

Algebra Lineare e Geometria Analitica  
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

# Indice

<b>Capitolo 1</b>	<b>Nozioni preliminari</b>	<b>Pagina 2</b>
1.1	Relazioni su un insieme	2
1.2	Strutture algebriche	2
1.3	Matrici	3
<b>Capitolo 2</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>Pagina 5</b>
2.1	Generalità	5
2.2	Sottospazi di uno spazio vettoriale	5
2.3	Indipendenza e dipendenza lineare	6
2.4	Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale	8
2.5	Basi e dimensione	8
2.6	Intersezione e somma di sottospazi	12
<b>Capitolo 3</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>Pagina 15</b>
3.1	Determinante di una matrice quadrata	15
3.2	Matrici invertibili	16
3.3	Dipendenza lineare e determinanti	16

# Capitolo 1

## Nozioni preliminari

### 1.1 Relazioni su un insieme

#### Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme  $A$  è un qualunque sottoinsieme di  $\mathcal{R}$  del prodotto cartesiano  $A \times A$ .  
Una relazione  $\mathcal{R}$  su un insieme  $A$  si dice:

- **riflessiva** se, per ogni  $a \in A$ ,  $a\mathcal{R}a$ ;
- **simmetrica** se, per ogni  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b$  allora  $a = b$ ;
- **antisimmetrica** se, per ogni  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b$  e  $b\mathcal{R}a$  allora  $a = b$ ;
- **transitiva** se, per ogni  $a, b, c \in A$ ,  $a\mathcal{R}b$  e  $b\mathcal{R}c$  allora  $a\mathcal{R}c$ ;

#### Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine  $\mathcal{R}$  su un insieme  $A$  si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di  $A$  sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni  $a, b \in A$ , risulta  $a\mathcal{R}b$  oppure  $b\mathcal{R}a$ , la relazione  $\mathcal{R}$  si dice **relazione d'ordine totale**.

### 1.2 Strutture algebriche

#### Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia  $(G, \star)$  un insieme con un'operazione  $\star$ . La struttura  $(G, \star)$  si dice **gruppo** se:

- l'operazione  $\star$  è associativa;
- esiste in  $G$  l'elemento neutro;
- ogni elemento di  $g \in G$  è simmetrizzabile.

Se l'operazione  $\star$  soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

### Definizione 1.2.2: Campo

Sia  $A$  un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "·" e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura  $(A, +, \cdot)$  è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$  è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  è un gruppo abeliano con elemento neutro  $e \neq 0$ ;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni  $a, b, c \in A$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

## 1.3 Matrici

### Definizione 1.3.1: Matrice

Dato un campo  $K$  si dice **matrice** di tipo  $m \times n$  su  $K$  una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avente  $m$  righe ed  $n$  colonne, i cui elementi  $a_{ij}$  sono elementi di  $K$ .

### Definizione 1.3.2: Matrice quadrata

Una matrice di tipo  $n \times n$  è detta **matrice quadrata** di ordine  $n$ . Queste vengono indicate con  $M_n(K)$ .

### Definizione 1.3.3: Prodotto righe per colonne

Date le matrici  $A = (a_{ih}) \in K^{m,n}(K)$  con  $i \in I_m, h \in I_n$  e  $B = (b_{hj}) \in K^{n,p}$  con  $h \in I_n, j \in I_p$ , si dice **prodotto righe per colonne** di  $A$  per  $B$  la matrice

$$A \cdot B = (c_{ij}) \text{ con } i \in I_m, j \in I_p \quad \text{ove}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih}b_{hj}$$

### Esempio 1.3.1

Prendiamo per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 21 & 12 & -19 \end{pmatrix}$$

#### Definizione 1.3.4: Matrice identica

L'elemento neutro delle matrici quadrate di ordine  $n$  è la **matrice identica**, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

#### Definizione 1.3.5: Trasposta di una matrice

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice di  $K^{m,n}$ . Si dice **trasposta** di  $A$  la matrice  $K^{n,m}$  ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne, cioè  ${}^tA = (b_{ji})$  ove  $b_{ji} = a_{ij}$  per ogni  $i \in I_n$  e  $j \in I_m$ .

