Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

0.1 Geometria analitica in $E_n(\mathbb{R})$

Definizione 0.1.1

In $E_n(\mathbb{R})$ si dice **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia $RC = [O, \mathcal{B}]$ dove O è un punto di $E_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ è una base ortonormale.

Note:-

1. In $E_2(\mathbb{R})$ si conviene indicare la base ortonormale come $\mathcal{B} = (i, j)$
2. In $E_3(\mathbb{R})$ si conviene indicare la base ortonormale come $\mathcal{B} = (i, j, k)$

0.2 Ortogonalità

Ortogonalità fra rette

Siano r_1, r_2 due rette di $E_2(\mathbb{R})$ e sia $r_1 = [P, f(v)]$ con $v = li + mj$, analogamente $r_2 = [P, f(v')]$ con $v' = l'i + m'j$

$$v \perp v' \iff ll' + mm' = 0$$

se r_1 ha equazione $ax + by + c = 0$ e r_2 ha equazione $a'x + b'y + c' = 0$ allora $P.d.r_1 = [(-b, a)]$, e $P.d.r_2 = [(-b', a')]$ quindi

$$r_1 \perp r_2 \iff -b(-b') + aa' = bb' + aa' = 0$$

Se abbiamo due rette r_1, r_2 in $E_3(\mathbb{R})$ con $p.d.r_1 = [(l, m, n)]$, $p.d.r_2 = [(l', m', n')]$ allor a $r_1 \perp r_2 \iff v_1$, cioè il generatore della direzione della retta r_1, è ortogonale a v_2, che è generatore della direzione della retta r_2.

$$v_1 = li + mj + nk \qquad v_2 = l'i + m'j + n'k$$

$$v_1 \perp v_2 \iff r_1 \perp r_2 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

Analogamente se r_1, r_2 sono rette in $E_n(\mathbb{R})$ con $p.d.r_1 = [(x_1, x_2, ..., x_n)]$, $p.d.r_2 = [(x'_1, x'_2, ..., x'_n)]$

$$r_1 \perp r_2 \iff x_1x'_1 + x_2x'_2 + \ldots + x_nx'_n = 0$$

Direzione ortogonale a un iperpiano

Proposizione 0.2.1

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $E_2(\mathbb{R})$, allora $[(a, b)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a r.

Dimostrazione: Per ipotesi $p.d.r = [(-b, a)]$ e abbiamo che per essere ortogonale la direzione $(a, b)(-b, a) = 0$ oppure equivalentemente $(ai + bj)(-bi + aj) = 0 \implies [(a, b)] \perp r$. 😊

Proposizione 0.2.2

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano in $E_3(\mathbb{R})$, allora $[(a, b, c)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a π.

Dimostrazione: Sia $v \in V_2$ tale che pi ha spazio di traslazione V_2. Se $v = (x, y, z) \implies ax + by + cz = 0 \iff (x, y, z)(a, b, c) = 0 \implies (a, b, c) \perp v \ \forall v \in V_2$ 😊

Proposizione 0.2.3

Più in generale: sia S_{n-1} un iperpiano in $E_n(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0 \implies [(a_1, a_2, ..., a_n)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a S_{n-1}.

Ortogonalità fra piani in $E_3(\mathbb{R})$

Proposizione 0.2.4

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani in $E_3(\mathbb{R})$, allora $\alpha \perp \beta \iff aa' + bb' + cc' = 0$

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff V_2 \supseteq V_2'^{\perp}$ dove V_2 è la giacitura di α e V'_2 è la giacitura di β.

$$V_2'^{\perp} = [\mathcal{L}((a', b', c'))] \iff (a', b', c') \in V_2$$

$(x, y, z) \in V_2 \iff ax + by + cz = 0$ e quindi $(a', b', c') \in V_2 \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$ 😊

Proposizione 0.2.5 Ortogonalità tra retta e piano

Siano r : con $P.d.r = [(l,m,n)]$ e sia α di equazione $ax+by+cz+d=0$ una retta e un piano di $E_3(\mathbb{R})$. Allora $r \perp \alpha$ se e soltanto se $[(a,b,c)] = [(l,m,n)]$

Dimostrazione: $r \perp \alpha \iff V_1 = V_2^\perp$ dove V_1 è la direzione della retta e V_2 è la giacitura di α.

$$V_1 = \mathcal{L}((l,m,n)) = V_2^\perp = \mathcal{L}((a,b,c)) \iff [(a,b,c)] = [(l,m,n)]$$

😄

Definizione 0.2.1: Distanza tra 2 punti in $E_3(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $Q = (x_1' x_2', ..., x_n')$. La distanza tra P e Q è la norma del vettore $\vec{PQ}$

$$d(P,Q) = ||\vec{PQ}|| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$

$$\vec{PQ} = (x_1' - x_1)e_1 + ... + (x_n' - x_n)e_n$$

$$||\vec{PQ}|| = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + ... + (x_n' - x_n)^2}$$

Definizione 0.2.2: Caso $E_2(\mathbb{R})$

$$P = (x,y) \quad Q = (x',y')$$

$$\vec{PQ} = (x'-x)i + (y'-y)j$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

Caso $E_3(\mathbb{R})$ da aggiungere

Definizione 0.2.3: Distanza tra punto e retta

Siano $P = (x_0, y_0)$ e $r = [Q, V_1]$ rispettivamente un punto e una retta in $E_2(\mathbb{R})$. Definiamo la **distanza tra il punto P e la retta r** come la distanza tra P e il punto H, piede della perpendicolare per P a r (cioè l'intersezione tra r e la retta perpendicolare a r passante per P).

Determiniamo $||\vec{PH}||$. Se r ha equazione $ax+by+c=0$ allora $V_1^\perp = \mathcal{L}(a \cdot i + b \cdot j)$.

$$\text{Posta} \quad n = [P, V_1^\perp] \implies n = [P, \mathcal{L}(ai+bj)]$$

$H = n \cap r$ è la proiezione di P su r. (è l'intersezione tra r e la retta per $P^\perp$).

Sia $P' = (x', y')$ un generico punti su r.

$$ax' + by' + c = 0$$

PH è la componente di PP' lungo v. $PP' = (x'-x_0)i + (y'-y_0)j$.

$$\vec{PH} = \frac{PP' \cdot v}{v \cdot v} v$$

$$d(P,H) = d(P,r) = ||\vec{PH}|| = ||(\frac{\vec{PP'} \cdot v}{v \cdot v} v)|| = [...] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Da completare

Definizione 0.2.4: Distanza punto piano

Siano $P = (x_0, y_0, x_0)$ e $\alpha : ax+by+cz+d=0$ un punto e un piano di $E_3(\mathbb{R})$. Definiamo **la distanza** $d(P,\alpha)$ come la distanza tra P e il punto H intersezione tra α e la retta per $p \perp \alpha$.

