

Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Chapter 1	Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$	Page 2
1.1	Direzione \perp ad un iperpiano	2
1.2	Circonferenze in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$	6
1.3	Sfere in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$	6
1.4	Circonferenze in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$	7
Chapter 2	Ampliamento di $\check{A}_2(\mathbb{R})$	Page 8
2.1	Ampliamento (proiettivo) di $\check{A}_2(\mathbb{R})$	8
2.2	Geometria analitica in $\check{\check{A}}_2(\mathbb{R})$	9
2.3	Rappresentazione delle rette in $\check{\check{A}}_2(\mathbb{R})$	10
2.4	Complessificazione di $\check{\check{A}}_2(\mathbb{R})$	10
Chapter 3	Coniche in $\check{\check{A}}_2(\mathbb{C})$	Page 15
3.1	Classificazione affine di una conica generale	17
3.2	Condizioni analitiche Principio di reciprocità — 19	18
3.3	Asintoti di una conica	21
3.4	Proprietà metriche	21
3.5	Condizioni analitiche	22

Proposizione 0.0.1

Siano α e r rispettivamente un piano e una retta di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con α non ortogonale a r . Allora $\exists!$ piano β : β ortogonale a α e $r \subseteq \beta$.

Dimostrazione: Dimostriamo l'esistenza: sia $\beta = [P, V_1 + V_{2orto}]$ dove $r = [P, V_1]$ e $\alpha = [Q, V_2]$.

1. β è un piano perché $\dim(V_1) = 1$, $\dim(V_{2orto}) = 1$ e $V_1 \neq V_{2orto}$ (poiché α non ortogonale a r) $\implies \dim(V_1 + V_{2orto}) = 2 \implies \beta$ è un piano. Per costruzione abbiamo che $\beta \perp \alpha$, infatti lo spazio di traslazione di β è:

$$V_1 \oplus V_2^\perp \supseteq V_2^\perp \text{ e } V_2 \text{ è lo spazio di traslazione di } \alpha$$

inoltre r



Capitolo 1

Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

Definizione 1.0.1

In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ si dice **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia $[0, \mathcal{B}]$:

- O è un punto di $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ è una base ortonormale

Note:-

1. In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ ($n = 2$) $\implies \mathcal{B} = (i, j)$
2. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ($n = 3$) $\implies \mathcal{B} = (i, j, k)$

Definizione 1.0.2: Ortogonalità fra rette

Siano r_1, r_2 due rette di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e sia $r_1 = [P, f(v)]$ $v = l \cdot i + m \cdot j$, analogamente $r_2 = [P, f'(v)]$ $v' = l' \cdot i + m' \cdot j$

$$v \perp v' \iff l \cdot l' + m \cdot m' = 0$$

se r_1 ha equazione $ax + by + c = 0$ e r_2 ha equazione $a'x + b'y + c' = 0$ allora $P.d.r_1 = [(-b, a)]$, e $P.d.r_2 = [(-b', a')]$

$$-b \cdot (-b') + a \cdot a' = bb' + aa' = 0$$

Se abbiamo r_1, r_2 rette in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(l, m, n)]$, $P.d.r_2 = [(l', m', n')]$ $r_1 \perp r_2 \iff v_1$ generatore della direzione di $r_1 \perp v_2$ generatore della direzione di r_2 .

$$v_1 = li + mj + nk \quad v_2 = l'i + m'j + n'k$$

$$v_1 \perp v_2 \iff r_1 \perp r_2 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

Analogamente se r_1, r_2 sono rette in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, $P.d.r_2 = [(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)]$

1.1 Direzione \perp ad un iperpiano

Proposizione 1.1.1

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a r .

Dimostrazione: $P.d.r = [(-b, a)]$ e abbiamo che $(a, b) \cdot (-b, a) = 0$ oppure $(a \cdot i + b \cdot j) \cdot (-b \cdot i + a \cdot j) = 0 \implies [(a, b)] \perp r$. ☺

Proposizione 1.1.2

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b, c)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a π .

Dimostrazione: Sia $v \in V_2$ (π ha spazio di traslazione o V_2). Se $v = (x, y, z) \implies ax + by + cz = 0 \iff (x, y, z) \cdot (a, b, c) = 0 \implies (a, b, c) \perp v \forall v \in V_2$ \odot

Più in generale: sia S_{n-1} un iperpiano in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 \implies [(a_1, a_2, \dots, a_n)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a S_{n-1} .

Proposizione 1.1.3 Ortogonalità tra piani

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $\alpha \perp \beta \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff V_2 \supseteq V_2'^\perp$ dove V_2 è la giacitura di α e V_2' è la giacitura di β .

$$V_2'^\perp = [\mathcal{L}((a', b', c'))] \iff (a', b', c') \in V_2$$

$$(x, y, z) \in V_2 \iff ax + by + cz = 0 \text{ e quindi } (a', b', c') \in V_2 \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0 \quad \odot$$

Proposizione 1.1.4 Ortogonalità tra retta e piano

Siano r : con $P.d.r = [(l, m, n)]$ e sia α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ una retta e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $r \perp \alpha$ se e soltanto se $[(a, b, c)] = [(l, m, n)]$

Dimostrazione: $r \perp \alpha \iff V_1 = V_2^\perp$ dove V_1 è la direzione della retta e V_2 è la giacitura di α .

$$V_1 = \mathcal{L}((l, m, n)) = V_2^\perp = \mathcal{L}((a, b, c)) \iff [(a, b, c)] = [(l, m, n)] \quad \odot$$

Definizione 1.1.1: Distanza tra 2 punti in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Q = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. La distanza tra P e Q è la norma del vettore \vec{PQ}

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$

$$\vec{PQ} = (x'_1 - x_1)e_1 + \dots + (x'_n - x_n)e_n$$

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}$$

Definizione 1.1.2: Caso $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

$$P = (x, y) \quad Q = (x', y')$$

$$\vec{PQ} = (x' - x)i + (y' - y)j$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Caso $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ da aggiungere

Definizione 1.1.3: Distanza tra punto e retta

Siano $P = (x_0, y_0)$ e $r = [Q, V_1]$ rispettivamente un punto e una retta in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Definiamo la **distanza tra il punto P e la retta r** come la distanza tra P e il punto H , piede della perpendicolare per P a r (cioè l'intersezione tra r e la retta perpendicolare a r passante per P).

