

Algebra Lineare e Geometria Analitica Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1	Nozioni preliminari	Pagina 5
1.1	Relazioni su un insieme	5
1.2	Strutture algebriche	5
1.3	Matrici	6
Capitolo 2	Spazi vettoriali	Pagina 8
2.1	Generalità	8
2.2	Sottospazi di uno spazio vettoriale	8
2.3	Indipendenza e dipendenza lineare	9
2.4	Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale	11
2.5	Basi e dimensione	11
2.6	Intersezione e somma di sottospazi	15
Capitolo 3	Sistemi lineari	Pagina 18
3.1	Determinante di una matrice quadrata	18
3.2	Matrici invertibili	19
3.3	Dipendenza lineare e determinanti	19
3.4	Sistemi lineari	20
3.5	Cambiamenti di base	24
Capitolo 4	Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità	Pagina 26
4.1	Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico	26
4.2	Matrici diagonalizzabili	27
Capitolo 5	Forme bilineari e prodotti scalari	Pagina 29
5.1	Forme bilineari	29
5.2	Prodotti scalari e ortogonalità	29
5.3	Spazi con prodotto scalare definito positivo	31
5.4	Matrici di forme bilineari	34
5.5	Matrici ortogonali e basi ortonormali	35
5.6	Matrici reali simmetriche	35

Capitolo 6	Spazi affini	Pagina 37
6.1	$A_n(K)$, spazio affine di dimensione n	37
6.2	Proprietà di punti, rette e piani	40
6.3	Geometria analitica in $A_n(\mathbb{R})$	41
6.4	Rappresentazioni analitiche	44

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Relazioni su un insieme

Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme A è un qualunque sottoinsieme di \mathcal{R} del prodotto cartesiano $A \times A$.
Una relazione \mathcal{R} su un insieme A si dice:

- **riflessiva** se, per ogni $a \in A$, $a\mathcal{R}a$;
- **simmetrica** se, per ogni $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ allora $a = b$;
- **antisimmetrica** se, per ogni $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$;
- **transitiva** se, per ogni $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$;

Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine \mathcal{R} su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di A sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni $a, b \in A$, risulta $a\mathcal{R}b$ oppure $b\mathcal{R}a$, la relazione \mathcal{R} si dice **relazione d'ordine totale**.

1.2 Strutture algebriche

Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia (G, \star) un insieme con un'operazione \star . La struttura (G, \star) si dice **gruppo** se:

- l'operazione \star è associativa;
- esiste in G l'elemento neutro;
- ogni elemento di $g \in G$ è simmetrizzabile.

Se l'operazione \star soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

Definizione 1.2.2: Campo

Sia A un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "." e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura $(A, +, \cdot)$ è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $e \neq 0$;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni $a, b, c \in A$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.3 Matrici**Definizione 1.3.1: Matrice**

Dato un campo K si dice **matrice** di tipo $m \times n$ su K una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avente m righe ed n colonne, i cui elementi a_{ij} sono elementi di K .

Definizione 1.3.2: Matrice quadrata

Una matrice di tipo $n \times n$ è detta **matrice quadrata** di ordine n . Queste vengono indicate con $M_n(K)$.

Definizione 1.3.3: Prodotto righe per colonne

Date le matrici $A = (a_{ih}) \in K^{m,n}(K)$ con $i \in I_m, h \in I_n$ e $B = (b_{hj}) \in K^{n,p}$ con $h \in I_n, j \in I_p$, si dice **prodotto righe per colonne** di A per B la matrice

$$A \cdot B = (c_{ij}) \text{ con } i \in I_m, j \in I_p \quad \text{ove}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih}b_{hj}$$

Esempio 1.3.1

Prendiamo per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 21 & 12 & -19 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.4: Matrice identica

L'elemento neutro delle matrici quadrate di ordine n è la **matrice identica**, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.5: Trasposta di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di $K^{m,n}$. Si dice **trasposta** di A la matrice $K^{n,m}$ ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne, cioè ${}^tA = (b_{ji})$ ove $b_{ji} = a_{ij}$ per ogni $i \in I_n$ e $j \in I_m$.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno **spazio vettoriale** sul campo K , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V , detta somma, $+: V \times V \rightarrow V$ e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\cdot: K \times V \rightarrow V$, tali che

- $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno \cdot soddisfi le seguenti proprietà:
 - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
 - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
 - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
 - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori**, gli elementi del campo K sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di $(V, +)$ è detto **vettore nullo** e indicato $\underline{0}$ per distinguerlo da 0 , zero del campo K . L'opposto di ogni vettore \mathbf{v} viene indicato con $-\mathbf{v}$.

Teorema 2.1.1

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K , siano $k \in K$ e $v \in V$. Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

Dimostrazione: Se $k = 0$

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

e sommando $-0v$ ad ambo i membri si ottiene appunto $\underline{0} = 0v$. Se è $v = \underline{0}$, si procede nel modo analogo. Viceversa, se $kv = \underline{0}$ e $k \neq 0$ dimostriamo che $v = \underline{0}$. Dato che $k \neq 0$, esiste l'inverso $k^{-1} \in K$ e, moltiplicando ambo i membri della precedente uguaglianza per k^{-1} si ottiene $k^{-1}(kv) = k^{-1}\underline{0}$ che, per quanto dimostrato in precedenza dà il $\underline{0}$. Dato che $k^{-1}(kv) = (k^{-1}k)v = 1v = v$, per la proprietà 4, si ha $v = \underline{0}$. \odot

2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, diremo che U è **sottospazio vettoriale** di V se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

Proposizione 2.2.1 Primo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme U è uno spazio vettoriale di V se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$
2. $\forall k \in K, \forall u \in U \quad ku \in U$

Proposizione 2.2.2 Secondo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, U è sottospazio di $V(K)$ se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

Definizione 2.3.1: Combinazione lineare

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(K)$ si dice combinazione lineare di vettori v_1, v_2, \dots, v_n ogni vettore v :

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, \dots, k_n \in K$$

Definizione 2.3.2: Sistema di vettori libero

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, allora A si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di A che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = \underline{0}$$

Se A è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione 2.3.3: Sistema di vettori legato

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, allora A si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \text{ non tutti nulli : } \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n$$

Se A è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

Proposizione 2.3.1

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se $\underline{0}$ appartiene ad A , il sistema A è legato.

Dimostrazione: Sia $\underline{0} \in A$, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\underline{0} = v_1$ quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

**Proposizione 2.3.2**

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se in A appaiono due vettori proporzionali allora A è legato.

Dimostrazione: Senza perdita di generalità possiamo supporre che $v_1 = kv_2$ e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

☺

Proposizione 2.3.3

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. A è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: \implies : Per ipotesi A è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $k_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} -k_1v_1 &= k_2v_2 + \dots + k_nv_n & v_1 &= \frac{1}{k_1}(-k_2v_2 - \dots - k_nv_n) \\ v_1 &= -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - \dots - \frac{k_n}{k_1}v_n \end{aligned}$$

e quindi v_1 è combinazione lineare di v_2, \dots, v_n .

\Leftarrow : Per ipotesi uno dei vettori di A è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + \dots + k_nv_n \quad \underline{0} = -1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

siccome $-1 \neq 0$ A è legato.

☺

Proposizione 2.3.4

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $u \in V(K)$. Se $A \cup \{u\}$ è legato, allora u è combinazione lineare dei vettori di A .

Dimostrazione: Per ipotesi $A \cup \{u\}$ è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n, b \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n + bu$$

sia per assurdo $b = 0$

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, } \mathbf{assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \quad u = -\frac{k_1}{b}v_1 - \frac{k_2}{b}v_2 - \dots - \frac{k_n}{b}v_n$$

$\implies u$ è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, \dots, v_n

☺

Proposizione 2.3.5

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \supseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$. Se A è legato allora anche B è legato.

Dimostrazione:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

Se $B = [v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m]$ allora

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$$

$\implies B$ è legato.

☺

Proposizione 2.3.6

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \subseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$, se A è libero, allora B è libero.

Dimostrazione: Sia, per assurdo, B legato, allora per la proposizione precedente anche A è legato. **Assurdo!**
Quindi B è libero. \odot

2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

Definizione 2.4.1: Sistema di generatori

Sia A sistema di vettori di $V(K)$. A si dice sistema di generatori di $V(K)$ se ogni $v \in V(K)$ si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A .

Definizione 2.4.2: Copertura lineare

Sia A un sistema di vettori di $V(K)$ si dice copertura (o chiusura) lineare di A l'insieme $\mathcal{L}(A)$ di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di A .

N.B.

Dato A sistema di vettori di $V(K)$

1. $\mathcal{L}(A)$ è il più piccolo sottospazio di $V(K)$ che contiene A
2. $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3. $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se $V(K)$ ammette un sistema di generatori finito $\implies V(K)$ si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di $V(K)$ ha cardinalità infinita $\implies V(K)$ non è finitamente generato.

