Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Proposizione 0.0.1

Siano α r rispettivamente un piano e una retta di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con α non ortogonale a r. Allora $\exists!$ piano $\beta : \beta$ ortogonale α e $r \subseteq \beta$.

Dimostrazione: Dimostriamo l'esistenza: sia $\beta = [P, V_1 + V_2 orto]$ dove $r = [P, V_1]$ e $\alpha = [Q, V_2]$.

1. β è un piano perché $\dim(V_1 = 1)$, $\dim(V_2 orto) = 1$ e $V_1 \neq V_2 orto$ (poiché $\alpha nonortor$) $\implies \dim(V_1 + V_2 orto) = 2 \implies \beta$ è un piano. Per costruzione abbiamo che $\beta \perp \alpha$, infatti lo spazio di traslazione di β è:

$$V_1 \oplus V_2^\perp \supseteq V_2^\perp \text{ e } V_2 \text{ è lo spazio di traslazione di } \alpha$$

inoltre r

☺

Capitolo 1

Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

Definizione 1.0.1

In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ si dice **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia $[0, \mathcal{B}]$:

- O è un punto di $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ è una base ortonormale

Note:-

1. In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ $(n = 2) \implies \mathcal{B} = (i, j)$
2. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ $(n = 3) \implies \mathcal{B} = (i, j, k)$

Definizione 1.0.2: Ortogonalità fra rette

Siano r_1, r_2 due rette di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e sia $r_1 = [P, f(v)]$ $\quad v = l \cdot i + m \cdot j$, analogamente $r_2 = [P, f'(v)]$ $\quad v' = l' \cdot i + m' \cdot j$

$$v \perp v' \iff l \cdot l' + m \cdot m' = 0$$

se r_1 ha equazione $ax + by + c = 0$ e r_2 ha equazione $a'x + b'y + c' = 0$ allora $P.d.r_1 = [(-b, a)]$, e $P.d.r_2 = [(-b', a')]$

$$-b \cdot (-b') + a \cdot a' = bb' + aa' = 0$$

Se abbiamo r_1, r_2 rette in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(l, m, n)]$, $P.d.r_2 = [(l', m', n')]$ $r_1 \perp r_2 \iff v_1$ generatore della direzione di $r_1 \perp v_2$ generatore della direzione di r_2.

$$v_1 = li + mj + nk \qquad v_2 = l'i + m'j + n'k$$

$$v_1 \perp v_2 \iff r_1 \perp r_2 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

Analogamente se r_1, r_2 sono rette in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(x_1, x_2, ..., x_n)]$, $P.d.r_2 = [(x'_1, x'_2, ..., x'_n)]$

1.1 Direzione $\perp$ ad un iperpiano

Proposizione 1.1.1

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a r.

Dimostrazione: $P.d.r = [(-b, a)]$ e abbiamo che $(a, b) \cdot (-b, a) = 0$ oppure $(a \cdot i + b \cdot j) \cdot (-b \cdot i + a \cdot j) = 0 \implies [(a, b)] \perp r$. 😊

Proposizione 1.1.2
Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $[(a,b,c)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a π.

Dimostrazione: Sia $v \in V_2$ (π ha spazio di traslazione o V_2). Se $v = (x,y,z) \implies ax + by + cz = 0 \iff (x,y,z) \cdot (a,b,c) = 0 \implies (a,b,c) \perp v \ \forall v \in V_2$ 😊

Più in generale: sia S_{n-1} un iperpiano in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 \implies [(a_1, a_2, \ldots, a_n)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a S_{n-1}.