Dimostrazione: $d(P,\alpha) = d(P,H) = ||\vec{PH}||$. Analogamente al caso piano abbiamo che

$$d(P,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

😄

Definizione 0.2.5: Distanza tra un punto e una retta in $E_3(\mathbb{R})$

Siano P e $r = [Q, V_1]$ un punto e una retta in $E_3(\mathbb{R})$. Sia α il piano per P ortogonale a r e sia H l'intersezione tra r e α. Definiamo $d(P,r) = d(P,H) = ||\vec{PH}||$.

Esempio 0.2.1

In $E_3(\mathbb{R})$ determiniamo la distanza di $P = (3,0,1)$ da $r : \begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad P.d.r = [(-1,1,0)] = [(a,b,c)] \qquad \alpha : -x+y+0\cdot z+d=0$$

Imponiamo il passaggio per P : $\quad -3+0+d=0 \quad d=3 \quad \alpha : -x+y+3=0$

$$\alpha \cap r : \begin{cases} x+y=1 \\ -x+y+3=0 \\ z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ 0x+2y=-2 \\ z=2 \end{cases} \implies x=2;\ y=-1$$

$$H:(2,-1,2) \quad d(P,r) = ||\vec{PH}|| = \vec{PH} = (-1)i + (-1)j + k = -1 - j + k$$

Definizione 0.2.6: Retta di minima distanza

Si dice **retta di minima distanza** tra due rette r, s sghembe in $E_3(\mathbb{R})$ una retta ortogonale e incidente sia a r che a s.

Proposizione 0.2.6

La retta di minima distanza tra r e s esiste ed è unica.

Definizione 0.2.7: Distanza tra due rette sghembe in $E_3(\mathbb{R})$

Definiamo **la distanza tra due rette r e s sghembe in** $E_3(\mathbb{R})$ come la distanza tra i punti R e S ottenuti intersecando la retta t di minima distanza tra r e s con r e s.

Definizione 0.2.8: Assi

In $E_2(\mathbb{R})$ dati due punti P, Q, si dice **asse** del segmento $\overline{PQ}$ la retta passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento $\overline{PQ}$.

Proposizione 0.2.7

L'asse di un segmento $\overline{PQ}$ è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $||\vec{PH}|| = ||\vec{QH}|| \quad \forall H \in a$ (asse di $\overline{PQ}$).

$$\vec{PH} = \vec{PM} + \vec{MH} \quad e \quad \vec{QH} = \vec{QM} + \vec{MH}$$

$$||\vec{PH}|| = \sqrt{||PM||^2 + ||MH||^2} \quad ||\vec{QH}|| = \sqrt{||QM||^2 + ||MH||^2} \quad \text{ma} \quad ||PM|| = ||QM||$$

$$||\vec{PH}|| = \sqrt{||PM||^2 + ||MH||^2} = \sqrt{||QM||^2 + ||MH||^2} = ||\vec{QH}||$$

😊

Esempio 0.2.2

Determiniamo l'asse di $P = (1, 1)$ e $Q = (2, -4)$. Il punto $M = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\vec{PQ} = (2-1)i + (-4-1)j = 1 - 5j = (1, -5)$$

$r \perp \vec{PQ}$ per M è del tipo

$$x - 5y + c = 0 \quad \text{e passa per } M$$

$$\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \quad c = -9 \implies r: \ x - 5y - 9 = 0$$

Alternativamente

$$r: \ H \in r \iff d(H, P) = d(H, Q)$$

se $H = (x, y)$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \implies r: \ 2x - 10y - 18 = 0$$

Definizione 0.2.9: Piano assiale

In $E_3(\mathbb{R})$ si dice **piano assiale** del segmento $\overline{PQ}$ il piano α passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento $\overline{PQ}$.

Proposizione 0.2.8

Il piano assiale del segmento $\overline{PQ}$ è il luogo dei punti equidistanti tra P e Q.

0.3 Circonferenze in $E_2(\mathbb{R})$

Definizione 0.3.1: Circonferenza

Dato un punto $C = (x_0, y_0)$ in $E_2(\mathbb{R})$ e dato r numero reale positivoSi dice circonferenza di centro C e raggio r il luogo dei punti aventi distanza r da C.

Sia $P = (x, y)$ appartenente alla circonferenza di centro C e raggio r.

$$d(P, C) = \sqrt{(x-x_0)^2 x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 + (y-y_0)^2} = r \iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Proposizione 0.3.1 Equazione cartesiana di una circonferenza

Tutte e sole le circonferenze si rappresentano come $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - c > 0$ e avremo che $C = (-a, -b)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Note:-

Se r fosse 0, $a^2 + b^2 - c = 0 \implies x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ è rappresentata solo da $C = (-a, -b)$.

Proposizione 0.3.2
Per tre punti non allineati in $E_2(\mathbb{R})$ passa un unica circonferenza.

0.4 Sfere in $E_3(\mathbb{R})$

Definizione 0.4.1: Sfera

Sia $C : (x_0, y_0, z_0)$ e sia r un numero reale positivo. Si dice **sfera** di raggio C e di centro r il luogo dei punti aventi distanza r da C.

Sia $P : (x, y, z)$ appartenente alla sfera, allora

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Note:-
Una sfera è una superficie algebrica reale (Analogamente una circonferenza è una curva algebrica reale).

Proposizione 0.4.1 Equazione cartesiana di una sfera
Tutte le sfere si rappresentano come $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ con $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ e avremo che $C = (-a, -b, -c)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Note:-
Se $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ è realizzata dal solo centro $C = (-a, -b, -c)$.

Proposizione 0.4.2
Siano A, B, C, D quattro punti non complanari di $E_3(\mathbb{R})$. Per A, B, C, D passa un'unica sfera

Il centro della sfera si trova intersecando i piani assiali dei quattro punti. Il raggio è la distanza del centro da uno qualsiasi dei quattro punti.

0.5 Circonferenze in $E_3(\mathbb{R})$

Definizione 0.5.1: Circonferenza in $E_3(\mathbb{R})$

Dati un piano α, un suo punto C e un numero reale positivo r. Si dice **circonferenza** di raggio C e raggio r il luogo dei punti di α aventi distanza r da C.

Note:-
Una circonferenza appartiene a infinite sfere. Quindi per tre punti non allineati passano infinite sfere.

