Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Relazioni su un insieme

Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme A è un qualunque sottoinsieme di $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times A$.
Una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme A si dice:

- **riflessiva** se, per ogni $a \in A,\ a\mathcal{R}a$;
- **simmetrica** se, per ogni $a, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ allora $a = b$;
- **antisimmetrica** se, per ogni $a, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$;
- **transitiva** se, per ogni $a, b, c \in A,\ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$;

Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di A sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni $a, b \in A$, risulta $a\mathcal{R}b$ oppure $b\mathcal{R}a$, la relazione $\mathcal{R}$ si dice **relazione d'ordine totale**.

1.2 Strutture algebriche

Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia $(G, \star)$ un insieme con un'operazione $\star$. La struttura $(G, \star)$ si dice **gruppo** se:

- l'operazione $\star$ è associativa;
- esiste in G l'elemento neutro;
- ogni elemento di $g \in G$ è simmetrizzabile.

Se l'operazione $\star$ soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

Definizione 1.2.2: Campo

Sia A un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "·" e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura $(A, +, \cdot)$ è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \backslash \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $e \neq 0$;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni $a, b, c \in A$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.3 Matrici

Definizione 1.3.1: Matrice

Dato un campo K si dice **matrice** di tipo $m \times n$ su K una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avente m righe ed n colonne, i cui elementi a_{ij} sono elementi di K.

Definizione 1.3.2: Matrice quadrata

Una matrice di tipo $n \times n$ è detta **matrice quadrata** di ordine n. Queste vengono indicate con $M_n(K)$.

Definizione 1.3.3: Prodotto righe per colonne

Date le matrici $A = (a_{ih}) \in K^{m,n}(K)$ con $i \in I_m, h \in I_n$ e $B = (b_{hj}) \in K^{n,p}$ con $h \in I_n, j \in I_p$, si dice **prodotto righe per colonne** di A per B la matrice

$$A \cdot B = (c_{ij}) \text{ con } i \in I_m, \ j \in I_p \qquad \text{ove}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih}b_{hj}$$

Esempio 1.3.1

Prendiamo per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 21 & 12 & -19 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.4: Matrice identica

L'elemento neutro delle matrici quadrate di ordine n è la **matrice identica**, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.5: Trasposta di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di $K^{m,n}$. Si dice **trasposta** di A la matrice $K^{n,m}$ ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne, cioè ${}^tA = (b_{ji})$ ove $b_{ji} = a_{ij}$ per ogni $i \in I_n$ e $j \in I_m$.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno **spazio vettoriale** sul campo K, se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V, detta somma, $+ : V \times V \longrightarrow V$ e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, tali che

- $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno $\cdot$ soddisfi le seguenti proprietà:
  - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
  - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori**, gli elementi del campo K sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di $(V, +)$ è detto **vettor nullo** e indicato $\underline{0}$ per distinguerlo da 0, zero del campo K. L'opposto di ogni vettore **v** viene indicato con **-v**.

Teorema 2.1.1

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, siano $k \in K$ e $v \in V$. Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

Dimostrazione: Se k = 0

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

e sommando $-0v$ ad ambo i membri si ottiene appunto $\underline{0} = 0v$. Se è $v = \underline{0}$, si procede nel modo analogo. Viceversa, se $kv = \underline{0}$ e $k \neq 0$ dimostriamo che $v = \underline{0}$. Dato che $k \neq 0$, esiste l'inverso $k^{-1} \in K$ e, moltiplicando ambo i membri della precedente uguaglianza per k^{-1} si ottiene $k^{-1}(kv) = k^{-1}\underline{0}$ che, per quanto dimostrato in precedenza dà il $\underline{0}$. Dato che $k^{-1}(kv) = (k^{-1}k)v = 1v = v$, per la proprietà 4, si ha $v = \underline{0}$. 😄

2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, diremo che U è **sottospazio vettoriale** di V se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

Proposizione 2.2.1 Primo criterio di riconoscimento
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme U è uno spazio vettoriale di V se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$
2. $\forall k \in K, \ \forall u \in U \quad ku \in U$

Proposizione 2.2.2 Secondo criterio di riconoscimento
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, U è sottospazio di $V(K)$ se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

Definizione 2.3.1: Combinazione lineare

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(K)$ si dice combinazione lineare di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ogni vettore v:

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \ldots + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$$

Definizione 2.3.2: Sistema di vettori libero

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, allora A si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di A che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \ldots + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = \ldots = k_n = \underline{0}$$

Se A è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione 2.3.3: Sistema di vettori legato

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, allora A si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, \ldots, k_n \text{ non tutti nulli} : \ \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \ldots + k_n \cdot v_n$$

Se A è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

Proposizione 2.3.1
Sia $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se $\underline{0}$ appartiene ad A, il sistema A è legato.

Dimostrazione: Sia $\underline{0} \in A$, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\underline{0} = v_1$ quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies \text{A è legato}$$

☺

Proposizione 2.3.2
Sia $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se in A appaiono due vettori proporzionali allora A è legato.

Dimostrazione: Senza perdita di generalità possiamo supporre che $v_1 = kv_2$ e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + ... + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies \text{A è legato}$$

☺

Proposizione 2.3.3
Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. A è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: $\implies$: Per ipotesi A è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $k_1 \neq 0$

$$-k_1v_1 = k_2v_2 + ... + k_nv_n \qquad v_1 = \frac{1}{k_1}(-k_2v_2 - ... - k_nv_n)$$
$$v_1 = -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - ... - \frac{k_n}{k1}v_n$$

e quindi v_1 è combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$.
$\impliedby$: Per ipotesi uno dei vettori di A è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n \qquad \underline{0} = -1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

siccome $-1 \neq 0$ A è legato. ☺

Proposizione 2.3.4
Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $u \in V(K)$. Se $A \cup \{u\}$ è legato, allora u è combinazione lineare dei vettori di A.

Dimostrazione: Per ipotesi $A \cup \{u\}$ è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, ..., k_n, b \in K \text{ non tutti nulli } : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n + bu$$

sia per assurdo $b = 0$

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, } \textbf{assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \quad u = -\frac{k_1}{b}v_1 - \frac{k_2}{b}v_2 - ... - \frac{k_n}{b}v_n$$

$\implies$ u è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ ☺

Proposizione 2.3.5
Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \supseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$. Se A è legato allora anche B è legato.

Dimostrazione:

$$\exists k_1, k_2, ..., k_n \in K \text{ non tutti nulli } : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

Se $B = [v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_m]$ allora

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + ... + 0w_m$$

$\implies$ B è legato. ☺

Proposizione 2.3.6

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \subseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$, se A è libero, allora B è libero.

Dimostrazione: Sia, per assurdo, B legato, allora per la proposizione precedente anche A è legato. **Assurdo!** Quindi B è libero. ☺

2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

Definizione 2.4.1: Sistema di generatori

Sia A sistema di vettori di $V(K)$. A si dice sistema di generatori di $V(K)$ se ogni $v \in V(K)$ si può scrivener come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A.

Definizione 2.4.2: Copertura lineare

Sia A un sistema di vettori di $V(K)$ si dice copertura (o chiusura) lineare di A l'insieme $\mathcal{L}(A)$ di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di A.

N.B.

Dato A sistema di vettori di $V(K)$

1. $\mathcal{L}(A)$ è il più piccolo sottospazio di $V(K)$ che contiene A
2. $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3. $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se $V(K)$ ammette un sistema di generatori finito $\implies$ $V(K)$ si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di $V(K)$ ha cardinalità infinita $\implies$ $V(K)$ non è finitamente generato.

2.5 Basi e dimensione

Lemma 2.5.1

Sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori per uno spazio vettoriale $V(K)$, e sia $v \in S$ combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri) $\implies$ $S \backslash \{v\}$ è sistema di generatori per $V(K)$

Dimostrazione: Sia, senza perdere di generalità, v_1 combinazione lineare di $v_2, v_3, ..., v_n$

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + ... + k_n v_n$$

sia $v \in V(K)$

$$v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + ... + h_n v_n = h_1(k_2 v_2 + ... + k_n v_n) + h_2 v_2 + ... + h_n v_n$$
$$v = \underbrace{(h_1 k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + ... + \underbrace{(h_1 k_n + h_n)}_{\in K} v_n \ \in \mathcal{L}([v_2, v_3, ..., v_n]) = \mathcal{L}(S \backslash \{v_1\})$$

$\implies$ $S \backslash \{v_1\}$ è un sistema di generatori. ☺

Teorema 2.5.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ($V(K) \neq \{\underline{0}\}$), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

Dimostrazione: sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori per $V(K)$, abbiamo due possibilità:

1. A è libero $\implies$ A è un sistema di generatori libero;
2. A è legato $\implies$ $\exists v \in A$ combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre $v = v_1 \implies A \backslash \{v_1\} = A_1$ è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare $A_2 \to A_3 \to ...$ finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.
Osserviamo che A contiene almeno un $v \in A : v \neq \underline{0}$, questo perché $A_n = [0]$ e $v_n \neq \underline{0}$ perché $A \neq \{\underline{0}\} \implies A_n$ è necessariamente libero. ☺

Definizione 2.5.1: Base

Sia $S = (v_1, v_2, ..., v_n)$ sequenza libera di vettori di $V(K)$. S è detta base se e solo se S è una sequenza libera di generatori.

Definizione 2.5.2: Base canonica di $\mathbb{R}^n$

$((1, 0, 0, ..., 0)(0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, 0, ..., 1))$ è una base canonica per $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $B = [v_1, v_2, ..., v_n]$ sistema di generatori e $A = [u_1, u_2, ..., u_m]$ sistema libero. Allora la cardinalità di A sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. $(m \leq n)$

Dimostrazione: Sia per assurdo $m > n$, poiché B genera $V(K)$ u_1 si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n$$

Essendo A libero $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, ..., k_n$ non sono tutti nulli $\implies$ senza perdita di generalità $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n \qquad v_1 = \frac{1}{k_1}(u_1 - k_2 v_2 - ... - k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, ..., v_n])$$

B è sistema di generatori, $B \cup \{u_1\}$ è sistema di generatori, di conseguenza $(B \cup \{u_1\} \backslash \{v_1\}) = B_1 = [u_1, v_2, ..., v_n]$ è ancora sistema di generatori per $V(K)$.
Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + ... + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, ..., h_n \in K$$

Se avessimo $h_2 = h_3 = ... = h_n = 0$ $u_2 = \alpha$ ma ciò non può succedere perché A è libero $\implies \exists h_i \neq 0$ e senza perdita di generalità supporremo $h_2 \neq 0$ quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + ... + h_n v_n \qquad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - ... - h_n v_n)$$

v_2 è linearmente dipendente da $B_2 = [u_1, u_2, v_3, ..., v_n]$ e B_2, per lo stesso motivo di B_1 è ancora sistema di generatori.
Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento n volte fino a trovare un sistema $B_n = [u_1, u_2, ..., u_n]$. Siccome avevamo supposto che $m > n$ essendo B_n sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche u_{n+1} come combinazione lineare dei vettori di B_n, cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \qquad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$$

questo comporta che A sia legato, ma questo è **assurdo!** $\implies m \leq n$. ☺

Teorema 2.5.2
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano B_1 e B_2 due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, ..., v_n) \qquad B_2 = (u_1, u_2, ..., u_n) \qquad m = n$$

Dimostrazione: Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- B_1 sistema di generatori, B_2 sistema libero $\implies n \geq m$;
- B_2 sistema di generatori, B_1 sistema libero $\implies m \geq n$.

$m \geq n$ e $n \geq m \iff n = m$. ☺

Definizione 2.5.3: Dimensione

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di V la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se $V = \{0\}$ poniamo la $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

Proposizione 2.5.1
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n su K e sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori. Allora S è libero.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, ..., w_n]$ una base di $V_n(K)$. Sia per assurdo S legato. Senza perdita di generalità $v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n$. Allora $S' = S \backslash \{v_1\}$ è ancora sistema di generatori. $|S'| = n - 1 \geq |B|$ perché B è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!**. Quindi S è libero. ☺

Proposizione 2.5.2
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K. Sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema libero. Allora S è anche un sistema di generatori.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, ..., w_n]$ una base di $V(K)$, supponiamo per assurdo che S non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$ è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha}(-k_1v_1 - k_2v_2 - ... - k_nv_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$ **assurdo!** Contro l'ipotesi che $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$ è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1}_{\text{sistema libero}} \leq \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \quad \to \text{ per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! $\implies S$ è un sistema di generatori. ☺

Proposizione 2.5.3
m vettori in $V_n(K)$ con $m > n$ sono sempre linearmente dipendenti.