## Capitolo 2

# Spazi vettoriali

### 2.1 Generalità

#### Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano  $K$  un campo e  $V$  un insieme. Si dice che  $V$  è uno **spazio vettoriale** sul campo  $K$ , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su  $V$ , detta somma,  $+: V \times V \rightarrow V$  e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari,  $\cdot: K \times V \rightarrow V$ , tali che

- $(V, +)$  sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno  $\cdot$  soddisfi le seguenti proprietà:
  - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
  - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme  $V$  sono detti **vettori**, gli elementi del campo  $K$  sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di  $(V, +)$  è detto **vettore nullo** e indicato  $\underline{0}$  per distinguerlo da  $0$ , zero del campo  $K$ . L'opposto di ogni vettore  $\mathbf{v}$  viene indicato con  $-\mathbf{v}$ .

#### Teorema 2.1.1

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ , siano  $k \in K$  e  $v \in V$ . Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

**Dimostrazione:** Se  $k = 0$

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

e sommando  $-0v$  ad ambo i membri si ottiene appunto  $\underline{0} = 0v$ . Se è  $v = \underline{0}$ , si procede nel modo analogo. Viceversa, se  $kv = \underline{0}$  e  $k \neq 0$  dimostriamo che  $v = \underline{0}$ . Dato che  $k \neq 0$ , esiste l'inverso  $k^{-1} \in K$  e, moltiplicando ambo i membri della precedente uguaglianza per  $k^{-1}$  si ottiene  $k^{-1}(kv) = k^{-1}\underline{0}$  che, per quanto dimostrato in precedenza dà il  $\underline{0}$ . Dato che  $k^{-1}(kv) = (k^{-1}k)v = 1v = v$ , per la proprietà 4, si ha  $v = \underline{0}$ . ☺

### 2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

#### Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia  $\emptyset \neq U \subseteq V$ , diremo che  $U$  è **sottospazio vettoriale** di  $V$  se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

**Proposizione 2.2.1** Primo criterio di riconoscimento

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale e sia  $\emptyset \neq U \subseteq V$  un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme  $U$  è uno spazio vettoriale di  $V$  se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1.  $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$
2.  $\forall k \in K, \forall u \in U \quad ku \in U$

**Proposizione 2.2.2** Secondo criterio di riconoscimento

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$  e sia  $\emptyset \neq U \subseteq V$ ,  $U$  è sottospazio di  $V(K)$  se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

## 2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

**Definizione 2.3.1: Combinazione lineare**

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(K)$  si dice combinazione lineare di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ogni vettore  $v$ :

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, \dots, k_n \in K$$

**Definizione 2.3.2: Sistema di vettori libero**

Sia  $V(K)$  e sia  $A$  un sistema di vettori di  $V(K)$ ,  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , allora  $A$  si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di  $A$  che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = \underline{0}$$

Se  $A$  è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

**Definizione 2.3.3: Sistema di vettori legato**

Sia  $V(K)$  e sia  $A$  un sistema di vettori di  $V(K)$ ,  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , allora  $A$  si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \text{ non tutti nulli : } \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n$$

Se  $A$  è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

**Proposizione 2.3.1**

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$ . Se  $\underline{0}$  appartiene ad  $A$ , il sistema  $A$  è legato.

**Dimostrazione:** Sia  $\underline{0} \in A$ , senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $\underline{0} = v_1$  quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

**Proposizione 2.3.2**

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$ . Se in  $A$  appaiono due vettori proporzionali allora  $A$  è legato.

**Dimostrazione:** Senza perdita di generalità possiamo supporre che  $v_1 = kv_2$  e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

☺

### Proposizione 2.3.3

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$ .  $A$  è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

**Dimostrazione:**  $\implies$  : Per ipotesi  $A$  è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che  $k_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} -k_1v_1 &= k_2v_2 + \dots + k_nv_n & v_1 &= \frac{1}{k_1}(-k_2v_2 - \dots - k_nv_n) \\ v_1 &= -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - \dots - \frac{k_n}{k_1}v_n \end{aligned}$$

e quindi  $v_1$  è combinazione lineare di  $v_2, \dots, v_n$ .