2.5 Basi e dimensione

Lemma 2.5.1

Sia $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori per uno spazio vettoriale $V(K)$, e sia $v \in S$ combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri) $\implies S \setminus \{v\}$ è sistema di generatori per $V(K)$

Dimostrazione: Sia, senza perdere di generalità, v_1 combinazione lineare di v_2, v_3, \dots, v_n

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$$

sia $v \in V(K)$

$$\begin{aligned} v &= h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = h_1 (k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \\ v &= \underbrace{(h_1 k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + \dots + \underbrace{(h_1 k_n + h_n)}_{\in K} v_n \in \mathcal{L}([v_2, v_3, \dots, v_n]) = \mathcal{L}(S \setminus \{v_1\}) \end{aligned}$$

$\implies S \setminus \{v_1\}$ è un sistema di generatori. \odot

Teorema 2.5.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ($V(K) \neq \{0\}$), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

Dimostrazione: sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori per $V(K)$, abbiamo due possibilità:

1. A è libero $\implies A$ è un sistema di generatori libero;
2. A è legato $\implies \exists v \in A$ combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre $v = v_1 \implies A \setminus \{v_1\} = A_1$ è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$ finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.

Osserviamo che A contiene almeno un $v \in A : v \neq \underline{0}$, questo perché $A_n = [0]$ e $v_n \neq \underline{0}$ perché $A \neq \{\underline{0}\} \implies A_n$ è necessariamente libero. \odot

Definizione 2.5.1: Base

Sia $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sequenza libera di vettori di $V(K)$. S è detta base se e solo se S è una sequenza libera di generatori.

Definizione 2.5.2: Base canonica di \mathbb{R}^n

$((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1))$ è una base canonica per \mathbb{R}^n .

Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ sistema di generatori e $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ sistema libero. Allora la cardinalità di A sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. ($m \leq n$)

Dimostrazione: Sia per assurdo $m > n$, poiché B genera $V(K)$ u_1 si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Essendo A libero $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, \dots, k_n$ non sono tutti nulli \implies senza perdita di generalità $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad v_1 = \frac{1}{k_1}(-u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, \dots, v_n])$$

B è sistema di generatori, $B \cup \{u_1\}$ è sistema di generatori, di conseguenza $(B \cup \{u_1\} \setminus \{v_1\}) = B_1 = [u_1, v_2, \dots, v_n]$ è ancora sistema di generatori per $V(K)$.

Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, \dots, h_n \in K$$

Se avessimo $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$ $u_2 = \alpha$ ma ciò non può succedere perché A è libero $\implies \exists h_i \neq 0$ e senza perdita di generalità supporremo $h_2 \neq 0$ quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - \dots - h_n v_n)$$

v_2 è linearmente dipendente da $B_2 = [u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]$ e B_2 , per lo stesso motivo di B_1 è ancora sistema di generatori.

Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento n volte fino a trovare un sistema $B_n = [u_1, u_2, \dots, u_n]$. Siccome avevamo supposto che $m > n$ essendo B_n sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche u_{n+1} come combinazione lineare dei vettori di B_n , cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \quad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

questo comporta che A sia legato, ma questo è **assurdo!** $\implies m \leq n$. \odot

Teorema 2.5.2

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano B_1 e B_2 due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad B_2 = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad m = n$$

Dimostrazione: Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- B_1 sistema di generatori, B_2 sistema libero $\implies n \geq m$;
- B_2 sistema di generatori, B_1 sistema libero $\implies m \geq n$.

$$m \geq n \text{ e } n \geq m \iff n = m. \quad \text{⊗}$$

Definizione 2.5.3: Dimensione

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di V la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se $V = \{0\}$ poniamo la $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

Proposizione 2.5.1

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n su K e sia $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori. Allora S è libero.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ una base di $V_n(K)$. Sia per assurdo S legato. Senza perdita di generalità $v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$. Allora $S' = S \setminus \{v_1\}$ è ancora sistema di generatori. $|S'| = n - 1 \geq |B|$ perché B è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!**. Quindi S è libero. ⊗

Proposizione 2.5.2

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K . Sia $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema libero. Allora S è anche un sistema di generatori.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ una base di $V(K)$, supponiamo per assurdo che S non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$ è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha} (-k_1 v_1 - k_2 v_2 - \dots - k_n v_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$ **assurdo!** Contro l'ipotesi che $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$ è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1}_{\text{sistema libero}} \leq \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \rightarrow \text{per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! $\implies S$ è un sistema di generatori. ⊗

Proposizione 2.5.3

m vettori in $V_n(K)$ con $m > n$ sono sempre linearmente dipendenti.

Dimostrazione: Siano per assurdo $[v_1, v_2, \dots, v_m]$, m vettori linearmente indipendenti con $m > n$. Sia B una base di $V_n(K)$. $m = |S = [v_1, v_2, \dots, v_m]| \leq |B| = n$ per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi $m > n$, **assurdo!** ⊗

Proposizione 2.5.4

m vettori in $V_n(K)$ con $m < n \implies$ non possono generare.

Dimostrazione: siano v_1, v_2, \dots, v_m per assurdo m vettori che generano $V_n(K)$ con $m < n$ allora:

$$m = |S| = [v_1, v_2, \dots, v_m] \geq |B| = n \quad \text{con } m < n \quad \text{per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! Va contro all'ipotesi. ☹

Teorema 2.5.3 Teorema di caratterizzazione delle basi

Sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una sequenza di vettori di $V(K)$. B è una base se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di B .

$$\forall v \in V, \exists! v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad k_i \in K$$

Dimostrazione: \implies sia B una base di V . Per ogni v si ha che $v \in \mathcal{L}(B)$ perché B è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista $v \in V$:

$$v = v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + \dots + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

B è una sequenza libera, quindi $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$ perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che $k_i \neq h_i \implies$ **assurdo!** $\implies \exists!$ la combinazione lineare dei vettori di B che dà v ($\forall v \in V$).

\Leftarrow per ipotesi $\forall v \in V \exists!$ combinazione lineare dei vettori di B che dà v . B è una sequenza di generatori, cioè $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$. Supponiamo per assurdo che B sia legato $\implies \exists k_i \in K$ non nullo:

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di B che danno $\underline{0}$. Dato che $\underline{0} \in V$ per ipotesi esiste un'unica combinazione lineare dei vettori di B che dà $\underline{0}$. **Assurdo!** Quindi B è una sequenza libera e B è una base per V . ☹

Definizione 2.5.4: Componenti di un vettore rispetto ad una base

Sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $v \in V$. Chiameremo componenti di v rispetto alla base B la sequenza (k_1, k_2, \dots, k_n) :

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Proposizione 2.5.5

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K , allora $V_n(K)$ ammette almeno un sottospazio di dimensione $m \forall 0 \leq m \leq n$.

Dimostrazione: sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $0 \leq m \leq n$, ci sono due possibilità:

1. $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$ è il sottospazio voluto;
2. $0 < m \leq n$ e quindi $S = (v_1, v_2, \dots, v_m)$

$\mathcal{L}(S)$ ha dimensione m perché S è libero ($S \subseteq B$) e genera, per definizione $\mathcal{L}(S)$. ☹

Proposizione 2.5.6

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia $U \leq W$, allora:

1. $\dim(U) \leq \dim(W)$
2. $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti:

1. Sia B base per U e B' base per W , se per assurdo

$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$

contro il lemma di Steinitz.

2. \implies è banale;
 \impliedby sia per assurdo $U < W$ e sia B base di U , allora

$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$

quindi B è una base anche per $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$ **Assurdo!**

☺

Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \dots, v_p)$, ove $p \leq n$, una sequenza libera di vettori in $V_n(K)$. Allora, in una qualunque base B di $V_n(K)$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è una base di $V_n(K)$.

2.6 Intersezione e somma di sottospazi

Proposizione 2.6.1

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e siano $U, W \leq V \implies U \cap W$ è sottospazio di V .

Dimostrazione: Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi. $U \cap W$ è un sottospazio di $V \iff$ è sottoinsieme non vuoto di V :

$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W$$

$U \cap W$ è sottoinsieme non vuoto di V , perché $U \subseteq V, W \subseteq V$ e $\underline{0} \in U \cap W$. Siano ora $v_1, v_2 \in U \cap W$ e $k_1, k_2 \in K$, osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U$ e per lo stesso motivo $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W \implies k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. ☺

N.B.

Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che $U \cup W$ non è un sottospazio a meno che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Definizione 2.6.1: Spazio di somma

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K definiamo lo **spazio di somma** come:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

Proposizione 2.6.2

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K abbiamo che: $U + W \leq V$

Dimostrazione: Osserviamo che $U + W \subseteq V$ perché dato $u \in U$ e $w \in W$, $u \in V$ e $w \in V \implies u + w \in V$, il quale non è vuoto perché $\underline{0} \in U + W$. Siano $v_1, v_2 \in U + W$ e siano $k_1, k_2 \in K$

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} &= k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1 u_1 + k_1 w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2 u_2 + k_2 w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}} \\ &\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio } U + W \leq V \end{aligned}$$

⊕

Proposizione 2.6.3

Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

Definizione 2.6.2: Somma diretta

Dati $U, W \leq V_n(K)$ diremo che $U + W$ è somma diretta se $\forall v \in U + W$ può essere scritto come unico modo come $u + w$. Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists! u \in U \text{ e } w \in W : \quad v = u + w$$

Se $U + W$ è una somma diretta allora la indicheremo con $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.4

Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione: \implies Siano U, W in somma diretta e sia, per assurdo: $x \in U \cap W$ con $x \neq \underline{0}$. Sia $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad e \quad w = w - x \text{ poiché la somma è diretta } \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

\Leftarrow Siano $U, W : U \cap W = \{\underline{0}\}$ e supponiamo per assurdo che esista $v \in U + W$:

$$v = u_1 + w_1 \quad e \quad v = u_2 + w_2 \quad \text{con } u_1, u_2 \in U \quad e \quad w_1, w_2 \in W \quad e \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad e \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad e \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che v avesse due scritture distinte come somma i elementi di U e W .

$$\implies \exists! (u_1, w_1) : \quad u_1 \in U \quad e \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1 \quad e \quad U \oplus W$$

⊕

Corollario 2.6.1

Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $V = U \oplus W \iff U + W = V \quad e \quad U \cap W = \{\underline{0}\}$.

N.B.

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia B_1 una base di V e B_2 una base di $W \implies B_1 \cup B_2$ è sequenza di generatori per lo spazio $U + W$. In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per $U + W$.

Proposizione 2.6.5

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia A una sequenza libera di vettori di U e B una sequenza libera di vettori di W . Allora $A \cup B$ è una sequenza libera di vettori della $U \oplus W$.

Dimostrazione: Siano $A = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ e $B = (w_1, w_2, \dots, w_h)$ e supponiamo per assurdo che $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$ e $b_1, b_2, \dots, b_h \in K$, quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h}_{\in W}$$

$$\implies 0 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad e \quad 0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

ma A e B sono sequenze libere quindi $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = \dots = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \implies \text{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$ è una sequenza libera. ☺

Corollario 2.6.2

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e siano B_U e B_W basi di U e $W \implies B_U \cup B_W$ è una base per $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.6 Formula di Grassmann

Dati $U, W \leq V_n(K)$ abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

Definizione 2.6.3: Complemento diretto

Sia $W \leq V_n(K)$ si dice **complemento diretto** di W in V uno spazio $U \leq V : U \oplus W = V$.

N.B.

Un complemento diretto di W in V esiste sempre e si trova estendendo una base di W a una base di V . In generale questo non è unico.

Capitolo 3

Sistemi lineari

3.1 Determinante di una matrice quadrata

Definizione 3.1.1: Determinante

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata, di ordine n , a elementi in un campo K . Si dice **determinante** di A , e si scrive $|A|$ oppure $\det(A)$, l'elemento di K definito ricorsivamente come segue:

1. se $n = 1$ $A = (a_{11})$ $\det(A) = |A| = a_{11}$
2. se $n > 1$ $A = a_{ij}$ $\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, il suo determinante è $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Mentre se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora la il determinante di A è

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definizione 3.1.2: Complemento algebrico

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n , a elementi in campo K . Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk} , e si indica Γ_{hk} , il determinante della matrice quadrata di ordine $n - 1$, ottenuta da A sopprimendo la h -esima riga e la k -esima colonna, preso con il segno $(-1)^{h+k}$.

Teorema 3.1.1 Primo teorema di Laplace

Data la matrice quadrata di ordine n , la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di A .

Pertanto, la formula per il calcolo del determinante di $A = (a_{ij})$ rispetto alla i -esima riga è

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}\Gamma_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

rispetto alla j -esima colonna è

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}\Gamma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Teorema 3.1.2 Secondo teorema di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero. Quindi

$$A \in M_n(K) \implies \begin{cases} a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \dots + a_{in}\Gamma_{jn} = 0 & i \neq j \\ a_{1i}\Gamma_{1j} + a_{2i}\Gamma_{2j} + \dots + a_{ni}\Gamma_{nj} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Teorema 3.1.3 Teorema di Bidet

Date due matrici quadrate di ordine n , A e B , il determinante della matrice prodotto $A \cdot B$ è uguale al prodotto dei determinanti di A e B , cioè

$$|A \cdot B| = |A||B|$$

3.2 Matrici invertibili

Definizione 3.2.1: Matrice invertibile

Una matrice quadrata, di ordine n , si dice **invertibile** quando esiste una matrice B , quadrata e dello stesso ordine, tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, dove I_n è la matrice identica di ordine n . La matrice B si dice **inversa** di A e si indica A^{-1} .

Teorema 3.2.1

Sia $A \in M_n(K)$; allora A è invertibile $\iff |A| \neq 0$ e in tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t A_a$$

dove A_a si chiama **matrice aggiunta** di A ed è la matrice ottenuta da A sostituendo ogni elemento con il suo complemento algebrico Γ .

3.3 Dipendenza lineare e determinanti

Definizione 3.3.1: Minore

Sia $A \in K^{m,n}$. Si chiama **minore di ordine p** estratto da A , con $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, $p \leq \min\{m, n\}$, una matrice quadrata di ordine p ottenuta cancellando $m - p$ righe e $n - p$ colonne da A .

Teorema 3.3.1

Una sequenza $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di n vettori dello spazio vettoriale $V_n(K)$ è libera se, e soltanto se, la matrice A , che ha nelle proprie righe (o colonne) le componenti dei vettori di S in una base di $V_n(K)$, ha determinante non nullo ed è legata se, e soltanto se, tale matrice A ha determinante nullo.

Definizione 3.3.2: Rango di una matrice

Sia A una matrice di $K^{m,n}(K)$. Si dice **rango** della matrice A , e si scrive $\rho(A)$, l'ordine massimo di un minore estraibile da A con determinante non nullo.

Osservazione: Data la matrice A di $K^{m,n}(K)$

1. $\rho(A) = 0 \iff A$ è la matrice nulla;
2. $\rho(A) = \rho(A^t)$;
3. $\rho(A) \leq \min(m, n)$.

Definizione 3.3.3: Spazio delle righe e delle colonne

Data una matrice A , avente m righe ed n colonne, si dice **spazio delle righe** di A , e si indica $\mathcal{L}(R)$, il sottospazio $K^n(K)$ generato dalle righe di A . Si dice **spazio delle colonne** di A , e si indica $\mathcal{L}(C)$, il sottospazio vettoriale di $K^m(K)$ generato dalle colonne di A .

Teorema 3.3.2 Teorema di Kronecker

Gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(R)$ ed $\mathcal{L}(C)$, di una matrice $A \in K^{m,n}(K)$, hanno la stessa dimensione e tale dimensione coincide con il rango di A . Cioè:

$$\dim(\mathcal{L}(R)) = \dim(\mathcal{L}(C)) = \rho(A).$$

Dimostrazione: Dimostriamo che $\dim(\mathcal{L}(R)) = \rho(A)$. La dimostrazione per quanto riguarda le colonne è completamente analoga. Sia $s = \dim(\mathcal{L}(R)) \implies$ abbiamo s righe linearmente indipendenti nella matrice A e quindi per il teorema precedente esiste un minore in A di ordine s a determinante non nullo. Pertanto $\rho(A) \geq s$. Sia per assurdo $\rho(A) = r > s$, dovrebbe esistere in A un minore di ordine r a determinante non nullo. Se chiamiamo ora $S = (R_1, R_2, \dots, R_r)$ la sequenza di righe nella matrice A , la matrice A ha un minore di ordine r non singolare e di conseguenza è libera. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(R) \geq \dim \mathcal{L}(S) = r > s = \dim \mathcal{L}(R).$$

Ma questo è un **assurdo!** Quindi

$$\rho(A) = r \leq s = \dim \mathcal{L}(R) \implies r = s.$$



Corollario 3.3.1

Se A è una matrice quadrata di ordine n , con elementi in un campo K , le sequent condizioni sono equivalenti:

1. $|A| \neq 0$;
2. A è invertibile;
3. $\rho(A) = n$;
4. le righe sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n ;
5. le colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n .

Teorema 3.3.3 Teorema degli orlati

Una matrice $A \in K^{m,n}(K)$ ha rango p se, e solo se, esiste un minore M di ordine p a determinante non nullo e tutti i minori di ordine $p+1$, che contengono M , hanno determinante nullo.

