

Appunti di Algebra Lineare e Geometria Analitica

Ayman Marpicati

Università degli Studi di Brescia
A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1	Nozioni preliminari	Pagina 5
1.1	Relazioni su un insieme	5
1.2	Strutture algebriche	5
1.3	Matrici	6
Capitolo 2	Spazi vettoriali	Pagina 8
2.1	Generalità	8
2.2	Sottospazi di uno spazio vettoriale	8
2.3	Indipendenza e dipendenza lineare	9
2.4	Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale	11
2.5	Basi e dimensione	11
2.6	Intersezione e somma di sottospazi	15
Capitolo 3	Sistemi lineari	Pagina 18
3.1	Determinante di una matrice quadrata	18
3.2	Matrici invertibili	19
3.3	Dipendenza lineare e determinanti	19
3.4	Sistemi lineari	20
3.5	Cambiamenti di base	24
Capitolo 4	Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità	Pagina 26
4.1	Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico	26
4.2	Matrici diagonalizzabili	27
Capitolo 5	Forme bilineari e prodotti scalari	Pagina 29
5.1	Forme bilineari	29
5.2	Prodotti scalari e ortogonalità	29
5.3	Spazi con prodotto scalare definito positivo	31
5.4	Matrici di forme bilineari	34
5.5	Matrici ortogonali e basi ortonormali	35
5.6	Matrici reali simmetriche	35

Capitolo 6	Spazi affini	Pagina 37
6.1	$A_n(K)$, spazio affine di dimensione n	37
6.2	Proprietà di punti, rette e piani	40
6.3	Geometria analitica in $A_n(\mathbb{R})$	41
6.4	Rappresentazioni analitiche	44
6.5	Curve e superfici algebriche	52
Capitolo 7	Spazi euclidei	Pagina 53
7.1	$E_n(\mathbb{R})$, spazio euclideo di dimensione n	53
7.2	Geometria analitica in $E_n(\mathbb{R})$	54
7.3	Ortogonalità	55
7.4	Distanza	56
7.5	Circonferenza e sfera	59
Capitolo 8	Ampliamento e complessificazione	Pagina 61
8.1	Ampliamento proiettivo di $A_2(\mathbb{R})$	61
8.2	Geometria analitica in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$	62
8.3	Complessificazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$	63
8.4	Curve algebriche reali in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$	64
8.5	Ampliamento proiettivo di $A_3(\mathbb{R})$	67
8.6	Geometria analitica in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$	67
8.7	Complessificazione di $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$	69
8.8	Superfici algebriche reali di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$	70
Capitolo 9	Coniche	Pagina 71
9.1	Coniche in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$	71
9.2	Polarità associata a una conica	75
9.3	Proprietà metriche di una conica	77
Capitolo 1	Quadriche	Pagina 80
10.1	Quadriche in $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$	80
10.2	Sezioni piane riducibili	83
10.3	Conica impropria di una quadrica irriducibile	83
10.4	Classificazione delle quadriche	84
10.5	Punti semplici di una quadrica irriducibile	85
10.6	Sezioni piane di una quadrica irriducibile	87

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Relazioni su un insieme

Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme A è un qualunque sottoinsieme di \mathcal{R} del prodotto cartesiano $A \times A$.
Una relazione \mathcal{R} su un insieme A si dice:

- **riflessiva** se, per ogni $a \in A$, $a\mathcal{R}a$;
- **simmetrica** se, per ogni $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ allora $a = b$;
- **antisimmetrica** se, per ogni $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$;
- **transitiva** se, per ogni $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$;

Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine \mathcal{R} su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di A sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni $a, b \in A$, risulta $a\mathcal{R}b$ oppure $b\mathcal{R}a$, la relazione \mathcal{R} si dice **relazione d'ordine totale**.

1.2 Strutture algebriche

Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia (G, \star) un insieme con un'operazione \star . La struttura (G, \star) si dice **gruppo** se:

- l'operazione \star è associativa;
- esiste in G l'elemento neutro;
- ogni elemento di $g \in G$ è simmetrizzabile.

Se l'operazione \star soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

Definizione 1.2.2: Campo

Sia A un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "·" e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura $(A, +, \cdot)$ è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $e \neq 0$;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni $a, b, c \in A$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.3 Matrici**Definizione 1.3.1: Matrice**

Dato un campo K si dice **matrice** di tipo $m \times n$ su K una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avente m righe ed n colonne, i cui elementi a_{ij} sono elementi di K .

Definizione 1.3.2: Matrice quadrata

Una matrice di tipo $n \times n$ è detta **matrice quadrata** di ordine n . Queste vengono indicate con $M_n(K)$.

Definizione 1.3.3: Prodotto righe per colonne

Date le matrici $A = (a_{ih}) \in K^{m,n}(K)$ con $i \in I_m, h \in I_n$ e $B = (b_{hj}) \in K^{n,p}$ con $h \in I_n, j \in I_p$, si dice **prodotto righe per colonne** di A per B la matrice

$$A \cdot B = (c_{ij}) \text{ con } i \in I_m, j \in I_p \quad \text{ove}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih}b_{hj}$$

Esempio 1.3.1

Prendiamo per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 21 & 12 & -19 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.4: Matrice identica

L'elemento neutro delle matrici quadrate di ordine n è la **matrice identica**, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.5: Trasposta di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di $K^{m,n}$. Si dice **trasposta** di A la matrice $K^{n,m}$ ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne, cioè ${}^tA = (b_{ji})$ ove $b_{ji} = a_{ij}$ per ogni $i \in I_n$ e $j \in I_m$.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno **spazio vettoriale** sul campo K , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V , detta somma, $+: V \times V \rightarrow V$ e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\cdot: K \times V \rightarrow V$, tali che

- $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno \cdot soddisfi le seguenti proprietà:
 - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
 - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
 - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
 - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori**, gli elementi del campo K sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di $(V, +)$ è detto **vettore nullo** e indicato $\underline{0}$ per distinguerlo da 0 , zero del campo K . L'opposto di ogni vettore \mathbf{v} viene indicato con $-\mathbf{v}$.

Teorema 2.1.1

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K , siano $k \in K$ e $v \in V$. Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, diremo che U è **sottospazio vettoriale** di V se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

Proposizione 2.2.1 Primo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme U è uno spazio vettoriale di V se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$

$$2. \forall k \in K, \forall u \in U \quad ku \in U$$

Proposizione 2.2.2 Secondo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, U è sottospazio di $V(K)$ se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

Definizione 2.3.1: Combinazione lineare

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(K)$ si dice combinazione lineare di vettori v_1, v_2, \dots, v_n ogni vettore v :

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, \dots, k_n \in K$$

Definizione 2.3.2: Sistema di vettori libero

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, allora A si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di A che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = \underline{0}$$

Se A è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione 2.3.3: Sistema di vettori legato

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, allora A si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \text{ non tutti nulli : } \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n$$

Se A è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

Proposizione 2.3.1

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se $\underline{0}$ appartiene ad A , il sistema A è legato.

Dimostrazione: Sia $\underline{0} \in A$, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\underline{0} = v_1$ quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

**Proposizione 2.3.2**

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se in A appaiono due vettori proporzionali allora A è legato.

Dimostrazione: Senza perdita di generalità possiamo supporre che $v_1 = kv_2$ e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$



Proposizione 2.3.3

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. A è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: \implies : Per ipotesi A è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $k_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} -k_1 v_1 &= k_2 v_2 + \dots + k_n v_n & v_1 &= \frac{1}{k_1}(-k_2 v_2 - \dots - k_n v_n) \\ v_1 &= -\frac{k_2}{k_1} v_2 - \frac{k_3}{k_1} v_3 - \dots - \frac{k_n}{k_1} v_n \end{aligned}$$

e quindi v_1 è combinazione lineare di v_2, \dots, v_n .

\Leftarrow : Per ipotesi uno dei vettori di A è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n \quad \underline{0} = -1v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

siccome $-1 \neq 0$ A è legato. ⊗

Proposizione 2.3.4

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $u \in V(K)$. Se $A \cup \{u\}$ è legato, allora u è combinazione lineare dei vettori di A .

Dimostrazione: Per ipotesi $A \cup \{u\}$ è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n, b \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n + bu$$

sia per assurdo $b = 0$

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, } \mathbf{assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad u = -\frac{k_1}{b} v_1 - \frac{k_2}{b} v_2 - \dots - \frac{k_n}{b} v_n$$

$\implies u$ è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, \dots, v_n ⊗

Proposizione 2.3.5

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \supseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$. Se A è legato allora anche B è legato.

Dimostrazione:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Se $B = [v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m]$ allora

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n + 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$$

$\implies B$ è legato. ⊗

Proposizione 2.3.6

Sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \subseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$, se A è libero, allora B è libero.

Dimostrazione: Sia, per assurdo, B legato, allora per la proposizione precedente anche A è legato. **Assurdo!** Quindi B è libero. ⊗

2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

Definizione 2.4.1: Sistema di generatori

Sia A sistema di vettori di $V(K)$. A si dice sistema di generatori di $V(K)$ se ogni $v \in V(K)$ si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A .

Definizione 2.4.2: Copertura lineare

Sia A un sistema di vettori di $V(K)$ si dice copertura (o chiusura) lineare di A l'insieme $\mathcal{L}(A)$ di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di A .

N.B.

Dato A sistema di vettori di $V(K)$

1. $\mathcal{L}(A)$ è il più piccolo sottospazio di $V(K)$ che contiene A
2. $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3. $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se $V(K)$ ammette un sistema di generatori finito $\implies V(K)$ si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di $V(K)$ ha cardinalità infinita $\implies V(K)$ non è finitamente generato.

2.5 Basi e dimensione

Lemma 2.5.1

Sia $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori per uno spazio vettoriale $V(K)$, e sia $v \in S$ combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri) $\implies S \setminus \{v\}$ è sistema di generatori per $V(K)$

Dimostrazione: Sia, senza perdere di generalità, v_1 combinazione lineare di v_2, v_3, \dots, v_n

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$$

sia $v \in V(K)$

$$\begin{aligned} v &= h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = h_1 (k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \\ v &= \underbrace{(h_1 k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + \dots + \underbrace{(h_1 k_n + h_n)}_{\in K} v_n \in \mathcal{L}([v_2, v_3, \dots, v_n]) = \mathcal{L}(S \setminus \{v_1\}) \end{aligned}$$

$\implies S \setminus \{v_1\}$ è un sistema di generatori.

☺

Teorema 2.5.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ($V(K) \neq \{0\}$), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

Dimostrazione: sia $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori per $V(K)$, abbiamo due possibilità:

1. A è libero $\implies A$ è un sistema di generatori libero;
2. A è legato $\implies \exists v \in A$ combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre $v = v_1 \implies A \setminus \{v_1\} = A_1$ è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$ finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.

Osserviamo che A contiene almeno un $v \in A : v \neq \underline{0}$, questo perché $A_n = [0]$ e $v_n \neq \underline{0}$ perché $A \neq \{0\} \implies A_n$ è necessariamente libero. \oplus

Definizione 2.5.1: Base

Sia $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sequenza libera di vettori di $V(K)$. S è detta base se e solo se S è una sequenza libera di generatori.

Definizione 2.5.2: Base canonica di \mathbb{R}^n

$((1, 0, 0, \dots, 0)(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1))$ è una base canonica per \mathbb{R}^n .

Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ sistema di generatori e $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ sistema libero. Allora la cardinalità di A sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. ($m \leq n$)

Dimostrazione: Sia per assurdo $m > n$, poiché B genera $V(K)$ u_1 si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Essendo A libero $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, \dots, k_n$ non sono tutti nulli \implies senza perdita di generalità $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad v_1 = \frac{1}{k_1}(-u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, \dots, v_n])$$

B è sistema di generatori, $B \cup \{u_1\}$ è sistema di generatori, di conseguenza $(B \cup \{u_1\}) \setminus \{v_1\} = B_1 = [u_1, v_2, \dots, v_n]$ è ancora sistema di generatori per $V(K)$.

Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, \dots, h_n \in K$$

Se avessimo $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$ $u_2 = \alpha u_1$ ma ciò non può succedere perché A è libero $\implies \exists h_i \neq 0$ e senza perdita di generalità supporremo $h_2 \neq 0$ quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - \dots - h_n v_n)$$

v_2 è linearmente dipendente da $B_2 = [u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]$ e B_2 , per lo stesso motivo di B_1 è ancora sistema di generatori.

Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento n volte fino a trovare un sistema $B_n = [u_1, u_2, \dots, u_n]$. Siccome avevamo supposto che $m > n$ essendo B_n sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche u_{n+1} come combinazione lineare dei vettori di B_n , cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \quad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

questo comporta che A sia legato, ma questo è **assurdo!** $\implies m \leq n$. \oplus

Teorema 2.5.2

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano B_1 e B_2 due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad B_2 = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad m = n$$

Dimostrazione: Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- B_1 sistema di generatori, B_2 sistema libero $\implies n \geq m$;
- B_2 sistema di generatori, B_1 sistema libero $\implies m \geq n$.

$$m \geq n \text{ e } n \geq m \iff n = m.$$

☺

Definizione 2.5.3: Dimensione

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di V la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se $V = \{0\}$ poniamo la $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

Proposizione 2.5.1

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n su K e sia $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema di generatori. Allora S è libero.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ una base di $V_n(K)$. Sia per assurdo S legato. Senza perdita di generalità $v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$. Allora $S' = S \setminus \{v_1\}$ è ancora sistema di generatori. $|S'| = n - 1 \geq |B|$ perché B è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!** Quindi S è libero. ☺

Proposizione 2.5.2

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K . Sia $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un sistema libero. Allora S è anche un sistema di generatori.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ una base di $V(K)$, supponiamo per assurdo che S non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$ è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha}(-k_1 v_1 - k_2 v_2 - \dots - k_n v_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$ **assurdo!** Contro l'ipotesi che $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$ è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1}_{\text{sistema libero}} \leq \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \rightarrow \text{per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! $\implies S$ è un sistema di generatori. ☺

Proposizione 2.5.3

m vettori in $V_n(K)$ con $m > n$ sono sempre linearmente dipendenti.

Dimostrazione: Siano per assurdo $[v_1, v_2, \dots, v_m]$, m vettori linearmente indipendenti con $m > n$. Sia B una base di $V_n(K)$. $m = |S = [v_1, v_2, \dots, v_m]| \leq |B| = n$ per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi $m > n$, **assurdo!** ☺

Proposizione 2.5.4

m vettori in $V_n(K)$ con $m < n \implies$ non possono generare.

Dimostrazione: siano v_1, v_2, \dots, v_m per assurdo m vettori che generano $V_n(K)$ con $m < n$ allora:

$$m = |S = [v_1, v_2, \dots, v_m]| \geq |B| = n \text{ con } m < n \text{ per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! Va contro all'ipotesi. ☺

Teorema 2.5.3 Teorema di caratterizzazione delle basi

Sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una sequenza di vettori di $V(K)$. B è una base se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di B .

$$\forall v \in V, \exists! v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad k_i \in K$$

Dimostrazione: \implies sia B una base di V . Per ogni v si ha che $v \in \mathcal{L}(B)$ perché B è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista $v \in V$:

$$v = v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + \dots + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

B è una sequenza libera, quindi $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$ perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che $k_i \neq h_i \implies$ **assurdo!** $\implies \exists!$ la combinazione lineare dei vettori di B che dà v ($\forall v \in V$).

\Leftarrow per ipotesi $\forall v \in V \exists!$ combinazione lineare dei vettori di B che dà v . B è una sequenza di generatori, cioè $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$. Supponiamo per assurdo che B sia legato $\implies \exists k_i \in K$ non nullo:

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di B che danno $\underline{0}$. Dato che $\underline{0} \in V$ per ipotesi esiste un'unica combinazione lineare dei vettori di B che dà $\underline{0}$. **Assurdo!** Quindi B è una sequenza libera e B è una base per V . \odot

Definizione 2.5.4: Componenti di un vettore rispetto ad una base

Sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $v \in V$. Chiameremo componenti di v rispetto alla base B la sequenza (k_1, k_2, \dots, k_n) :

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Proposizione 2.5.5

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K , allora $V_n(K)$ ammette almeno un sottospazio di dimensione $m \forall 0 \leq m \leq n$.

Dimostrazione: sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $0 \leq m \leq n$, ci sono due possibilità:

1. $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$ è il sottospazio voluto;
2. $0 < m \leq n$ e quindi $S = (v_1, v_2, \dots, v_m)$

$\mathcal{L}(S)$ ha dimensione m perché S è libero ($S \subseteq B$) e genera, per definizione $\mathcal{L}(S)$. \odot

Proposizione 2.5.6

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia $U \leq W$, allora:

1. $\dim(U) \leq \dim(W)$
2. $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti:

1. Sia B base per U e B' base per W , se per assurdo

$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$

contro il lemma di Steinitz.

2. \implies è banale;
 \Leftarrow sia per assurdo $U < W$ e sia B base di U , allora

$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$

quindi B è una base anche per $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$ **Assurdo!**

⊗

Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \dots, v_p)$, ove $p \leq n$, una sequenza libera di vettori in $V_n(K)$. Allora, in una qualunque base B di $V_n(K)$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è una base di $V_n(K)$.

2.6 Intersezione e somma di sottospazi

Proposizione 2.6.1

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e siano $U, W \leq V \implies U \cap W$ è sottospazio di V .

Dimostrazione: Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi. $U \cap W$ è un sottospazio di $V \iff$ è sottoinsieme non vuoto di V :

$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W$$

$U \cap W$ è sottoinsieme non vuoto di V , perché $U \subseteq V, W \subseteq V$ e $\underline{0} \in U \cap W$. Siano ora $v_1, v_2 \in U \cap W$ e $k_1, k_2 \in K$, osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U$ e per lo stesso motivo $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W \implies k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. ⊗

N.B.

Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che $U \cup W$ non è un sottospazio a meno che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Definizione 2.6.1: Spazio di somma

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K definiamo lo **spazio di somma** come:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

Proposizione 2.6.2

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K abbiamo che: $U + W \leq V$

Dimostrazione: Osserviamo che $U + W \subseteq V$ perché dato $u \in U$ e $w \in W, u \in V$ e $w \in V \implies u + w \in V$, il quale non è vuoto perché $\underline{0} \in U + W$. Siano $v_1, v_2 \in U + W$ e siano $k_1, k_2 \in K$

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} &= k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1 u_1 + k_1 w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2 u_2 + k_2 w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}} \\ &\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio } U + W \leq V \end{aligned}$$

⊗

Proposizione 2.6.3

Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

Definizione 2.6.2: Somma diretta

Dati $U, W \leq V_n(K)$ diremo che $U + W$ è somma diretta se $\forall v \in U + W$ può essere scritto come unico modo come $u + w$. Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists! u \in U \text{ e } w \in W : \quad v = u + w$$

Se $U + W$ è una somma diretta allora la indicheremo con $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.4

Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione: \implies Siano U, W in somma diretta e sia, per assurdo: $x \in U \cap W$ con $x \neq \underline{0}$. Sia $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad \text{e} \quad w = w - x \text{ poiché la somma è diretta} \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

\Leftarrow Siano $U, W : U \cap W = \{\underline{0}\}$ e supponiamo per assurdo che esista $v \in U + W$:

$$v = u_1 + w_1 \quad \text{e} \quad v = u_2 + w_2 \quad \text{con} \quad u_1, u_2 \in U \quad \text{e} \quad w_1, w_2 \in W \quad \text{e} \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad \text{e} \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad \text{e} \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che v avesse due scritte distinte come somma i elementi di U e W .

$$\implies \exists! (u_1, w_1) : \quad u_1 \in U \quad \text{e} \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1 \text{ e } U \oplus W$$

⊙

Corollario 2.6.1

Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $V = U \oplus W \iff U + W = V \text{ e } U \cap W = \{\underline{0}\}$.

N.B.

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia B_1 una base di U e B_2 una base di $W \implies B_1 \cup B_2$ è sequenza di generatori per lo spazio $U + W$. In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per $U + W$.

Proposizione 2.6.5

Siano $U, W \leq V_n(K) : U \oplus W$ e sia A una sequenza libera di vettori di U e B una sequenza libera di vettori di W . Allora $A \cup B$ è una sequenza libera di vettori della $U \oplus W$.

Dimostrazione: Siano $A = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ e $B = (w_1, w_2, \dots, w_h)$ e supponiamo per assurdo che $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$ e $b_1, b_2, \dots, b_h \in K$, quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$\underline{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h}_{\in W}$$

$$\implies \underline{0} = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad e \quad \underline{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

ma A e B sono sequenze libere quindi $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = \dots = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$\underline{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \implies \textbf{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$ è una sequenza libera. ☺

Corollario 2.6.2

Siano $U, W \in V_n(K) : U \oplus W$ e siano B_U e B_W basi di U e $W \implies B_U \cup B_W$ è una base per $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.6 Formula di Grassmann

Dati $U, W \leq V_n(K)$ abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

Definizione 2.6.3: Complemento diretto

Sia $W \leq V_n(K)$ si dice **complemento diretto** di W in V uno spazio $U \leq V : U \oplus W = V$.

N.B.

Un complemento diretto di W in V esiste sempre e si trova estendendo una base di W a una base di V . In generale questo non è unico.

Capitolo 3

Sistemi lineari

3.1 Determinante di una matrice quadrata

Definizione 3.1.1: Determinante

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata, di ordine n , a elementi in un campo K . Si dice **determinante** di A , e si scrive $|A|$ oppure $\det(A)$, l'elemento di K definito ricorsivamente come segue:

1. se $n = 1$ $A = (a_{11})$ $\det(A) = |A| = a_{11}$
2. se $n > 1$ $A = a_{ij}$ $\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n} \det A_{1n}$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, il suo determinante è $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Mentre se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora la il determinante di A è

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definizione 3.1.2: Complemento algebrico

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n , a elementi in campo K . Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk} , e si indica Γ_{hk} , il determinante della matrice quadrata di ordine $n - 1$, ottenuta da A sopprimendo la h -esima riga e la k -esima colonna, preso con il segno $(-1)^{h+k}$.

Teorema 3.1.1 Primo teorema di Laplace

Data la matrice quadrata di ordine n , la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di A .

