

Algebra Lineare e Geometria Analitica  
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023



# Indice

<b>Capitolo 1</b>	<b>Nozioni preliminari</b>	<b>Pagina 4</b>
1.1	Relazioni su un insieme	4
1.2	Strutture algebriche	4
1.3	Matrici	5
<b>Capitolo 2</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>Pagina 7</b>
2.1	Generalità	7
2.2	Sottospazi di uno spazio vettoriale	7
2.3	Indipendenza e dipendenza lineare	8
2.4	Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale	10
2.5	Basi e dimensione	10
2.6	Intersezione e somma di sottospazi	14
<b>Capitolo 3</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>Pagina 17</b>
3.1	Determinante di una matrice quadrata	17
3.2	Matrici invertibili	18
3.3	Dipendenza lineare e determinanti	18
3.4	Sistemi lineari	19
3.5	Cambiamenti di base	23
<b>Capitolo 4</b>	<b>Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità</b>	<b>Pagina 25</b>
4.1	Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico	25
4.2	Matrici diagonalizzabili	26
<b>Capitolo 5</b>	<b>Forme bilineari e prodotti scalari</b>	<b>Pagina 28</b>
5.1	Forme bilineari	28
5.2	Prodotti scalari e ortogonalità	28
5.3	Spazi con prodotto scalare definito positivo	30
5.4	Matrici di forme bilineari	33
5.5	Matrici ortogonali e basi ortonormali	34
5.6	Matrici reali simmetriche	34

# Capitolo 1

## Nozioni preliminari

### 1.1 Relazioni su un insieme

#### Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme  $A$  è un qualunque sottoinsieme di  $\mathcal{R}$  del prodotto cartesiano  $A \times A$ .  
Una relazione  $\mathcal{R}$  su un insieme  $A$  si dice:

- **riflessiva** se, per ogni  $a \in A$ ,  $a\mathcal{R}a$ ;
- **simmetrica** se, per ogni  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b$  allora  $a = b$ ;
- **antisimmetrica** se, per ogni  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b$  e  $b\mathcal{R}a$  allora  $a = b$ ;
- **transitiva** se, per ogni  $a, b, c \in A$ ,  $a\mathcal{R}b$  e  $b\mathcal{R}c$  allora  $a\mathcal{R}c$ ;

#### Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine  $\mathcal{R}$  su un insieme  $A$  si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di  $A$  sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni  $a, b \in A$ , risulta  $a\mathcal{R}b$  oppure  $b\mathcal{R}a$ , la relazione  $\mathcal{R}$  si dice **relazione d'ordine totale**.

### 1.2 Strutture algebriche

#### Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia  $(G, \star)$  un insieme con un'operazione  $\star$ . La struttura  $(G, \star)$  si dice **gruppo** se:

- l'operazione  $\star$  è associativa;
- esiste in  $G$  l'elemento neutro;
- ogni elemento di  $g \in G$  è simmetrizzabile.

Se l'operazione  $\star$  soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

**Definizione 1.2.2: Campo**

Sia  $A$  un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "." e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura  $(A, +, \cdot)$  è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$  è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  è un gruppo abeliano con elemento neutro  $e \neq 0$ ;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni  $a, b, c \in A$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

### 1.3 Matrici

**Definizione 1.3.1: Matrice**

Dato un campo  $K$  si dice **matrice** di tipo  $m \times n$  su  $K$  una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avente  $m$  righe ed  $n$  colonne, i cui elementi  $a_{ij}$  sono elementi di  $K$ .

**Definizione 1.3.2: Matrice quadrata**

Una matrice di tipo  $n \times n$  è detta **matrice quadrata** di ordine  $n$ . Queste vengono indicate con  $M_n(K)$ .

**Definizione 1.3.3: Prodotto righe per colonne**

Date le matrici  $A = (a_{ih}) \in K^{m,n}(K)$  con  $i \in I_m, h \in I_n$  e  $B = (b_{hj}) \in K^{n,p}$  con  $h \in I_n, j \in I_p$ , si dice **prodotto righe per colonne** di  $A$  per  $B$  la matrice

$$A \cdot B = (c_{ij}) \text{ con } i \in I_m, j \in I_p \quad \text{ove}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h \in I_n} a_{ih}b_{hj}$$

**Esempio 1.3.1**

Prendiamo per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 21 & 12 & -19 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.3.4: Matrice identica**

L'elemento neutro delle matrici quadrate di ordine  $n$  è la **matrice identica**, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.3.5: Trasposta di una matrice**

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice di  $K^{m,n}$ . Si dice **trasposta** di  $A$  la matrice  $K^{n,m}$  ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne, cioè  ${}^tA = (b_{ji})$  ove  $b_{ji} = a_{ij}$  per ogni  $i \in I_n$  e  $j \in I_m$ .

# Capitolo 2

## Spazi vettoriali

### 2.1 Generalità

#### Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano  $K$  un campo e  $V$  un insieme. Si dice che  $V$  è uno **spazio vettoriale** sul campo  $K$ , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su  $V$ , detta somma,  $+: V \times V \rightarrow V$  e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari,  $\cdot: K \times V \rightarrow V$ , tali che

- $(V, +)$  sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno  $\cdot$  soddisfi le seguenti proprietà:
  - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
  - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme  $V$  sono detti **vettori**, gli elementi del campo  $K$  sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di  $(V, +)$  è detto **vettore nullo** e indicato  $\underline{0}$  per distinguerlo da  $0$ , zero del campo  $K$ . L'opposto di ogni vettore  $\mathbf{v}$  viene indicato con  $-\mathbf{v}$ .

#### Teorema 2.1.1

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ , siano  $k \in K$  e  $v \in V$ . Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

**Dimostrazione:** Se  $k = 0$

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

e sommando  $-0v$  ad ambo i membri si ottiene appunto  $\underline{0} = 0v$ . Se è  $v = \underline{0}$ , si procede nel modo analogo. Viceversa, se  $kv = \underline{0}$  e  $k \neq 0$  dimostriamo che  $v = \underline{0}$ . Dato che  $k \neq 0$ , esiste l'inverso  $k^{-1} \in K$  e, moltiplicando ambo i membri della precedente uguaglianza per  $k^{-1}$  si ottiene  $k^{-1}(kv) = k^{-1}\underline{0}$  che, per quanto dimostrato in precedenza dà il  $\underline{0}$ . Dato che  $k^{-1}(kv) = (k^{-1}k)v = 1v = v$ , per la proprietà 4, si ha  $v = \underline{0}$ .  $\odot$

### 2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

#### Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia  $\emptyset \neq U \subseteq V$ , diremo che  $U$  è **sottospazio vettoriale** di  $V$  se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

**Proposizione 2.2.1** Primo criterio di riconoscimento

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale e sia  $\emptyset \neq U \subseteq V$  un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme  $U$  è uno spazio vettoriale di  $V$  se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1.  $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$
2.  $\forall k \in K, \forall u \in U \quad ku \in U$

**Proposizione 2.2.2** Secondo criterio di riconoscimento

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$  e sia  $\emptyset \neq U \subseteq V$ ,  $U$  è sottospazio di  $V(K)$  se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

## 2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

**Definizione 2.3.1:** Combinazione lineare

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(K)$  si dice combinazione lineare di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ogni vettore  $v$ :

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, \dots, k_n \in K$$

**Definizione 2.3.2:** Sistema di vettori libero

Sia  $V(K)$  e sia  $A$  un sistema di vettori di  $V(K)$ ,  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , allora  $A$  si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di  $A$  che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = \underline{0}$$

Se  $A$  è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

**Definizione 2.3.3:** Sistema di vettori legato

Sia  $V(K)$  e sia  $A$  un sistema di vettori di  $V(K)$ ,  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , allora  $A$  si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n$$

Se  $A$  è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

**Proposizione 2.3.1**

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$ . Se  $\underline{0}$  appartiene ad  $A$ , il sistema  $A$  è legato.

**Dimostrazione:** Sia  $\underline{0} \in A$ , senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $\underline{0} = v_1$  quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

**Proposizione 2.3.2**

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$ . Se in  $A$  appaiono due vettori proporzionali allora  $A$  è legato.



