Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Proposizione 0.0.1

Siano α r rispettivamente un piano e una retta di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con α non ortogonale a r. Allora $\exists!$ piano $\beta : \beta$ ortogonale α e $r \subseteq \beta$.

Dimostrazione: Dimostriamo l'esistenza: sia $\beta = [P, V_1 + V_2 orto]$ dove $r = [P, V_1]$ e $\alpha = [Q, V_2]$.

1. β è un piano perché $\dim(V_1 = 1)$, $\dim(V_2 orto) = 1$ e $V_1 \neq V_2 orto$ (poiché $\alpha non orto r$) $\implies \dim(V_1 + V_2 orto) = 2 \implies \beta$ è un piano. Per costruzione abbiamo che $\beta \perp \alpha$, infatti lo spazio di traslazione di β è:

$$V_1 \oplus V_2^{\perp} \supseteq V_2^{\perp} \text{ e } V_2 \text{ è lo spazio di traslazione di } \alpha$$

inoltre r

😃

Capitolo 1

Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

Definizione 1.0.1

In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ si dice **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia $[0, \mathcal{B}]$:

- O è un punto di $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ è una base ortonormale

Note:-

1. In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ $(n = 2) \implies \mathcal{B} = (i, j)$
2. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ $(n = 3) \implies \mathcal{B} = (i, j, k)$

Definizione 1.0.2: Ortogonalità fra rette

Siano r_1, r_2 due rette di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e sia $r_1 = [P, f(v)]$ $\quad v = l \cdot i + m \cdot j$, analogamente $r_2 = [P, f'(v)]$ $\quad v' = l' \cdot i + m' \cdot j$

$$v \perp v' \iff l \cdot l' + m \cdot m' = 0$$

se r_1 ha equazione $ax + by + c = 0$ e r_2 ha equazione $a'x + b'y + c' = 0$ allora $P.d.r_1 = [(-b, a)]$, e $P.d.r_2 = [(-b', a')]$

$$-b \cdot (-b') + a \cdot a' = bb' + aa' = 0$$

Se abbiamo r_1, r_2 rette in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(l, m, n)]$, $P.d.r_2 = [(l', m', n')]$ $r_1 \perp r_2 \iff v_1$ generatore della direzione di $r_1 \perp v_2$ generatore della direzione di r_2.

$$v_1 = li + mj + nk \qquad v_2 = l'i + m'j + n'k$$

$$v_1 \perp v_2 \iff r_1 \perp r_2 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

Analogamente se r_1, r_2 sono rette in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(x_1, x_2, ..., x_n)]$, $P.d.r_2 = [(x'_1, x'_2, ..., x'_n)]$

1.1 Direzione $\perp$ ad un iperpiano

Proposizione 1.1.1

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a r.

Dimostrazione: $P.d.r = [(-b, a)]$ e abbiamo che $(a, b) \cdot (-b, a) = 0$ oppure $(a \cdot i + b \cdot j) \cdot (-b \cdot i + a \cdot j) = 0 \implies [(a, b)] \perp r$. 😊

Proposizione 1.1.2

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b, c)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a π.

Dimostrazione: Sia $v \in V_2$ (π ha spazio di traslazione o V_2). Se $v = (x, y, z) \implies ax + by + cz = 0 \iff (x, y, z) \cdot (a, b, c) = 0 \implies (a, b, c) \perp v \ \forall v \in V_2$ 😄

Più in generale: sia S_{n-1} un iperpiano in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 \implies [(a_1, a_2, \ldots, a_n)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a S_{n-1}.

Proposizione 1.1.3 Ortogonalità tra piani

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad \beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $\alpha \perp \beta \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff V_2 \supseteq V_2'^{\perp}$ dove V_2 è la giacitura di α e V_2' è la giacitura di β.

$$V_2'^{\perp} = [\mathcal{L}((a', b', c'))] \iff (a', b', c') \in V_2$$

$(x, y, z) \in V_2 \iff ax + by + cz = 0$ e quindi $(a', b', c') \in V_2 \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$ 😄

Proposizione 1.1.4 Ortogonalità tra retta e piano

Siano r : con $P.d.r = [(l, m, n)]$ e sia α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ una retta e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $r \perp \alpha$ se e soltanto se $[(a, b, c)] = [(l, m, n)]$

Dimostrazione: $r \perp \alpha \iff V_1 = V_2^{\perp}$ dove V_1 è la direzione della retta e V_2 è la giacitura di α.

$$V_1 = \mathcal{L}((l, m, n)) = V_2^{\perp} = \mathcal{L}((a, b, c)) \iff [(a, b, c)] = [(l, m, n)]$$

😄