Pertanto, la formula per il calcolo del determinante di $A = (a_{ij})$ rispetto alla i -esima riga è

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

rispetto alla j -esima colonna è

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Teorema 3.1.2 Secondo teorema di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero. Quindi

$$A \in M_n(K) \implies \begin{cases} a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \dots + a_{in}\Gamma_{jn} = 0 & i \neq j \\ a_{1i}\Gamma_{1j} + a_{2i}\Gamma_{2j} + \dots + a_{ni}\Gamma_{nj} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Teorema 3.1.3 Teorema di Bidet

Date due matrici quadrate di ordine n , A e B , il determinante della matrice prodotto $A \cdot B$ è uguale al prodotto dei determinanti di A e B , cioè

$$|A \cdot B| = |A||B|$$

3.2 Matrici invertibili

Definizione 3.2.1: Matrice invertibile

Una matrice quadrata, di ordine n , si dice **invertibile** quando esiste una matrice B , quadrata e dello stesso ordine, tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, dove I_n è la matrice identica di ordine n . La matrice B si dice **inversa** di A e si indica A^{-1} .

Teorema 3.2.1

Sia $A \in M_n(K)$; allora A è invertibile $\iff |A| \neq 0$ e in tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t A_a$$

dove A_a si chiama **matrice aggiunta** di A ed è la matrice ottenuta da A sostituendo ogni elemento con il suo complemento algebrico Γ .

3.3 Dipendenza lineare e determinanti

Definizione 3.3.1: Minore

Sia $A \in K^{m,n}$. Si chiama **minore di ordine p** estratto da A , con $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, $p \leq \min\{m, n\}$, una matrice quadrata di ordine p ottenuta cancellando $m - p$ righe e $n - p$ colonne da A .

Teorema 3.3.1

Una sequenza $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di n vettori dello spazio vettoriale $V_n(K)$ è libera se, e soltanto se, la matrice A , che ha nelle proprie righe (o colonne) le componenti dei vettori di S in una base di $V_n(K)$, ha determinante non nullo ed è legata se, e soltanto se, tale matrice A ha determinante nullo.

Definizione 3.3.2: Rango di una matrice

Sia A una matrice di $K^{m,n}(K)$. Si dice **rango** della matrice A , e si scrive $\rho(A)$, l'ordine massimo di un minore estraibile da A con determinante non nullo.

Osservazione: Data la matrice A di $K^{m,n}(K)$

1. $\rho(A) = 0 \iff A$ è la matrice nulla;
2. $\rho(A) = \rho(A^t)$;
3. $\rho(A) \leq \min(m, n)$.

Definizione 3.3.3: Spazio delle righe e delle colonne

Data una matrice A , avente m righe ed n colonne, si dice **spazio delle righe** di A , e si indica $\mathcal{L}(R)$, il sottospazio $K^n(K)$ generato dalle righe di A . Si dice **spazio delle colonne** di A , e si indica $\mathcal{L}(C)$, il sottospazio vettoriale di $K^m(K)$ generato dalle colonne di A .

Teorema 3.3.2 Teorema di Kronecker

Gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(R)$ ed $\mathcal{L}(C)$, di una matrice $A \in K^{m,n}(K)$, hanno la stessa dimensione e tale dimensione coincide con il rango di A . Cioè:

$$\dim(\mathcal{L}(R)) = \dim(\mathcal{L}(C)) = \rho(A).$$

Dimostrazione: Dimostriamo che $\dim(\mathcal{L}(R)) = \rho(A)$. La dimostrazione per quanto riguarda le colonne è completamente analoga. Sia $s = \dim(\mathcal{L}(R)) \implies$ abbiamo s righe linearmente indipendenti nella matrice A e quindi per il teorema precedente esiste un minore in A di ordine s a determinante non nullo. Pertanto $\rho(A) \geq s$. Sia per assurdo $\rho(A) = r > s$, dovrebbe esistere in A un minore di ordine r a determinante non nullo. Se chiamiamo ora $S = (R_1, R_2, \dots, R_r)$ la sequenza di righe nella matrice A , la matrice A ha un minore di ordine r non singolare e di conseguenza è libera. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(R) \geq \dim \mathcal{L}(S) = r > s = \dim \mathcal{L}(R).$$

Ma questo è un **assurdo!** Quindi

$$\rho(A) = r \leq s = \dim \mathcal{L}(R) \implies r = s.$$



Corollario 3.3.1

Se A è una matrice quadrata di ordine n , con elementi in un campo K , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $|A| \neq 0$;
2. A è invertibile;
3. $\rho(A) = n$;
4. le righe sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n ;
5. le colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di K^n .

Teorema 3.3.3 Teorema degli orlati

Una matrice $A \in K^{m,n}(K)$ ha rango p se, e solo se, esiste un minore M di ordine p a determinante non nullo e tutti i minori di ordine $p+1$, che contengono M , hanno determinante nullo.

3.4 Sistemi lineari

Definizione 3.4.1: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un insieme di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in campo K .

Osservazione: Posto $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B \iff \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$$

che è equivalente a dire che B è combinazione lineare delle colonne di A . Quindi il sistema è risolubile se, e soltanto se, $B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Teorema 3.4.1 Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile se, e soltanto se, $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Dimostrazione: " \implies " Sia $AX = B$ risolubile, $\implies \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$ quindi

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) &\implies \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B)}_{=\rho(A|B)} = \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)}_{=\rho(A)} \\ &\implies \rho(A|B) = \rho(A) \end{aligned}$$

" \impliedby " Per ipotesi abbiamo che $\rho(A|B) = \rho(A)$. Quindi

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B) &= \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \implies \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\implies B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\implies \exists (k_1, k_2, \dots, k_n) : k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_n C_n = B \end{aligned}$$

Quindi la n -upla (k_1, k_2, \dots, k_n) è soluzione di $AX = B$ e di conseguenza il sistema è compatibile. \odot

Teorema 3.4.2 Teorema di Cramer

Sia $AX = B$ un sistema lineare in n equazioni ed n incognite. Se $\det(A) \neq 0$ allora $AX = B$ ammette un'unica soluzione.

Indichiamo con B_1 , la matrice ottenuta sostituendo a C_i la colonna dei termini noti (B).

$$A = (C_1, C_2, \dots, C_n) \quad B_1 = (C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

Se $\det(A) \neq 0$ allora (X_1, X_2, \dots, X_n) è data da:

$$X_i = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}$$

Definizione 3.4.4: Sistema principale equivalente

Sia $AX = B$ un sistema compatibile, si dice sistema principale equivalente un sistema $A'X = B'$ ottenuto eliminando $m - p$ equazioni da $AX = B$ tale che $\rho(A'|B') = \rho(A') = p$.

Teorema 3.4.3

Un sistema $AX = B$ compatibile ha le stesse soluzioni di un suo sistema principale equivalente.

Osservazione: $\rho(A) = \rho(A|B)$ se il sistema lineare è omogeneo e quindi è sempre compatibile. In particolare

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è sempre soluzione di } AX = \underline{0}.$$

Definizione 3.4.5: Autosoluzioni

Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo diverse dalla soluzione nulla si dicono **autosoluzioni**.

N.B.

Non è detto che un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni.

Proposizione 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ ammette autosoluzioni se, e solo se, $\rho(A) < n$ (con n numero di incognite).

Corollario 3.4.1

Un sistema lineare omogeneo $AX = B = \underline{0}$ con $A \in M_n(K)$ ammette autosoluzioni se, e soltanto se, $\det(A) = 0$.

Teorema 3.4.4

Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo con $A \in K^{m,n}$ e sia S l'insieme delle sue soluzioni, allora S è un sottospazio di K^n di dimensione $n - \rho(A)$.

Osservazioni:

1. $\underline{0} \in S$
2. se $n - \rho(A) > 0$ abbiamo autosoluzioni
3. Se $B \neq \underline{0}$ l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ non è un sottospazio di K^n perché $A\underline{0} = \underline{0} \neq B \implies \{\underline{0}\} \notin S$.

Proposizione 3.4.2

Sia $AX = B$ un sistema lineare in m equazioni ed n incognite, detto S l'insieme delle soluzioni abbiamo che

$$S = \begin{cases} \{x_0 + z : x_0 \in S, z \in S\} & \text{se } AX = B \text{ è compatibile} \\ \emptyset & \text{se } AX = B \text{ non è compatibile} \end{cases}$$

Definizione 3.4.6: Sistema lineare omogeneo associato

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite diciamo che $AX = \underline{0}$ è il **sistema lineare omogeneo associato** a $AX = B$.

Proposizione 3.4.3

Le soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX = B$ sono tutte e sole del tipo $\bar{X} = X_0 + Z$, ove X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e Z è la soluzione di $AX = \underline{0}$, sistema omogeneo associato ad $AX = B$.

Dimostrazione: Sia \bar{X} soluzione di $AX = B$, poniamo $Z = \bar{X} - X_0 \iff \bar{X} = X_0 + Z$

$$AZ = A(\bar{X} - X_0) = A\bar{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$$

Quindi Z è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad A . Di conseguenza $\bar{X} = X_0 + Z$ ⊙

Dato $AX = B$ sistema lineare in m equazioni ed n incognite compatibile, le sue soluzioni sono tante quante quelle del sistema lineare omogeneo associato che costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$. Se il campo è infinito, posto $\rho(A) = p$, si dice che le soluzioni sono ∞^{n-p} (cioè che l'insieme delle soluzioni dipende da $n - \rho(A)$ parametri).

Sostituendo si ha ${}^tXE = {}^tX'AE$, ove A è la matrice del cambiamento di base da B a B' , quindi, dato che le componenti dei vettori sono univocamente determinate

$$X = {}^tAX'$$

$$X' = {}^tA^{-1}X$$

Possiamo dire quindi che le componenti di uno stesso vettore rispetto a due basi B e B' sono legate dalla matrice del cambiamento di base da B a B' .

Capitolo 4

Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

4.1 Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico

Definizione 4.1.1: Polinomio ed equazione caratteristica

Se A è una matrice quadrata di ordine n , si dice **polinomio caratteristico** di A , e si indica $p_A(\lambda)$, il determinante della matrice $A - \lambda I_n$, cioè

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

L'equazione $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ è detta **equazione caratteristica** di A .

Definizione 4.1.2: Autovalori

Le radici del polinomio caratteristico si chiamano **autovalori** di A .

Definizione 4.1.3: Autospazio

Lo spazio delle soluzioni del sistema $(A - \bar{\lambda} I_n)X = 0$, dove $\bar{\lambda}$ è un autovalore, si chiama **autospazio** associato a $\bar{\lambda}$ e si indica con $V_{\bar{\lambda}}$.

Definizione 4.1.4: Autovettori

I vettori non nulli dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ si chiamano **autovettori** relativi a $\bar{\lambda}$.

Osservazione: Si potrebbe dimostrare che se il polinomio caratteristico di $A \in M_n(K)$ ha grado n allora gli autovalori di A sono al massimo n .

Definizione 4.1.5: Matrici simili

Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono **simili** se esiste $P \in M_n(K)$ con $|P| \neq 0$ tale che

$$B = P^{-1}AP \quad PB = AP$$

Proposizione 4.1.1

Due matrici simili A, B hanno lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico (e di conseguenza gli stessi autovalori).

Dimostrazione: Per ipotesi le due matrici A, B sono simili quindi:

$$\exists P \in M_n(K), |P| \neq 0 : B = P^{-1}AP$$

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A| \implies |B| = |A|$$

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = \frac{1}{|P|}|A - \lambda I_n||P| = |A - \lambda I_n| = p_A(\lambda)$$

e attraverso questa serie di passaggi abbiamo potuto dimostrare che se due matrici sono simili allora avranno sia lo stesso determinante che lo stesso polinomio caratteristico. ☺

4.2 Matrici diagonalizzabili

Definizione 4.2.1: Matrice diagonalizzabile

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, ovvero esistono $D, P \in M_n(K)$ con D matrice diagonale, $|P| \neq 0$ e $D = P^{-1}AP$.

Teorema 4.2.1 Primo criterio di diagonalizzabilità

Una matrice $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile se, e soltanto se, K^n ammette una base costituita da autovettori di A .

Dimostrazione: " \implies " Per ipotesi A è diagonalizzabile quindi $\exists D, P \in M_n(K) : D$ è diagonale $|P| \neq 0$ e $PD = AP$. Per semplicità denotiamo le colonne di $P = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)$.

$$AP = A \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 P_1 & d_2 P_2 & \dots & d_n P_n \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1 P_1 & d_2 P_2 & \dots & d_n P_n \end{pmatrix} \iff AP_1 = d_1 P_1, AP_2 = d_2 P_2, \dots, AP_n = d_n P_n \\ &\implies AX = \lambda X \quad \lambda = d_i \quad X = P_i \end{aligned}$$

dove d_i è un autovalore, P_i è un autovettore di A e $(P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)$ è una sequenza di n autovettori. Poiché $\dim K^n = n$ e la sequenza è composta da n vettori, è sufficiente controllare la lineare indipendenza di P . Ma siccome avevamo supposto per ipotesi che $|P| \neq 0$ le sue n colonne sono linearmente indipendenti. Quindi $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ è una base di K^n costituita da autovettori di A .

" \Leftarrow " è analogo, basta ripercorrere il ragionamento a ritroso. ☺

Osservazione: Se $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile allora:

- D ha sulla diagonale principale gli autovalori di A ;
- P , cioè la matrice diagonalizzante, ha nelle colonne gli autovettori della base di K^n .

Definizione 4.2.2: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$; si chiama:

- **molteplicità algebrica** di $\bar{\lambda}$ il numero di volte che $\bar{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico, e si indica con $a_{\bar{\lambda}}$
- **molteplicità geometrica** di $\bar{\lambda}$ la dimensione dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ associato a $\bar{\lambda}$, e si indica con $g_{\bar{\lambda}}$.

Proposizione 4.2.1

Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di $A \in M_n(K)$. Allora

$$1 \leq g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$$

Proposizione 4.2.2

Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ t autovalori di A distinti tra loro, allora la somma dei relativi autospazi è diretta.

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$$

Osservazioni:

1. $A \in M_n(K) \implies \deg(p_A(\lambda)) = n$, quindi ho al massimo n autovalori;
2. $\sum a_{\lambda_i} \leq n$;
3. $\sum a_{\lambda_i} = n \iff$ tutti gli autovalori di A sono in K ;
4. $S = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \implies \dim S = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i}$
5. Autovettori provenienti da autospazi diversi sono tra loro linearmente indipendenti (perché la somma è diretta).

Teorema 4.2.2 Secondo criterio di diagonalizzabilità

Sia $A \in M_n(K)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A . Allora A è diagonalizzabile se, e soltanto se:

1. tutti gli autovalori di A sono in K ;
2. Per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$ (e allora si dice che l'autovalore è regolare).

Dimostrazione: " \implies " Per ipotesi A è diagonalizzabile. Per il primo criterio di diagonalizzabilità K^n ammette una base B formata da autovettori, cioè tale che $\mathcal{L}(B) = K^n$ e $B \subseteq V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$. Quindi

$$\begin{aligned} K^n = \mathcal{L}(B) &\leq \mathcal{L}(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n \\ &\implies V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = K^n \\ &\implies n = \dim K^n = \dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} \leq n \end{aligned}$$

Siccome $\sum a_{\lambda_i} = n$ tutti gli autovalori di A sono in K . Inoltre $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$ e $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i} \implies a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$.

" \impliedby " Per ipotesi abbiamo che tutti gli autovalori di A sono in K e per ogni autovalore vale $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$. Per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ avremo un relativo autospazio a cui corrisponde una relativa base di autovettori B_1, B_2, \dots, B_t . Chiamiamo $B = \bigcup_{i=1}^t B_i$, cioè l'unione di tutte le basi. Certamente B è libera perché la somma di sottospazi distinti è diretta.

$$|B| = |\bigcup B_i| = \sum |B_i| = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i} = n$$

Quindi B è una base di K^n costituita da autovettori e per il primo criterio di diagonalizzabilità A è diagonalizzabile. \odot

Capitolo 5

Forme bilineari e prodotti scalari

5.1 Forme bilineari

Definizione 5.1.1: Forma bilineare e prodotto scalare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale. Una **forma bilineare** in V è una funzione $*$: $V \times V \rightarrow K$:

- $(u + v) * w = u * w + v * w \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$
- $u * (v + w) = u * v + u * w \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$
- $(ku) * v = u * (kv) = k(u * v) \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$

Se poi $*$ verifica anche l'ulteriore proprietà

- $v * w = w * v \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$

Allora si chiama **prodotto scalare** (o forma bilineare simmetrica).

Osservazione: Si deduce chiaramente che $\forall v \in V \quad \underline{0} * v = 0 = v * \underline{0}$.

Esempio 5.1.1 (Prodotto scalare euclideo e standard)

1. Definiamo il **prodotto scalare euclideo** come una funzione $*$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) * (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \dots + x_n x'_n$$

2. Definiamo il **prodotto scalare standard** come la funzione $*$: $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{pmatrix} = x_{11}x'_{11} + x_{12}x'_{12} + \dots + x_{nn}x'_{nn}$$

5.2 Prodotti scalari e ortogonalità

Definizione 5.2.1: Ortogonalità

In uno spazio vettoriale $V(K)$, con prodotto scalare " \cdot ", due vettori v e w di V si dicono **ortogonali**, e si scrive $v \perp w$, se $v \cdot w = 0$.

Definizione 5.2.2: Complemento ortogonale

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e \cdot un prodotto scalare. Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$; si chiama **complemento ortogonale** (o più semplicemente ortogonale) di A l'insieme

$$A^\perp = \{v \in V : v \perp w, \forall w \in A\} \quad \underline{0} \in A^\perp \neq \emptyset$$

Proposizione 5.2.1

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare \cdot . Sia $\emptyset \neq A \subseteq V$. Allora A^\perp è un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione: Sappiamo che $\underline{0} \in A^\perp \neq \emptyset$
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall u_1, u_2 \in A^\perp, \forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^\perp$$

Possiamo scrivere per la proprietà di ortogonalità che

$$\forall w \in A \quad u_1 \cdot w = 0 \quad u_2 \cdot w = 0$$

Quindi

$$(k_1 u_1 + k_2 u_2) \cdot w = (k_1 u_1) \cdot w + (k_2 u_2) \cdot w = k_1 \underbrace{(u_1 \cdot w)}_{=0} + k_2 \underbrace{(u_2 \cdot w)}_{=0}$$

$$\implies k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^\perp \implies A^\perp \text{ è un sottospazio.}$$

⊕

Osservazioni:

1. $A \subseteq B \implies A^\perp \supseteq B^\perp$
2. $A^\perp = [\mathcal{L}(A)]^\perp$
3. Generalmente se $A \leq V(K) \implies A \neq (A^\perp)^\perp$, ma $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

Proposizione 5.2.2

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare \cdot e siano $v, w \in V(K)$ con $w \cdot w \neq \underline{0}$. Allora

$$\exists v_1, v_2 \in V : v = v_1 + v_2, v_1 = kw, v_2 \perp w$$

Dimostrazione:

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \quad v_1 = kw = \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot w} \right) \cdot w$$

$$v_2 = v - v_1 \iff v_1 + v_2 = v$$

Ora verifichiamo che $v_2 \perp w$

$$v_2 \perp w \iff (v - v_1) \cdot w = \left(v - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w \right) \cdot w = v \cdot w - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w \cdot w = v \cdot w - v \cdot w = 0$$

⊕

Definizione 5.2.3: Coefficiente di Fourier e proiezione

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e siano $v, w \in V(K)$ con $w \cdot w \neq \underline{0}$. Allora

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$$

si chiama **coefficiente di Fourier** di v lungo w e

$$v_1 = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w$$

si chiama **proiezione** di v lungo w .

Definizione 5.2.4: Forma quadratica

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e sia $v \in V(K)$. Si chiama **forma quadratica** associata a "·" la funzione

$$q : \begin{cases} V \rightarrow K \\ v \mapsto q(v) = v \cdot v \end{cases}$$

5.3 Spazi con prodotto scalare definito positivo

Definizione 5.3.1: Prodotto scalare definito positivo

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su campo K ordinato. Un prodotto scalare "·" in V si dice **definito positivo** se

$$\forall v \in V \quad v \cdot v \geq 0 \quad e \quad v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$$

Per chiarezza da qui in avanti quando si parla di prodotti scalari definiti positivi $K = \mathbb{R}$ in modo tale che esso sia ordinato. Di conseguenza denotiamo con **spazio vettoriale metrico reale** $V_n^\circ(\mathbb{R})$, cioè uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

Definizione 5.3.2

Dato $V_n^\circ(\mathbb{R})$ si chiama **norma** la funzione

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{q(v)} \end{cases}$$

Esempio 5.3.1 (Vettori geometrici)

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \alpha \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0} = \sqrt{|\vec{v}|^2} = |\vec{v}| \end{aligned}$$

Osservazioni:

1. La norma generalizza la nozione di "lunghezza" di un vettore.
2. $\|v\| = \underline{0} \iff v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$

Proposizione 5.3.1

In $V_n^\circ(\mathbb{R})$ valgono i seguenti fatti

1. $\|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$
3. $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (disuguaglianza di Schwarz)
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

Osservazioni: Sia " \cdot " un prodotto scalare euclideo definito su $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$. La sua base canonica è

$$B_c = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

1. $\|e_i\| = \sqrt{e_i \cdot e_i} = 1$
2. $e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \implies e_i \perp e_j$
3. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1)$
 $\implies \overset{=v}{v \cdot e_i} = x_i = i\text{-esima componente di } v \text{ rispetto a } B_c$

Definizione 5.3.3: Base ortogonale e ortonormale

I vettori v_1, v_2, \dots, v_n di uno spazio vettoriale $V_n^\circ(\mathbb{R})$ formano un insieme **ortogonale** se $v_i \cdot v_j = 0$, $i \neq j$. Se inoltre ciascuno dei v_i ha norma unitaria, allora parleremo di insieme **ortonormale**. Se poi tali vettori costituiscono una base di $V_n^\circ(\mathbb{R})$ parleremo di base ortogonale o ortonormale.

Proposizione 5.3.2

Se $\emptyset \neq A \subseteq V_n^\circ(\mathbb{R})$ è costituito da vettori tutti non nulli. Allora A è libero.

