurdo!**



☺