Determiniamo $||\vec{PH}||$. Se r ha equazione $ax + by + c = 0$ allora $V_1^\perp = \mathcal{L}(a \cdot i + b \cdot j)$.

$$\text{Posta } n = [P, V_1^\perp] \implies n = [P, \mathcal{L}(ai + bj)]$$

$H = n \cap r$ è la proiezione di P su r . (è l'intersezione tra r e la retta per P^\perp).

Sia $P' = (x', y')$ un generico punti su r .

$$ax' + by' + c = 0$$

PH è la componente di PP' lungo v . $PP' = (x' - x_0)i + (y' - y_0)j$.

$$\vec{PH} = \frac{PP' \cdot v}{v \cdot v} v$$

$$d(P, H) = d(P, r) = ||\vec{PH}|| = ||(\frac{PP' \cdot v}{v \cdot v} v)|| = [...] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Da completare

Definizione 1.1.4: Distanza punto piano

Siano $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ un punto e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Definiamo **la distanza** $d(P, \alpha)$ come la distanza tra P e il punto H intersezione tra α e la retta per $p \perp \alpha$.

Dimostrazione: $d(P, \alpha) = d(P, H) = ||\vec{PH}||$. Analogamente al caso piano abbiamo che

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

☺

Definizione 1.1.5: Distanza tra un punto e una retta in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Siano P e $r = [Q, V_1]$ un punto e una retta in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Sia α il piano per P ortogonale a r e sia H l'intersezione tra r e α . Definiamo $d(P, r) = d(P, H) = ||\vec{PH}||$.

Esempio 1.1.1

In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ determiniamo la distanza di $P = (3, 0, 1)$ da $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad P.d.r = [(-1, 1, 0)] = [(a, b, c)] \quad \alpha : -x + y + 0 \cdot z + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per P : $-3 + 0 + d = 0 \quad d = 3 \quad \alpha : -x + y + 3 = 0$

$$\alpha \cap r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y + 3 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 0x + 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \implies x = 2; y = -1$$

$$H : (2, -1, 2) \quad d(P, r) = ||\vec{PH}|| = \vec{PH} = (-1)i + (-1)j + k = -1 - j + k$$

Definizione 1.1.6: Retta di minima distanza

Si dice **retta di minima distanza** tra due rette r, s sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ una retta ortogonale e incidente sia a r che a s .

Proposizione 1.1.5

La retta di minima distanza tra r e s esiste ed è unica.

Definizione 1.1.7: Distanza tra due rette sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definiamo la **distanza tra due rette r e s sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$** come la distanza tra i punti R e S ottenuti intersecando la retta t di minima distanza tra r e s con r e s .

Definizione 1.1.8: Assi

In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ dati due punti P, Q , si dice **asse** del segmento \overline{PQ} la retta passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento \overline{PQ} .

Proposizione 1.1.6

L'asse di un segmento \overline{PQ} è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q .

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $\|\vec{PH}\| = \|\vec{QH}\| \quad \forall H \in a$ (asse di \overline{PQ}).

$$\vec{PH} = \vec{PM} + \vec{MH} \quad e \quad \vec{QH} = \vec{QM} + \vec{MH}$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} \quad \|\vec{QH}\| = \sqrt{\|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} \quad \text{ma} \quad \|\vec{PM}\| = \|\vec{QM}\|$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} = \sqrt{\|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} = \|\vec{QH}\|$$

⊕

Esempio 1.1.2

Determiniamo l'asse di $P = (1, 1)$ e $Q = (2, -4)$. Il punto $M = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\vec{PQ} = (2 - 1)i + (-4 - 1)j = 1 - 5j = (1, -5)$$

$r \perp \vec{PQ}$ per M è del tipo

$$x - 5y + c = 0 \quad \text{e passa per } M$$

$$\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \quad c = -9 \implies r : x - 5y - 9 = 0$$

Alternativamente

$$r : H \in r \iff d(H, P) = d(H, Q)$$

se $H = (x, y)$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \implies r : 2x - 10y - 18 = 0$$

Definizione 1.1.9: Piano assiale

In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si dice **piano assiale** del segmento \overline{PQ} il piano α passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento \overline{PQ} .

Proposizione 1.1.7

Il piano assiale del segmento \overline{PQ} è il luogo dei punti equidistanti tra P e Q .

1.2 Circonferenze in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

Definizione 1.2.1: Circonferenza

Dato un punto $C = (x_0, y_0)$ in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e dato r numero reale positivo. Si dice circonferenza di centro C e raggio r il luogo dei punti aventi distanza r da C .

Sia $P = (x, y)$ appartenente alla circonferenza di centro C e raggio r .