Proposizione 0.5.1
Tutte e sole le circonferenze di $E_3(\mathbb{R})$ ammettono una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \longrightarrow \quad \text{piano } \alpha \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r'^2 \end{cases}$$

$$d(C', \alpha) < r' \quad \text{dove} \quad C' = (x_0, y_0, z_0) \qquad \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < r'$$

ci sono infinite rappresentazioni ma solo una con il centro C della circonferenza coincidente con il centro C' della sfera.

Il centro della circonferenza C si trova intersecando il piano α con la retta per il centro della sfera C' perpendicolarmente ad α. Utilizziamo il teorema di Pitagora. Conosciamo $\overline{CC'}$ e conosciamo anche il raggio r' della sfera. Quindi

$$r = \sqrt{r'^2 - \overline{CC'}^2}$$

Note:-

Una circonferenza si può ottenere anche intersecando altre superfici superfici con un piano.

Esempio 0.5.1

Si consideri

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 3 \quad \longrightarrow \quad \alpha \end{cases} \qquad \text{è una circonferenza?}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 7 \quad \text{e siccome } z = 3 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \text{che descrive una circonferenza.}$$

Ed è una curva algebrica reale di $E_3(\mathbb{R})$.

Capitolo 1

Ampliamento di $A_2(\mathbb{R})$

In $A_2(\mathbb{R})$ date due rette r e s o sono parallele o si intersecano in un punto. Se sono parallele

$$r = [P, V_1] \; e \; s = [Q, W_1] \implies V_1 = W_1$$

quindi la direzione V_1 è l'elemento comune a tutte le rette parallele a r. Poiché il parallelismo è una relazione di equivalenza tra le rette del piano.

1.1 Ampliamento (proiettivo) di $A_2(\mathbb{R})$

Definizione 1.1.1: $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

- Punti propri che sono tutti e soli i punti di $A_2(\mathbb{R})$
- I punti impropri che sono le direzioni delle rette del piano ovvero i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1.

Da cui il nome proprio/improprio per i fasci di rette del piano.

Definizione 1.1.2: Rette

- le rette proprie: le rette di $A_2(\mathbb{R})$ unite al loro punto improprio;
- una retta impropria: tutti i punti impropri (r_∞)

Sia $P_\infty \in r_\infty \implies$ non definiamo il vettore $Q\vec{P}_\infty$ con Q proprio/improprio.
La funzione $f : A \times A \to V_2($
$RR)$ **da completare**

Proposizione 1.1.1
Due rette distinte di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ sono sempre incidenti.

Dimostrazione: Siano r e s due rette distinte di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

1. r e s sono proprie e non parallele tra loro $\implies$ r è incidente a s in $A_2(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{A}_2(\mathbb{R})$ e il punto improprio di r è diverso da quello di s.
2. r e s sono proprie ma r è parallelo a s.
   $r \cap s = \emptyset$ in $A_2(\mathbb{R})$ ma r e s hanno la stessa direzione $\implies$ lo stesso punto improprio.
3. r è propria e $s = r_\infty$.
   $r \cap s = r \cap r_\infty$ è il punto improprio di r.

☺

Completare con il quinto assioma e la spiegazione di a due tilda di r

Note:-
Tutte le rette proprie contengono un solo punto improprio e r_∞ contiene solo punti impropri.

Proposizione 1.1.2
Per due punti distinti di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica retta.

Dimostrazione: Siano A e B i due punti distinti considerati:

1. A, B sono entrambi propri
$$\implies \exists! r \in A_2(\mathbb{R}) \text{ per } A\ e\ B$$
$$\exists! r \quad \text{propria per} A\ e\ B$$
la r_∞ non contiene A e $B \implies \exists!\ r$ per A e B.
2. A è proprio e B è improprio (o viceversa). $\implies B$ è la direazione $V_1 \implies \exists!$ retta per **completare**
3. A e B sono entrambi impropri. Nessuna retta propria li contiene entrambi (ogni retta propria ha solo 1 punto improprio) $\implies A, B \in r_\infty$ che è l'unica che li contiene entrambi.

😃

1.2 Geometria analitica in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Enti definiti "a meno di un fattore" di proporzionalità:

1. equazioni di rette in $A_2(\mathbb{R})$
$$ax + by + c = 0 \qquad \text{se } [(a, b, c)] = [(a', b', c')]$$
$$\implies r' :\ a'x + b'y + c' = 0 \qquad \text{è coincidente a } r$$
2. $[(l, m)] = P.d.r$ è come classe di equivalenza

Indichiamo con ρ la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità su $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$
$$\frac{\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}}{\rho} = \{[(x, y, z)] :\ x, y, z \in \mathbb{R}^3\ e\ (x, y, z) \neq \underline{0}\}$$
Quest'insieme definirà le coordinate dei punti.
$$\tilde{A}_2(\mathbb{R}) = A_2(\mathbb{R}) \cup A_\infty$$
Fissiamo il riferimento affine in $A_2(\mathbb{R})$
$$\phi :\ A_2 \cup A_\infty \to \frac{\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}}{\rho}$$

- se P è proprio $(x, y) :\ \phi(x, y) = [(x, y, 1)]$
- se P è improprio $P : [(l, m)] \quad \phi(P) = [(l, m, 0)]$

Proposizione 1.2.1
ϕ è una biiezione tra $\tilde{A}_2(\mathbb{R}) \to \frac{\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}}{\rho}$

Osservazione: Sia P di coordinate omogenee $[(x_1, x_2, x_3)]$ con $x_3 \neq 0$

$$\left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)\right]$$

P è proprio $P = (x, y) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$
Sia invece $x_3 = 0$

$$P = [(x_1, x_2, 0)] \qquad [(l, m)] = [(x_1, x_2)]$$

P non ha coordinate affini (non omogenee) $\implies$ è improprio.

1.3 Rappresentazione delle rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Sia $RA[O, B = (e_1, e_2)]$ un riferimento affine di $A_2(\mathbb{R})$. In $A_2(\mathbb{R})$ l'equazione cartesiana di una retta è $ax+by+c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Sui punti propri $P = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)\right]$ dovrà valere $ax + by + c = 0$

$$a\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + b\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + c = 0 \qquad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Il punto improprio di $ax + by + c = 0$ è $[(-b, a, 0)]$. Sostituiamo in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ $[(-b, a, 0)]$

$$a(-b) + ba + 0 = 0$$

$\implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è l' equazione omogenea di una retta r di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.
Siano ora $(a, b) = (0, 0)$, allora $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ si riduce a $0x_1 + 0x_2 + cx_3 = 0$ con $c \neq 0,\ cx_3 = 0,\ x_3 = 0$ è la r_∞ perché rispettata da tutti e soli i punti impropri. L'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta, in ogni caso, una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$. Di conseguenza è l'equazione cartesiana di una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

1.4 Complessificazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

$\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ = piano affine ampliato e **complessificato**.