$\Leftarrow$  : Per ipotesi uno dei vettori di  $A$  è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + \dots + k_nv_n \quad \underline{0} = -1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

siccome  $-1 \neq 0$   $A$  è legato.

☺

### Proposizione 2.3.4

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$  e sia  $u \in V(K)$ . Se  $A \cup \{u\}$  è legato, allora  $u$  è combinazione lineare dei vettori di  $A$ .

**Dimostrazione:** Per ipotesi  $A \cup \{u\}$  è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n, b \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n + bu$$

sia per assurdo  $b = 0$

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \quad u = -\frac{k_1}{b}v_1 - \frac{k_2}{b}v_2 - \dots - \frac{k_n}{b}v_n$$

$\implies u$  è combinazione lineare dei vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$

☺

### Proposizione 2.3.5

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$  e sia  $B \supseteq A$  sistema di vettori di  $V(K)$ . Se  $A$  è legato allora anche  $B$  è legato.

**Dimostrazione:**

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

Se  $B = [v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m]$  allora

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$$

$\implies B$  è legato.

☺



### Proposizione 2.3.6

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$  e sia  $B \subseteq A$  sistema di vettori di  $V(K)$ , se  $A$  è libero, allora  $B$  è libero.

**Dimostrazione:** Sia, per assurdo,  $B$  legato, allora per la proposizione precedente anche  $A$  è legato. **Assurdo!**  
Quindi  $B$  è libero. ☺

## 2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

### Definizione 2.4.1: Sistema di generatori

Sia  $A$  sistema di vettori di  $V(K)$ .  $A$  si dice sistema di generatori di  $V(K)$  se ogni  $v \in V(K)$  si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di  $A$ .

### Definizione 2.4.2: Copertura lineare

Sia  $A$  un sistema di vettori di  $V(K)$  si dice copertura (o chiusura) lineare di  $A$  l'insieme  $\mathcal{L}(A)$  di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di  $A$ .

#### N.B.

Dato  $A$  sistema di vettori di  $V(K)$

1.  $\mathcal{L}(A)$  è il più piccolo sottospazio di  $V(K)$  che contiene  $A$
2.  $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3.  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se  $V(K)$  ammette un sistema di generatori finito  $\implies V(K)$  si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di  $V(K)$  ha cardinalità infinita  $\implies V(K)$  non è finitamente generato.

## 2.5 Basi e dimensione

### Lemma 2.5.1

Sia  $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori per uno spazio vettoriale  $V(K)$ , e sia  $v \in S$  combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri)  $\implies S \setminus \{v\}$  è sistema di generatori per  $V(K)$

**Dimostrazione:** Sia, senza perdere di generalità,  $v_1$  combinazione lineare di  $v_2, v_3, \dots, v_n$

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$$

sia  $v \in V(K)$

$$\begin{aligned} v &= h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = h_1 (k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \\ v &= \underbrace{(h_1 k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + \dots + \underbrace{(h_1 k_n + h_n)}_{\in K} v_n \in \mathcal{L}([v_2, v_3, \dots, v_n]) = \mathcal{L}(S \setminus \{v_1\}) \end{aligned}$$

$\implies S \setminus \{v_1\}$  è un sistema di generatori. ☺

### Teorema 2.5.1

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ( $V(K) \neq \{0\}$ ), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

**Dimostrazione:** sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori per  $V(K)$ , abbiamo due possibilità:

1.  $A$  è libero  $\implies A$  è un sistema di generatori libero;
2.  $A$  è legato  $\implies \exists v \in A$  combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre  $v = v_1 \implies A \setminus \{v_1\} = A_1$  è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare  $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$  finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.

Osserviamo che  $A$  contiene almeno un  $v \in A : v \neq \underline{0}$ , questo perché  $A_n = [0]$  e  $v_n \neq \underline{0}$  perché  $A \neq \{\underline{0}\} \implies A_n$  è necessariamente libero.  $\oplus$

#### Definizione 2.5.1: Base

Sia  $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  sequenza libera di vettori di  $V(K)$ .  $S$  è detta base se e solo se  $S$  è una sequenza libera di generatori.

#### Definizione 2.5.2: Base canonica di $\mathbb{R}^n$

$((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1))$  è una base canonica per  $\mathbb{R}^n$ .

#### Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia  $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  sistema di generatori e  $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  sistema libero. Allora la cardinalità di  $A$  sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. ( $m \leq n$ )

**Dimostrazione:** Sia per assurdo  $m > n$ , poiché  $B$  genera  $V(K)$   $u_1$  si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Essendo  $A$  libero  $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, \dots, k_n$  non sono tutti nulli  $\implies$  senza perdita di generalità  $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad v_1 = \frac{1}{k_1}(-u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, \dots, v_n])$$

$B$  è sistema di generatori,  $B \cup \{u_1\}$  è sistema di generatori, di conseguenza  $(B \cup \{u_1\} \setminus \{v_1\}) = B_1 = [u_1, v_2, \dots, v_n]$  è ancora sistema di generatori per  $V(K)$ .

Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, \dots, h_n \in K$$

Se avessimo  $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$   $u_2 = \alpha u_1$  ma ciò non può succedere perché  $A$  è libero  $\implies \exists h_i \neq 0$  e senza perdita di generalità supporremo  $h_2 \neq 0$  quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - \dots - h_n v_n)$$

$v_2$  è linearmente dipendente da  $B_2 = [u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]$  e  $B_2$ , per lo stesso motivo di  $B_1$  è ancora sistema di generatori.

Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento  $n$  volte fino a trovare un sistema  $B_n = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ . Siccome avevamo supposto che  $m > n$  essendo  $B_n$  sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche  $u_{n+1}$  come combinazione lineare dei vettori di  $B_n$ , cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \quad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

questo comporta che  $A$  sia legato, ma questo è **assurdo!**  $\implies m \leq n$ .  $\oplus$

### Teorema 2.5.2

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano  $B_1$  e  $B_2$  due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad B_2 = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad m = n$$

**Dimostrazione:** Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- $B_1$  sistema di generatori,  $B_2$  sistema libero  $\implies n \geq m$ ;
- $B_2$  sistema di generatori,  $B_1$  sistema libero  $\implies m \geq n$ .

$$m \geq n \text{ e } n \geq m \iff n = m.$$

☺

### Definizione 2.5.3: Dimensione

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di  $V$  la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se  $V = \{0\}$  poniamo la  $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

### Proposizione 2.5.1

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$  e sia  $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori. Allora  $S$  è libero.

**Dimostrazione:** Sia  $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  una base di  $V_n(K)$ . Sia per assurdo  $S$  legato. Senza perdita di generalità  $v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$ . Allora  $S' = S \setminus \{v_1\}$  è ancora sistema di generatori.  $|S'| = n - 1 \geq |B|$  perché  $B$  è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!**. Quindi  $S$  è libero. ☺

### Proposizione 2.5.2

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$ . Sia  $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema libero. Allora  $S$  è anche un sistema di generatori.

**Dimostrazione:** Sia  $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  una base di  $V(K)$ , supponiamo per assurdo che  $S$  non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$  è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha} (-k_1 v_1 - k_2 v_2 - \dots - k_n v_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$  **assurdo!** Contro l'ipotesi che  $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$  è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1}_{\text{sistema libero}} \leq \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \rightarrow \text{per il lemma di Steinitz}$$

**Assurdo!**  $\implies S$  è un sistema di generatori. ☺

### Proposizione 2.5.3

$m$  vettori in  $V_n(K)$  con  $m > n$  sono sempre linearmente dipendenti.

**Dimostrazione:** Siano per assurdo  $[v_1, v_2, \dots, v_m]$ ,  $m$  vettori linearmente indipendenti con  $m > n$ . Sia  $B$  una base di  $V_n(K)$ .  $m = |S = [v_1, v_2, \dots, v_m]| \leq |B| = n$  per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi  $m > n$ , **assurdo!** ☺

**Proposizione 2.5.4**

$m$  vettori in  $V_n(K)$  con  $m < n \implies$  non possono generare.