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 + (y - y_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Proposizione 1.2.1 Equazione cartesiana di una circonferenza

Tutte e sole le circonferenze si rappresentano come $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - c > 0$ e avremo che $C = (-a, -b)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Note:-

Se r fosse 0, $a^2 + b^2 - c = 0 \implies x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ è rappresentata solo da $C = (-a, -b)$.

Proposizione 1.2.2

Per tre punti non allineati in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica circonferenza.

1.3 Sfere in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.3.1: Sfera

Sia $C : (x_0, y_0, z_0)$ e sia r un numero reale positivo. Si dice **sfera** di raggio C e di centro r il luogo dei punti aventi distanza r da C .

Sia $P : (x, y, z)$ appartenente alla sfera, allora

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Note:-

Una sfera è una superficie algebrica reale (Analogamente una circonferenza è una curva algebrica reale).

Proposizione 1.3.1 Equazione cartesiana di una sfera

Tutte le sfere si rappresentano come $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ con $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ e avremo che $C = (-a, -b, -c)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Note:-

Se $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ è realizzata dal solo centro $C = (-a, -b, -c)$.

Proposizione 1.3.2

Siano A, B, C, D quattro punti non complanari di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Per A, B, C, D passa un'unica sfera

Il centro della sfera si trova intersecando i piani assiali dei quattro punti. Il raggio è la distanza del centro da uno qualsiasi dei quattro punti.

1.4 Circonferenze in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.4.1: Circonferenza in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Dati un piano α , un suo punto C e un numero reale positivo r . Si dice **circonferenza** di raggio C e raggio r il luogo dei punti di α aventi distanza r da C .

Note:-

Una circonferenza appartiene a infinite sfere. Quindi per tre punti non allineati passano infinite sfere.

Proposizione 1.4.1

Tutte e sole le circonferenze di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ammettono una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \rightarrow \text{piano } \alpha \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r'^2 \end{cases}$$

$$d(C', \alpha) < r' \quad \text{dove} \quad C' = (x_0, y_0, z_0) \quad \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < r'$$

ci sono infinite rappresentazioni ma solo una con il centro C della circonferenza coincidente con il centro C' della sfera.

Il centro della circonferenza C si trova intersecando il piano α con la retta per il centro della sfera C' perpendicolarmente ad α . Utilizziamo il teorema di Pitagora. Conosciamo $\overline{CC'}$ e conosciamo anche il raggio r' della sfera. Quindi

$$r = \sqrt{r'^2 - \overline{CC'}^2}$$

Note:-

Una circonferenza si può ottenere anche intersecando altre superfici con un piano.

Esempio 1.4.1

Si consideri

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \alpha \quad \text{è una circonferenza?}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 7 \quad \text{e siccome } z = 3 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{che descrive una circonferenza.}$$

Ed è una curva algebrica reale di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$.

Capitolo 2

Ampliamento di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

In $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ date due rette r e s o sono parallele o si intersecano in un punto. Se sono parallele

$$r = [P, V_1] \text{ e } s = [Q, W_1] \implies V_1 = W_1$$

quindi la direzione V_1 è l'elemento comune a tutte le rette parallele a r . Poiché il parallelismo è una relazione di equivalenza tra le rette del piano.

2.1 Ampliamento (proiettivo) di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

Definizione 2.1.1: $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

- Punti propri che sono tutti e soli i punti di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$
- I punti impropri che sono le direzioni delle rette del piano ovvero i sottospazi di \mathbb{R}^2 di dimensione 1.

Da cui il nome proprio/improprio per i fasci di rette del piano.

Definizione 2.1.2: Rette

- le rette proprie: le rette di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ unite al loro punto improprio;
- una retta impropria: tutti i punti impropri (r_∞)

Sia $P_\infty \in r_\infty \implies$ non definiamo il vettore $Q\vec{P}_\infty$ con Q proprio/improprio.

La funzione $f : A \times A \rightarrow V_2(\mathbb{R})$

da completare

Proposizione 2.1.1

Due rette distinte di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ sono sempre incidenti.

Dimostrazione: Siano r e s due rette distinte di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

1. r e s sono proprie e non parallele tra loro $\implies r$ è incidente a s in $\mathring{A}_2(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ e il punto improprio di r è diverso da quello di s .
2. r e s sono proprie ma r è parallelo a s .
 $r \cap s = \emptyset$ in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ ma r e s hanno la stessa direzione \implies lo stesso punto improprio.
3. r è propria e $s = r_\infty$.
 $r \cap s = r \cap r_\infty$ è il punto improprio di r .

Completare con il quinto assioma e la spiegazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Note:-

Tutte le rette proprie contengono un solo punto improprio e r_∞ contiene solo punti impropri.

Proposizione 2.1.2

Per due punti distinti di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica retta.

Dimostrazione: Siano A e B i due punti distinti considerati:

1. A, B sono entrambi propri

$$\implies \exists! r \in \mathring{A}_2(\mathbb{R}) \text{ per } A \text{ e } B$$

$$\exists! r \text{ propria per } A \text{ e } B$$

la r_∞ non contiene A e $B \implies \exists! r$ per A e B .

2. A è proprio e B è improprio (o viceversa). $\implies B$ è la direzione $V_1 \implies \exists!$ retta per **completare**

3. A e B sono entrambi impropri. Nessuna retta propria li contiene entrambi (ogni retta propria ha solo 1 punto improprio) $\implies A, B \in r_\infty$ che è l'unica che li contiene entrambi.

