Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Relazioni su un insieme

Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme A è un qualunque sottoinsieme di $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times A$.
Una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme A si dice:

- **riflessiva** se, per ogni $a \in A,\ a\mathcal{R}a$;
- **simmetrica** se, per ogni $a, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ allora $a = b$;
- **antisimmetrica** se, per ogni $a, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$;
- **transitiva** se, per ogni $a, b, c \in A,\ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$;

Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di A sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni $a, b \in A$, risulta $a\mathcal{R}b$ oppure $b\mathcal{R}a$, la relazione $\mathcal{R}$ si dice **relazione d'ordine totale**.

1.2 Strutture algebriche

Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia $(G, \star)$ un insieme con un'operazione $\star$. La struttura $(G, \star)$ si dice **gruppo** se:

- l'operazione $\star$ è associativa;
- esiste in G l'elemento neutro;
- ogni elemento di $g \in G$ è simmetrizzabile.

Se l'operazione $\star$ soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

Definizione 1.2.2: Campo

Sia A un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "·" e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura $(A, +, \cdot)$ è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \backslash \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $e \neq 0$;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni $a, b, c \in A$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \;\; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.3 Matrici

Definizione 1.3.1: Matrice

Dato un campo K si dice **matrice** di tipo $m \times n$ su K una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avente m righe ed n colonne, i cui elementi a_{ij} sono elementi di K.

Definizione 1.3.2: Matrice quadrata

Una matrice di tipo $n \times n$ è detta **matrice quadrata** di ordine n. Queste vengono indicate con $M_n(K)$.

Definizione 1.3.3: Prodotto righe per colonne

Date le matrici $A = (a_{ih}) \in K^{m,n}(K)$ con $i \in I_m, h \in I_n$ e $B = (b_{hj}) \in K^{n,p}$ con $h \in I_n, j \in I_p$, si dice **prodotto righe per colonne** di A per B la matrice

$$A \cdot B = (c_{ij}) \text{ con } i \in I_m, \; j \in I_p \qquad \text{ove}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih}b_{hj}$$

Esempio 1.3.1

Prendiamo per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 21 & 12 & -19 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.4: Matrice identica

L'elemento neutro delle matrici quadrate di ordine n è la **matrice identica**, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.5: Trasposta di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di $K^{m,n}$. Si dice **trasposta** di A la matrice $K^{n,m}$ ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne, cioè ${}^tA = (b_{ji})$ ove $b_{ji} = a_{ij}$ per ogni $i \in I_n$ e $j \in I_m$.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno **spazio vettoriale** sul campo K, se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V, detta somma, $+ : V \times V \longrightarrow V$ e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, tali che

- $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno $\cdot$ soddisfi le seguenti proprietà:
  - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
  - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori**, gli elementi del campo K sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di $(V, +)$ è detto **vettor nullo** e indicato $\underline{0}$ per distinguerlo da 0, zero del campo K. L'opposto di ogni vettore **v** viene indicato con **-v**.

Teorema 2.1.1

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, siano $k \in K$ e $v \in V$. Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

Dimostrazione: Se k = 0

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

e sommando $-0v$ ad ambo i membri si ottiene appunto $\underline{0} = 0v$. Se è $v = \underline{0}$, si procede nel modo analogo. Viceversa, se $kv = \underline{0}$ e $k \neq 0$ dimostriamo che $v = \underline{0}$. Dato che $k \neq 0$, esiste l'inverso $k^{-1} \in K$ e, moltiplicando ambo i membri della precedente uguaglianza per k^{-1} si ottiene $k^{-1}(kv) = k^{-1}\underline{0}$ che, per quanto dimostrato in precedenza dà il $\underline{0}$. Dato che $k^{-1}(kv) = (k^{-1}k)v = 1v = v$, per la proprietà 4, si ha $v = \underline{0}$. 😄

2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, diremo che U è **sottospazio vettoriale** di V se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

Proposizione 2.2.1 Primo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme U è uno spazio vettoriale di V se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$
2. $\forall k \in K,\ \forall u \in U \quad ku \in U$

Proposizione 2.2.2 Secondo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, U è sottospazio di $V(K)$ se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

Definizione 2.3.1: Combinazione lineare

Siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V(K)$ si dice combinazione lineare di vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ ogni vettore v:

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, ..., k_n \in K$$

Definizione 2.3.2: Sistema di vettori libero

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$, allora A si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di A che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = ... = k_n = \underline{0}$$

Se A è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione 2.3.3: Sistema di vettori legato

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$, allora A si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, ..., k_n \text{ non tutti nulli : } \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$$

Se A è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

Proposizione 2.3.1

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se $\underline{0}$ appartiene ad A, il sistema A è legato.

Dimostrazione: Sia $\underline{0} \in A$, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\underline{0} = v_1$ quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies \text{A è legato}$$

😄

Proposizione 2.3.2

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se in A appaiono due vettori proporzionali allora A è legato.

Dimostrazione: Senza perdita di generalità possiamo supporre che $v_1 = kv_2$ e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + \ldots + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies \text{A è legato}$$

😊

Proposizione 2.3.3

Sia $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. A è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: $\implies$: Per ipotesi A è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $k_1 \neq 0$

$$-k_1v_1 = k_2v_2 + \ldots + k_nv_n \qquad v_1 = \frac{1}{k_1}(-k_2v_2 - \ldots - k_nv_n)$$
$$v_1 = -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - \ldots - \frac{k_n}{k1}v_n$$

e quindi v_1 è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.
$\impliedby$: Per ipotesi uno dei vettori di A è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + \ldots + k_nv_n \qquad \underline{0} = -1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$$

siccome $-1 \neq 0$ A è legato. 😊

Proposizione 2.3.4

Sia $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $u \in V(K)$. Se $A \cup \{u\}$ è legato, allora u è combinazione lineare dei vettori di A.