Dimostrazione:

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j. \quad \text{Siano } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}$$

$$0 = 0 \cdot v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot v_1 = \alpha_1 \underbrace{v_1 \cdot v_1}_{\neq 0 \implies v_1 \neq \underline{0} \implies \|v_1\|^2 \neq 0} + \alpha_2 \underbrace{v_2 \cdot v_1}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{v_n \cdot v_1}_{=0} = \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} \alpha_1 \implies \alpha_1 = 0$$

Ripeto il ragionamento per ciascuno dei v_i e ottengo che gli unici α che mi danno il vettore nullo sono quelli tutti nulli. Quindi se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \implies A$ è libero. \odot

Osservazione: In $V_n^\circ(\mathbb{R})$ se A è un insieme ortogonale di n vettori tutti diversi dal vettore nullo allora A è libero. Dunque fissato un ordine abbiamo una base ortogonale.

Teorema 5.3.1 Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Siano $V_n^\circ(\mathbb{R})$ e $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base. La sequenza $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ così definita

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2 - \frac{e_2 \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 \\ e'_3 &= e_3 - \frac{e_3 \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 - \frac{e_3 \cdot e'_2}{e'_2 \cdot e'_2} \cdot e'_2 \\ &\vdots \\ e'_n &= e_n - \frac{e_n \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 - \dots - \frac{e_n \cdot e'_{n-1}}{e'_{n-1} \cdot e'_{n-1}} \cdot e'_{n-1} \end{aligned}$$

è una base ortogonale di $V_n^\circ(\mathbb{R})$.

Osservazione: Se i primi p vettori di B sono già ortogonali tra loro il metodo di Gram-Schmidt non li cambia.

Teorema 5.3.2

Se A è un sottoinsieme non vuoto di $V_n^\circ(\mathbb{R})$, la cui copertura non coincide con $V_n^\circ(\mathbb{R})$, allora

$$V_n^\circ(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(A) \oplus A^\perp$$

Dimostrazione: Prima di tutto dimostriamo che $\mathcal{L}(A) \cap A^\perp = \{\underline{0}\}$ infatti: $v \in \mathcal{L}(A) \cap A^\perp$ e se $v \in A^\perp = [\mathcal{L}(A)]^\perp$ $v \cdot v = 0 \implies v = \underline{0}$ poiché ci troviamo in un prodotto scalare definito positivo. Quindi la somma è diretta. Ora si può dimostrare che $\mathcal{L}(A) \oplus A^\perp = V_n(\mathbb{R})$. Sia $\dim \mathcal{L}(A) = p$ e sia $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$; per il teorema di completamento ad una base possiamo completare B ad una base di $V_n(\mathbb{R})$. Aggiungiamo a B $n - p$ vettori. Ora applichiamo a tale base il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. $B' = (v_1, \dots, v_p, v'_{p+1}, \dots, v'_n)$ è una base ortogonale di $V_n(\mathbb{R})$. Quindi $\mathcal{L}(B') = V_n(\mathbb{R})$. Ora tutti i vettori aggiunti sono ortogonali ai vettori originali, cioè $v'_{p+1}, \dots, v'_n \in \mathcal{L}(A)^\perp = A^\perp \implies \mathcal{L}(A) \oplus A^\perp = V_n(\mathbb{R})$. \odot

Osservazioni:

1. A^\perp è un complemento diretto di $\mathcal{L}(A)$
2. Per la formula di Grassmann abbiamo che

$$n = \dim(\mathcal{L}(A) \oplus A^\perp) = \dim \mathcal{L}(A) + \dim A^\perp \implies \dim A^\perp = n - \dim \mathcal{L}(A)$$

3. Per il punto precedente possiamo affermare che se il prodotto scalare è definito positivo allora $U \leq V_n^\circ(\mathbb{R}) \implies U = (U^\perp)^\perp$

Teorema 5.3.3

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di dim : $n - \rho(A)$

Dimostrazione: In \mathbb{R}^n con prodotto scalare euclideo

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \dots + x_nx'_n$$

Quindi possiamo riscrivere il sistema come

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}, \dots, a_{1n}) \cdot (x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \cdot (x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

Pensando alle righe di A come vettori di \mathbf{R}^n le equazioni del sistema esprimono il fatto che il prodotto scalare di tali righe per il generico vettore (x_1, x_2, \dots, x_n) è uguale a zero. Quindi il generico vettore è ortogonale a tutte le righe di A . Chiamando $\mathcal{L}(R)$ lo spazio generato dalle righe di A . L'insieme S delle soluzioni di $AX = \underline{0}$ coincide con $\mathcal{L}(R)^\perp$. E quindi per il teorema di Kronecker $\dim S = n - \dim \mathcal{L}(R) = n - \rho(A)$. ☺

5.4 Matrici di forme bilineari

Definizione 5.4.1: Matrice di forma bilineare

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale, $"\ast"$ una forma bilineare e $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base di $V_n(K)$. Si chiama **matrice della forma bilineare** $"\ast"$ rispetto a B

$$A_B^* = \begin{pmatrix} e_1 * e_1 & e_1 * e_2 & \dots & e_1 * e_n \\ e_2 * e_1 & e_2 * e_2 & \dots & e_2 * e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n * e_1 & e_n * e_2 & \dots & e_n * e_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Si può indicare in modo più compatto con

$$A_B^* = (e_i * e_j)$$

N.B.

La matrice di una forma bilineare dipende dalla base fissata.

Proposizione 5.4.1

La matrice che rappresenta un prodotto scalare rispetto a una base qualsiasi è simmetrica.

Dimostrazione: $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ e $"\cdot"$ è il prodotto scalare. Allora $A_B^\cdot = (e_i \cdot e_j) = (e_j \cdot e_i) = {}^t A_B^\cdot$. \odot

Proposizione 5.4.2

Sia $"\cdot"$ un prodotto scalare su $V_n(K)$ e sia B una sua base. Sia A_B^\cdot una matrice associata a $"\cdot"$ rispetto alla base B . Allora

- B è ortogonale $\iff A_B^\cdot$ è diagonale

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

- B è ortonormale $\iff A_B^\cdot = I_n \in M_n(K)$

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad e_i \cdot e_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad a_{ii} = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Osservazione: Utilizzando la matrice associata ad una forma bilineare $"\ast"$ è possibile calcolare

$$v * w \quad \forall v, w \in V_n(K)$$

Proposizione 5.4.3

Sia B una base di $V_n(K)$ e sia $"\ast"$ una forma bilineare su V . Dette

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

le matrici colonne delle componenti rispettivamente di v e di $w \in V$ risulta:

$$v * w = {}^t X A_B^* Y$$

5.5 Matrici ortogonali e basi ortonormali

Definizione 5.5.1: Matrice ortogonale

Sia $A \in M_n(K)$ diciamo che A è **ortogonale** se ${}^tA = A^{-1}$. Quindi

$$A^t A = {}^t A A = I_n$$

Proposizione 5.5.1

Sia $A \in M_n(K)$ una matrice ortogonale. Allora $|A| \in \{-1, 1\}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} |I_n| = 1 &= |AA^{-1}| = |A^t A| = |A| |{}^t A| = |A| |A| = |A|^2 \\ |A|^2 = 1 &\iff |A| = \pm 1 \end{aligned}$$

⊕

Proposizione 5.5.2

Sia $A \in M_n(K)$. A è ortogonale se, e soltanto se, le sue righe (o colonne) costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto scalare euclideo (dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$).

Dimostrazione: " \implies "

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} &\iff {}^t A = ({}^t R_1, \dots, {}^t R_n) \\ A^t A = I_n &= \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} ({}^t R_1, \dots, {}^t R_n) = \begin{pmatrix} R_1 \cdot R_1 & R_1 \cdot R_2 & \dots & R_1 \cdot R_n \\ R_2 \cdot R_1 & R_2 \cdot R_2 & \dots & R_2 \cdot R_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n \cdot R_1 & R_n \cdot R_2 & \dots & R_n \cdot R_n \end{pmatrix} \\ R_i \cdot R_j &= 0 \quad \text{se } i \neq j, \quad R_i \cdot R_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Quindi le righe di A sono una base ortonormale. Il ragionamento è completamente analogo per le colonne.
" \impliedby " Si può dimostrare ripercorrendo le implicazioni al contrario.

⊕

5.6 Matrici reali simmetriche

Teorema 5.6.1

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica allora

1. Gli autovalori di A sono tutti reali (teorema spettrale)
2. Gli autovettori di A relativi ad autospazi distinti sono ortogonali tra loro

Dimostrazione del punto 2: Siano x e y autovettori relativi ad autovalori λ e μ distinti. Quindi $AX = \lambda x$ e $AX = \mu y$. Sia $\lambda \neq 0$. Quindi

$$\begin{aligned} ({}^t x^t y) \lambda &= (\lambda^t x) y = {}^t (x \lambda) y = {}^t (Ax) y = \underbrace{({}^t x^t A) y}_{\text{per la simmetria di } A} = ({}^t x A) y = {}^t x (Ay) \\ &= {}^t x \mu y = \mu ({}^t x y) = \mu ({}^t x^t y) \implies ({}^t x^t y) \lambda = ({}^t x^t y) \mu \\ \lambda k &= \mu k \iff (\lambda - \mu) k = 0 \iff \mu = \lambda \quad \text{oppure} \quad {}^t x^t y = 0 \end{aligned}$$

ma $\mu \neq \lambda$ perché x e y stanno in autospazi distinti $\implies {}^t x^t y = 0 \implies x$ e y sono ortogonali.

⊕

Corollario 5.6.1

Una matrice reale e simmetrica di ordine n ammette n autovalori contati con la loro molteplicità algebrica.

Definizione 5.6.1: Matrice ortogonalmente diagonalizzabile

Data $A \in M_n(K)$ è detta **ortogonalmente diagonalizzabile** se esistono D , matrice diagonale di ordine n , e P matrice ortogonale di ordine n tali che

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

Teorema 5.6.2

I seguenti fatti sono equivalenti

1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile;
2. \mathbb{R}^n ammette una base ortonormale di autovettori di A ;
3. A è una matrice reale e simmetrica.

Capitolo 6

Spazi affini

6.1 $A_n(K)$, spazio affine di dimensione n

Definizione 6.1.1: Spazio affine

Si dice **spazio affine** di dimensione n sul campo K , e si indica $\mathring{A}_n(K)$, la struttura costituita da

1. un insieme non vuoto A , detto insieme dei punti
2. uno spazio vettoriale $V_n(K)$
3. un'applicazione

$$f : A \times A \rightarrow V_n(K)$$

con le seguenti proprietà

- (a) $\forall P \in A \text{ e } \forall v \in V \quad \exists! Q \in A : f(P, Q) = \vec{PQ} = v$
- (b) $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \quad \forall P, Q, R \in A$

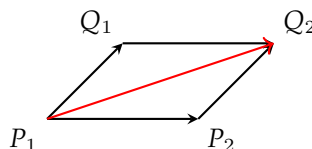
Proposizione 6.1.1

In $A_n(K)$, per ogni P, Q e $R \in A$

1. il vettore $\vec{RR} = \underline{0}$
2. $\vec{PQ} = \vec{PR} \iff Q = R$
3. $\vec{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
4. $v = \vec{PQ} \implies -v = \vec{QP}$
5. $\forall P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in A$ risulta $P_1\vec{P}_2 = Q_1\vec{Q}_2 \iff P_1\vec{Q}_1 = P_2\vec{Q}_2$

Dimostrazione: Dimostriamo ogni punto separatamente

1. $\vec{RR} + \vec{RR} = \vec{RR}$ perciò $2\vec{RR} = \vec{RR} \iff \vec{RR} = \underline{0}$
2. posto $v = \vec{PQ}$ allora $v = \vec{PR}$, ma $\exists! Q : \vec{PQ} = v \implies R = Q$
3. per la proprietà 1 $\vec{RR} = \underline{0} \implies$ per l'unicità di $Q : \vec{PQ} = \underline{0} \implies Q = P$
4. $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \underline{0} \implies \vec{PQ} = -\vec{QP}$
5. ovvio, essendo $P_1\vec{P}_2 + P_2\vec{Q}_2 = P_1\vec{Q}_2 = P_1\vec{Q}_1 + Q_1\vec{Q}_2$



Definizione 6.1.2: Sottospazio affine

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio affine** di dimensione $m \leq n$ una struttura data da

1. $\emptyset \neq A' \subseteq A$, detto **sostegno del sottospazio affine**
2. $V_m(K)$ sottospazio di $V_n(K)$
3. la restrizione dell'applicazione f ad $A' \times A'$ troncata a $V_m(K)$, purché questa sia ancora un'applicazione che gode delle proprietà elencate nella definizione di spazio affine

Definizione 6.1.3: Traslazione

Fissato un vettore $v \in V_n(K)$ si dice **traslazione**, individuata da v , la corrispondenza

$$t_v : A \rightarrow A \quad e \quad P \rightarrow Q$$

che associa a un punto $P \in A$ il punto Q traslato di P mediante il vettore v .

Osservazione: $\forall v \in V_n(K)$ la mappa t_v è una biiezione di A , insieme di punti di $(A, V_n(K), f)$. E l'inversa di t_v è t_{-v} .

Definizione 6.1.4: Sottospazio lineare

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dice **sottospazio lineare** l'insieme dei traslati di un punto P , detto **origine**, mediante i vettori $v \in V_h(K) \leq V_n(K)$, con h detta dimensione del sottospazio lineare. Inoltre si denota con $S_h = [P, V_h(K)]$ il sottospazio lineare dato dal punto P e dallo spazio di traslazione V_h .

Definizione 6.1.5: Punti, rette, piani e iperpiani

Sia $A_n(K)$ uno spazio affine. Si dicono

- **punti** i sottospazi lineari di dimensione 0

$$S_0 = [P, \{\underline{0}\}] = \{P\}$$

- **rette** i sottospazi lineari di dimensione 1

$$S_1 = [P, \mathcal{L}(v)] \quad \text{con } v \neq \underline{0} \quad e \quad v \in V_n(K)$$

- **piani** i sottospazi lineari di dimensione 2

$$S_2 = [P, \mathcal{L}(v_1, v_2)] \quad \text{con } v_1, v_2 \neq \underline{0} \quad e \quad v_1, v_2 \in V_n(K)$$

- **iperpiani** sono i sottospazi di dimensione $n - 1$

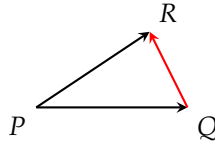
Proposizione 6.1.2

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di dimensione h sottospazio di $A_n(K)$.

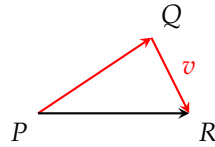
1. siano $Q, R \in S_h \implies \vec{QR} \in V_h(K)$
2. se $Q \in S_h$ e $v \in V_h$, allora $R = t_v(Q) \in S_h$

Dimostrazione: Dimostriamo entrambi i punti separatamente

1. Per ipotesi $Q \in S_h$, quindi $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h(K)$. $v = \vec{PQ} \in V_h$ e analogamente $\vec{PR} \in V_h$. Ma allora $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h$.



2. Poiché $Q \in S_h$, $\vec{PQ} \in V_h$. Allora $\vec{PR} + \vec{QR} = \vec{PQ} + \vec{v} \in V_h \implies \vec{PR} \in V_h$. Posto $w = \vec{PR}$, $t_w(P) = R$ con $w \in V_h \implies R \in S_h$.

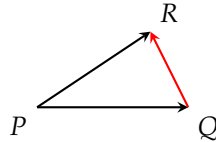


☺

Proposizione 6.1.3

Sia $S_h = [P, V_h(K)]$ un sottospazio lineare di $A_n(K)$. Ogni punto di S_h può essere scelto come origine di S_h . Cioè dato $Q \in S_h$ abbiamo che $[Q, V_h(K)] = S_h$.

Dimostrazione: Sia $R \in S_h$. Allora $\vec{PR} \in V_h$ e $\vec{PQ} \in V_h$. Quindi $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = -\vec{PQ} + \vec{PR} \in V_h \implies \vec{QR} \in V_h$.



Detto $w = \vec{QR}$ abbiamo che $R = t_v(Q)$. R è traslato di Q tramite il vettore $w \in V_h \implies R \in [Q, V_h]$, quindi

$$S_h \subseteq [Q, V_h]$$

con lo stesso ragionamento scambiamo P e Q si dimostra che

$$[Q, V_h] \subseteq [P, V_h] = S_h$$

e ciò vale solo se $S_h = [Q, V_h]$.

☺

Proposizione 6.1.4

Siano S_h e S_k due sottospazi lineari di $A_n(K)$. Allora $S_h \subseteq S_k \iff S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e $V_h \leq V_k$.

Dimostrazione: " \implies " Ovviamente $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Potremo scrivere $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. Sia $v \in V_h$ e sia $Q = t_v(P) \in S_h \subseteq S_k \implies Q \in S_k$ e sia $Q = t_v(P)$ ovvero $\vec{PQ} = v \in V_k \implies V_h \leq V_k$.
 " \impliedby " Sia $P \in S_h \implies [P, V_h] \subseteq [P, V_k]$ (poiché per ipotesi $V_h \subseteq V_k$) $[P, V_h] = S_h$ e $[P, V_k] = S_k \implies S_h \subseteq S_k$. ☺

Proposizione 6.1.5

Siano S_h e S_k sottospazi lineari di $A_n(K)$. Sia $S_h \cap S_k \neq \emptyset$ e sia $P \in S_h \cap S_k$. Allora

$$S_h \cap S_k = [P, V_h \cap V_k]$$

Dimostrazione: Sia $Q \in S_h \cap S_k$. Osserviamo che $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [P, V_k]$. $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h$ (perché $Q \in S_h$). Ma $Q = t_v(P)$ con $v \in V_k$ (perché $Q \in S_k$). Quindi $Q \in [P, V_h \cap V_k]$ perché $v \in V_h \cap V_k$, cioè

$$S_h \cap S_k \subseteq [P, V_h \cap V_k]$$

Viceversa dato $Q = t_v(P)$ con $v \in V_h \cap V_k \implies Q$ appartiene sia a S_h che ad S_k , quindi $Q \in S_h \cap S_k$, ovvero

$$[P, V_h \cap V_k] \subseteq S_h \cap S_k$$

$$\implies [P, V_h \cap V_k] = S_h \cap S_k$$

☺

Definizione 6.1.6: Parallelismo tra sottospazi

Due sottospazi lineari, $S_p = [P, V_p]$ ed $S_q = [Q, V_q]$, di $A_n(K)$ si dicono **paralleli**, e si scrive $S_p \parallel S_q$, se i rispettivi spazi di traslazione sono confrontabili, ovvero quando $V_p \subseteq V_q$, oppure $V_q \subseteq V_p$.

Osservazione 1: La relazione di parallelismo non è transitiva. E' invece riflessiva e simmetrica. Non è quindi una relazione d'equivalenza.

Osservazione 2: Due sottospazi lineari della stessa dimensione sono paralleli se, e soltanto se, hanno lo stesso spazio di traslazione. Quindi la relazione di parallelismo considerata tra spazi della stessa dimensione è una relazione d'equivalenza.

Proposizione 6.1.6

Due sottospazi lineari paralleli e di uguale dimensione o coincidono oppure hanno intersezione vuota.

Definizione 6.1.7

- Sia $S = [P, V_1]$ una retta. Lo spazio V_1 si dice **direzione** della retta S . Quindi due rette sono parallele se, e soltanto se, hanno la stessa direzione
- Sia $\pi = [P, V_2] \subseteq A_n(K)$ con $n \geq 2$. Lo spazio V_2 è detto **giacitura** di π . Quindi due piani sono paralleli se, e soltanto se, hanno la stessa giacitura.
- Tre o più punti si dicono **allineati** se esiste una retta che li contiene tutti.
- Due o più rette si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene tutte.

6.2 Proprietà di punti, rette e piani

Proposizione 6.2.1

In $A_n(K)$, con $n \geq 2$

1. per ogni due punti distinti passa un'unica retta
2. per due rette distinte, parallele o incidenti, passa un unico piano
3. due rette complanari, aventi intersezione vuota, sono parallele
4. per un punto passa un'unica retta parallela a una retta data (V Postulato di Euclide)

5. per un punto passa un unico piano, parallelo ad un piano dato
6. per tre punti, non allineati, passa un unico piano
7. una retta, avente due punti distinti in un piano, giace nel piano
8. per un punto passano almeno due rette distinte

Proposizione 6.2.2

In $A_3(K)$,

1. una retta e un piano, aventi intersezione vuota, sono paralleli
2. due piani, aventi intersezione vuota, sono paralleli
3. due piani distinti, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta per quel punto
4. per una retta passano almeno due piani distinti

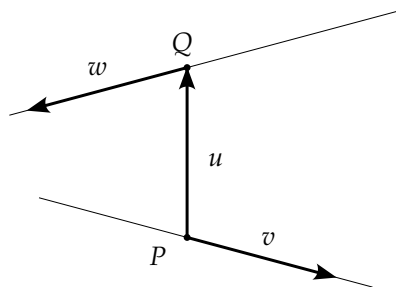
Definizione 6.2.1: Rette sghembe

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, due rette non complanari si dicono **sghembe**.

Proposizione 6.2.3

In $A_n(K)$, con $n \geq 3$, esistono due rette r_1 e r_2 sghembe tra loro. Inoltre due rette sghembe r_1 e r_2 , sono contenute su due piani π_1 e π_2 paralleli tra loro e distinti.

Dimostrazione: Per ipotesi, $A_n(K)$ ha dimensione almeno 3, quindi esistono nello spazio vettoriale $V_n(K)$ almeno 3 vettori linearmente indipendenti. Siano essi u, v, w . Siano inoltre, P un punto di A e Q il traslato di P mediante il vettore u ($Q = t_u(P)$). Dimostriamo che le rette $r = [P, \mathcal{L}(v)]$ ed $s = [Q, \mathcal{L}(w)]$ sono sghembe. Se infatti, esistesse un piano $\pi = [P, V_2]$ che le contiene entrambe, lo spazio di traslazione di π conterrebbe 3 vettori linearmente indipendenti, cioè v, w e $u = \vec{PQ}$ e ciò è un **assurdo!** Siano ora $t = [T, \mathcal{L}(v)]$ e $t' = [T', \mathcal{L}(v')]$ due



rette sghembe. I vettori v e v' generano uno spazio vettoriale V_2 di dimensione 2. Pertanto, i piani $\pi = [T, V_2]$ e $\pi' = [T', V_2]$, che risultano paralleli, sono distinti e contengono, rispettivamente le rette t e t' . ☺

6.3 Geometria analitica in $A_n(\mathbb{R})$

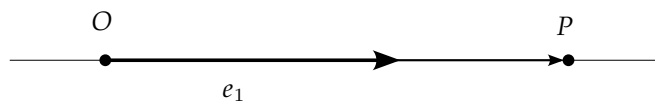
Definizione 6.3.1: Riferimento affine

Si dice **riferimento affine** di $A_n(\mathbb{R})$ una coppia $RA = [O, B]$ costituita da un punto O fissato, detto origine, e da una base B dello spazio vettoriale $V_n(\mathbb{R})$.

