

Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Chapter 1	Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$	Page 2
1.1	Direzione \perp ad un iperpiano	2
1.2	Circonferenze in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$	6
1.3	Sfere in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$	6
1.4	Circonferenze in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$	7
Chapter 2	Ampliamento di $\check{A}_2(\mathbb{R})$	Page 8
2.1	Ampliamento (proiettivo) di $\check{A}_2(\mathbb{R})$	8
2.2	Geometria analitica in $\check{\check{A}}_2(\mathbb{R})$	9
2.3	Rappresentazione delle rette in $\check{\check{A}}_2(\mathbb{R})$	10
2.4	Complessificazione di $\check{\check{A}}_2(\mathbb{R})$	10

Proposizione 0.0.1

Siano α e r rispettivamente un piano e una retta di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con α non ortogonale a r . Allora $\exists!$ piano β : β ortogonale a α e $r \subseteq \beta$.

Dimostrazione: Dimostriamo l'esistenza: sia $\beta = [P, V_1 + V_{2orto}]$ dove $r = [P, V_1]$ e $\alpha = [Q, V_2]$.

1. β è un piano perché $\dim(V_1) = 1$, $\dim(V_{2orto}) = 1$ e $V_1 \neq V_{2orto}$ (poiché *anonortor*) $\implies \dim(V_1 + V_{2orto}) = 2 \implies \beta$ è un piano. Per costruzione abbiamo che $\beta \perp \alpha$, infatti lo spazio di traslazione di β è:

$$V_1 \oplus V_2^\perp \supseteq V_2^\perp \text{ e } V_2 \text{ è lo spazio di traslazione di } \alpha$$

inoltre r



Capitolo 1

Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

Definizione 1.0.1

In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ si dice **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia $[0, \mathcal{B}]$:

- O è un punto di $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ è una base ortonormale

Note:-

1. In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ ($n = 2$) $\implies \mathcal{B} = (i, j)$
2. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ($n = 3$) $\implies \mathcal{B} = (i, j, k)$

Definizione 1.0.2: Ortogonalità fra rette

Siano r_1, r_2 due rette di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e sia $r_1 = [P, f(v)]$ $v = l \cdot i + m \cdot j$, analogamente $r_2 = [P, f'(v)]$ $v' = l' \cdot i + m' \cdot j$

$$v \perp v' \iff l \cdot l' + m \cdot m' = 0$$

se r_1 ha equazione $ax + by + c = 0$ e r_2 ha equazione $a'x + b'y + c' = 0$ allora $P.d.r_1 = [(-b, a)]$, e $P.d.r_2 = [(-b', a')]$

$$-b \cdot (-b') + a \cdot a' = bb' + aa' = 0$$

Se abbiamo r_1, r_2 rette in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(l, m, n)]$, $P.d.r_2 = [(l', m', n')]$ $r_1 \perp r_2 \iff v_1$ generatore della direzione di $r_1 \perp v_2$ generatore della direzione di r_2 .

$$v_1 = li + mj + nk \quad v_2 = l'i + m'j + n'k$$

$$v_1 \perp v_2 \iff r_1 \perp r_2 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

Analogamente se r_1, r_2 sono rette in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ con $P.d.r_1 = [(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, $P.d.r_2 = [(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)]$

1.1 Direzione \perp ad un iperpiano

Proposizione 1.1.1

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a r .

Dimostrazione: $P.d.r = [(-b, a)]$ e abbiamo che $(a, b) \cdot (-b, a) = 0$ oppure $(a \cdot i + b \cdot j) \cdot (-b \cdot i + a \cdot j) = 0 \implies [(a, b)] \perp r$. ☺

Proposizione 1.1.2

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $[(a, b, c)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a π .

Dimostrazione: Sia $v \in V_2$ (π ha spazio di traslazione o V_2). Se $v = (x, y, z) \implies ax + by + cz = 0 \iff (x, y, z) \cdot (a, b, c) = 0 \implies (a, b, c) \perp v \forall v \in V_2$ \odot

Più in generale: sia S_{n-1} un iperpiano in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 \implies [(a_1, a_2, \dots, a_n)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a S_{n-1} .

