Algebra Lineare e Geometria Analitica
Ingegneria dell'Automazione Industriale

Ayman Marpicati

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Relazioni su un insieme

Definizione 1.1.1: Relazione su un insieme

Una **relazione** su un insieme A è un qualunque sottoinsieme di $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times A$.
Una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme A si dice:

- **riflessiva** se, per ogni $a \in A,\ a\mathcal{R}a$;
- **simmetrica** se, per ogni $a, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ allora $a = b$;
- **antisimmetrica** se, per ogni $a, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$;
- **transitiva** se, per ogni $a, b, c \in A,\ a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$;

Definizione 1.1.2: Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se inoltre, gli elementi di A sono a due a due confrontabili, cioè, per ogni $a, b \in A$, risulta $a\mathcal{R}b$ oppure $b\mathcal{R}a$, la relazione $\mathcal{R}$ si dice **relazione d'ordine totale**.

1.2 Strutture algebriche

Definizione 1.2.1: Gruppo

Sia $(G, \star)$ un insieme con un'operazione $\star$. La struttura $(G, \star)$ si dice **gruppo** se:

- l'operazione $\star$ è associativa;
- esiste in G l'elemento neutro;
- ogni elemento di $g \in G$ è simmetrizzabile.

Se l'operazione $\star$ soddisfa anche la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.

Definizione 1.2.2: Campo

Sia A un insieme sul quale sono definite due operazioni che indichiamo con i simboli "+" e "$\cdot$" e che chiamiamo somma e prodotto rispettivamente. La struttura $(A, +, \cdot)$ è un **campo** se sussistono le condizioni seguenti:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è indicato con 0;
- $(A \backslash \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $e \neq 0$;
- valgono le proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma, cioè per ogni $a, b, c \in A$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Generalità

Definizione 2.1.1: Spazio vettoriale

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno **spazio vettoriale** sul campo K, se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V, detta somma, $+ : V \times V \longrightarrow V$ e un'operazione estrema detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, tali che

- $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno $\cdot$ soddisfi le seguenti proprietà:
  - $(h \cdot k) \cdot v = h \cdot (k \cdot v) \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v \in V$
  - $h \cdot (v + w) = h \cdot v + h \cdot w \quad \forall h, k \in K \quad e \quad \forall v, w \in V$
  - $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori**, gli elementi del campo K sono chiamati **scalari**. L'elemento neutro di $(V, +)$ è detto **vettor nullo** e indicato $\underline{0}$ per distinguerlo da 0, zero del campo K. L'opposto di ogni vettore **v** viene indicato con **-v**.

Teorema 2.1.1

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, siano $k \in K$ e $v \in V$. Allora

$$kv = \underline{0} \iff k = 0 \text{ oppure } v = \underline{0}$$

Dimostrazione: Se k = 0

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

e sommando $-0v$ ad ambo i membri si ottiene appunto $\underline{0} = 0v$. Se è $v = \underline{0}$, si procede nel modo analogo. Viceversa, se $kv = \underline{0}$ e $k \neq 0$ dimostriamo che $v = \underline{0}$. Dato che $k \neq 0$, esiste l'inverso $k^{-1} \in K$ e, moltiplicando ambo i membri della precedente uguaglianza per k^{-1} si ottiene $k^{-1}(kv) = k^{-1}\underline{0}$ che, per quanto dimostrato in precedenza dà il $\underline{0}$. Dato che $k^{-1}(kv) = (k^{-1}k)v = 1v = v$, per la proprietà 4, si ha $v = \underline{0}$. 😄

2.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale

Definizione 2.2.1: Sottospazio vettoriale

Sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, diremo che U è **sottospazio vettoriale** di V se è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alla restrizione delle stesse operazioni.