Dimostrazione: Siano per assurdo $[v_1, v_2, ..., v_m]$, m vettori linearmente indipendenti con $m > n$. Sia B una base di $V_n(K)$. $m = |S = [v_1, v_2, ..., v_m]| \leq |B| = n$ per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi $m > n$, **assurdo!** ☺

Proposizione 2.5.4
m vettori in $V_n(K)$ con $m < n \implies$ non possono generare.

Dimostrazione: siano $v_1, v_2, ..., v_m$ per assurdo m vettori che generano $V_n(K)$ con $m < n$ allora:

$$m = |S = [v_1, v_2, ..., v_n]| \geq |B| = n \quad \text{con} \quad m \geq n \quad \text{per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! Va contro all'ipotesi. ☺

Teorema 2.5.3 Teorema di caratterizzazione delle basi
Sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una sequenza di vettori di $V(K)$. B è una base se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di B.

$$\forall v \in V, \ \exists! \ v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n \quad k_i \in K$$

Dimostrazione: $\implies$ sia B una base di V. Per ogni v si ha che $v \in \mathcal{L}(B)$ perché B è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista $v \in V$:

$$v = v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n = h_1 v_1 + h_2 v_2 + ... + h_n v_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + ... + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

B è una sequenza libera, quindi $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$ perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che $k_i \neq h_i \implies$ **assurdo!** $\implies \exists!$ la combinazione lineare dei vettori di B che dà v $(\forall v \in V)$.
$\impliedby$ per ipotesi $\forall v \in V$ $\exists!$ combinazione lineare dei vettori di B che dà v. B è una sequenza di generatori, cioè $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$. Supponiamo per assurdo che B sia legato $\implies \exists k_i \in K$ non nullo:

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di B che danno $\underline{0}$. Dato che $\underline{0} \in V$ per ipotesi esiste un unica combinazione lineare dei vettori di B che dà $\underline{0}$. **Assurdo!** Quindi B è una sequenza libera e B è una base per V. ☺

Definizione 2.5.4: Componenti di un vettore rispetto ad una base

Sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $v \in V$. Chiameremo componenti di v rispetto alla base B la sequenza $(k_1, k_2, ..., k_n)$:

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n$$

Proposizione 2.5.5
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K, allora $V_n(K)$ ammette almeno un sottospazio di dimensione m $\forall 0 \leq m \leq n$.

Dimostrazione: sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $0 \leq m \leq n$, ci sono due possibilità:

1. $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$ è il sottospazio voluto;
2. $0 < m \leq n$ e quindi $S = (v_1, v_2, ..., v_m)$

$\mathcal{L}(S)$ ha dimensione m perché S è libero ($S \subseteq B$) e genera, per definizione $\mathcal{L}(S)$. ☺

Proposizione 2.5.6
Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia $U \leq W$, allora:

1. $\dim(U) \leq \dim(W)$
2. $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti:

1. Sia B base per U e B' base per W, se per assurdo

$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$

   contro il lemma di Steinitz.

2. $\Longrightarrow$ è banale;
   $\Longleftarrow$ sia per assurdo $U < W$ e sia B base di U, allora

$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$

   quindi B è una base anche per $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$ **Assurdo!**

☺

Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \dots, v_p)$, ove $p \leq n$, una sequenza libera di vettori in $V_n(K)$. Allora, in una qualunque base di B di $V_n(K)$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è una base di $V_n(K)$.

2.6 Intersezione e somma di sottospazi

Proposizione 2.6.1
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e siano $U, V \leq V \implies U \cap W$ è sottospazio di V.

Dimostrazione: Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi. $U \cap W$ è un sottospazio di V $\iff$ è sottoinsieme non vuoto di V:

$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W,\ \forall k_1, k_2 \in K,\ k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W$$

$U \cap W$ è sottoinsieme non vuoto di V, perché $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ e $\underline{0} \in U \cap W$. Siano ora $v_1, v_2 \in U \cap W$ e $k_1, k_2 \in K$, osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U$ e per lo stesso motivo $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W$ $\implies k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. ☺

N.B.
Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che $U \cup W$ non è un sottospazio a meno che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Definizione 2.6.1: Spazio di somma

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K definiamo lo **spazio di somma** come:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \ e \ w \in W\}$$

Proposizione 2.6.2
Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K abbiamo che: $U + W \leq V$

Dimostrazione: Osserviamo che $U + W \subseteq V$ perché dato $u \in U$ e $w \in W$, $u \in V$ e $w \in V \implies u + w \in V$, il quale non è vuoto perché $\underline{0} \in U + W$. Siano $v_1, v_2 \in U + W$ e siano $k_1, k_2 \in K$

$$k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} = k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1 u_1 + k_1 w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2 u_2 + k_2 w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}}$$

$$\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio} \;\; U + W \leq V$$

😊

Proposizione 2.6.3
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che cotiene $U \cup W$; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

Definizione 2.6.2: Somma diretta

Dati $U, W \leq V_n(K)$ diremo che $U + W$ è somma diretta se $\forall v \in U + W$ può essere scritto come unico modo come $u + w$. Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists! \; u \in U \; e \; w \in W : \quad v = u + w$$

Se $U + W$ è una somma diretta allora la indicheremo con $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.4
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione: $\implies$ Siano U, W in somma diretta e sia, per assurdo: $x \in U \cap W$ con $x \neq \underline{0}$. Sia $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad e \quad w = w - x \text{ poiché la somma è diretta} \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

$\impliedby$ Siano $U, W : U \cap W = \{\underline{0}\}$ e supponiamo per assurdo che esista $v \in U + W$:

$$v = u_1 + w_1 \quad e \quad v = u_2 + w_2 \qquad \text{con} \;\; u_1, u_2 \in U \quad e \quad w_1, w_2 \in W \quad e \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad e \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad e \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che v avesse due scritture distinte come somma i elementi di U e W.

$$\implies \exists! \; (u_1, w_1) : \quad u, \in U \quad e \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1 \; e \; U \oplus W$$

😊

Corollario 2.6.1
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $V = U \oplus W \iff U + W = V \; e \; U \cap W = \{\underline{0}\}$.

N.B.

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia B_1 una base di V e B_2 una base di $W \implies B_1 \cup B_2$ è sequenza di generatori per lo spazio $U + W$. In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per $U + W$.

Proposizione 2.6.5

Siano $U, M \leq V_n(K) : U \oplus W$ e sia A una sequenza libera di vettori di U e B una sequenza libera di vettori di U. Allora $A \cup B$ è una sequenza libera di vettori della $U \oplus W$.

Dimostrazione: Siano $A = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ e $B = (w_1, w_2, \ldots, w_h)$ e supponiamo per assurdo che $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$ e $b_1, b_2, \ldots, b_h \in K$, quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$\underline{0} = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h}_{\in W}$$

$$\implies \underline{0} = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h \quad e \quad \underline{0} = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_kw_k$$

ma A e B sono sequenze libere quindi $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$\underline{0} = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_hw_h \implies \textbf{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$ è una sequenza libera. 😄

Corollario 2.6.2

Siano $U, W \in V_n(K) : U \oplus W$ e siano B_U e B_W basi di U e $W \implies B_U \cup B_W$ è una base per $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.6 Formula di Grassmann

Dati $U, W \leq V_n(K)$ abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

Definizione 2.6.3: Complemento diretto

Sia $W \leq V_n(K)$ si dice **complemento diretto** di W in V uno spazio $U \leq V : U \oplus W = V$.

N.B.

Un complemento diretto di W in V esiste sempre e si trova estendendo una base di W a una base di V. In generale questo non è unico.

Capitolo 3

Sistemi lineari

3.1 Determinante di una matrice quadrata

Definizione 3.1.1: Determinante

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata, di ordine n, a elementi in un campo K. Si dice **determinante** di A, e si scrive $|A|$ oppure $\det(A)$, l'elemento di K definito ricorsivamente come segue:

1. se $n = 1$ $\quad A = (a_{11}) \quad \det(A) = |A| = a_{11}$
2. se $n > 1$ $\quad A = a_{ij} \quad \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, il suo determinante è $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Mentre se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora la il determinante di A è

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definizione 3.1.2: Complemento algebrico

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n, a elementi in campo K. Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk}, e si indica Γ_{hk}, il determinante della matrice quadrata di ordine $n - 1$, ottenuta da A sopprimendo la h-esima riga e la k-esima colonna, preso con il segno $(-1)^{h+k}$.

Teorema 3.1.1 Primo teorema di Laplace

Data la matrice quadrata di ordine n, la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di A.

Pertanto, la formula per il calcolo del determinante di $A = (a_{ij})$ rispetto alla a i-esima riga è

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

rispetto alla j-esima colonna è

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Teorema 3.1.2 Secondo teorema di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n. La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero. Quindi

$$A \in M_n(K) \implies \begin{cases} a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \ldots + a_{in}\Gamma_{jn} = 0 & i \neq j \\ a_{1i}\Gamma_{1j} + a_{2i}\Gamma_{2j} + \ldots + a_{ni}\Gamma_{nj} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Teorema 3.1.3 Teorema di Bidet

Date due matrici quadrate di ordine n, A e B, il determinante della matrice prodotto $A \cdot B$ è uguale al prodotto dei determinanti di A e B, cioè

$$|A \cdot B| = |A||B|$$

3.2 Matrici invertibili

Definizione 3.2.1: Matrice invertibile

Una matrice quadrata, di ordine n, si dice **invertibile** quando esiste una matrice B, quadrata e dello stesso ordine, tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, dove I_n è la matrice identica di ordine n. La matrice B si dice **inversa** di A e si indica A^{-1}.

Teorema 3.2.1

Sia $A \in M_n(K)$; allora A è invertibile $\iff$ $|A| \neq 0$ e in tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^tA_a$$

dove A_a si chiama **matrice aggiunta** di A ed è la matrice ottenuta da A sostituendo ogni elemento con il suo complemento algebrico Γ.

3.3 Dipendenza lineare e determinanti

Definizione 3.3.1: Minore

Sia $A \in K^{m,n}$. Si chiama **minore di ordine** p estratto da A, con $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, $p \leq \min\{m, n\}$, una matrice quadrata di ordine p ottenuta cancellando $m - p$ righe e $n - p$ colonna da A.

Teorema 3.3.1

Una sequenza $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di n vettori dello spazio vettoriale $V_n(K)$ è libera se, e soltanto se, la matrice A, che ha nelle proprie righe (o colonne) le componenti dei vettori di S in una base di $V_n(K)$, ha determinante non nullo ed è legata se, e soltanto se, tale matrice A ha determinante nullo.

Definizione 3.3.2: Rango di una matrice

Sia A una matrice di $K^{m,n}(K)$. Si dice **rango** della matrice A, e si scrive $\rho(A)$, l'ordine massimo di un minore estraibile da A con determinante non nullo.

Osservazione: Data la matrice A di $K^{m,n}(K)$

1. $\rho(A) = 0 \iff A$ è la matrice nulla;
2. $\rho(A) = \rho({}^tA)$;
3. $\rho(A) \leq \min(m, n)$.

Definizione 3.3.3: Spazio delle righe e delle colonne

Data una matrice A, avente m righe ed n colonne, si dice **spazio delle righe** di A, e si indica $\mathcal{L}(R)$, il sottospazio $K^n(K)$ generato dalle righe di A. Si dice **spazio delle colonne** di A, e si indica $\mathcal{L}(C)$, il sottospazio vettoriale di $K^m(K)$ generato dalle colonne di A.