Dimostrazione: Per ipotesi $A \cup \{u\}$ è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, \ldots, k_n, b \in K \text{ non tutti nulli } : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n + bu$$

sia per assurdo $b = 0$

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, } \textbf{assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n \quad u = -\frac{k_1}{b}v_1 - \frac{k_2}{b}v_2 - \ldots - \frac{k_n}{b}v_n$$

$\implies$ u è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 😊

Proposizione 2.3.5

Sia $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \supseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$. Se A è legato allora anche B è legato.

Dimostrazione:

$$\exists k_1, k_2, \ldots, k_n \in K \text{ non tutti nulli } : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$$

Se $B = [v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_m]$ allora

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + \ldots + 0w_m$$

$\implies$ B è legato. 😊

Proposizione 2.3.6

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \subseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$, se A è libero, allora B è libero.

Dimostrazione: Sia, per assurdo, B legato, allora per la proposizione precedente anche A è legato. **Assurdo!** Quindi B è libero. 😄

2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

Definizione 2.4.1: Sistema di generatori

Sia A sistema di vettori di $V(K)$. A si dice sistema di generatori di $V(K)$ se ogni $v \in V(K)$ si può scrivener come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A.

Definizione 2.4.2: Copertura lineare

Sia A un sistema di vettori di $V(K)$ si dice copertura (o chiusura) lineare di A l'insieme $\mathcal{L}(A)$ di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di A.

N.B.

Dato A sistema di vettori di $V(K)$

1. $\mathcal{L}(A)$ è il più piccolo sottospazio di $V(K)$ che contiene A
2. $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3. $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se $V(K)$ ammette un sistema di generatori finito $\implies$ $V(K)$ si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di $V(K)$ ha cardinalità infinita $\implies$ $V(K)$ non è finitamente generato.

2.5 Basi e dimensione

Lemma 2.5.1

Sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori per uno spazio vettoriale $V(K)$, e sia $v \in S$ combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri) $\implies$ $S\backslash\{v\}$ è sistema di generatori per $V(K)$

Dimostrazione: Sia, senza perdere di generalità, v_1 combinazione lineare di $v_2, v_3, ..., v_n$

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n$$

sia $v \in V(K)$

$$v = h_1v_1 + h_2v_2 + ... + h_nv_n = h_1(k_2v_2 + ... + k_nv_n) + h_2v_2 + ... + h_nv_n$$
$$v = \underbrace{(h_1k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + ... + \underbrace{(h_1k_n + h_n)}_{\in K} v_n \in \mathcal{L}([v_2, v_3, ..., v_n]) = \mathcal{L}(S\backslash\{v_1\})$$

$\implies$ $S\backslash\{v_1\}$ è un sistema di generatori. 😄

Teorema 2.5.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ($V(K) \neq \{\underline{0}\}$), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

Dimostrazione: sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori per $V(K)$, abbiamo due possibilità:

1. A è libero $\implies$ A è un sistema di generatori libero;
2. A è legato $\implies$ $\exists v \in A$ combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre $v = v_1 \implies A \backslash \{v_1\} = A_1$ è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare $A_2 \to A_3 \to \dots$ finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.
Osserviamo che A contiene almeno un $v \in A : \ v \neq \underline{0}$, questo perché $A_n = [0]$ e $v_n \neq \underline{0}$ perché $A \neq \{\underline{0}\} \implies A_n$ è necessariamente libero. 😃

Definizione 2.5.1: Base

Sia $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sequenza libera di vettori di $V(K)$. S è detta base se e solo se S è una sequenza libera di generatori.

Definizione 2.5.2: Base canonica di $\mathbb{R}^n$

$((1, 0, 0, \dots, 0)(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1))$ è una base canonica per $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ sistema di generatori e $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ sistema libero. Allora la cardinalità di A sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. $(m \leq n)$

Dimostrazione: Sia per assurdo $m > n$, poiché B genera $V(K)$ u_1 si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Essendo A libero $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, \dots, k_n$ non sono tutti nulli $\implies$ senza perdita di generalità $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \qquad v_1 = \frac{1}{k_1}(u_1 - k_2 v_2 - \dots - k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, \dots, v_n])$$

B è sistema di generatori, $B \cup \{u_1\}$ è sistema di generatori, di conseguenza $(B \cup \{u_1\} \backslash \{v_1\}) = B_1 = [u_1, v_2, \dots, v_n]$ è ancora sistema di generatori per $V(K)$.
Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, \dots, h_n \in K$$

Se avessimo $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$ $u_2 = \alpha$ ma ciò non può succedere perché A è libero $\implies \exists h_i \neq 0$ e senza perdita di generalità supporremo $h_2 \neq 0$ quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \qquad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - \dots - h_n v_n)$$

v_2 è linearmente dipendente da $B_2 = [u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]$ e B_2, per lo stesso motivo di B_1 è ancora sistema di generatori.
Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento n volte fino a trovare un sistema $B_n = [u_1, u_2, \dots, u_n]$. Siccome avevamo supposto che $m > n$ essendo B_n sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche u_{n+1} come combinazione lineare dei vettori di B_n, cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \qquad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

questo comporta che A sia legato, ma questo è **assurdo!** $\implies m \leq n$. 😃

Teorema 2.5.2
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano B_1 e B_2 due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad B_2 = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad m = n$$

Dimostrazione: Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- B_1 sistema di generatori, B_2 sistema libero $\implies$ $n \geq m$;
- B_2 sistema di generatori, B_1 sistema libero $\implies$ $m \geq n$.