**Dimostrazione:** siano  $v_1, v_2, \dots, v_m$  per assurdo  $m$  vettori che generano  $V_n(K)$  con  $m < n$  allora:

$$m = |S| = [v_1, v_2, \dots, v_m] \geq |B| = n \quad \text{con } m \geq n \quad \text{per il lemma di Steinitz}$$

**Assurdo!** Va contro all'ipotesi. ☹

**Teorema 2.5.3 Teorema di caratterizzazione delle basi**

Sia  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una sequenza di vettori di  $V(K)$ .  $B$  è una base se e solo se ogni vettore di  $V$  si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di  $B$ .

$$\forall v \in V, \exists! v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad k_i \in K$$

**Dimostrazione:**  $\implies$  sia  $B$  una base di  $V$ . Per ogni  $v$  si ha che  $v \in \mathcal{L}(B)$  perché  $B$  è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista  $v \in V$ :

$$v = v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + \dots + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

$B$  è una sequenza libera, quindi  $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$  perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che  $k_i \neq h_i \implies$  **assurdo!**  $\implies \exists!$  la combinazione lineare dei vettori di  $B$  che dà  $v$  ( $\forall v \in V$ ).

$\Leftarrow$  per ipotesi  $\forall v \in V \exists!$  combinazione lineare dei vettori di  $B$  che dà  $v$ .  $B$  è una sequenza di generatori, cioè  $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$ . Supponiamo per assurdo che  $B$  sia legato  $\implies \exists k_i \in K$  non nullo:

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di  $B$  che danno  $\underline{0}$ . Dato che  $\underline{0} \in V$  per ipotesi esiste un'unica combinazione lineare dei vettori di  $B$  che dà  $\underline{0}$ . **Assurdo!** Quindi  $B$  è una sequenza libera e  $B$  è una base per  $V$ . ☹

**Definizione 2.5.4: Componenti di un vettore rispetto ad una base**

Sia  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una base di  $V_n(K)$  e sia  $v \in V$ . Chiameremo componenti di  $v$  rispetto alla base  $B$  la sequenza  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ :

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

**Proposizione 2.5.5**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$ , allora  $V_n(K)$  ammette almeno un sottospazio di dimensione  $m \forall 0 \leq m \leq n$ .

**Dimostrazione:** sia  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una base di  $V_n(K)$  e sia  $0 \leq m \leq n$ , ci sono due possibilità:

1.  $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$  è il sottospazio voluto;
2.  $0 < m \leq n$  e quindi  $S = (v_1, v_2, \dots, v_m)$

$\mathcal{L}(S)$  ha dimensione  $m$  perché  $S$  è libero ( $S \subseteq B$ ) e genera, per definizione  $\mathcal{L}(S)$ . ☹

### Proposizione 2.5.6

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  e sia  $U \leq W$ , allora:

1.  $\dim(U) \leq \dim(W)$
2.  $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

**Dimostrazione:** Dimostriamo i due punti:

1. Sia  $B$  base per  $U$  e  $B'$  base per  $W$ , se per assurdo

$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$

contro il lemma di Steinitz.

2.  $\implies$  è banale;  
 $\impliedby$  sia per assurdo  $U < W$  e sia  $B$  base di  $U$ , allora

$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$

quindi  $B$  è una base anche per  $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$  **Assurdo!**

⊙

### Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $A = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ , ove  $p \leq n$ , una sequenza libera di vettori in  $V_n(K)$ . Allora, in una qualunque base  $B$  di  $V_n(K)$ , esiste una sequenza  $B'$  di vettori, tale che  $A \cup B'$  è una base di  $V_n(K)$ .

## 2.6 Intersezione e somma di sottospazi

### Proposizione 2.6.1

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$  e siano  $U, W \leq V \implies U \cap W$  è sottospazio di  $V$ .

**Dimostrazione:** Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi.  $U \cap W$  è un sottospazio di  $V \iff$  è sottoinsieme non vuoto di  $V$ :

$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W$$

$U \cap W$  è sottoinsieme non vuoto di  $V$ , perché  $U \subseteq V, W \subseteq V$  e  $\underline{0} \in U \cap W$ . Siano ora  $v_1, v_2 \in U \cap W$  e  $k_1, k_2 \in K$ , osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che  $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U$  e per lo stesso motivo  $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W \implies k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$  è un sottospazio vettoriale. ⊙

#### N.B.

Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che  $U \cup W$  non è un sottospazio a meno che  $U \subseteq W$  oppure  $W \subseteq U$ .