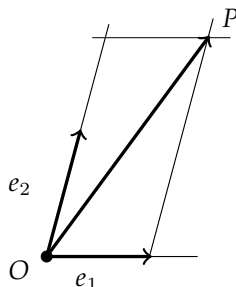
Definizione 6.3.2: Coordinate

Fissato, in $A_n(\mathbb{R})$, un riferimento affine $RA = [O, B]$, si dicono **coordinate** del punto P in RA le componenti, in B , del vettore \vec{OP} e si scrive $P = (x_i)_{i \in I_n}$.

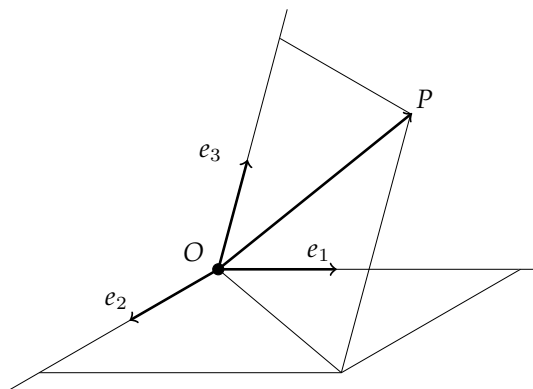
1. In $A_1(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1)$ è una base di $V_1(\mathbb{R})$. Se $\vec{OP} = xe_1$, si scrive $P = (x)$ e si dice che x è l'**ascissa** del punto P in RA .



2. In $A_2(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1, e_2)$ è una base di $V_2(\mathbb{R})$. La retta $[O, \mathcal{L}(e_1)]$ è detta **asse delle ascisse** e la retta $[O, \mathcal{L}(e_2)]$ è detta **asse delle ordinate**. Se $\vec{OP} = xe_1 + ye_2$, si scrive $P = (x, y)$ e si dice che (x, y) è la coppia delle coordinate di P in RA , dette rispettivamente **ascissa** e **ordinata** del punto P .



3. In $A_3(\mathbb{R})$, un riferimento affine è una coppia $RA = [O, B]$, ove O è un punto fissato e $B = (e_1, e_2, e_3)$ è una base di $V_3(\mathbb{R})$. La retta $[O, \mathcal{L}(e_1)]$ è detta **asse delle ascisse**, la retta $[O, \mathcal{L}(e_2)]$ è detta **asse delle ordinate** e la retta $[O, \mathcal{L}(e_3)]$ è detta **asse delle quote**. Sono detti **piani coordinati** i piani $xy = [O, \mathcal{L}(e_1, e_2)]$, $xz = [O, \mathcal{L}(e_1, e_3)]$ e $yz = [O, \mathcal{L}(e_2, e_3)]$. Inoltre, se $\vec{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, si scrive $P = (x, y, z)$ e si dice che (x, y, z) è la terna delle coordinate di P in RA , dette rispettivamente **ascissa**, **ordinata** e **quota** del punto P .

**Teorema 6.3.1**

In $A_n(K)$, con $RA = [O, B]$, siano $P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ e $Q = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ due punti di A . Allora le componenti di \vec{PQ} rispetto a B sono

$$(x''_1 - x'_1, x''_2 - x'_2, \dots, x''_n - x'_n)$$

Dimostrazione: Posti due vettori

$$\vec{OP} : x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n$$

$$\vec{OQ} : x''_1 e_1 + x''_2 e_2 + \dots + x''_n e_n$$

Per la proprietà della definizione di spazio affine possiamo dire che

$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \sum_{i \in I_n} (x''_i - x'_i) e_i$$

☺

Posti

$$X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ e } T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

si ottiene l'equivalente, ma spesso più agevole, forma matriciale:

$$X'' - X' = T$$

che può essere riscritta come

$$X'' = X' + T$$

Da quest'ultima equazione si vede che le coordinate del traslato del punto $P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, attraverso il vettore v di componenti (t_1, t_2, \dots, t_n) , si ottengono sommando, ordinatamente, alle coordinate di P le componenti del vettore di traslazione. Per questo le relazioni che compaiono nell'equazione sono anche dette **equazioni della traslazione individuata da v** .

Definizione 6.3.3: Punto medio

Dato P e $Q \in A$ (insieme dei punti di $A_n(\mathbb{R})$), definiamo il punto medio del segmento $[PQ]$ come

$$M = t_{1/2PQ}(P)$$

$$P \xrightarrow{\quad} M \xrightarrow{\quad} R$$

Proposizione 6.3.1

Dati $P, Q \in A$ e dato un riferimento affine $RA = [O, B]$ abbiamo che le coordinate del punto medio di P e Q sono le semisomme delle coordinate omonime di P e di Q .

Definizione 6.3.4: Punto simmetrico

In $A_n(\mathbb{R})$ dati i punti P e C diremo che S è il **punto simmetrico** di P rispetto a C se C è il punto medio di $[P, S]$.

6.4 Rappresentazioni analitiche

Definizione 6.4.1: Equazioni parametriche di una retta in $A_n(\mathbb{R})$

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento fissato in $A_n(\mathbb{R})$, ove $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Sia $r = [P, V_1 = \mathcal{L}(v)]$ la retta di origine il punto $P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ e spazio di traslazione generato da $v = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. Il generico vettore w di $\mathcal{L}(v)$ è proporzionale al vettore v , cioè $w = tv$, con $t \in \mathbb{R}$, quindi, $w = (tl_1, tl_2, \dots, tl_n)$. Dato che la retta r è il luogo dei traslati di P attraverso i vettori di $\mathcal{L}(v)$, applicando le equazioni del teorema precedente si ottengono le coordinate del generico punto di r

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + l_1 t \\ x_2 = x'_2 + l_2 t \\ \dots\dots\dots \\ x_n = x'_n + l_n t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \quad (l_1, l_2, \dots, l_n) \neq \underline{0}$$

tali equazioni sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_n(\mathbb{R})$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si ottengono le coordinate di tutti i punti di una retta e, quindi, tutti i punti di una retta sono ∞^1 .

Definizione 6.4.2: Parametri direttori

Si dicono **parametri direttori** di $r = [P, V_1]$, le componenti di un qualunque vettore nullo di V_1 .

Osservazione: I parametri direttori di una retta sono, quindi, determinati a meno di un fattore non nullo di proporzionalità. Definiamo la classe dei parametri direttori di r come $p.d.r = [(l_1, l_2, \dots, l_n)]$ con (l_1, l_2, \dots, l_n) un qualsiasi vettore appartenente a V_1 .

Equazioni parametriche di una retta in $A_2(\mathbb{R})$

In $A_2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento $RA = [O, B]$, ove $B = (e_1, e_2)$. Una retta $r = [P, V_1]$ è il luogo dei traslati di un punto P mediante i vettori di $V_1 \subset V_2$. Se P ha coordinate (x_0, y_0) e $V_1 = \mathcal{L}(v)$, ove $v = le_1 + me_2$, le equazioni della definizione diventano

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad \text{ove } t \in \mathbb{R}, \quad (l, m) \neq (0, 0)$$

e sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_2(\mathbb{R})$.

Equazioni parametriche di una retta in $A_3(\mathbb{R})$

In $A_3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento $RA = [O, B]$, ove $B = (e_1, e_2, e_3)$. Una retta $r = [P, V_1]$ è il luogo dei traslati di un punto P mediante i vettori di $V_1 \subset V_3$. Se P ha coordinate (x_0, y_0, z_0) e $V_1 = \mathcal{L}(v)$, ove $v = le_1 + me_2 + ne_3$, le equazioni della definizione diventano

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{ove } t \in \mathbb{R}, \quad (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$$

e sono dette **equazioni parametriche** di r in $A_3(\mathbb{R})$.

Osservazione: In modo del tutto analogo possiamo determinare le equazioni parametriche di sottospazi lineari di dimensione n , che quindi dipenderanno da n parametri.

Equazione cartesiana di una retta in $A_2(\mathbb{R})$

In $A_2(\mathbb{R})$ una retta si può rappresentare attraverso le sue equazioni parametriche in questo modo

$$\begin{cases} x = x_p + lt \\ y = y_p + mt \end{cases}$$

possiamo convertire questo sistema lineare in forma matriciale e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} x - x_p & y - y_p \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

Quindi vale la relazione

$$((x - x_p)m)(l(y - y_p)) = mx - ly - mx_p + ly_p = 0$$

Possiamo raggruppare i termini noti $-mx_p + ly_p$ in un generico termine c e quindi l'equazione cartesiana della retta diventa

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

Quindi i parametri direttori della generica retta r saranno $p.d.r = [(l, m)] = [(-b, a)]$.

Mutua posizione di due rette in $A_2(\mathbb{R})$

Siano due rette

$$r : ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

$$s : a'x + b'y + c' = 0 \quad (a', b') \neq (0, 0)$$

La loro intersezione può essere

$$r \cap s = \begin{cases} \text{un unico punto se } r \text{ e } s \text{ sono incidenti} \\ \emptyset \text{ se } r \text{ e } s \text{ sono parallele e distinte} \\ r \equiv s \text{ se sono coincidenti} \end{cases}$$

Consideriamo il sistema

$$r \cap s = \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Le coordinate dei punti di $r \cap s$ sono le soluzioni del sistema. Posti

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \text{la matrice incompleta del sistema,} \quad A|B = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} \quad \text{la matrice completa del sistema}$$

possiamo dire che $\rho(A) \geq 1$ poiché abbiamo richiesto che $(a, b) \neq (0, 0)$ e $\rho(A) \leq 2$. Quindi abbiamo due casi possibili

1. se $\rho(A) = 2 \implies \rho(A) = \rho(A|B) = 2$, quindi il sistema è compatibile e ha ∞^{2-2} soluzioni $\implies \exists!$ soluzione del sistema $\implies r \cap s = \{P\} \implies r \cap s$ sono **incidenti**.
2. se $\rho(A) = 1$ allora $r \parallel s$, ma non sappiamo se esse siano parallele e distinte o se esse coincidano. Perciò dobbiamo suddividere in due sottocasi
 - (a) se fossero parallele e distinte il sistema non sarebbe compatibile, perciò $2 = \rho(A|B) > \rho(A) = 1$
 - (b) se invece $\rho(A) = 1$ e $\rho(B) = 1$ il sistema ammette ∞^{2-1} soluzioni, perciò $r \equiv s \implies r \parallel s$ se $\rho(A) = 1$

Fasci di rette in $A_2(\mathbb{R})$

Definizione 6.4.3: Fascio improprio di rette

Si dice **fascio improprio di rette** l'insieme di tutte e sole le rette del piano $A_2(\mathbb{R})$ parallele ad una retta data.

Proposizione 6.4.1

Una retta appartiene al fascio improprio di rette parallele alla retta $r = [P, V_1] : ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, se, e soltanto se, ha un'equazione del tipo

$$ax + by + k = 0 \quad \text{ove} \quad k \in \mathbb{R}$$

detta **equazione del fascio improprio di rette**. Da cui si deduce che le rette di un fascio improprio di rette sono ∞^1

Osservazione: Tutte e sole le rette parallele ad r hanno parametri direttori $[(-b, a)]$ e quindi r e s sono la stessa retta $\iff (a, b, c) \sim (a', b', c')$.

Definizione 6.4.4: Fascio proprio di rette

Si dice **fascio proprio di rette** l'insieme di tutte le rette di $A_2(\mathbb{R})$ passanti per un punto P dato, detto **centro** o **sostegno** del fascio.

Proposizione 6.4.2

Siano $r : ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$, due distinte rette incidenti in un punto P . Una retta s appartiene al fascio di centro P se, e soltanto se, ha un'equazione di tipo

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \quad \text{ove} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad e \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

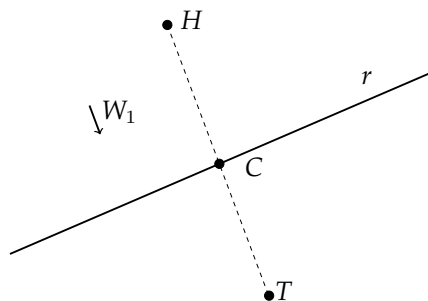
detta **equazione del fascio proprio di rette**. Se nell'equazione risulta $\lambda \neq 0$, posto $k = \mu/\lambda$, si ottiene

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0 \quad \text{ove} \quad k \in \mathbb{R}$$

detta **equazione ridotta del fascio proprio di rette**, in cui, ovviamente, la retta $r' : a'x + b'y + c' = 0$ non è rappresentata. Quindi possiamo dire che le rette di un fascio proprio di rette sono ∞^1 .

Simmetrie in $A_2(\mathbb{R})$ **Definizione 6.4.5: Simmetria rispetto ad una retta**

Il punto T si dice **simmetrico** del punto H , rispetto alla retta $r = [P, V_1]$, detta **asse di simmetria**, nella direzione $W_1 \neq V_1$, se lo è nella simmetria di centro $C = r \cap s$, dove $s = [H, W_1]$. Tale simmetria si dice anche **simmetria rispetto ad una retta in una direzione assegnata**.

**Equazione cartesiana di un piano in $A_3(\mathbb{R})$**

In $A_3(\mathbb{R})$ dato il $RA = [O, B]$, con $B = (e_1, e_2, e_3)$. Sia $\alpha = [P, V_2]$ un piano con $P = (x_p, y_p, z_p)$ e $V_2 = \mathcal{L}(v, v')$ (con $v \neq kv'$), tali che

$$v = le_1 + me_2 + ne_3 \quad v' = l'e_1 + m'e_2 + n'e_3$$

Il generico vettore $w \in V_2$ si scrive come $w = tv + t'v'$. Quindi $t_w(P)$ è il generico punto appartenente a α . Di conseguenza possiamo dire che

$$\begin{cases} x = x_p + tl + t'l' \\ y = y_p + tm + t'm' \\ z = z_p + tn + t'n' \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tl + t'l' \\ tm + t'm' \\ tn + t'n' \end{pmatrix}$$

cioè, per l'equazione della traslazione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sono le coordinate del generico punto di α . Date dalla somma di $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$

cioè le coordinate di P con $\begin{pmatrix} tl + t'l' \\ tm + t'm' \\ tn + t'n' \end{pmatrix}$ cioè le componenti di w .

Seguendo un ragionamento analogo a quello fatto per le rette in $A_2(\mathbb{R})$ possiamo descrivere un piano in $A_3(\mathbb{R})$ come

$$\begin{vmatrix} x - x_p & y - y_p & z - z_p \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

e da questa ne ricaviamo la seguente equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

detta **equazione cartesiana** del piano in $A_3(\mathbb{R})$. Tale equazione è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Equazioni cartesiane delle rette in $A_3(\mathbb{R})$

Fissiamo un $RA = [O, B]$ con $B = (e_1, e_2, e_3)$ e data una retta $r = [P, V_1 = \mathcal{L}(l, m, n)]$ possiamo scrivere l'equazione parametrica della retta

$$r : \begin{cases} x = x_p + tl \\ y = y_p + tm \\ z = z_p + tn \end{cases} \quad \text{con} \quad (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$$

Da cui deriva la seguente relazione

$$\frac{x - x_p}{l} = \frac{y - y_p}{m} = \frac{z - z_p}{n}$$

in particolare, se poniamo ad esempio $l \neq 0$, otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = \frac{m}{l}(x - x_p) + y_p \\ z = \frac{n}{l}(x - x_p) + z_p \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{m}{l}x + k \\ z = \frac{n}{l}x + h \end{cases} \quad \text{ove} \quad h, k \in \mathbb{R}$$

esistono, ovviamente le equazioni relative ai casi $m \neq 0$ e $n \neq 0$ e, dato che la terna (l, m, n) è non nulla, ogni retta ammette sempre, almeno, una rappresentazione simile. In ogni caso, qualunque essa sia, possiamo concludere che una retta si rappresenta con un sistema di due equazioni lineari nelle incognite x, y e z , in cui il rango della matrice incompleta è uguale a 2. E infatti sussiste anche il viceversa, cioè

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

rappresenta una retta. Infatti per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni, cioè le sue soluzioni dipendono da un solo parametro.

Analogamente a quanto già osservato in $A_2(\mathbb{R})$, dalla precedente equazione deriva che le componenti, dei vettori dello spazio di traslazione della retta r , sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a una rappresentazione cartesiana di r stessa. Quindi possiamo dedurre la classe dei parametri direttori della retta r attraverso la regola dei minori. L'insieme delle ∞^1 soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

è

$$\left\{ \left(t \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -t \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, t \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Mutua posizione di due piani in $A_3(\mathbb{R})$

Fissato un RA e dati due piani in $A_3(\mathbb{R})$

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad \alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

la loro intersezione è data dal sistema

$$\alpha \cap \alpha' : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo distinguere in 3 casi:

1. $\rho(A) = 2 \implies \rho(A) = \rho(A|B) = 2$ quindi il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni $\implies \alpha \cap \alpha' = r$, quindi α e α' sono due piani **incidenti**.
2. Nel caso in cui $\rho(A) = 1$ dobbiamo distinguere in due sottocasi
 - (a) $\rho(A|B) = 2$ e $\rho(A) = 1$, il sistema non è compatibile, quindi $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$ e α è parallelo e distinto da α' . α e α' sono detti **paralleli e distinti**.
 - (b) $\rho(A) = 1$ e $\rho(A|B) = 1$, il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni. Quindi l'insieme delle soluzioni dipende da due parametri $\implies \alpha \equiv \alpha'$.

Proposizione 6.4.3 Condizione di parallelismo tra piani

$\alpha \parallel \alpha' \iff \rho(A) = 1 \iff a = ka' \ b = kb' \ c = kc' \iff [(a, b, c)] = [(ka', kb', kc')] = [(a', b', c')]$. Questa viene denominata condizione analitica di parallelismo tra piani.

Fasci di piani in $A_3(\mathbb{R})$

Definizione 6.4.6: Fascio improprio di piani

Si dice **fascio improprio di piani** l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ paralleli a un piano dato.

Proposizione 6.4.4

Un piano appartiene al fascio improprio di piani paralleli ad $\alpha = [P, V_2] : ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, se, e soltanto se, ha un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + k = 0 \quad \text{ove } k \in \mathbb{R}$$

detta **equazione del fascio improprio di piani**. I piani di un fascio improprio sono ∞^1 .

Definizione 6.4.7: Fascio proprio di piani

Si dice **fascio proprio di piani**, l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ passanti per una retta data r , detta **asse** o **sostegno** del fascio.

Proposizione 6.4.5

Siano r una retta, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, due distinti piani per r . Un piano β appartiene al fascio di sostegno r se, e soltanto

se, ha un'equazione del tipo

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad \text{ove } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad e \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

detta **equazione del fascio proprio di piani**. Se nell'equazione risulta $\lambda \neq 0$, posto $h = \mu/\lambda$, si ottiene

$$ax + by + cz + d + h(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad \text{ove } h \in \mathbb{R}$$

detta **equazione ridotta del fascio proprio di piani**, in cui ovviamente il piano $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ non è rappresentato. Dalla rappresentazione ridotta del fascio si deduce che i piani di un fascio proprio sono ∞^1 .

Mutua posizione di due rette in $A_3(\mathbb{R})$

Siano assegnate le rette

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$s : \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \quad \rho \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$$

Sia

$$r \cap s : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$$

il sistema costituito dalle loro equazioni e siano A e $A|B$ le matrici incompleta e completa associate al sistema.

$$AX = B \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \\ -d''' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$$

Esaminiamo i 4 casi possibili:

1. $\rho(A|B) = 4 \implies \rho(A) = 3$ poiché $A|B$ è ottenuta aggiungendo una colonna ad A , quindi $\rho(A|B) \leq \rho(A) + 1 \implies \rho(A) = 3$. Il sistema non è compatibile per il teorema di Rouché-Capelli $\implies r$ e s sono o parallele e disgiunte, oppure sghembe. Ma siccome $\rho(A) = 3 \implies r = [P, V_1] \quad s = [P', V'_1] \quad V_1 \neq V'_1 \implies r$ non è parallela ad s . Quindi r e s sono **sghembe**.
2. $\rho(A|B) = 3$ e $\rho(A) = 3$. Il sistema è compatibile e per il teorema di Rouché-Capelli esiste un'unica soluzione $r \cap s = \{P\} \implies r$ e s si dicono **incidenti**.
3. $\rho(A|B) = 3$ e $\rho(A) = 2$. Il sistema non è compatibile per il teorema di R.C. Siccome $\rho(A) = 2 \implies V_1 = V'_1 \implies r$ è parallela a s e $r \neq s$. Si dice che r e s sono **parallele e distinte**.
4. $\rho(A|B) = \rho(A) = 2$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni. Si dice che le rette r e s sono **coincidenti**.

Definizione 6.4.8: Stella propria di rette

In $A_3(\mathbb{R})$ si dice **stella propria** di rette, l'insieme di tutte e sole le rette passanti per un punto assegnato.

Osservazione: Possiamo scrivere la rappresentazione di tutte e sole le rette della stella passanti per $P = (x_0, y_0, z_0)$ come

$$\alpha : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

e da qui abbiamo che

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = \begin{cases} m(x - x_0) = l(y - y_0) \\ n(x - x_0) = l(z - z_0) \end{cases}$$

dividendo per l (supponendo $l \neq 0$) si ottiene che abbiamo solo due parametri liberi e quindi abbiamo ∞^2 rette nella stella di rette per P .

Definizione 6.4.9: Stella impropria di rette

In $A_3(\mathbb{R})$ si dice **stella impropria** di rette, l'insieme di tutte e sole le rette parallele ad una retta data.

Osservazione: Una rappresentazione analitica di tutte le rette parallele a una retta assegnata, di parametri direttori (l, m, n) , è

$$\beta : \begin{cases} x = x' + tl \\ y = y' + tm \\ z = z' + tn \end{cases} \iff \begin{cases} m(x - x') = l(y - y') \\ n(x - x') = l(z - z') \end{cases}$$

Questa volta non sono i parametri direttori ad essere i parametri, ma i punti di $P = (x', y', z')$. Quest'ultima è detta **equazione cartesiana della stella impropria** di r . Abbiamo ∞^2 rette in $A_3(\mathbb{R})$ parallele ad una retta data.