3.4 Sistemi lineari

Definizione 3.4.1: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in campo K .

Osservazione: Posto $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B \iff \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$$

che è equivalente a dire che B è combinazione lineare delle colonne di A . Quindi il sistema è risolubile se, e soltanto se, $B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Teorema 3.4.1 Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile se, e soltanto se, $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Dimostrazione: " \implies " Sia $AX = B$ risolubile, $\implies \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$ quindi

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) &\implies \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B)}_{=\rho(A|B)} = \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)}_{=\rho(A)} \\ &\implies \rho(A|B) = \rho(A) \end{aligned}$$

" \impliedby " Per ipotesi abbiamo che $\rho(A|B) = \rho(A)$. Quindi

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B) &= \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \implies \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\implies B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\implies \exists (k_1, k_2, \dots, k_n) : k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_n C_n = B \end{aligned}$$

Quindi la n -upla (k_1, k_2, \dots, k_n) è soluzione di $AX = B$ e di conseguenza il sistema è compatibile. \odot

Teorema 3.4.2 Teorema di Cramer

Sia $AX = B$ un sistema lineare in n equazioni ed n incognite. Se $\det(A) \neq 0$ allora $AX = B$ ammette un'unica soluzione.

Indichiamo con B_1 , la matrice ottenuta sostituendo a C_i la colonna dei termini noti (B).

$$A = (C_1, C_2, \dots, C_n) \quad B_1 = (C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

Se $\det(A) \neq 0$ allora (X_1, X_2, \dots, X_n) è data da:

$$X_i = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}$$

Definizione 3.4.4: Sistema principale equivalente

Sia $AX = B$ un sistema compatibile, si dice sistema principale equivalente un sistema $A'X = B'$ ottenuto eliminando $m - p$ equazioni da $AX = B$ tale che $\rho(A'|B') = \rho(A') = p$.

Teorema 3.4.3

Un sistema $AX = B$ compatibile ha le stesse soluzioni di un suo sistema principale equivalente.

Osservazione: $\rho(A) = \rho(A|B)$ se il sistema lineare è omogeneo e quindi è sempre compatibile. In particolare

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è sempre soluzione di $AX = \underline{0}$.

Definizione 3.4.5: Autosoluzioni

Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo diverse dalla soluzione nulla si dicono **autosoluzioni**.

N.B.

Non è detto che un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni.

Proposizione 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ ammette autosoluzioni se, e solo se, $\rho(A) < n$ (con n numero di incognite).

Corollario 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ con $A \in M_n(K)$ ammette autosoluzioni se, e soltanto se, $\det(A) = 0$.

Teorema 3.4.4

Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo con $A \in K^{m,n}$ e sia S l'insieme delle sue soluzioni, allora S è un sottospazio di K^n di dimensione $n - \rho(A)$.

Osservazioni:

1. $\underline{0} \in S$
2. se $n - \rho(A) > 0$ abbiamo autosoluzioni
3. Se $B \neq \underline{0}$ l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ non è un sottospazio di K^n perché $A\underline{0} = \underline{0} \neq B \implies \{\underline{0}\} \notin S$.

Proposizione 3.4.2

Sia $AX = B$ un sistema lineare in m equazioni ed n incognite, detto S l'insieme delle soluzioni abbiamo che

$$S = \begin{cases} \{x_0 + z : x_0 \in S, z \in S\} & \text{se } AX = B \text{ è compatibile} \\ \emptyset & \text{se } AX = B \text{ non è compatibile} \end{cases}$$

Definizione 3.4.6: Sistema lineare omogeneo associato

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite diciamo che $AX = \underline{0}$ è il **sistema lineare omogeneo associato** a $AX = B$.

Proposizione 3.4.3

Le soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX = B$ sono tutte e sole del tipo $\bar{X} = X_0 + Z$, ove X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e Z è la soluzione di $AX = \underline{0}$, sistema omogeneo associato ad $AX = B$.

Dimostrazione: Sia \bar{X} soluzione di $AX = B$, poniamo $Z = \bar{X} - X_0 \iff \bar{X} = X_0 + Z$

$$AZ = A(\bar{X} - X_0) = A\bar{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$$

Quindi Z è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad A . Di conseguenza $\bar{X} = X_0 + Z$ ⊙

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite compatibile, le sue soluzioni sono tante quante quelle del sistema lineare omogeneo associato che costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$. Se il campo è infinito, posto $\rho(A) = p$, si dice che le soluzioni sono ∞^{n-p} (cioè che l'insieme delle soluzioni dipende da $n - \rho(A)$ parametri).

Sostituendo si ha ${}^tXE = {}^tX'AE$, ove A è la matrice del cambiamento di base da B a B' , quindi, dato che le componenti dei vettori sono univocamente determinate

$$X = {}^tAX'$$

$$X' = {}^tA^{-1}X$$

Possiamo dire quindi che le componenti di uno stesso vettore rispetto a due basi B e B' sono legate dalla matrice del cambiamento di base da B a B' .

Capitolo 4

Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

4.1 Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico

Definizione 4.1.1: Polinomio ed equazione caratteristica

Se A è una matrice quadrata di ordine n , si dice **polinomio caratteristico** di A , e si indica $p_A(\lambda)$, il determinante della matrice $A - \lambda I_n$, cioè

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

L'equazione $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ è detta **equazione caratteristica** di A .

Definizione 4.1.2: Autovalori

Le radici del polinomio caratteristico si chiamano **autovalori** di A .

Definizione 4.1.3: Autospazio

Lo spazio delle soluzioni del sistema $(A - \bar{\lambda} I_n)X = 0$, dove $\bar{\lambda}$ è un autovalore, si chiama **autospazio** associato a $\bar{\lambda}$ e si indica con $V_{\bar{\lambda}}$.

Definizione 4.1.4: Autovettori

I vettori non nulli dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ si chiamano **autovettori** relativi a $\bar{\lambda}$.

Osservazione: Si potrebbe dimostrare che se il polinomio caratteristico di $A \in M_n(K)$ ha grado n allora gli autovalori di A sono al massimo n .

Definizione 4.1.5: Matrici simili

Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono **simili** se esiste $P \in M_n(K)$ con $|P| \neq 0$ tale che

$$B = P^{-1}AP \quad PB = AP$$

Proposizione 4.1.1

Due matrici simili A, B hanno lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico (e di conseguenza gli stessi autovalori).

Dimostrazione: Per ipotesi le due matrici A, B sono simili quindi:

$$\exists P \in M_n(K), |P| \neq 0 : B = P^{-1}AP$$

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A| \implies |B| = |A|$$

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = \frac{1}{|P|}|A - \lambda I_n||P| = |A - \lambda I_n| = p_A(\lambda)$$

e attraverso questa serie di passaggi abbiamo potuto dimostrare che se due matrici sono simili allora avranno sia lo stesso determinante che lo stesso polinomio caratteristico. ☺

4.2 Matrici diagonalizzabili

Definizione 4.2.1: Matrice diagonalizzabile

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, ovvero esistono $D, P \in M_n(K)$ con D matrice diagonale, $|P| \neq 0$ e $D = P^{-1}AP$.

Teorema 4.2.1 Primo criterio di diagonalizzabilità

Una matrice $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile se, e soltanto se, K^n ammette una base costituita da autovettori di A .

Dimostrazione: " \implies " Per ipotesi A è diagonalizzabile quindi $\exists D, P \in M_n(K) : D$ è diagonale $|P| \neq 0$ e $PD = AP$. Per semplicità denotiamo le colonne di $P = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)$.

$$AP = A(P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n) = (AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n)$$

$$PD = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = (d_1 P_1 \ d_2 P_2 \ \dots \ d_n P_n)$$

Quindi

$$(AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n) = (d_1 P_1 \ d_2 P_2 \ \dots \ d_n P_n) \iff AP_1 = d_1 P_1, AP_2 = d_2 P_2, \dots, AP_n = d_n P_n$$

$$\implies AX = \lambda X \quad \lambda = d_i \quad X = P_i$$

dove d_i è un autovalore, P_i è un autovettore di A e $(P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)$ è una sequenza di n autovettori. Poiché $\dim K^n = n$ e la sequenza è composta da n vettori, è sufficiente controllare la lineare indipendenza di P . Ma siccome avevamo supposto per ipotesi che $|P| \neq 0$ le sue n colonne sono linearmente indipendenti. Quindi $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ è una base di K^n costituita da autovettori di A .

" \impliedby " è analogo, basta ripercorrere il ragionamento a ritroso. ☺

Osservazione: Se $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile allora:

- D ha sulla diagonale principale gli autovalori di A ;
- P , cioè la matrice diagonalizzante, ha nelle colonne gli autovettori della base di K^n .