Teorema 3.3.2 Teorema di Kronecker

Gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(R)$ ed $\mathcal{L}(C)$, di una matrice $A \in K^{m,n}(K)$, hanno la stessa dimensione e tale dimensione coincide con il rango di A. Cioè:

$$\dim(\mathcal{L}(R)) = \dim(\mathcal{L}(C)) = \rho(A).$$

Dimostrazione: Dimostriamo che $\dim(\mathcal{L}(R)) = \rho(A)$. La dimostrazione per quanto riguarda le colonne è completamente analoga. Sia $s = \dim(\mathcal{L}(R)) \implies$ abbiamo s righe linearmente indipendenti nella matrice A e quindi per il teorema precedente esiste un minore in A di ordine s a determinante non nullo. Pertanto $\rho(A) \geq s$. Sia per assurdo $\rho(A) = r > s$, dovrebbe esistere in A un minore di ordine r a determinante non nullo. Se chiamiamo ora $S = (R_1, R_2, \dots, R_r)$ la sequenza di righe nella matrice A, la matrice A ha un minore di ordine r non singolare e di conseguenza è libera. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(R) \geq \dim \mathcal{L}(S) = r > s = \dim \mathcal{L}(R).$$

Ma questo è un **assurdo!** Quindi

$$\rho(A) = r \leq s = \dim \mathcal{L}(R) \implies r = s.$$

☺

Corollario 3.3.1

Se A è una matrice quadrata di ordine n, con elementi in un campo K, le sequent condizioni sono equivalenti:

1. $|A| \neq 0$;
2. A è invertibile;
3. $\rho(A) = n$;
4. le righe sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n;
5. le colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n.

Teorema 3.3.3 Teorema degli orlati

Una matrice $A \in K^{m,n}(K)$ ha rango p se, e solo se, esiste un minore M di ordine p a determinante non nullo e tutti i minori di ordine $p+1$, che contengono M, hanno determinante nullo.

3.4 Sistemi lineari

Definizione 3.4.1: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in campo K.

Un sistema lineare si può, quindi, indicare nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con $a_{ij}, b_l \in K$. Gli elementi a_{ij} si chiamano coefficienti delle incognite, gli elementi b_l si dicono termini noti. La matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice dei coefficienti o **matrice incompleta**, la matrice $n \times 1$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è detta delle matrice colonna delle incognite, mentre la matrice $m \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è detta matrice colonna dei termini noti. La matrice $m \times (n+1)$

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

è detta **matrice completa**. Infine, il sistema iniziale si può riscrivere come: $A \cdot X = B$, cioè

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definizione 3.4.2: Sistema omogeneo

Un sistema lineare si dice **omogeneo** quando tutti i termini noti sono nulli.

$$AX = \underline{0}$$

Osservazione: Data $A \in K^{m,n}$ $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$ ove le colonne C_j sono vettori di $K^{m,1}$ e quindi utilizziamo utilizzando questa notazione il sistema si può scrivere come

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n = B$$

Definizione 3.4.3: Sistema compatibile

Un sistema lineare in m equazioni ed n incognite ha soluzione, ovvero si dice che il sistema è **compatibile**, se esiste almeno una n-upla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ di elementi di K che risolve tutte le equazioni del sistema. Tale n-upla è detta **soluzione**.

Osservazione: Posto $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = B \iff \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_n C_n = B$$

che è equivalente a dire che B è combinazione lineare delle colonne di A. Quindi il sistema è risolubile se, e soltanto se, $B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Teorema 3.4.1 Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile se, e soltanto se, $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Dimostrazione: "$\Longrightarrow$" Sia $AX = B$ risolubile, $\Longrightarrow \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n):\ \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_n C_n = B$ quindi

$$B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \implies \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B)}_{=\rho(A|B)} = \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)}_{=\rho(A)}$$

$$\implies \rho(A|B) = \rho(A)$$

"$\Longleftarrow$" Per ipotesi abbiamo che $\rho(A|B) = \rho(A)$. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B) = \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \implies \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

$$\implies B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

$$\implies \exists (k_1, k_2, \ldots, k_n):\ k_1 C_1 + k_2 C_2 + \ldots + k_n C_n = B$$

Quindi la n-upla $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ è soluzione di $AX = B$ e di conseguenza il sistema è compatibile. ☺

Teorema 3.4.2 Teorema di Cramer

Sia $AX = B$ un sistema lineare in n equazioni ed n incognite. Se $\det(A) \neq 0$ allora $AX = B$ ammette un'unica soluzione.

Indichiamo con B_1, la matrice ottenuta sostituendo a C_i la colonna dei termini noti (B).

$$A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad B_1 = (C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)$$

Se $\det(A) \neq 0$ allora $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è data da:

$$X_1 = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}$$

Definizione 3.4.4: Sistema principale equivalente

Sia $AX = B$ un sistema compatibile, si dice sistema principale equivalente un sistema $A'X = B'$ ottenuto eliminando $m - p$ equazioni da $AX = B$ tale che $\rho(A'|B') = \rho(A') = p$.

Teorema 3.4.3

Un sistema $AX = B$ compatibile ha le stesse soluzioni di un suo sistema principale equivalente.

Osservazione: $\rho(A) = \rho(A|B)$ se il sistema lineare è omogeneo e quindi è sempre compatibile. In particolare $X = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ è sempre soluzione di $AX = \underline{0}$.

Definizione 3.4.5: Autosoluzioni

Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo diverse dalla soluzione nulla si dicono **autosoluzioni**.

N.B.

Non è detto che un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni.

Proposizione 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ ammette autosoluzioni se, e solo se, $\rho(A) < n$ (con n numero di incognite).

Corollario 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ con $A \in M_n(K)$ ammette autosoluzioni se, e soltanto se, $\det(A) = 0$.

Teorema 3.4.4

Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo con $A \in K^{m,n}$ e sia S l'insieme delle sue soluzioni, allora S è un sottospazio di K^n di dimensione $n - \rho(A)$.

Osservazioni:

1. $\underline{0} \in S$
2. se $n - \rho(A) > 0$ abbiamo autosoluzioni
3. Se $B \neq \underline{0}$ l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ non è un sottospazio di K^n perché $A\underline{0} = \underline{0} \neq B \implies \{\underline{0}\} \notin S$.

Proposizione 3.4.2

Sia $AX = B$ un sistema lineare in m equazioni ed n incognite, detto S l'insieme delle soluzioni abbiamo che

$$S = \begin{cases} \{x_0 + z : \ x_0 \in S, \ z \in S\} \text{ se } AX = B \text{ è compatibile} \\ \emptyset \text{ se } AX = B \text{ non è compatibile} \end{cases}$$

Definizione 3.4.6: Sistema lineare omogeneo associato

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite diciamo che $AX = \underline{0}$ è il **sistema lineare omogeneo associato** a $AX = B$.

Proposizione 3.4.3

Le soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX = B$ sono tutte e sole del tipo $\overline{X} = X_0 + Z$, ove X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e Z è la soluzione di $AX = \underline{0}$, sistema omogeneo associato ad $AX = B$.

Dimostrazione: Sia $\overline{X}$ soluzione di $AX = B$, poniamo $Z = \overline{X} - X_0 \iff \overline{X} = X_0 + Z$

$$AZ = A(\overline{X} - X_0) = A\overline{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$$

Quindi Z è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad A. Di conseguenza $\overline{X} = X_0 + Z$ 😊

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite compatibile, le sue soluzioni sono tante quante quelle del sistema lineare omogeneo associato che costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$. Se il campo è infinito, posto $\rho(A) = p$, si dice che le soluzioni sono ∞^{n-p} (cioè che l'insieme delle soluzioni dipende da $n - \rho(A)$ parametri).

Teorema 3.4.5
Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite e sia $\rho(A) = n-1$. Se si indica con $A'X = \underline{0}$ un sistema principale equivalente ad $AX = \underline{0}$ e si indicano con $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ i determinanti dei minori di ordine $n-1$, ottenuti eliminando in A' successivamente la prima, la seconda, ..., la n-esima colonna, allora le soluzioni del sistema sono, al variare di $\lambda \in K$,

$$S = (\lambda\Gamma_1, -\lambda\Gamma_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda\Gamma_n)$$

3.5 Cambiamenti di base

in uno spazio vettoriale $V_n(K)$, di dimensione n, siano $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ e $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ due basi assegnate. Ogni vettore della base B' si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base B, cioè

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

con le seguenti posizioni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ ed } E' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}$$

il sistema si può scrivere in forma compatta

$$E' = AE$$

Definizione 3.5.1: Matrice del cambiamento di base

La matrice A si dice **matrice del cambiamento di base** da B a B'.

Proposizione 3.5.1
La matrice A del cambiamento di base da B a B' è invertibile e $A^{-1} = A'$.

Dimostrazione:

$$E = A'E' = A'(AE) = (A'A)E \implies A'A = I_n$$

$$E' = AE = A(A'E') = (AA')E' \implies AA' = I_n$$

☺

Stabiliamo il legame tra le componenti di uno stesso vettore v, rispetto a due basi diverse B e B'. Poniamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere il generico vettore $v \in V_n(K)$

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)E = {}^tXE$$

$$v = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \ldots + x'_ne'_n = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)E = {}^tX'E'$$

$$v = {}^tXE = {}^tX'E$$

Sostituendo si ha ${}^{t}XE = {}^{t}X'AE$, ove A è la matrice del cambiamento di base da B a B', quindi, dato che le componenti dei vettori sono univocamente determinate

$$X = {}^{t}AX'$$

$$X' = {}^{t}A^{-1}X$$

Possiamo dire quindi che le componenti di uno stesso vettore rispetto a due basi B e B' sono legate dalla matrice del cambiamento di base da B a B'.

Capitolo 4

Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

4.1 Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico

Definizione 4.1.1: Polinomio ed equazione caratteristica

Se A è una matrice quadrata di ordine n, si dice **polinomio caratteristico** di A, e si indica $p_A(\lambda)$, il determinante della matrice $A - \lambda I_n$, cioè

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

L'equazione $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ è detta **equazione caratteristica** di A.

Definizione 4.1.2: Autovalori

Le radici del polinomio caratteristico si chiamano **autovalori** di A.

Definizione 4.1.3: Autospazio

Lo spazio delle soluzioni del sistema $(A - \overline{\lambda} I_n)X = 0$, dove $\overline{\lambda}$ è un autovalore, si chiama **autospazio** associato a $\overline{\lambda}$ e si indica con $V_{\overline{\lambda}}$.

Definizione 4.1.4: Autovettori

I vettori non nulli dell'autospazio $V_{\overline{\lambda}}$ si chiamano **autovettori** relativi a $\overline{\lambda}$.

Osservazione: Si potrebbe dimostrare che se il polinomio caratteristico di $A \in M_n(K)$ ha grado n allora gli autovalori di A sono al massimo n.

Definizione 4.1.5: Matrici simili

Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono **simili** se esiste $P \in M_n(K)$ con $|P| \neq 0$ tale che

$$B = P^{-1}AP \quad PB = AP$$

Proposizione 4.1.1

Due matrici simili A, B hanno lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico (e di conseguenza gli stessi autovalori).

Dimostrazione: Per ipotesi le due matrici A, B sono simili quindi:

$$\exists P \in M_n(K),\ |P| \neq 0 :\ B = P^{-1}AP$$

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A| \implies |B| = |A|$$

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = \frac{1}{|P|}|A - \lambda I_n||P| = |A - \lambda I_n| = p_A(\lambda)$$

e attraverso questa serie di passaggi abbiamo potuto dimostrare che se due matrici sono simili allora avranno sia lo stesso determinante che lo stesso polinomio caratteristico. ☺

4.2 Matrici diagonalizzabili

Definizione 4.2.1: Matrice diagonalizzabile

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, ovvero esistono $D, P \in M_n(K)$ con D matrice diagonale, $|P| \neq 0$ e $D = P^{-1}AP$.

Teorema 4.2.1 Primo criterio di diagonalizzabilità

Una matrice $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile se, e soltanto se, K^n ammette una base costituita da autovettori di A.