Osservazione:

- **punti**: terne ($\neq \underline{0}$) di numeri complessi determinati a meno di un fattore di proporzionalità complesso e non nullo.
$$\frac{\mathbb{C}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$
- **rette**: luogo delle autosoluzioni (soluzioni non nulle) di un'equazione del tipo
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq \underline{0} \ e \ a, b, c \in \mathbb{C}$$

Definizione 1.4.1: Punti e rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si dicono:

- **punti** e **rette reali** i punti e le rette che ammettono una rappresentazione reale
- **punti** e **rette immaginari** i punti e le rette che ammettono solo rappresentazioni immaginarie

Esempio 1.4.1
$P : [(4, 3 + i, 1)]$ è immaginario.

Dimostrazione: Sia $a + ib \in \mathbb{C}$: $P = (4(a + ib), (3 + i)(a + ib), a + ib)$ con x_1, x_2, x_3 reali, quindi

$x_3 = a + ib \implies x_3 = a$. $P = [(4a, (3+i)a, a)]$, ma $a \neq 0$ $(3+i)a$ non è reale $\implies P$ non è reale. ☺

Definizione 1.4.2: Coniugati

Si dicono **coniugati** due enti (punti, rette ecc...) che ammettono rappresentazioni coniugate.

Proposizione 1.4.1

Un ente geometrico (punto, retta, curva ecc...) è reale se, e soltanto se, coincide con il proprio coniugato.

Note:-

Una retta reale ha infiniti punti immaginari

Esempio 1.4.2

$x_1 = 0 \implies [(0, x_2, x_3)] \implies [(0, a + ib, 1)]$ sono tutti immaginari.

Osservazione: Se un'equazione reale è realizzata da un punto $P \implies \overline{P}$ è soluzione se r è reale e $P \in r \implies \overline{P} \in \overline{r} = r$.

Proposizione 1.4.2

La retta che congiunge due punti P e $\overline{P}$ immaginari e coniugati è reale.

Dimostrazione: $P \in r$ e $\overline{P} \in r$ per costruzione. Poiché $P \neq \overline{P}$ $r = rt(P, \overline{P})$. Poiché $P \in r \implies \overline{P} \in \overline{r}$ e $\overline{P} \in r \implies \overline{\overline{P}} \in \overline{r}$, ma $\overline{\overline{P}} = P \in \overline{r}$. $\implies \overline{P}$ e $P \in \overline{r} \implies \overline{r} = rt(P, \overline{P})$. Per l'unicità della retta per P e $\overline{P}$ $\implies r = \overline{r} \implies r$ è reale. ☺

Proposizione 1.4.3

Per un punto P immaginario $(P \neq \overline{P})$ passa un'unica retta reale.

Dimostrazione: La retta $rt(P, \overline{P})$ è reale per la proposizione precedente. Supponiamo per assurdo che $\exists\ s \neq rt(P, \overline{P})$ reale per P. $\implies \overline{P} \in s$ poiché s è reale. $s = rt(P, \overline{P})$ che è **assurdo!**. Quindi esiste ed è unica la retta r reale per P. ☺

Proposizione 1.4.4

Due rette immaginarie e coniugate si intersecano in un punto reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Sia r immaginaria $\implies r \neq \overline{r}$. Sia $P = r \implies \overline{P} \in \overline{r}$. $P \in \overline{r} \implies \overline{P} \in \overline{\overline{r}} = r$. $\overline{P} \in r \cap \overline{r} = P \implies \overline{P} = P \implies P$ è reale. ☺

Proposizione 1.4.5

Ogni retta r immaginaria ha un unico punto reale in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Per ipotesi $r \neq \overline{r} \implies \exists\ P$ intersezione di r e $\overline{r}$. Quindi per la proposizione precedente P è reale. Sia $S \in r$ un punti reale. Essendo reale $S = \overline{S} \implies S \in \overline{r} \implies S \implies S \in r \cap \overline{r}$. Quindi per l'unicità del punto di intersezione, $S = P$. ☺

Definizione 1.4.3: Curve algebriche reali in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ è il luogo delle autosoluzioni di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dove $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali nelle variabili x_1, x_2, x_3.

Osservazione: Ogni curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ che contiene un punto P contiene anche $\overline{P}$.

Esempio 1.4.3

Per esempio prendiamo una circonferenza

$$x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0 \qquad r^2 = a^2 + b^2 - c = 0$$

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = 0 \qquad C: \ (-a, -b)$$

Ora consideriamo l'equazione

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = 0 \qquad \text{in} \quad A_2(\mathbb{C}) \quad x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} + a\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} + b\right)^2 = 0$$

Moltiplichiamo dentro entrambi i membri per x_3 e sviluppiamo

$$x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 + x_2^2 + 2bx_2x_3 + b^2x_3^2 = 0$$

$$1 + 2a + a^2 + 1 + 2b + b^2 = 0$$

Definizione 1.4.4: Curva riducibile

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una curva $F(x_1, x_2, x_3)$ si dice riducibile se F è il prodotto di polinomi di grado più basso.

Esempio 1.4.4

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)^{n_1} \cdot F_2(x_1, x_2, x_3)^{n_2} \cdot F_3(x_1, x_2, x_3)^{n_3}$$

$$\deg(F) = n_1 \deg(F_1) + \ldots + n_t \deg(F_t)$$

Osservazione: Geometricamente una curva riducibile si riduce in componenti ottenute uguagliando a zero i vari fattori.

Definizione 1.4.5: Ordine

Si dice **ordine** di una curva algebrica in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il grado del polinomio F che la definisce.

Teorema 1.4.1 Teorema dell'ordine

L'ordine di una curva algebrica reale è uguale al numero di intersezioni in comune con una qualsiasi retta r di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ a patto che

1. r non sia componente della curva
2. le intersezioni siano contate con la loro molteplicità

Definizione 1.4.6: Punti semplici ed r-upli

Sia C una curva algebrica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$

- P si dice **semplice** se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità unitaria ed esiste un'unica retta, chiamata retta tangente, con molteplicità di intersezione in P maggiore di 1.
- P si dice **r-uplo** (doppio, triplo, ecc...) se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità r, ed esistono r (contate con la loro molteplicità) rette con molteplicità di intersezione in P maggiore di r (rette tangenti).

Proposizione 1.4.6

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Se una retta r ha più di n intersezioni con n l'ordine di C, allora r è componente di C.

Dimostrazione: Per il teorema dell'ordine se r non fosse componente della curva C avrebbe esattamente n intersezioni con C (a patto di contarle con la dovuta molteplicità). 😃

Proposizione 1.4.7

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n. Allora C non possiede punti $(n+1)$-upli.