$m \geq n$ e $n \geq m \iff n = m$. ☺

Definizione 2.5.3: Dimensione

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di V la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se $V = \{0\}$ poniamo la $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

Proposizione 2.5.1
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n su K e sia $S = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori. Allora S è libero.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ una base di $V_n(K)$. Sia per assurdo S legato. Senza perdita di generalità $v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + \ldots + k_nv_n$. Allora $S' = S \backslash \{v_1\}$ è ancora sistema di generatori. $|S'| = n - 1 \geq |B|$ perché B è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!**. Quindi S è libero. ☺

Proposizione 2.5.2
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K. Sia $S = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema libero. Allora S è anche un sistema di generatori.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ una base di $V(K)$, supponiamo per assurdo che S non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$ è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha}(-k_1v_1 - k_2v_2 - \ldots - k_nv_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$ **assurdo!** Contro l'ipotesi che $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$ è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1 \leq}_{\text{sistema libero}} \quad \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \quad \to \text{ per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! $\implies$ S è un sistema di generatori. ☺

Proposizione 2.5.3
m vettori in $V_n(K)$ con $m > n$ sono sempre linearmente dipendenti.

Dimostrazione: Siano per assurdo $[v_1, v_2, \ldots, v_m]$, m vettori linearmente indipendenti con $m > n$. Sia B una base di $V_n(K)$. $m = |S = [v_1, v_2, \ldots, v_m]| \leq |B| = n$ per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi $m > n$, **assurdo!** ☺

Proposizione 2.5.4
m vettori in $V_n(K)$ con $m < n \implies$ non possono generare.

Dimostrazione: siano $v_1, v_2, ..., v_m$ per assurdo m vettori che generano $V_n(K)$ con $m < n$ allora:

$$m = |S = [v_1, v_2, ..., v_n]| \geq |B| = n \quad \text{con} \quad m \geq n \quad \text{per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! Va contro all'ipotesi. 😊

Teorema 2.5.3 Teorema di caratterizzazione delle basi
Sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una sequenza di vettori di $V(K)$. B è una base se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di B.

$$\forall v \in V, \ \exists! \ v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \quad k_i \in K$$

Dimostrazione: $\implies$ sia B una base di V. Per ogni v si ha che $v \in \mathcal{L}(B)$ perché B è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista $v \in V$:

$$v = v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = h_1v_1 + h_2v_2 + ... + h_nv_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + ... + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

B è una sequenza libera, quindi $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$ perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che $k_i \neq h_i \implies$ **assurdo!** $\implies \exists!$ la combinazione lineare dei vettori di B che dà v $(\forall v \in V)$.
$\impliedby$ per ipotesi $\forall v \in V \ \exists!$ combinazione lineare dei vettori di B che dà v. B è una sequenza di generatori, cioè $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$. Supponiamo per assurdo che B sia legato $\implies \exists k_i \in K$ non nullo:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di B che danno $\underline{0}$. Dato che $\underline{0} \in V$ per ipotesi esiste un unica combinazione lineare dei vettori di B che dà $\underline{0}$. **Assurdo!** Quindi B è una sequenza libera e B è una base per V. 😊

Definizione 2.5.4: Componenti di un vettore rispetto ad una base

Sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $v \in V$. Chiameremo componenti di v rispetto alla base B la sequenza $(k_1, k_2, ..., k_n)$:

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

Proposizione 2.5.5
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K, allora $V_n(K)$ ammette almeno un sottospazio di dimensione m $\forall 0 \leq m \leq n$.

Dimostrazione: sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $0 \leq m \leq n$, ci sono due possibilità:

1. $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$ è il sottospazio voluto;
2. $0 < m \leq n$ e quindi $S = (v_1, v_2, ..., v_m)$

$\mathcal{L}(S)$ ha dimensione m perché S è libero $(S \subseteq B)$ e genera, per definizione $\mathcal{L}(S)$. 😊

Proposizione 2.5.6
Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia $U \leq W$, allora:

1. $\dim(U) \leq \dim(W)$
2. $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti:

1. Sia B base per U e B' base per W, se per assurdo
$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$
contro il lemma di Steinitz.
2. $\implies$ è banale;
$\impliedby$ sia per assurdo $U < W$ e sia B base di U, allora
$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$
quindi B è una base anche per $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$ **Assurdo!**

😄

Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \dots, v_p)$, ove $p \leq n$, una sequenza libera di vettori in $V_n(K)$. Allora, in una qualunque base di B di $V_n(K)$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è una base di $V_n(K)$.

2.6 Intersezione e somma di sottospazi

Proposizione 2.6.1
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e siano $U, V \leq V \implies U \cap W$ è sottospazio di V.