Proposizione 1.1.3 Ortogonalità tra piani
Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad \beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $\alpha \perp \beta \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff V_2 \supseteq V_2'^{\perp}$ dove V_2 è la giacitura di α e V_2' è la giacitura di β.

$$V_2'^{\perp} = [\mathcal{L}((a',b',c'))] \iff (a',b',c') \in V_2$$

$(x,y,z) \in V_2 \iff ax + by + cz = 0$ e quindi $(a',b',c') \in V_2 \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$ 😊

Proposizione 1.1.4 Ortogonalità tra retta e piano
Siano r : con $P.d.r = [(l,m,n)]$ e sia α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ una retta e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $r \perp \alpha$ se e soltanto se $[(a,b,c)] = [(l,m,n)]$

Dimostrazione: $r \perp \alpha \iff V_1 = V_2^{\perp}$ dove V_1 è la direzione della retta e V_2 è la giacitura di α.

$$V_1 = \mathcal{L}((l,m,n)) = V_2^{\perp} = \mathcal{L}((a,b,c)) \iff [(a,b,c)] = [(l,m,n)]$$

😊

Definizione 1.1.1: Distanza tra 2 punti in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Q = (x_1' x_2', \ldots, x_n')$. La distanza tra P e Q è la norma del vettore $\vec{PQ}$

$$d(P,Q) = ||\vec{PQ}|| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$

$$\vec{PQ} = (x_1' - x_1)e_1 + \ldots + (x_n' - x_n)e_n$$

$$||\vec{PQ}|| = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2}$$

Definizione 1.1.2: Caso $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

$$P = (x,y) \quad Q = (x',y')$$

$$\vec{PQ} = (x' - x)i + (y' - y)j$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Caso $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ da aggiungere

Definizione 1.1.3: Distanza tra punto e retta

Siano $P = (x_0, y_0)$ e $r = [Q, V_1]$ rispettivamente un punto e una retta in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Definiamo la **distanza tra il punto P e la retta r** come la distanza tra P e il punto H, piede della perpendicolare per P a r (cioè l'intersezione tra r e la retta perpendicolare a r passante per P).

Determiniamo $||\vec{PH}||$. Se r ha equazione $ax+by+c=0$ allora $V_1^{\perp} = \mathcal{L}(a\cdot i + b \cdot j)$.

$$\text{Posta} \quad n = [P, V_1^{\perp}] \implies n = [P, \mathcal{L}(ai+bj)]$$

$$H = n \cap r \text{ è la proiezione di } P \text{ su } r. \text{ (è l'intersezione tra } r \text{ e la retta per } P^{\perp}\text{).}$$

Sia $P' = (x', y')$ un generico punti su r.

$$ax' + by' + c = 0$$

PH è la componente di PP' lungo v. $PP' = (x'-x_0)i + (y'-y_0)j$.

$$\vec{PH} = \frac{PP' \cdot v}{v \cdot v} v$$

$$d(P,H) = d(P,r) = ||\vec{PH}|| = ||(\frac{\vec{PP'} \cdot v}{v \cdot v} v)|| = [...] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Da completare

Definizione 1.1.4: Distanza punto piano

Siano $P = (x_0, y_0, x_0)$ e $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ un punto e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Definiamo **la distanza** $d(P,\alpha)$ come la distanza tra P e il punto H intersezione tra α e la retta per $p \perp \alpha$.

Dimostrazione: $d(P,\alpha) = d(P,H) = ||\vec{PH}||$. Analogamente al caso piano abbiamo che

$$d(P,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

☺

Definizione 1.1.5: Distanza tra un punto e una retta in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Siano P e $r = [Q, V_1]$ un punto e una retta in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Sia α il piano per P ortogonale a r e sia H l'intersezione tra r e α. Definiamo $d(P,r) = d(P,H) = ||\vec{PH}||$.

Esempio 1.1.1

In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ determiniamo la distanza di $P = (3,0,1)$ da $r : \begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad P.d.r = [(-1,1,0)] = [(a,b,c)] \qquad \alpha : -x + y + 0 \cdot z + d = 0$$

$$\text{Imponiamo il passaggio per } P: \quad -3+0+d=0 \quad d=3 \quad \alpha : -x+y+3=0$$

$$\alpha \cap r : \begin{cases} x+y=1 \\ -x+y+3=0 \\ z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ 0x+2y=-2 \\ z=2 \end{cases} \implies x=2; \;\; y=-1$$

$$H:(2,-1,2) \quad d(P,r) = ||\vec{PH}|| = \vec{PH} = (-1)i + (-1)j + k = -1 - j + k$$

Definizione 1.1.6: Retta di minima distanza

Si dice **retta di minima distanza** tra due rette r, s sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ una retta ortogonale e incidente sia a r che a s.

