Comment empêcher les oiseaux de voler ?

Introduction aux schémas numériques pour Navier-Stokes et au contrôle des équations semilinéaires paraboliques

Averil PROST

sous la direction de

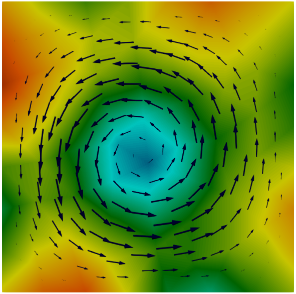
Antoine Tonnoir & Nicolas Forcadel

Table of Contents

Le modèle

Soient

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$, de frontière Γ
- $p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ la pression,
- $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ la vitesse.

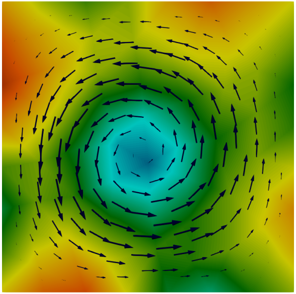


Le modèle

Soient

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$, de frontière Γ
- $p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ la pression,
- $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ la vitesse.

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= f \\ \text{div}(u) &= 0 \\ \tau_\Gamma u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$



Navier-Stokes continu

Deux visions :

- Espaces classiques avec pression
- Espaces $\mathbb{V} = \overline{\{u \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \operatorname{div} u = 0\}}$ dans H^1, $\mathbb{H}$ dans L^2

Navier-Stokes continu

Deux visions :

- Espaces classiques avec pression
- Espaces $\mathbb{V} = \overline{\{u \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \operatorname{div} u = 0\}}$ dans H^1, $\mathbb{H}$ dans L^2

Théorème – Existence et unicité (J. L. Lions [Lio69])
En dimension 2, la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, v\rangle + a(u,v) + c(u;u,v) &= \langle f, v\rangle \qquad \forall v \\ u(0,\cdot) &= u_0 \end{aligned}$$

est bien posée dans $L^2(0,T;\mathbb{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathbb{H})$.

Navier-Stokes continu

Terme non linéaire Soient $u, v, w \in H^1(\Omega)$.

$$c(u; v, w) := ((u \cdot \nabla)v, w)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i$$

Navier-Stokes continu

Terme non linéaire Soient $u, v, w \in H^1(\Omega)$.

$$c(u; v, w) := ((u \cdot \nabla)v, w)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i$$

- trilinéaire

Navier-Stokes continu

Terme non linéaire Soient $u, v, w \in H^1(\Omega)$.

$$c(u; v, w) := ((u \cdot \nabla)v, w)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i$$

- trilinéaire
- majorations par $\|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1$ et $C\sqrt{\|u\|\,|u|_1}\,|v|_1\,\sqrt{\|w\|\,|w|_1}$

Navier-Stokes continu

Terme non linéaire Soient $u, v, w \in H^1(\Omega)$.

$$c(u; v, w) := ((u \cdot \nabla)v, w)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i$$

- trilinéaire
- majorations par $\|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1$ et $C\sqrt{\|u\|\,|u|_1}\,|v|_1\,\sqrt{\|w\|\,|w|_1}$
- $c(u; v, w) = -c(u; w, v)$, d'où $c(u; v, v) = 0$ si $u \in \mathbb{V}$

Discrétisation

Soient $X_h \subset H_0^1(\Omega)$, Y_h des espaces de Hilbert de dimension finie.

Schémas Soit $k \in \{n, n-1\}$. $\forall (v,q) \in X_h \times Y_h$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + a(u^n, v) + \tilde{c}(u^{n-1}; u^k, v) + b(v, p^n) &= (f^n, v) \\ b(u^n, q) &= 0 \\ u^0 &= u_0 \end{aligned}$$

où $b(v,p) := (v, \nabla p)_{[L^2]^n} = -(\operatorname{div}(v), p)_{L^2}$.

Caractère bien-posé

Soit $V_h = \{v \in X_h \mid b(v,p) = 0 \ \ \forall p \in Y_h\}$, et

$$\mu_n(\cdot,\cdot) := \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} m(\cdot,\cdot) + a(\cdot,\cdot) & \text{si } k = n-1 \\ \frac{1}{\Delta t} m(\cdot,\cdot) + a(\cdot,\cdot) + \tilde{c}(u_h^{n-1};\cdot,\cdot) & \text{si } k = n \end{cases}$$

Le problème restreint à V_h est

$$\mu_n(u^n, v) = F^n(v)$$

Caractère bien-posé

Soit $V_h = \{v \in X_h \mid b(v,p) = 0 \ \ \forall p \in Y_h\}$, et

$$\mu_n(\cdot,\cdot) := \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} m(\cdot,\cdot) + a(\cdot,\cdot) & \text{si } k = n-1 \\ \frac{1}{\Delta t} m(\cdot,\cdot) + a(\cdot,\cdot) + \tilde{c}(u_h^{n-1};\cdot,\cdot) & \text{si } k = n \end{cases}$$

Le problème restreint à V_h est

$$\mu_n(u^n, v) = F^n(v)$$

Bien posé par Lax-Milgram. Quid de p ?