Dimostrazione: Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi. $U \cap W$ è un sottospazio di V $\iff$ è sottoinsieme non vuoto di V:
$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W,\ \forall k_1, k_2 \in K,\ k_1v_1 + k_2v_2 \in U \cap W$$
$U \cap W$ è sottoinsieme non vuoto di V, perché $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ e $\underline{0} \in U \cap W$. Siano ora $v_1, v_2 \in U \cap W$ e $k_1, k_2 \in K$, osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che $k_1v_1 + k_2v_2 \in U$ e per lo stesso motivo $k_1v_1 + k_2v_2 \in W$ $\implies k_1v_1 + k_2v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. 😄

N.B.
Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che $U \cup W$ non è un sottospazio a meno che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Definizione 2.6.1: Spazio di somma

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K definiamo lo **spazio di somma** come:
$$U + W := \{u + w \mid u \in U \ e \ w \in W\}$$

Proposizione 2.6.2
Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K abbiamo che: $U + W \leq V$

Dimostrazione: Osserviamo che $U + W \subseteq V$ perché dato $u \in U$ e $w \in W$, $u \in V$ e $w \in V \implies u + w \in V$, il quale non è vuoto perché $\underline{0} \in U + W$. Siano $v_1, v_2 \in U + W$ e siano $k_1, k_2 \in K$

$$k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} = k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1u_1 + k_1w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2u_2 + k_2w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}}$$

$$\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio } U + W \leq V$$

😊

Proposizione 2.6.3
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che cotiene $U \cup W$; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

Definizione 2.6.2: Somma diretta

Dati $U, W \leq V_n(K)$ diremo che $U + W$ è somma diretta se $\forall v \in U + W$ può essere scritto come unico modo come $u + w$. Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists!\ u \in U \ e \ w \in W : \quad v = u + w$$

Se $U + W$ è una somma diretta allora la indicheremo con $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.4
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione: $\implies$ Siano U, W in somma diretta e sia, per assurdo: $x \in U \cap W$ con $x \neq \underline{0}$. Sia $v = u + w$ con $u \in U \ e \ w \in W$. Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad e \quad w = w - x \text{ poiché la somma è diretta } \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

$\impliedby$ Siano $U, W :\ U \cap W = \{\underline{0}\}$ e supponiamo per assurdo che esista $v \in U + W$:

$$v = u_1 + w_1 \quad e \quad v = u_2 + w_2 \qquad \text{con } u_1, u_2 \in U \quad e \quad w_1, w_2 \in W \quad e \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad e \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad e \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che v avesse due scritture distinte come somma i elementi di $U \ e \ W$.

$$\implies \exists!\ (u_1, w_1) : \quad u, \in U \quad e \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1 \ e \ U \oplus W$$

😊

Corollario 2.6.1
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $V = U \oplus W \iff U + W = V \ e \ U \cap W = \{\underline{0}\}$.

N.B.

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia B_1 una base di V e B_2 una base di $W \implies B_1 \cup B_2$ è sequenza di generatori per lo spazio $U + W$. In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per $U + W$.

Proposizione 2.6.5

Siano $U, M \leq V_n(K) : U \oplus W$ e sia A una sequenza libera di vettori di U e B una sequenza libera di vettori di U. Allora $A \cup B$ è una sequenza libera di vettori della $U \oplus W$.

Dimostrazione: Siano $A = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ e $B = (w_1, w_2, \ldots, w_h)$ e supponiamo per assurdo che $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$ e $b_1, b_2, \ldots, b_h \in K$, quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$\underline{0} = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h}_{\in W}$$

$$\implies \underline{0} = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h \quad e \quad \underline{0} = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_kw_k$$

ma A e B sono sequenze libere quindi $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$\underline{0} = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h \implies \textbf{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$ è una sequenza libera. 😊

Corollario 2.6.2

Siano $U, W \in V_n(K) : U \oplus W$ e siano B_U e B_W basi di U e $W \implies B_U \cup B_W$ è una base per $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.6 Formula di Grassmann

Dati $U, W \leq V_n(K)$ abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

Definizione 2.6.3: Complemento diretto

Sia $W \leq V_n(K)$ si dice **complemento diretto** di W in V uno spazio $U \leq V : U \oplus W = V$.

N.B.

Un complemento diretto di W in V esiste sempre e si trova estendendo una base di W a una base di V. In generale questo non è unico.

Capitolo 3

Sistemi lineari

3.1 Determinante di una matrice quadrata

Definizione 3.1.1: Determinante

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata, di ordine n, a elementi in un campo K. Si dice **determinante** di A, e si scrive $|A|$ oppure $\det(A)$, l'elemento di K definito ricorsivamente come segue:

1. se $n = 1$ $\quad A = (a_{11}) \quad \det(A) = |A| = a_{11}$
2. se $n > 1$ $\quad A = a_{ij} \quad \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, il suo determinante è $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Mentre se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora la il determinante di A è

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definizione 3.1.2: Complemento algebrico

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n, a elementi in campo K. Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk}, e si indica Γ_{hk}, il determinante della matrice quadrata di ordine $n-1$, ottenuta da A sopprimendo la h-esima riga e la k-esima colonna, preso con il segno $(-1)^{h+k}$.

Teorema 3.1.1 Primo teorema di Laplace

Data la matrice quadrata di ordine n, la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di A.

Pertanto, la formula per il calcolo del determinante di $A = (a_{ij})$ rispetto alla a i-esima riga è

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

rispetto alla j-esima colonna è

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Teorema 3.1.2 Secondo teorema di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n. La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero. Quindi

$$A \in M_n(K) \implies \begin{cases} a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \ldots + a_{in}\Gamma_{jn} = 0 & i \neq j \\ a_{1i}\Gamma_{1j} + a_{2i}\Gamma_{2j} + \ldots + a_{ni}\Gamma_{nj} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Teorema 3.1.3 Teorema di Bidet

Date due matrici quadrate di ordine n, A e B, il determinante della matrice prodotto $A \cdot B$ è uguale al prodotto dei determinanti di A e B, cioè

$$|A \cdot B| = |A||B|$$

3.2 Matrici invertibili

Definizione 3.2.1: Matrice invertibile

Una matrice quadrata, di ordine n, si dice **invertibile** quando esiste una matrice B, quadrata e dello stesso ordine, tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, dove I_n è la matrice identica di ordine n. La matrice B si dice **inversa** di A e si indica A^{-1}.