Dimostrazione: Dato che C è di ordine $n \implies \exists r \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ non componente di C passante per un punto dato di C. Sia, per assurdo, P un punto $(n+1)$-uplo.

$$|r \cap C| \geq n+1 \quad \text{perché passa per } P$$

ma dato che r non è componente, il teorema dell'ordine

$$|r \cap C| = n < n+1$$

Assurdo! 😃

Proposizione 1.4.8

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n. C ha un punto n-uplo P se, e soltanto se, C è unione di n rette (contate con la dovuta molteplicità) per P.

Dimostrazione: "$\implies$"Sia $P \neq Q \in C$ e sia r la retta $rt(P,Q)$. Supponiamo per assurdo r non sia componente allora per il teorema dell'ordine

$$n = |r \cap C| \geq \underbrace{n}_{\in P} + \underbrace{1}_{\in Q}$$

Assurdo! Quindi per ogni punto $Q \in C$ la retta PQ è componente $\implies$ C è unione di rette per P. Quindi queste rette sono $n = \deg(F) =$ ordine di C.
"$\impliedby$" Sia C unione di n rette per P. Allora la generica retta per P non componente di C interseca C sono in P $\implies$ P è punto n-uplo. 😃

Definizione 1.4.7: Punto multiplo

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$. Se P non è un punto semplice allora si dice **punto multiplo**.

Teorema 1.4.2

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n e sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ il polinomio omogeneo che la definisce. I punti multipli di C sono le classi di autosoluzioni del sistema associato alle derivate:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 0 \end{cases}$$

Esempio 1.4.5

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 3x_2x_3 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{dF}{dx_3} = 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| \neq 0$$

Capitolo 2

Coniche in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Definizione 2.0.1: Conica

Si dice **conica** una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ (curva piana) del secondo ordine. Una conica si rappresenta eguagliando a 0 un polinomio omogeneo F di secondo grado nelle variabili x_1, x_2, x_3, a coefficienti reali. La generica equazione della conica è

$$C : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Se chiamiamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere l'equazione come prodotto righe per colonne

$$^tXAX = 0$$

A è una matrice reale e simmetrica ed è detta **matrice della conica**.

Esempio 2.0.1

Consideriamo la conica

$$-x_1^2 + ax_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo il prodotto

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1(-x_1 + 2x_2) + x_2\left(2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3\right) + x_3\left(-\frac{3}{2}x_2 + 6x_3\right) = 0$$

$$-x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

Osservazione: L'equazione della generica conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ dipende da 6 coefficienti definiti a meno di un fattore di proporzionalità. Quindi le coniche di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ sono ∞^5.

Proposizione 2.0.1

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ riducibile. Allora C è unione di 2 rette

1. reali e distinte
2. reali e coincidenti
3. immaginarie e coniugate

Dimostrazione: Sia C conica associata al polinomio $F = (x_1, x_2, x_3) = 0$. Se C è riducibile $F = (x_1, x_2, x_3) = F_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot F_2 = (x_1, x_2, x_3)$ dove F_1 e F_2 hanno grado unitario, quindi rappresentano delle rette e di conseguenza C è unione di due rette r_1 e r_2. Se r_1 e r_2 sono entrambe reali siamo nei casi 1 o 2. Se invece r_1 è immaginaria, $\overline{r_1}$ è ancora componente di C (per ogni $P \in r_1$, $\overline{P} \in C$), ma $r_1 \neq \overline{r_1} \implies \overline{r_1} = r_2 \implies C$ si riduce in due rette immaginarie e coniugate. 😊

Osservazione: Se r è immaginaria anche $\overline{r}$ lo è. Infatti $r \neq \overline{r}$ e quindi $\overline{r} \neq \overline{\overline{r}} = r$.

Proposizione 2.0.2

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una conica

1. non ha punti tripli
2. ha un punto doppio se, e soltanto se, è riducibile. E abbiamo due possibilità
   (a) ha solo un punto doppio P e si riduce in due rette distinte per P
   (b) ha almeno due punti doppi allora ne ha ∞^1 e si fattorizza in una retta reale contata due volte

Dimostrazione: " $\implies$ " Per ipotesi C ha punto doppio P. Sia $R \in C$ e consideriamo la retta $r = rt(P, R)$, se non fosse componente avrebbe

$$|r \cap C| \geq 2 + 1 = 3 \quad \text{intersezioni con } C$$

Assurdo! Questo è in contraddizione con il teorema dell'ordine.

" $\impliedby$ " Sia C riducibile. Allora $C = r_1 \cup r_2$. Sia $P \in r_1 \cap r_2$ e sia r una retta per P diversa r_1 e da r_2. Quindi $r \cap C = P$. Per il teorema dell'ordine P ha molteplicità doppia e abbiamo due casi

1. se $r_1 = r_2$ abbiamo ∞^1 punti doppi e $C = r_1 \cup r_1$
2. altrimenti abbiamo un **solo** P punto doppio che è $r_1 \cap r_2$

Dobbiamo dimostrare che esiste un solo punto. Siano per assurdo P_1 e P_2 punti doppi e sia $C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$. Sia $Q \in r_2$ con $P_2 \in r_1$, allora

$$|rt(P_2, Q) \cap C| \geq \underbrace{2}_{P_2} + \underbrace{1}_{Q}$$

Per il teorema dell'ordine $rt(P_2, Q)$ è componente. **Assurdo!** Perché avremmo 3 componenti $(r_1, r_2, rt(P_2, Q))$. 😊

Definizione 2.0.2: Coniche generali o degeneri

Una conica si dice

- **generale** se è priva di punti doppi $\implies$ se non è riducibile
- **semplicemente degenere** se ha un solo punto doppio $\implies C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$
- **doppiamente degenere** se ha ∞^1 punti doppi $\implies C = r \cup r$

Teorema 2.0.1
In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ i punti doppi di una conica C si trovano considerando le classi di autosoluzioni del sistema omogeneo
$$AX = \underline{0}$$
dove A è la matrice associata a C.