Proposizione 1.1.5

La retta di minima distanza tra r e s esiste ed è unica.

Definizione 1.1.7: Distanza tra due rette sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definiamo **la distanza tra due rette r e s sghembe in** $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ come la distanza tra i punti R e S ottenuti intersecando la retta t di minima distanza tra r e s con r e s.

Definizione 1.1.8: Assi

In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ dati due punti P, Q, si dice **asse** del segmento $\overline{PQ}$ la retta passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento $\overline{PQ}$.

Proposizione 1.1.6

L'asse di un segmento $\overline{PQ}$ è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $||\vec{PH}|| = ||\vec{QH}|| \quad \forall H \in a$ (asse di $\overline{PQ}$).

$$\vec{PH} = \vec{PM} + \vec{MH} \quad e \quad \vec{QH} = \vec{QM} + \vec{MH}$$

$$||\vec{PH}|| = \sqrt{||PM||^2 + ||MH||^2} \quad ||\vec{QH}|| = \sqrt{||QM||^2 + ||MH||^2} \quad \text{ma} \quad ||PM|| = ||QM||$$

$$||\vec{PH}|| = \sqrt{||PM||^2 + ||MH||^2} = \sqrt{||QM||^2 + ||MH||^2} = ||\vec{QH}||$$

Esempio 1.1.2

Determiniamo l'asse di $P = (1, 1)$ e $Q = (2, -4)$. Il punto $M = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\vec{PQ} = (2-1)i + (-4-1)j = 1 - 5j = (1, -5)$$

$r \perp \vec{PQ}$ per M è del tipo

$$x - 5y + c = 0 \quad \text{e passa per } M$$

$$\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \quad c = -9 \implies r: \; x - 5y - 9 = 0$$

Alternativamente

$$r: \; H \in r \iff d(H, P) = d(H, Q)$$

se $H = (x, y)$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \implies r: \; 2x - 10y - 18 = 0$$

Definizione 1.1.9: Piano assiale

In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si dice **piano assiale** del segmento $\overline{PQ}$ il piano α passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento $\overline{PQ}$.

Proposizione 1.1.7

Il piano assiale del segmento $\overline{PQ}$ è il luogo dei punti equidistanti tra P e Q.

1.2 Circonferenze in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

Definizione 1.2.1: Circonferenza

Dato un punto $C = (x_0, y_0)$ in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e dato r numero reale positivoSi dice circonferenza di centro C e raggio r il luogo dei punti aventi distanza r da C.

Sia $P = (x, y)$ appartenente alla circonferenza di centro C e raggio r.

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 + (y - y_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Proposizione 1.2.1 Equazione cartesiana di una circonferenza

Tutte e sole le circonferenze si rappresentano come $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - c > 0$ e avremo che $C = (-a, -b)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Note:-

Se r fosse 0, $a^2 + b^2 - c = 0 \implies x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ è rappresentata solo da $C = (-a, -b)$.

Proposizione 1.2.2

Per tre punti non allineati in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ passa un unica circonferenza.

1.3 Sfere in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.3.1: Sfera

Sia $C : (x_0, y_0, z_0)$ e sia r un numero reale positivo. Si dice **sfera** di raggio C e di centro r il luogo dei punti aventi distanza r da C.

Sia $P : (x, y, z)$ appartenente alla sfera, allora

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Note:-

Una sfera è una superficie algebrica reale (Analogamente una circonferenza è una curva algebrica reale).

Proposizione 1.3.1 Equazione cartesiana di una sfera

Tutte le sfere si rappresentano come $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ con $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ e avremo che $C = (-a, -b, -c)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Note:-

Se $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ è realizzata dal solo centro $C = (-a, -b, -c)$.

Proposizione 1.3.2

Siano A, B, C, D quattro punti non complanari di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Per A, B, C, D passa un'unica sfera

Il centro della sfera si trova intersecando i piani assiali dei quattro punti. Il raggio è la distanza del centro da uno qualsiasi dei quattro punti.

1.4 Circonferenze in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.4.1: Circonferenza in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Dati un piano α, un suo punto C e un numero reale positivo r. Si dice **circonferenza** di raggio C e raggio r il luogo dei punti di α aventi distanza r da C.