Proposizione 2.2.1 Primo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Il sottoinsieme U è uno spazio vettoriale di V se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall u, u' \in U \quad u + u' \in U$
2. $\forall k \in K, \ \forall u \in U \quad ku \in U$

Proposizione 2.2.2 Secondo criterio di riconoscimento

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$, U è sottospazio di $V(K)$ se e soltanto se

$$hv_1 + kv_2 \in U \quad \forall v_1, v_2 \in U \quad e \quad h, k \in K$$

2.3 Indipendenza e dipendenza lineare

Definizione 2.3.1: Combinazione lineare

Siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V(K)$ si dice combinazione lineare di vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ ogni vettore v:

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n \quad \text{con } k_1, k_2, ..., k_n \in K$$

Definizione 2.3.2: Sistema di vettori libero

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$, allora A si dice **libero** se l'unica combinazione lineare di vettori di A che dà il vettore nullo è a coefficienti tutti nulli

$$\underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n \implies k_1 = k_2 = ... = k_n = \underline{0}$$

Se A è libero i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione 2.3.3: Sistema di vettori legato

Sia $V(K)$ e sia A un sistema di vettori di $V(K)$, $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$, allora A si dice **legato** se **non** è libero. Quindi:

$$\exists k_1, k_2, ..., k_n \text{ non tutti nulli : } \underline{0} = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$$

Se A è legato i suoi vettori si dicono **linearmente dipendenti**.

Qui di seguito daremo delle proposizioni riguardo ai sistemi liberi e legati:

Proposizione 2.3.1

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se $\underline{0}$ appartiene ad A, il sistema A è legato.

Dimostrazione: Sia $\underline{0} \in A$, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\underline{0} = v_1$ quindi:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies \text{A è legato}$$

☺

Proposizione 2.3.2

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. Se in A appaiono due vettori proporzionali allora A è legato.

Dimostrazione: Senza perdita di generalità possiamo supporre che $v_1 = kv_2$ e quindi:

$$1v_1 + kv_2 + 0v_3 + ... + 0v_n = v_1 - kv_2 + \underline{0} = \underline{0} \implies \text{A è legato}$$

😃

Proposizione 2.3.3

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$. A è legato se e solo se almeno uno dei vettori si può riscrivere come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: $\implies$: Per ipotesi A è legato e quindi:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \text{ con almeno un } k_i = 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $k_1 \neq 0$

$$-k_1v_1 = k_2v_2 + ... + k_nv_n \qquad v_1 = \frac{1}{k_1}(-k_2v_2 - ... - k_nv_n)$$
$$v_1 = -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - ... - \frac{k_n}{k1}v_n$$

e quindi v_1 è combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$.
$\impliedby$: Per ipotesi uno dei vettori di A è combinazione lineare degli altri e senza perdita di generalità:

$$v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n \qquad \underline{0} = -1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

siccome $-1 \neq 0$ A è legato. 😃

Proposizione 2.3.4

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $u \in V(K)$. Se $A \cup \{u\}$ è legato, allora u è combinazione lineare dei vettori di A.

Dimostrazione: Per ipotesi $A \cup \{u\}$ è legato, cioè:

$$\exists k_1, k_2, ..., k_n, b \in K \text{ non tutti nulli } : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n + bu$$

sia per assurdo $b = 0$

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \text{ con } k_1 \neq 0 \implies A \text{ è legato, } \textbf{assurdo!} \implies b \neq 0$$

$$-bu = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \quad u = -\frac{k_1}{b}v_1 - \frac{k_2}{b}v_2 - ... - \frac{k_n}{b}v_n$$

$\implies$ u è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ 😃

Proposizione 2.3.5

Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \supseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$. Se A è legato allora anche B è legato.

Dimostrazione:

$$\exists k_1, k_2, ..., k_n \in K \text{ non tutti nulli } : \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

Se $B = [v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_m]$ allora

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + ... + 0w_m$$

$\implies$ B è legato. 😃

Proposizione 2.3.6
Sia $A = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori di $V(K)$ e sia $B \subseteq A$ sistema di vettori di $V(K)$, se A è libero, allora B è libero.