**Dimostrazione:** Senza perdita di generalità possiamo supporre che  $v_1 = kv_2$  e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies A \text{ è legato}$$

☺

### Proposizione 2.3.3

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$ .  $A$  è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

**Dimostrazione:**  $\implies$  : Per ipotesi  $A$  è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che  $k_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} -k_1v_1 &= k_2v_2 + \dots + k_nv_n & v_1 &= \frac{1}{k_1}(-k_2v_2 - \dots - k_nv_n) \\ v_1 &= -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - \dots - \frac{k_n}{k_1}v_n \end{aligned}$$

e quindi  $v_1$  è combinazione lineare di  $v_2, \dots, v_n$ .

$\Leftarrow$  : Per ipotesi uno dei vettori di  $A$  è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + \dots + k_nv_n \quad \underline{0} = -1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

siccome  $-1 \neq 0$   $A$  è legato.

☺

### Proposizione 2.3.4

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$  e sia  $u \in V(K)$ . Se  $A \cup \{u\}$  è legato, allora  $u$  è combinazione lineare dei vettori di  $A$ .

**Dimostrazione:** Per ipotesi  $A \cup \{u\}$  è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n, b \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n + bu$$

sia per assurdo  $b = 0$

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, } \mathbf{assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \quad u = -\frac{k_1}{b}v_1 - \frac{k_2}{b}v_2 - \dots - \frac{k_n}{b}v_n$$

$\implies u$  è combinazione lineare dei vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$

☺

### Proposizione 2.3.5

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$  e sia  $B \supseteq A$  sistema di vettori di  $V(K)$ . Se  $A$  è legato allora anche  $B$  è legato.

**Dimostrazione:**

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in K \text{ non tutti nulli} : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

Se  $B = [v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m]$  allora

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$$

$\implies B$  è legato.

☺

**Proposizione 2.3.6**

Sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori di  $V(K)$  e sia  $B \subseteq A$  sistema di vettori di  $V(K)$ , se  $A$  è libero, allora  $B$  è libero.

**Dimostrazione:** Sia, per assurdo,  $B$  legato, allora per la proposizione precedente anche  $A$  è legato. **Assurdo!**  
Quindi  $B$  è libero.  $\odot$

## 2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

**Definizione 2.4.1: Sistema di generatori**

Sia  $A$  sistema di vettori di  $V(K)$ .  $A$  si dice sistema di generatori di  $V(K)$  se ogni  $v \in V(K)$  si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di  $A$ .

**Definizione 2.4.2: Copertura lineare**

Sia  $A$  un sistema di vettori di  $V(K)$  si dice copertura (o chiusura) lineare di  $A$  l'insieme  $\mathcal{L}(A)$  di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di  $A$ .

**N.B.**

Dato  $A$  sistema di vettori di  $V(K)$

1.  $\mathcal{L}(A)$  è il più piccolo sottospazio di  $V(K)$  che contiene  $A$
2.  $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3.  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se  $V(K)$  ammette un sistema di generatori finito  $\implies V(K)$  si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di  $V(K)$  ha cardinalità infinita  $\implies V(K)$  non è finitamente generato.

## 2.5 Basi e dimensione

**Lemma 2.5.1**

Sia  $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori per uno spazio vettoriale  $V(K)$ , e sia  $v \in S$  combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri)  $\implies S \setminus \{v\}$  è sistema di generatori per  $V(K)$

**Dimostrazione:** Sia, senza perdere di generalità,  $v_1$  combinazione lineare di  $v_2, v_3, \dots, v_n$

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$$

sia  $v \in V(K)$

$$\begin{aligned} v &= h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = h_1 (k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \\ v &= \underbrace{(h_1 k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + \dots + \underbrace{(h_1 k_n + h_n)}_{\in K} v_n \in \mathcal{L}([v_2, v_3, \dots, v_n]) = \mathcal{L}(S \setminus \{v_1\}) \end{aligned}$$

$\implies S \setminus \{v_1\}$  è un sistema di generatori.  $\odot$

**Teorema 2.5.1**

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ( $V(K) \neq \{0\}$ ), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

**Dimostrazione:** sia  $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori per  $V(K)$ , abbiamo due possibilità:

1.  $A$  è libero  $\implies A$  è un sistema di generatori libero;
2.  $A$  è legato  $\implies \exists v \in A$  combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre  $v = v_1 \implies A \setminus \{v_1\} = A_1$  è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare  $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$  finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.

Osserviamo che  $A$  contiene almeno un  $v \in A : v \neq \underline{0}$ , questo perché  $A_n = [0]$  e  $v_n \neq \underline{0}$  perché  $A \neq \{\underline{0}\} \implies A_n$  è necessariamente libero.  $\odot$

#### Definizione 2.5.1: Base

Sia  $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  sequenza libera di vettori di  $V(K)$ .  $S$  è detta base se e solo se  $S$  è una sequenza libera di generatori.

#### Definizione 2.5.2: Base canonica di $\mathbb{R}^n$

$((1, 0, 0, \dots, 0)(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1))$  è una base canonica per  $\mathbb{R}^n$ .

#### Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia  $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  sistema di generatori e  $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  sistema libero. Allora la cardinalità di  $A$  sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. ( $m \leq n$ )

**Dimostrazione:** Sia per assurdo  $m > n$ , poiché  $B$  genera  $V(K)$   $u_1$  si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Essendo  $A$  libero  $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, \dots, k_n$  non sono tutti nulli  $\implies$  senza perdita di generalità  $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad v_1 = \frac{1}{k_1}(-u_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, \dots, v_n])$$

$B$  è sistema di generatori,  $B \cup \{u_1\}$  è sistema di generatori, di conseguenza  $(B \cup \{u_1\} \setminus \{v_1\}) = B_1 = [u_1, v_2, \dots, v_n]$  è ancora sistema di generatori per  $V(K)$ .

Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, \dots, h_n \in K$$

Se avessimo  $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$   $u_2 = \alpha u_1$  ma ciò non può succedere perché  $A$  è libero  $\implies \exists h_i \neq 0$  e senza perdita di generalità supporremo  $h_2 \neq 0$  quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + \dots + h_n v_n \quad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - \dots - h_n v_n)$$

$v_2$  è linearmente dipendente da  $B_2 = [u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]$  e  $B_2$ , per lo stesso motivo di  $B_1$  è ancora sistema di generatori.

Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento  $n$  volte fino a trovare un sistema  $B_n = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ . Siccome avevamo supposto che  $m > n$  essendo  $B_n$  sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche  $u_{n+1}$  come combinazione lineare dei vettori di  $B_n$ , cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \quad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

questo comporta che  $A$  sia legato, ma questo è **assurdo!**  $\implies m \leq n$ .  $\odot$

**Teorema 2.5.2**

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano  $B_1$  e  $B_2$  due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad B_2 = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad m = n$$

**Dimostrazione:** Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- $B_1$  sistema di generatori,  $B_2$  sistema libero  $\implies n \geq m$ ;
- $B_2$  sistema di generatori,  $B_1$  sistema libero  $\implies m \geq n$ .

$$m \geq n \text{ e } n \geq m \iff n = m. \quad \text{⊗}$$

**Definizione 2.5.3: Dimensione**

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di  $V$  la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se  $V = \{0\}$  poniamo la  $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

**Proposizione 2.5.1**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$  e sia  $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema di generatori. Allora  $S$  è libero.

**Dimostrazione:** Sia  $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  una base di  $V_n(K)$ . Sia per assurdo  $S$  legato. Senza perdita di generalità  $v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$ . Allora  $S' = S \setminus \{v_1\}$  è ancora sistema di generatori.  $|S'| = n - 1 \geq |B|$  perché  $B$  è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!**. Quindi  $S$  è libero.  $\text{⊗}$

**Proposizione 2.5.2**

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$ . Sia  $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un sistema libero. Allora  $S$  è anche un sistema di generatori.