Mutua posizione di due piani in $A_3(\mathbb{R})$

Siano

$$\alpha = [P, V_2] : ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$r = [Q, V_1] : \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \quad \text{con } \rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

e sia $r \cap \alpha$ rappresentato dal sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sono 3 i casi possibili

1. sia $\rho(A|B) = \rho(A) = 3$, il sistema è compatibile e, per il teorema di R.C. ammette un'unica soluzione $r \cap \alpha = \{P\} \implies r$ e α si dicono **incidenti**
2. $\rho(A|B) = 3$ e $\rho(A) = 2$, il sistema non è compatibile, quindi $r \parallel \alpha$ e $r \notin \alpha$
3. $\rho(A|B) = 2$ e $\rho(A) = 2$, il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni, quindi r è contenuto in α (r è anche chiaramente parallelo ad α)

Osservazione: $\rho(A) = 2 \iff r \parallel \alpha$ ovvero

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \iff a \underbrace{\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}}_{\Gamma_1 \rightarrow l} - b \underbrace{\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}}_{\Gamma_2 \rightarrow m} + c \underbrace{\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}}_{\Gamma_3 \rightarrow n} = 0$$

Quindi posti i parametri direttori $[(l, m, n)]$ possiamo dare la

Proposizione 6.4.6 Condizione di parallelismo tra retta e piano

La condizione di parallelismo tra retta e piano si esprime come

$$al + bm + cn = 0$$

dove $[(l, m, n)]$ sono i parametri direttori della retta e il piano è $ax + by + cz + d = 0$.

Definizione 6.4.10: Stella impropria di piani

Si dice **stella impropria di piani** l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ paralleli ad una retta data.

Osservazione: Chiaramente dalla proposizione precedente segue che dati parametri direttori $[(l, m, n)]$ abbiamo che esistono ∞^2 piani appartenenti alla stella impropria di piani.

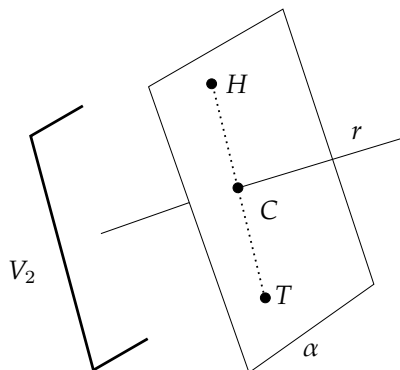
Definizione 6.4.11: Stella propria di piani

Si dice **stella propria di piani** l'insieme di tutti e soli i piani di $A_3(\mathbb{R})$ passanti per un punto assegnato detto **centro** o **sostegno** della stella.

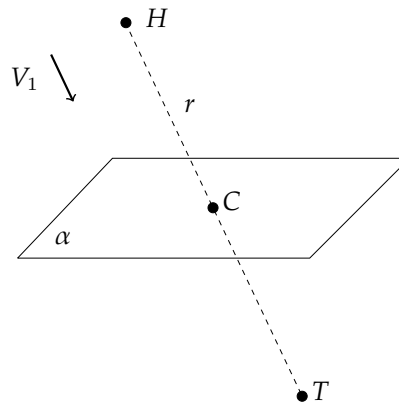
Osservazione: Analogamente abbiamo ∞^2 piani nella stella propria di piani.

Simmetrie in $A_3(\mathbb{R})$ **Definizione 6.4.12: Simmetrico rispetto a una retta e una giacitura assegnata**

Il punto T si dice **simmetrico** del punto H , rispetto alla retta $r = [Q, V_1]$, nella giacitura $V_2 \not\subseteq V_1$, se è simmetrico di H rispetto al punto $C = \alpha \cap r$, dove $\alpha = [H, V_2]$.

**Definizione 6.4.13: Simmetria rispetto a un piano in una direzione assegnata**

Un punto T si dice **simmetrico** del punto H , rispetto al piano $\alpha = [Q, V_2]$, nella direzione $V_1 \not\subseteq V_2$, se è simmetrico di H rispetto al punto $C = \alpha \cap r$, dove $r = [H, V_1]$.



6.5 Curve e superfici algebriche

Definizione 6.5.1: Curva algebrica reale

Si dice **curva algebrica reale** di $A_2(\mathbb{R})$ l'insieme dei punti del piano $A_2(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$, dove f è un polinomio a coefficienti reali e non costante nelle variabili x e y .

Definizione 6.5.2: Superficie algebrica reale

Si dice **superficie algebrica reale** di $A_3(\mathbb{R})$ l'insieme dei punti di $A_3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$ dove f è un polinomio a coefficienti reali e non costante nelle variabili x, y, z .

Definizione 6.5.3: Curva algebrica reale

Si dice **curva algebrica reale** di $A_3(\mathbb{R})$ l'insieme dei punti di $A_3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano un sistema delle equazioni di due superfici algebriche reali che in essa si intersecano.

Capitolo 7

Spazi euclidei

7.1 $E_n(\mathbb{R})$, spazio euclideo di dimensione n

Definizione 7.1.1: Spazio euclideo

Si dice **spazio euclideo** di dimensione n sul campo \mathbb{R} la struttura costituita da uno spazio affine $A_n(\mathbb{R})$ il cui spazio vettoriale $V_n^o(\mathbb{R})$ sia dotato di un prodotto scalare "·" definito positivo.

Definizione 7.1.2: Ortogonalità tra sottospazi

Siano $S_h = [P, V_h]$ e $S_k = [Q, V_k]$ due sottospazi lineari di $E_n(\mathbb{R})$. Diremo che S_h è **ortogonale** a S_k se

$$V_h \subseteq V_k^\perp \quad \text{oppure} \quad V_h \supseteq V_k^\perp$$

Osservazione: La relazione di ortogonalità è simmetrica. Infatti se $S_h \perp S_k$ allora

1. $V_h \subseteq V_k^\perp \implies V_h^\perp \supseteq (V_k^\perp)^\perp = V_k \implies V_k \subseteq V_h^\perp \implies S_k \perp S_h$
2. $V_h \supseteq V_k^\perp \implies V_h^\perp \subseteq (V_k^\perp)^\perp = V_k \implies V_k \supseteq V_h^\perp \implies S_h \perp S_k$

In entrambi i casi $S_h \perp S_k \iff S_k \perp S_h$. Quindi diremo semplicemente che S_h e S_k sono ortogonali.

Proposizione 7.1.1

In $E_2(\mathbb{R})$, dati la retta r e il punto H , esiste un'unica retta passante per H e ortogonale a r .

Dimostrazione: Dimostriamo prima di tutto l'esistenza della retta, successivamente ci occuperemo dell'unicità. Poniamo $r = [P, V_1]$ e definiamo una $s : [H, V_1^\perp]$. s è una retta poiché $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^\perp$, per la formula di Grassmann V_1^\perp ha dimensione 1, quindi s è una retta. $H \in s$ per costruzione e $r \perp s$ perché $V_1^\perp \subseteq V_1^\perp$, cioè lo spazio di traslazione della retta s contiene la direzione ortogonale a V_1 . Ora l'unicità della retta segue dall'unicità dello spazio di traslazione e poiché esso ha dimensione 1, anche la retta è unica. ☺

Proposizione 7.1.2

In $E_3(\mathbb{R})$, siano assegnati una retta r e un piano α . Dato un punto H

1. esiste un'unica retta s passante per H e ortogonale al piano α
2. esiste un unico piano β passante per H e ortogonale alla retta r

Dimostrazione: Dimostriamo i 2 punti separatamente

1. poniamo $\alpha = [P, V_2]$ e $s = [H, V_2^\perp]$. s è una retta perché $\dim(V_2^\perp) = 1$, poiché $\mathbb{R}^3 = V_2 \oplus V_2^\perp$ per la formula di Grassmann. $H \in s$ e $s \perp \alpha$ valgono per costruzione.
2. poniamo $r = [Q, V_1]$ e definiamo $\beta = [H, V_1^\perp]$. Verifichiamo che β sia un piano. Osserviamo che dato che

$$\underbrace{\mathbb{R}^3}_3 = \underbrace{V_1}_1 \oplus \underbrace{V_1^\perp}_2 \implies \dim(V_1^\perp) = 2$$

quindi β è un piano. $H \in \beta$ e $\beta \perp r$ valgono per costruzione. L'unicità del piano segue dall'unicità di V_2 di dimensione 2 e perpendicolare a V_1 .

☺

Proposizione 7.1.3

Siano $r : [P, V_1]$ e $\alpha = [Q, V_2]$ rispettivamente una retta e un piano di $E_3(\mathbb{R})$. Se $r \perp \alpha$ abbiamo che

1. $r \perp s \quad \forall s \subseteq \alpha$, cioè r è perpendicolare a ogni retta s contenuta nel piano α
2. $\alpha \perp \beta \quad \forall \beta \supseteq r$, cioè α è perpendicolare a ogni piano β contenente r

Dimostrazione: Dimostriamo i 2 punti separatamente

1. Sia $s \subseteq \alpha$ con $s = [H, V_1']$, allora

$$\underbrace{V_1' \subseteq V_2}_{\text{poiché } s \subseteq \alpha} = \underbrace{V_1^\perp}_{\text{poiché } r \perp s} \implies r \perp s$$

2. Sia $\beta \supseteq r$ con $\beta = [H, V_2']$, allora

$$\underbrace{V_2' \supseteq V_1}_{\text{poiché } \beta \supseteq r} = \underbrace{V_2^\perp}_{\text{poiché } r \perp \alpha} \implies \alpha \perp \beta$$

☺

Proposizione 7.1.4

Siano α e r rispettivamente un piano e una retta di $E_3(\mathbb{R})$, con α non ortogonale a r . Allora esiste un unico piano β ortogonale ad α e contenente la retta r .

Dimostrazione: Sia $\beta = [P, V_1 \oplus V_2^\perp]$ dove $r = [P, V_1]$ e $\alpha = [Q, V_2]$. β è un piano perché $\dim(V_1) = 1$, $\dim(V_2^\perp) = 1$ e $V_1 \neq V_2^\perp$ (poiché $\alpha \not\perp r$) $\implies \dim(V_1 \oplus V_2^\perp) = 2 \implies \beta$ è un piano. Per costruzione abbiamo che $\beta \perp \alpha$, infatti lo spazio di traslazione di β è:

$$V_1 \oplus V_2^\perp \supseteq V_2^\perp$$

e V_2 è lo spazio di traslazione di α . Inoltre β contiene r per le proposizioni precedenti ed è ovviamente ortogonale a α . Per costruzione β è l'unico piano che soddisfa queste condizioni. ☺

7.2 Geometria analitica in $E_n(\mathbb{R})$

Definizione 7.2.1

In $E_n(\mathbb{R})$ si dice **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia $RC = [O, \mathcal{B}]$ dove O è un punto di $E_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ è una base ortonormale.

N.B.

1. In $E_2(\mathbb{R})$ si conviene indicare la base ortonormale come $\mathcal{B} = (i, j)$
2. In $E_3(\mathbb{R})$ si conviene indicare la base ortonormale come $\mathcal{B} = (i, j, k)$

7.3 Ortogonalità

Ortogonalità fra rette

Siano r_1, r_2 due rette di $E_2(\mathbb{R})$ e sia $r_1 = [P, f(v)]$ con $v = li + mj$, analogamente $r_2 = [P, f(v')]$ con $v' = l'i + m'j$

$$v \perp v' \iff ll' + mm' = 0$$

se r_1 ha equazione $ax + by + c = 0$ e r_2 ha equazione $a'x + b'y + c' = 0$ allora $P.d.r_1 = [(-b, a)]$, e $P.d.r_2 = [(-b', a')]$ quindi

$$r_1 \perp r_2 \iff -b(-b') + aa' = bb' + aa' = 0$$

Se abbiamo due rette r_1, r_2 in $E_3(\mathbb{R})$ con $p.d.r_1 = [(l, m, n)]$, $p.d.r_2 = [(l', m', n')]$ allora $r_1 \perp r_2 \iff v_1 \perp v_2$, cioè il generatore della direzione della retta r_1 , è ortogonale a v_2 , che è generatore della direzione della retta r_2 .

$$v_1 = li + mj + nk \quad v_2 = l'i + m'j + n'k$$

$$v_1 \perp v_2 \iff r_1 \perp r_2 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

Analogamente se r_1, r_2 sono rette in $E_n(\mathbb{R})$ con $p.d.r_1 = [(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, $p.d.r_2 = [(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)]$

$$r_1 \perp r_2 \iff x_1x'_1 + x_2x'_2 + \dots + x_nx'_n = 0$$

Direzione ortogonale a un iperpiano

Proposizione 7.3.1

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $E_2(\mathbb{R})$, allora $[(a, b)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a r .

Dimostrazione: Per ipotesi $p.d.r = [(-b, a)]$ e abbiamo che per essere ortogonale la direzione $(a, b)(-b, a) = 0$ oppure equivalentemente $(ai + bj)(-bi + aj) = 0 \implies [(a, b)] \perp r$. ☺

Proposizione 7.3.2

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano in $E_3(\mathbb{R})$, allora $[(a, b, c)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a π .

Dimostrazione: Sia $v \in V_2$ tale che pi ha spazio di traslazione V_2 . Se $v = (x, y, z) \implies ax + by + cz = 0 \iff (x, y, z)(a, b, c) = 0 \implies (a, b, c) \perp v \forall v \in V_2$ ☺

Proposizione 7.3.3

Più in generale: sia S_{n-1} un iperpiano in $E_n(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0 \implies [(a_1, a_2, \dots, a_n)]$ è la classe dei parametri direttori della direzione ortogonale a S_{n-1} .

Ortogonalità fra piani in $E_3(\mathbb{R})$

Proposizione 7.3.4

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani in $E_3(\mathbb{R})$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, allora $\alpha \perp \beta \iff aa' + bb' + cc' = 0$

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff V_2 \supseteq V_2'^\perp$ dove V_2 è la giacitura di α e V_2' è la giacitura di β .

$$V_2'^\perp = [\mathcal{L}((a', b', c'))] \iff (a', b', c') \in V_2$$

$$(x, y, z) \in V_2 \iff ax + by + cz = 0 \text{ e quindi } (a', b', c') \in V_2 \iff aa' + bb' + cc' = 0 \quad \oplus$$

Ortogonalità fra retta e piano in $E_3(\mathbb{R})$

Proposizione 7.3.5

In $E_3(\mathbb{R})$, sia r una retta con $p.d.r = [(l, m, n)]$ e sia α un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, allora $r \perp \alpha$ se, e soltanto se, $[(a, b, c)] = [(l, m, n)]$

Dimostrazione: $r \perp \alpha \iff V_1 = V_2^\perp$ dove V_1 è la direzione della retta e V_2 è la giacitura di α .

$$V_1 = \mathcal{L}((l, m, n)) = V_2^\perp = \mathcal{L}((a, b, c)) \iff [(a, b, c)] = [(l, m, n)] \quad \oplus$$

7.4 Distanza

Distanza fra due punti in $E_n(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Q = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. La distanza tra P e Q è la norma del vettore \vec{PQ} , quindi

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$

$$\vec{PQ} = (x'_1 - x_1)e_1 + \dots + (x'_n - x_n)e_n$$

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}$$

1. In $E_2(\mathbb{R})$, dati $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$

$$\vec{PQ} = (x' - x)i + (y' - y)j$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

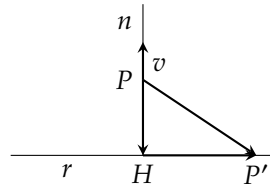
2. In $E_3(\mathbb{R})$, dati $P = (x, y, z)$ e $Q = (x', y', z')$

$$\vec{PQ} = (x' - x)i + (y' - y)j + (z' - z)k$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Distanza punto retta in $E_2(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_0, y_0)$ e $r = [Q, V_1]$ rispettivamente un punto e una retta in $E_2(\mathbb{R})$. Definiamo la distanza tra il punto P e la retta r come la distanza tra P e il punto H , piede della perpendicolare per P a r (cioè l'intersezione tra r e la retta perpendicolare a r passante per P).



Determiniamo $||\vec{PH}||$. Se r ha equazione $ax + by + c = 0$ allora $V_1^\perp = \mathcal{L}(ai + bj)$. Posta

$$n = [P, V_1^\perp] \implies n = [P, \mathcal{L}(ai + bj)]$$

$H = n \cap r$ è la proiezione di P su r (cioè l'intersezione tra r e la retta per P^\perp). Sia $P' = (x', y')$ un generico punto su r di equazione $ax + by + c = 0$. PH è la componente di PP' lungo v .

$$PP' = (x' - x_0)i + (y' - y_0)j$$

$$\vec{PH} = \frac{\vec{PP'} \cdot v}{v \cdot v} v$$

$$d(P, r) = d(P, H) = ||\vec{PH}|| = \left\| \left(\frac{\vec{PP'} \cdot v}{v \cdot v} v \right) \right\| = \frac{|\vec{PP'} \cdot v|}{||v||} = \frac{|(x' - x_0)a + (y' - y_0)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x'a + y'b - x_0a - y_0b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e, dato che P' appartiene a r e che, quindi, $ax' + by' = -c$, si ha

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza punto piano in $E_3(\mathbb{R})$

Siano $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ rispettivamente un punto e un piano di $E_3(\mathbb{R})$. Definiamo la distanza $d(P, \alpha)$ come la distanza tra P e il punto H , intersezione tra α e la retta per $p \perp \alpha$. Infatti $d(P, \alpha) = d(P, H) = ||\vec{PH}||$. Analogamente al caso precedente abbiamo che

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza punto retta in $E_3(\mathbb{R})$

Siano P e $r = [Q, V_1]$ rispettivamente un punto e una retta in $E_3(\mathbb{R})$. Sia α il piano per P ortogonale a r e sia H l'intersezione tra r e α . Definiamo $d(P, r) = d(P, H) = ||\vec{PH}||$.

Esempio 7.4.1

In $E_3(\mathbb{R})$ determiniamo la distanza di $P = (3, 0, 1)$ da $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad P.d.r = [(-1, 1, 0)] = [(a, b, c)] \quad \alpha : -x + y + 0 \cdot z + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per P : $-3 + 0 + d = 0 \quad d = 3 \quad \alpha : -x + y + 3 = 0$

$$\alpha \cap r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y + 3 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 0x + 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \implies x = 2; y = -1$$

$$H : (2, -1, 2) \quad d(P, r) = ||\vec{PH}|| = \vec{PH} = (-1)i + (-1)j + k = -1 - j + k$$

Distanza tra due rette sghembe in $E_3(\mathbb{R})$

Definizione 7.4.1: Retta di minima distanza

Si dice **retta di minima distanza** tra due rette r e s sghembe in $E_3(\mathbb{R})$ una retta ortogonale e incidente sia ad r che ad s .

Definizione 7.4.2: Distanza tra due rette sghembe in $E_3(\mathbb{R})$

Definiamo la **distanza tra due rette r e s sghembe** in $E_3(\mathbb{R})$ come la distanza tra i punti R e S ottenuti intersecando la retta t di minima distanza tra r e s con r e s .

Proposizione 7.4.1

La retta di minima distanza tra r e s esiste ed è unica.

Assi e piani assiali**Definizione 7.4.3: Asse**

In $E_2(\mathbb{R})$ dati due punti P, Q , si dice **asse** del segmento $[P, Q]$ la retta passante per il punto medio di P e Q e ortogonale alla retta per P e Q .

Proposizione 7.4.2

L'asse di un segmento $[P, Q]$ è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q .

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $\|\vec{PH}\| = \|\vec{QH}\| \quad \forall H \in a$ (asse di $[P, Q]$).

$$\vec{PH} = \vec{PM} + \vec{MH} \quad e \quad \vec{QH} = \vec{QM} + \vec{MH}$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} \quad \|\vec{QH}\| = \sqrt{\|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} \quad \text{ma} \quad \|\vec{PM}\| = \|\vec{QM}\|$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} = \sqrt{\|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2} = \|\vec{QH}\|$$

⊙

Esempio 7.4.2

Determiniamo l'asse di $P = (1, 1)$ e $Q = (2, -4)$. Il punto $M = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\vec{PQ} = (2-1)i + (-4-1)j = 1-5j = (1, -5)$$

$r \perp \vec{PQ}$ per M è del tipo

$$x - 5y + c = 0 \quad \text{e passa per } M$$

$$\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \quad c = -9 \implies r : x - 5y - 9 = 0$$

Alternativamente

$$r : H \in r \iff d(H, P) = d(H, Q)$$

se $H = (x, y)$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \implies r : 2x - 10y - 18 = 0$$

Definizione 7.4.4: Piano assiale

In $E_3(\mathbb{R})$ si dice **piano assiale** del segmento $[P, Q]$ il piano α passante per il punto medio di P e Q e ortogonale al segmento $[P, Q]$.

Proposizione 7.4.3

Il piano assiale del segmento $[P, Q]$ è il luogo dei punti equidistanti tra P e Q .

7.5 Circonferenza e sfera

Definizione 7.5.1: Circonferenza

Dato un punto $C = (x_0, y_0)$ in $E_2(\mathbb{R})$ e dato r , numero reale positivo, si dice **circonferenza** di centro C e raggio r il luogo dei punti aventi distanza r da C .

Definizione 7.5.2: Sfera

Sia $C = (x_0, y_0, z_0)$ e sia r un numero reale positivo. Si dice **sfera** di raggio C e di centro r il luogo dei punti aventi distanza r da C .

Osservazione: La circonferenza è una curva algebrica reale, mentre la sfera è una superficie algebrica reale.

Rappresentazione analitica di una circonferenza in $E_2(\mathbb{R})$

Sia il generico punto $P = (x, y)$ appartenente alla circonferenza di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio r .

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2ax + 2by + x_0^2 + y_0^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Proposizione 7.5.1 Equazione cartesiana di una circonferenza

Tutte e sole le circonferenze si rappresentano come

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 - c > 0$$

e avremo che $C = (-a, -b)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

N.B.

Se r fosse 0 allora $a^2 + b^2 - c = 0$ e quindi $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ rappresenta il solo punto $C = (-a, -b)$.

Proposizione 7.5.2

Per tre punti non allineati in $E_2(\mathbb{R})$ passa un'unica circonferenza.