Condition inf-sup

Pb. de représentation Soit $l \in X_h$, trouver $p \in Y_h$ t.q

$$b(v,p) = (v,l)_X \qquad \forall v \in V_h^{\perp} \text{ au sens } (\cdot,\cdot)_X$$

Condition inf-sup

Pb. de représentation Soit $l \in X_h$, trouver $p \in Y_h$ t.q

$$b(v,p) = (v,l)_X \qquad \forall v \in V_h^\perp \text{ au sens } (\cdot,\cdot)_X$$

Par Riesz, il existe un unique $L_p \in X_h$ t.q $b(v,p) = (v, L_p)_X$.

Condition inf-sup

Pb. de représentation Soit $l \in X_h$, trouver $p \in Y_h$ t.q

$$b(v,p) = (v,l)_X \qquad \forall v \in V_h^\perp \text{ au sens } (\cdot,\cdot)_X$$

Par Riesz, il existe un unique $L_p \in X_h$ t.q $b(v,p) = (v, L_p)_X$.

L'application $L : Y_h \to X_h$ est

- linéaire de Y_h dans $V_h^\perp$, qui sont de même dimension
- injective si $\forall p, q$, $L_p = L_q \implies p = q$
- surjective si $V_h^\perp \setminus Im(L) = \emptyset$

Condition inf-sup

Cond. de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi $\exists\, \beta > 0$ t.q

$$\beta \|p\|_Y \leqslant \|L_p\|_{X'} = \sup_{v \in X_h \setminus \{0\}} \frac{(v, L_p)_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b(v,p)}{\|v\|_X}$$

Condition inf-sup

Cond. de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi $\exists\,\beta > 0$ t.q

$$\beta\|p\|_Y \leqslant \|L_p\|_{X'} = \sup_{v\in X_h\setminus\{0\}} \frac{(v, L_p)_X}{\|v\|_X} = \sup_{v\in X_h\setminus\{0\}} \frac{b(v,p)}{\|v\|_X}$$

- injectivité directe : $\|p-q\|_Y \leqslant \beta^{-1}\|L_p - L_q\|_{X'}$
- *ou* surjectivité :
  - $Im(L)$ maintenant fermée : on a $V_h^\perp = Im(L) \oplus Im(L)^\perp$
  - pour $v \in Im(L)^\perp$, $0 = (v, L_p)_X = b(v,p) \implies v \in V_h \cap V_h^\perp$

d'où L est maintenant bijective : formulation bien posée.

Table of Contents

Quelques définitions

Problème de référence

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) + d(x,t,u(x,t)) &= f(x,t) & \Omega\times]0,T[\\ \partial_\nu u(\sigma,t) + b(\sigma,t,u(\sigma,t)) &= g(\sigma,t) & \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) &= u_0(x) & \Omega \end{aligned}$$

ou plus synthétiquement $\mathscr{T}(u) = (f,g,u_0)^t$.

Quelques définitions

Espace de la solution

$$W(0,T) := \{u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \mid \partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

Quelques définitions

Espace de la solution

$$W(0,T) := \{u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \mid \partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

Hypothèses ($b(x,t,u)$ et $d(x,t,u)$ traitées symétriquement) :

- mesurabilité par rapport à (x,t)
- bornes uniformes en $u = 0$
- globalement Lipschitz par rapport à u p.p (x,t)

Quelques définitions

Espace de la solution

$$W(0,T) := \{u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \mid \partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

Hypothèses ($b(x,t,u)$ et $d(x,t,u)$ traitées symétriquement) :

- mesurabilité par rapport à (x,t)
- bornes uniformes en $u = 0$
- globalement Lipschitz par rapport à u p.p (x,t)
- monotonie (croissante) par rapport à u (relaxation possible)

Place de la monotonie

- Non-linéarité escamotée dans les inégalités d'énergie :

$$(d(\cdot,u),u) = \underbrace{(d(\cdot,u) - d(\cdot,0), u - 0)}_{\geqslant 0} + (d(\cdot,0), u - 0)$$

Place de la monotonie

- Non-linéarité escamotée dans les inégalités d'énergie :

$$(d(\cdot,u),u) = \underbrace{(d(\cdot,u)-d(\cdot,0),u-0)}_{\geqslant 0} + (d(\cdot,0),u-0)$$

- Decisive monotonicity trick [Zei89] :

$$u_m \rightharpoonup u,\ A(u_m) \rightharpoonup b,\ \varlimsup_{m\to\infty} \langle A(u_m),u_m\rangle \leqslant \langle b,u\rangle$$

suffisent pour avoir $A(u)=b$.