Note:-

Una circonferenza appartiene a infinite sfere. Quindi per tre punti non allineati passano infinite sfere.

Proposizione 1.4.1

Tutte e sole le circonferenze di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ammettono una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{piano } \alpha \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r'^2 \end{cases}$$

$$d(C', \alpha) < r' \quad \text{dove} \quad C' = (x_0, y_0, z_0) \qquad \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < r'$$

ci sono infinite rappresentazioni ma solo una con il centro C della circonferenza coincidente con il centro C' della sfera.

Il centro della circonferenza C si trova intersecando il piano α con la retta per il centro della sfera C' perpendicolarmente ad α. Utilizziamo il teorema di Pitagora. Conosciamo $\overline{CC'}$ e conosciamo anche il raggio r' della sfera. Quindi

$$r = \sqrt{r'^2 - \overline{CC'}^2}$$

Note:-

Una circonferenza si può ottenere anche intersecando altre superfici superfici con un piano.

Esempio 1.4.1

Si consideri

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 3 \quad \longrightarrow \quad \alpha \end{cases} \qquad \text{è una circonferenza?}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 7 \quad \text{e siccome } z = 3 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \text{che descrive una circonferenza.}$$

Ed è una curva algebrica reale di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$.

Capitolo 2

Ampliamento di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

In $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ date due rette r e s o sono parallele o si intersecano in un punto. Se sono parallele

$$r = [P, V_1] \ e \ s = [Q, W_1] \implies V_1 = W_1$$

quindi la direzione V_1 è l'elemento comune a tutte le rette parallele a r. Poiché il parallelismo è una relazione di equivalenza tra le rette del piano.

2.1 Ampliamento (proiettivo) di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

Definizione 2.1.1: $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

- Punti propri che sono tutti e soli i punti di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$
- I punti impropri che sono le direzioni delle rette del piano ovvero i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1.

Da cui il nome proprio/improprio per i fasci di rette del piano.

Definizione 2.1.2: Rette

- le rette proprie: le rette di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ unite al loro punto improprio;
- una retta impropria: tutti i punti impropri (r_∞)

Sia $P_\infty \in r_\infty \implies$ non definiamo il vettore $\vec{QP_\infty}$ con Q proprio/improprio.
La funzione $f : A \times A \longrightarrow V_2($
$RR)$ **da completare**

Proposizione 2.1.1
Due rette distinte di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ sono sempre incidenti.

Dimostrazione: Siano r e s due rette distinte di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

1. r e s sono proprie e non parallele tra loro $\implies$ r è incidente a s in $\mathring{A}_2(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ e il punto improprio di r è diverso da quello di s.
2. r e s sono proprie ma r è parallelo a s.
$r \cap s = \emptyset$ in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ ma r e s hanno la stessa direzione $\implies$ lo stesso punto improprio.
3. r è propria e $s = r_\infty$.
$r \cap s = r \cap r_\infty$ è il punto improprio di r.

☺

Completare con il quinto assioma e la spiegazione di a due tilda di r

Note:-
Tutte le rette proprie contengono un solo punto improprio e r_∞ contiene solo punti impropri.

Proposizione 2.1.2
Per due punti distinti di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica retta.

Dimostrazione: Siano A e B i due punti distinti considerati:

1. A, B sono entrambi propri
$$\implies \exists! r \in \mathring{A}_2(\mathbb{R}) \text{ per } A \ e \ B$$
$$\exists! r \quad \text{propria per} A \ e \ B$$
la r_∞ non contiene A e B $\implies \exists!\ r$ per A e B.
2. A è proprio e B è improprio (o viceversa). $\implies B$ è la direazione $V_1 \implies \exists!$ retta per **completare**
3. A e B sono entrambi impropri. Nessuna retta propria li contiene entrambi (ogni retta propria ha solo 1 punto improprio) $\implies A, B \in r_\infty$ che è l'unica che li contiene entrambi.