**Dimostrazione:** Sia  $B = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  una base di  $V(K)$ , supponiamo per assurdo che  $S$  non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$  è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha} (-k_1 v_1 - k_2 v_2 - \dots - k_n v_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$  **assurdo!** Contro l'ipotesi che  $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$  è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1}_{\text{sistema libero}} \leq \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \rightarrow \text{per il lemma di Steinitz}$$

**Assurdo!**  $\implies S$  è un sistema di generatori.  $\text{⊗}$

**Proposizione 2.5.3**

$m$  vettori in  $V_n(K)$  con  $m > n$  sono sempre linearmente dipendenti.

**Dimostrazione:** Siano per assurdo  $[v_1, v_2, \dots, v_m]$ ,  $m$  vettori linearmente indipendenti con  $m > n$ . Sia  $B$  una base di  $V_n(K)$ .  $m = |S = [v_1, v_2, \dots, v_m]| \leq |B| = n$  per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi  $m > n$ , **assurdo!**  $\text{⊗}$

**Proposizione 2.5.4**

$m$  vettori in  $V_n(K)$  con  $m < n \implies$  non possono generare.

**Dimostrazione:** siano  $v_1, v_2, \dots, v_m$  per assurdo  $m$  vettori che generano  $V_n(K)$  con  $m < n$  allora:

$$m = |S| = [v_1, v_2, \dots, v_m] \geq |B| = n \quad \text{con } m < n \quad \text{per il lemma di Steinitz}$$

**Assurdo!** Va contro all'ipotesi. ☹

**Teorema 2.5.3** Teorema di caratterizzazione delle basi

Sia  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una sequenza di vettori di  $V(K)$ .  $B$  è una base se e solo se ogni vettore di  $V$  si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di  $B$ .

$$\forall v \in V, \exists! v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad k_i \in K$$

**Dimostrazione:**  $\implies$  sia  $B$  una base di  $V$ . Per ogni  $v$  si ha che  $v \in \mathcal{L}(B)$  perché  $B$  è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista  $v \in V$ :

$$v = v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + \dots + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

$B$  è una sequenza libera, quindi  $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$  perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che  $k_i \neq h_i \implies$  **assurdo!**  $\implies \exists!$  la combinazione lineare dei vettori di  $B$  che dà  $v$  ( $\forall v \in V$ ).

$\Leftarrow$  per ipotesi  $\forall v \in V \exists!$  combinazione lineare dei vettori di  $B$  che dà  $v$ .  $B$  è una sequenza di generatori, cioè  $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$ . Supponiamo per assurdo che  $B$  sia legato  $\implies \exists k_i \in K$  non nullo:

$$\underline{0} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di  $B$  che danno  $\underline{0}$ . Dato che  $\underline{0} \in V$  per ipotesi esiste un'unica combinazione lineare dei vettori di  $B$  che dà  $\underline{0}$ . **Assurdo!** Quindi  $B$  è una sequenza libera e  $B$  è una base per  $V$ . ☹

**Definizione 2.5.4: Componenti di un vettore rispetto ad una base**

Sia  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una base di  $V_n(K)$  e sia  $v \in V$ . Chiameremo componenti di  $v$  rispetto alla base  $B$  la sequenza  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ :

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

**Proposizione 2.5.5**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$ , allora  $V_n(K)$  ammette almeno un sottospazio di dimensione  $m \forall 0 \leq m \leq n$ .

**Dimostrazione:** sia  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una base di  $V_n(K)$  e sia  $0 \leq m \leq n$ , ci sono due possibilità:

1.  $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$  è il sottospazio voluto;
2.  $0 < m \leq n$  e quindi  $S = (v_1, v_2, \dots, v_m)$

$\mathcal{L}(S)$  ha dimensione  $m$  perché  $S$  è libero ( $S \subseteq B$ ) e genera, per definizione  $\mathcal{L}(S)$ . ☹

**Proposizione 2.5.6**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  e sia  $U \leq W$ , allora:

1.  $\dim(U) \leq \dim(W)$
2.  $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

**Dimostrazione:** Dimostriamo i due punti:

1. Sia  $B$  base per  $U$  e  $B'$  base per  $W$ , se per assurdo

$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$

contro il lemma di Steinitz.

2.  $\implies$  è banale;  
 $\impliedby$  sia per assurdo  $U < W$  e sia  $B$  base di  $U$ , allora

$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$

quindi  $B$  è una base anche per  $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$  **Assurdo!**

☺

**Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $A = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ , ove  $p \leq n$ , una sequenza libera di vettori in  $V_n(K)$ . Allora, in una qualunque base  $B$  di  $V_n(K)$ , esiste una sequenza  $B'$  di vettori, tale che  $A \cup B'$  è una base di  $V_n(K)$ .

## 2.6 Intersezione e somma di sottospazi

**Proposizione 2.6.1**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$  e siano  $U, W \leq V \implies U \cap W$  è sottospazio di  $V$ .

**Dimostrazione:** Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi.  $U \cap W$  è un sottospazio di  $V \iff$  è sottoinsieme non vuoto di  $V$ :

$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W$$

$U \cap W$  è sottoinsieme non vuoto di  $V$ , perché  $U \subseteq V, W \subseteq V$  e  $\underline{0} \in U \cap W$ . Siano ora  $v_1, v_2 \in U \cap W$  e  $k_1, k_2 \in K$ , osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che  $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U$  e per lo stesso motivo  $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W \implies k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$  è un sottospazio vettoriale. ☺

**N.B.**

Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che  $U \cup W$  non è un sottospazio a meno che  $U \subseteq W$  oppure  $W \subseteq U$ .

**Definizione 2.6.1: Spazio di somma**

Dati  $U$  e  $W \leq V$  spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$  definiamo lo **spazio di somma** come:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

**Proposizione 2.6.2**

Dati  $U$  e  $W \leq V$  spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$  abbiamo che:  $U + W \leq V$

**Dimostrazione:** Osserviamo che  $U + W \subseteq V$  perché dato  $u \in U$  e  $w \in W$ ,  $u \in V$  e  $w \in V \implies u + w \in V$ , il quale non è vuoto perché  $\underline{0} \in U + W$ . Siano  $v_1, v_2 \in U + W$  e siano  $k_1, k_2 \in K$

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} &= k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1 u_1 + k_1 w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2 u_2 + k_2 w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}} \\ &\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio } U + W \leq V \end{aligned}$$

⊕

**Proposizione 2.6.3**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  allora  $U + W$  è il più piccolo sottospazio di  $V$  che contiene  $U \cup W$ ; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

**Definizione 2.6.2: Somma diretta**

Dati  $U, W \leq V_n(K)$  diremo che  $U + W$  è somma diretta se  $\forall v \in U + W$  può essere scritto come unico modo come  $u + w$ . Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists! u \in U \text{ e } w \in W : \quad v = u + w$$

Se  $U + W$  è una somma diretta allora la indicheremo con  $U \oplus W$ .

**Proposizione 2.6.4**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  allora  $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$ .

**Dimostrazione:**  $\implies$  Siano  $U, W$  in somma diretta e sia, per assurdo:  $x \in U \cap W$  con  $x \neq \underline{0}$ . Sia  $v = u + w$  con  $u \in U$  e  $w \in W$ . Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad \text{e} \quad w = w - x \quad \text{poiché la somma è diretta} \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

$\Leftarrow$  Siano  $U, W : U \cap W = \{\underline{0}\}$  e supponiamo per assurdo che esista  $v \in U + W$  :

$$v = u_1 + w_1 \quad \text{e} \quad v = u_2 + w_2 \quad \text{con } u_1, u_2 \in U \quad \text{e} \quad w_1, w_2 \in W \quad \text{e} \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad \text{e} \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad \text{e} \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che  $v$  avesse due scritture distinte come somma i elementi di  $U$  e  $W$ .

$$\implies \exists! (u_1, w_1) : \quad u_1 \in U \quad \text{e} \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1 \text{ e } U \oplus W$$

⊕

**Corollario 2.6.1**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  allora  $V = U \oplus W \iff U + W = V \text{ e } U \cap W = \{\underline{0}\}$ .