Proposizione 1.1.3 Ortogonalità tra piani

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $\alpha \perp \beta \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff V_2 \supseteq V_2'^\perp$ dove V_2 è la giacitura di α e V_2' è la giacitura di β .

$$V_2'^\perp = [\mathcal{L}((a', b', c'))] \iff (a', b', c') \in V_2$$

$$(x, y, z) \in V_2 \iff ax + by + cz = 0 \text{ e quindi } (a', b', c') \in V_2 \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0 \quad \odot$$

Proposizione 1.1.4 Ortogonalità tra retta e piano

Siano r : con $P.d.r = [(l, m, n)]$ e sia α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ una retta e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora $r \perp \alpha$ se e soltanto se $[(a, b, c)] = [(l, m, n)]$

Dimostrazione: $r \perp \alpha \iff V_1 = V_2^\perp$ dove V_1 è la direzione della retta e V_2 è la giacitura di α .

$$V_1 = \mathcal{L}((l, m, n)) = V_2^\perp = \mathcal{L}((a, b, c)) \iff [(a, b, c)] = [(l, m, n)] \quad \odot$$

Definizione 1.1.1: Distanza tra 2 punti in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Q = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. La distanza tra P e Q è la norma del vettore \vec{PQ}

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$

$$\vec{PQ} = (x'_1 - x_1)e_1 + \dots + (x'_n - x_n)e_n$$

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}$$

Definizione 1.1.2: Caso $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

$$P = (x, y) \quad Q = (x', y')$$

$$\vec{PQ} = (x' - x)i + (y' - y)j$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Caso $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ da aggiungere

Definizione 1.1.3: Distanza tra punto e retta

Siano $P = (x_0, y_0)$ e $r = [Q, V_1]$ rispettivamente un punto e una retta in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Definiamo la **distanza tra il punto P e la retta r** come la distanza tra P e il punto H , piede della perpendicolare per P a r (cioè l'intersezione tra r e la retta perpendicolare a r passante per P).

Determiniamo $||\vec{PH}||$. Se r ha equazione $ax + by + c = 0$ allora $V_1^\perp = \mathcal{L}(a \cdot i + b \cdot j)$.

$$\text{Posta } n = [P, V_1^\perp] \implies n = [P, \mathcal{L}(ai + bj)]$$

$H = n \cap r$ è la proiezione di P su r . (è l'intersezione tra r e la retta per P^\perp).

Sia $P' = (x', y')$ un generico punti su r .

$$ax' + by' + c = 0$$

PH è la componente di PP' lungo v . $PP' = (x' - x_0)i + (y' - y_0)j$.

$$\vec{PH} = \frac{PP' \cdot v}{v \cdot v} v$$

$$d(P, H) = d(P, r) = ||\vec{PH}|| = ||(\frac{PP' \cdot v}{v \cdot v} v)|| = [...] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Da completare

Definizione 1.1.4: Distanza punto piano

Siano $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ un punto e un piano di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Definiamo **la distanza** $d(P, \alpha)$ come la distanza tra P e il punto H intersezione tra α e la retta per $p \perp \alpha$.

Dimostrazione: $d(P, \alpha) = d(P, H) = ||\vec{PH}||$. Analogamente al caso piano abbiamo che

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

☺

Definizione 1.1.5: Distanza tra un punto e una retta in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Siano P e $r = [Q, V_1]$ un punto e una retta in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Sia α il piano per P ortogonale a r e sia H l'intersezione tra r e α . Definiamo $d(P, r) = d(P, H) = ||\vec{PH}||$.

Esempio 1.1.1

In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ determiniamo la distanza di $P = (3, 0, 1)$ da $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad P.d.r = [(-1, 1, 0)] = [(a, b, c)] \quad \alpha : -x + y + 0 \cdot z + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per P : $-3 + 0 + d = 0 \quad d = 3 \quad \alpha : -x + y + 3 = 0$

$$\alpha \cap r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y + 3 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 0x + 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \implies x = 2; y = -1$$

$$H : (2, -1, 2) \quad d(P, r) = ||\vec{PH}|| = \vec{PH} = (-1)i + (-1)j + k = -1 - j + k$$

Definizione 1.1.6: Retta di minima distanza

Si dice **retta di minima distanza** tra due rette r, s sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ una retta ortogonale e incidente sia a r che a s .

Proposizione 1.1.5

La retta di minima distanza tra r e s esiste ed è unica.

Definizione 1.1.7: Distanza tra due rette sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definiamo la **distanza tra due rette r e s sghembe in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$** come la distanza tra i punti R e S ottenuti intersecando la retta t di minima distanza tra r e s con r e s .

