

Analisi Matematica 1
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Derivate _____ Pagina 4

- 1.1 Classificazione dei punti di non derivabilità 4
- 1.2 Teorema di de l'Hopital 6

Capitolo 2

Proprietà globali delle funzioni derivabili _____ Pagina 10

- 2.1 Massimi e minimi relativi 10

Capitolo 1

Derivate

Definizione 1.0.1: Derivate unilateri

Sia I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto interno ad I .

1. Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(cioè, il limite **sinistro** del rapporto incrementale), esso viene detto **derivata sinistra** di f in x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$

2. Analogamente per la derivata destra

Teorema 1.0.1 Legame fra la derivata e le derivate unilateri

Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e x' punto interno ad I . Allora

$$\begin{aligned} \exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{se e solo se} \\ \exists f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}, \exists f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \quad e \quad f'(x_0)_- = f'(x_0)_+ \end{aligned}$$

Dimostrazione: Inserire dimostrazione



1.1 Classificazione dei punti di non derivabilità

Siano I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto interno ad I tale che

- f è continua in x_0
- f non è derivabile in x_0

Allora si presentano questi casi

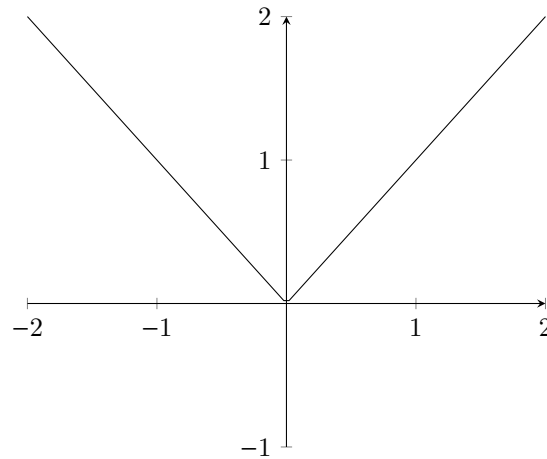
1. Punto angoloso;
2. Punto a tangente verticale;
3. Cuspide

Definizione 1.1.1: Punto angoloso

Diciamo che x_0 è un **punto angoloso** se

$$\exists f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad (f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0))$$

e almeno una delle due è finita

Figura 1.1: $f(x) = |x|$

Osservazione: Se x_0 è un punto angoloso $\nexists f'(x_0)$ perché $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

Definizione 1.1.2: Punto di flesso a tangente verticale

Diciamo che x_0 è un **punto di flesso a tangente verticale** se

$$\exists f'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$$

Definizione 1.1.3: Cuspide

Diciamo che x_0 è un **punto di cuspide** se

$$\exists f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}, \quad f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$

Osservazione: Dei tre tipi di punti di non derivabilità

$$f'(x_0) \begin{cases} \text{esiste se } x_0 \text{ è punto di flesso a tangente verticale} \\ \text{non esiste se } x_0 \text{ è punto di cuspide o punto angoloso} \end{cases}$$

Osservazione: In tutti i casi classificati una, fra derivata destra e derivata sinistra della funzione del punto, esiste (finita o infinita). Nel prossimo esempio, f è continua in x_0 , ma

$$\nexists f'_-(x_0), \quad f'_+(x_0)$$

Il caso in cui ho continuità e non esiste almeno una fra le due non viene classificato

Esempio 1.1.1

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

N.B.

$$|x \sin \frac{1}{x}| = |x| |\sin \frac{1}{x}| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{graf}(f) \text{ è compreso fra } y = x \text{ e } y = -x$$

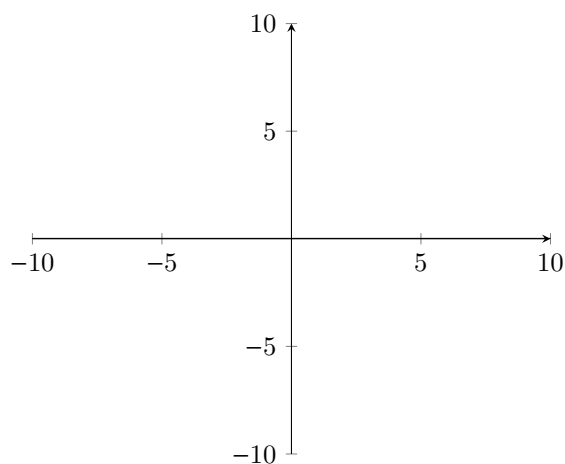


Figura 1.2: Non esiste né la derivata destra né quella sinistra

Diamo uno strumento per lo studio delle forme indeterminate

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

o riconducibili ad esse.