**N.B.**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  e sia  $B_1$  una base di  $V$  e  $B_2$  una base di  $W \implies B_1 \cup B_2$  è sequenza di generatori per lo spazio  $U + W$ . In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per  $U + W$ .

**Proposizione 2.6.5**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  e sia  $A$  una sequenza libera di vettori di  $U$  e  $B$  una sequenza libera di vettori di  $W$ . Allora  $A \cup B$  è una sequenza libera di vettori della  $U \oplus W$ .

**Dimostrazione:** Siano  $A = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  e  $B = (w_1, w_2, \dots, w_h)$  e supponiamo per assurdo che  $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$  e  $b_1, b_2, \dots, b_h \in K$ , quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h}_{\in W}$$

$$\implies 0 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \quad e \quad 0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

ma  $A$  e  $B$  sono sequenze libere quindi  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = \dots = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_h w_h \implies \text{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$  è una sequenza libera. ☺

**Corollario 2.6.2**

Siano  $U, W \leq V_n(K)$  e siano  $B_U$  e  $B_W$  basi di  $U$  e  $W \implies B_U \cup B_W$  è una base per  $U \oplus W$ .

**Proposizione 2.6.6** Formula di Grassmann

Dati  $U, W \leq V_n(K)$  abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

**Definizione 2.6.3: Complemento diretto**

Sia  $W \leq V_n(K)$  si dice **complemento diretto** di  $W$  in  $V$  uno spazio  $U \leq V : U \oplus W = V$ .

**N.B.**

Un complemento diretto di  $W$  in  $V$  esiste sempre e si trova estendendo una base di  $W$  a una base di  $V$ . In generale questo non è unico.



# Capitolo 3

## Sistemi lineari

### 3.1 Determinante di una matrice quadrata

#### Definizione 3.1.1: Determinante

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata, di ordine  $n$ , a elementi in un campo  $K$ . Si dice **determinante** di  $A$ , e si scrive  $|A|$  oppure  $\det(A)$ , l'elemento di  $K$  definito ricorsivamente come segue:

1. se  $n = 1$       $A = (a_{11})$       $\det(A) = |A| = a_{11}$
2. se  $n > 1$       $A = a_{ij}$       $\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$

Se  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , il suo determinante è  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

Mentre se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora la il determinante di  $A$  è

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

#### Definizione 3.1.2: Complemento algebrico

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , a elementi in campo  $K$ . Si dice **complemento algebrico** dell'elemento  $a_{hk}$ , e si indica  $\Gamma_{hk}$ , il determinante della matrice quadrata di ordine  $n - 1$ , ottenuta da  $A$  sopprimendo la  $h$ -esima riga e la  $k$ -esima colonna, preso con il segno  $(-1)^{h+k}$ .

#### Teorema 3.1.1 Primo teorema di Laplace

Data la matrice quadrata di ordine  $n$ , la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di  $A$ .

Pertanto, la formula per il calcolo del determinante di  $A = (a_{ij})$  rispetto alla  $i$ -esima riga è

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}\Gamma_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

rispetto alla  $j$ -esima colonna è

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}\Gamma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

**Teorema 3.1.2** Secondo teorema di Laplace

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero. Quindi

$$A \in M_n(K) \implies \begin{cases} a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \dots + a_{in}\Gamma_{jn} = 0 & i \neq j \\ a_{1i}\Gamma_{1j} + a_{2i}\Gamma_{2j} + \dots + a_{ni}\Gamma_{nj} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

**Teorema 3.1.3** Teorema di Bidet

Date due matrici quadrate di ordine  $n$ ,  $A$  e  $B$ , il determinante della matrice prodotto  $A \cdot B$  è uguale al prodotto dei determinanti di  $A$  e  $B$ , cioè

$$|A \cdot B| = |A||B|$$

## 3.2 Matrici invertibili

**Definizione 3.2.1:** Matrice invertibile

Una matrice quadrata, di ordine  $n$ , si dice **invertibile** quando esiste una matrice  $B$ , quadrata e dello stesso ordine, tale che  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ , dove  $I_n$  è la matrice identica di ordine  $n$ . La matrice  $B$  si dice **inversa** di  $A$  e si indica  $A^{-1}$ .

**Teorema 3.2.1**

Sia  $A \in M_n(K)$ ; allora  $A$  è invertibile  $\iff |A| \neq 0$  e in tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t A_a$$

dove  $A_a$  si chiama **matrice aggiunta** di  $A$  ed è la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo ogni elemento con il suo complemento algebrico  $\Gamma$ .

## 3.3 Dipendenza lineare e determinanti

**Definizione 3.3.1:** Minore

Sia  $A \in K^{m,n}$ . Si chiama **minore di ordine  $p$**  estratto da  $A$ , con  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 0$ ,  $p \leq \min\{m, n\}$ , una matrice quadrata di ordine  $p$  ottenuta cancellando  $m - p$  righe e  $n - p$  colonne da  $A$ .

**Teorema 3.3.1**

Una sequenza  $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  di  $n$  vettori dello spazio vettoriale  $V_n(K)$  è libera se, e soltanto se, la matrice  $A$ , che ha nelle proprie righe (o colonne) le componenti dei vettori di  $S$  in una base di  $V_n(K)$ , ha determinante non nullo ed è legata se, e soltanto se, tale matrice  $A$  ha determinante nullo.

**Definizione 3.3.2:** Rango di una matrice

Sia  $A$  una matrice di  $K^{m,n}(K)$ . Si dice **rango** della matrice  $A$ , e si scrive  $\rho(A)$ , l'ordine massimo di un minore estraibile da  $A$  con determinante non nullo.

**Osservazione:** Data la matrice  $A$  di  $K^{m,n}(K)$

1.  $\rho(A) = 0 \iff A$  è la matrice nulla;
2.  $\rho(A) = \rho(A^t)$  ;
3.  $\rho(A) \leq \min(m, n)$ .

### Definizione 3.3.3: Spazio delle righe e delle colonne

Data una matrice  $A$ , avente  $m$  righe ed  $n$  colonne, si dice **spazio delle righe** di  $A$ , e si indica  $\mathcal{L}(R)$ , il sottospazio  $K^n(K)$  generato dalle righe di  $A$ . Si dice **spazio delle colonne** di  $A$ , e si indica  $\mathcal{L}(C)$ , il sottospazio vettoriale di  $K^m(K)$  generato dalle colonne di  $A$ .

### Teorema 3.3.2 Teorema di Kronecker

Gli spazi vettoriali  $\mathcal{L}(R)$  ed  $\mathcal{L}(C)$ , di una matrice  $A \in K^{m,n}(K)$ , hanno la stessa dimensione e tale dimensione coincide con il rango di  $A$ . Cioè:

$$\dim(\mathcal{L}(R)) = \dim(\mathcal{L}(C)) = \rho(A).$$

**Dimostrazione:** Dimostriamo che  $\dim(\mathcal{L}(R)) = \rho(A)$ . La dimostrazione per quanto riguarda le colonne è completamente analoga. Sia  $s = \dim(\mathcal{L}(R)) \implies$  abbiamo  $s$  righe linearmente indipendenti nella matrice  $A$  e quindi per il teorema precedente esiste un minore in  $A$  di ordine  $s$  a determinante non nullo. Pertanto  $\rho(A) \geq s$ . Sia per assurdo  $\rho(A) = r > s$ , dovrebbe esistere in  $A$  un minore di ordine  $r$  a determinante non nullo. Se chiamiamo ora  $S = (R_1, R_2, \dots, R_r)$  la sequenza di righe nella matrice  $A$ , la matrice  $A$  ha un minore di ordine  $r$  non singolare e di conseguenza è libera. Quindi

$$\dim \mathcal{L}(R) \geq \dim \mathcal{L}(S) = r > s = \dim \mathcal{L}(R).$$

Ma questo è un **assurdo!** Quindi

$$\rho(A) = r \leq s = \dim \mathcal{L}(R) \implies r = s.$$



### Corollario 3.3.1

Se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$ , con elementi in un campo  $K$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $|A| \neq 0$  ;
2.  $A$  è invertibile;
3.  $\rho(A) = n$  ;
4. le righe sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di  $K^n$ ;
5. le colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, sono base di  $K^n$ .