Definizione 1.1.8: Assi

In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ dati due punti P, Q , si dice **asse** del segmento \overline{PQ} la retta passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento \overline{PQ} .

Proposizione 1.1.6

L'asse di un segmento \overline{PQ} è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q .

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $\|\vec{PH}\| = \|\vec{QH}\| \quad \forall H \in a$ (asse di \overline{PQ}).

$$\vec{PH} = \vec{PM} + \vec{MH} \quad e \quad \vec{QH} = \vec{QM} + \vec{MH}$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} \quad \|\vec{QH}\| = \sqrt{\|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} \quad \text{ma} \quad \|\vec{PM}\| = \|\vec{QM}\|$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} = \sqrt{\|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} = \|\vec{QH}\|$$

⊕

Esempio 1.1.2

Determiniamo l'asse di $P = (1, 1)$ e $Q = (2, -4)$. Il punto $M = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\vec{PQ} = (2 - 1)i + (-4 - 1)j = 1 - 5j = (1, -5)$$

$r \perp \vec{PQ}$ per M è del tipo

$$x - 5y + c = 0 \quad \text{e passa per } M$$

$$\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \quad c = -9 \implies r : x - 5y - 9 = 0$$

Alternativamente

$$r : H \in r \iff d(H, P) = d(H, Q)$$

se $H = (x, y)$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \implies r : 2x - 10y - 18 = 0$$

Definizione 1.1.9: Piano assiale

In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si dice **piano assiale** del segmento \overline{PQ} il piano α passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento \overline{PQ} .

Proposizione 1.1.7

Il piano assiale del segmento \overline{PQ} è il luogo dei punti equidistanti tra P e Q .

1.2 Circonferenze in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

Definizione 1.2.1: Circonferenza

Dato un punto $C = (x_0, y_0)$ in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ e dato r numero reale positivo si dice circonferenza di centro C e raggio r il luogo dei punti aventi distanza r da C .

Sia $P = (x, y)$ appartenente alla circonferenza di centro C e raggio r .

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 + (y - y_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Proposizione 1.2.1 Equazione cartesiana di una circonferenza

Tutte e sole le circonferenze si rappresentano come $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - c > 0$ e avremo che $C = (-a, -b)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Note:-

Se r fosse 0, $a^2 + b^2 - c = 0 \implies x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ è rappresentata solo da $C = (-a, -b)$.

Proposizione 1.2.2

Per tre punti non allineati in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica circonferenza.

1.3 Sfere in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.3.1: Sfera

Sia $C : (x_0, y_0, z_0)$ e sia r un numero reale positivo. Si dice **sfera** di raggio C e di centro r il luogo dei punti aventi distanza r da C .

Sia $P : (x, y, z)$ appartenente alla sfera, allora

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Note:-

Una sfera è una superficie algebrica reale (Analogamente una circonferenza è una curva algebrica reale).

Proposizione 1.3.1 Equazione cartesiana di una sfera

Tutte le sfere si rappresentano come $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ con $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ e avremo che $C = (-a, -b, -c)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Note:-

Se $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ è realizzata dal solo centro $C = (-a, -b, -c)$.

Proposizione 1.3.2

Siano A, B, C, D quattro punti non complanari di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Per A, B, C, D passa un'unica sfera

Il centro della sfera si trova intersecando i piani assiali dei quattro punti. Il raggio è la distanza del centro da uno qualsiasi dei quattro punti.

1.4 Circonferenze in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.4.1: Circonferenza in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Dati un piano α , un suo punto C e un numero reale positivo r . Si dice **circonferenza** di raggio C e raggio r il luogo dei punti di α aventi distanza r da C .

Note:-

Una circonferenza appartiene a infinite sfere. Quindi per tre punti non allineati passano infinite sfere.

Proposizione 1.4.1

Tutte e sole le circonferenze di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ammettono una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \rightarrow \text{piano } \alpha \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r'^2 \end{cases}$$

$$d(C', \alpha) < r' \quad \text{dove} \quad C' = (x_0, y_0, z_0) \quad \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < r'$$

ci sono infinite rappresentazioni ma solo una con il centro C della circonferenza coincidente con il centro C' della sfera.

Il centro della circonferenza C si trova intersecando il piano α con la retta per il centro della sfera C' perpendicolarmente ad α . Utilizziamo il teorema di Pitagora. Conosciamo $\overline{CC'}$ e conosciamo anche il raggio r' della sfera. Quindi

$$r = \sqrt{r'^2 - \overline{CC'}^2}$$

Note:-

Una circonferenza si può ottenere anche intersecando altre superfici con un piano.