Dimostrazione:
$$C : F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{dove } F \text{ è:}$$
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$
i punti doppi si trovano risolvendo
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$
Possiamo dividere tutti i fattori per 2
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies AX = \underline{0}$$

😃

Teorema 2.0.2
In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una conica $C : {}^tXAX = 0$ è

1. generale se $\rho(A) = 3$
2. semplicemente degenere se $\rho(A) = 2$
3. doppiamente degenere se $\rho(A) = 1$

Dimostrazione: Dimostriamo tutti i casi singolarmente:

1. C è generale se non ha punti doppi. Se $AX = \underline{0}$ ha solo la soluzione nulla $\iff \rho(A) = 3$.
2. C è semplicemente degenere se ha un solo punto doppio. $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^1 $\iff \rho(A) = 2$
3. C è doppiamente degenere se ha ∞^1 punti doppi $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^2 soluzioni (se $[(x_1, x_2, x_3)]$ è soluzione $[(2x_1, 2x_2, 2x_3)]$ è lo stesso punto doppio) $\iff \rho(A) = 1$

😃

2.1 Classificazione affine di una conica generale

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e r una retta osserviamo che $r \cap C =$

1. due punti reali e distinti
2. un punto reale con molteplicità doppia
3. due punti immaginari e coniugati

Se consideriamo la r_∞ questa casistica ci dà la classificazione affine delle coniche generali.

Definizione 2.1.1: Ellisse, iperbole e parabola

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia C generale. Allora $C \cap r_\infty$ è data dai due punti P, Q (non necessariamente distinti) e C si dice:

1. **ellisse** se P e Q sono immaginari e coniugati;
2. **iperbole** se P e Q sono reali e distinti;
3. **parabola** se P e Q sono reali e coincidenti.

2.2 Condizioni analitiche

Sia C una conica generale di equazione

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

La r_∞ ha equazione $x_3 = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 = C \cap r_\infty \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Almeno uno fra $x_1, x_2 \neq 0$. Supponiamo $x_2 \neq 0$ e dividiamo per x_2^2

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_2} + a_{22} = 0$$

La risolviamo in $\frac{x_1}{x_2}$. Se

1. $\frac{\Delta}{4} > 0$ abbiamo due soluzioni reali e distinte $\implies$ **iperbole**;
2. $\frac{\Delta}{4} = 0$ abbiamo due soluzioni coincidenti $\implies$ **parabola**;
3. $\frac{\Delta}{4} < 0$ abbiamo due soluzioni immaginarie e coniugate $\implies$ **ellisse**.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{2a_{12}}{2}\right)^2 - a_{11}a_{22} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{poniamo} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{\Delta}{4}$$

Se C è una conica generale ($|A| = 0$) allora si applicano le casistiche sopra elencate.

Definizione 2.2.1: Polarità associata ad una conica

Data una conica $C : {}^tXAX = 0$ e dati due punti del piano ($\tilde{A}_2(\mathbb{C})$)

$$P' = [(x_1', x_2', x_3')] \quad e \quad P'' = [(x_1'', x_2'', x_3'')]$$

si dice che P' è coniugato a P'' rispetto a C se

$${}^tX'AX'' = 0 \quad con \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \quad e \quad X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

Osservazione: Sia P' coniugato a P'', ovvero

$${}^tX'AX'' = 0 \implies {}^t({}^tX'AX'') = 0 = {}^tX''{}^tA^t({}^tX') = {}^tX''AX' = 0 \implies P'' \text{ è coniugato a } P'$$

Quindi la relazione di coniugio è simmetrica $\implies$ potremo dire semplicemente che P' e P'' sono coniugati.

Definizione 2.2.2: Polare

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si dice **polare** di P rispetto a C il luogo dei punti Q coniugati di P rispetto alla conica C.

Proposizione 2.2.1

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ la polare di un punto P rispetto ad una conica generale **è una retta**.

Dimostrazione: Siano $[(x_1', x_2', x_3')] = P$ allora $Q = [(x_1, x_2, x_3)]$ appartiene alla polare di P se e soltanto se

$$(x_1', x_2', x_3')A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (x_1', x_2', x_3')A = (a, b, c)$$

$$(a, b, c)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Dimostriamo che $(a, b, c) \neq \underline{0}$. Sia per assurdo $(a, b, c) = \underline{0} \implies (x_1', x_2', x_3')A = \underline{0}$

$$\iff {}^tA\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ è le coordinate di un punto doppio $\implies$ P è un punto doppio di C $\implies$ ma C è generale $\implies$ **assurdo!**
$\implies (a, b, c) \neq \underline{0} \implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è una retta. Essa è chiamata retta polare di P rispetto a C. 😄

Definizione 2.2.3

P è detto polo della sua retta polare. La relazione **polo** $\leftrightarrow$ **polare** è detta polarità ed è una biiezione.

2.2.1 Principio di reciprocità

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$, sia $P \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia p la polare di P. Allora

1. le polari dei punti di p passano per P.

   Dimostrazione: Sia $Q \in p \implies Q, P$ sono coniugati $\implies P \in q$ di Q. 😄

2. i poli delle rette per P appartengono a p.

   Dimostrazione: Sia q una retta per P. Il polo Q di q è coniugato a tutti i punti di $q \implies Q$ è coniugato a $P \implies Q \in p$. 😄

Proposizione 2.2.2

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Allora

1. sia $P \in C \implies$ la polare p di P è la retta tangente a C in P.

Dimostrazione: Sia P di coordinate $x_P = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ appartenente alla conica allora la polare di P ha equazione ${}^tX_P A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ che è la formula della retta tangente a C in P. 😊

2. Sia $P \notin C$. La polare di P è la congiungente dei due punti T_1 e T_2 ottenuti intersecando le tangenti t_1 e t_2 alla conica per P.

   Dimostrazione: $T_1 \in C \implies$ la polare di T_1 rispetto a C è t_1. $P \in t_1 \implies P$ appartiene alla polare di T_1. Quindi per il principio di reciprocità T_1 appartiene alla polare di $P \implies T_1 \in p$. Analogamente $T_2 \in C \implies$ la polare di T_2 è t_2 e $P \in t_2 \implies T_2 \in p$. Quindi $T_1, T_2 \in p \implies p$ è la congiungente di T_1 e T_2. 😊

Osservazione: Equivalentemente il punto 2 si può riscrivere

Proposizione 2.2.3

Se $P \notin C$ la sua polare p si ottiene congiungendo i punti T_1 e T_2 di tangenza delle tangenti per P.

Definizione 2.2.4: Centro e diametri di una conica

Si dice **centro** di una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il polo della retta impropria. Si dicono diametri di una conica generale le rette polari dei punti impropri.

Osservazione: Per il principio di reciprocità i diametri passano per il centro della conica. Quindi sono il fascio proprio (se c'è proprio) di rette per C.