2.2 Geometria analitica in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Enti definiti "a meno di un fattore" di proporzionalità:

1. equazioni di rette in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{se } [(a, b, c)] = [(a', b', c')]$$

$$\implies r' : a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{è coincidente a } r$$

2. $[(l, m)] = P.d.r$ è come classe di equivalenza

Indichiamo con ρ la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

$$\frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho} = \{[(x, y, z)] : x, y, z \in \mathbb{R}^3 \text{ e } (x, y, z) \neq \underline{0}\}$$

Quest'insieme definirà le coordinate dei punti.

$$\tilde{A}_2(\mathbb{R}) = \mathring{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathring{A}_\infty$$

Fissiamo il riferimento affine in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

$$\phi : \mathring{A}_2 \cup \mathring{A}_\infty \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

- se P è proprio $(x, y) : \phi(x, y) = [(x, y, 1)]$
- se P è improprio $P : [(l, m)] \quad \phi(P) = [(l, m, 0)]$

Proposizione 2.2.1

ϕ è una biiezione tra $\tilde{A}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$

Osservazione: Sia P di coordinate omogenee $[(x_1, x_2, x_3)]$ con $x_3 \neq 0$

$$\left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \right]$$

P è proprio $P = (x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$

Sia invece $x_3 = 0$

$$P = [(x_1, x_2, 0)] \quad [(l, m)] = [(x_1, x_2)]$$

P non ha coordinate affini (non omogenee) \implies è improprio.

2.3 Rappresentazione delle rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Sia $RA[O, B = (e_1, e_2)]$ un riferimento affine di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$. In $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ l'equazione cartesiana di una retta è $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Sui punti propri $P = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \right]$ dovrà valere $ax + by + c = 0$

$$a \left(\frac{x_1}{x_3} \right) + b \left(\frac{x_2}{x_3} \right) + c = 0 \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Il punto improprio di $ax + by + c = 0$ è $[(-b, a, 0)]$. Sostituiamo in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ $[(-b, a, 0)]$

$$a(-b) + ba + 0 = 0$$

$\implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è l'equazione omogenea di una retta r di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

Siano ora $(a, b) = (0, 0)$, allora $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ si riduce a $0x_1 + 0x_2 + cx_3 = 0$ con $c \neq 0$, $cx_3 = 0$, $x_3 = 0$ è la r_∞ perché rispettata da tutti e soli i punti impropri. L'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta, in ogni caso, una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$. Di conseguenza è l'equazione cartesiana di una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

2.4 Complessificazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

$\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ = piano affine ampliato e **complessificato**.

Osservazione:

- **punti:** terne ($\neq \underline{0}$) di numeri complessi determinati a meno di un fattore di proporzionalità complesso e non nullo.

$$\frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

- **rette:** luogo delle autosoluzioni (soluzioni non nulle) di un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq \underline{0} \text{ e } a, b, c \in \mathbb{C}$$

Definizione 2.4.1: Punti e rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si dicono:

- **punti e rette reali** i punti e le rette che ammettono una rappresentazione reale
- **punti e rette immaginari** i punti e le rette che ammettono solo rappresentazioni immaginarie

Esempio 2.4.1

$P : [(4, 3 + i, 1)]$ è immaginario.

Dimostrazione: Sia $a + ib \in \mathbb{C} : P = (4(a + ib), (3 + i)(a + ib), a + ib)$ con x_1, x_2, x_3 reali, quindi

$x_3 = a + ib \implies x_3 = a$. $P = [(4a, (3+i)a, a)]$, ma $a \neq 0$ $(3+i)a$ non è reale $\implies P$ non è reale. ☹

Definizione 2.4.2: Coniugati

Si dicono **coniugati** due enti (punti, rette ecc...) che ammettono rappresentazioni coniugate.

Proposizione 2.4.1

Un ente geometrico (punto, retta, curva ecc...) è reale se, e soltanto se, coincide con il proprio coniugato.

Note:-

Una retta reale ha infiniti punti immaginari

Esempio 2.4.2

$x_1 = 0 \implies [(0, x_2, x_3)] \implies [(0, a + ib, 1)]$ sono tutti immaginari.

Osservazione: Se un'equazione reale è realizzata da un punto $P \implies \bar{P}$ è soluzione se r è reale e $P \in r \implies \bar{P} \in \bar{r} = r$.

Proposizione 2.4.2

La retta che congiunge due punti P e \bar{P} immaginari e coniugati è reale.

Dimostrazione: $P \in r$ e $\bar{P} \in r$ per costruzione. Poiché $P \neq \bar{P}$ $r = rt(P, \bar{P})$. Poiché $P \in r \implies \bar{P} \in \bar{r}$ e $\bar{P} \in r \implies \bar{\bar{P}} \in \bar{r}$, ma $\bar{\bar{P}} = P \in \bar{r}$. $\implies \bar{P}$ e $P \in \bar{r} \implies \bar{r} = rt(P, \bar{P})$. Per l'unicità della retta per P e $\bar{P} \implies r = \bar{r} \implies r$ è reale. ☹

Proposizione 2.4.3

Per un punto P immaginario ($P \neq \bar{P}$) passa un'unica retta reale.