### Teorema 3.3.3 Teorema degli orlati

Una matrice  $A \in K^{m,n}(K)$  ha rango  $p$  se, e solo se, esiste un minore  $M$  di ordine  $p$  a determinante non nullo e tutti i minori di ordine  $p+1$ , che contengono  $M$ , hanno determinante nullo.

## 3.4 Sistemi lineari

### Definizione 3.4.1: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un insieme di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite a coefficienti in campo  $K$ .



**Osservazione:** Posto  $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B \iff \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$$

che è equivalente a dire che  $B$  è combinazione lineare delle colonne di  $A$ . Quindi il sistema è risolubile se, e soltanto se,  $B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ .

#### **Teorema 3.4.1** Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare  $AX = B$  è compatibile se, e soltanto se,  $\rho(A) = \rho(A|B)$ .

**Dimostrazione:** "  $\implies$  " Sia  $AX = B$  risolubile,  $\implies \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$  quindi

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) &\implies \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B)}_{=\rho(A|B)} = \underbrace{\dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)}_{=\rho(A)} \\ &\implies \rho(A|B) = \rho(A) \end{aligned}$$

"  $\impliedby$  " Per ipotesi abbiamo che  $\rho(A|B) = \rho(A)$ . Quindi

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B) &= \dim \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \implies \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n, B) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\implies B \in \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\implies \exists (k_1, k_2, \dots, k_n) : k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_n C_n = B \end{aligned}$$

Quindi la  $n$ -upla  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  è soluzione di  $AX = B$  e di conseguenza il sistema è compatibile.  $\odot$

#### **Teorema 3.4.2** Teorema di Cramer

Sia  $AX = B$  un sistema lineare in  $n$  equazioni ed  $n$  incognite. Se  $\det(A) \neq 0$  allora  $AX = B$  ammette un'unica soluzione.

Indichiamo con  $B_1$ , la matrice ottenuta sostituendo a  $C_i$  la colonna dei termini noti ( $B$ ).

$$A = (C_1, C_2, \dots, C_n) \quad B_1 = (C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

Se  $\det(A) \neq 0$  allora  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  è data da:

$$X_i = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}$$

#### **Definizione 3.4.4: Sistema principale equivalente**

Sia  $AX = B$  un sistema compatibile, si dice sistema principale equivalente un sistema  $A'X = B'$  ottenuto eliminando  $m - p$  equazioni da  $AX = B$  tale che  $\rho(A'|B') = \rho(A') = p$ .

#### **Teorema 3.4.3**

Un sistema  $AX = B$  compatibile ha le stesse soluzioni di un suo sistema principale equivalente.

**Osservazione:**  $\rho(A) = \rho(A|B)$  se il sistema lineare è omogeneo e quindi è sempre compatibile. In particolare

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  è sempre soluzione di  $AX = \underline{0}$ .

#### **Definizione 3.4.5: Autosoluzioni**

Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo diverse dalla soluzione nulla si dicono **autosoluzioni**.

**N.B.**

Non è detto che un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni.

**Proposizione 3.4.1**

Un sistema lineare omogeneo  $AX = B = \underline{0}$  ammette autosoluzioni se, e solo se,  $\rho(A) < n$  (con  $n$  numero di incognite).

**Corollario 3.4.1**

Un sistema lineare omogeneo  $AX = B = \underline{0}$  con  $A \in M_n(K)$  ammette autosoluzioni se, e soltanto se,  $\det(A) = 0$ .

**Teorema 3.4.4**

Sia  $AX = \underline{0}$  un sistema lineare omogeneo con  $A \in K^{m,n}$  e sia  $S$  l'insieme delle sue soluzioni, allora  $S$  è un sottospazio di  $K^n$  di dimensione  $n - \rho(A)$ .

**Osservazioni:**

1.  $\underline{0} \in S$
2. se  $n - \rho(A) > 0$  abbiamo autosoluzioni
3. Se  $B \neq \underline{0}$  l'insieme delle soluzioni di  $AX = B$  non è un sottospazio di  $K^n$  perché  $A\underline{0} = \underline{0} \neq B \implies \{\underline{0}\} \notin S$ .

**Proposizione 3.4.2**

Sia  $AX = B$  un sistema lineare in  $m$  equazioni ed  $n$  incognite, detto  $S$  l'insieme delle soluzioni abbiamo che

$$S = \begin{cases} \{x_0 + z : x_0 \in S, z \in S\} & \text{se } AX = B \text{ è compatibile} \\ \emptyset & \text{se } AX = B \text{ non è compatibile} \end{cases}$$

**Definizione 3.4.6: Sistema lineare omogeneo associato**

Dato  $AX = B$  sistema lineare in  $m$  equazioni ed  $n$  incognite diciamo che  $AX = \underline{0}$  è il **sistema lineare omogeneo associato** a  $AX = B$ .

**Proposizione 3.4.3**

Le soluzioni di un sistema lineare compatibile  $AX = B$  sono tutte e sole del tipo  $\bar{X} = X_0 + Z$ , ove  $X_0$  è una soluzione particolare di  $AX = B$  e  $Z$  è la soluzione di  $AX = \underline{0}$ , sistema omogeneo associato ad  $AX = B$ .

**Dimostrazione:** Sia  $\bar{X}$  soluzione di  $AX = B$ , poniamo  $Z = \bar{X} - X_0 \iff \bar{X} = X_0 + Z$

$$AZ = A(\bar{X} - X_0) = A\bar{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$$

Quindi  $Z$  è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $A$ . Di conseguenza  $\bar{X} = X_0 + Z$  ⊙

Dato  $AX = B$  sistema lineare in  $m$  equazioni ed  $n$  incognite compatibile, le sue soluzioni sono tante quante quelle del sistema lineare omogeneo associato che costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione  $n - \rho(A)$ . Se il campo è infinito, posto  $\rho(A) = p$ , si dice che le soluzioni sono  $\infty^{n-p}$  (cioè che l'insieme delle soluzioni dipende da  $n - \rho(A)$  parametri).

### Teorema 3.4.5

Sia  $AX = \underline{0}$  un sistema lineare omogeneo in  $n$  incognite e sia  $\rho(A) = n - 1$ . Se si indica con  $A'X = \underline{0}$  un sistema principale equivalente ad  $AX = \underline{0}$  e si indicano con  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  i determinanti dei minori di ordine  $n - 1$ , ottenuti eliminando in  $A'$  successivamente la prima, la seconda,  $\dots$ , la  $n$ -esima colonna, allora le soluzioni del sistema sono, al variare di  $\lambda \in K$ ,

$$S = (\lambda\Gamma_1, -\lambda\Gamma_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda\Gamma_n)$$

### 3.5 Cambiamenti di base

in uno spazio vettoriale  $V_n(K)$ , di dimensione  $n$ , siano  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  e  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  due basi assegnate. Ogni vettore della base  $B'$  si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base  $B$ , cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ \vdots \\ e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{array} \right.$$

con le seguenti posizioni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ ed } E' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}$$

il sistema si può scrivere in forma compatta

$$E' = AE$$

### Definizione 3.5.1: Matrice del cambiamento di base

La matrice  $A$  si dice **matrice del cambiamento di base** da  $B$  a  $B'$ .

### Proposizione 3.5.1

La matrice  $A$  del cambiamento di base da  $B$  a  $B'$  è invertibile e  $A^{-1} = A'$ .

*Dimostrazione:*

$$E = A'E' = A'(AE) = (A'A)E \implies A'A = I_n$$

$$E' = AE = A(A'E') = (AA')E' \implies AA' = I_n$$



Stabiliamo il legame tra le componenti di uno stesso vettore  $v$ , rispetto a due basi diverse  $B$  e  $B'$ . Poniamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere il generico vettore  $v \in V_n(K)$

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)E = {}^t X E$$

$$v = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)E = {}^t X' E'$$

$$v = {}^t X E = {}^t X' E$$

Sostituendo si ha  ${}^tXE = {}^tX'AE$ , ove  $A$  è la matrice del cambiamento di base da  $B$  a  $B'$ , quindi, dato che le componenti dei vettori sono univocamente determinate

$$X = {}^tAX'$$

$$X' = {}^tA^{-1}X$$

Possiamo dire quindi che le componenti di uno stesso vettore rispetto a due basi  $B$  e  $B'$  sono legate dalla matrice del cambiamento di base da  $B$  a  $B'$ .