Per determinare le coordinate del centro dobbiamo scegliere due punti $X_\infty = [(1,0,0)]$, punto improprio dell'asse x, e $Y_\infty = [(0,1,0)]$, punto improprio dell'asse y. La polare di X_∞ è

$$(1,0,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (a_{11}, a_{12}, a_{13})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

Analogamente la polare di y_∞ è

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 & P_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & P_2 \end{cases}$$

Il centro C è proprio se P_1 e P_2 non sono paralleli. Se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^*| \neq 0$$

Il centro è un punto proprio. Quindi il centro è un punto proprio se C è un ellisse o un'iperbole. Quindi in questo caso i diametri sono un fascio proprio di rette di centro C.

$$F: \ \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Equazione del fascio dei diametri. Se C è una parabola $\implies |A^*| = 0 \implies P_1$ parallelo a $P_2 \implies$ il centro è un punto improprio. $\implies$ i diametri formano un fascio improprio di equazione

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + kx_3 = 0 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{C}$$

fascio improprio dei diametri della parabola.

2.3 Asintoti di una conica

Definizione 2.3.1: Asintoti

Si dicono **asintoti** di una conica le rette proprie tangenti alla conica nei suoi punti impropri.

Osservazione: Gli asintoti di una conica sono quindi le rette polari nei suoi punti impropri. Gli asintoti sono quindi dei diametri e passano per il centro. Se il centro è proprio (cioè se C è un'ellisse o un'iperbole) gli asintoti sono le rette che congiungono il centro con i punti impropri di C.

Proposizione 2.3.1

La parabola è una conica con centro improprio e priva di asintoti.

Dimostrazione: Sia C una parabola $\implies$ C è tangente alla retta impropria in un punto che chiamiamo P_∞. Quindi la retta polare di P_∞ è r_∞ $\implies$ il polo della r_∞ è P_∞ $\implies$ il punto P_∞ è il centro della parabola. Osserviamo che C ha solo un punto improprio P_∞ $\implies$ ammette solo una tangente nel suo punto improprio. Ma t è la r_∞ $\implies$ la r_∞ non è un asintoto. 😃

Definizione 2.3.2: Coniche a centro

Diremo che l'iperbole e l'ellisse sono coniche **a centro**, mentre la parabola è detta conica **non a centro**.

2.4 Proprietà metriche

Definizione 2.4.1: Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice **equilatera** se i suoi asintoti sono ortogonali.

Proposizione 2.4.1

Una conica generale è un'iperbole equilatera se, e soltanto se, $a_{11} + a_{22} = 0$.

Esempio 2.4.1

Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$:

$$C: \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 1 = 0$$

sia un'iperbole equilatera.

1. $2k = -(-4) \rightarrow k = 2$
2. Sostituiamo dentro all'equazione e scriviamola in forma omogenea

$$4x_1^2 + 0x_1x_2 - 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = 0 \quad A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$k = 2$ dà luogo ad un'iperbole equilatera.

Definizione 2.4.2: Ortogonale al punto improprio

Diremo che la retta p di parametri direttori $[(l', m')]$ è ortogonale al punto improprio $P : [(l, m, 0)]$ se $ll' + mm' = 0$.

Definizione 2.4.3: Asse di una conica

Si dice **asse** di una conica ogni diametro ortogonale al proprio polo.

Definizione 2.4.4: Vertici

Si dicono **vertici** le intersezioni proprie della conica con i propri assi.

2.5 Condizioni analitiche

Proposizione 2.5.1

Gli assi di una conica a centro (ellisse o iperbole) sono due e sono ortogonali tra loro, a meno che non si tratti di una circonferenza generalizzata, in tal caso tutti i diametri sono assi.

Dimostrazione: Per definizione i diametri sono le polari dei punti impropri. Dato $P_\infty : [(l, m, 0)]$

$$\begin{pmatrix} l & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Il generico diametro è:

$$\begin{pmatrix} la_{11} + ma_{12} & la_{12} + ma_{22} & la_{13} + ma_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(la_{11} + ma_{12})x_1 + (la_{12} + ma_{22})x_2 + (la_{13} + ma_{23})x_3 = 0$$

$$p.d.d: \ [(-la_{12} - ma_{22}, la_{11} + ma_{12})]$$

Il polo di d è $P_\infty : [(l, m, 0)]$. d è un asse se è ortogonale a P_∞ ovvero se

$$l(-la_{12} - ma_{22}) + m(la_{11} + ma_{12}) = 0$$

$$-l^2 a_{12} + ml(-a_{22} + a_{11}) + m^2 a_{12} = 0 \qquad l^2 a_{12} + ml(a_{22} - a_{11}) - m^2 a_{12} = 0$$

$$a_{12} \left(\frac{l}{m}\right)^2 + \frac{l}{m}(a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0$$

Se $a_{12} = 0$ e $a_{22} = a_{11}$ l'equazione è risolta da tutte le coppie (l, m). Quindi se la conica è una circonferenza generalizzata tutti i diametri sono assi. I due assi hanno polo $P_\infty : [(l', m', 0)]$ e $Q_\infty : [(l'', m'', 0)]$. Sia p' l'asse associato al polo P_∞ e sia A_∞ il suo punto improprio. Sia a la retta che congiunge il centro al punto improprio $rt(C, P_\infty)$, per ipotesi $a \perp p'$. a contiene P_∞ che è il polo di p', quindi per il principio di reciprocità p' contiene il polo di a. Il polo di a è improprio (perché a è diametro) $\implies$ il punto improprio di a è A_∞, ma A_∞ è ortogonale alla direzione di $a \implies a$ è un asse. Quindi i due assi sono ortogonali. 😊

Proposizione 2.5.2

La parabola ha un unico asse e un solo vertice v. Inoltre la tangente alla parabola in v è ortogonale all'asse.

Dimostrazione: Il punto P_∞ di una parabola è $[(-a_{12}, a_{11}, 0)]$. I $p.d.d = [(-a_{12}, a_{11})]$. La direzione ortogonale è data da $[(a_{11}, a_{12})]$, quindi il punto P_∞ è $[(a_{11}, a_{12}, 0)]$. Da cui segue che l'asse è unico ed è la polare di $(a_{11}, a_{12}, 0)$. Sostituendo nell'equazione del fascio improprio dei diametri abbiamo che l'asse ha equazione:

$$a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Per il teorema dell'ordine a interseca la parabola $\mathcal{C}$ in due punti, ma uno è P_∞ quindi l'altro punto sarà l'unico vertice della parabola.
Ora dimostriamo la seconda parte del teorema. $v \in a$ che è il polo di t. Per il principio di reciprocità t contiene il polo di a, ovvero $P_\infty \in t$. Ma P_∞ è ortogonale ad $a \implies t \perp a$. 😊

Capitolo 3

Ampliamento di $A_3(\mathbb{R})$

Chiamiamo con $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ lo spazio reale affine ampliato. I punti possono essere

- **propri** A dei punti di $A_3(\mathbb{R})$
- **impropri** A_∞ direzioni delle rette, (spazi di traslazione di dimensione 1)

Le rette possono essere

- **proprie** rette di $A_3(\mathbb{R})$ ciascuna estesa con il suo punto improprio (ovvero la sua direzione)
- **improprie** sono le giaciture dei piani (spazi di traslazione di dimensione 2)

I piani possono essere

- **propri** i piani di $A_3(\mathbb{R})$ ciascuno esteso con la sua retta impropria (ovvero la sua giacitura)
- **piano improprio** A_∞ il luogo dei punti impropri

Proposizione 3.0.1

Diamo una serie di conseguenze senza dimostrazione

1. due rette parallele hanno la stessa direzione e quindi hanno lo stesso punto improprio
2. due piani paralleli hanno la stessa giacitura e quindi hanno la stessa retta impropria
3. il piano improprio contiene tutte e sole le rette improprie
4. ogni retta impropria contiene un solo punto improprio (la sua direzione)
5. ogni piano proprio contiene ∞^1 punti impropri, ovvero una retta (la sua giacitura).