Definizione 4.2.2: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$; si chiama:

- **molteplicità algebrica** di $\bar{\lambda}$ il numero di volte che $\bar{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico, e si indica con $a_{\bar{\lambda}}$
- **molteplicità geometrica** di $\bar{\lambda}$ la dimensione dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ associato a $\bar{\lambda}$, e si indica con $g_{\bar{\lambda}}$.

Proposizione 4.2.1

Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$. Allora

$$1 \leq g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$$

Proposizione 4.2.2

Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ t autovalori di A distinti tra loro, allora la somma dei relativi autospazi è diretta.

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$$

Osservazioni:

1. $A \in M_n(K) \implies \deg(p_A(\lambda)) = n$, quindi ho al massimo n autovalori;
2. $\sum a_{\lambda_i} \leq n$;
3. $\sum a_{\lambda_i} = n \iff$ tutti gli autovalori di A sono in K ;
4. $S = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \implies \dim S = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i}$
5. Autovettori provenienti da autospazi diversi sono tra loro linearmente indipendenti (perché la somma è diretta).

Teorema 4.2.2 Secondo criterio di diagonalizzabilità

Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A . Allora A è diagonalizzabile se, e soltanto se:

1. tutti gli autovalori di A sono in K ;
2. Per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$ (e allora si dice che l'autovalore è regolare).

Dimostrazione: " \implies " Per ipotesi A è diagonalizzabile. Per il primo criterio di diagonalizzabilità K^n ammette una base B formata da autovettori, cioè tale che $\mathcal{L}(B) = K^n$ e $B \subseteq V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$. Quindi

$$\begin{aligned} K^n = \mathcal{L}(B) &\leq \mathcal{L}(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n \\ &\implies V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = K^n \\ &\implies n = \dim K^n = \dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} \leq n \end{aligned}$$

Siccome $\sum a_{\lambda_i} = n$ tutti gli autovalori di A sono in K . Inoltre $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$ e $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i} \implies a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$.

" \impliedby " Per ipotesi abbiamo che tutti gli autovalori di A sono in K e per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$. Per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ avremo un relativo autospazio a cui corrisponde una relativa base di autovettori B_1, B_2, \dots, B_t . Chiamiamo $B = \bigcup_{i=1}^t B_i$, cioè l'unione di tutte le basi. Certamente B è libera perché la somma di sottospazi distinti è diretta.

$$|B| = |\bigcup B_i| = \sum |B_i| = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i} = n$$

Quindi B è una base di K^n costituita da autovettori e per il primo criterio di diagonalizzabilità A è diagonalizzabile. \odot

Capitolo 5

Forme bilineari e prodotti scalari

5.1 Forme bilineari

Definizione 5.1.1: Forma bilineare e prodotto scalare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale. Una **forma bilineare** in V è una funzione $*$: $V \times V \rightarrow K$:

- $(u + v) * w = u * w + v * w \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$
- $u * (v + w) = u * v + u * w \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$
- $(ku) * v = u * (kv) = k(u * v) \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$

Se poi $*$ verifica anche l'ulteriore proprietà

- $v * w = w * v \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$

Allora si chiama **prodotto scalare** (o forma bilineare simmetrica).

Osservazione: Si deduce chiaramente che $\forall v \in V \quad 0 * v = 0 = v * 0$.

Esempio 5.1.1 (Prodotto scalare euclideo e standard)

1. Definiamo il **prodotto scalare euclideo** come una funzione $*$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) * (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \dots + x_n x'_n$$

2. Definiamo il **prodotto scalare standard** come la funzione $*$: $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{pmatrix} = x_{11}x'_{11} + x_{12}x'_{12} + \dots + x_{nn}x'_{nn}$$

5.2 Prodotti scalari e ortogonalità

Definizione 5.2.1: Ortogonalità

In uno spazio vettoriale $V(K)$, con prodotto scalare " \cdot ", due vettori v e w di V si dicono **ortogonali**, e si scrive $v \perp w$, se $v \cdot w = 0$.

Definizione 5.2.2: Complemento ortogonale

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e \cdot un prodotto scalare. Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$; si chiama **complemento ortogonale** (o più semplicemente ortogonale) di A l'insieme

$$A^\perp = \{v \in V : v \perp w, \forall w \in A\} \quad \underline{0} \in A^\perp \neq \emptyset$$

Proposizione 5.2.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare \cdot . Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$. Allora A^\perp è un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione: Sappiamo che $\underline{0} \in A^\perp \neq \emptyset$
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall u_1, u_2 \in A^\perp, \forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^\perp$$

Possiamo scrivere per la proprietà di ortogonalità che

$$\forall w \in A \quad u_1 \cdot w = 0 \quad u_2 \cdot w = 0$$

Quindi

$$(k_1 u_1 + k_2 u_2) \cdot w = (k_1 u_1) \cdot w + (k_2 u_2) \cdot w = k_1 \underbrace{(u_1 \cdot w)}_{=0} + k_2 \underbrace{(u_2 \cdot w)}_{=0}$$

$$\implies k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^\perp \implies A^\perp \text{ è un sottospazio.}$$

⊕

Osservazioni:

1. $A \subseteq B \implies A^\perp \supseteq B^\perp$
2. $A^\perp = [\mathcal{L}(A)]^\perp$
3. Generalmente se $A \leq V(K) \implies A \neq (A^\perp)^\perp$, ma $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

Proposizione 5.2.2

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare \cdot e siano $v, w \in V(K)$ con $w \cdot w \neq \underline{0}$. Allora

$$\exists v_1, v_2 \in V : v = v_1 + v_2, v_1 = kw, v_2 \perp w$$

Dimostrazione:

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \quad v_1 = kw = \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot w} \right) \cdot w$$

$$v_2 = v - v_1 \iff v_1 + v_2 = v$$

Ora verifichiamo che $v_2 \perp w$

$$v_2 \perp w \iff (v - v_1) \cdot w = \left(v - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w \right) \cdot w = v \cdot w - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w \cdot w = v \cdot w - v \cdot w = 0$$

⊕

Definizione 5.2.3: Coefficiente di Fourier e proiezione

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e siano $v, w \in V(K)$ con $w \cdot w \neq \underline{0}$. Allora

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$$

si chiama **coefficiente di Fourier** di v lungo w e

$$v_1 = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w$$

si chiama **proiezione** di v lungo w .

Definizione 5.2.4: Forma quadratica

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e sia $v \in V(K)$. Si chiama **forma quadratica** associata a "·" la funzione

$$q : \begin{cases} V \rightarrow K \\ v \mapsto q(v) = v \cdot v \end{cases}$$

5.3 Spazi con prodotto scalare definito positivo

Definizione 5.3.1: Prodotto scalare definito positivo

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su campo K ordinato. Un prodotto scalare "·" in V si dice **definito positivo** se

$$\forall v \in V \quad v \cdot v \geq 0 \quad e \quad v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$$

Per chiarezza da qui in avanti quando si parla di prodotti scalari definiti positivi $K = \mathbb{R}$ in modo tale che esso sia ordinato. Di conseguenza denotiamo con **spazio vettoriale metrico reale** $V_n^\circ(\mathbb{R})$, cioè uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

Definizione 5.3.2

Dato $V_n^\circ(\mathbb{R})$ si chiama **norma** la funzione

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{q(v)} \end{cases}$$

Esempio 5.3.1 (Vettori geometrici)

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \alpha \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0} = \sqrt{|\vec{v}|^2} = |\vec{v}| \end{aligned}$$

Osservazioni:

1. La norma generalizza la nozione di "lunghezza" di un vettore.
2. $\|v\| = \underline{0} \iff v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$

Proposizione 5.3.1

In $V_n^\circ(\mathbb{R})$ valgono i seguenti fatti

1. $\|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$
3. $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (disuguaglianza di Schwarz)
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

Osservazioni: Sia " \cdot " un prodotto scalare euclideo definito su $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$. La sua base canonica è

$$B_c = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

1. $\|e_i\| = \sqrt{e_i \cdot e_i} = 1$
2. $e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \implies e_i \perp e_j$
3. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1)$
 $\implies \overset{=v}{v \cdot e_i} = x_i = i\text{-esima componente di } v \text{ rispetto a } B_c$

Definizione 5.3.3: Base ortogonale e ortonormale

I vettori v_1, v_2, \dots, v_n di uno spazio vettoriale $V_n^\circ(\mathbb{R})$ formano un insieme **ortogonale** se $v_i \cdot v_j = 0$, $i \neq j$. Se inoltre ciascuno dei v_i ha norma unitaria, allora parleremo di insieme **ortonormale**. Se poi tali vettori costituiscono una base di $V_n^\circ(\mathbb{R})$ parleremo di base ortogonale o ortonormale.

Proposizione 5.3.2

Se $\emptyset \neq A \subseteq V_n^\circ(\mathbb{R})$ è costituito da vettori tutti non nulli. Allora A è libero.