1.2 Teorema di de l'Hopital

Teorema 1.2.1 Il teorema di de l'Hopital per le f.i. $\frac{0}{0}$

Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue su (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Supponiamo inoltre che:

1. f, g derivabili in $(a, b) \setminus \{x_0\}$
2. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$;
3. ESISTA il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Commentiamo l'ipotesi:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) = 0 \\ f, g \text{ continue in } x_0 \end{cases}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Ricordiamo che f, g derivabili in $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

Questo è in vista del fatto che considero $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall (a, b) \setminus \{x_0\}$$

L'ipotesi misteriosa è $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se valgono tutte le ipotesi e esiste il limite allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

la validità dell'uguaglianza è condizionata al fatto che il secondo limite esista.

Teorema 1.2.2 Il teorema di de l'Hopital per le f.i. $\frac{\infty}{\infty}$

Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue su (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo inoltre che:

1. f, g derivabili in $(a, b) \setminus \{x_0\}$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$;
4. ESISTA il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Osservazione: Anche per le f.i. $\frac{\infty}{\infty}$, l'uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

è condizionata al fatto che il secondo limite esista.

Esempio 1.2.1 (Esempio di applicazione)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

Esempio 1.2.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(|x|)$$

La riformulo come f.i. quoziente, ho due possibilità

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(|x|)}{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1}}{\log(|x|)}$

Conviene utilizzare la prima riscrittura per l'applicazione di de l'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(|x|)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{|x|}{x} \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (-x^2) = 0$$

Esempio 1.2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

La forma esponenziale si riconduce alla forma del prodotto

$$x^x = \exp(\log(x^x)) = \exp(x \log(x)) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = 0$$

A volte è necessario applicare il teorema di de l'Hopital più volte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)}$$

Non siamo arrivati ad una conclusione quindi dobbiamo ripetere il procedimento

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = 0$$

A posteriori vedo che tutte le uguaglianze condizionate sono vere.

Esempio 1.2.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x}$$

è una forma indeterminata se $n \geq 2$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$$

è una forma indeterminata se $n \geq 3$. Applico il teorema di de l'Hopital n volte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

Esempio 1.2.5

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = \sin(x)$$

Provo ad applicare il teorema di de l'Hopital per

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} \quad \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Siccome $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **non esiste**. Quindi non posso applicare il teorema di de l'Hopital, non sono autorizzato a scrivere $=$. L'uguaglianza non vale. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$$

esiste.

Teorema 1.2.3 Teorema del limite della derivata (enunciato per le derivate destre)

Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in a e derivabile in (a, b) . Se esiste, finito o no, il limite $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, allora esiste anche $f'_+(a)$ e si ha che

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

”La derivata destra di f in a coincide con il limite destro di f' in a ”.

Dimostrazione: Considero

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Quando calcolo questo limite mi trovo in una f.i. $\frac{0}{0}$, infatti f è continua in a per ipotesi $\implies f(x) \rightarrow f(a)$ per $x \rightarrow a^+ \implies f(x) - f(a) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow a^+$. Le ipotesi del teorema mi permettono di applicare il teorema di de l'Hopital

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(f(x) - f(a))'}{(x - a)'} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

Per ipotesi, ho richiesto che $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. L'uguaglianza non è più condizionata e deduco

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

☺

Osservazione: Sotto ipotesi analoghe vale anche il risultato per

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

Ma si consiglia negli esercizi di non usare i limiti unilateri di f' al posto delle derivate unilateri.

Capitolo 2

Proprietà globali delle funzioni derivabili

I risultati che ci permetteranno di fare lo studio del grafico qualitativo delle funzioni si basano su altri risultati teorici che legano

- proprietà delle derivate (la derivata è un concetto locale, di per sé dà informazioni sul comportamento di f vicino al punto);
- proprietà globali delle funzioni;

Innanzitutto, daremo risultati che applicheremo allo studio dei punti di estremo relativo di una data funzione.