### Definizione 2.6.1: Spazio di somma

Dati  $U$  e  $W \leq V$  spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$  definiamo lo **spazio di somma** come:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

### Proposizione 2.6.2

Dati  $U$  e  $W \leq V$  spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$  abbiamo che:  $U + W \leq V$

**Dimostrazione:** Osserviamo che  $U + W \subseteq V$  perché dato  $u \in U$  e  $w \in W$ ,  $u \in V$  e  $w \in V \implies u + w \in V$ , il quale non è vuoto perché  $\underline{0} \in U + W$ . Siano  $v_1, v_2 \in U + W$  e siano  $k_1, k_2 \in K$

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} &= k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1 u_1 + k_1 w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2 u_2 + k_2 w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}} \\ &\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio } U + W \leq V \end{aligned}$$

⊙

### Proposizione 2.6.3

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  allora  $U + W$  è il più piccolo sottospazio di  $V$  che contiene  $U \cup W$ ; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

### Definizione 2.6.2: Somma diretta

Dati  $U, W \leq V_n(K)$  diremo che  $U + W$  è somma diretta se  $\forall v \in U + W$  può essere scritto come unico modo come  $u + w$ . Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists! u \in U \text{ e } w \in W : \quad v = u + w$$

Se  $U + W$  è una somma diretta allora la indicheremo con  $U \oplus W$ .

### Proposizione 2.6.4

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  allora  $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$ .

**Dimostrazione:**  $\implies$  Siano  $U, W$  in somma diretta e sia, per assurdo:  $x \in U \cap W$  con  $x \neq \underline{0}$ . Sia  $v = u + w$  con  $u \in U$  e  $w \in W$ . Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad e \quad w = w - x \text{ poiché la somma è diretta } \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

$\Leftarrow$  Siano  $U, W : U \cap W = \{\underline{0}\}$  e supponiamo per assurdo che esista  $v \in U + W$  :

$$v = u_1 + w_1 \quad e \quad v = u_2 + w_2 \quad \text{con } u_1, u_2 \in U \quad e \quad w_1, w_2 \in W \quad e \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad e \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad e \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che  $v$  avesse due scritture distinte come somma i elementi di  $U$  e  $W$ .

$$\implies \exists! (u_1, w_1) : \quad u_1 \in U \quad e \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1 \text{ e } U \oplus W$$

⊙

### Corollario 2.6.1

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  allora  $V = U \oplus W \iff U + W = V \text{ e } U \cap W = \{\underline{0}\}$ .

**N.B.**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  e sia  $B_1$  una base di  $V$  e  $B_2$  una base di  $W \implies B_1 \cup B_2$  è sequenza di generatori per lo spazio  $U + W$ . In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per  $U + W$ .

**Proposizione 2.6.5**

Siano  $U, W \leq V_n(K) : U \oplus W$  e sia  $A$  una sequenza libera di vettori di  $U$  e  $B$  una sequenza libera di vettori di  $W$ . Allora  $A \cup B$  è una sequenza libera di vettori della  $U \oplus W$ .

**Dimostrazione:** Siano  $A = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  e  $B = (w_1, w_2, \dots, w_h)$  e supponiamo per assurdo che  $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$  e  $b_1, b_2, \dots, b_h \in K$ , quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h}_{\in W}$$

$$\implies 0 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad e \quad 0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

ma  $A$  e  $B$  sono sequenze libere quindi  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = \dots = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \implies \textbf{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$  è una sequenza libera. ⊙

**Corollario 2.6.2**

Siano  $U, W \in V_n(K) : U \oplus W$  e siano  $B_U$  e  $B_W$  basi di  $U$  e  $W \implies B_U \cup B_W$  è una base per  $U \oplus W$ .

**Proposizione 2.6.6 Formula di Grassmann**

Dati  $U, W \leq V_n(K)$  abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

**Definizione 2.6.3: Complemento diretto**

Sia  $W \leq V_n(K)$  si dice **complemento diretto** di  $W$  in  $V$  uno spazio  $U \leq V : U \oplus W = V$ .