Dimostrazione:

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j. \quad \text{Siano } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}$$

$$0 = 0 \cdot v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot v_1 = \alpha_1 \underbrace{v_1 \cdot v_1}_{\neq 0 \implies v_1 \neq \underline{0} \implies \|v_1\|^2 \neq 0} + \alpha_2 \underbrace{v_2 \cdot v_1}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{v_n \cdot v_1}_{=0} = \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} \alpha_1 \implies \alpha_1 = 0$$

Ripeto il ragionamento per ciascuno dei v_i e ottengo che gli unici α che mi danno il vettore nullo sono quelli tutti nulli. Quindi se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \implies A$ è libero. \odot

Osservazione: In $V_n^\circ(\mathbb{R})$ se A è un insieme ortogonale di n vettori tutti diversi dal vettore nullo allora A è libero. Dunque fissato un ordine abbiamo una base ortogonale.

Teorema 5.3.1 Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Siano $V_n^\circ(\mathbb{R})$ e $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base. La sequenza $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ così definita

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2 - \frac{e_2 \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 \\ e'_3 &= e_3 - \frac{e_3 \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 - \frac{e_3 \cdot e'_2}{e'_2 \cdot e'_2} \cdot e'_2 \\ &\vdots \\ e'_n &= e_n - \frac{e_n \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 - \dots - \frac{e_n \cdot e'_{n-1}}{e'_{n-1} \cdot e'_{n-1}} \cdot e'_{n-1} \end{aligned}$$

è una base ortogonale di $V_n^\circ(\mathbb{R})$.

5.4 Matrici di forme bilineari

Definizione 5.4.1: Matrice di forma bilineare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale, $"\ast"$ una forma bilineare e $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base di $V_n(K)$. Si chiama **matrice della forma bilineare** $"\ast"$ rispetto a B

$$A_B^* = \begin{pmatrix} e_1 * e_1 & e_1 * e_2 & \dots & e_1 * e_n \\ e_2 * e_1 & e_2 * e_2 & \dots & e_2 * e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n * e_1 & e_n * e_2 & \dots & e_n * e_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Si può indicare in modo più compatto con

$$A_B^* = (e_i * e_j)$$

N.B.

La matrice di una forma bilineare dipende dalla base fissata.

Proposizione 5.4.1

La matrice che rappresenta un prodotto scalare rispetto a una base qualsiasi è simmetrica.

Dimostrazione: $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ e $"\cdot"$ è il prodotto scalare. Allora $A_B^\cdot = (e_i \cdot e_j) = (e_j \cdot e_i) = {}^t A_B^\cdot$. \odot

Proposizione 5.4.2

Sia $"\cdot"$ un prodotto scalare su $V_n(K)$ e sia B una sua base. Sia A_B^\cdot una matrice associata a $"\cdot"$ rispetto alla base B . Allora

- B è ortogonale $\iff A_B^\cdot$ è diagonale

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

- B è ortonormale $\iff A_B^\cdot = I_n \in M_n(K)$

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad e_i \cdot e_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad a_{ii} = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Osservazione: Utilizzando la matrice associata ad una forma bilineare $"\ast"$ è possibile calcolare

$$v * w \quad \forall v, w \in V_n(K)$$

Proposizione 5.4.3

Sia B una base di $V_n(K)$ e sia $"\ast"$ una forma bilineare su V . Dette

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

le matrici colonne delle componenti rispettivamente di v e di $w \in V$ risulta:

$$v * w = {}^t X A_B^* Y$$

5.5 Matrici ortogonali e basi ortonormali

Definizione 5.5.1: Matrice ortogonale

Sia $A \in M_n(K)$ diciamo che A è **ortogonale** se ${}^tA = A^{-1}$. Quindi

$$A^t A = {}^t A A = I_n$$

Proposizione 5.5.1

Sia $A \in M_n(K)$ una matrice ortogonale. Allora $|A| \in \{-1, 1\}$

Dimostrazione:

$$|I_n| = 1 = |AA^{-1}| = |A^t A| = |A| |{}^t A| = |A| |A| = |A|^2$$

$$|A|^2 = 1 \iff |A| = \pm 1$$

⊙

Proposizione 5.5.2

Sia $A \in M_n(K)$. A è ortogonale se, e soltanto se, le sue righe (o colonne) costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto scalare euclideo (dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$).

Dimostrazione: " \implies "

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \iff {}^t A = ({}^t R_1, \dots, {}^t R_n)$$

$$A^t A = I_n = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} ({}^t R_1, \dots, {}^t R_n) = \begin{pmatrix} R_1 \cdot R_1 & R_1 \cdot R_2 & \dots & R_1 \cdot R_n \\ R_2 \cdot R_1 & R_2 \cdot R_2 & \dots & R_2 \cdot R_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n \cdot R_1 & R_n \cdot R_2 & \dots & R_n \cdot R_n \end{pmatrix}$$

$$R_i \cdot R_j = 0 \text{ se } i \neq j, \quad R_i \cdot R_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Quindi le righe di A sono una base ortonormale. Il ragionamento è completamente analogo per le colonne.
" \impliedby " Si può dimostrare ripercorrendo le implicazioni al contrario.

⊙

5.6 Matrici reali simmetriche

Teorema 5.6.1

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica allora

1. Gli autovalori di A sono tutti reali (teorema spettrale)
2. Gli autovettori di A relativi ad autospazi distinti sono ortogonali tra loro

Dimostrazione del punto 2: Siano x e y autovettori relativi ad autovalori λ e μ distinti. Quindi $AX = \lambda x$ e $AX = \mu y$. Sia $\lambda \neq 0$. Quindi

$$\begin{aligned} ({}^t x^t y) \lambda &= (\lambda^t x) y = {}^t (x \lambda) y = {}^t (Ax) y = \underbrace{({}^t x^t A) y}_{\text{per la simmetria di } A} = ({}^t x A) y = {}^t x (Ay) \\ &= {}^t x \mu y = \mu ({}^t x y) = \mu ({}^t x^t y) \implies ({}^t x^t y) \lambda = ({}^t x^t y) \mu \\ \lambda k &= \mu k \iff (\lambda - \mu) k = 0 \iff \mu = \lambda \quad \text{oppure} \quad {}^t x^t y = 0 \end{aligned}$$

ma $\mu \neq \lambda$ perché x e y stanno in autospazi distinti $\implies {}^t x^t y = 0 \implies x$ e y sono ortogonali.

⊙

Corollario 5.6.1

Una matrice reale e simmetrica di ordine n ammette n autovalori contati con la loro molteplicità algebrica.

Definizione 5.6.1: Matrice ortogonalmente diagonalizzabile

Data $A \in M_n(K)$ è detta **ortogonalmente diagonalizzabile** se esistono D , matrice diagonale di ordine n , e P matrice ortogonale di ordine n tali che

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

Teorema 5.6.2

I seguenti fatti sono equivalenti

1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile;
2. \mathbb{R}^n ammette una base ortonormale di autovettori di A ;
3. A è una matrice reale e simmetrica.

Capitolo 6

Spazi affini

6.1 $A_n(K)$, spazio affine di dimensione n

Definizione 6.1.1: Spazio affine

Si dice **spazio affine** di dimensione n sul campo K , e si indica $\mathring{A}_n(K)$, la struttura costituita da

1. un insieme non vuoto A , detto insieme dei punti
2. uno spazio vettoriale $V_n(K)$
3. un'applicazione

$$f : A \times A \rightarrow V_n(K)$$

con le seguenti proprietà

- (a) $\forall P \in A \text{ e } \forall v \in V \quad \exists! Q \in A : f(P, Q) = \vec{PQ} = v$
- (b) $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \quad \forall P, Q, R \in A$

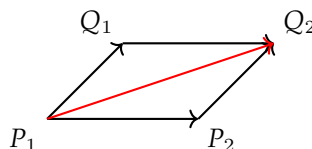
Proposizione 6.1.1

In $A_n(K)$, per ogni P, Q e $R \in A$

1. il vettore $\vec{RR} = \underline{0}$
2. $\vec{PQ} = \vec{PR} \iff Q = R$
3. $\vec{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
4. $v = \vec{PQ} \implies -v = \vec{QP}$
5. $\forall P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in A$ risulta $P_1\vec{P}_2 = Q_1\vec{Q}_2 \iff P_1\vec{Q}_1 = P_2\vec{Q}_2$

Dimostrazione: Dimostriamo ogni punto separatamente

1. $\vec{RR} + \vec{RR} = \vec{RR}$ perciò $2\vec{RR} = \vec{RR} \iff \vec{RR} = \underline{0}$
2. posto $v = \vec{PQ}$ allora $v = \vec{PR}$, ma $\exists! Q : \vec{PQ} = v \implies R = Q$
3. per la proprietà 1 $\vec{RR} = \underline{0} \implies$ per l'unicità di $Q : \vec{PQ} = \underline{0} \implies Q = P$
4. $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \underline{0} \implies \vec{PQ} = -\vec{QP}$
5. ovvio, essendo $P_1\vec{P}_2 + P_2\vec{Q}_2 = P_1\vec{Q}_2 = P_1\vec{Q}_1 + Q_1\vec{Q}_2$



Definizione 6.1.2: Sottospazio affine

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio affine** di dimensione $m \leq n$ una struttura data da

1. $\emptyset \neq A' \subseteq A$, detto **sostegno del sottospazio affine**
2. $V_m(K)$ sottospazio di $V_n(K)$
3. la restrizione dell'applicazione f ad $A' \times A'$ troncata a $V_m(K)$, purché questa sia ancora un'applicazione che gode delle proprietà elencate nella definizione di spazio affine

Definizione 6.1.3: Traslazione

Fissato un vettore $v \in V_n(K)$ si dice **traslazione**, individuata da v , la corrispondenza

$$t_v : A \rightarrow A \quad e \quad P \rightarrow Q$$

che associa a un punto $P \in A$ il punto Q traslato di P mediante il vettore v .

