Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Spazi affini

1.1 $A_n(K)$, spazio affine di dimensione n

Definizione 1.1.1: Spazio affine

Si dice **spazio affine** di dimensione n sul campo K, e si indica $\mathring{A}_n(K)$, la struttura costituita da

1. un insieme non vuoto A, detto insieme dei punti
2. uno spazio vettoriale $V_n(K)$
3. un'applicazione
$$f: \quad A \times A \to V_n(K)$$
con le seguenti proprietà
   (a) $\forall P \in A \; e \; \forall v \in V \quad \exists! \; Q \in A: \quad f(P,Q) = \vec{PQ} = v$
   (b) $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \quad \forall P, Q, R \in A$

Proposizione 1.1.1
In $A_n(K)$, per ogni P, Q e $R \in A$

1. il vettore $\vec{RR} = \underline{0}$
2. $\vec{PQ} = \vec{PR} \iff Q = R$
3. $\vec{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
4. $v = \vec{PQ} \implies -v = \vec{QP}$
5. $\forall P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in A$ risulta $\vec{P_1P_2} = \vec{Q_1Q_2} \iff \vec{P_1Q_1} = \vec{P_2Q_2}$

Dimostrazione: Dimostriamo ogni punto separatamente

1. $\vec{RR} + \vec{RR} = \vec{RR}$ perciò $2\vec{RR} = \vec{RR} \iff \vec{RR} = \underline{0}$
2. posto $v = \vec{PQ}$ allora $v = \vec{PR}$, ma $\exists! \; Q: \; \vec{PQ} = v \implies R = Q$
3. per la proprietà 1 $\vec{RR} = \underline{0} \implies$ per l'unicità di $Q: \vec{PQ} = \underline{0} \implies Q = P$
4. $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \underline{0} \implies \vec{PQ} = -\vec{QP}$
5. ovvio, essendo $\vec{P_1P_2} + \vec{P_2Q_2} = \vec{P_1Q_2} = \vec{P_1Q_1} + \vec{Q_1Q_2}$

😄

Definizione 1.1.2: Sottospazio affine

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio affine** di dimensione $m \leq n$ una struttura data da

1. $\emptyset \neq A' \subseteq A$, detto **sostegno del sottospazio affine**
2. $V_m(K)$ sottospazio di $V_n(K)$
3. la restrizione dell'applicazione f ad $A' \times A'$ troncata a $V_m(K)$, purché questa sia ancora un'applicazione che gode delle proprietà elencate nella definizione di spazio affine

Definizione 1.1.3: Traslazione

Fissato un vettore $v \in V_n(K)$ si dice **traslazione**, individuata da v, la corrispondenza

$$t_v : A \longrightarrow A \quad e \quad P \longrightarrow Q$$

che associa a un punto $P \in A$ il punto Q traslato di P mediante il vettore v.

Osservazione: $\forall v \in V_n(K)$ la mappa t_v è una biiezione di A, insieme di punti di $(A, V_n(K), f)$. E l'inversa di t_v è t_{-v}.

Definizione 1.1.4: Sottospazio lineare

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio lineare** l'insieme dei traslati di un punto P, detto **origine**, mediante i vettori $v \in V_h(K) \leq V_n(K)$, con h detta dimensione del sottospazio lineare. Inoltre si denota con $S_h = [P, V_h(K)]$ il sottospazio lineare dato dal punto P e dallo spazio di traslazione V_h.

Definizione 1.1.5: Punti, rette, piani e iperpiani

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dicono

- **punti** i sottospazi lineari di dimensione 0

$$S_0 = [P, \{\underline{0}\}] = \{P\}$$

- **rette** i sottospazi lineari di dimensione 1

$$S_1 = [P, \mathcal{L}(v)] \quad \text{con } v \neq \underline{0} \quad e \quad v \in V_n(K)$$

- **piani** i sottospazi lineari di dimensione 2

$$S_2 = [P, \mathcal{L}(v_1, v_2)] \quad \text{con } v_1, v_2 \neq \underline{0} \quad e \quad v_1, v_2 \in V_n(K)$$

- **iperpiani** sono i sottospazi di dimensione $n - 1$

Proposizione 1.1.2

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di dimensione h sottospazio di $A_n(K)$.

1. siano $Q, R \in S_h \implies \vec{QR} \in V_h(K)$

Proposizione 1.1.3

> Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di $A_n(K)$. Ogni punto di S_h può essere scelto come origine di S_h. Cioè dato $Q \in S_h$ abbiamo che $[Q, V_h(K)] = S_h$.

Dimostrazione: Sia $R \in S_h$. Allora $\vec{PR} \in V_n$ e $\vec{PQ} \in V_n$. Quindi $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h$ 😄