Dimostrazione: La retta $rt(P, \bar{P})$ è reale per la proposizione precedente. Supponiamo per assurdo che $\exists s \neq rt(P, \bar{P})$ reale per P . $\implies \bar{P} \in s$ poiché s è reale. $s = rt(P, \bar{P})$ che è **assurdo!**. Quindi esiste ed è unica la retta r reale per P . ☹

Proposizione 2.4.4

Due rette immaginarie e coniugate si intersecano in un punto reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Sia r immaginaria $\implies r \neq \bar{r}$. Sia $P = r \implies \bar{P} \in \bar{r}$. $P \in \bar{r} \implies \bar{P} \in \bar{r} = r$. $\bar{P} \in r \cap \bar{r} = P \implies \bar{P} = P \implies P$ è reale. ☹

Proposizione 2.4.5

Ogni retta r immaginaria ha un unico punto reale in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Per ipotesi $r \neq \bar{r} \implies \exists P$ intersezione di r e \bar{r} . Quindi per la proposizione precedente P è reale. Sia $S \in r$ un punto reale. Essendo reale $S = \bar{S} \implies S \in \bar{r} \implies S \implies S \in r \cap \bar{r}$. Quindi per l'unicità del punto di intersezione, $S = P$. ☹

Definizione 2.4.3: Curve algebriche reali in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ è il luogo delle autosoluzioni di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dove $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali nelle variabili x_1, x_2, x_3 .

Osservazione: Ogni curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ che contiene un punto P contiene anche \bar{P} .

Esempio 2.4.3

Per esempio prendiamo una circonferenza

$$x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0 \quad r^2 = a^2 + b^2 - c = 0$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0 \quad C : (-a, -b)$$

Ora consideriamo l'equazione

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0 \quad \text{in } \tilde{A}_2(\mathbb{C}) \quad x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} + a\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} + b\right)^2 = 0$$

Moltiplichiamo dentro entrambi i membri per x_3 e sviluppiamo

$$x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 + x_2^2 + 2bx_2x_3 + b^2x_3^2 = 0$$

$$1 + 2a + a^2 + 1 + 2b + b^2 = 0$$

Definizione 2.4.4: Curva riducibile

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una curva $F(x_1, x_2, x_3)$ si dice riducibile se F è il prodotto di polinomi di grado più basso.

Esempio 2.4.4

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)^{n_1} \cdot F_2(x_1, x_2, x_3)^{n_2} \cdot F_3(x_1, x_2, x_3)^{n_3}$$

$$\deg(F) = n_1 \deg(F_1) + \dots + n_t \deg(F_t)$$

Osservazione: Geometricamente una curva riducibile si riduce in componenti ottenute uguagliando a zero i vari fattori.

Definizione 2.4.5: Ordine

Si dice **ordine** di una curva algebrica in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il grado del polinomio F che la definisce.

Teorema 2.4.1 Teorema dell'ordine

L'ordine di una curva algebrica reale è uguale al numero di intersezioni in comune con una qualsiasi retta r di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ a patto che

1. r non sia componente della curva
2. le intersezioni siano contate con la loro molteplicità

Definizione 2.4.6: Punti semplici ed r-upli

Sia C una curva algebrica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$

- P si dice **semplice** se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità unitaria ed esiste un'unica retta, chiamata retta tangente, con molteplicità di intersezione in P maggiore di 1.
- P si dice **r-uplo** (doppio, triplo, ecc...) se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità r , ed esistono r (contate con la loro molteplicità) rette con molteplicità di intersezione in P maggiore di r (rette tangenti).

Proposizione 2.4.6

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Se una retta r ha più di n intersezioni con n l'ordine di C , allora r è componente di C .

Dimostrazione: Per il teorema dell'ordine se r non fosse componente della curva C avrebbe esattamente n intersezioni con C (a patto di contarle con la dovuta molteplicità). \odot

Proposizione 2.4.7

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n . Allora C non possiede punti $(n+1)$ -upli.

Dimostrazione: Dato che C è di ordine $n \implies \exists r \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ non componente di C passante per un punto dato di C . Sia, per assurdo, P un punto $(n+1)$ -uplo.

$$|r \cap C| \geq n+1 \quad \text{perché passa per } P$$

ma dato che r non è componente, il teorema dell'ordine

$$|r \cap C| = n < n+1$$

Assurdo! \odot

Proposizione 2.4.8

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n . C ha un punto n -uplo P se, e soltanto se, C è unione di n rette (contate con la dovuta molteplicità) per P .

Dimostrazione: " \implies " Sia $P \neq Q \in C$ e sia r la retta $rt(P, Q)$. Supponiamo per assurdo r non sia componente allora per il teorema dell'ordine

$$n = |r \cap C| \geq \underbrace{n}_{\in P} + \underbrace{1}_{\in Q}$$

Assurdo! Quindi per ogni punto $Q \in C$ la retta PQ è componente $\implies C$ è unione di rette per P . Quindi queste rette sono $n = \deg(F) =$ ordine di C .

" \Leftarrow " Sia C unione di n rette per P . Allora la generica retta per P non componente di C interseca C sono in $P \implies P$ è punto n -uplo. \odot

Definizione 2.4.7: Punto multiplo

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$. Se P non è un punto semplice allora si dice **punto multiplo**.

Teorema 2.4.2

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n e sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ il polinomio omogeneo che la definisce. I punti multipli di C sono le classi di autosoluzioni del sistema associato alle derivate:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 0 \end{cases}$$

Esempio 2.4.5

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 3x_2x_3 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0$$

Capitolo 3

Coniche in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Definizione 3.0.1: Conica

Si dice **conica** una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ (curva piana) del secondo ordine. Una conica si rappresenta eguagliando a 0 un polinomio omogeneo F di secondo grado nelle variabili x_1, x_2, x_3 , a coefficienti reali. La generica equazione della conica è

$$C : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Se chiamiamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere l'equazione come prodotto righe per colonne

$${}^tXAX = 0$$

A è una matrice reale e simmetrica ed è detta **matrice della conica**.