Rappresentazione analitica di una sfera in $E_3(\mathbb{R})$

Sia il generico punto $P = (x, y, z)$ appartenente alla sfera, allora

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Proposizione 7.5.3 Equazione cartesiana di una sfera

Tutte e sole le sfere si rappresentano come

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

e avremo che $C = (-a, -b, -c)$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

N.B.

Se $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ allora $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ è realizzata dal solo punto $C = (-a, -b, -c)$.

Proposizione 7.5.4

Per quattro punti non complanari di $E_3(\mathbb{R})$ passa un'unica sfera.

Circonferenze in $E_3(\mathbb{R})$ **Definizione 7.5.3: Circonferenza in $E_3(\mathbb{R})$**

In $E_3(\mathbb{R})$ dati un piano α , un suo punto C e un numero reale positivo r , si dice **circonferenza** di centro C e raggio r il luogo dei punti di α aventi distanza r da C .

Osservazione: Una circonferenza appartiene a infinite sfere. Quindi per tre punti non allineati passano infinite sfere.

Proposizione 7.5.5

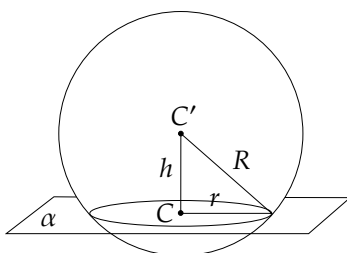
Tutte e sole le circonferenze di $E_3(\mathbb{R})$ ammettono una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \rightarrow \text{piano } \alpha \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$d(C', \alpha) < R \quad \text{ove } C' = (x_0, y_0, z_0) \quad e \quad \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < R$$

Osservazione: Vi sono infinite sfere che intersecano la circonferenza, ma solo in una di esse il centro C' della sfera coincide con il centro C della circonferenza. Il centro della circonferenza C si trova intersecando il piano α con la retta per il centro della sfera C' perpendicolarmente ad α . Per determinare il raggio della circonferenza utilizziamo il teorema di Pitagora. Conosciamo sia $[C, C'] = h$ che il raggio R della sfera. Quindi

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$

**N.B.**

Una circonferenza in $E_3(\mathbb{R})$ si può ottenere anche intersecando anche altre superfici con un piano, non solo una sfera.

Esempio 7.5.1

Determinare se la seguente è una circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \alpha$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 7 \quad \text{e siccome } z = 3 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{che descrive una circonferenza.}$$

Capitolo 8

Ampliamento e complessificazione

Il concetto di ampliamento dello spazio affine, e di conseguenza anche di quello euclideo, si basa sulla relazione di parallelismo. Abbiamo visto che la relazione di parallelismo tra sottospazi lineari di uno spazio affine $A_n(K)$ è una relazione di equivalenza. La classe delle rette parallele è costituita da tutte le rette che hanno lo stesso spazio di traslazione V_1 e che ora diciamo avere la stessa **direzione**. Allo stesso modo abbiamo definito la classe dei piani paralleli come tutti i piani aventi lo stesso spazio di traslazione V_2 e che ora diciamo avere la stessa **giacitura**. Qui avviene il passo fondamentale che è necessario assimilare al meglio per capire tutto ciò che seguirà. Dobbiamo **liberarci della nozione di parallelismo**, da ora in poi quando si parla di spazi ampliati non esisteranno più rette che non si incontrano mai o piani che non si intersecano. Possiamo ora considerare ad esempio lo spazio di traslazione V_1 di una retta $r = [P, V_1]$ come un **punto**, di natura particolare, che chiameremo **punto improprio**, a essa appartenente. La direzione della retta r accomuna anche tutte le rette parallele ad essa e quindi, essendo essa il punto improprio, appartiene a tutte le rette parallele a r e di conseguenza tutte le rette con la stessa direzione si intersecano nel loro punto improprio. Allo stesso modo daremo definizioni di ulteriori enti geometrici impropri, ma il concetto rimane invariato. Rette complanari risultano sempre incidenti, piani paralleli si intersecano nella loro retta impropria. Questo, una volta capito, è il modo più semplice e intuitivo per avvicinarci alla **geometria proiettiva** e, come vedremo in seguito, costituisce l'ambiente migliore per studiare curve, superfici e più in particolare coniche e quadriche.

8.1 Ampliamento proiettivo di $A_2(\mathbb{R})$

Definizione 8.1.1: Piano affine ampliato $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Il **piano affine ampliato** $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$, indotto da $A_2(\mathbb{R})$, è la struttura algebrica così definita

1. l'insieme dei punti che possono essere
 - **propri** cioè l'insieme dei punti di A di $A_2(\mathbb{R})$
 - **impropri** cioè l'insieme dei punti di A_∞ , che sono le direzioni delle rette, ovvero gli spazi di traslazione di dimensione 1
2. l'insieme delle rette che possono essere
 - **proprie** cioè l'insieme delle rette esistenti nello spazio affine, ciascuna arricchita del proprio punto improprio
 - **la retta impropria** cioè il luogo degli ∞^1 punti impropri del piano, tale retta viene indicata con r_∞
3. l'applicazione f dello spazio affine, la quale rimane inalterata, mantiene cioè lo stesso dominio, lo stesso codominio e le stesse proprietà

Proposizione 8.1.1

Due rette distinte di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ sono sempre incidenti.

Dimostrazione: La dimostrazione segue banalmente dalla definizione, ma la diamo per esteso per consolidare meglio le idee. Siano r e s due rette distinte di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$, allora abbiamo 3 possibili casi

1. r e s sono proprie e non parallele tra loro, ciò significa che r è incidente a s in $A_2(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{A}_2(\mathbb{R})$ e il punto improprio di r è diverso da quello di s .
2. r e s sono proprie ma sono fra loro parallele. $r \cap s = \emptyset$ in $A_2(\mathbb{R})$, ma r e s hanno la stessa direzione, quindi si intersecano nello stesso punto improprio in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.
3. r è propria e $s = r_\infty$, cioè la retta impropria. Quindi $r \cap s = r \cap r_\infty$, alla retta impropria appartiene per definizione il punto improprio di r e quindi si intersecano nel punto improprio di r .

☺

Proposizione 8.1.2

Per due punti distinti di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$ passa un'unica retta.

Dimostrazione: Siano A e B i due punti distinti considerati, abbiamo 3 casi possibili

1. A e B sono entrambi propri, quindi esiste un'unica retta in $A_2(\mathbb{R})$ passante per A e B . Inoltre la retta impropria non li contiene essendo essi punti propri e quindi esiste un'unica retta passante per A e B .
2. A è proprio e B è improprio (o viceversa). Poniamo B come direzione V_1 , ciò implica che esiste un'unica retta passante per A e avente come direzione $V_1 = B$.
3. A e B sono entrambi impropri. Nessuna retta propria li contiene entrambi (ogni retta propria ha un unico punto improprio), tuttavia $A, B \in r_\infty$ che è l'unica che li contiene entrambi.

☺

8.2 Geometria analitica in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Indichiamo con

$$\frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

l'insieme delle terne definite a meno di un fattore di proporzionalità reale e non nullo. In cui ρ indica la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità. Quindi consideriamo due terne equivalenti se sono proporzionali.

Proposizione 8.2.1

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento affine di $A_2(\mathbb{R})$ e sia

$$\phi : A \cup A_\infty \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

sia $P \in A$ di coordinate (x, y)

$$\phi(P) = [(x, y, 1)]$$

sia $P \in A_\infty$ corrispondente alla direzione $[(l, m)]$

$$\phi(P) = [(l, m, 0)]$$

la mappa ϕ è una biiezione e le coordinate indotte da ϕ sono chiamate **coordinate omogenee**.

Osservazione: Sia P di coordinate omogenee $[(x_1, x_2, x_3)]$, con $x_3 \neq 0$, quindi punto proprio. Allora le sue coordinate omogenee sono

$$\left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \right]$$

quindi scritto in coordinate affini

$$P = (x, y) = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right) \right]$$

Se invece P è improprio, quindi $x_3 = 0$, allora

$$P = [(x_1, x_2, 0)] \quad [(l, m)] = [(x_1, x_2)]$$

quindi P non ha coordinate affini e le sue coordinate omogenee sono date dai parametri direttori della retta.

Rappresentazione delle rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Sia $RA[O, B]$ un riferimento affine di $A_2(\mathbb{R})$. In $A_2(\mathbb{R})$ l'equazione cartesiana di una retta è

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

per i suoi punti propri $P = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \right]$ dovrà valere l'equazione $ax + by + c = 0$, quindi

$$a \left(\frac{x_1}{x_3} \right) + b \left(\frac{x_2}{x_3} \right) + c = 0$$

quindi, moltiplicando tutto per x_3 , che si suppone non nullo, otteniamo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

Il punto improprio di $ax + by + c = 0$ è $[(-b, a, 0)]$. Sostituiamo in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ le coordinate omogenee $[(-b, a, 0)]$ e otteniamo la seguente

$$a(-b) + ba + 0 = 0$$

che è sempre verificata, quindi $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è l'**equazione omogenea di una retta** r in $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

Siano ora $(a, b) = (0, 0)$, allora $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ si riduce a $0x_1 + 0x_2 + cx_3 = 0$ con $c \neq 0$, $cx_3 = 0$, $x_3 = 0$ è la r_∞ perché rispettata da tutti e soli i punti impropri. L'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta in ogni caso, anche quello della r_∞ , una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$. Di conseguenza è l'equazione cartesiana di una retta di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$.

8.3 Complessificazione di $\tilde{A}_2(\mathbb{R})$

Utilizzare il campo complesso, anziché quello reale, ci consente di dimostrare i teoremi dell'ordine per le curve e le superfici, il cui utilizzo agevola in maniera determinante lo studio delle proprietà geometriche. Definiamo $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il piano affine ampliato e complessificato, in cui

- i **punti** sono le terne, non nulle, di numeri complessi determinati a meno di un fattore di proporzionalità complesso e non nullo.

$$\frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\rho}$$

- le **rette** sono il luogo delle autosoluzioni, non nulle, di un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \quad e \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

Definizione 8.3.1: Punti e rette in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si dicono:

- **punti e rette reali** tutti i punti e le rette che ammettono una rappresentazione reale
- **punti e rette immaginari** tutti i punti e le rette che ammettono solo rappresentazioni immaginarie

Definizione 8.3.2: Coniugati

Si dicono **coniugati** due enti (punti, rette ecc...) che ammettono rappresentazioni coniugate. La funzione di coniugio è quella che ad ogni numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$, associa il suo complesso coniugato

$$\bar{z} = x - iy = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$$

Proposizione 8.3.1

Un ente geometrico (punto, retta, curva ecc...) è reale se, e soltanto se, coincide con il proprio coniugato.

Osservazione: Una retta reale ha infiniti punti immaginari

Osservazione: Se un'equazione reale è realizzata da un punto P allora \bar{P} è soluzione se, e soltanto se, $P \in r$ è reale. Quindi $\bar{P} \in \bar{r}$ e $r = \bar{r}$.

Proposizione 8.3.2

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

1. la retta che congiunge due punti P e \bar{P} immaginari e coniugati è reale.
2. per un punto P immaginario ($P \neq \bar{P}$) passa un'unica retta reale.
3. due rette immaginarie e coniugate si intersecano in un punto reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$.
4. ogni retta r immaginaria ha un unico punto reale in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione: Dimostriamo ogni punto separatamente

1. Siano P e \bar{P} due punti immaginari e coniugati. Sia r la retta che li congiunge. La retta \bar{r} , coniugata di r , rimane individuata da P e \bar{P} , quindi, per l'unicità della retta che congiunge due punti, $r = \bar{r}$, che pertanto è anche reale.
2. La retta $rt(P, \bar{P})$ è reale per la proposizione precedente. Supponiamo per assurdo che esista un $s \neq rt(P, \bar{P})$ retta reale per P . Ciò implica che $\bar{P} \in s$ poiché s è reale. Quindi $s = rt(P, \bar{P})$ che è **assurdo!** Poiché avevamo supposto che s fosse distinta dalla congiungente fra P e \bar{P} . Quindi esiste ed è unica la retta r reale per P .
3. Sia r una retta immaginaria e \bar{r} la sua coniugata. Ovviamente, $r \neq \bar{r}$, altrimenti r sarebbe reale, quindi $r \cap \bar{r}$ è un punto P . Dato che P appartiene ad r e a \bar{r} , il suo coniugato \bar{P} appartiene sia a \bar{r} che a $\bar{\bar{r}}$, che coincide con r . Quindi P coincide con \bar{P} e di conseguenza è reale.
4. Per ipotesi $r \neq \bar{r}$ quindi esiste un punto P intersezione di r e \bar{r} . Per la proposizione precedente P è reale. Sia $S \in r$ un punto reale. Essendo reale S coincide con il proprio coniugato \bar{S} e inoltre $S \in r \cap \bar{r}$. Ma per l'unicità del punto di intersezione, $S = P$.

⊙

8.4 Curve algebriche reali in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Definizione 8.4.1: Curve algebriche reali in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Una **curva algebrica reale** di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ è il luogo delle autosoluzioni di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dove $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali nelle variabili x_1, x_2, x_3 .

Osservazione: Ogni curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ che contiene un punto P contiene anche \bar{P} .

Definizione 8.4.2: Curva riducibile

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una curva algebrica reale $C : F(x_1, x_2, x_3)$ si dice **riducibile** se F è il prodotto di polinomi di grado più basso. Altrimenti la curva si dice **irriducibile**.

Se C è riducibile risulta

$$F(x_1, x_2, x_3) = [F_1(x_1, x_2, x_3)]^{n_1} \cdot [F_2(x_1, x_2, x_3)]^{n_2} \cdot \dots \cdot [F_t(x_1, x_2, x_3)]^{n_t}$$

dove i polinomi $F_i(x_1, x_2, x_3)$ sono polinomi irriducibili di grado positivo. Quindi avremo che

$$\deg(F) = n_1 \deg(F_1) + \dots + n_t \deg(F_t)$$

Osservazione: Geometricamente una curva riducibile si riduce in componenti ottenute uguagliando a zero i vari fattori.

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_t$$

Definizione 8.4.3: Ordine

Si dice **ordine** di una curva algebrica reale in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il grado del polinomio F che la definisce.

Teorema 8.4.1 Teorema dell'ordine

L'ordine di una curva algebrica reale è uguale al numero di intersezioni in comune con una qualsiasi retta r di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ a patto che r non sia componente della curva e che le intersezioni siano contate con la dovuta molteplicità.

Definizione 8.4.4: Punti semplici ed r-upli

Sia C una curva algebrica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$

- P si dice **semplice** se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità unitaria ed esiste un'unica retta, chiamata retta tangente, con molteplicità di intersezione in P maggiore di 1.
- P si dice **r-uplo** (doppio, triplo, ecc. . .) se la generica retta per P interseca C in P con molteplicità r , ed esistono r (contate con la loro molteplicità) rette con molteplicità di intersezione in P maggiore di r (rette tangenti).

Proposizione 8.4.1

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Se una retta r ha più di n intersezioni con C , con n l'ordine di C , allora r è componente di C .

Dimostrazione: Per il teorema dell'ordine se r non fosse componente della curva C avrebbe esattamente n intersezioni con C (a patto di contarle con la dovuta molteplicità). ☹

Proposizione 8.4.2

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n . Allora C non possiede punti $(n+1)$ -upli.

Dimostrazione: Dato che C è di ordine n questo significa che esiste una retta $r \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ non componente di C passante per un punto dato di C . Sia, per assurdo P un punto $(n+1)$ -uplo.

$$|r \cap C| \geq n+1 \quad \text{perché passa per } P$$

ma dato che r non è componente per il teorema dell'ordine

$$|r \cap C| = n < n+1$$

Assurdo!




Proposizione 8.4.3

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n . C ha un punto n -uplo P se, e soltanto se, C è unione di n rette (contate con la dovuta molteplicità) per P .

Dimostrazione: " \implies " Sia $P \neq Q \in C$ e sia r la retta $rt(P, Q)$. Supponiamo per assurdo r non sia componente, allora per il teorema dell'ordine

$$n = |r \cap C| \geq \underbrace{n}_{\in P} + \underbrace{1}_{\in Q}$$

Assurdo! Quindi per ogni punto $Q \in C$ la retta PQ è componente. Di conseguenza C è unione di rette per P . Quindi queste rette sono $n = \deg(F) =$ ordine di C .

" \impliedby " Sia C unione di n rette per P . Allora la generica retta per P non componente di C interseca C solo in P , quindi P è punto n -uplo. 

Definizione 8.4.5: Punto multiplo

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia $P \in C$. Se P non è un punto semplice allora si dice **punto multiplo**.

Teorema 8.4.2

Sia C una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ di ordine n e sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ il polinomio omogeneo che la definisce. I punti multipli di C sono le classi di autosoluzioni del sistema associato alle derivate:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

Esempio 8.4.1

Ad esempio prendiamo una curva algebrica reale

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 3x_2x_3 = 0$$

I punti multipli di C sono le classi di autosoluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo la seguente matrice, con determinante non nullo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0$$

8.5 Ampliamento proiettivo di $A_3(\mathbb{R})$

Definizione 8.5.1: Spazio affine ampliato $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

Lo **spazio affine ampliato** $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$, indotto da $A_3(\mathbb{R})$, è la struttura algebrica così definita

1. l'insieme dei punti che possono essere
 - **propri** cioè l'insieme dei punti di A di $A_3(\mathbb{R})$
 - **impropri** cioè l'insieme dei punti di A_∞ , che sono le direzioni delle rette, ovvero gli spazi di traslazione di dimensione 1
2. l'insieme delle rette che possono essere
 - **proprie** cioè l'insieme delle rette esistenti nello spazio affine, ciascuna arricchita del proprio punto improprio
 - **improprie** cioè le giaciture dei piani, ovvero gli spazi di traslazione di dimensione 2
3. l'insieme dei piani che possono essere
 - **propri** cioè l'insieme dei piani esistenti nello spazio affine, ciascuno considerato con la sua retta impropria
 - **improprio** cioè l'insieme A_∞ , luogo di ∞^2 punti impropri
4. l'applicazione f dello spazio affine, la quale rimane inalterata, mantiene cioè lo stesso dominio, lo stesso codominio e le stesse proprietà

Proposizione 8.5.1

Diamo una serie di conseguenze senza dimostrazione

1. due rette parallele hanno la stessa direzione e quindi hanno lo stesso punto improprio
2. due piani paralleli hanno la stessa giacitura e quindi hanno la stessa retta impropria
3. il piano improprio contiene tutte e sole le rette improprie
4. ogni retta impropria contiene un solo punto improprio (la sua direzione)
5. ogni piano proprio contiene ∞^1 punti impropri, ovvero una retta (la sua giacitura).

8.6 Geometria analitica in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

Indichiamo con

$$\frac{\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}}{\rho}$$

cioè l'insieme delle quaterne definite a meno di un fattore di proporzionalità reale e non nullo. In cui ρ indica la relazione di equivalenza data dalla proporzionalità. Quindi consideriamo due terne equivalenti se sono proporzionali.

Proposizione 8.6.1

Sia $RA = [O, B]$ un riferimento affine di $A_3(\mathbb{R})$ e sia

$$\phi : A \cup A_\infty \rightarrow \frac{\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}}{\rho}$$

sia $P \in A$ di coordinate (x, y, z)

$$\phi(P) = [(x, y, z, 1)]$$

sia $P \in A_\infty$ corrispondente alla direzione $[(l, m, n)]$

$$\phi(P) = [(l, m, n, 0)]$$

la mappa ϕ è una biiezione e le coordinate indotte da ϕ sono chiamate **coordinate omogenee**.

Rappresentazione dei piani

L'equazione cartesiana di un piano in $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ è

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$$

Osservazione:

1. se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ allora il piano è proprio ed ha equazione affine

$$ax + by + cz + d = 0$$

2. se $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ allora $d \neq 0$ e otteniamo $x_4 = 0$ (che definisce il piano improprio).

Rappresentazione delle rette

In $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ una retta si rappresenta con

$$r : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

Osservazione:

1. se abbiamo

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

allora r è propria e ha rappresentazione affine

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

2. se, invece, abbiamo

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$

sono possibili due casi

- (a) i due piani sono paralleli e distinti
- (b) uno dei due è il piano improprio e quindi $x_4 = 0$

in entrambi di questi casi r è impropria.

8.7 Complessificazione di $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$

$\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ è lo spazio ampliato e complessificato. I suoi punti sono le quaterne di

$$\frac{\mathbb{C}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}}{\rho}$$

cioè le classi di proporzionalità delle quaterne complesse. La relazione di proporzionalità è chiaramente da intendersi in \mathbb{C} . All'interno dello spazio definiamo

- le **rette** sono i punti tali che

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{C}$$

e tali che

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

- un **piano** è costituito dai punti

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$$

Definizione 8.7.1: Punti, rette e piani reali

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ i punti, le rette e i piani si dicono **reali** se ammettono almeno una rappresentazione con coefficienti reali. Si dicono immaginari altrimenti.

Definizione 8.7.2: Rette immaginarie di prima e seconda specie

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ una retta r immaginaria è detta **immaginaria di prima specie** se è complanare con la propria coniugata \bar{r} . Mentre r è detta **immaginaria di seconda specie** se è sghemba con la sua coniugata \bar{r} .

Proposizione 8.7.1

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

1. La retta congiungente due punti immaginari e coniugati è reale
2. se una retta (o un piano) reale contiene un punto P immaginario allora contiene anche \bar{P}
3. se P è immaginario l'unica retta reale per P è $rt(P, \bar{P})$
4. l'intersezione tra un piano π immaginario e $\bar{\pi}$ è una retta reale
5. un piano π immaginario contiene un'unica retta reale : $\pi \cap \bar{\pi}$
6. se r è una retta immaginaria allora
 - (a) r è contenuta in al più un piano reale
 - (b) r contiene al più un punto immaginario

in particolare se r è immaginaria di prima specie il piano contenente r e \bar{r} è reale e $r \cap \bar{r}$ è un punto reale. Se invece r è immaginaria di seconda specie allora r non è contenuta in alcuno piano reale e non contiene alcun punto reale.

8.8 Superfici algebriche reali di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

Definizione 8.8.1: Superfici algebriche reali in $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

Una **superficie algebrica reale di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$** è l'insieme delle classi di autosoluzioni complesse di un'equazione del tipo

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \text{ove } F \text{ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali in } x_1, x_2, x_3, x_4$$

Il grado di F è chiamato **ordine** della superficie. Se F è fattorizzabile in polinomi di grado positivo la superficie si dice **riducibile in componenti**.