Dimostrazione: " $\implies$ " Per ipotesi A è diagonalizzabile quindi $\exists\ D, P \in M_n(K) : D$ è diagonale $|P| \neq 0$ e $PD = AP$. Per semplicità denotiamo le colonne di $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$.

$$AP = A\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1P_1 & d_2P_2 & \dots & d_nP_n \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1P_1 & d_2P_2 & \dots & d_nP_n \end{pmatrix} \iff AP_1 = d_1P_1,\ AP_2 = d_2P_2,\ \dots,\ AP_n = d_nP_n$$

$$\implies AX = \lambda X \quad \lambda = d_i \quad X = P_i$$

dove d_i è un autovalore, P_i è un autovettore di A e $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$ è una sequenza di n autovettori. Poiché $\dim K^n = n$ e la sequenza è composta da n vettori, è sufficiente controllare la lineare indipendenza di P. Ma siccome avevamo supposto per ipotesi che $|P| \neq 0$ le sue n colonne sono linearmente indipendenti. Quindi $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ è una base di K^n costituita da autovettori di A.
" $\impliedby$ " è analogo, basta ripercorrere il ragionamento a ritroso. ☺

Osservazione: Se $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile allora:

- D ha sulla diagonale principale gli autovalori di A;
- P, cioè la matrice diagonalizzante, ha nelle colonne gli autovettori della base di K^n.

Definizione 4.2.2: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia $\overline{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$; si chiama:

- **molteplicità algebrica** di $\overline{\lambda}$ il numero di volte che $\overline{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico, e si indica con $a_{\overline{\lambda}}$
- **molteplicità geometrica** di $\overline{\lambda}$ la dimensione dell'autospazio $V_{\overline{\lambda}}$ associato a $\overline{\lambda}$, e si indica con $g_{\overline{\lambda}}$.

Proposizione 4.2.1

Sia $\overline{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$. Allora

$$1 \leq g_{\overline{\lambda}} \leq a_{\overline{\lambda}}$$

Proposizione 4.2.2

Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ t autovalori di A distinti tra loro, allora la somma dei relativi autospazi è diretta.

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}$$

Osservazioni:

1. $A \in M_n(K) \implies \deg(p_A(\lambda)) = n$, quindi ho al massimo n autovalori;
2. $\sum a_{\lambda_i} \leq n$;
3. $\sum a_{\lambda_i} = n \iff$ tutti gli autovalori di A sono in K;
4. $S = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} \implies \dim S = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i}$
5. Autovettori provenienti da autospazi diversi sono tra loro linearmente indipendenti (perché la somma è diretta).

Teorema 4.2.2 Secondo criterio di diagonalizzabilità

Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A. Allora A è diagonalizzabile se, e soltanto se:

1. tutti gli autovalori di A sono in K;
2. Per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$(e allora si dice che l'autovalore è regolare).

Dimostrazione: " $\implies$ " Per ipotesi A è diagonalizzabile. Per il primo criterio di diagonalizzabilità K^n ammette una base B formata da autovettori, cioè tale che $\mathcal{L}(B) = K^n$ e $B \subseteq V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$. Quindi

$$K^n = \mathcal{L}(B) \leq \mathcal{L}(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}) = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$$

$$\implies V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t} = K^n$$

$$\implies n = \dim K^n = \dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} \leq n$$

Siccome $\sum a_{\lambda_i} = n$ tutti gli autovalori di A sono in K. Inoltre $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$ e $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i} \implies a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$.
" $\impliedby$ " Per ipotesi abbiamo che tutti gli autovalori di A soni in K e per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$. Per ogni autovalore $\overline{\lambda}$ avremo un relativo autospazio a cui corrisponde una relativa base di autovettori $B_1, B_2, \ldots, B_t$. Chiamiamo $B = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$, cioè l'unione di tutte le basi. Certamente B è libera perché la somma di sottospazi distinti è diretta.

$$|B| = |\bigcup B_i| = \sum |B_i| = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i} = n$$

Quindi B è una base di K^n costituita da autovettori e per il primo criterio di diagonalizzabilità A è diagonalizable.
😃

Capitolo 5

Forme bilineari e prodotti scalari

5.1 Forme bilineari

Definizione 5.1.1: Forma bilineare e prodotto scalare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale. Una **forma bilineare** in V è una funzione $*: \; V \times V \longrightarrow K$:

- $(u+v)*w = u*w + v*w \qquad \forall u,v,w \in V \; \forall k \in K$
- $u*(v+w) = u*v + u*w \qquad \forall u,v,w \in V \; \forall k \in K$
- $(ku)*v = u*(kv) = k(u*v) \qquad \forall u,v,w \in V \; \forall k \in K$

Se poi $*$ verifica anche l'ulteriore proprietà

- $v*w = w*v \qquad \forall u,v,w \in V \; \forall k \in K$

Allora si chiama **prodotto scalare** (o forma bilineare simmetrica).

Osservazione: Si deduce chiaramente che $\forall v \in V \quad \underline{0}*v = 0 = v*\underline{0}$.

Esempio 5.1.1 (Prodotto scalare euclideo e standard)

1. Definiamo il **prodotto scalare euclideo** come una funzione $*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)*(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \ldots + x_nx'_n$$

2. Definiamo il **prodotto scalare standard** come la funzione $*: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'_1 & x'_{12} & \ldots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \ldots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \ldots & x'_{nn} \end{pmatrix} = x_{11}x'_{11} + x_{12}x'_{12} + \ldots + x_{nn}x'_{nn}$$

5.2 Prodotti scalari e ortogonalità

Definizione 5.2.1: Ortogonalità

In uno spazio vettoriale $V(K)$, con prodotto scalare "$\cdot$", due vettori v e w di V si dicono **ortogonali**, e si scrive $v \perp w$, se $v \cdot w = 0$.

Definizione 5.2.2: Complemento ortogonale

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e "$\cdot$" un prodotto scalare. Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$; si chiama **complemento ortogonale** (o più semplicemente ortogonale) di A l'insieme

$$A^{\perp} = \{v \in V : \ v \perp w, \ \forall w \in A\} \qquad \underline{0} \in A^{\perp} \neq \emptyset$$

Proposizione 5.2.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$". Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$. Allora $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione: Sappiamo che $\underline{0} \in A^{\perp} \neq \emptyset$
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall u_1, u_2 \in A^{\perp}, \ \forall k_1, k_2 \in K \qquad k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^{\perp}$$

Possiamo scrivere per la proprietà di ortogonalità che

$$\forall w \in A \quad u_1 \cdot w = 0 \quad u_2 \cdot w = 0$$

Quindi

$$(k_1 u_1 + k_2 u_2) \cdot w = (k_1 u_1) \cdot w + (k_2 u_2) \cdot w = k_1 \underbrace{(u_1 \cdot w)}_{=0} + k_2 \underbrace{(u_2 \cdot w)}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \ k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^{\perp} \ \Longrightarrow \ A^{\perp} \text{ è un sottospazio.}$$

😃

Osservazioni:

1. $A \subseteq B \implies A^{\perp} \supseteq B^{\perp}$
2. $A^{\perp} = [\mathcal{L}(A)]^{\perp}$
3. Generalmente se $A \leq V(K) \implies A \neq (A^{\perp})^{\perp}$, ma $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$

Proposizione 5.2.2

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$" e siano $v, w \in V(K)$ con $w \cdot w \neq \underline{0}$. Allora

$$\exists \ v_1, v_2 \in V : \ v = v_1 + v_2, \ v_1 = kw, \ v_2 \perp w$$

Dimostrazione:

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \qquad v_1 = kw = \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot w}\right) \cdot w$$

$$v_2 = v - v_1 \iff v_1 + v_2 = v$$

Ora verifichiamo che $v_2 \perp w$

$$v_2 \perp w \iff (v - v_1) \cdot w = \left(v - \frac{v \cdot w}{w \cdot w}\right) \cdot w = v - w - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w \cdot w = v \cdot w - v \cdot w = 0$$

😃

Definizione 5.2.3: Coefficiente di Fourier e proiezione

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$" e siano $v, w \in V(K)$ con $w \cdot w \neq \underline{0}$. Allora

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$$

si chiama **coefficiente di Fourier** di v lungo w e

$$v_1 = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w$$

si chiama **proiezione** di v lungo w.

Definizione 5.2.4: Forma quadratica

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$" e sia $v \in V(K)$. Si chiama **forma quadratica** associata a "$\cdot$" la funzione

$$q : \begin{cases} V \longrightarrow K \\ v \mapsto q(v) = v \cdot v \end{cases}$$

5.3 Spazi con prodotto scalare definito positivo

Definizione 5.3.1: Prodotto scalare definito positivo

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su campo K ordinato. Un prodotto scalare "$\cdot$" in V si dice **definito positivo** se

$$\forall v \in V \quad v \cdot v \geq 0 \quad e \quad v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$$

Per chiarezza da qui in avanti quando si parla di prodotti scalari definiti positivi $K = \mathbb{R}$ in modo tale che esso sia ordinato. Di conseguenza denotiamo con **spazio vettoriale metrico reale** $V_n^\circ(\mathbb{R})$, cioè uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

Definizione 5.3.2

Dato $V_n^\circ(\mathbb{R})$ si chiama **norma** la funzione

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{q(v)} \end{cases}$$

Esempio 5.3.1 (Vettori geometrici)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|\vec{v}||\vec{v}| \cos 0} = \sqrt{|\vec{v}|^2} = |\vec{v}|$$

Osservazioni:

1. La norma generalizza la nozione di "lunghezza" di un vettore.
2. $\|v\| = \underline{0} \iff v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$

Proposizione 5.3.1
In $V_n^\circ(\mathbb{R})$ valgono i seguenti fatti

1. $\|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$
3. $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (disuguaglianza di Schwarz)
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

Osservazioni: Sia "$\cdot$" un prodotto scalare euclideo definito su $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$. La sua base canonica è

$$B_c = ((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)) = (e_1,e_2,\dots,e_n)$$

1. $\|e_i\| = \sqrt{e_i \cdot e_i} = 1$
2. $e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \implies e_i \perp e_j$
3. $\forall \underbrace{(x_1,x_2,\dots,x_n)}_{=v} = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,0,1)$

   $\implies v \cdot e_i = x_i =$ i-esima componente di v rispetto a B_c

Definizione 5.3.3: Base ortogonale e ortonormale

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ di uno spazio vettoriale $V_n^\circ(\mathbb{R})$ formano un insieme **ortogonale** se $v_i \cdot v_j = 0,\ i \neq j$. Se inoltre ciascuno dei v_i ha norma unitaria, allora parleremo di insieme **ortonormale**. Se poi tali vettori costituiscono una base di $V_n^\circ(\mathbb{R})$ parleremo di base ortogonale o ortonormale.

Proposizione 5.3.2

Se $\emptyset \neq A \subseteq V_n^\circ(\mathbb{R})$ e costituito da vettori tutti non nulli. Allora A è libero.

Dimostrazione:

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j. \quad \text{Siano } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}$$

$$0 = 0 \cdot v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot v_1 = \alpha_1 \underbrace{v_1 \cdot v_1}_{\neq 0 \implies v_1 \neq \underline{0} \implies \|v_1\|^2 \neq 0} + \alpha_2 \underbrace{v_2 \cdot v_2}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{v_n \cdot v_n}_{=0} = \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} \underbrace{\alpha_1}_{\implies \alpha_1 = 0}$$

Ripeto il ragionamento per ciascuno dei v_i e ottengo che gli unici α che mi danno il vettore nullo sono quelli tutti nulli. Quindi se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \implies A$ è libero. 😆

Osservazione: In $V_n^\circ(\mathbb{R})$ se A è un insieme ortogonale di n vettori tutti diversi dal vettore nullo allora A è libero. Dunque fissato un ordine abbiamo una base ortogonale.

Teorema 5.3.1 Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Siano $V_n^\circ(\mathbb{R})$ e $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base. La sequenza $B' = (e_1', e_2', \dots, e_n')$ così definita

$$e_1' = e_1$$

$$e_2' = e_2 - \frac{e_2 \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'} \cdot e_1'$$

$$e_3' = e_3 - \frac{e_3 \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'} \cdot e_1' - \frac{e_3 \cdot e_2'}{e_2' \cdot e_2'} \cdot e_2'$$

$$\vdots$$

$$e_n' = e_n - \frac{e_n \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'} \cdot e_1' - \dots - \frac{e_n \cdot e_{n-1}'}{e_{n-1}' \cdot e_{n-1}'} \cdot e_{n-1}'$$

è una base ortogonale di $V_n^\circ(\mathbb{R})$.