Esempio 3.0.1

Consideriamo la conica

$$-x_1^2 + ax_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo il prodotto

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 \quad -\frac{3}{2}x_2 + 6x_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1(-x_1 + 2x_2) + x_2\left(2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3\right) + x_3\left(-\frac{3}{2}x_2 + 6x_3\right) = 0$$

$$-x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

Osservazione: L'equazione della generica conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ dipende da 6 coefficienti definiti a meno di un fattore di proporzionalità. Quindi le coniche di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ sono ∞^5 .

Proposizione 3.0.1

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ riducibile. Allora C è unione di 2 rette

1. reali e distinte
2. reali e coincidenti
3. immaginarie e coniugate

Dimostrazione: Sia C conica associata al polinomio $F = (x_1, x_2, x_3) = 0$. Se C è riducibile $F = (x_1, x_2, x_3) = F_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot F_2 = (x_1, x_2, x_3)$ dove F_1 e F_2 hanno grado unitario, quindi rappresentano delle rette e di conseguenza C è unione di due rette r_1 e r_2 . Se r_1 e r_2 sono entrambe reali siamo nei casi 1 o 2. Se invece r_1 è immaginaria, \bar{r}_1 è ancora componente di C (per ogni $P \in r_1$, $\bar{P} \in C$), ma $r_1 \neq \bar{r}_1 \implies \bar{r}_1 = r_2 \implies C$ si riduce in due rette immaginarie e coniugate. ☺

Osservazione: Se r è immaginaria anche \bar{r} lo è. Infatti $r \neq \bar{r}$ e quindi $\bar{\bar{r}} = r$.

Proposizione 3.0.2

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una conica

1. non ha punti tripli
2. ha un punto doppio se, e soltanto se, è riducibile. E abbiamo due possibilità
 - (a) ha solo un punto doppio P e si riduce in due rette distinte per P
 - (b) ha almeno due punti doppi allora ne ha ∞^1 e si fattorizza in una retta reale contata due volte

Dimostrazione: " \implies " Per ipotesi C ha punto doppio P . Sia $R \in C$ e consideriamo la retta $r = rt(P, R)$, se non fosse componente avrebbe

$$|r \cap C| \geq 2 + 1 = 3 \quad \text{intersezioni con } C$$

Assurdo! Questo è in contraddizione con il teorema dell'ordine.

" \impliedby " Sia C riducibile. Allora $C = r_1 \cup r_2$. Sia $P \in r_1 \cap r_2$ e sia r una retta per P diversa r_1 e da r_2 . Quindi $r \cap C = P$. Per il teorema dell'ordine P ha molteplicità doppia e abbiamo due casi

1. se $r_1 = r_2$ abbiamo ∞^1 punti doppi e $C = r_1 \cup r_1$
2. altrimenti abbiamo un **solo** P punto doppio che è $r_1 \cap r_2$

Dobbiamo dimostrare che esiste un solo punto. Siano per assurdo P_1 e P_2 punti doppi e sia $C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$. Sia $Q \in r_2$ con $P_2 \in r_1$, allora

$$|rt(P_2, Q) \cap C| \geq \underbrace{2}_{P_2} + \underbrace{1}_Q$$

Per il teorema dell'ordine $rt(P_2, Q)$ è componente. **Assurdo!** Perché avremmo 3 componenti $(r_1, r_2, rt(P_2, Q))$. ☺

Definizione 3.0.2: Coniche generali o degeneri

Una conica si dice

- **generale** se è priva di punti doppi \implies se non è riducibile
- **semplicemente degenera** se ha un solo punto doppio $\implies C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$
- **doppiamente degenera** se ha ∞^1 punti doppi $\implies C = r \cup r$

Teorema 3.0.1

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ i punti doppi di una conica C si trovano considerando le classi di autosoluzioni del sistema omogeneo

$$AX = \underline{0}$$

dove A è la matrice associata a C .

Dimostrazione:

$C : F(x_1, x_2, x_3) = 0$ dove F è:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

i punti doppi si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Possiamo dividere tutti i fattori per 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow AX = \underline{0}$$

☺

Teorema 3.0.2

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una conica $C : {}^tXAX = 0$ è

1. generale se $\rho(A) = 3$
2. semplicemente degenere se $\rho(A) = 2$
3. doppiamente degenere se $\rho(A) = 1$

Dimostrazione: Dimostriamo tutti i casi singolarmente:

1. C è generale se non ha punti doppi. Se $AX = \underline{0}$ ha solo la soluzione nulla $\iff \rho(A) = 3$.
2. C è semplicemente degenere se ha un solo punto doppio. $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^1 $\iff \rho(A) = 2$
3. C è doppiamente degenere se ha ∞^1 punti doppi $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^2 soluzioni (se $[(x_1, x_2, x_3)]$ è soluzione $[(2x_1, 2x_2, 2x_3)]$ è lo stesso punto doppio) $\iff \rho(A) = 1$

☺

3.1 Classificazione affine di una conica generale

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e r una retta osserviamo che $r \cap C =$

1. due punti reali e distinti
2. un punto reale con molteplicità doppia
3. due punti immaginari e coniugati

Se consideriamo la r_∞ questa casistica ci dà la classificazione affine delle coniche generali.

Definizione 3.1.1: Ellisse, iperbole e parabola

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia C generale. Allora $C \cap r_\infty$ è data dai due punti P, Q (non necessariamente distinti) e C si dice:

1. **ellisse** se P e Q sono immaginari e coniugati;
2. **iperbole** se P e Q sono reali e distinti;
3. **parabola** se P e Q sono reali e coincidenti.