Dimostrazione: Sia, per assurdo, B legato, allora per la proposizione precedente anche A è legato. **Assurdo!** Quindi B è libero. 😄

2.4 Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

Definizione 2.4.1: Sistema di generatori

Sia A sistema di vettori di $V(K)$. A si dice sistema di generatori di $V(K)$ se ogni $v \in V(K)$ si può scrivener come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A.

Definizione 2.4.2: Copertura lineare

Sia A un sistema di vettori di $V(K)$ si dice copertura (o chiusura) lineare di A l'insieme $\mathcal{L}(A)$ di tutte le combinazioni lineari di sottoinsiemi finiti di A.

N.B.
Dato A sistema di vettori di $V(K)$

1. $\mathcal{L}(A)$ è il più piccolo sottospazio di $V(K)$ che contiene A
2. $\mathcal{L}(A) \leq V(K)$
3. $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$

Ogni spazio vettoriale ammette un sistema di generatori e:

- se $V(K)$ ammette un sistema di generatori finito $\implies$ $V(K)$ si dice finitamente generato.
- se ogni sistema di generatori di $V(K)$ ha cardinalità infinita $\implies$ $V(K)$ non è finitamente generato.

2.5 Basi e dimensione

Lemma 2.5.1
Sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori per uno spazio vettoriale $V(K)$, e sia $v \in S$ combinazione lineare degli altri vettori (linearmente dipendente dagli altri) $\implies$ $S \backslash \{v\}$ è sistema di generatori per $V(K)$

Dimostrazione: Sia, senza perdere di generalità, v_1 combinazione lineare di $v_2, v_3, ..., v_n$

$$v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3 + ... + k_n v_n$$

sia $v \in V(K)$

$$v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + ... + h_n v_n = h_1(k_2 v_2 + ... + k_n v_n) + h_2 v_2 + ... + h_n v_n$$
$$v = \underbrace{(h_1 k_2 + h_2)}_{\in K} v_2 + ... + \underbrace{(h_1 k_n + h_n)}_{\in K} v_n \ \in \mathcal{L}([v_2, v_3, ..., v_n]) = \mathcal{L}(S \backslash \{v_1\})$$

$\implies$ $S \backslash \{v_1\}$ è un sistema di generatori. 😄

Teorema 2.5.1
Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale ($V(K) \neq \{\underline{0}\}$), allora esso ammette un sistema libero di generatori.

Dimostrazione: sia $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un sistema di generatori per $V(K)$, abbiamo due possibilità:

1. A è libero $\implies$ A è un sistema di generatori libero;
2. A è legato $\implies$ $\exists v \in A$ combinazione lineare degli altri, senza perdita di generalità possiamo porre $v = v_1 \implies A \backslash \{v_1\} = A_1$ è sistema di generatori.

Se ci troviamo nel secondo caso possiamo reiterare il procedimento e trovare $A_2 \to A_3 \to \ldots$ finché non arriviamo ad un sistema libero di generatori.

Osserviamo che A contiene almeno un $v \in A : v \neq \underline{0}$, questo perché $A_n = [0]$ e $v_n \neq \underline{0}$ perché $A \neq \{\underline{0}\} \implies A_n$ è necessariamente libero. 😊

Definizione 2.5.1: Base

Sia $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sequenza libera di vettori di $V(K)$. S è detta base se e solo se S è una sequenza libera di generatori.