Esempio 1.4.1

Si consideri

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \alpha \quad \text{è una circonferenza?}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 7 \quad \text{e siccome } z = 3 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{che descrive una circonferenza.}$$

Ed è una curva algebrica reale di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$.

Capitolo 2

Ampliamento di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

In $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ date due rette r e s o sono parallele o si intersecano in un punto. Se sono parallele

$$r = [P, V_1] \text{ e } s = [Q, W_1] \implies V_1 = W_1$$

quindi la direzione V_1 è l'elemento comune a tutte le rette parallele a r . Poiché il parallelismo è una relazione di equivalenza tra le rette del piano.

2.1 Ampliamento (proiettivo) di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

Definizione 2.1.1: $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

- Punti propri che sono tutti e soli i punti di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$
- I punti impropri che sono le direzioni delle rette del piano ovvero i sottospazi di \mathbb{R}^2 di dimensione 1.

Da cui il nome proprio/improprio per i fasci di rette del piano.

Definizione 2.1.2: Rette

- le rette proprie: le rette di $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ unite al loro punto improprio;
- una retta impropria: tutti i punti impropri (r_∞)

Sia $P_\infty \in r_\infty \implies$ non definiamo il vettore $Q\vec{P}_\infty$ con Q proprio/improprio.

La funzione $f : A \times A \rightarrow V_2(\mathbb{R})$

da completare

Proposizione 2.1.1

Due rette distinte di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ sono sempre incidenti.

Dimostrazione: Siano r e s due rette distinte di $\tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$

1. r e s sono proprie e non parallele tra loro $\implies r$ è incidente a s in $\mathring{A}_2(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{\mathring{A}}_2(\mathbb{R})$ e il punto improprio di r è diverso da quello di s .
2. r e s sono proprie ma r è parallelo a s .
 $r \cap s = \emptyset$ in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$ ma r e s hanno la stessa direzione \implies lo stesso punto improprio.
3. r è propria e $s = r_\infty$.
 $r \cap s = r \cap r_\infty$ è il punto improprio di r .

Completare con il quinto assioma e la spiegazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Note:-

Tutte le rette proprie contengono un solo punto improprio e r_∞ contiene solo punti impropri.

Proposizione 2.1.2

Per due punti distinti di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica retta.

Dimostrazione: Siano A e B i due punti distinti considerati:

1. A, B sono entrambi propri

$$\implies \exists! r \in \mathring{A}_2(\mathbb{R}) \text{ per } A \text{ e } B$$

$$\exists! r \text{ propria per } A \text{ e } B$$

la r_∞ non contiene A e $B \implies \exists! r$ per A e B .

2. A è proprio e B è improprio (o viceversa). $\implies B$ è la direzione $V_1 \implies \exists!$ retta per **completare**

3. A e B sono entrambi impropri. Nessuna retta propria li contiene entrambi (ogni retta propria ha solo 1 punto improprio) $\implies A, B \in r_\infty$ che è l'unica che li contiene entrambi.

2.2 Geometria analitica in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Enti definiti "a meno di un fattore" di proporzionalità:

1. equazioni di rette in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{se } [(a, b, c)] = [(a', b', c')]$$

$$\implies r' : a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{è coincidente a } r$$

2. $[(l, m)] = P.d.r$ è come classe di equivalenza

Indichiamo con ρ la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

$$\frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho} = \{[(x, y, z)] : x, y, z \in \mathbb{R}^3 \text{ e } (x, y, z) \neq \underline{0}\}$$

Quest'insieme definirà le coordinate dei punti.

$$\tilde{A}_2(\mathbb{R}) = \mathring{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathring{A}_\infty$$

Fissiamo il riferimento affine in $\mathring{A}_2(\mathbb{R})$

$$\phi : \mathring{A}_2 \cup \mathring{A}_\infty \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

- se P è proprio $(x, y) : \phi(x, y) = [(x, y, 1)]$
- se P è improprio $P : [(l, m)] \quad \phi(P) = [(l, m, 0)]$

Proposizione 2.2.1

ϕ è una biiezione tra $\tilde{A}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$

Osservazione: Sia P di coordinate omogenee $[(x_1, x_2, x_3)]$ con $x_3 \neq 0$

$$\left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \right]$$

P è proprio $P = (x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$

Sia invece $x_3 = 0$

$$P = [(x_1, x_2, 0)] \quad [(l, m)] = [(x_1, x_2)]$$

P non ha coordinate affini (non omogenee) \implies è improprio.