3.2 Condizioni analitiche

Sia C una conica generale di equazione

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

La r_∞ ha equazione $x_3 = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 = C \cap r_\infty \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Almeno uno fra $x_1, x_2 \neq 0$. Supponiamo $x_2 \neq 0$ e dividiamo per x_2^2

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_2} + a_{22} = 0$$

La risolviamo in $\frac{x_1}{x_2}$. Se

1. $\frac{\Delta}{4} > 0$ abbiamo due soluzioni reali e distinte \implies **iperbole**;
2. $\frac{\Delta}{4} = 0$ abbiamo due soluzioni coincidenti \implies **parabola**;
3. $\frac{\Delta}{4} < 0$ abbiamo due soluzioni immaginarie e coniugate \implies **ellisse**.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{2a_{12}}{2}\right)^2 - a_{11}a_{22} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{poniamo} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{\Delta}{4}$$

Se C è una conica generale ($|A| \neq 0$) allora si applicano le casistiche sopra elencate.

Definizione 3.2.1: Polarità associata ad una conica

Data una conica $C : {}^tXAX = 0$ e dati due punti del piano ($\tilde{A}_2(\mathbb{C})$)

$$P' = [(x'_1, x'_2, x'_3)] \quad e \quad P'' = [(x''_1, x''_2, x''_3)]$$

si dice che P' è coniugato a P'' rispetto a C se

$${}^tX'AX'' = 0 \quad \text{con} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad e \quad X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Sia P' coniugato a P'' , ovvero

$${}^tX'AX'' = 0 \implies {}^t({}^tX'AX'') = 0 = {}^tX''{}^tA({}^tX') = {}^tX''AX' = 0 \implies P'' \text{ è coniugato a } P'$$

Quindi la relazione di coniugio è simmetrica \implies potremo dire semplicemente che P' e P'' sono coniugati.

Definizione 3.2.2: Polare

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si dice **polare** di P rispetto a C il luogo dei punti Q coniugati di P rispetto alla conica C .

Proposizione 3.2.1

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ la polare di un punto P rispetto ad una conica generale è **una retta**.

Dimostrazione: Siano $[(x'_1, x'_2, x'_3)] = P$ allora $Q = [(x_1, x_2, x_3)]$ appartiene alla polare di P se e soltanto se

$$(x'_1, x'_2, x'_3)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (x'_1, x'_2, x'_3)A = (a, b, c)$$

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Dimostriamo che $(a, b, c) \neq \underline{0}$. Sia per assurdo $(a, b, c) = \underline{0} \implies (x'_1, x'_2, x'_3)A = \underline{0}$

$$\iff {}^tA \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ è le coordinate di un punto doppio $\implies P$ è un punto doppio di $C \implies$ ma C è generale \implies **assurdo!**
 $\implies (a, b, c) \neq \underline{0} \implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è una retta. Essa è chiamata retta polare di P rispetto a C . \odot

Definizione 3.2.3

P è detto polo della sua retta polare. La relazione **polo** \leftrightarrow **polare** è detta polarità ed è una biiezione.

3.2.1 Principio di reciprocità

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$, sia $P \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia p la polare di P . Allora

1. le polari dei punti di p passano per P .

Dimostrazione: Sia $Q \in p \implies Q, P$ sono coniugati $\implies P \in q$ di Q . \odot

2. i poli delle rette per P appartengono a p .

Dimostrazione: Sia q una retta per P . Il polo Q di q è coniugato a tutti i punti di $q \implies Q$ è coniugato a $P \implies Q \in p$. \odot

Proposizione 3.2.2

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Allora

1. sia $P \in C \implies$ la polare p di P è la retta tangente a C in P .

Dimostrazione: Sia P di coordinate $x_P = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ appartenente alla conica allora la polare di P ha equazione ${}^t X_P A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ che è la formula della retta tangente a C in P . \odot

2. Sia $P \notin C$. La polare di P è la congiungente dei due punti T_1 e T_2 ottenuti intersecando le tangenti t_1 e t_2 alla conica per P .

Dimostrazione: $T_1 \in C \implies$ la polare di T_1 rispetto a C è t_1 . $P \in t_1 \implies P$ appartiene alla polare di T_1 . Quindi per il principio di reciprocità T_1 appartiene alla polare di $P \implies T_1 \in p$. Analogamente $T_2 \in C \implies$ la polare di T_2 è t_2 e $P \in t_2 \implies T_2 \in p$. Quindi $T_1, T_2 \in p \implies p$ è la congiungente di T_1 e T_2 . \odot

Osservazione: Equivalentemente il punto 2 si può riscrivere

Proposizione 3.2.3

Se $P \notin C$ la sua polare p si ottiene congiungendo i punti T_1 e T_2 di tangenza delle tangenti per P .

Definizione 3.2.4: Centro e diametri di una conica

Si dice **centro** di una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il polo della retta impropria. Si dicono **diametri** di una conica generale le rette polari dei punti impropri.

Osservazione: Per il principio di reciprocità i diametri passano per il centro della conica. Quindi sono il fascio proprio (se c'è proprio) di rette per C .

Per determinare le coordinate del centro dobbiamo scegliere due punti $X_\infty = [(1, 0, 0)]$, punto improprio dell'asse x , e $Y_\infty = [(0, 1, 0)]$, punto improprio dell'asse y . La polare di X_∞ è

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

Analogamente la polare di y_∞ è

$$\begin{cases} a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & P_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & P_2 \end{cases}$$

Il centro C è proprio se P_1 e P_2 non sono paralleli. Se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^*| \neq 0$$

Il centro è un punto proprio. Quindi il centro è un punto proprio se C è un'ellisse o un'iperbole. Quindi in questo caso i diametri sono un fascio proprio di rette di centro C .

$$F: \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Equazione del fascio dei diametri. Se C è una parabola $\implies |A^*| = 0 \implies P_1$ parallelo a $P_2 \implies$ il centro è un punto improprio. \implies i diametri formano un fascio improprio di equazione

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + kx_3 = 0 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{C}$$

fascio improprio dei diametri della parabola.