Lemma 2.5.2 Lemma di Steinitz

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $B = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ sistema di generatori e $A = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$ sistema libero. Allora la cardinalità di A sarà sempre minore o uguale a quella del sistema di generatori. $(m \leq n)$

Dimostrazione: Sia per assurdo $m > n$, poiché B genera $V(K)$ u_1 si scrive come:

$$u_1 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$$

Essendo A libero $u_1 \neq \underline{0} \implies k_1, k_2, \ldots, k_n$ non sono tutti nulli $\implies$ senza perdita di generalità $k_1 \neq 0$

$$-k_1 v_1 = -u_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n \qquad v_1 = \frac{1}{k_1}(u_1 - k_2 v_2 - \ldots - k_n v_n)$$

$$\implies v_1 \in \mathcal{L}([u_1, v_2, v_3, \ldots, v_n])$$

B è sistema di generatori, $B \cup \{u_1\}$ è sistema di generatori, di conseguenza $(B \cup \{u_1\} \backslash \{v_1\}) = B_1 = [u_1, v_2, \ldots, v_n]$ è ancora sistema di generatori per $V(K)$.

Allo stesso modo posso riscrivere

$$u_2 = \alpha u_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + \ldots + h_n v_n \quad \text{con } \alpha, h_2, h_3, \ldots, h_n \in \mathrm{K}$$

Se avessimo $h_2 = h_3 = \ldots = h_n = 0$ $u_2 = \alpha$ ma ciò non può succedere perché A è libero $\implies \exists h_i \neq 0$ e senza perdita di generalità supporremo $h_2 \neq 0$ quindi:

$$-h_2 v_2 = \alpha u_1 - u_2 + h_3 v_3 + \ldots + h_n v_n \qquad v_2 = \frac{1}{h_2}(-\alpha u_1 + u_2 - h_3 v_3 - \ldots - h_n v_n)$$

v_2 è linearmente dipendente da $B_2 = [u_1, u_2, v_3, \ldots, v_n]$ e B_2, per lo stesso motivo di B_1 è ancora sistema di generatori.

Ora immaginiamoci di reiterare il procedimento n volte fino a trovare un sistema $B_n = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Siccome avevamo supposto che $m > n$ essendo B_n sistema di generatori dovremo essere in grado di scrivere anche u_{n+1} come combinazione lineare dei vettori di B_n, cioè:

$$u_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) \qquad u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

questo comporta che A sia legato, ma questo è **assurdo!** $\implies m \leq n$. 😊

Teorema 2.5.2

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano B_1 e B_2 due sue basi le loro cardinalità sono uguali:

$$B_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad B_2 = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad m = n$$

Dimostrazione: Per dimostrarlo è sufficiente applicare il lemma di Steinitz

- B_1 sistema di generatori, B_2 sistema libero $\implies n \geq m$;
- B_2 sistema di generatori, B_1 sistema libero $\implies m \geq n$.

$m \geq n$ e $n \geq m \iff n = m$. 😊

Definizione 2.5.2: Dimensione

Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, non banale, chiamiamo **dimensione** di V la cardinalità di una qualsiasi delle sue basi. Inoltre se $V = \{0\}$ poniamo la $\dim(V) = 0$

Qui di seguito enunciamo una serie di conseguenze del lemma di Steinitz.

Proposizione 2.5.1

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n su K e sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema di generatori. Allora S è libero.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, ..., w_n]$ una base di $V_n(K)$. Sia per assurdo S legato. Senza perdita di generalità $v_1 = k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n$. Allora $S' = S \backslash \{v_1\}$ è ancora sistema di generatori. $|S'| = n - 1 \geq |B|$ perché B è libero per il lemma di Steinitz. **Assurdo!**. Quindi S è libero. 😊

Proposizione 2.5.2

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K. Sia $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un sistema libero. Allora S è anche un sistema di generatori.