Osservazione: $\forall v \in V_n(K)$ la mappa t_v è una biiezione di A , insieme di punti di $(A, V_n(K), f)$. E l'inversa di t_v è t_{-v} .

Definizione 6.1.4: Sottospazio lineare

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio lineare** l'insieme dei traslati di un punto P , detto **origine**, mediante i vettori $v \in V_h(K) \leq V_n(K)$, con h detta dimensione del sottospazio lineare. Inoltre si denota con $S_h = [P, V_h(K)]$ il sottospazio lineare dato dal punto P e dallo spazio di traslazione V_h .

Definizione 6.1.5: Punti, rette, piani e iperpiani

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dicono

- **punti** i sottospazi lineari di dimensione 0

$$S_0 = [P, \{\underline{0}\}] = \{P\}$$

- **rette** i sottospazi lineari di dimensione 1

$$S_1 = [P, \mathcal{L}(v)] \quad \text{con } v \neq \underline{0} \quad e \quad v \in V_n(K)$$

- **piani** i sottospazi lineari di dimensione 2

$$S_2 = [P, \mathcal{L}(v_1, v_2)] \quad \text{con } v_1, v_2 \neq \underline{0} \quad e \quad v_1, v_2 \in V_n(K)$$

- **iperpiani** sono i sottospazi di dimensione $n - 1$

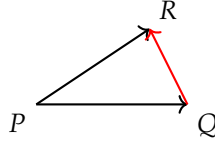
Proposizione 6.1.2

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di dimensione h sottospazio di $A_n(K)$.

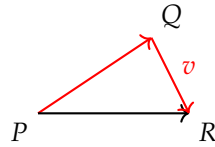
1. siano $Q, R \in S_h \implies \vec{QR} \in V_h(K)$
2. se $Q \in S_h$ e $v \in V_h$, allora $R = t_v(Q) \in S_h$

Dimostrazione: Dimostriamo entrambi i punti separatamente

1. Per ipotesi $Q \in S_h$, quindi $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h(K)$. $v = \vec{PQ} \in V_h$ e analogamente $\vec{PR} \in V_h$. Ma allora $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h$.



2. Poiché $Q \in S_h$, $\vec{PQ} \in V_h$. Allora $\vec{PR} + \vec{QR} = \vec{PQ} + \vec{v} \in V_h \implies \vec{PR} \in V_h$. Posto $w = \vec{PR}$, $t_w(P) = R$ con $w \in V_h \implies R \in S_h$.

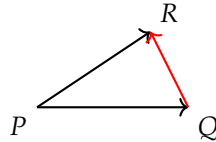


☺

Proposizione 6.1.3

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di $A_n(K)$. Ogni punto di S_h può essere scelto come origine di S_h . Cioè dato $Q \in S_h$ abbiamo che $[Q, V_h(K)] = S_h$.

Dimostrazione: Sia $R \in S_h$. Allora $\vec{PR} \in V_h$ e $\vec{PQ} \in V_h$. Quindi $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h \implies \vec{QR} \in V_h$.



Detto $w = \vec{QR}$ abbiamo che $R = t_v(Q)$. R è traslato di Q tramite il vettore $w \in V_h \implies R \in [Q, V_h]$, quindi

$$S_h \subseteq [Q, V_h]$$

con lo stesso ragionamento scambiamo P e Q si dimostra che

$$[Q, V_h] \subseteq [P, V_h] = S_h$$

e ciò vale solo se $S_h = [Q, V_h]$.

☺

Proposizione 6.1.4

Siano S_h e S_k due sottospazi lineari di $A_n(K)$. Allora $S_h \subseteq S_k \iff S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e $V_h \leq V_k$.

Dimostrazione: " \implies " Ovviamente $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Potremo scrivere $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. Sia $v \in V_h$ e sia $Q = t_v(P) \in S_h \subseteq S_k \implies Q \in S_k$ e sia $Q = t_v(P)$ ovvero $\vec{PQ} = v \in V_k \implies V_h \leq V_k$.
 " \impliedby " Sia $P \in S_h \implies [P, V_h] \subseteq [P, V_k]$ (poiché per ipotesi $V_h \subseteq V_k$) $[P, V_h] = S_h$ e $[P, V_k] = S_k \implies S_h \subseteq S_k$. ☺

Proposizione 6.1.5

Siano S_h e S_k sottospazi lineari di $A_n(K)$. Sia $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Allora

$$S_h \cap S_k = [P, V_h \cap V_k]$$

Dimostrazione: Sia $Q \in S_h \cap S_k$. Osserviamo che $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h$ (perché $Q \in S_h$). Ma $Q = t_v(P)$ con $v \in V_k$ (perché $Q \in S_k$). Quindi $Q \in [P, V_h \cap V_k]$ perché $v \in V_h \cap V_k$, cioè

$$S_h \cap S_k \subseteq [P, V_h \cap V_k]$$

Viceversa dato $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h \cap V_k \implies Q$ appartiene sia a S_h che ad S_k , quindi $Q \in S_h \cap S_k$, ovvero

$$[P, V_h \cap V_k] \subseteq S_h \cap S_k$$

$$\implies [P, V_h \cap V_k] = S_h \cap S_k$$

☺

Definizione 6.1.6: Parallelismo tra sottospazi

Due sottospazi lineari, $S_p = [P, V_p]$ ed $S_q = [Q, V_q]$, di $A_n(K)$ si dicono **paralleli**, e si scrive $S_p \parallel S_q$, se i rispettivi spazi di traslazione sono confrontabili, ovvero quando $V_p \subseteq V_q$, oppure $V_q \subseteq V_p$.

Osservazione 1: La relazione di parallelismo non è transitiva. E' invece riflessiva e simmetrica. Non è quindi una relazione d'equivalenza.

Osservazione 2: Due sottospazi lineari della stessa dimensione sono paralleli se, e soltanto se, hanno lo stesso spazio di traslazione. Quindi la relazione di parallelismo considerata tra spazi della stessa dimensione è una relazione d'equivalenza.

Proposizione 6.1.6

Due sottospazi lineari paralleli e di uguale dimensione o coincidono oppure hanno intersezione vuota.

Definizione 6.1.7

- Sia $S = [P, V_1]$ una retta. Lo spazio V_1 si dice **direzione** della retta S . Quindi due rette sono parallele se, e soltanto se, hanno la stessa direzione
- Sia $\pi = [P, V_2] \subseteq A_n(K)$ con $n \geq 2$. Lo spazio V_2 è detto **giacitura** di π . Quindi due piani sono paralleli se, e soltanto se, hanno la stessa giacitura.
- Tre o più punti si dicono **allineati** se esiste una retta che li contiene tutti.
- Due o più rette si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene tutte.

6.2 Proprietà di punti, rette e piani

Proposizione 6.2.1

In $A_n(K)$, con $n \geq 2$

1. per ogni due punti distinti passa un'unica retta
2. per due rette distinte, parallele o incidenti, passa un unico piano
3. due rette complanari, aventi intersezione vuota, sono parallele
4. per un punto passa un'unica retta parallela a una retta data (V Postulato di Euclide)

5. per un punto passa un unico piano, parallelo ad un piano dato
6. per tre punti, non allineati, passa un unico piano
7. una retta, avente due punti distinti in un piano, giace nel piano
8. per un punto passano almeno due rette distinte

Proposizione 6.2.2

In $A_3(K)$,

1. una retta e un piano, aventi intersezione vuota, sono paralleli
2. due piani, aventi intersezione vuota, sono paralleli
3. due piani distinti, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta per quel punto
4. per una retta passano almeno due piani distinti

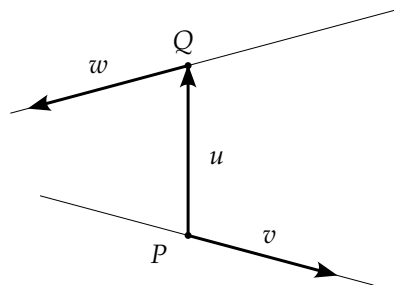
Definizione 6.2.1: Rette sghembe

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, due rette non complanari si dicono **sghembe**.