☺

2.2 Geometria analitica in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

Enti definiti "a meno di un fattore" di proporzionalità:

1. equazioni di rette in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$
$$ax + by + c = 0 \qquad \text{se } [(a, b, c)] = [(a', b', c')]$$
$$\implies r' : \ a'x + b'y + c' = 0 \qquad \text{è coincidente a } r$$
2. $[(l, m)] = P.d.r$ è come classe di equivalenza

Indichiamo con ρ la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità su $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$

$$\frac{\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}}{\rho} = \{[(x, y, z)] : \ x, y, z \in \mathbb{R}^3 \ e \ (x, y, z) \neq \underline{0}\}$$

Quest'insieme definirà le coordinate dei punti.

$$\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R}) = \mathring{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathring{A}_\infty$$

Fissiamo il riferimento affine in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

$$\phi : \ \mathring{A}_2 \cup \mathring{A}_\infty \to \frac{\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}}{\rho}$$

- se P è proprio (x, y) : $\phi(x, y) = [(x, y, 1)]$
- se P è improprio $P : [(l, m)] \quad \phi(P) = [(l, m, 0)]$

Proposizione 2.2.1
ϕ è una biiezione tra $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}}{\rho}$

Osservazione: Sia P di coordinate omogenee $[(x_1, x_2, x_3)]$ con $x_3 \neq 0$

$$\left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)\right]$$

P è proprio $P = (x, y) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$
Sia invece $x_3 = 0$

$$P = [(x_1, x_2, 0)] \qquad [(l, m)] = [(x_1, x_2)]$$

P non ha coordinate affini (non omogenee) $\implies$ è improprio.

2.3 Rappresentazione delle rette in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

Sia $RA[O, B = (e_1, e_2)]$ un riferimento affine di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$. In $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ l'equazione cartesiana di una retta è $ax+by+c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Sui punti propri $P = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)\right]$ dovrà valere $ax + by + c = 0$

$$a\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + b\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + c = 0 \qquad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Il punto improprio di $ax + by + c = 0$ è $[(-b, a, 0)]$. Sostituiamo in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ $[(-b, a, 0)]$

$$a(-b) + ba + 0 = 0$$

$\implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è l' equazione omogenea di una retta r di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$.
Siano ora $(a, b) = (0, 0)$, allora $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ si riduce a $0x_1 + 0x_2 + cx_3 = 0$ con $c \neq 0$, $cx_3 = 0$, $x_3 = 0$ è la r_∞ perché rispettata da tutti e soli i punti impropri. L'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta, in ogni caso, una retta di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$. Di conseguenza è l'equazione cartesiana di una retta di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$.

2.4 Complessificazione di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

$\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ = piano affine ampliato e **complessificato**.

Osservazione:

- **punti**: terne ($\neq \underline{0}$) di numeri complessi determinati a meno di un fattore di proporzionalità complesso e non nullo.

$$\frac{\mathbb{C}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

- **rette**: luogo delle autosoluzioni (soluzioni non nulle) di un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq \underline{0} \ e \ a, b, c \in \mathbb{C}$$

Definizione 2.4.1: Punti e rette in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$

In $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ si dicono:

- **punti** e **rette reali** i punti e le rette che ammettono una rappresentazione reale
- **punti** e **rette immaginari** i punti e le rette che ammettono solo rappresentazioni immaginarie

Esempio 2.4.1
$P : [(4, 3 + i, 1)]$ è immaginario.

Dimostrazione: Sia $a + ib \in \mathbb{C}$: $P = (4(a + ib), (3 + i)(a + ib), a + ib)$ con x_1, x_2, x_3 reali, quindi

$x_3 = a + ib \implies x_3 = a$. $P = [(4a, (3+i)a, a)]$, ma $a \neq 0$ $(3+i)a$ non è reale $\implies P$ non è reale. ☺

Definizione 2.4.2: Coniugati

Si dicono **coniugati** due enti (punti, rette ecc...) che ammettono rappresentazioni coniugate.

Proposizione 2.4.1
Un ente geometrico (punto, retta, curva ecc...) è reale se, e soltanto se, coincide con il proprio coniugato.

Note:-
Una retta reale ha infiniti punti immaginari

Esempio 2.4.2
$x_1 = 0 \implies [(0, x_2, x_3)] \implies [(0, a+ib, 1)]$ sono tutti immaginari.