Teorema 8.8.1 Primo teorema dell'ordine

L'ordine di una superficie algebrica Σ reale è uguale al numero di punti in comune a Σ e a una qualsiasi retta r non contenuta in Σ a patto di contarli con la dovuta molteplicità.

Corollario 8.8.1

Se il numero di intersezioni fra la retta e la superficie Σ è maggiore dell'ordine di Σ , allora r è contenuta in Σ .

Teorema 8.8.2 Secondo teorema dell'ordine

L'intersezione tra una superficie algebrica reale Σ e un piano α non componente di Σ è una curva dello stesso ordine di Σ .

Corollario 8.8.2

Se $\Sigma \cap \pi$ contiene una curva C con $\text{ord}(C) > \text{ord}(\Sigma)$, allora π è componente di Σ .

Definizione 8.8.2

In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$, data una superficie algebrica reale Σ , un punto $P \in \Sigma$ è detto **r-uplo** se la generica retta per P ha molteplicità di intersezione con Σ in P uguale a r . Inoltre

- se $r = 1$, allora P è detto **semplice**
- se $r > 1$, allora P è detto **multiplo**

Teorema 8.8.3

I punti multipli di una curva algebrica reale di equazione $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sono le classi di autosoluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0 \end{cases}$$

Capitolo 9

Coniche

9.1 Coniche in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

Definizione 9.1.1: Conica

Si dice **conica** una curva algebrica reale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ (curva piana) del secondo ordine. Una conica si rappresenta eguagliando a 0 un polinomio omogeneo F di secondo grado nelle variabili x_1, x_2, x_3 , a coefficienti reali. La generica equazione della conica è

$$C : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Se chiamiamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere l'equazione come prodotto righe per colonne

$$C : {}^tXAX = 0$$

A è una matrice reale e simmetrica ed è detta **matrice della conica**.

Esempio 9.1.1

Consideriamo la conica

$$-x_1^2 + ax_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Ora facciamo il prodotto

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1(-x_1 + 2x_2) + x_2\left(2x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3\right) + x_3\left(-\frac{3}{2}x_2 + 6x_3\right) = 0$$

$$-x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$$

che è uguale all'equazione di partenza.

Osservazione: L'equazione della generica conica in $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ dipende da 6 coefficienti definiti a meno di un fattore di proporzionalità. Quindi le coniche di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ sono ∞^5 .

Proposizione 9.1.1

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ riducibile. Allora C è unione di 2 rette che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti oppure immaginarie e coniugate.

Dimostrazione: Sia C la conica associata al polinomio $F = (x_1, x_2, x_3) = 0$. Se C è riducibile $F = (x_1, x_2, x_3) = F_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot F_2 = (x_1, x_2, x_3)$ dove F_1 e F_2 hanno grado 1, quindi rappresentano delle rette e di conseguenza C è unione di due rette r_1 e r_2 . Se r_1 e r_2 sono entrambe reali siamo nei casi 1 o 2. Se invece r_1 è immaginaria allora $\overline{r_1}$ è ancora componente di C (per ogni $P \in r_1$, $\overline{P} \in C$), ma $r_1 \neq \overline{r_1} \implies \overline{r_1} = r_2 \implies C$ si riduce in due rette immaginarie e coniugate. \odot

Punti multipli di una conica

Proposizione 9.1.2

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una conica

1. non ha punti tripli
2. ha un punto doppio se, e soltanto se, è riducibile. E abbiamo due possibilità
 - (a) ha solo un punto doppio P e si riduce in due rette distinte per P
 - (b) ha almeno due punti doppi allora ne ha ∞^1 e si fattorizza in una retta reale contata due volte

Dimostrazione: Dimostriamo il secondo punto

" \implies " Per ipotesi C ha un punto doppio P . Sia $R \in C$ e consideriamo la retta $r = rt(P, R)$, se non fosse componente avrebbe

$$|r \cap C| \geq 2 + 1 = 3 \quad \text{intersezioni con } C$$

Assurdo! Questo è in contraddizione con il teorema dell'ordine.

" \impliedby " Sia C per ipotesi riducibile. Allora $C = r_1 \cup r_2$. Sia $P \in r_1 \cap r_2$ e sia r una retta per P diversa da r_1 e da r_2 . Quindi $r \cap C = P$. Per il teorema dell'ordine P ha molteplicità doppia e abbiamo due casi possibili

1. se $r_1 = r_2$ abbiamo ∞^1 punti doppi e $C = r_1 \cup r_1$
2. altrimenti abbiamo un **solo** P punto doppio che è $r_1 \cap r_2$

Dobbiamo dimostrare che esiste un solo punto doppio. Siano per assurdo P_1 e P_2 punti doppi distinti e sia $C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$. Sia $Q \in r_2$ e $P_2 \in r_1$, allora

$$|rt(P_2, Q) \cap C| \geq \underbrace{2}_{P_2} + \underbrace{1}_Q$$

Per il teorema dell'ordine $rt(P_2, Q)$ è componente. **Assurdo!** Perché avremmo 3 componenti $(r_1, r_2, rt(P_2, Q))$. \odot

Definizione 9.1.2: Coniche generali o degeneri

Una conica si dice

- **generale**, se è priva di punti doppi \implies quindi non è riducibile
- **semplicemente degenera** se ha un solo punto doppio $\implies C = r_1 \cup r_2$ con $r_1 \neq r_2$
- **doppiamente degenera** se ha ∞^1 punti doppi $\implies C = r \cup r$

Teorema 9.1.1

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ i punti doppi di una conica C si trovano considerando le classi di autosoluzioni del sistema omogeneo

$$AX = \underline{0}$$

dove A è la matrice associata a C .

Dimostrazione:

$$C : F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{dove } F \text{ è:}$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

i punti doppi si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Possiamo dividere tutti i fattori per 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies AX = \underline{0}$$

⊙

Teorema 9.1.2

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ una conica $C : {}^tXAX = \underline{0}$ risulta

1. generale se, e soltanto se, $\rho(A) = 3$
2. semplicemente degenere se, e soltanto se, $\rho(A) = 2$
3. doppiamente degenere se, e soltanto se, $\rho(A) = 1$

Dimostrazione: Dimostriamo tutti i casi singolarmente:

1. C è generale se, e soltanto se, non ha punti doppi. Se $AX = \underline{0}$ ha solo la soluzione nulla $\iff \rho(A) = 3$.
2. C è semplicemente degenere se ha un solo punto doppio. $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^1 soluzioni $\iff \rho(A) = 2$
3. C è doppiamente degenere se ha ∞^1 punti doppi $\iff AX = \underline{0}$ ha ∞^2 soluzioni (se $[(x_1, x_2, x_3)]$ è soluzione $[(2x_1, 2x_2, 2x_3)]$ è lo stesso punto doppio) $\iff \rho(A) = 1$

⊙

Classificazione affine di una conica generale

Sia C una conica di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e r una qualsiasi retta, osserviamo che $r \cap C$ può essere

1. due punti reali e distinti
2. un punto reale con molteplicità doppia
3. due punti immaginari e coniugati

Se consideriamo come retta la r_∞ questa serie di casistiche ci dà la classificazione affine delle coniche generali.

Definizione 9.1.3: Ellisse, iperbole e parabola

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Allora $C \cap r_\infty$ è data da due punti P, Q (non necessariamente distinti) e C si dice:

1. **ellisse**, se P e Q sono immaginari e coniugati
2. **iperbole**, se P e Q sono reali e distinti
3. **parabola**, se P e Q sono reali e coincidenti

Condizioni analitiche

Sia C una conica generale di equazione

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

La r_∞ ha equazione $x_3 = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 = C \cap r_\infty \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Almeno uno fra $x_1, x_2 \neq 0$. Supponiamo $x_2 \neq 0$ e dividiamo per x_2^2

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + a_{22} = 0$$

La risolviamo in $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$. Se

1. $\frac{\Delta}{4} > 0$ abbiamo due soluzioni reali e distinte \implies **iperbole**;
2. $\frac{\Delta}{4} = 0$ abbiamo due soluzioni coincidenti \implies **parabola**;
3. $\frac{\Delta}{4} < 0$ abbiamo due soluzioni immaginarie e coniugate \implies **ellisse**.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{2a_{12}}{2}\right)^2 - a_{11}a_{22} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

Per semplificare le cose, data la matrice della conica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{poniamo} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Per classificare la conica basta studiare il determinante di A^*

$$|A^*| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{\Delta}{4}$$

Se C è una conica generale ($|A| = 0$) allora si applicano le casistiche precedentemente elencate.

9.2 Polarità associata a una conica

Definizione 9.2.1: Coniugato rispetto ad una conica

Data una conica $C : {}^tXAX = 0$ e dati due punti di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$

$$P' = [(x'_1, x'_2, x'_3)] \quad e \quad P'' = [(x''_1, x''_2, x''_3)]$$

si dice che P' è coniugato a P'' rispetto a C se

$${}^tX'AX'' = 0 \quad \text{con} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad e \quad X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Sia P' coniugato a P'' , ovvero

$${}^tX'AX'' = 0 \implies {}^t({}^tX'AX'') = 0 = {}^tX''^tA({}^tX') = {}^tX''AX' = 0 \implies P'' \text{ è coniugato a } P'$$

Quindi la relazione di coniugio è simmetrica, perciò potremo dire semplicemente che P' e P'' sono coniugati.

Definizione 9.2.2: Polare

Sia C una conica e P' un punto di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Si dice **polare** di P' rispetto a C , il luogo dei coniugati di P' rispetto a C . Il punto P' prende il nome di **polo** di tale luogo.

Proposizione 9.2.1

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ la polare di un punto P rispetto ad una conica generale è una retta.

Dimostrazione: Sia $P = [(x'_1, x'_2, x'_3)]$ allora $Q = [(x_1, x_2, x_3)]$ appartiene alla polare di P se, e soltanto se,

$$(x'_1, x'_2, x'_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{poniamo} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) A = (a, b, c)$$

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

che è l'equazione di una retta. A meno che $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Sia per assurdo $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ ciò significa che $(x'_1, x'_2, x'_3) A = (0, 0, 0)$ e questo avviene se, e soltanto se,

$${}^tA \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

quindi $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un punto doppio e di conseguenza P è un punto doppio di C , ma per ipotesi C è generale. **Assurdo!** Quindi $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \implies ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è una retta. Essa è detta **retta polare** di P rispetto a C . ☺

Definizione 9.2.3: Polarità

Si dice **polarità** associata a una conica generale, la corrispondenza che associa a ogni punto, detto polo, la sua polare

$$\text{polo} \leftrightarrow \text{polare}$$

è facile dimostrare che questa relazione è una biiezione.

Proposizione 9.2.2 Principio di reciprocità

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$, sia $P \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ e sia p la polare di P , allora

1. le polari dei punti di p passano per P
2. i poli delle rette per P appartengono a p

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti separatamente

1. Sia $Q \in p \implies Q, P$ sono coniugati $\implies P \in q$, polare di Q
2. Sia q una retta per P . Il polo Q di q è coniugato a tutti i punti di q di conseguenza Q è coniugato a P , quindi $Q \in p$.

☺

Proposizione 9.2.3

Sia C una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. Allora

1. sia $P \in C$, questo implica che la polare p di P è la retta tangente a C in P
2. Sia $P \notin C$, la polare di P è la congiungente dei due punti T_1 e T_2 ottenuti intersecando le tangenti t_1 e t_2 alla conica per P .

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti separatamente

1. Sia P , di coordinate $X_P = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, appartenente alla conica, allora la polare di P ha equazione ${}^t X_P A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ che è la formula della retta tangente a C in P .
2. $T_1 \in C$ implica che la polare di T_1 rispetto a C è t_1 . $P \in t_1$ quindi P appartiene alla polare di T_1 . Perciò per il principio di reciprocità T_1 appartiene alla polare di P e di conseguenza $T_1 \in p$. Analogamente $T_2 \in C$ significa che la polare di T_2 è t_2 e $P \in t_2$ significa che $T_2 \in p$. Quindi infine $T_1, T_2 \in p \implies p$ è la congiungente di T_1 e T_2 .

☺

Osservazione: Equivalentemente il punto 2 si può riscrivere nel seguente modo

Proposizione 9.2.4

Se $P \notin C$ la sua polare p si ottiene congiungendo i punti T_1 e T_2 di tangenza delle tangenti per passanti P .

Definizione 9.2.4: Centro e diametri di una conica

Si dice **centro** di una conica generale di $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ il polo della retta impropria. Si dicono **diametri** di una conica generale le rette polari dei punti impropri.

Osservazione: Per il principio di reciprocità i diametri passano per il centro della conica. Quindi sono il fascio proprio (se c'è proprio) di rette per C .

Per determinare le coordinate del centro dobbiamo scegliere due punti $X_\infty = [(1, 0, 0)]$, punto improprio dell'asse x , e $Y_\infty = [(0, 1, 0)]$, punto improprio dell'asse y . La polare di X_∞ è

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

Analogamente la polare di Y_∞ è

$$\begin{aligned} & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 & P_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & P_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il centro C è proprio se P_1 e P_2 non sono paralleli. Se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^*| \neq 0$$

il centro è un punto proprio. Ma il centro è un punto proprio se C è un'ellisse o un'iperbole. Quindi in questo caso i diametri sono un fascio proprio di rette di centro C .

$$F: \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Equazione del fascio dei diametri Se C è una parabola $\implies |A^*| = 0 \implies P_1$ parallelo a $P_2 \implies$ il centro è un punto improprio. \implies i diametri formano un fascio improprio di equazione

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + kx_3 = 0 \quad \text{con } k \in \mathbb{C}$$

fascio improprio dei diametri della parabola.

Asintoti di una conica

Definizione 9.2.5: Asintoti

Si dicono **asintoti** di una conica le rette proprie tangenti alla conica nei suoi punti impropri.

Osservazione: Gli asintoti di una conica sono quindi le rette polari nei suoi punti impropri. Gli asintoti sono quindi dei diametri e passano per il centro. Se il centro è proprio (cioè se C è un'ellisse o un'iperbole) gli asintoti sono le rette che congiungono il centro con i punti impropri di C .

Proposizione 9.2.5

La parabola è una conica con centro improprio e priva di asintoti.

Dimostrazione: Sia C una parabola $\implies C$ è tangente alla retta impropria in un punto che chiamiamo P_∞ . Quindi la retta polare di P_∞ è $r_\infty \implies$ il polo della r_∞ è $P_\infty \implies$ il punto P_∞ è il centro della parabola. Osserviamo che C ha solo un punto improprio $P_\infty \implies$ ammette solo una tangente nel suo punto improprio. Ma t è la $r_\infty \implies$ la r_∞ non è un asintoto. ☺

Definizione 9.2.6: Coniche a centro

Diremo che l'iperbole e l'ellisse sono coniche **a centro**, mentre la parabola è detta conica **non a centro**.

9.3 Proprietà metriche di una conica

Definizione 9.3.1: Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice **equilatera** se i suoi asintoti sono ortogonali.

Proposizione 9.3.1

Una conica generale è un'iperbole equilatera se, e soltanto se,

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

Esempio 9.3.1

Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

$$C : 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 1 = 0$$

sia un'iperbole equilatera.

1. $2k = -(-4) \rightarrow k = 2$
2. Sostituiamo dentro all'equazione e scriviamola in forma omogenea

$$4x_1^2 + 0x_1x_2 - 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = 0 \quad A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$k = 2$ dà luogo ad un'iperbole equilatera.

Definizione 9.3.2: Ortogonale al punto improprio

Diremo che la retta p di parametri direttori $[(l', m')]$ è **ortogonale al punto improprio** $P : [(l, m, 0)]$ se

$$ll' + mm' = 0$$

Definizione 9.3.3: Asse di una conica

Si dice **asse**, di una conica generale, ogni diametro ortogonale al proprio polo.

Definizione 9.3.4: Vertici

Si dicono **vertici** le intersezioni proprie della conica con i propri assi.

Condizioni analitiche**Proposizione 9.3.2**

Gli assi di una conica a centro (ellisse o iperbole) sono due e sono ortogonali tra loro, a meno che non si tratti di una circonferenza generalizzata, in tal caso tutti i diametri sono assi.

Dimostrazione: Per definizione i diametri sono le polari dei punti impropri. Dato $P_\infty : [(l, m, 0)]$

$$\begin{pmatrix} l & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Il generico diametro è:

$$\begin{pmatrix} la_{11} + ma_{12} & la_{12} + ma_{22} & la_{13} + ma_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(la_{11} + ma_{12})x_1 + (la_{12} + ma_{22})x_2 + (la_{13} + ma_{23})x_3 = 0$$

I parametri direttori del diametro d sono

$$p.d.d : [(-la_{12} - ma_{22}, la_{11} + ma_{12})]$$

Il polo di d è $P_\infty : [(l, m, 0)]$. Inoltre d è un asse se è ortogonale a P_∞ , ovvero se

$$l(-la_{12} - ma_{22}) + m(la_{11} + ma_{12}) = 0$$

$$-l^2 a_{12} + ml(-a_{22} + a_{11}) + m^2 a_{12} = 0 \iff l^2 a_{12} + ml(a_{22} - a_{11}) - m^2 a_{12} = 0$$

moltiplicando tutti i fattori per $(\frac{1}{m^2})$ otteniamo

$$a_{12} \left(\frac{l}{m} \right)^2 + \frac{l}{m} (a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0$$

Sia $a_{12} \neq 0$, abbiamo un'equazione di secondo grado che ammette due soluzioni

$$[(l', m')] \quad e \quad [(l'', m'')]$$

consideriamo $[(l', m')]$. La direzione ortogonale ad essa è $[(-m', l')]$. Sostituendo la direzione ortogonale nell'equazione e otteniamo

$$a_{12} \left(\frac{m}{l} \right)^2 - \frac{m}{l} (a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0$$

moltiplico tutti i fattori per l^2 e ottengo l'equazione

$$m^2 a_{12} - ml(a_{22} - a_{11}) - l^2 a_{12} = 0 \iff m(ma_{12} + la_{11}) - l(ma_{22} - la_{12})$$

che è nuovamente la direzione ortogonale. Quindi gli assi sono a due a due ortogonali fra di loro. \odot

Proposizione 9.3.3

La parabola ha un unico asse e un solo vertice v . Inoltre la tangente alla parabola in v è ortogonale all'asse.

Dimostrazione: Il punto P_∞ di una parabola è $[(-a_{12}, a_{11}, 0)]$. I $p.d.d = [(-a_{12}, a_{11})]$. La direzione ortogonale è data da $[(a_{11}, a_{12})]$, quindi il punto P_∞ è $[(a_{11}, a_{12}, 0)]$. Da cui segue che l'asse è unico ed è la polare di $(a_{11}, a_{12}, 0)$. Sostituendo nell'equazione del fascio improprio dei diametri abbiamo che l'asse ha equazione:

$$a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

Per il teorema dell'ordine a interseca la parabola C in due punti, ma uno è P_∞ quindi l'altro punto sarà l'unico vertice della parabola.

Ora dimostriamo la seconda parte del teorema. $v \in a$ che è il polo di t . Per il principio di reciprocità t contiene il polo di a , ovvero $P_\infty \in t$. Ma P_∞ è ortogonale ad $a \implies t \perp a$. \odot

Capitolo 10

Quadriche

10.1 Quadriche in $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$

Definizione 10.1.1: Quadrica

Si dice **quadrica** una superficie algebrica reale del secondo ordine. Analiticamente si indica come

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0$$

con almeno un $a_{ij} \neq 0$. Ponendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{si ha che} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

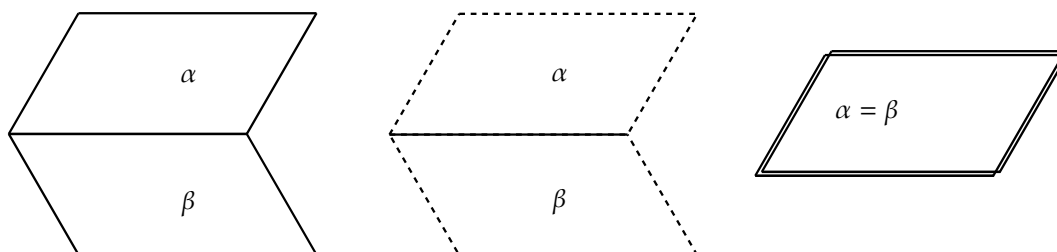
è tale che

$$Q : {}^tXAX = 0$$

Quindi, essendo dipendente da 10 coefficienti, abbiamo ∞^9 quadriche.

Proposizione 10.1.1

Se una quadrica è riducibile, si riduce in due piani che possono essere reali e coincidenti, reali e distinti o immaginari e coniugati. Inoltre tutte le sue sezioni sono riducibili.



Dimostrazione: F è di secondo grado (Q è del second'ordine), quindi se si fattorizza in due polinomi di primo grado, essendo F reale, le possibilità sono quelle elencate. Sia $Q = \alpha \cup \beta$ e sia γ un terzo piano abbiamo che

$$Q \cap \gamma = (\alpha \cup \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$$

è unione di due rette, quindi è riducibile.



Definizione 10.1.2: Cono e cilindro

Si dice **cono** quadrico il luogo delle rette che proiettano dal punto V , chiamato **vertice**, i punti di una conica generale C , chiamata **direttrice**, dove C appartiene ad un piano non contenente il V . Se V è proprio otteniamo un **cono**, se V è improprio otteniamo un **cilindro**.

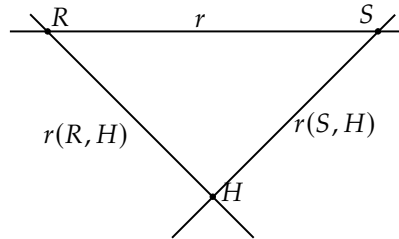
Punti multipli di una quadrica**Teorema 10.1.1**

Una quadrica non ha punti tripli e i punti multipli di una quadrica sono i punti doppi.

Dimostrazione: Poiché la quadrica Q ha ordine 2, per il primo teorema dell'ordine r non può intersecare Q in un punto P con molteplicità 3. ☹

Teorema 10.1.2

Una quadrica Q ha almeno 2 punti doppi se, e soltanto se, è riducibile.