3.1 Geometria analitica in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

Indichiamo con

$$\frac{\mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}}{\rho}$$

cioè l'insieme delle quaterne definite a meno di un fattore di proporzionalità reale e non nullo. In cui ρ indica la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità. Quindi consideriamo due terne equivalenti se sono proporzionali.

Proposizione 3.1.1

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento affine di $A_3(\mathbb{R})$ e sia

$$\phi : A \cup A_\infty \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}}{\rho}$$

sia $P \in A$ di coordinate (x, y, z)

$$\phi(P) = [(x, y, z, 1)]$$

sia $P \in A_\infty$ corrispondente alla direzione $[(l, m, n)]$

$$\phi(P) = [(l, m, n, 0)]$$

la mappa ϕ è una biiezione e le coordinate indotte da ϕ sono chiamate **coordinate omogenee**.

Esempio 3.1.1

$$Q = [(2, 0, 3, -2)] \qquad -2 \neq 0 \implies Q \text{ è proprio}$$

$$Q = \left[\left(\frac{2}{-2}, \frac{0}{-2}, -\frac{3}{2}, 1\right)\right] \implies Q = \left(-1, 0, -\frac{3}{2}\right)$$

$$P = [(2, 1, 0, 0)] \implies [(2, 1, 0)]$$

Definizione 3.1.1: Rappresentazione dei piani

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$$

questa è l'equazione omogenea dei piani in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ (e si ottiene in modo analogo all'equazione omogenea delle rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$).

Osservazione:

1. se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ allora il piano è proprio ed ha equazione affine

$$ax + by + cz + d = 0$$

2. se $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ allora $d \neq 0$ e otteniamo $x_4 = 0$ (che definisce il piano improprio).

Definizione 3.1.2: Rappresentazione di rette

Una retta è intersezione di 2 piani distinti

$$r : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad \rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

questa è la rappresentazione della generica retta di $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

- se

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

  r è propria

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

- se
$$\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$
ho due casi possibili
  - i due piani sono paralleli e distinti
  - uno dei due è il piano improprio e quindi $x_4 = 0$

  in entrambi i casi r è impropria

3.2 Complessificazione di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

$\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ è lo spazio ampliato e complessificato. I suoi punti sono le quaterne di

$$\frac{\mathbb{C}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}}{\rho}$$

cioè le classi di proporzionalità delle quaterne complesse. La relazione di proporzionalità è chiaramente da intendersi in $\mathbb{C}$. All'interno dello spazio definiamo

- le **rette** sono i punti tali che
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad a, a', b, b', c, c', d, d' \in C$$
e tali che
$$\rho\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$
- un **piano** è costituito dai punti
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$$

Definizione 3.2.1: Punti, rette e piani reali

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ i punti, le rette e i piani si dicono **reali** se ammettono almeno una rappresentazione con coefficienti reali. Si dicono immaginari altrimenti.

Definizione 3.2.2: Rette immaginarie di prima e seconda specie

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ una retta r immaginaria è detta **immaginaria di prima specie** se è complanare con la propria coniugata $\overline{r}$. r è detta **immaginaria di seconda specie** se è sghemba con $\overline{r}$.

Proposizione 3.2.1

1. La retta congiungente due punti immaginari e coniugati è reale
2. se una retta (o un piano) reale contiene un punto P immaginario allora contiene anche $\overline{P}$
3. se P è immaginario l'unica retta reale per P è $rt(P, \overline{P})$
4. l'intersezione tra un piano π immaginario e $\overline{\pi}$ è una retta reale
5. un piano π immaginario contiene un'unica retta reale : $\pi \cap \overline{\pi}$
6. se r è una retta immaginaria allora

(a) r è contenuta in al più un piano reale

(b) r contiene al più un punto immaginario

in particolare se r è immaginaria di prima specie il piano contenente r e $\overline{r}$ è reale e $r \cap \overline{r}$ è un punto reale. Se invece r è immaginaria di seconda specie allora r non è contenuta in alcuno piano reale e non contiene alcun punto reale.

Definizione 3.2.3: Superfici algebriche reali in $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

Una superficie algebrica reale di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ è l'insieme delle classi di autosoluzioni complesse di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \text{ove} \quad F \text{ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali in } x_1, x_2, x_3, x_4$$

il grado di F è chiamato ordine della superficie. Se F è fattorizzabile in polinomi di grado positivo la superficie si dice riducibile in componenti

$$\text{fattori di } F \leftrightarrow \text{componenti della superficie}$$

Teorema 3.2.1 Primo teorema dell'ordine

L'ordine di una superficie algebrica Σ reale è uguale al numero di punti in comune a Σ e a una qualsiasi retta r non contenuta in Σ a patto di contarli con la dovuta molteplicità.

Corollario 3.2.1

$$\text{Se } |r \cap \Sigma| > \text{ord}(\Sigma) \implies r \subseteq \Sigma$$

.

Teorema 3.2.2 Secondo teorema dell'ordine

L'intersezione tra una superficie algebrica reale Σ e un piano α non componente di Σ è una curva dello stesso ordine di Σ.

Corollario 3.2.2

Se $\Sigma \cap \pi$ contiene una curva C con $\text{ord}(C) > \text{ord}(\Sigma) \implies \pi$ è componente di Σ.

Definizione 3.2.4

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$, data una superficie algebrica reale Σ, un punto $P \in \Sigma$ è detto **r-uplo** se la generica retta per P ha molteplicità di intersezione con Σ in P uguale a r.

- se $r = 1$ P è detto **semplice**
- se $r > 1$ P è detto **multiplo**

Teorema 3.2.3

I punti multipli di una curva algebrica reale di equazione $F(x_1, x_2, x_3)$ sono le classi di autosoluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$