Osservazione: Se i primi p vettori di B sono già ortogonali tra loro il metodo di Gram-Schmidt non li cambia.

Teorema 5.3.2
Se A è un sottoinsieme non vuoto di $V_n^\circ(\mathbb{R})$, la cui copertura non coincide con $V_n^\circ(\mathbb{R})$, allora

$$V_n^\circ(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(A) \oplus A^\perp$$

Dimostrazione: Prima di tutto dimostriamo che $\mathcal{L}(A) \cap A^\perp = \{\underline{0}\}$ infatti: $v \in \mathcal{L}(A) \cap A^\perp$ e se $v \in A^\perp = [\mathcal{L}(A)]^\perp \quad v \cdot v = 0 \implies v = \underline{0}$ poiché ci troviamo in un prodotto scalare definito positivo. Quindi la somma è diretta. Ora si può dimostrare che $\mathcal{L}(A) \oplus A^\perp = V_n^\circ(\mathbb{R})$. Sia $\dim \mathcal{L}(A) = p$ e sia $B = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$; per il teorema di completamento ad una base possiamo completare B ad una base di $V_n^\circ(\mathbb{R})$. Aggiungiamo a B $n - p$ vettori. Ora applichiamo a tale base il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. $B' = (v_1, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_n)$ è una base ortogonale di $V_n^\circ(\mathbb{R})$. Quindi $\mathcal{L}(B') = V_n^\circ(\mathbb{R})$. Ora tutti i vettori aggiunti sono ortogonali ai vettori originali, cioè $v'_{p+1}, \ldots, v'_n \in \mathcal{L}(A)^\perp = A^\perp \implies \mathcal{L}(A) \oplus A^\perp = V_n^\circ(\mathbb{R})$. 😊

Osservazioni:

1. $A^\perp$ è un complemento diretto di $\mathcal{L}(A)$

2. Per la formula di Grassmann abbiamo che

$$n = \dim(\mathcal{L}(A) \oplus A^\perp) = \dim \mathcal{L}(A) + \dim A^\perp \implies \dim A^\perp = n - \dim \mathcal{L}(A)$$

3. Per il punto precedente possiamo affermare che se il prodotto scalare è definito positivo allora $U \leq V_n^\circ(\mathbb{R}) \implies U = (U^\perp)^\perp$

Teorema 5.3.3
L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di dim : $n - \rho(A)$

Dimostrazione: In $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare euclideo

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n$$

Quindi possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Pensando alle righe di A come vettori di $\mathbb{R}^n$ le equazioni del sistema esprimono il fatto che il prodotto scalare di tali righe per il generico vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è uguale a zero. Quindi il generico vettore è ortogonale a tutte le righe di A. Chiamando $\mathcal{L}(R)$ lo spazio generato dalle righe di A. L'insieme S delle soluzioni di $AX = \underline{0}$ coincide con $\mathcal{L}(R)^\perp$. E quindi per il teorema di Kronecker $\dim S = n - \dim \mathcal{L}(R) = n - \rho(A)$. 😊

5.4 Matrici di forme bilineari

Definizione 5.4.1: Matrice di forma bilineare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale, "$*$" una forma bilineare e $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base di $V_n(K)$. Si chiama **matrice della forma bilineare** "$*$" rispetto a B

$$A_B^* = \begin{pmatrix} e_1 * e_1 & e_1 * e_2 & \dots & e_1 * e_n \\ e_2 * e_1 & e_2 * e_2 & \dots & e_2 * e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n * e_1 & e_n * e_2 & \dots & e_n * e_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Si può indicare in modo più compatto con

$$A_B^* = (e_i * e_j)$$

N.B.

La matrice di una forma bilineare dipende dalla base fissata.

Proposizione 5.4.1

La matrice che rappresenta un prodotto scalare rispetto a una base qualsiasi è simmetrica.

Dimostrazione: $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ e "$\cdot$" è il prodotto scalare. Allora $A_B^{\cdot} = (e_i \cdot e_j) = (e_j \cdot e_i) = {}^t A_B^{\cdot}$. ☺

Proposizione 5.4.2

Sia "$\cdot$" un prodotto scalare su $V_n(K)$ e sia B una sua base. Sia $A_B^{\cdot}$ una matrice associata a "$\cdot$" rispetto alla base B. Allora

- B è ortogonale $\iff$ $A_B^{\cdot}$ è diagonale

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

- B è ortonormale $\iff$ $A_B^{\cdot} = I_n \in M_n(K)$

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad e_i \cdot e_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad a_{ii} = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Osservazione: Utilizzando la matrice associata ad una forma bilineare "$*$" è possibile calcolare

$$v * w \quad \forall v, w \in V_n(K)$$

.

Proposizione 5.4.3

Sia B una base di $V_n(K)$ e sia "$*$" una forma bilineare su V. Dette

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

le matrici colonne delle componenti rispettivamente di v e di $w \in V$ risulta:

$$v * w = {}^t X A_B^* Y$$

5.5 Matrici ortogonali e basi ortonormali

Definizione 5.5.1: Matrice ortogonale

Sia $A \in M_n(K)$ diciamo che A è **ortogonale** se ${}^tA = A^{-1}$. Quindi

$$A^tA = {}^tAA = I_n$$

Proposizione 5.5.1

Sia $A \in M_n(K)$ una matrice ortogonale. Allora $|A| \in \{-1, 1\}$

Dimostrazione:

$$|I_n| = 1 = |AA^{-1}| = |A^tA| = |A||^tA| = |A||A| = |A|^2$$
$$|A|^2 = 1 \iff |A| = \pm 1$$

😊

Proposizione 5.5.2

Sia $A \in M_n(K)$. A è ortogonale se, e soltanto se, le sue righe (o colonne) costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto scalare euclideo (dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$).

Dimostrazione: " $\Longrightarrow$ "

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \iff {}^tA = ({}^tR_1, \dots, {}^tR_n)$$

$$A^tA = I_n = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} ({}^tR_1, \dots, {}^tR_n) = \begin{pmatrix} R_1 \cdot R_1 & R_1 \cdot R_2 & \dots & R_1 \cdot R_n \\ R_2 \cdot R_1 & R_2 \cdot R_2 & \dots & R_2 \cdot R_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n \cdot R_1 & R_n \cdot R_2 & \dots & R_n \cdot R_n \end{pmatrix}$$

$$R_i \cdot R_j = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j, \quad R_i \cdot R_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Quindi le righe di A sono una base ortonormale. Il ragionamento è completamente analogo per le colonne.
" $\Longleftarrow$ " Si può dimostrare ripercorrendo le implicazioni al contrario. 😊

5.6 Matrici reali simmetriche

Teorema 5.6.1

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica allora

1. Gli autovalori di A sono tutti reali (teorema spettrale)
2. Gli autovettori di A relativi ad autospazi distinti sono ortogonali tra loro

Dimostrazione del punto 2: Siano x e y autovettori relativi ad autovalori λ e μ distinti. Quindi $AX = \lambda x$ e $AX = \mu y$. Sia $\lambda \neq 0$. Quindi

$$({}^tx^ty)\lambda = (\lambda^tx)y = {}^t(x\lambda)y = {}^t(Ax)y = \underbrace{({}^tx^tA)y = ({}^txA)y}_{\text{per la simmetria di } A} = {}^tx(Ay)$$

$$= {}^tx\mu y = \mu({}^txy) = \mu({}^tx^ty) \implies ({}^tx^ty)\lambda = ({}^tx^ty)\mu$$
$$\lambda k = \mu k \iff (\lambda - \mu)k = 0 \iff \mu = \lambda \quad \text{oppure} \quad {}^tx^ty = 0$$

ma $\mu \neq \lambda$ perché x e y stanno in autospazi distinti $\implies {}^tx^ty = 0 \implies x$ e y sono ortogonali. 😊

Corollario 5.6.1

Una matrice reale e simmetrica di ordine n ammette n autovalori contati con la loro molteplicità algebrica.

Definizione 5.6.1: Matrice ortogonalmente diagonalizzabile

Data $A \in M_n(K)$ è detta **ortogonalmente diagonalizzabile** se esistono D, matrice diagonale di ordine n, e P matrice ortogonale di ordine n tali che

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

Teorema 5.6.2

I seguenti fatti sono equivalenti

1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile;
2. $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di A;
3. A è una matrice reale e simmetrica.

Capitolo 6

Spazi affini

6.1 $A_n(K)$, spazio affine di dimensione n

Definizione 6.1.1: Spazio affine

Si dice **spazio affine** di dimensione n sul campo K, e si indica $\mathring{A}_n(K)$, la struttura costituita da

1. un insieme non vuoto A, detto insieme dei punti
2. uno spazio vettoriale $V_n(K)$
3. un'applicazione
$$f: \quad A \times A \to V_n(K)$$
con le seguenti proprietà
   (a) $\forall P \in A \; e \; \forall v \in V \quad \exists! \; Q \in A : \quad f(P,Q) = \vec{PQ} = v$
   (b) $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \quad \forall P, Q, R \in A$

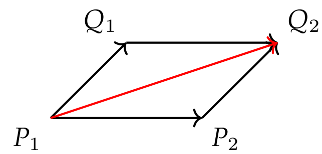
Proposizione 6.1.1

In $A_n(K)$, per ogni P, Q e $R \in A$

1. il vettore $\vec{RR} = \underline{0}$
2. $\vec{PQ} = \vec{PR} \iff Q = R$
3. $\vec{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
4. $v = \vec{PQ} \implies -v = \vec{QP}$
5. $\forall P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in A$ risulta $\vec{P_1P_2} = \vec{Q_1Q_2} \iff \vec{P_1Q_1} = \vec{P_2Q_2}$

Dimostrazione: Dimostriamo ogni punto separatamente

1. $\vec{RR} + \vec{RR} = \vec{RR}$ perciò $2\vec{RR} = \vec{RR} \iff \vec{RR} = \underline{0}$
2. posto $v = \vec{PQ}$ allora $v = \vec{PR}$, ma $\exists! \; Q : \; \vec{PQ} = v \implies R = Q$
3. per la proprietà 1 $\vec{RR} = \underline{0} \implies$ per l'unicità di $Q : \vec{PQ} = \underline{0} \implies Q = P$
4. $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \underline{0} \implies \vec{PQ} = -\vec{QP}$
5. ovvio, essendo $\vec{P_1P_2} + \vec{P_2Q_2} = \vec{P_1Q_2} = \vec{P_1Q_1} + \vec{Q_1Q_2}$



Definizione 6.1.2: Sottospazio affine

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio affine** di dimensione $m \leq n$ una struttura data da

1. $\emptyset \neq A' \subseteq A$, detto **sostegno del sottospazio affine**
2. $V_m(K)$ sottospazio di $V_n(K)$
3. la restrizione dell'applicazione f ad $A' \times A'$ troncata a $V_m(K)$, purché questa sia ancora un'applicazione che gode delle proprietà elencate nella definizione di spazio affine

Definizione 6.1.3: Traslazione

Fissato un vettore $v \in V_n(K)$ si dice **traslazione**, individuata da v, la corrispondenza

$$t_v : A \longrightarrow A \quad e \quad P \longrightarrow Q$$

che associa a un punto $P \in A$ il punto Q traslato di P mediante il vettore v.

Osservazione: $\forall v \in V_n(K)$ la mappa t_v è una biiezione di A, insieme di punti di $(A, V_n(K), f)$. E l'inversa di t_v è t_{-v}.

Definizione 6.1.4: Sottospazio lineare

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio lineare** l'insieme dei traslati di un punto P, detto **origine**, mediante i vettori $v \in V_h(K) \leq V_n(K)$, con h detta dimensione del sottospazio lineare. Inoltre si denota con $S_h = [P, V_h(K)]$ il sottospazio lineare dato dal punto P e dallo spazio di traslazione V_h.