Teorema 3.2.1

Sia $A \in M_n(K)$; allora A è invertibile $\iff$ $|A| \neq 0$ e in tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, {}^tA_a$$

dove A_a si chiama **matrice aggiunta** di A ed è la matrice ottenuta da A sostituendo ogni elemento con il suo complemento algebrico Γ.

3.3 Dipendenza lineare e determinanti

Definizione 3.3.1: Minore

Sia $A \in K^{m,n}$. Si chiama **minore di ordine** p estratto da A, con $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, $p \leq \min\{m, n\}$, una matrice quadrata di ordine p ottenuta cancellando $m - p$ righe e $n - p$ colonna da A.

Teorema 3.3.1

Una sequenza $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di n vettori dello spazio vettoriale $V_n(K)$ è libera se, e soltanto se, la matrice A, che ha nelle proprie righe (o colonne) le componenti dei vettori di S in una base di $V_n(K)$, ha determinante non nullo ed è legata se, e soltanto se, tale matrice A ha determinante nullo.

Definizione 3.3.2: Rango di una matrice

Sia A una matrice di $K^{m,n}(K)$. Si dice **rango** della matrice A, e si scrive $\rho(A)$, l'ordine massimo di un minore estraibile da A con determinante non nullo.

Osservazione: Data la matrice A di $K^{m,n}(K)$

1. $\rho(A) = 0 \iff A$ è la matrice nulla;
2. $\rho(A) = \rho({}^tA)$;
3. $\rho(A) \leq \min(m,n)$.

Definizione 3.3.3: Spazio delle righe e delle colonne

Data una matrice A, avente m righe ed n colonne, si dice **spazio delle righe** di A, e si indica $\mathcal{L}(R)$, il sottospazio $K^n(K)$ generato dalle righe di A. Si dice **spazio delle colonne** di A, e si indica $\mathcal{L}(C)$, il sottospazio vettoriale di $K^m(K)$ generato dalle colonne di A.

Teorema 3.3.2 Teorema di Kronecker

Gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(R)$ ed $\mathcal{L}(C)$, di una matrice $A \in K^{m,n}(K)$, hanno la stessa dimensione e tale dimensione coincide con il rango di A. Cioè:

$$\dim(\mathcal{L}(R)) = \dim(\mathcal{L}(C)) = \rho(A).$$

Dimostrazione: Dimostriamo che $\dim(\mathcal{L}(R)) = \rho(A)$. La dimostrazione per quanto riguarda le colonne è completamente analoga. Sia $s = \dim(\mathcal{L}(R)) \implies$ abbiamo s righe linearmente indipendenti nella matrice A e quindi per il teorema precedente esiste un minore in A di ordine s a determinante non nullo. Pertanto $\rho(A) \geq s$. Sia per assurdo $\rho(A) = r > s$, dovrebbe esistere in A un minore di ordine r a determinante non nullo. Se chiamiamo ora $S = (R_1, R_2, \dots, R_r)$ la sequenza di righe nella matrice A, la matrice A ha un minore di ordine r non singolare e di conseguenza è libera. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(R) \geq \dim \mathcal{L}(S) = r > s = \dim \mathcal{L}(R).$$

Ma questo è un **assurdo!** Quindi

$$\rho(A) = r \leq s = \dim \mathcal{L}(R) \implies r = s.$$

😃

Corollario 3.3.1

Se A è una matrice quadrata di ordine n, con elementi in un campo K, le sequent condizioni sono equivalenti:

1. $|A| \neq 0$;
2. A è invertibile;
3. $\rho(A) = n$;
4. le righe sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n;
5. le colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n.

Teorema 3.3.3 Teorema degli orlati

Una matrice $A \in K^{m,n}(K)$ ha rango p se, e solo se, esiste un minore M di ordine p a determinante non nullo e tutti i minori di ordine $p+1$, che contengono M, hanno determinante nullo.

3.4 Sistemi lineari

Definizione 3.4.1: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in campo K.

Un sistema lineare si può, quindi, indicare nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con $a_{ij}, b_l \in K$. Gli elementi a_{ij} si chiamano coefficienti delle incognite, gli elementi b_l si dicono termini noti.
La matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice dei coefficienti o **matrice incompleta**, la matrice $n \times 1$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è detta delle matrice colonna delle incognite, mentre la matrice $m \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è detta matrice colonna dei termini noti. La matrice $m \times (n+1)$

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

è detta **matrice completa**. Infine, il sistema iniziale si può riscrivere come: $A \cdot X = B$, cioè

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definizione 3.4.2: Sistema omogeneo

Un sistema lineare si dice **omogeneo** quando tutti i termini noti sono nulli.

$$AX = \underline{0}$$

Osservazione: Data $A \in K^{m,n}$ $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$ ove le colonne C_j sono vettori di $K^{m,1}$ e quindi utilizziamo utilizzando questa notazione il sistema si può scrivere come

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n = B$$

Definizione 3.4.3: Sistema compatibile

Un sistema lineare in m equazioni ed n incognite ha soluzione, ovvero si dice che il sistema è **compatibile**, se esiste almeno una n-upla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ di elementi di K che risolve tutte le equazioni del sistema. Tale n-upla è detta **soluzione**.