2.1 Massimi e minimi relativi

Definizione 2.1.1: Punti di minimo e massimo relativo e assoluto

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

Si dice che

- x_0 è un **punto di massimo RELATIVO** (o locale), se esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ cioè:

$$\exists r > 0 : \forall x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r) \quad \text{si ha} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

- x_0 è un **punto di minimo RELATIVO** (o locale), se esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ cioè:

$$\exists r > 0 : \forall x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r) \quad \text{si ha} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

- x_0 è un punto di estremo relativo (o locale) se è punto di massimo o di minimo relativo.

Osservazioni:

- Se x_0 è un punto di massimo assoluto per f su A , cioè

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$$

allora anche x_0 è un punto di massimo relativo. Ovviamente non vale il viceversa.

Esempio 2.1.1 (La funzione doppio pozzo)

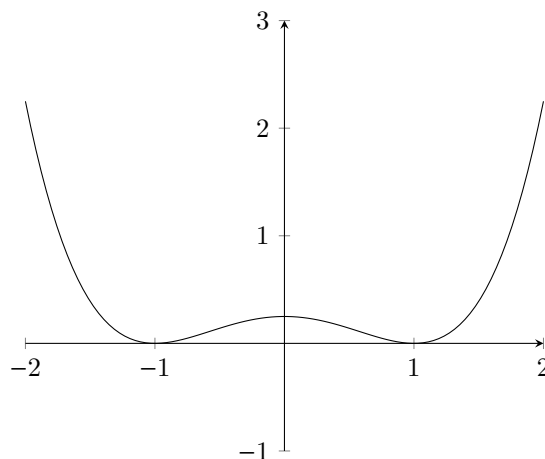


Figura 2.1: funzione doppio pozzo

$$W(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ sono punti di minimo relativo. Anche di minimo assoluto.

Esempio 2.1.2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- $x_0 = 0$ è punto di massimo relativo; è anche punto di massimo assoluto.
- $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ sono punti di massimo relativo; non assoluto.

Per quanto riguarda le derivate invece

- in $x_0 = 0$ f non è continua $\implies f$ non è derivabile.
- in $x = -1$ ho che $f'_+(-1) \leq 0$, in $x = 1$ ho che $f'_-(1) \geq 0$.

Esempio 2.1.3

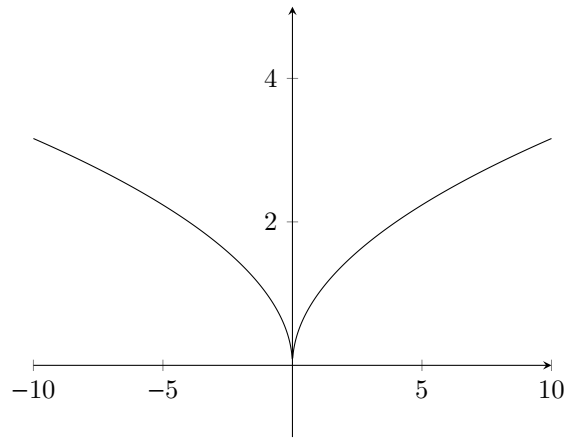
$$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

x_0 è punto di minimo relativo, è anche punti di minimo assoluto. f non ha punti di massimo relativo. x_0 è un punto di cospide.

Definizione 2.1.2: Punto stazionario

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto interno a I . Diciamo che x_0 è **punto stazionario (o critico)** per f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Teorema 2.1.1 Teorema di Fermat

Figura 2.2: $f(x) = \sqrt{|x|}$

Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un **punto interno** a I . Se

$$\exists f'(x_0) \quad e \quad x_0 \text{ è un punto di estremo relativo}$$

allora x_0 è un punto stazionario di f .

Dati $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$ interno in cui $\exists f'(x_0)$ allora vale questa implicazione: x_0 punto di estremo relativo $\implies f'(x_0) = 0$. Essere punto stazionario è condizione necessaria perché x_0 sia punto di estremo relativo.

N.B.

Non vale il viceversa! Falso che $f'(x_0) = 0 \implies x_0$ punto di estremo relativo! Ad esempio $f(x) = x^3$ è un controesempio.