Definizione 6.1.5: Punti, rette, piani e iperpiani

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dicono

- **punti** i sottospazi lineari di dimensione 0

$$S_0 = [P, \{\underline{0}\}] = \{P\}$$

- **rette** i sottospazi lineari di dimensione 1

$$S_1 = [P, \mathcal{L}(v)] \quad \text{con } v \neq \underline{0} \quad e \quad v \in V_n(K)$$

- **piani** i sottospazi lineari di dimensione 2

$$S_2 = [P, \mathcal{L}(v_1, v_2)] \quad \text{con } v_1, v_2 \neq \underline{0} \quad e \quad v_1, v_2 \in V_n(K)$$

- **iperpiani** sono i sottospazi di dimensione $n - 1$

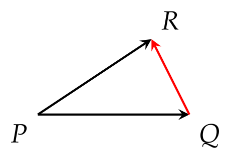
Proposizione 6.1.2

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di dimensione h sottospazio di $A_n(K)$.

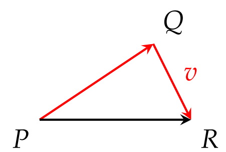
1. siano $Q, R \in S_h \implies \vec{QR} \in V_h(K)$
2. se $Q \in S_h$ e $v \in V_h$, allora $R = t_v(Q) \in S_h$

Dimostrazione: Dimostriamo entrambi i punti separatamente

1. Per ipotesi $Q \in S_h$, quindi $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h(K)$. $v = \vec{PQ} \in V_h$ e analogamente $\vec{PR} \in V_h$. Ma allora $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h$.

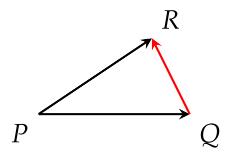


2. Poiché $Q \in S_h$, $\vec{PQ} \in V_h$. Allora $\vec{PR} + \vec{QR} = \vec{PQ} + \vec{v} \in V_h \implies \vec{PR} \in V_h$. Posto $w = \vec{PR}$, $t_w(P) = R$ con $w \in V_h \implies R \in S_h$.



Proposizione 6.1.3
Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di $A_n(K)$. Ogni punto di S_h può essere scelto come origine di S_h. Cioè dato $Q \in S_h$ abbiamo che $[Q, V_h(K)] = S_h$.

Dimostrazione: Sia $R \in S_h$. Allora $\vec{PR} \in V_n$ e $\vec{PQ} \in V_n$. Quindi $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h \implies \vec{QR} \in V_h$.



Detto $w = \vec{QR}$ abbiamo che $R = t_v(Q)$. R è traslato di Q tramite il vettore $w \in V_h \implies R \in [Q, V_h]$, quindi

$$S_h \subseteq [Q, V_h]$$

con lo stesso ragionamento scambiamo P e Q si dimostra che

$$[Q, V_h] \subseteq [P, V_h] = S_h$$

e ciò vale solo se $S_h = [Q, V_h]$.

Proposizione 6.1.4
Siano S_h e S_k due sottospazi lineari di $A_n(K)$. Allora $S_h \subseteq S_k \iff S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e $V_h \leq V_k$.

Dimostrazione: " $\implies$ " Ovviamente $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Potremo scrivere $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. Sia $v \in V_h$ e sia $Q = t_v(P) \in S_h \subseteq S_k \implies Q \in S_k$ e sia $Q = t_v(P)$ ovvero $\vec{PQ} = v \in V_k \implies V_h \leq V_k$.
" $\impliedby$ " Sia $P \in S_h \implies [P, V_h] \subseteq [P, V_k]$ (poiché per ipotesi $V_h \subseteq V_k$) $[P, V_h] = S_h$ e $[P, V_k] = S_k \implies S_h \subseteq S_k$.

Proposizione 6.1.5

Siano S_h e S_k sottospazi lineari di $A_n(K)$. Sia $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Allora

$$S_h \cap S_k = [P, V_h \cap V_k]$$

Dimostrazione: Sia $Q \in S_h \cap S_k$. Osserviamo che $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h$ (perché $Q \in S_h$). Ma $Q = t_v(P)$ con $v \in V_k$ (perché $Q \in S_k$). Quindi $Q \in [P, V_h \cap V_k]$ perché $v \in V_h \cap V_k$, cioè

$$S_h \cap S_k \subseteq [P, V_h \cap V_k]$$

Viceversa dato $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h \cap V_k \implies Q$ appartiene sia a S_h che ad S_k, quindi $Q \in S_h \cap S_k$, ovvero

$$[P, V_h \cap V_k] \subseteq S_h \cap S_k$$

$$\implies [P, V_h \cap V_k] = S_h \cap S_k$$

😃

Definizione 6.1.6: Parallelismo tra sottospazi

Due sottospazi lineari, $S_p = [P, V_p]$ ed $S_q = [Q, V_q]$, di $A_n(K)$ si dicono **paralleli**, e si scrive $S_p || S_q$, se i rispettivi spazi di traslazione sono confrontabili, ovvero quando $V_p \subseteq V_q$, oppure $V_q \subseteq V_p$.

Osservazione 1: La relazione di parallelismo non è transitiva. E' invece riflessiva e simmetrica. Non è quindi una relazione d'equivalenza.

Osservazione 2: Due sottospazi lineari della stessa dimensione sono paralleli se, e soltanto se, hanno lo stesso spazio di traslazione. Quindi la relazione di parallelismo considerata tra spazi della stessa dimensione è una relazione d'equivalenza.

Proposizione 6.1.6

Due sottospazi lineari paralleli e di uguale dimensione o coincidono oppure hanno intersezione vuota.

Definizione 6.1.7

- Sia $S = [P, V_1]$ una retta. Lo spazio V_1 si dice **direzione** della retta S. Quindi due rette sono parallele se, e soltanto se, hanno la stessa direzione
- Sia $\pi = [P, V_2] \subseteq A_n(K)$ con $n \geq 2$. Lo spazio V_2 è detto **giacitura** di π. Quindi due piani sono paralleli se, e soltanto se, hanno la stessa giacitura.
- Tre o più punti si dicono **allineati** se esiste una retta che li contiene tutti.
- Due o più rette si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene tutte.

6.2 Proprietà di punti, rette e piani

Proposizione 6.2.1

In $A_n(k)$, con $n \geq 2$

1. per ogni due punti distinti passa un'unica retta
2. per due rette distinte, parallele o incidenti, passa un unico piano
3. due rette complanari, aventi intersezione vuota, sono parallele
4. per un punto passa un'unica retta parallela a una retta data (V Postulato di Euclide)

5. per un punto passa un unico piano, parallelo ad un piano dato
6. per tre punti, non allineati, passa un unico piano
7. una retta, avente due punti distinti in un piano, giace nel piano
8. per un punto passano almeno due rette distinte

Proposizione 6.2.2
In $A_3(K)$,

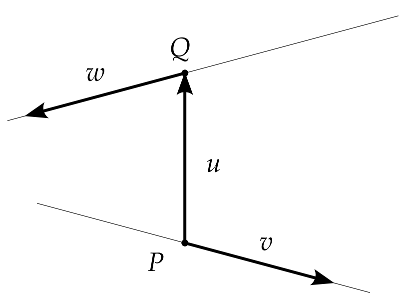
1. una retta e un piano, aventi intersezione vuota, sono paralleli
2. due piani, aventi intersezione vuota, sono paralleli
3. due piani distinti, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta per quel punto
4. per una retta passano almeno due piani distinti

Definizione 6.2.1: Rette sghembe

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, due rette non complanari si dicono **sghembe**.

Proposizione 6.2.3
In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, esistono due rette r_1 e r_2 sghembe tra loro. Inoltre due rette sghembe r_1 e r_2, sono contenute su due piani π_1 e π_2 paralleli tra loro e distinti.

Dimostrazione: Per ipotesi, $A_n(K)$ ha dimensione almeno 3, quindi esistono nello spazio vettoriale $V_n(K)$ almeno 3 vettori linearmente indipendenti. Siano essi u, v, w. Siano inoltre, P un punto di A e Q il traslato di P mediante il vettore u ($Q = t_u(P)$). Dimostriamo che le rette $r = [P, \mathcal{L}(v)]$ ed $s = [Q, \mathcal{L}(w)]$ sono sghembe. Se infatti, esistesse un piano $\pi = [P, V_2]$ che le contiene entrambe, lo spazio di traslazione di π conterrebbe 3 vettori linearmente indipendenti, cioè v, w e $u = \vec{PQ}$ e ciò è un **assurdo!** Siano ora $t = [T, \mathcal{L}(v)]$ e $t' = [T', \mathcal{L}(v')]$ due



rette sghembe. I vettori v e v' generano uno spazio vettoriale V_2 di dimensione 2. Pertanto, i piani $\pi = [T, V_2]$ e $\pi' = [T', V_2]$, che risultano paralleli, sono distinti e contengono, rispettivamente le rette t e t'. 😊

6.3 Geometria analitica in $A_n(\mathbb{R})$

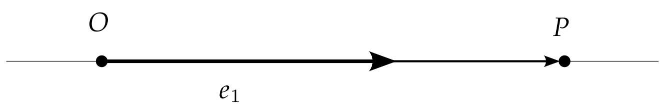
Definizione 6.3.1: Riferimento affine

Si dice **riferimento affine** di $A_n(\mathbb{R})$ una coppia $RA = [O, B]$ costituita da un punto O fissato, detto origine, e da una base B dello spazio vettoriale $V_n(\mathbb{R})$.

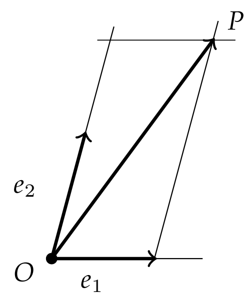
Definizione 6.3.2: Coordinate

Fissato, in $A_n(\mathbb{R})$, un riferimento affine $RA = [O, B]$, si dicono **coordinate** del punto P in RA le componenti, in B, del vettore $\vec{OP}$ e si scrive $P = (x_i)_{i \in I_n}$.

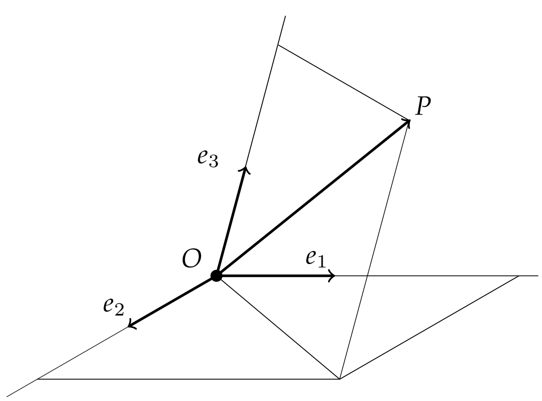
1. In $A_1(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1)$ è una base di $V_1(\mathbb{R})$. Se $\vec{OP} = xe_1$, si scrive $P = (x)$ e si dice che x è l'**ascissa** del punto P in RA.



2. In $A_2(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1, e_2)$ è una base di $V_2(\mathbb{R})$. La retta $[O, \mathcal{L}(e_1)]$ è detta **asse delle ascisse** e la retta $[O, \mathcal{L}(e_2)]$ è detta **asse delle ordinate**. Se $\vec{OP} = xe_1 + ye_2$, si scrive $P = (x, y)$ e si dice che (x, y) è la coppia delle coordinate di P in RA, dette rispettivamente **ascissa** e **ordinata** del punto P.



3. In $A_3(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1, e_2, e_3)$ è una base di $V_3(\mathbb{R})$. La retta $[O, \mathcal{L}(e_1)]$ è detta **asse delle ascisse**, la retta $[O, \mathcal{L}(e_2)]$ è detta **asse delle ordinate** e la retta $[O, \mathcal{L}(e_3)]$ è detta **asse delle quote**. Sono detti **piani coordinati** i piani $xy = [O, \mathcal{L}(e_1, e_2)], xz = [O, \mathcal{L}(e_1, e_3)]$ e $yz = [O, \mathcal{L}(e_2, e_3)]$. Inoltre, se $\vec{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, si scrive $P = (x, y, z)$ e si dice che (x, y, z) è la terna delle coordinate di P in RA, dette rispettivamente **ascissa, ordinata** e **quota** del punto P.