## Capitolo 4

# Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

### 4.1 Ricerca di autovalori, polinomio caratteristico

#### Definizione 4.1.1: Polinomio ed equazione caratteristica

Se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$ , si dice **polinomio caratteristico** di  $A$ , e si indica  $p_A(\lambda)$ , il determinante della matrice  $A - \lambda I_n$ , cioè

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

L'equazione  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$  è detta **equazione caratteristica** di  $A$ .

#### Definizione 4.1.2: Autovalori

Le radici del polinomio caratteristico si chiamano **autovalori** di  $A$ .

#### Definizione 4.1.3: Autospazio

Lo spazio delle soluzioni del sistema  $(A - \bar{\lambda} I_n)X = 0$ , dove  $\bar{\lambda}$  è un autovalore, si chiama **autospazio** associato a  $\bar{\lambda}$  e si indica con  $V_{\bar{\lambda}}$ .

#### Definizione 4.1.4: Autovettori

I vettori non nulli dell'autospazio  $V_{\bar{\lambda}}$  si chiamano **autovettori** relativi a  $\bar{\lambda}$ .

**Osservazione:** Si potrebbe dimostrare che se il polinomio caratteristico di  $A \in M_n(K)$  ha grado  $n$  allora gli autovalori di  $A$  sono al massimo  $n$ .

#### Definizione 4.1.5: Matrici simili

Due matrici  $A, B \in M_n(K)$  si dicono **simili** se esiste  $P \in M_n(K)$  con  $|P| \neq 0$  tale che

$$B = P^{-1}AP \quad PB = AP$$

#### Proposizione 4.1.1

Due matrici simili  $A, B$  hanno lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico (e di conseguenza gli stessi autovalori).

**Dimostrazione:** Per ipotesi le due matrici  $A, B$  sono simili quindi:

$$\exists P \in M_n(K), |P| \neq 0 : B = P^{-1}AP$$

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A| \implies |B| = |A|$$

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = \frac{1}{|P|}|A - \lambda I_n||P| = |A - \lambda I_n| = p_A(\lambda)$$

e attraverso questa serie di passaggi abbiamo potuto dimostrare che se due matrici sono simili allora avranno sia lo stesso determinante che lo stesso polinomio caratteristico. ☺

## 4.2 Matrici diagonalizzabili

### Definizione 4.2.1: Matrice diagonalizzabile

Una matrice  $A \in M_n(K)$  si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, ovvero esistono  $D, P \in M_n(K)$  con  $D$  matrice diagonale,  $|P| \neq 0$  e  $D = P^{-1}AP$ .

### Teorema 4.2.1 Primo criterio di diagonalizzabilità

Una matrice  $A \in M_n(K)$  è diagonalizzabile se, e soltanto se,  $K^n$  ammette una base costituita da autovettori di  $A$ .

**Dimostrazione:** " $\implies$ " Per ipotesi  $A$  è diagonalizzabile quindi  $\exists D, P \in M_n(K) : D$  è diagonale  $|P| \neq 0$  e  $PD = AP$ . Per semplicità denotiamo le colonne di  $P = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)$ .

$$AP = A(P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n) = (AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n)$$

$$PD = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = (d_1 P_1 \ d_2 P_2 \ \dots \ d_n P_n)$$

Quindi

$$(AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n) = (d_1 P_1 \ d_2 P_2 \ \dots \ d_n P_n) \iff AP_1 = d_1 P_1, AP_2 = d_2 P_2, \dots, AP_n = d_n P_n$$

$$\implies AX = \lambda X \quad \lambda = d_i \quad X = P_i$$

dove  $d_i$  è un autovalore,  $P_i$  è un autovettore di  $A$  e  $(P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)$  è una sequenza di  $n$  autovettori. Poiché  $\dim K^n = n$  e la sequenza è composta da  $n$  vettori, è sufficiente controllare la lineare indipendenza di  $P$ . Ma siccome avevamo supposto per ipotesi che  $|P| \neq 0$  le sue  $n$  colonne sono linearmente indipendenti. Quindi  $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  è una base di  $K^n$  costituita da autovettori di  $A$ .

" $\impliedby$ " è analogo, basta ripercorrere il ragionamento a ritroso. ☺

**Osservazione:** Se  $A \in M_n(K)$  è diagonalizzabile allora:

- $D$  ha sulla diagonale principale gli autovalori di  $A$ ;
- $P$ , cioè la matrice diagonalizzante, ha nelle colonne gli autovettori della base di  $K^n$ .

### Definizione 4.2.2: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia  $\bar{\lambda}$  un autovalore di  $A \in M_n(K)$ ; si chiama:

- **molteplicità algebrica** di  $\bar{\lambda}$  il numero di volte che  $\bar{\lambda}$  è radice del polinomio caratteristico, e si indica con  $a_{\bar{\lambda}}$
- **molteplicità geometrica** di  $\bar{\lambda}$  la dimensione dell'autospazio  $V_{\bar{\lambda}}$  associato a  $\bar{\lambda}$ , e si indica con  $g_{\bar{\lambda}}$ .

**Proposizione 4.2.1**

Sia  $\bar{\lambda}$  un autovalore di  $A \in M_n(K)$ . Allora

$$1 \leq g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$$

**Proposizione 4.2.2**

Sia  $A \in M_n(K)$  e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$   $t$  autovalori di  $A$  distinti tra loro, allora la somma dei relativi autospazi è diretta.

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$$

**Osservazioni:**

1.  $A \in M_n(K) \implies \deg(p_A(\lambda)) = n$ , quindi ho al massimo  $n$  autovalori;
2.  $\sum a_{\lambda_i} \leq n$ ;
3.  $\sum a_{\lambda_i} = n \iff$  tutti gli autovalori di  $A$  sono in  $K$ ;
4.  $S = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \implies \dim S = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i}$
5. Autovettori provenienti da autospazi diversi sono tra loro linearmente indipendenti (perché la somma è diretta).

**Teorema 4.2.2 Secondo criterio di diagonalizzabilità**

Sia  $A \in M_n(K)$  e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  gli autovalori distinti di  $A$ . Allora  $A$  è diagonalizzabile se, e soltanto se:

1. tutti gli autovalori di  $A$  sono in  $K$ ;
2. Per ogni autovalore vale  $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$  (e allora si dice che l'autovalore è regolare).

**Dimostrazione:** "  $\implies$  " Per ipotesi  $A$  è diagonalizzabile. Per il primo criterio di diagonalizzabilità  $K^n$  ammette una base  $B$  formata da autovettori, cioè tale che  $\mathcal{L}(B) = K^n$  e  $B \subseteq V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n$ . Quindi

$$\begin{aligned} K^n = \mathcal{L}(B) &\leq \mathcal{L}(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} \leq K^n \\ &\implies V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = K^n \\ &\implies n = \dim K^n = \dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} \leq n \end{aligned}$$

Siccome  $\sum a_{\lambda_i} = n$  tutti gli autovalori di  $A$  sono in  $K$ . Inoltre  $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$  e  $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i} \implies a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$ .