Dimostrazione: Sia $B = [w_1, w_2, ..., w_n]$ una base di $V(K)$, supponiamo per assurdo che S non generi.

$$\implies \exists v \in V \text{ con } v \neq \underline{0}$$

$S' = S \cup \{u\}$ è ancora libero, supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\text{sia } \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n + \alpha v \text{ con } \alpha \neq 0$$

$$\text{altrimenti avremmo: } \underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

$$v = \frac{1}{\alpha}(-k_1v_1 - k_2v_2 - ... - k_nv_n) \in \mathcal{L}(S)$$

$\implies v \in \mathcal{L}(S)$ **assurdo!** Contro l'ipotesi che $v \notin \mathcal{L}(S) \implies S'$ è libero.

$$\underbrace{|S'| = n + 1}_{\text{sistema libero}} \leq \underbrace{|B| = n}_{\text{sequenza di generatori}} \quad \to \text{ per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! $\implies S$ è un sistema di generatori. 😊

Proposizione 2.5.3

m vettori in $V_n(K)$ con $m > n$ sono sempre linearmente dipendenti.

Dimostrazione: Siano per assurdo $[v_1, v_2, ..., v_m]$, m vettori linearmente indipendenti con $m > n$. Sia B una base di $V_n(K)$. $m = |S = [v_1, v_2, ..., v_m]| \leq |B| = n$ per il lemma di Steinitz. Ma per ipotesi $m > n$, **assurdo!** 😊

Proposizione 2.5.4

m vettori in $V_n(K)$ con $m < n \implies$ non possono generare.

Dimostrazione: siano $v_1, v_2, ..., v_m$ per assurdo m vettori che generano $V_n(K)$ con $m < n$ allora:

$$m = |S = [v_1, v_2, ..., v_n]| \geq |B| = n \quad \text{con} \quad m \geq n \quad \text{per il lemma di Steinitz}$$

Assurdo! Va contro all'ipotesi. 😊

Teorema 2.5.3 Teorema di caratterizzazione delle basi

Sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una sequenza di vettori di $V(K)$. B è una base se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di B.

$$\forall v \in V,\ \exists!\ v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \quad k_i \in K$$

Dimostrazione: $\implies$ sia B una base di V. Per ogni v si ha che $v \in \mathcal{L}(B)$ perché B è una sequenza di generatori. Supponiamo per assurdo che esista $v \in V$:

$$v = v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = h_1v_1 + h_2v_2 + ... + h_nv_n \quad \text{con almeno un } k_i \neq h_i$$

$$(k_1 - h_1)v_1 + (k_2 - h_2)v_2 + ... + (k_n - h_n)v_n = \underline{0}$$

B è una sequenza libera, quindi $(k_i - h_i) = 0 \implies k_i = h_i$ perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Ma avevamo supposto che $k_i \neq h_i \implies$ **assurdo!** $\implies \exists!$ la combinazione lineare dei vettori di B che dà v $(\forall v \in V)$.

$\impliedby$ per ipotesi $\forall v \in V\ \exists!$ combinazione lineare dei vettori di B che dà v. B è una sequenza di generatori, cioè $\forall v \in V \implies v \in \mathcal{L}(B)$. Supponiamo per assurdo che B sia legato $\implies \exists k_i \in K$ non nullo:

$$\underline{0} = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n \quad \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$$

quindi esistono almeno due combinazioni lineari di B che danno $\underline{0}$. Dato che $\underline{0} \in V$ per ipotesi esiste un unica combinazione lineare dei vettori di B che dà $\underline{0}$. **Assurdo!** Quindi B è una sequenza libera e B è una base per V. 😃

Definizione 2.5.3: Componenti di un vettore rispetto ad una base

Sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $v \in V$. Chiameremo componenti di v rispetto alla base B la sequenza $(k_1, k_2, ..., k_n)$:

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$$

Proposizione 2.5.5

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K, allora $V_n(K)$ ammette almeno un sottospazio di dimensione m $\forall 0 \leq m \leq n$.