Osservazione: Posto $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = B \iff \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_n C_n = B$$

che è equivalente a dire che B è combinazione lineare delle colonne di A. Quindi il sistema è risolubile se, e soltanto se, $B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Teorema 3.4.1 Teorema di Rouché-Capelli
Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile se, e soltanto se, $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Dimostrazione: " $\Longrightarrow$ " Sia $AX = B$ risolubile, $\Longrightarrow \exists\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) : \ \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_n C_n = B$ quindi

$$B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \implies \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B)}_{=\rho(A|B)} = \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)}_{=\rho(A)}$$

$$\implies \rho(A|B) = \rho(A)$$

" $\Longleftarrow$ " Per ipotesi abbiamo che $\rho(A|B) = \rho(A)$. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B) = \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \implies \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

$$\implies B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

$$\implies \exists (k_1, k_2, \ldots, k_n) : \ k_1 C_1 + k_2 C_2 + \ldots + k_n C_n = B$$

Quindi la n-upla $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ è soluzione di $AX = B$ e di conseguenza il sistema è compatibile. ☺

Teorema 3.4.2 Teorema di Cramer
Sia $AX = B$ un sistema lineare in n equazioni ed n incognite. Se $\det(A) \neq 0$ allora $AX = B$ ammette un'unica soluzione.

Indichiamo con B_1, la matrice ottenuta sostituendo a C_i la colonna dei termini noti (B).

$$A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad B_1 = (C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)$$

Se $\det(A) \neq 0$ allora $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è data da:

$$X_1 = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}$$

Definizione 3.4.4: Sistema principale equivalente

Sia $AX = B$ un sistema compatibile, si dice sistema principale equivalente un sistema $A'X = B'$ ottenuto eliminando $m - p$ equazioni da $AX = B$ tale che $\rho(A'|B') = \rho(A') = p$.

Teorema 3.4.3
Un sistema $AX = B$ compatibile ha le stesse soluzioni di un suo sistema principale equivalente.

Osservazione: $\rho(A) = \rho(A|B)$ se il sistema lineare è omogeneo e quindi è sempre compatibile. In particolare $X = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ è sempre soluzione di $AX = \underline{0}$.

Definizione 3.4.5: Autosoluzioni

Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo diverse dalla soluzione nulla si dicono **autosoluzioni**.

N.B.

Non è detto che un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni.

Proposizione 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ ammette autosoluzioni se, e solo se, $\rho(A) < n$ (con n numero di incognite).

Corollario 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ con $A \in M_n(K)$ ammette autosoluzioni se, e soltanto se, $\det(A) = 0$.

Teorema 3.4.4

Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo con $A \in K^{m,n}$ e sia S l'insieme delle sue soluzioni, allora S è un sottospazio di K^n di dimensione $n - \rho(A)$.

Osservazioni:

1. $\underline{0} \in S$
2. se $n - \rho(A) > 0$ abbiamo autosoluzioni
3. Se $B \neq \underline{0}$ l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ non è un sottospazio di K^n perché $A\underline{0} = \underline{0} \neq B \implies \{\underline{0}\} \notin S$.

Proposizione 3.4.2

Sia $AX = B$ un sistema lineare in m equazioni ed n incognite, detto S l'insieme delle soluzioni abbiamo che

$$S = \begin{cases} \{x_0 + z : \ x_0 \in S, \ z \in S\} \text{ se } AX = B \text{ è compatibile} \\ \emptyset \text{ se } AX = B \text{ non è compatibile} \end{cases}$$

Definizione 3.4.6: Sistema lineare omogeneo associato

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite diciamo che $AX = \underline{0}$ è il **sistema lineare omogeneo associato** a $AX = B$.

Proposizione 3.4.3

Le soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX = B$ sono tutte e sole del tipo $\overline{X} = X_0 + Z$, ove X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e Z è la soluzione di $AX = \underline{0}$, sistema omogeneo associato ad $AX = B$.

Dimostrazione: Sia $\overline{X}$ soluzione di $AX = B$, poniamo $Z = \overline{X} - X_0 \iff \overline{X} = X_0 + Z$

$$AZ = A(\overline{X} - X_0) = A\overline{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$$

Quindi Z è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad A. Di conseguenza $\overline{X} = X_0 + Z$ 😊

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite compatibile, le sue soluzioni sono tante quante quelle del sistema lineare omogeneo associato che costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$. Se il campo è infinito, posto $\rho(A) = p$, si dice che le soluzioni sono ∞^{n-p} (cioè che l'insieme delle soluzioni dipende da $n - \rho(A)$ parametri).

Teorema 3.4.5
Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite e sia $\rho(A) = n-1$. Se si indica con $A'X = \underline{0}$ un sistema principale equivalente ad $AX = \underline{0}$ e si indicano con $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ i determinanti dei minori di ordine $n-1$, ottenuti eliminando in A' successivamente la prima, la seconda, ..., la n-esima colonna, allora le soluzioni del sistema sono, al variare di $\lambda \in K$,

$$S = (\lambda\Gamma_1, -\lambda\Gamma_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda\Gamma_n)$$

3.5 Cambiamenti di base

in uno spazio vettoriale $V_n(K)$, di dimensione n, siano $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ e $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ due basi assegnate. Ogni vettore della base B' si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base B, cioè

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

con le seguenti posizioni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ ed } E' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}$$

il sistema si può scrivere in forma compatta

$$E' = AE$$

Definizione 3.5.1: Matrice del cambiamento di base

La matrice A si dice **matrice del cambiamento di base** da B a B'.