3.3 Asintoti di una conica

Definizione 3.3.1: Asintoti

Si dicono **asintoti** di una conica le rette proprie tangenti alla conica nei suoi punti impropri.

Osservazione: Gli asintoti di una conica sono quindi le rette polari nei suoi punti impropri. Gli asintoti sono quindi dei diametri e passano per il centro. Se il centro è proprio (cioè se C è un'ellisse o un'iperbole) gli asintoti sono le rette che congiungono il centro con i punti impropri di C .

Proposizione 3.3.1

La parabola è una conica con centro improprio e priva di asintoti.

Dimostrazione: Sia C una parabola $\implies C$ è tangente alla retta impropria in un punto che chiamiamo P_∞ . Quindi la retta polare di P_∞ è $r_\infty \implies$ il polo della r_∞ è $P_\infty \implies$ il punto P_∞ è il centro della parabola. Osserviamo che C ha solo un punto improprio $P_\infty \implies$ ammette solo una tangente nel suo punto improprio. Ma t è la $r_\infty \implies$ la r_∞ non è un asintoto. \odot

Definizione 3.3.2: Coniche a centro

Diremo che l'iperbole e l'ellisse sono coniche **a centro**, mentre la parabola è detta conica **non a centro**.

3.4 Proprietà metriche

Definizione 3.4.1: Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice **equilatera** se i suoi asintoti sono ortogonali.

Proposizione 3.4.1

Una conica generale è un'iperbole equilatera se, e soltanto se, $a_{11} + a_{22} = 0$.

Esempio 3.4.1

Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$:

$$C : 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 1 = 0$$

sia un'iperbole equilatera.

1. $2k = -(-4) \rightarrow k = 2$
2. Sostituiamo dentro all'equazione e scriviamola in forma omogenea

$$4x_1^2 + 0x_1x_2 - 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = 0 \quad A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$k = 2$ dà luogo ad un'iperbole equilatera.

Definizione 3.4.2: Ortogonale al punto improprio

Diremo che la retta p di parametri direttori $[(l', m')]$ è ortogonale al punto improprio $P : [(l, m, 0)]$ se $ll' + mm' = 0$.

Definizione 3.4.3: Asse di una conica

Si dice **asse** di una conica ogni diametro ortogonale al proprio polo.

Definizione 3.4.4: Vertici

Si dicono **vertici** le intersezioni proprie della conica con i propri assi.

3.5 Condizioni analitiche

Proposizione 3.5.1

Gli assi di una conica a centro (ellisse o iperbole) sono due e sono ortogonali tra loro, a meno che non si tratti di una circonferenza generalizzata, in tal caso tutti i diametri sono assi.

Dimostrazione: Per definizione i diametri sono le polari dei punti impropri. Dato $P_\infty : [(l, m, 0)]$

$$(l \quad m \quad 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Il generico diametro è:

$$(la_{11} + ma_{12} \quad la_{12} + ma_{22} \quad la_{13} + ma_{23}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(la_{11} + ma_{12})x_1 + (la_{12} + ma_{22})x_2 + (la_{13} + ma_{23})x_3 = 0$$

$$p.d.d : [(-la_{12} - ma_{22}, la_{11} + ma_{12})]$$

Il polo di d è $P_\infty : [(l, m, 0)]$. d è un asse se è ortogonale a P_∞ ovvero se

$$l(-la_{12} - ma_{22}) + m(la_{11} + ma_{12}) = 0$$

$$-l^2a_{12} + ml(-a_{22} + a_{11}) + m^2a_{12} = 0 \quad l^2a_{12} + ml(a_{22} - a_{11}) - m^2a_{12} = 0$$

$$a_{12} \left(\frac{l}{m} \right)^2 + \frac{l}{m}(a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0$$

Se $a_{12} = 0$ e $a_{22} = a_{11}$ l'equazione è risolta da tutte le coppie (l, m) . Quindi se la conica è una circonferenza generalizzata tutti i diametri sono assi. I due assi hanno polo $P_\infty : [(l', m', 0)]$ e $Q_\infty : [(l'', m'', 0)]$. Sia p' l'asse associato al polo P_∞ e sia A_∞ il suo punto improprio. Sia a la retta che congiunge il centro al punto improprio $rt(C, P_\infty)$, per ipotesi $a \perp p'$. a contiene P_∞ che è il polo di p' , quindi per il principio di reciprocità p' contiene il polo di a . Il polo di a è improprio (perché a è diametro) \implies il punto improprio di a è A_∞ , ma A_∞ è ortogonale alla direzione di $a \implies a$ è un asse. Quindi i due assi sono ortogonali. ☺

Proposizione 3.5.2

La parabola ha un unico asse e un solo vertice v . Inoltre la tangente alla parabola in v è ortogonale all'asse.

Dimostrazione: Il punto P_∞ di una parabola è $[(-a_{12}, a_{11}, 0)]$. I $p.d.d = [(-a_{12}, a_{11})]$. La direzione ortogonale è data da $[(a_{11}, a_{12})]$, quindi il punto P_∞ è $[(a_{11}, a_{12}, 0)]$. Da cui segue che l'asse è unico ed è la polare di $(a_{11}, a_{12}, 0)$. Sostituendo nell'equazione del fascio improprio dei diametri abbiamo che l'asse ha equazione:

$$a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

☺