Dimostrazione: sia $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base di $V_n(K)$ e sia $0 \leq m \leq n$, ci sono due possibilità:

1. $m = 0 \implies \{\underline{0}\}$ è il sottospazio voluto;
2. $0 < m \leq n$ e quindi $S = (v_1, v_2, ..., v_m)$

$\mathcal{L}(S)$ ha dimensione m perché S è libero $(S \subseteq B)$ e genera, per definizione $\mathcal{L}(S)$. 😃

Proposizione 2.5.6

Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia $U \leq W$, allora:

1. $\dim(U) \leq \dim(W)$
2. $U = W \iff \dim(U) = \dim(W)$

Dimostrazione: Dimostriamo i due punti:

1. Sia B base per U e B' base per W, se per assurdo

$$\underbrace{\dim(U) = |B|}_{\text{sequenza libera di } W} > \underbrace{\dim(W) = |B'|}_{\text{genera } W}$$

   contro il lemma di Steinitz.

2. $\implies$ è banale;
$\impliedby$ sia per assurdo $U < W$ e sia B base di U, allora

$$|B| = \dim(U) = \dim(W)$$

quindi B è una base anche per $W \implies \mathcal{L}(B) = W \implies W = U$ **Assurdo!**

😊

Teorema 2.5.4 Teorema del completamento ad una base

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, ..., v_p)$, ove $p \leq n$, una sequenza libera di vettori in $V_n(K)$. Allora, in una qualunque base di B di $V_n(K)$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è una base di $V_n(K)$.

2.6 Intersezione e somma di sottospazi

Proposizione 2.6.1

Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e siano $U, V \leq V \implies U \cap W$ è sottospazio di V.

Dimostrazione: Richiamo il secondo criterio di riconoscimento dei sottospazi. $U \cap W$ è un sottospazio di V $\iff$ è sottoinsieme non vuoto di V:

$$\forall v_1, v_2 \in U \cap W,\ \forall k_1, k_2 \in K,\ k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W$$

$U \cap W$ è sottoinsieme non vuoto di V, perché $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ e $\underline{0} \in U \cap W$. Siano ora $v_1, v_2 \in U \cap W$ e $k_1, k_2 \in K$, osserviamo per il secondo criterio di riconoscimento che $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U$ e per lo stesso motivo $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W$ $\implies k_1 v_1 + k_2 v_2 \in U \cap W \implies U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. 😊

N.B.

Sotto le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che $U \cup W$ non è un sottospazio a meno che $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Definizione 2.6.1: Spazio di somma

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K definiamo lo **spazio di somma** come:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U\ e\ w \in W\}$$

Proposizione 2.6.2

Dati U e $W \leq V$ spazio vettoriale di dimensione n su K abbiamo che: $U + W \leq V$

Dimostrazione: Osserviamo che $U + W \subseteq V$ perché dato $u \in U$ e $w \in W$, $u \in V$ e $w \in V \implies u + w \in V$, il quale non è vuoto perché $\underline{0} \in U + W$. Siano $v_1, v_2 \in U + W$ e siano $k_1, k_2 \in K$

$$k_1 \cdot \underbrace{v_1}_{= u_1 + w_1} + k_2 \cdot \underbrace{v_2}_{= u_2 + w_2} = k_1(u_1 + w_1) + k_2(u_2 + w_2) = \underbrace{(k_1 u_1 + k_1 w_1)}_{u_3 \in U \text{ per il 2° criterio}} + \underbrace{(k_2 u_2 + k_2 w_2)}_{w_3 \in W \text{ per il 2° criterio}}$$

$$\implies u_3 + w_3 \in U + W \implies \text{per il 2° criterio } U + W \leq V$$

😊

Proposizione 2.6.3
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che cotiene $U \cup W$; equivalentemente

$$\mathcal{L}(U \cup W) = U + W$$

Definizione 2.6.2: Somma diretta

Dati $U, W \leq V_n(K)$ diremo che $U + W$ è somma diretta se $\forall v \in U + W$ può essere scritto come unico modo come $u + w$. Equivalentemente

$$\forall v \in U + W \quad \exists!\ u \in U\ e\ w \in W : \quad v = u + w$$

Se $U + W$ è una somma diretta allora la indicheremo con $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.4
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione: $\implies$ Siano U, W in somma diretta e sia, per assurdo: $x \in U \cap W$ con $x \neq \underline{0}$. Sia $v = u + w$ con $u \in U\ e\ w \in W$. Consideriamo

$$v + x - x = v \implies v = u + w + x - x = \underbrace{u + x}_{\in U} + \underbrace{w - x}_{\in W} = u_1 + w_1$$

$$u = u + x \quad e \quad w = w - x \text{ poiché la somma è diretta } \implies x = \underline{0} \implies \textbf{Assurdo!} \implies U \cap W = \{\underline{0}\}$$