Osservazione: Se un'equazione reale è realizzata da un punto $P \implies \overline{P}$ è soluzione se r è reale e $P \in r \implies \overline{P} \in \overline{r} = r$.

Proposizione 2.4.2
La retta che congiunge due punti P e $\overline{P}$ immaginari e coniugati è reale.

Dimostrazione: $P \in r$ e $\overline{P} \in r$ per costruzione. Poiché $P \neq \overline{P}$ $r = rt(P, \overline{P})$. Poiché $P \in r \implies \overline{P} \in \overline{r}$ e $\overline{P} \in r \implies \overline{\overline{P}} \in \overline{r}$, ma $\overline{\overline{P}} = P \in \overline{r}$. $\implies \overline{P}$ e $P \in \overline{r} \implies \overline{r} = rt(P, \overline{P})$. Per l'unicità della retta per P e $\overline{P}$ $\implies r = \overline{r} \implies r$ è reale. ☺

Proposizione 2.4.3
Per un punto P immaginario ($P \neq \overline{P}$) passa un'unica retta reale.

Dimostrazione: La retta $rt(P, \overline{P})$ è reale per la proposizione precedente. Supponiamo per assurdo che $\exists\, s \neq rt(P, \overline{P})$ reale per P. $\implies \overline{P} \in s$ poiché s è reale. $s = rt(P, \overline{P})$ che è **assurdo!**. Quindi esiste ed è unica la retta r reale per P. ☺

Proposizione 2.4.4
Due rette immaginarie e coniugate si intersecano in un punto reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Sia r immaginaria $\implies r \neq \overline{r}$. Sia $P = r \implies \overline{P} \in \overline{r}$. $P \in \overline{r} \implies \overline{P} \in \overline{\overline{r}} = r$. $\overline{P} \in r \cap \overline{r} = P \implies \overline{P} = P \implies P$ è reale. ☺

Proposizione 2.4.5
Ogni retta r immaginaria ha un unico punto reale in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Per ipotesi $r \neq \overline{r} \implies \exists\, P$ intersezione di r e $\overline{r}$. Quindi per la proposizione precedente P è reale. Sia $S \in r$ un punti reale. Essendo reale $S = \overline{S} \implies S \in \overline{r} \implies S \implies S \in r \cap \overline{r}$. Quindi per l'unicità del punto di intersezione, $S = P$. ☺

Definizione 2.4.3: Curve algebriche reali in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$

Curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ è il luogo delle autosoluzioni di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dove $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali nelle variabili x_1, x_2, x_3.

Osservazione: Ogni curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ che contiene un punto P contiene anche $\overline{P}$.

Esempio 2.4.3

Per esempio prendiamo una circonferenza

$$x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0 \qquad r^2 = a^2 + b^2 - c = 0$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0 \qquad C : \ (-a, -b)$$

Ora consideriamo l'equazione

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0 \qquad \text{in} \quad \mathring{A}_2(\mathbb{C}) \quad x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} + a\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} + b\right)^2 = 0$$

Moltiplichiamo dentro entrambi i membri per x_3 e sviluppiamo

$$x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 + x_2^2 + 2bx_2x_3 + b^2x_3^2 = 0$$

$$1 + 2a + a^2 + 1 + 2b + b^2 = 0$$

Definizione 2.4.4: Curva riducibile

In $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ una curva $F(x_1, x_2, x_3)$ si dice riducibile se F è il prodotto di polinomi di grado più basso.

Esempio 2.4.4

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)^{n_1} \cdot F_2(x_1, x_2, x_3)^{n_2} \cdot F_3(x_1, x_2, x_3)^{n_3}$$
$$\deg(F) = n_1 \deg(F_1) + \ldots + n_t \deg(F_t)$$

Osservazione: Geometricamente una curva riducibile si riduce in componenti ottenute uguagliando a zero i vari fattori.

Definizione 2.4.5: Ordine

Si dice **ordine** di una curva algebrica in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ il grado del polinomio F che la definisce.