Dimostrazione: " \implies " Siano R e S due punti doppi distinti e sia $H \in Q$, ma non appartenente a $rt(R, S)$. Prima di tutto osserviamo che $rt(R, S)$ ha molteplicità di intersezione con Q almeno di $2+2=4$ ($|R|+|S|$). Quindi per il primo teorema dell'ordine la $rt(R, S) \subseteq Q$. Allo stesso modo $rt(R, H)$ (ma analogamente anche $rt(S, H)$) ha molteplicità di intersezione con Q , almeno di $1+2=3 > 2 \implies$ per il primo teorema dell'ordine $rt(R, H) \subseteq Q$, ugualmente per $rt(S, H) \subseteq Q$. Chiamiamo π il piano contenente R, S e H .

$$Q \cap \pi \supseteq \underbrace{rt(R, S) \cup rt(R, H) \cup rt(S, H)}_{\text{curva } C \text{ di ordine } 3}$$

quindi poiché $\text{ord}(C) > \text{ord}(Q) = 2$ per il secondo teorema dell'ordine il piano π è componente di Q , per questo motivo Q è riducibile.

" \impliedby " Sia $Q = \alpha \cup \beta$ e sia $P \in \alpha \cap \beta$. Osserviamo che data r retta passante per P non in $\alpha \cup \beta$ abbiamo che $r \cap (Q) = r \cap (\alpha \cup \beta) = (r \cap \alpha) \cup (r \cap \beta)$, cioè l'unione dello stesso punto, quindi P è punto doppio. Di conseguenza abbiamo che ogni punto di $\alpha \cap \beta$ è doppio e abbiamo due possibili casi

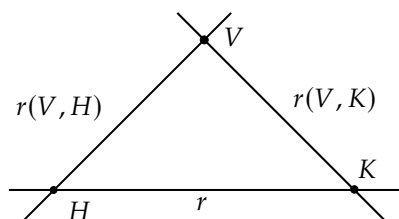
- ∞^1 punti (se $\alpha \neq \beta$)
- ∞^2 punti (se $\alpha = \beta$)

☹

Teorema 10.1.3

Una quadrica ha un unico punto doppio se, e soltanto se, è un cono o un cilindro quadrico.

Dimostrazione: " \implies " Sia V l'unico punto doppio della quadrica Q . Ora dimostriamo prima di tutto che tutte le rette r contenute in Q passano per V . Sia, per assurdo, r contenuta in Q con $v \notin r$. Siano $A, B \in r$ due punti distinti. Osserviamo che la retta $rt(V, A)$ ha molteplicità di intersezione con Q pari ad almeno 1 in A



e esattamente 2 in V , quindi ha molteplicità di intersezione almeno 3. Quindi per il primo teorema dell'ordine $rt(V, A) \subseteq Q$. Analogamente $rt(V, B)$ è contenuta in Q . Chiamiamo π il piano contenente r e V .

$$Q \cap \pi \supseteq \underbrace{r \cup rt(V, A) \cup rt(V, B)}_{\text{curva } C \text{ di ordine } 3}$$

poiché $\text{ord}(C) > \text{ord}(Q) \implies \pi \subseteq Q$. Quindi π è componente di Q , di conseguenza Q è riducibile e ha almeno ∞^1 punti doppi. **Assurdo!** Perciò tutte le rette di Q passano per V . Sia α piano non contenente V . α non è componente di Q , poiché Q è irriducibile, perciò $\alpha \cap Q$ è una conica (per il secondo teorema dell'ordine). Poiché C non si riduce in due rette C è generale. Sia ora $P \in C$ la retta $rt(P, V)$ ha molteplicità di intersezione con Q di almeno $1 + 2 = 3 > \text{ord}(Q) = 2$, quindi per il primo teorema dell'ordine $rt(P, V) \subseteq Q$ per ogni punto di C . Di conseguenza Q è un cono o un cilindro quadrico.

" \Leftarrow " Sia Q un cono o un cilindro quadrico con vertice V . Q ha al più un punto doppio, altrimenti sarebbe riducibile. Sia r una retta non contenuta in Q e passante per V , l'unico punto di intersezione è $r \cap Q = V$. Poiché per il primo teorema dell'ordine la somma delle intersezioni (contate con la dovuta molteplicità) è 2, segue che v è doppio. ☺

Condizioni analitiche

Definizione 10.1.3

Una quadrica $Q \in \tilde{A}_3(\mathbb{C})$ si dice

- **generale** se è priva di punti doppi
- **semplicemente degenere** se ha 1 unico punto doppio (cono o cilindro)
- **doppiamente degenere** se ha ∞^1 punti doppi
- **tre volte degenere** se ha ∞^2 punti doppi

Inoltre le quadriche doppiamente e tre volte degeneri sono **riducibili**.

Proposizione 10.1.2

I punti doppi di una quadrica $Q : {}^tXAX = \underline{0}$ sono le classi di autosoluzioni del sistema omogeneo $AX = \underline{0}$.

Teorema 10.1.4

Sia la quadrica $Q : {}^tXAX = \underline{0}$. Abbiamo le seguenti possibilità

- Se $\rho(A) = 4$, allora Q è generale
- Se $\rho(A) = 3$, allora Q è semplicemente degenere
- Se $\rho(A) = 2$, allora Q è doppiamente degenere
- se $\rho(A) = 1$, allora Q è tre volte degenere

10.2 Sezioni piane riducibili

Dati una quadrica Q e un piano π abbiamo $C = Q \cap \pi$, se $\pi \not\subseteq Q$, in questo caso C è una conica per il secondo teorema dell'ordine.

Osservazione: Se Q è una quadrica riducibile, allora C è riducibile.

Teorema 10.2.1

Sia Q una quadrica irriducibile (cioè cono, cilindro o quadrica generale), sia $P \in Q$ e sia α un piano contenente P . Possiamo dire che

- se P è un punto doppio, allora P è doppio anche per $C = Q \cap \alpha$, quindi C è riducibile
- se P è un punto semplice, allora P è doppio per $C = Q \cap \alpha$ se, e soltanto se, α è il piano tangente in P a Q , quindi C è riducibile

Osservazione: Se Q è generale, allora le sezioni piane di $Q \cap \alpha$ sono riducibili se, e soltanto se, α è un piano tangente a Q .

10.3 Conica impropria di una quadrica irriducibile

Cono e cilindro

Proposizione 10.3.1

Sia Q un cono e sia $C_\infty = Q \cap \pi_\infty$ la sua conica impropria, allora

1. C_∞ è una conica generale
2. se C_∞ è reale, il cono ha generatrici reali ed è detto **a falda reale**
3. se C_∞ non ha punti reali, allora l'unico punto reale di Q è il vertice V del cono, quindi il cono ha generatrici a coppie immaginarie e coniugate ed è detto **privo di falda reale**

Proposizione 10.3.2

La conica impropria $C_\infty = Q \cap \pi_\infty$ di un cilindro Q è riducibile in due rette passanti per il vertice.

Dimostrazione: Sappiamo che V , vertice del cilindro, appartiene a π_∞ , quindi V è doppio anche in $Q \cap \pi_\infty = C_\infty$, di conseguenza C_∞ ha un punto doppio ed è riducibile. ☺

Definizione 10.3.1: Cilindro iperbolico, ellittico e parabolico

Un cilindro Q è detto

1. **iperbolico**, se C_∞ è unione di due rette reali e distinte
2. **ellittico**, se C_∞ è unione di due rette immaginarie e coniugate
3. **parabolico**, se C_∞ è unione di una retta contata 2 volte

10.4 Classificazione delle quadriche

Definizione 10.4.1: Conica impropria di una quadrica generale

Dati una quadrica generale Q e il piano improprio α_∞ Se intersechiamo otteniamo una curva

$$C_\infty = Q \cap \alpha_\infty$$

detta **conica impropria** di Q .

Definizione 10.4.2: Ellissoide, iperboloide e paraboloidi

Una conica generale Q si chiama

1. **ellissoide**, se C_∞ è irriducibile e priva di punti reali
2. **iperboloide**, se C_∞ è irriducibile con punti reali
3. **paraboloidi**, se C_∞ è riducibile

Osservazione:

1. Il paraboloidi, avendo C_∞ riducibile, è tangente con α_∞ .
2. Per C_∞ non ha senso la distinzione in ellisse, parabola o iperbole perché tutti i suoi punti sono punti impropri.

Proposizione 10.4.1

Sia $Q : {}^tXAX = 0$ una quadrica irriducibile, allora C_∞ è riducibile se, e soltanto se, $|A^*| = 0$, dove

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione: Sia $C_\infty = Q \cap \alpha_\infty$, quindi

$$C_\infty : \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(1) è una quadrica Q' tale che la sua intersezione con α_∞ è proprio la conica impropria C_∞ di Q . Quindi la matrice della quadrica Q' è

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A'| = 0$, quindi Q' non è generale perché $\rho(A') \leq 3$. Per ipotesi C_∞ è riducibile, ora partiamo con la dimostrazione vera e propria.

" \Rightarrow " Supponiamo, per assurdo, che $|A^*| \neq 0 \Rightarrow \rho(A') = 3 \Rightarrow Q'$ è un cono o un cilindro. Determiniamo il vertice di $Q' : A'X = 0$. Scrivendo un sistema principale equivalente

$$s.p.e. : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

troveremo facilmente il $V = [(0, 0, 0, 1)]$, che è il vertice ed è un punto proprio, quindi Q' è un cono. Quindi $C_\infty = Q' \cap \alpha_\infty$ è la conica impropria di un cono, quindi C_∞ è irriducibile, che è un **assurdo!**.

" \Leftarrow " Abbiamo per ipotesi che $|A^*| = 0$, $\rho(A') \leq 2$, quindi Q' è riducibile, allora $C_\infty = Q' \cap \alpha_\infty$ è sezione di una quadrica riducibile e quindi C_∞ è riducibile. ☺

Osservazione:

1. Per distinguere un cono o un cilindro abbiamo ora un criterio analitico, cioè

- $|A^*| = 0 \iff C_\infty$ è riducibile $\iff Q$ è cilindro
- $|A^*| \neq 0 \iff Q$ è cono

2. se Q invece è generale abbiamo che

- $|A^*| = 0 \iff Q$ è paraboloidale
- $|A^*| \neq 0 \iff Q$ è ellissoide o iperboloide

Esempio 10.4.1

$$Q : x^2 - 3y^2 - z^2 - y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo dire che

$$|A| \neq 0 \implies Q \text{ generale} \quad |A^*| = 3 \neq 0 \implies Q \text{ o ellissoide o iperboloide}$$

$$C_\infty : \begin{cases} x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - x_2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$P_\infty = [(1, 0, 1, 0)] \in C_\infty \text{ il quale è reale} \implies Q \text{ è un paraboloidale}$$

10.5 Punti semplici di una quadrica irriducibile

Definizione 10.5.1: Punto parabolico

Sia Q una quadrica irriducibile, sia un punto $P \in Q$ semplice. Chiamiamo α il piano tangente a Q in P e la conica $C = Q \cap \alpha$, la quale è riducibile. Se C si riduce in due rette coincidenti, P si dice punto **parabolico**.

Proposizione 10.5.1

Se una quadrica irriducibile ha un punto semplice parabolico, allora tutti i punti semplici sono parabolici.

Teorema 10.5.1

Una quadrica irriducibile è un cono o un cilindro se, e soltanto se, i suoi punti semplici sono parabolici.

Dimostrazione: " \implies " Sappiamo per ipotesi che Q è un cono o un cilindro. Sia $P \in Q$, un punto semplice, quindi $P \neq V$, chiamiamo α il piano tangente in P . La conica $C = Q \cap \alpha = r \cup s \subseteq Q$, di conseguenza $r \subseteq Q \implies V \in r$ e $s \subseteq Q \implies V \in s$. Inoltre $P \in r$ e $P \in s$. Ma quindi necessariamente $r = \overline{PV} = s$. Quindi P è un punto parabolico.

" \impliedby " Per ipotesi abbiamo i punti semplici parabolici. Chiamiamo P un punto semplice di Q e α il piano tangente a Q in P . Allora

$$C = Q \cap \alpha = r \cup r$$

se $P' \in r$ e semplice, allora α è un piano passante per P' tale che $Q \cap \alpha$ è riducibile in due rette passanti per P' . Questo ci dice che allora α è il piano tangente a Q anche in P' . Sia β un piano con $\beta \neq \alpha$ e tale che $r \subseteq \beta$. Chiamiamo inoltre $C' = Q \cap \beta$, sicuramente $r \subseteq C'$, questo significa che C' è riducibile, cioè $C' = r \cup s$. Ma $r \neq s$

perché se fosse, per assurdo $r = s$, allora in P avrei due piani tangenti distinti α e β , **assurdo!** (contro l'unicità del piano tangente). Sia $\{V\} = r \cap s$. Sicuramente V è un punto doppio, perché se fosse semplice per V avremmo due piani tangenti distinti (nuovamente contro l'unicità del piano tangente). Su Q non possono esserci altri punti doppi distinti da V (perché per ipotesi Q è irriducibile). Quindi Q ammette esattamente un punto doppio, cioè Q è un cono o un cilindro. \odot

Osservazione: Se Q è generale, sicuramente i suoi punti semplici non sono parabolici.

Definizione 10.5.2: Punto parabolico, iperbolico ed ellittico

Sia Q una quadrica irriducibile, $P \in Q$ un punto semplice reale, α il piano tangente in P a Q e $C = Q \cap \alpha$ riducibile. Abbiamo che un punto P è

1. **parabolico**, se, e soltanto se, C si riduce in due rette coincidenti
2. **iperbolico**, se, e soltanto se, C si riduce in due rette reali e distinte
3. **ellittico**, se, e soltanto se, C si riduce in due rette immaginarie e coniugate

Proposizione 10.5.2

Se una quadrica irriducibile Q ha un punto semplice reale parabolico, iperbolico o ellittico, allora tutti i suoi punti semplici reali sono dello stesso tipo.

Definizione 10.5.3

La quadrica Q si dice

1. **parabolica** se i suoi punti semplici reali sono parabolici
2. **iperbolica** se i suoi punti semplici sono iperbolici
3. **ellittica** se i suoi punti semplici reali sono ellittici

Proposizione 10.5.3

I punti semplici reali di un ellissoide sono necessariamente ellittici.

Dimostrazione: Sia Q un ellissoide, P un punto semplice reale e supponiamo, per assurdo, che P sia iperbolico. Chiamiamo α il piano tangente in P e $C = Q \cap \alpha = r \cup s$ con r, s reali e distinte. Sappiamo che $r \subseteq Q$ e

$$\{P_\infty\} = r \cap \alpha \subseteq Q \cap \alpha_\infty = C_\infty$$

sarebbe un punto reale sulla C_∞ di un ellissoide, **assurdo!** Quindi P è ellittico. \odot

Ricapitolando: abbiamo che, se Q è generale, allora può essere

1. ellissoide (ellittico)
2. iperboloide
 - (a) ellittico
 - (b) iperbolico
3. paraboloide
 - (a) ellittico
 - (b) iperbolico

Consiglio molto vivamente di utilizzare Geogebra 3D (o anche semplicemente cercare su Google) i grafici delle quadriche sopra elencate in modo da ottenerne un riscontro visivo che è particolarmente utile durante lo svolgimento di esercizi per verificare i propri risultati.

10.6 Sezioni piane di una quadrica irriducibile

Abbiamo visto precedentemente le sezioni riducibili di una quadrica generale. Ora ci occupiamo di determinare le **sezioni irriducibili**, che si ottengono con piani non tangenti e si può stabilire se si tratti di ellissi, parabole o iperboli determinandone i punti impropri P_1 e P_2 , intersezioni fra la retta impropria del piano di sezione e la conica impropria della quadrica, determinando cioè

$$\{P_1, P_2\} = r_\infty \cap C_\infty$$

Sezioni irriducibili di un cilindro

Dato che C_∞ è riducibile in rette reali e distinte, reali e coincidenti o immaginarie e coniugate, i due punti dati da $r_\infty \cap C_\infty$ sono reali e distinti se il cilindro è iperbolico, reali e coincidenti se è parabolico, oppure immaginari e coniugati se è ellittico. Quindi le sezioni irriducibili di un cilindro iperbolico sono tutte iperboli, quelle di un cilindro parabolico sono tutte parabole e quelle di un cilindro ellittico sono tutte ellissi.

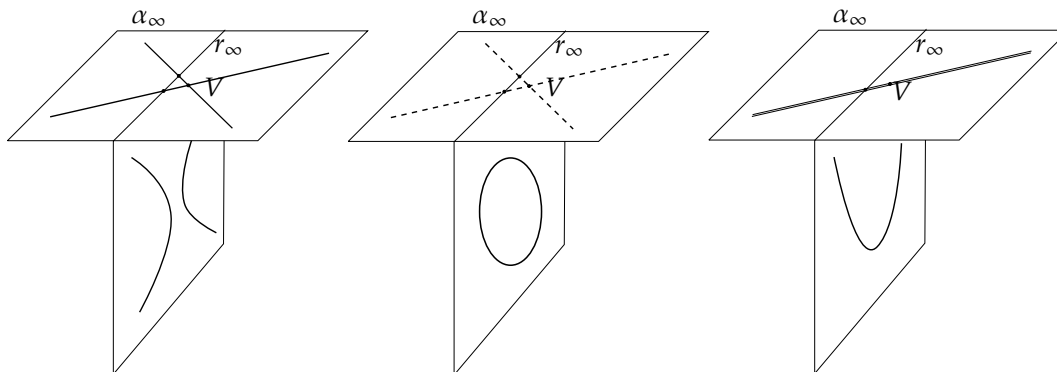
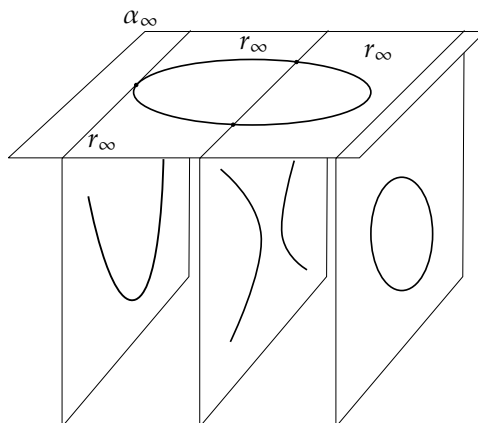


Figura 10.1: (1) **cilindro iperbolico**; (2) **cilindro ellittico**; (3) **cilindro parabolico**.

Sezioni irriducibili di un cono

Se C_∞ è irriducibile e dotata di punti reali, cioè, se si tratta di un cono dotato di falda reale, i due punti dati da $r_\infty \cap C_\infty$ possono essere reali e distinti, reali e coincidenti (se r_∞ è tangente a C_∞) o immaginari e coniugati. Le sezioni irriducibili di un cono sono coniche di tutti i tipi.

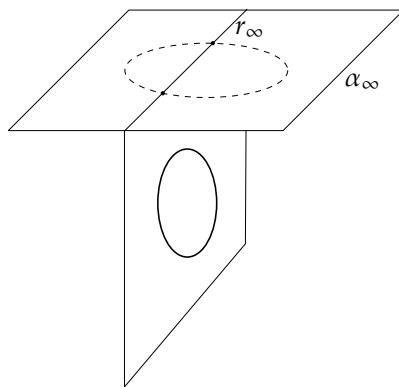


Sezioni irriducibili di un iperboloide

Dato che C_∞ è irriducibile e dotata di punti reali, i due punti dati da $r_\infty \cap C_\infty$ possono essere reali e distinti, reali e coincidenti (se r_∞ è tangente a C_∞) o immaginari e coniugati. Le sezioni irriducibili di un iperboloide sono coniche di tutti i tipi e sono analoghe a quelle della figura precedente.

Sezioni irriducibili di un ellissoide

Dato che C_∞ è priva di punti reali, i due punti dati da $r_\infty \cap C_\infty$ saranno a loro volta immaginari e coniugati. Quindi le sezioni irriducibili di un'ellissoide sono tutte ellissi, prive o dotate di parte reale.



Sezioni irriducibili di un paraboloide

Dato che C_∞ è riducibile in due rette reali e distinte o in rette immaginarie e coniugate, i due punti dati da $r_\infty \cap C_\infty$ sono reali e coincidenti, se r_∞ passa per il punto doppio di C_∞ , diversamente sono punti distinti. In questo caso, se il paraboloide è iperbolico i punti sono reali, se il paraboloide è ellittico sono punti immaginari e coniugati. Pertanto, le sezioni irriducibili di un paraboloide iperbolico sono parabole e iperboli, quelle di un paraboloide ellittico sono parabole e ellissi.

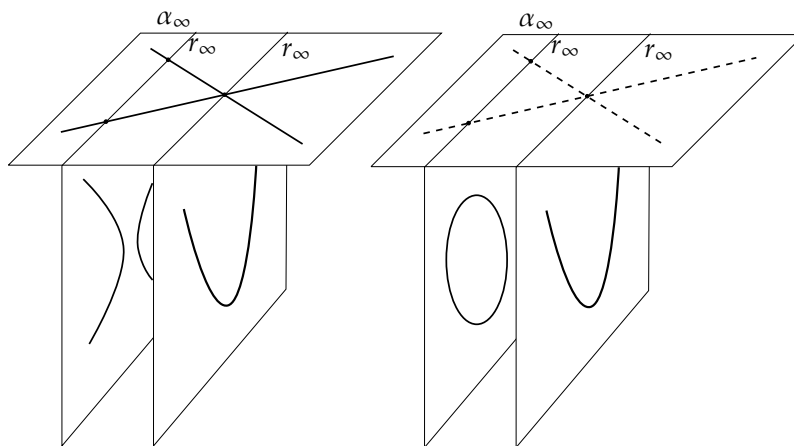


Figura 10.2: (1) paraboloide iperbolico; (2) paraboloide ellittico.

Studio analitico

Ci occupiamo ora di trovare un metodo per riconoscere la conica generata dall'intersezione di una quadrica con un piano. A questo fine enunciamo una proposizione molto utile per lo svolgimento degli esercizi sulle sezioni di coniche riducibili.

Proposizione 10.6.1

Se Q è una quadrica irriducibile, la cui equazione è priva di una delle variabili x_1, x_2 o x_3 , allora Q è un cilindro, con vertice in X_∞ se manca x_1 , in Y_∞ se manca x_2 o in Z_∞ se manca x_3 .

Osservazione: In questo modo

$$C = Q \cap \pi = Q' \cap \pi$$

ove Q' è un cilindro, perciò ci basta riconoscere il tipo di cilindro e potremo direttamente riconoscere la conica.