"  $\impliedby$  " Per ipotesi abbiamo che tutti gli autovalori di  $A$  sono in  $K$  e per ogni autovalore vale  $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$ . Per ogni autovalore  $\bar{\lambda}$  avremo un relativo autospazio a cui corrisponde una relativa base di autovettori  $B_1, B_2, \dots, B_t$ . Chiamiamo  $B = \bigcup_{i=1}^t B_i$ , cioè l'unione di tutte le basi. Certamente  $B$  è libera perché la somma di sottospazi distinti è diretta.

$$|B| = |\bigcup B_i| = \sum |B_i| = \sum \dim V_{\lambda_i} = \sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i} = n$$

Quindi  $B$  è una base di  $K^n$  costituita da autovettori e per il primo criterio di diagonalizzabilità  $A$  è diagonalizzabile.  $\odot$

## Capitolo 5

# Forme bilineari e prodotti scalari

### 5.1 Forme bilineari

#### Definizione 5.1.1: Forma bilineare e prodotto scalare

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale. Una **forma bilineare** in  $V$  è una funzione  $*$ :  $V \times V \rightarrow K$ :

- $(u + v) * w = u * w + v * w \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$
- $u * (v + w) = u * v + u * w \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$
- $(ku) * v = u * (kv) = k(u * v) \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$

Se poi  $*$  verifica anche l'ulteriore proprietà

- $v * w = w * v \quad \forall u, v, w \in V \quad \forall k \in K$

Allora si chiama **prodotto scalare** (o forma bilineare simmetrica).

**Osservazione:** Si deduce chiaramente che  $\forall v \in V \quad 0 * v = 0 = v * 0$ .

#### Esempio 5.1.1 (Prodotto scalare euclideo e standard)

1. Definiamo il **prodotto scalare euclideo** come una funzione  $*$ :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) * (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \dots + x_n x'_n$$

2. Definiamo il **prodotto scalare standard** come la funzione  $*$ :  $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{pmatrix} = x_{11}x'_{11} + x_{12}x'_{12} + \dots + x_{nn}x'_{nn}$$

### 5.2 Prodotti scalari e ortogonalità

#### Definizione 5.2.1: Ortogonalità

In uno spazio vettoriale  $V(K)$ , con prodotto scalare " $\cdot$ ", due vettori  $v$  e  $w$  di  $V$  si dicono **ortogonali**, e si scrive  $v \perp w$ , se  $v \cdot w = 0$ .

**Definizione 5.2.2: Complemento ortogonale**

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale e  $\cdot$  un prodotto scalare. Sia  $\emptyset \neq A \subseteq V$ ; si chiama **complemento ortogonale** (o più semplicemente ortogonale) di  $A$  l'insieme

$$A^\perp = \{v \in V : v \perp w, \forall w \in A\} \quad \underline{0} \in A^\perp \neq \emptyset$$

**Proposizione 5.2.1**

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\cdot$ . Sia  $\emptyset \neq A \subseteq V$ . Allora  $A^\perp$  è un sottospazio vettoriale.

**Dimostrazione:** Sappiamo che  $\underline{0} \in A^\perp \neq \emptyset$   
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall u_1, u_2 \in A^\perp, \forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^\perp$$

Possiamo scrivere per la proprietà di ortogonalità che

$$\forall w \in A \quad u_1 \cdot w = 0 \quad u_2 \cdot w = 0$$

Quindi

$$(k_1 u_1 + k_2 u_2) \cdot w = (k_1 u_1) \cdot w + (k_2 u_2) \cdot w = k_1 \underbrace{(u_1 \cdot w)}_{=0} + k_2 \underbrace{(u_2 \cdot w)}_{=0}$$

$$\implies k_1 u_1 + k_2 u_2 \in A^\perp \implies A^\perp \text{ è un sottospazio.}$$

⊕

**Osservazioni:**

1.  $A \subseteq B \implies A^\perp \supseteq B^\perp$
2.  $A^\perp = [\mathcal{L}(A)]^\perp$
3. Generalmente se  $A \leq V(K) \implies A \neq (A^\perp)^\perp$ , ma  $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

**Proposizione 5.2.2**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\cdot$  e siano  $v, w \in V(K)$  con  $w \cdot w \neq \underline{0}$ . Allora

$$\exists v_1, v_2 \in V : v = v_1 + v_2, v_1 = kw, v_2 \perp w$$

**Dimostrazione:**

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \quad v_1 = kw = \left( \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \right) \cdot w$$

$$v_2 = v - v_1 \iff v_1 + v_2 = v$$

Ora verifichiamo che  $v_2 \perp w$

$$v_2 \perp w \iff (v - v_1) \cdot w = \left( v - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w \right) \cdot w = v \cdot w - \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w \cdot w = v \cdot w - v \cdot w = 0$$

⊕

**Definizione 5.2.3: Coefficiente di Fourier e proiezione**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e siano  $v, w \in V(K)$  con  $w \cdot w \neq \underline{0}$ . Allora

$$k = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$$

si chiama **coefficiente di Fourier** di  $v$  lungo  $w$  e

$$v_1 = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w$$

si chiama **proiezione** di  $v$  lungo  $w$ .

**Definizione 5.2.4: Forma quadratica**

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e sia  $v \in V(K)$ . Si chiama **forma quadratica** associata a "·" la funzione

$$q : \begin{cases} V \rightarrow K \\ v \mapsto q(v) = v \cdot v \end{cases}$$

**5.3 Spazi con prodotto scalare definito positivo****Definizione 5.3.1: Prodotto scalare definito positivo**

Sia  $V(K)$  uno spazio vettoriale su campo  $K$  ordinato. Un prodotto scalare "·" in  $V$  si dice **definito positivo** se

$$\forall v \in V \quad v \cdot v \geq 0 \quad e \quad v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$$

Per chiarezza da qui in avanti quando si parla di prodotti scalari definiti positivi  $K = \mathbb{R}$  in modo tale che esso sia ordinato. Di conseguenza denotiamo con **spazio vettoriale metrico reale**  $V_n^\circ(\mathbb{R})$ , cioè uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

**Definizione 5.3.2**

Dato  $V_n^\circ(\mathbb{R})$  si chiama **norma** la funzione

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{q(v)} \end{cases}$$

**Esempio 5.3.1 (Vettori geometrici)**

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \alpha \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0} = \sqrt{|\vec{v}|^2} = |\vec{v}| \end{aligned}$$

**Osservazioni:**

1. La norma generalizza la nozione di "lunghezza" di un vettore.
2.  $\|v\| = \underline{0} \iff v \cdot v = 0 \iff v = \underline{0}$

**Proposizione 5.3.1**

In  $V_n^\circ(\mathbb{R})$  valgono i seguenti fatti

1.  $\|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$
2.  $\|kv\| = |k|\|v\|$
3.  $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$  (disuguaglianza di Schwarz)
4.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (disuguaglianza triangolare)

**Osservazioni:** Sia " $\cdot$ " un prodotto scalare euclideo definito su  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ . La sua base canonica è

$$B_c = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

1.  $\|e_i\| = \sqrt{e_i \cdot e_i} = 1$
2.  $e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \implies e_i \perp e_j$
3.  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1)$   
 $\implies \overset{=v}{v \cdot e_i} = x_i = i\text{-esima componente di } v \text{ rispetto a } B_c$

### Definizione 5.3.3: Base ortogonale e ortonormale

I vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  di uno spazio vettoriale  $V_n^\circ(\mathbb{R})$  formano un insieme **ortogonale** se  $v_i \cdot v_j = 0$ ,  $i \neq j$ . Se inoltre ciascuno dei  $v_i$  ha norma unitaria, allora parleremo di insieme **ortonormale**. Se poi tali vettori costituiscono una base di  $V_n^\circ(\mathbb{R})$  parleremo di base ortogonale o ortonormale.

### Proposizione 5.3.2

Se  $\emptyset \neq A \subseteq V_n^\circ(\mathbb{R})$  è costituito da vettori tutti non nulli. Allora  $A$  è libero.

**Dimostrazione:**

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j. \quad \text{Siano } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}$$

$$0 = 0 \cdot v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot v_1 = \alpha_1 \underbrace{v_1 \cdot v_1}_{\neq 0 \implies v_1 \neq \underline{0} \implies \|v_1\|^2 \neq 0} + \alpha_2 \underbrace{v_2 \cdot v_1}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{v_n \cdot v_1}_{=0} = \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} \alpha_1 \implies \alpha_1 = 0$$

Ripeto il ragionamento per ciascuno dei  $v_i$  e ottengo che gli unici  $\alpha$  che mi danno il vettore nullo sono quelli tutti nulli. Quindi se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \implies A$  è libero.  $\odot$

**Osservazione:** In  $V_n^\circ(\mathbb{R})$  se  $A$  è un insieme ortogonale di  $n$  vettori tutti diversi dal vettore nullo allora  $A$  è libero. Dunque fissato un ordine abbiamo una base ortogonale.