Teorema 2.4.1 Teorema dell'ordine

L'ordine di una curva algebrica reale è uguale al numero di intersezioni in comune con una qualsiasi retta r di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ a patto che

1. r non sia componente della curva
2. le intersezioni siano contate con la loro molteplicità

Definizione 2.4.6: Punti semplici ed r-upli

Sia C una curva algebrica di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$

- P si dice **semplice** se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità unitaria ed esiste un'unica retta, chiamata retta tangente, con molteplicità di intersezione in P maggiore di 1.
- P si dice **r-uplo** (doppio, triplo, ecc...) se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità r, ed esistono r (contate con la loro molteplicità) rette con molteplicità di intersezione in P maggiore di r (rette tangenti).

Proposizione 2.4.6

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$. Se una retta r ha più di n intersezioni con n l'ordine di C, allora r è componente di C.

Dimostrazione: Per il teorema dell'ordine se r non fosse componente della curva C avrebbe esattamente n intersezioni con C (a patto di contarle con la dovuta molteplicità). 😄

Proposizione 2.4.7

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ di ordine n. Allora C non possiede punti $(n+1)$-upli.

Dimostrazione: Dato che C è di ordine $n \implies \exists r \in \tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ non componente di C passante per un punto dato di C. Sia, per assurdo, P un punto $(n+1)$-uplo.

$$|r \cap C| \geq n+1 \quad \text{perché passa per } P$$

ma dato che r non è componente, il teorema dell'ordine

$$|r \cap C| = n < n+1$$

Assurdo! 😄

Proposizione 2.4.8

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ di ordine n. C ha un punto n-uplo P se, e soltanto se, C è unione di n rette (contate con la dovuta molteplicità) per P.

Dimostrazione: "$\implies$"Sia $P \neq Q \in C$ e sia r la retta $rt(P,Q)$. Supponiamo per assurdo r non sia componente allora per il teorema dell'ordine

$$n = |r \cap C| \geq \underbrace{n}_{\in P} + \underbrace{1}_{\in Q}$$

Assurdo! Quindi per ogni punto $Q \in C$ la retta PQ è componente $\implies$ C è unione di rette per P. Quindi queste rette sono $n = \deg(F) =$ ordine di C.
"$\impliedby$" Sia C unione di n rette per P. Allora la generica retta per P non componente di C interseca C sono in P $\implies$ P è punto n-uplo. 😄

Definizione 2.4.7: Punto multiplo

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$. Se P non è un punto semplice allora si dice **punto multiplo**.

Teorema 2.4.2

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ di ordine n e sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ il polinomio omogeneo che la definisce. I punti multipli di C sono le classi di autosoluzioni del sistema associato alle derivate:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 0 \end{cases}$$

Esempio 2.4.5

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 3x_2x_3 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| \neq 0$$

Capitolo 3

Coniche in $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$

Definizione 3.0.1: Conica

Si dice **conica** una curva algebrica reale di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{C})$ (curva piana) del secondo ordine. Una conica si rappresenta eguagliando a 0 un polinomio omogeneo F di secondo grado nelle variabili x_1, x_2, x_3, a coefficienti reali. La generica equazione della conica è

$$C : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Se chiamiamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere l'equazione come prodotto righe per colonne

$$^tXAX = 0$$

A è una matrice reale e simmetrica ed è detta **matrice della conica**.

Esempio 3.0.1

Consideriamo la conica

$$-x_1^2 + ax_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo il prodotto

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1(-x_1 + 2x_2) + x_2\left(2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3\right) + x_3\left(-\frac{3}{2}x_2 + 6x_3\right) = 0$$

$$-x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

Osservazione: L'equazione della generica conica di $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ dipende da 6 coefficienti definiti a meno di un fattore di proporzionalità. Quindi le coniche di $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ sono ∞^5.