Proposizione 3.5.1
La matrice A del cambiamento di base da B a B' è invertibile e $A^{-1} = A'$.

Dimostrazione:

$$E = A'E' = A'(AE) = (A'A)E \implies A'A = I_n$$

$$E' = AE = A(A'E') = (AA')E' \implies AA' = I_n$$

Stabiliamo il legame tra le componenti di uno stesso vettore v, rispetto a due basi diverse B e B'. Poniamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere il generico vettore $v \in V_n(K)$

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)E = {}^tXE$$

$$v = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \dots + x'_ne'_n = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)E = {}^tX'E'$$

$$v = {}^tXE = {}^tX'E$$

Sostituendo si ha ${}^tXE = {}^tX'AE$, ove A è la matrice del cambiamento di base da B a B', quindi, dato che le componenti dei vettori sono univocamente determinate

$$X = {}^tAX'$$

$$X' = {}^tA^{-1}X$$

Possiamo dire quindi che le componenti di uno stesso vettore rispetto a due basi B e B' sono legate dalla matrice del cambiamento di base da B a B'.

Capitolo 4

Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

4.1 Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico

Definizione 4.1.1: Polinomio ed equazione caratteristica

Se A è una matrice quadrata di ordine n, si dice **polinomio caratteristico** di A, e si indica $p_A(\lambda)$, il determinante della matrice $A - \lambda I_n$, cioè

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

L'equazione $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ è detta **equazione caratteristica** di A.

Definizione 4.1.2: Autovalori

Le radici del polinomio caratteristico si chiamano **autovalori** di A.

Definizione 4.1.3: Autospazio

Lo spazio delle soluzioni del sistema $(A - \overline{\lambda} I_n)X = 0$, dove $\overline{\lambda}$ è un autovalore, si chiama **autospazio** associato a $\overline{\lambda}$ e si indica con $V_{\overline{\lambda}}$.

Definizione 4.1.4: Autovettori

I vettori non nulli dell'autospazio $V_{\overline{\lambda}}$ si chiamano **autovettori** relativi a $\overline{\lambda}$.

Osservazione: Si potrebbe dimostrare che se il polinomio caratteristico di $A \in M_n(K)$ ha grado n allora gli autovalori di A sono al massimo n.

Definizione 4.1.5: Matrici simili

Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono **simili** se esiste $P \in M_n(K)$ con $|P| \neq 0$ tale che

$$B = P^{-1}AP \quad PB = AP$$

Proposizione 4.1.1

Due matrici simili A, B hanno lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico (e di conseguenza gli stessi autovalori).

Dimostrazione: Per ipotesi le due matrici A, B sono simili quindi:

$$\exists P \in M_n(K),\ |P| \neq 0 :\ B = P^{-1}AP$$

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A| \implies |B| = |A|$$

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = \frac{1}{|P|}|A - \lambda I_n||P| = |A - \lambda I_n| = p_A(\lambda)$$

e attraverso questa serie di passaggi abbiamo potuto dimostrare che se due matrici sono simili allora avranno sia lo stesso determinante che lo stesso polinomio caratteristico. 😊

4.2 Matrici diagonalizzabili

Definizione 4.2.1: Matrice diagonalizzabile

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, ovvero esistono $D, P \in M_n(K)$ con D matrice diagonale, $|P| \neq 0$ e $D = P^{-1}AP$.

Teorema 4.2.1 Primo criterio di diagonalizzabilità

Una matrice $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile se, e soltanto se, K^n ammette una base costituita da autovettori di A.

Dimostrazione: " $\implies$ " Per ipotesi A è diagonalizzabile quindi $\exists\ D, P \in M_n(K) : D$ è diagonale $|P| \neq 0$ e $PD = AP$. Per semplicità denotiamo le colonne di $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$.

$$AP = A\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1P_1 & d_2P_2 & \dots & d_nP_n \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1P_1 & d_2P_2 & \dots & d_nP_n \end{pmatrix} \iff AP_1 = d_1P_1,\ AP_2 = d_2P_2,\ \dots,\ AP_n = d_nP_n$$

$$\implies AX = \lambda X \quad \lambda = d_i \quad X = P_i$$

dove d_i è un autovalore, P_i è un autovettore di A e $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$ è una sequenza di n autovettori. Poiché $\dim K^n = n$ e la sequenza è composta da n vettori, è sufficiente controllare la lineare indipendenza di P. Ma siccome avevamo supposto per ipotesi che $|P| \neq 0$ le sue n colonne sono linearmente indipendenti. Quindi $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ è una base di K^n costituita da autovettori di A.
" $\impliedby$ " è analogo, basta ripercorrere il ragionamento a ritroso. 😊

Osservazione: Se $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile allora:

- D ha sulla diagonale principale gli autovalori di A;
- P, cioè la matrice diagonalizzante, ha nelle colonne gli autovettori della base di K^n.

Definizione 4.2.2: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia $\overline{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$; si chiama:

- **molteplicità algebrica** di $\overline{\lambda}$ il numero di volte che $\overline{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico, e si indica con $a_{\overline{\lambda}}$
- **molteplicità geometrica** di $\overline{\lambda}$ la dimensione dell'autospazio $V_{\overline{\lambda}}$ associato a $\overline{\lambda}$, e si indica con $g_{\overline{\lambda}}$.