2.3 Rappresentazione delle rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Sia $RA[O, B = (e_1, e_2)]$ un riferimento affine di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$. In $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ l'equazione cartesiana di una retta è $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Sui punti propri $P = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \right]$ dovrà valere $ax + by + c = 0$

$$a \left(\frac{x_1}{x_3} \right) + b \left(\frac{x_2}{x_3} \right) + c = 0 \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Il punto improprio di $ax + by + c = 0$ è $[(-b, a, 0)]$. Sostituiamo in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ $[(-b, a, 0)]$

$$a(-b) + ba + 0 = 0$$

$\implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è l'equazione omogenea di una retta r di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

Siano ora $(a, b) = (0, 0)$, allora $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ si riduce a $0x_1 + 0x_2 + cx_3 = 0$ con $c \neq 0$, $cx_3 = 0$, $x_3 = 0$ è la r_∞ perché rispettata da tutti e soli i punti impropri. L'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta, in ogni caso, una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$. Di conseguenza è l'equazione cartesiana di una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

2.4 Complessificazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

$\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ = piano affine ampliato e **complessificato**.

Osservazione:

- **punti:** terne ($\neq \underline{0}$) di numeri complessi determinati a meno di un fattore di proporzionalità complesso e non nullo.

$$\frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

- **rette:** luogo delle autosoluzioni (soluzioni non nulle) di un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq \underline{0} \text{ e } a, b, c \in \mathbb{C}$$

Definizione 2.4.1: Punti e rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si dicono:

- **punti e rette reali** i punti e le rette che ammettono una rappresentazione reale
- **punti e rette immaginari** i punti e le rette che ammettono solo rappresentazioni immaginarie

Esempio 2.4.1

$P : [(4, 3 + i, 1)]$ è immaginario.

Dimostrazione: Sia $a + ib \in \mathbb{C} : P = (4(a + ib), (3 + i)(a + ib), a + ib)$ con x_1, x_2, x_3 reali, quindi

$x_3 = a + ib \implies x_3 = a$. $P = [(4a, (3+i)a, a)]$, ma $a \neq 0$ $(3+i)a$ non è reale $\implies P$ non è reale. ☺

Definizione 2.4.2: Coniugati

Si dicono **coniugati** due enti (punti, rette ecc...) che ammettono rappresentazioni coniugate.

Proposizione 2.4.1

Un ente geometrico (punto, retta, curva ecc...) è reale se, e soltanto se, coincide con il proprio coniugato.

Note:-

Una retta reale ha infiniti punti immaginari

Esempio 2.4.2

$x_1 = 0 \implies [(0, x_2, x_3)] \implies [(0, a + ib, 1)]$ sono tutti immaginari.

Osservazione: Se un'equazione reale è realizzata da un punto $P \implies \bar{P}$ è soluzione se r è reale e $P \in r \implies \bar{P} \in \bar{r} = r$.

Proposizione 2.4.2

La retta che congiunge due punti P e \bar{P} immaginari e coniugati è reale.

Dimostrazione: $P \in r$ e $\bar{P} \in r$ per costruzione. Poiché $P \neq \bar{P}$ $r = rt(P, \bar{P})$. Poiché $P \in r \implies \bar{P} \in \bar{r}$ e $\bar{P} \in r \implies \bar{\bar{P}} \in \bar{r}$, ma $\bar{\bar{P}} = P \in \bar{r}$. $\implies \bar{P}$ e $P \in \bar{r} \implies \bar{r} = rt(P, \bar{P})$. Per l'unicità della retta per P e $\bar{P} \implies r = \bar{r} \implies r$ è reale. ☺

Proposizione 2.4.3

Per un punto P immaginario ($P \neq \bar{P}$) passa un'unica retta reale.

Dimostrazione: La retta $rt(P, \bar{P})$ è reale per la proposizione precedente. Supponiamo per assurdo che $\exists s \neq rt(P, \bar{P})$ reale per P . $\implies \bar{P} \in s$ poiché s è reale. $s = rt(P, \bar{P})$ che è **assurdo!**. Quindi esiste ed è unica la retta r reale per P . ☺