### Teorema 5.3.1 Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Siano  $V_n^\circ(\mathbb{R})$  e  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  una base. La sequenza  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  così definita

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2 - \frac{e_2 \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 \\ e'_3 &= e_3 - \frac{e_3 \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 - \frac{e_3 \cdot e'_2}{e'_2 \cdot e'_2} \cdot e'_2 \\ &\vdots \\ e'_n &= e_n - \frac{e_n \cdot e'_1}{e'_1 \cdot e'_1} \cdot e'_1 - \dots - \frac{e_n \cdot e'_{n-1}}{e'_{n-1} \cdot e'_{n-1}} \cdot e'_{n-1} \end{aligned}$$

è una base ortogonale di  $V_n^\circ(\mathbb{R})$ .

### Teorema 5.3.2

$$V_n^\circ(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(A) \oplus A^\perp$$

### Teorema 5.3.3

Pensando alle righe di  $A$  come vettori di  $\mathbf{R}^n$  le equazioni del sistema esprimono il fatto che il prodotto scalare di tali righe per il generico vettore  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è uguale a zero. Quindi il generico vettore è ortogonale a tutte le righe di  $A$ . Chiamando  $\mathcal{L}(R)$  lo spazio generato dalle righe di  $A$ . L'insieme  $S$  delle soluzioni di  $AX = \underline{0}$  coincide con  $\mathcal{L}(R)^\perp$ . E quindi per il teorema di Kronecker  $\dim S = n - \dim \mathcal{L}(R) = n - \rho(A)$ .  $\odot$



## 5.4 Matrici di forme bilineari

### Definizione 5.4.1: Matrice di forma bilineare

Sia  $V_n(K)$  uno spazio vettoriale,  $"\ast"$  una forma bilineare e  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  base di  $V_n(K)$ . Si chiama **matrice della forma bilineare**  $"\ast"$  rispetto a  $B$

$$A_B^* = \begin{pmatrix} e_1 * e_1 & e_1 * e_2 & \dots & e_1 * e_n \\ e_2 * e_1 & e_2 * e_2 & \dots & e_2 * e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n * e_1 & e_n * e_2 & \dots & e_n * e_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Si può indicare in modo più compatto con

$$A_B^* = (e_i * e_j)$$

**N.B.**

La matrice di una forma bilineare dipende dalla base fissata.

### Proposizione 5.4.1

La matrice che rappresenta un prodotto scalare rispetto a una base qualsiasi è simmetrica.

**Dimostrazione:**  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  e  $"\cdot"$  è il prodotto scalare. Allora  $A_B^\cdot = (e_i \cdot e_j) = (e_j \cdot e_i) = {}^t A_B^\cdot$ . ☺

### Proposizione 5.4.2

Sia  $"\cdot"$  un prodotto scalare su  $V_n(K)$  e sia  $B$  una sua base. Sia  $A_B^\cdot$  una matrice associata a  $"\cdot"$  rispetto alla base  $B$ . Allora

- $B$  è ortogonale  $\iff A_B^\cdot$  è diagonale

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

- $B$  è ortonormale  $\iff A_B^\cdot = I_n \in M_n(K)$

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad e_i \cdot e_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad e \quad a_{ii} = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

**Osservazione:** Utilizzando la matrice associata ad una forma bilineare  $"\ast"$  è possibile calcolare

$$v * w \quad \forall v, w \in V_n(K)$$

### Proposizione 5.4.3

Sia  $B$  una base di  $V_n(K)$  e sia  $"\ast"$  una forma bilineare su  $V$ . Dette

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

le matrici colonne delle componenti rispettivamente di  $v$  e di  $w \in V$  risulta:

$$v * w = {}^t X A_B^* Y$$

## 5.5 Matrici ortogonali e basi ortonormali

### Definizione 5.5.1: Matrice ortogonale

Sia  $A \in M_n(K)$  diciamo che  $A$  è **ortogonale** se  ${}^tA = A^{-1}$ . Quindi

$$A^t A = {}^t A A = I_n$$

### Proposizione 5.5.1

Sia  $A \in M_n(K)$  una matrice ortogonale. Allora  $|A| \in \{-1, 1\}$

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned} |I_n| = 1 &= |AA^{-1}| = |A^t A| = |A| |{}^t A| = |A| |A| = |A|^2 \\ |A|^2 = 1 &\iff |A| = \pm 1 \end{aligned}$$

⊙

### Proposizione 5.5.2

Sia  $A \in M_n(K)$ .  $A$  è ortogonale se, e soltanto se, le sue righe (o colonne) costituiscono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$  rispetto al prodotto scalare euclideo (dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ ).

*Dimostrazione:* "  $\implies$  "

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} &\iff {}^t A = ({}^t R_1, \dots, {}^t R_n) \\ A^t A = I_n &= \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} ({}^t R_1, \dots, {}^t R_n) = \begin{pmatrix} R_1 \cdot R_1 & R_1 \cdot R_2 & \dots & R_1 \cdot R_n \\ R_2 \cdot R_1 & R_2 \cdot R_2 & \dots & R_2 \cdot R_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n \cdot R_1 & R_n \cdot R_2 & \dots & R_n \cdot R_n \end{pmatrix} \\ R_i \cdot R_j &= 0 \quad \text{se } i \neq j, \quad R_i \cdot R_i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Quindi le righe di  $A$  sono una base ortonormale. Il ragionamento è completamente analogo per le colonne.  
"  $\impliedby$  " Si può dimostrare ripercorrendo le implicazioni al contrario.

⊙

## 5.6 Matrici reali simmetriche

### Teorema 5.6.1

Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$  simmetrica allora

1. Gli autovalori di  $A$  sono tutti reali (teorema spettrale)
2. Gli autovettori di  $A$  relativi ad autospazi distinti sono ortogonali tra loro

*Dimostrazione del punto 2:* Siano  $x$  e  $y$  autovettori relativi ad autovalori  $\lambda$  e  $\mu$  distinti. Quindi  $AX = \lambda x$  e  $AX = \mu y$ . Sia  $\lambda \neq 0$ . Quindi

$$\begin{aligned} ({}^t x^t y) \lambda &= (\lambda^t x) y = {}^t (x \lambda) y = {}^t (Ax) y = \underbrace{({}^t x^t A) y}_{\text{per la simmetria di } A} = ({}^t x A) y = {}^t x (Ay) \\ &= {}^t x \mu y = \mu ({}^t x y) = \mu ({}^t x^t y) \implies ({}^t x^t y) \lambda = ({}^t x^t y) \mu \\ \lambda k &= \mu k \iff (\lambda - \mu) k = 0 \iff \mu = \lambda \quad \text{oppure} \quad {}^t x^t y = 0 \end{aligned}$$

ma  $\mu \neq \lambda$  perché  $x$  e  $y$  stanno in autospazi distinti  $\implies {}^t x^t y = 0 \implies x$  e  $y$  sono ortogonali.

⊙

**Corollario 5.6.1**

Una matrice reale e simmetrica di ordine  $n$  ammette  $n$  autovalori contati con la loro molteplicità algebrica.

**Definizione 5.6.1: Matrice ortogonalmente diagonalizzabile**

Data  $A \in M_n(K)$  è detta **ortogonalmente diagonalizzabile** se esistono  $D$ , matrice diagonale di ordine  $n$ , e  $P$  matrice ortogonale di ordine  $n$  tali che

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

**Teorema 5.6.2**

I seguenti fatti sono equivalenti

1.  $A \in M_n(\mathbb{R})$  è ortogonalmente diagonalizzabile;
2.  $\mathbb{R}^n$  ammette una base ortonormale di autovettori di  $A$ ;
3.  $A$  è una matrice reale e simmetrica.