$\impliedby$ Siano $U, W :\ U \cap W = \{\underline{0}\}$ e supponiamo per assurdo che esista $v \in U + W$:

$$v = u_1 + w_1 \quad e \quad v = u_2 + w_2 \qquad \text{con } u_1, u_2 \in U \quad e \quad w_1, w_2 \in W \quad e \quad (u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$$

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad v_2 = \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W$$

$$\implies u_1 - u_2 = \underline{0} \quad e \quad w_2 - w_1 = \underline{0}$$

$$\implies u_1 = u_2 \quad e \quad w_1 = w_2$$

che è **assurdo!** Questo perché avevamo supposto che v avesse due scritture distinte come somma i elementi di $U\ e\ W$.

$$\implies \exists!\ (u_1, w_1) : \quad u, \in U \quad e \quad w_1 \in W : \quad v = u_1 + w_1\ e\ U \oplus W$$

☺

Corollario 2.6.1
Siano $U, W \leq V_n(K)$ allora $V = U \oplus W \iff U + W = V\ e\ U \cap W = \{\underline{0}\}$.

N.B.
Siano $U, W \leq V_n(K)$ e sia B_1 una base di V e B_2 una base di $W \implies B_1 \cup B_2$ è sequenza di generatori per lo spazio $U + W$. In generale l'unione di due basi, non è a sua volta una base per $U + W$.

Proposizione 2.6.5
Siano $U, M \leq V_n(K) : U \oplus W$ e sia A una sequenza libera di vettori di U e B una sequenza libera di vettori di U. Allora $A \cup B$ è una sequenza libera di vettori della $U \oplus W$.

Dimostrazione: Siano $A = (u_1, u_2, ..., u_k)$ e $B = (w_1, w_2, ..., w_h)$ e supponiamo per assurdo che $a_1, a_2, ..., a_k \in K$ e $b_1, b_2, ..., b_h \in K$, quindi per assurdo sia legata la combinazione lineare:

$$\underline{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + ... + b_h w_h \quad \text{non tutti nulli}$$

$$\underbrace{-(a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_k u_k)}_{\in U} = \underbrace{b_1 w_1 + b_2 w_2 + ... + b_h w_h}_{\in W}$$

$$\implies \underline{0} = b_1 w_1 + b_2 w_2 + ... + b_h w_h \quad e \quad \underline{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_k w_k$$

ma A e B sono sequenze libere quindi $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0 \quad e \quad b_1 = b_2 = ... = b_h = 0$

$$\implies \nexists a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_h \text{ non tutti nulli:}$$

$$\underline{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_k u_k + b_1 w_1 + b_2 w_2 + ... + b_h w_h \implies \textbf{Assurdo!}$$

$\implies A \cup B$ è una sequenza libera. 😄

Corollario 2.6.2

Siano $U, W \in V_n(K) : U \oplus W$ e siano B_U e B_W basi di U e $W \implies B_U \cup B_W$ è una base per $U \oplus W$.

Proposizione 2.6.6 Formula di Grassmann

Dati $U, W \leq V_n(K)$ abbiamo che:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

Definizione 2.6.3: Complemento diretto

Sia $W \leq V_n(K)$ si dice **complemento diretto** di W in V uno spazio $U \leq V : U \oplus W = V$.

N.B.

Un complemento diretto di W in V esiste sempre e si trova estendendo una base di W a una base di V. In generale questo non è unico.