Teorema 6.3.1

In $A_n(K)$, con $RA = [O, B]$, siano $P = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ e $Q = (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ due punti di A. Allora le componenti di $\vec{PQ}$ rispetto a B sono

$$(x''_1 - x'_1, x''_2 - x'_2, \ldots, x''_n - x'_n)$$

Dimostrazione: Posti due vettori

$$\vec{OP} : \ x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \ldots + x'_n e_n$$

$$\vec{OQ} : \ x''_1 e_1 + x''_2 e_2 + \ldots + x''_n e_n$$

Per la proprietà della definizione di spazio affine possiamo dire che

$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \sum_{i \in I_n} (x''_i - x'_i) e_i$$

Posti

$$X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ e } T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

si ottiene l'equivalente, ma spesso più agevole, forma matriciale:

$$X'' - X' = T$$

che può essere riscritta come

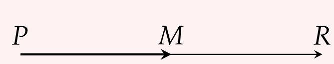
$$X'' = X' + T$$

Da quest'ultima equazione si vede che le coordinate del traslato del punto $P = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, attraverso il vettore v di componenti $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, si ottengono sommando, ordinatamente, alle coordinate di P le componenti del vettore di traslazione. Per questo le relazioni che compaiono nell'equazione sono anche dette **equazioni della traslazione individuata da** v.

Definizione 6.3.3: Punto medio

Dato P e $Q \in A$ (insieme dei punti di $A_n(\mathbb{R})$), definiamo il punto medio del segmento $[PQ]$ come

$$M = t_{1/2\vec{PQ}}(P)$$



Proposizione 6.3.1

Dati $P, Q \in A$ e dato un riferimento affine $RA = [O, B]$ abbiamo che le coordinate del punto medio di P e Q sono le semisomme delle coordinate omonime di P e di Q.

Definizione 6.3.4: Punto simmetrico

In $A_n(\mathbb{R})$ dati i punti P e C diremo che S è il **punto simmetrico** di P rispetto a C se C è il punto medio di $[P, S]$.

6.4 Rappresentazioni analitiche

Definizione 6.4.1: Equazioni parametriche di una retta in $A_n(\mathbb{R})$

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento fissato in $A_n(\mathbb{R})$, ove $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Sia $r = [P, V_1 = \mathcal{L}(v)]$ la retta di origine il punto $P = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ e spazio di traslazione generato da $v = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$. Il generico vettore w di $\mathcal{L}(v)$ è proporzionale al vettore v, cioè $w = tv$, con $t \in \mathbb{R}$, quindi, $w = (tl_1, tl_2, \ldots, tl_n)$. Dato che la retta r è il luogo dei traslati di P attraverso i vettori di $\mathcal{L}(v)$, applicando le equazioni del teorema precedente si ottengono le coordinate del generico punto di r

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + l_1 t \\ x_2 = x'_2 + l_2 t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x'_n + l_n t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (l_1, l_2, \ldots, l_n) \neq \underline{0}$$

tali equazioni sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_n(\mathbb{R})$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si ottengono le coordinate di tutti i punti di una retta e, quindi, tutti i punti di una retta sono ∞^1.

Definizione 6.4.2: Parametri direttori

Si dicono **parametri direttori** di $r = [P, V_1]$, le componenti di un qualunque vettore nullo di V_1.

Osservazione: I parametri direttori di una retta sono, quindi, determinati a meno di un fattore non nullo di proporzionalità. Definiamo la classe dei parametri direttori di r come $p.d.r = [(l_1, l_2, \ldots, l_n)]$ con $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ un qualsiasi vettore appartenente a V_1.

Equazioni parametriche di una retta in $A_2(\mathbb{R})$

In $A_2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento $RA = [O, B]$, ove $B = (e_1, e_2)$. Una retta $r = [P, V_1]$ è il luogo dei traslati di un punto P mediante i vettori di $V_1 \subset V_2$. Se P ha coordinate (x_0, y_0) e $V_1 = \mathcal{L}(v)$, ove $v = le_1 + me_2$, le equazioni della definizione diventano

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad \text{ove} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (l, m) \neq (0, 0)$$

e sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_2(\mathbb{R})$.

Equazioni parametriche di una retta in $A_3(\mathbb{R})$

In $A_3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento $RA = [O, B]$, ove $B = (e_1, e_2, e_3)$. Una retta $r = [P, V_1]$ è il luogo dei traslati di un punto P mediante i vettori di $V_1 \subset V_3$. Se P ha coordinate (x_0, y_0, z_0) e $V_1 = \mathcal{L}(v)$, ove $v = le_1 + me_2 + ne_3$, le equazioni della definizione diventano

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{ove} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$$

e sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_3(\mathbb{R})$.

Osservazione: In modo del tutto analogo possiamo determinare le equazioni parametriche di sottospazi lineari di dimensione n, che quindi dipenderanno da n parametri.

Equazione cartesiana di una retta in $A_2(\mathbb{R})$

In $A_2(\mathbb{R})$ una retta si può rappresentare attraverso le sue equazioni parametriche in questo modo

$$\begin{cases} x = x_p + lt \\ y = y_p + mt \end{cases}$$

possiamo convertire questo sistema lineare in forma matriciale e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} x - x_p & y - y_p \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

Quindi vale la relazione

$$((x - x_p)m)(l(y - y_p)) = mx - ly - mx_p + ly_p = 0$$

Possiamo raggruppare i termini noti $-mx_p + ly_p$ in un generico termine c e quindi l'equazione cartesiana della retta diventa

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

Quindi i parametri direttori della generica retta r saranno $p.d.r = [(l, m)] = [(-b, a)]$.

Mutua posizione di due rette in $A_2(\mathbb{R})$

Siano due rette

$$r : ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

$$s : a'x + b'y + c' = 0 \quad (a', b') \neq (0, 0)$$

La loro intersezione può essere

$$r \cap s = \begin{cases} \text{un unico punto se } r \text{ e } s \text{ sono incidenti} \\ \emptyset \text{ se } r \text{ e } s \text{ sono parallele e distinte} \\ r \equiv s \text{ se sono coincidenti} \end{cases}$$

Consideriamo il sistema

$$r \cap s = \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Le coordinate dei punti di $r \cap s$ sono le soluzioni del sistema. Posti

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \text{la matrice incompleta del sistema,} \quad A|B = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} \quad \text{la matrice completa del sistema}$$

possiamo dire che $\rho(A) \geq 1$ poiché abbiamo richiesto che $(a, b) \neq (0, 0)$ e $\rho(A) \leq 2$. Quindi abbiamo due casi possibili

1. se $\rho(A) = 2 \implies \rho(A) = \rho(A|B) = 2$, quindi il sistema è compatibile e ha ∞^{2-2} soluzioni $\implies \exists!$ soluzione del sistema $\implies r \cap s = \{P\} \implies r \cap s$ sono **incidenti**.
2. se $\rho(A) = 1$ allora $r||s$, ma non sappiamo se esse siano parallele e distinte o se esse coincidano. Perciò dobbiamo suddividere in due sottocasi
   (a) se fossero parallele e distinte il sistema non sarebbe compatibile, perciò $2 = \rho(A|B) > \rho(A) = 1$
   (b) se invece $\rho(A) = 1$ e $\rho(B) = 1$ il sistema ammette ∞^{2-1} soluzioni, perciò $r \equiv s \implies r||s$ se $\rho(A) = 1$

Fasci di rette in $A_2(\mathbb{R})$

Definizione 6.4.3: Fascio improprio di rette

Si dice **fascio improprio di rette** l'insieme di tutte e sole le rette del piano $A_2(\mathbb{R})$ parallele ad una retta data.

Proposizione 6.4.1

Una retta appartiene al fascio improprio di rette parallele alla retta $r = [P, V_1] : ax + by + c = 0,\ (a, b) \neq$

$(0,0)$, se, e soltanto se, ha un'equazione del tipo

$$ax + by + k = 0 \quad \text{ove} \quad k \in \mathbb{R}$$

detta **equazione del fascio improprio di rette**. Da cui si deduce che le rette di un fascio improprio di rette sono ∞^1

Osservazione: Tutte e sole le rette parallele ad r hanno parametri direttori $[(-b, a)]$ e quindi r e s sono la stessa retta $\iff (a, b, c) \sim (a', b', c')$.

Definizione 6.4.4: Fascio proprio di rette

Si dice **fascio proprio di rette** l'insieme di tutte le rette di $A_2(\mathbb{R})$ passanti per un punto P dato, detto **centro** o **sostegno** del fascio.

Proposizione 6.4.2

Siano $r : ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$, due distinte rette incidenti in un punto P. Una retta s appartiene al fascio di centro P se, e soltanto se, ha un'equazione di tipo

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \quad \text{ove} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad e \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

detta **equazione del fascio proprio di rette**. Se nell'equazione risulta $\lambda \neq 0$, posto $k = \mu/\lambda$, si ottiene

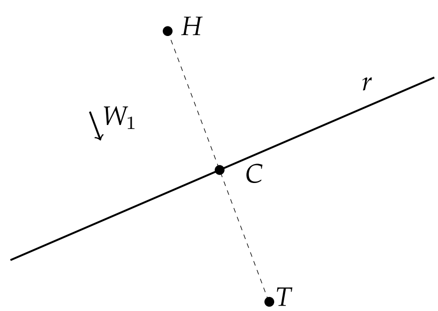
$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0 \quad \text{ove} \quad k \in \mathbb{R}$$

detta **equazione ridotta del fascio proprio di rette**, in cui, ovviamente, la retta $r' : a'x + b'y + c' = 0$ non è rappresentata. Quindi possiamo dire che le rette di un fascio proprio di rette sono ∞^1.

Simmetrie in $A_2(\mathbb{R})$

Definizione 6.4.5: Simmetria rispetto ad una retta

Il punto T si dice **simmetrico** del punto H, rispetto alla retta $r = [P, V_1]$, detta **asse di simmetria**, nella direzione $W_1 \neq V_1$, se lo è nella simmetria di centro $C = r \cap s$, dove $s = [H, W_1]$. Tale simmetria si dice anche **simmetria rispetto ad una retta in una direzione assegnata**.



Equazione cartesiana di un piano in $A_3(\mathbb{R})$

In $A_3(\mathbb{R})$ dato il $RA = [O, B]$, con $B = (e_1, e_2, e_3)$. Sia $\alpha = [P, V_2]$ un piano con $P = (x_p, y_p, z_p)$ e $V_2 = \mathcal{L}(v, v')$ (con $v \neq kv'$), tali che

$$v = le_1 + me_2 + ne_3 \qquad v' = l'e_1 + m'e_2 + n'e_3$$

Il generico vettore $w \in V_2$ si scrive come $w = tv + t'v'$. Quindi $t_w(P)$ è il generico punto appartenente a α. Di conseguenza possiamo dire che

$$\begin{cases} x = x_p + tl + t'l' \\ y = y_p + tm + t'm' \\ z = z_p + tn + t'n' \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tl + t'l' \\ tm + t'm' \\ tn + t'm' \end{pmatrix}$$

cioè, per l'equazione della traslazione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sono le coordinate del generico punto di α. Date dalla somma di $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$ cioè le coordinate di P con $\begin{pmatrix} tl + t'l' \\ tm + t'm' \\ tn + t'n' \end{pmatrix}$ cioè le componenti di w.