Proposizione 4.2.1
Sia $\overline{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$. Allora
$$1 \leq g_{\overline{\lambda}} \leq a_{\overline{\lambda}}$$

Proposizione 4.2.2
Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ t autovalori di A distinti tra loro, allora la somma dei relativi autospazi è diretta.
$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}$$

Osservazioni:

1. $A \in M_n(K) \implies \deg(p_A(\lambda)) = n$, quindi ho al massimo n autovalori;
2. $\sum a_{\lambda_i} \leq n$;
3. $\sum a_{\lambda_i} = n \iff$ tutti gli autovalori di A sono in K;
4. $S = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} \implies \dim S = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i}$
5. Autovettori provenienti da autospazi diversi sono tra loro linearmente indipendenti (perché la somma è diretta).

Teorema 4.2.2 Secondo criterio di diagonalizzabilità
Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A. Allora A è diagonalizzabile se, e soltanto se:

1. tutti gli autovalori di A sono in K;
2. Per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$(e allora si dice che l'autovalore è regolare).

Dimostrazione: " $\implies$ " Per ipotesi A è diagonalizzabile. Per il primo criterio di diagonalizzabilità K^n ammette una base B formata da autovettori, cioè tale che $\mathcal{L}(B) = K^n$ e $B \subseteq V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$. Quindi

$$K^n = \mathcal{L}(B) \leq \mathcal{L}(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}) = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$$
$$\implies V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} = K^n$$
$$\implies n = \dim K^n = \dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} \leq n$$

Siccome $\sum a_{\lambda_i} = n$ tutti gli autovalori di A sono in K. Inoltre $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$ e $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i} \implies a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$.
" $\impliedby$ " Per ipotesi abbiamo che tutti gli autovalori di A soni in K e per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$. Per ogni autovalore $\overline{\lambda}$ avremo un relativo autospazio a cui corrisponde una relativa base di autovettori $B_1, B_2, \ldots, B_t$. Chiamiamo $B = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$, cioè l'unione di tutte le basi. Certamente B è libera perché la somma di sottospazi distinti è diretta.
$$|B| = |\bigcup B_i| = \sum |B_i| = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i} = n$$
Quindi B è una base di K^n costituita da autovettori e per il primo criterio di diagonalizzabilità A è diagonalizable.

😆

Capitolo 5

Forme bilineari e prodotti scalari

5.1 Forme bilineari

Definizione 5.1.1: Forma bilineare e prodotto scalare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale. Una **forma bilineare** in V è una funzione $*: \ V \times V \longrightarrow K$:

- $(u+v)*w = u*w + v*w \qquad \forall u,v,w \in V \ \forall k \in K$
- $u*(v+w) = u*v + u*w \qquad \forall u,v,w \in V \ \forall k \in K$
- $(ku)*v = u*(kv) = k(u*v) \qquad \forall u,v,w \in V \ \forall k \in K$

Se poi $*$ verifica anche l'ulteriore proprietà

- $v*w = w*v \qquad \forall u,v,w \in V \ \forall k \in K$

Allora si chiama **prodotto scalare** (o forma bilineare simmetrica).

Osservazione: Si deduce chiaramente che $\forall v \in V \quad \underline{0}*v = 0 = v*\underline{0}$.

Esempio 5.1.1 (Prodotto scalare euclideo e standard)

1. Definiamo il **prodotto scalare euclideo** come una funzione $*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) * (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \dots + x_nx'_n$$

2. Definiamo il **prodotto scalare standard** come la funzione $*: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'_1 & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{pmatrix} = x_{11}x'_{11} + x_{12}x'_{12} + \dots + x_{nn}x'_{nn}$$

5.2 Prodotti scalari e ortogonalità

Definizione 5.2.1: Ortogonalità

In uno spazio vettoriale $V(K)$, con prodotto scalare "$\cdot$", due vettori v e w di V si dicono **ortogonali**, e si scrive $v \perp w$, se $v \cdot w = 0$.

Definizione 5.2.2: Complemento ortogonale

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e "$\cdot$" un prodotto scalare. Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$; si chiama **complemento ortogonale** (o più semplicemente ortogonale) di A l'insieme

$$A^{\perp} = \{v \in V : \ v \perp w, \ \forall w \in A\} \qquad \underline{0} \in A^{\perp} \neq \emptyset$$

Proposizione 5.2.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$". Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$. Allora $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione: Sappiamo che $\underline{0} \in A^{\perp} \neq \emptyset$
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall u_1, u_2 \in A^{\perp}, \ \forall k_1, k_2 \in K \qquad k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^{\perp}$$

Possiamo scrivere per la proprietà di ortogonalità che

$$\forall w \in A \quad u_1 \cdot w = 0 \quad u_2 \cdot w = 0$$

Quindi

$$(k_1 u_1 + k_2 u_2) \cdot w = (k_1 u_1) \cdot w + (k_2 u_2) \cdot w = k_1 \underbrace{(u_1 \cdot w)}_{=0} + k_2 \underbrace{(u_2 \cdot w)}_{=0}$$

$$\implies k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^{\perp} \implies A^{\perp} \text{ è un sottospazio.}$$

😄

Osservazioni:

1. $A \subseteq B \implies A^{\perp} \supseteq B^{\perp}$
2. $A^{\perp} = [\mathcal{L}(A)]^{\perp}$
3. Generalmente se $A \leq V(K) \implies A \neq (A^{\perp})^{\perp}$, ma $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$