**N.B.**

Un complemento diretto di  $W$  in  $V$  esiste sempre e si trova estendendo una base di  $W$  a una base di  $V$ . In generale questo non è unico.

## Capitolo 3

# Sistemi lineari

### 3.1 Determinante di una matrice quadrata

#### Definizione 3.1.1: Determinante

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata, di ordine  $n$ , a elementi in un campo  $K$ . Si dice **determinante** di  $A$ , e si scrive  $|A|$  oppure  $\det(A)$ , l'elemento di  $K$  definito ricorsivamente come segue:

1. se  $n = 1$   $A = (a_{11})$   $\det(A) = |A| = a_{11}$
2. se  $n > 1$   $A = a_{ij}$   $\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$

Se  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , il suo determinante è  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .  
Mentre se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora la il determinante di  $A$  è

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

#### Definizione 3.1.2: Complemento algebrico

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , a elementi in campo  $K$ . Si dice **complemento algebrico** dell'elemento  $a_{hk}$ , e si indica  $\Gamma_{hk}$ , il determinante della matrice quadrata di ordine  $n - 1$ , ottenuta da  $A$  sopprimendo la  $h$ -esima riga e la  $k$ -esima colonna, preso con il segno  $(-1)^{h+k}$ .

#### Teorema 3.1.1 Primo teorema di Laplace

Data la matrice quadrata di ordine  $n$ , la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di  $A$ .

Pertanto, la formula per il calcolo del determinante di  $A = (a_{ij})$  rispetto alla  $i$ -esima riga è

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}\Gamma_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

rispetto alla  $j$ -esima colonna è

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}\Gamma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$



### Teorema 3.1.2 Secondo teorema di Laplace

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero. Quindi

$$A \in M_n(K) \implies \begin{cases} a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \dots + a_{in}\Gamma_{jn} = 0 & i \neq j \\ a_{1i}\Gamma_{1j} + a_{2i}\Gamma_{2j} + \dots + a_{ni}\Gamma_{nj} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

### Teorema 3.1.3 Teorema di Binet

Date due matrici quadrate di ordine  $n$ ,  $A$  e  $B$ , il determinante della matrice prodotto  $A \cdot B$  è uguale al prodotto dei determinanti di  $A$  e  $B$ , cioè

$$|A \cdot B| = |A||B|$$

## 3.2 Matrici invertibili

### Definizione 3.2.1: Matrice invertibile

Una matrice quadrata, di ordine  $n$ , si dice **invertibile** quando esiste una matrice  $B$ , quadrata e dello stesso ordine, tale che  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ , dove  $I_n$  è la matrice identica di ordine  $n$ . La matrice  $B$  si dice **inversa** di  $A$  e si indica  $A^{-1}$ .

### Teorema 3.2.1

Sia  $A \in M_n(K)$ ; allora  $A$  è invertibile  $\iff |A| \neq 0$  e in tal caso

$$A_{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t A_a$$

dove  $A_a$  si chiama **matrice aggiunta** di  $A$  ed è la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo ogni elemento con il suo complemento algebrico  $\Gamma$ .

## 3.3 Dipendenza lineare e determinanti

### Definizione 3.3.1: Minore

Sia  $A \in K^{m,n}$ . Si chiama **minore di ordine  $p$**  estratto da  $A$ , con  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 0$ ,  $p \leq \min\{m, n\}$ , una matrice quadrata di ordine  $p$  ottenuta cancellando  $m - p$  righe e  $n - p$  colonne da  $A$ .

### Definizione 3.3.2: Rango

Si chiama **rango** di  $A \in K^{m,n}$  (e si indica con  $\rho(A)$ ) l'ordine massimo di un minore estraibile da  $A$  con  $\det \neq 0$ .

#### N.B.

1.  $\rho(A) = 0 \iff A = 0$
2.  $A \neq 0 \implies 1 \leq \rho(A) \leq \min\{m, n\}$
3.  $\rho(A) = p$  se e solo se:
  - (a) esiste un minore di  $A$  di ordine  $p$  con  $\det \neq 0$ ;
  - (b) tutti i minori di ordine maggiori di  $p$  hanno determinante nullo.