Seguendo un ragionamento analogo a quello fatto per le rette in $A_2(\mathbb{R})$ possiamo descrivere un piano in $A_3(\mathbb{R})$ come

$$\begin{vmatrix} x - x_p & y - y_p & z - z_p \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

e da questa ne ricaviamo la seguente equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

detta **equazione cartesiana** del piano in $A_3(\mathbb{R})$. Tale equazione è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Equazioni cartesiane delle rette in $A_3(\mathbb{R})$

Fissiamo un $RA = [O, B]$ con $B = (e_1, e_2, e_3)$ e data una retta $r = [P, V_1 = \mathcal{L}(l, m, n)]$ possiamo scrivere l'equazione parametrica della retta

$$r : \begin{cases} x = x_p + tl \\ y = y_p + tm \\ z = z_p + tn \end{cases} \quad \text{con} \quad (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$$

Da cui deriva la seguente relazione

$$\frac{x - x_p}{l} = \frac{y - y_p}{m} = \frac{z - z_p}{n}$$

in particolare, se poniamo ad esempio $l \neq 0$, otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = \frac{m}{l}(x - x_p) + y_p \\ z = \frac{n}{l}(x - x_p) + z_p \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{m}{l}x + k \\ z = \frac{n}{l}x + h \end{cases} \quad \text{ove} \quad h, k \in \mathbb{R}$$

esistono, ovviamente le equazioni relative ai casi $m \neq 0$ e $n \neq 0$ e, dato che la terna (l, m, n) è non nulla, ogni retta ammette sempre, almeno, una rappresentazione simile. In ogni caso, qualunque essa sia, possiamo concludere che una retta si rappresenta con un sistema di due equazioni lineari nelle incognite x, y e z, in cui il rango della matrice incompleta è uguale a 2. E infatti sussiste anche il viceversa, cioè

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

rappresenta una retta. Infatti per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni, cioè le sue soluzioni dipendono da un solo parametro.

Analogamente a quanto già osservato in $A_2(\mathbb{R})$, dalla precedente equazione deriva che le componenti, dei vettori dello spazio di traslazione della retta r, sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a una rappresentazione cartesiana di r stessa. Quindi possiamo dedurre la classe dei parametri direttori della retta r attraverso la regola dei minori. L'insieme delle ∞^1 soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

è

$$\left\{\left(t\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -t\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, t\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right) : \ t \in R\right\}$$

Mutua posizione di due piani in $A_3(\mathbb{R})$

Fissato un RA e dati due piani in $A_3(\mathbb{R})$

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad \alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

la loro intersezione è data dal sistema

$$\alpha \cap \alpha' : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo distinguere in 3 casi:

1. $\rho(A) = 2 \implies \rho(A) = \rho(A|B) = 2$ quindi il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni $\implies \alpha \cap \alpha' = r$, quindi α e α' sono due piani **incidenti**.

2. Nel caso in cui $\rho(A) = 1$ dobbiamo distinguere in due sottocasi

   (a) $\rho(A|B) = 2$ e $\rho(A) = 1$, il sistema non è compatibile, quindi $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$ e α è parallelo e distinto da α'. α e α' sono detti **paralleli e distinti**.

   (b) $\rho(A) = 1$ e $\rho(A|B) = 1$, il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni. Quindi l'insieme delle soluzioni dipende da due parametri $\implies \alpha \equiv \alpha'$.

Proposizione 6.4.3 Condizione di parallelismo tra piani

$\alpha || \alpha' \iff \rho(A) = 1 \iff a = ka' \ b = kb' \ c = kc' \iff [(a, b, c)] = [(ka', kb', kc')] = [(a', b', c')]$. Questa viene denominata condizione analitica di parallelismo tra piani.

Fasci di piani in $A_3(\mathbb{R})$

Definizione 6.4.6: Fascio improprio di piani

Si dice **fascio improprio di piani** l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ paralleli a un piano dato.

Proposizione 6.4.4

Un piano appartiene al fascio improprio di piani paralleli ad $\alpha = [P, V_2] : ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, se, e soltanto se, ha un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + k = 0 \quad \text{ove} \quad k \in \mathbb{R}$$

detta **equazione del fascio improprio di piani**. I piani di un fascio improprio sono ∞^1.

Definizione 6.4.7: Fascio proprio di piani

Si dice **fascio proprio di piani**, l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ passanti per una retta data r, detta **asse** o **sostegno** del fascio.

Proposizione 6.4.5

Siano r una retta, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, due distinti piani per r. Un piano β appartiene al fascio di sostegno r se, e soltanto se, ha un'equazione del tipo

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0 \quad \text{ove} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \quad e \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

detta **equazione del fascio proprio di piani**. Se nell'equazione risulta $\lambda \neq 0$, posto $h=\mu/\lambda$, si ottiene

$$ax+by+cz+d+h(a'x+b'y+c'z+d')=0 \quad \text{ove} \quad h\in\mathbb{R}$$

detta **equazione ridotta del fascio proprio di piani**, in cui ovviamente il piano $\beta : a'x+b'y+c'z+d'=0$ non è rappresentato. Dalla rappresentazione ridotta del fascio si deduce che i piani di un fascio proprio sono ∞^1.

Mutua posizione di due rette in $A_3(\mathbb{R})$

Siano assegnate le rette

$$r:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases} \qquad \rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c'\end{pmatrix}=2$$

$$s:\begin{cases} a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0\end{cases} \qquad \rho\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c'''\end{pmatrix}=2$$

Sia

$$r\cap s:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0\end{cases}$$

il sistema costituito dalle loro equazioni e siano A e $A|B$ le matrici incompleta e completa associate al sistema.

$$AX=B \quad \text{con} \quad B=\begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \\ -d'''\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c'''\end{pmatrix}$$

Esaminiamo i 4 casi possibili:

1. $\rho(A|B)=4 \implies \rho(A)=3$ poiché $A|B$ è ottenuta aggiungendo una colonna ad A, quindi $\rho(A|B)\leq\rho(A)+1 \implies \rho(A)=3$. Il sistema non è compatibile per il teorema di Rouché-Capelli $\implies r$ e s sono o parallele e disgiunte, oppure sghembe. Ma siccome $\rho(A)=3 \implies r=[P,V_1] \quad s=[P',V_1'] \quad V_1\neq V_1' \implies r$ non è parallela ad s. Quindi r e s sono **sghembe**.

2. $\rho(A|B)=3$ e $\rho(A)=3$. Il sistema è compatibile e per il teorema di Rouché-Capelli esiste un'unica soluzione $r\cap s=\{P\} \implies r$ e s si dicono **incidenti**.

3. $\rho(A|B)=3$ e $\rho(A)=2$. Il sistema non è compatibile per il teorema di R.C. Siccome $\rho(A)=2 \implies V_1=V_1' \implies r$ è parallela a s e $r\neq s$. Si dice che r e s sono **parallele e distinte**.

4. $\rho(A|B)=\rho(A)=2$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni. Si dice che le rette r e s sono **coincidenti**.

Definizione 6.4.8: Stella propria di rette

In $A_3(\mathbb{R})$ si dice **stella propria** di rette, l'insieme di tutte e sole le rette passanti per un ponto assegnato.

Osservazione: Possiamo scrivere la rappresentazione di tutte e sole le rette della stella passanti per $P = (x_0, y_0, z_0)$ come

$$\alpha : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

e da qui abbiamo che

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = \begin{cases} m(x - x_0) = l(y - y_0) \\ n(x - x_0) = l(z - z_0) \end{cases}$$

dividendo per l (supponendo $l \neq 0$) si ottiene che abbiamo solo due parametri liberi e quindi abbiamo ∞^2 rette nella stella di rette per P.

Definizione 6.4.9: Stella impropria di rette

In $A_3(\mathbb{R})$ si dice **stella impropria** di rette, l'insieme di tutte e sole le rette parallele ad una retta data.

Osservazione: Una rappresentazione analitica di tutte le rette parallele a una retta assegnata, di parametri direttori (l, m, n), è

$$\beta : \begin{cases} x = x' + tl \\ y = y' + tm \\ z = z' + tn \end{cases} \iff \begin{cases} m(x - x') = l(y - y') \\ n(x - x') = l(z - z') \end{cases}$$

Questa volta non sono i parametri direttori ad essere i parametri, ma i punti di $P = (x', y', z')$. Quest'ultima è detta **equazione cartesiana della stella impropria** di r. Abbiamo ∞^2 rette in $A_3(\mathbb{R})$ parallele ad una retta data.

Mutua posizione di due piani in $A_3(\mathbb{R})$

Siano

$$\alpha = [P, V_2] : ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$r = [Q, V_1] : \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

e sia $r \cap \alpha$ rappresentato dal sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sono 3 i casi possibili

1. sia $\rho(A|B) = \rho(A) = 3$, il sistema è compatibile e, per il teorema di R.C. ammette un'unica soluzione $r \cap \alpha = \{P\} \implies r$ e α si dicono **incidenti**
2. $\rho(A|B) = 3$ e $\rho(A) = 2$, il sistema non è compatibile, quindi $r || \alpha$ e $r \notin \alpha$
3. $\rho(A|B) = 2$ e $\rho(A) = 2$, il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni, quindi r è contenuto in α(r è anche chiaramente parallelo ad α)

Osservazione: $\rho(A) = 2 \iff r || \alpha$ ovvero

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \iff a \underbrace{\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}}_{\Gamma_1 \to l} - b \underbrace{\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}}_{\Gamma_2 \to m} + c \underbrace{\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}}_{\Gamma_3 \to n} = 0$$

Quindi posti i parametri direttori $[(l, m, n)]$ possiamo dare la

Proposizione 6.4.6 Condizione di parallelismo tra retta e piano

La condizione di parallelismo tra retta e piano si esprime come

$$al + bm + cn = 0$$

dove $[(l, m, n)]$ sono i parametri direttori della retta e il piano è $ax + by + cz + d = 0$.

Definizione 6.4.10: Stella impropria di piani

Si dice **stella impropria di piani** l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ paralleli ad una retta data.

Osservazione: Chiaramente dalla proposizione precedente segue che dati parametri direttori $[(l, m, n)]$ abbiamo che esistono ∞^2 piani appartenenti alla stella impropria di piani.

Definizione 6.4.11: Stella propria di piani

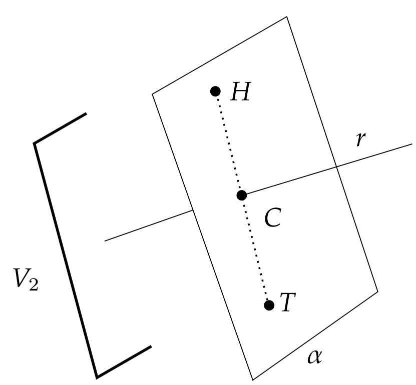
Si dice **stella propria di piani** l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ passanti per un punto assegnato detto **centro** o **sostegno** della stella.

Osservazione: Analogamente abbiamo ∞^2 piani nella stella propria di piani.

Simmetrie in $A_3(\mathbb{R})$

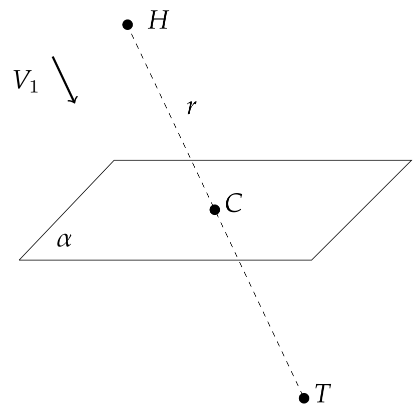
Definizione 6.4.12: Simmetrico rispetto a una retta e una giacitura assegnata

Il punto T si dice **simmetrico** del punto H, rispetto alla retta $r = [Q, V_1]$, nella giacitura $V_2 \not\supseteq V_1$, se è simmetrico di H rispetto al punto $C = \alpha \cap r$, dove $\alpha = [H, V_2]$.



Definizione 6.4.13: Simmetria rispetto a un piano in una direzione assegnata

Un punto T si dice **simmetrico** del punto H, rispetto al piano$\alpha = [Q, V_2]$, nella direzione $V_1 \not\supseteq V_2$, se è simmetrico di H rispetto al punto $C = \alpha \cap r$, dove $r = [H, V_1]$.



6.5 Curve e superfici algebriche

Definizione 6.5.1: Curva algebrica reale

Si dice **curva algebrica reale** di $A_2(\mathbb{R})$ l'insieme dei punti del piano $A_2(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$, dove f è un polinomio a coefficienti reali e non costante nelle variabili x e y.

Definizione 6.5.2: Superficie algebrica reale

Si dice **superficie algebrica reale** di $A_3(\mathbb{R})$ l'insieme dei punti di $A_3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$ dove f è un polinomio a coefficienti reali e non costante nelle variabili x, y, z.

Definizione 6.5.3: Curva algebrica reale

Si dice **curva algebrica reale** di $A_3(\mathbb{R})$ l'insieme dei punti di $A_3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano un sistema delle equazioni di due superfici algebriche reali che in essa si intersecano.