Proposizione 3.0.1

Sia C una conica di $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ riducibile. Allora C è unione di 2 rette

1. reali e distinte
2. reali e coincidenti
3. immaginarie e coniugate

Dimostrazione: Sia C conica associata al polinomio $F = (x_1, x_2, x_3) = 0$. Se C è riducibile $F = (x_1, x_2, x_3) = F_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot F_2 = (x_1, x_2, x_3)$ dove F_1 e F_2 hanno grado unitario, quindi rappresentano delle rette e di conseguenza C è unione di due rette r_1 e r_2. Se r_1 e r_2 sono entrambe reali siamo nei casi 1 o 2. Se invece r_1 è immaginaria, $\overline{r_1}$ è ancora componente di C (per ogni $P \in r_1$, $\overline{P} \in C$), ma $r_1 \neq \overline{r_1} \implies \overline{r_1} = r_2 \implies C$ si riduce in due rette immaginarie e coniugate. 😊

Osservazione: Se r è immaginaria anche $\overline{r}$ lo è. Infatti $r \neq \overline{r}$ e quindi $\overline{r} \neq \overline{\overline{r}} = r$.

Proposizione 3.0.2

In $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ una conica

1. non ha punti tripli
2. ha un punto doppio se, e soltanto se, è riducibile. E abbiamo due possibilità
   (a) ha solo un punto doppio P e si riduce in due rette distinte per P
   (b) ha almeno due punti doppi allora ne ha ∞^1 e si fattorizza in una retta reale contata due volte

Dimostrazione: " $\implies$ " Per ipotesi C ha punto doppio P. Sia $R \in C$ e consideriamo la retta $r = rt(P, R)$, se non fosse componente avrebbe

$$|r \cap C| \geq 2 + 1 = 3 \quad \text{intersezioni con } C$$

Assurdo! Questo è in contraddizione con il teorema dell'ordine.

" $\impliedby$ " Sia C riducibile. Allora $C = r_1 \cup r_2$. Sia $P \in r_1 \cap r_2$ e sia r una retta per P diversa r_1 e da r_2. Quindi $r \cap C = P$. Per il teorema dell'ordine P ha molteplicità doppia e abbiamo due casi

1. se $r_1 = r_2$ abbiamo ∞^1 punti doppi e $C = r_1 \cup r_1$
2. altrimenti abbiamo un **solo** P punto doppio che è $r_1 \cap r_2$

Dobbiamo dimostrare che esiste un solo punto. Siano per assurdo P_1 e P_2 punti doppi e sia $C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$. Sia $Q \in r_2$ con $P_2 \in r_1$, allora

$$|rt(P_2, Q) \cap C| \geq \underbrace{2}_{P_2} + \underbrace{1}_{Q}$$

Per il teorema dell'ordine $rt(P_2, Q)$ è componente. **Assurdo!** Perché avremmo 3 componenti $(r_1, r_2, rt(P_2, Q))$. 😊

Definizione 3.0.2: Coniche generali o degeneri

Una conica si dice

- **generale** se è priva di punti doppi $\implies$ se non è riducibile
- **semplicemente degenere** se ha un solo punto doppio $\implies C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$
- **doppiamente degenere** se ha ∞^1 punti doppi $\implies C = r \cup r$

Teorema 3.0.1
In $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ i punti doppi di una conica C si trovano considerando le classi di autosoluzioni del sistema omogeneo
$$AX = \underline{0}$$
dove A è la matrice associata a C.

Dimostrazione:
$$C : F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{dove } F \text{ è:}$$
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$
i punti doppi si trovano risolvendo
$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$
Possiamo dividere tutti i fattori per 2
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies AX = \underline{0}$$

😄

Teorema 3.0.2
In $\tilde{\tilde{A}}_2(\mathbb{C})$ una conica $C : {}^tXAX = 0$ è

1. generale se $\rho(A) = 3$
2. semplicemente degenere se $\rho(A) = 2$
3. doppiamente degenere se $\rho(A) = 1$

Dimostrazione: Dimostriamo tutti i casi singolarmente:

1. C è generale se non ha punti doppi. Se $AX = \underline{0}$ ha solo la soluzione nulla $\iff \rho(A) = 3$.
2. C è semplicemente degenere se ha un solo punto doppio. $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^1 $\iff \rho(A) = 2$
3. C è doppiamente degenere se ha ∞^1 punti doppi $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^2 soluzioni (se $[(x_1, x_2, x_3)]$ è soluzione $[(2x_1, 2x_2, 2x_3)]$ è lo stesso punto doppio) $\iff \rho(A) = 1$

😄