Proposizione 6.2.3

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, esistono due rette r_1 e r_2 sghembe tra loro. Inoltre due rette sghembe r_1 e r_2 , sono contenute su due piani π_1 e π_2 paralleli tra loro e distinti.

Dimostrazione: Per ipotesi, $A_n(K)$ ha dimensione almeno 3, quindi esistono nello spazio vettoriale $V_n(K)$ almeno 3 vettori linearmente indipendenti. Siano essi u, v, w . Siano inoltre, P un punto di A e Q il traslato di P mediante il vettore u ($Q = t_u(P)$). Dimostriamo che le rette $r = [P, \mathcal{L}(v)]$ ed $s = [Q, \mathcal{L}(w)]$ sono sghembe. Se infatti, esistesse un piano $\pi = [P, V_2]$ che le contiene entrambe, lo spazio di traslazione di π conterrebbe 3 vettori linearmente indipendenti, cioè v, w e $u = \vec{PQ}$ e ciò è un **assurdo!** Siano ora $t = [T, \mathcal{L}(v)]$ e $t' = [T', \mathcal{L}(v')]$ due



rette sghembe. I vettori v e v' generano uno spazio vettoriale V_2 di dimensione 2. Pertanto, i piani $\pi = [T, V_2]$ e $\pi' = [T', V_2]$, che risultano paralleli, sono distinti e contengono, rispettivamente le rette t e t' . ☺

6.3 Geometria analitica in $A_n(\mathbb{R})$

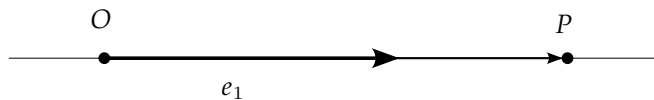
Definizione 6.3.1: Riferimento affine

Si dice **riferimento affine** di $A_n(\mathbb{R})$ una coppia $RA = [O, B]$ costituita da un punto O fissato, detto origine, e da una base B dello spazio vettoriale $V_n(\mathbb{R})$.

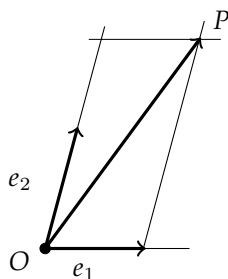
Definizione 6.3.2: Coordinate

Fissato, in $A_n(\mathbb{R})$, un riferimento affine $RA = [O, B]$, si dicono **coordinate** del punto P in RA le componenti, in B , del vettore \vec{OP} e si scrive $P = (x_i)_{i \in I_n}$.

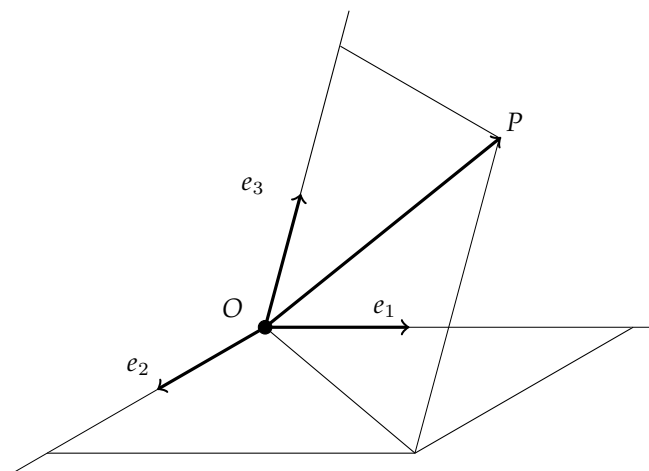
1. In $A_1(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1)$ è una base di $V_1(\mathbb{R})$. Se $\vec{OP} = xe_1$, si scrive $P = (x)$ e si dice che x è l'**ascissa** del punto P in RA .



2. In $A_2(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1, e_2)$ è una base di $V_2(\mathbb{R})$. La retta $[O, \mathcal{L}(e_1)]$ è detta **asse delle ascisse** e la retta $[O, \mathcal{L}(e_2)]$ è detta **asse delle ordinate**. Se $\vec{OP} = xe_1 + ye_2$, si scrive $P = (x, y)$ e si dice che (x, y) è la coppia delle coordinate di P in RA , dette rispettivamente **ascissa** e **ordinata** del punto P .



3. In $A_3(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1, e_2, e_3)$ è una base di $V_3(\mathbb{R})$. La retta $[O, \mathcal{L}(e_1)]$ è detta **asse delle ascisse**, la retta $[O, \mathcal{L}(e_2)]$ è detta **asse delle ordinate** e la retta $[O, \mathcal{L}(e_3)]$ è detta **asse delle quote**. Sono detti **piani coordinati** i piani $xy = [O, \mathcal{L}(e_1, e_2)]$, $xz = [O, \mathcal{L}(e_1, e_3)]$ e $yz = [O, \mathcal{L}(e_2, e_3)]$. Inoltre, se $\vec{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, si scrive $P = (x, y, z)$ e si dice che (x, y, z) è la terna delle coordinate di P in RA , dette rispettivamente **ascissa**, **ordinata** e **quota** del punto P .



Teorema 6.3.1

In $A_n(K)$, con $RA = [O, B]$, siano $P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ e $Q = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ due punti di A . Allora le componenti di \vec{PQ} rispetto a B sono

$$(x''_1 - x'_1, x''_2 - x'_2, \dots, x''_n - x'_n)$$

Dimostrazione: Posti due vettori

$$\vec{OP} : x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n$$

$$\vec{OQ} : x''_1 e_1 + x''_2 e_2 + \dots + x''_n e_n$$

Per la proprietà della definizione di spazio affine possiamo dire che

$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \sum_{i \in I_n} (x''_i - x'_i) e_i$$

⊗

Posti

$$X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ e } T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

si ottiene l'equivalente, ma spesso più agevole, forma matriciale:

$$X'' - X' = T$$

che può essere riscritta come

$$X'' = X' + T$$

Da quest'ultima equazione si vede che le coordinate del traslato del punto $P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, attraverso il vettore v di componenti (t_1, t_2, \dots, t_n) , si ottengono sommando, ordinatamente, alle coordinate di P le componenti del vettore di traslazione. Per questo le relazioni che compaiono nell'equazione sono anche dette **equazioni della traslazione individuata da v** .

Definizione 6.3.3: Punto medio

Dato P e $Q \in A$ (insieme dei punti di $A_n(\mathbb{R})$), definiamo il punto medio del segmento $[PQ]$ come

$$M = t_{1/2\vec{PQ}}(P)$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & M & \xrightarrow{\quad} & R \end{array}$$

Proposizione 6.3.1

Dati $P, Q \in A$ e dato un riferimento affine $RA = [O, B]$ abbiamo che le coordinate del punto medio di P e Q sono le semisomme delle coordinate omonime di P e di Q .

Definizione 6.3.4: Punto simmetrico

In $A_n(\mathbb{R})$ dati i punti P e C diremo che S è il **punto simmetrico** di P rispetto a C se C è il punto medio di $[P, S]$.

6.4 Rappresentazioni analitiche

Definizione 6.4.1: Equazioni parametriche di una retta in $A_n(\mathbb{R})$

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento fissato in $A_n(\mathbb{R})$, ove $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Sia $r = [P, V_1 = \mathcal{L}(v)]$ la retta di origine il punto $P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ e spazio di traslazione generato da $v = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. Il generico vettore w di $\mathcal{L}(v)$ è proporzionale al vettore v , cioè $w = tv$, con $t \in \mathbb{R}$, quindi, $w = (tl_1, tl_2, \dots, tl_n)$. Dato che la retta r è il luogo dei traslati di P attraverso i vettori di $\mathcal{L}(v)$, applicando le equazioni del teorema precedente si ottengono le coordinate del generico punto di r

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + l_1 t \\ x_2 = x'_2 + l_2 t \\ \dots\dots\dots \\ x_n = x'_n + l_n t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \quad (l_1, l_2, \dots, l_n) \neq \underline{0}$$

tali equazioni sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_n(\mathbb{R})$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si ottengono le coordinate di tutti i punti di una retta e, quindi, tutti i punti di una retta sono ∞^1 .

Definizione 6.4.2: Parametri direttori

Si dicono **parametri direttori** di $r = [P, V_1]$, le componenti di un qualunque vettore nullo di V_1 .