Problème

On introduit

- $A \subset L^\infty$ un espace de contrôles convexe fermé
- $J(u, \alpha)$ une fonction continue, convexe en α et bornée

et le problème de contrôle

$$\min_{\alpha \in A,\ \mathscr{T}(u) = \alpha} J(u, \alpha)$$

Soit A est borné, soit J est coercive : problème bien posé.

Adjoint

Posons

$$\mathcal{L}(u, \alpha, w) \coloneqq J(u, \alpha) - \langle w, \mathscr{T}(u) - \alpha \rangle$$

Équation adjointe Par minimisation sans contrainte,

$$\partial_u J(u, \alpha) = (\partial_u \mathscr{T}(u))^* \, w$$

Adjoint

Posons

$$\mathcal{L}(u,\alpha,w) \coloneqq J(u,\alpha) - \langle w, \mathscr{T}(u) - \alpha \rangle$$

Équation adjointe Par minimisation sans contrainte,

$$\partial_u J(u,\alpha) = (\partial_u \mathscr{T}(u))^* w$$

ce qui amène

$$D_\alpha J(u(\alpha),\alpha) = \partial_\alpha J(u(\alpha),\alpha) + w$$

Descente de gradient possible. À l'ordre 2, méthode de Newton.

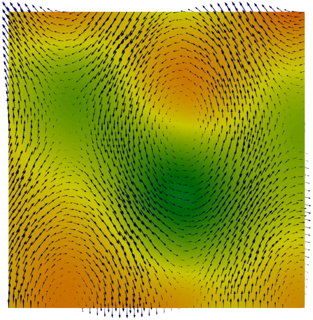
Table of Contents

Un exemple inédit

Code `LIB/Insta`. Soit $u := \text{rot}\ \left\{(\sin(8x) + \cos(5x))\sqrt{t + 0.01}\right\}$

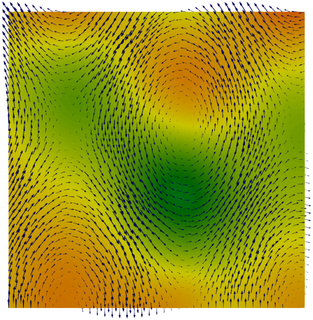
Un exemple inédit

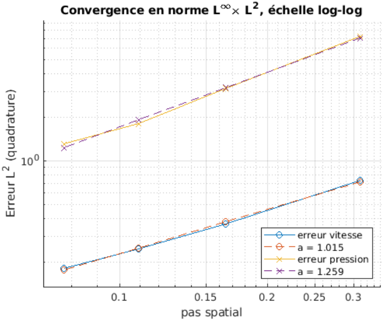
Code `LIB/Insta`. Soit $u := \text{rot}\ \left\{(\sin(8x) + \cos(5x))\sqrt{t + 0.01}\right\}$



Un exemple inédit

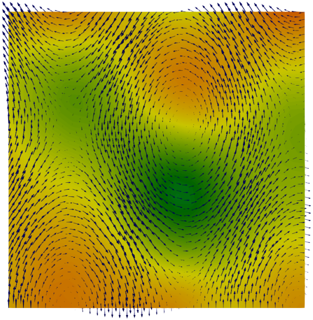
Code `LIB/Insta`. Soit $u := \text{rot}\ \left\{(\sin(8x) + \cos(5x))\sqrt{t + 0.01}\right\}$

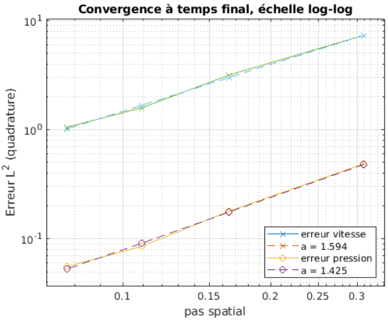




Un exemple inédit

Code `LIB/Insta`. Soit $u :=$ rot $\left\{(\sin(8x) + \cos(5x))\sqrt{t + 0.01}\right\}$





Dans le futur

- Algorithmes de résolution du système linéaire

Dans le futur

- Algorithmes de résolution du système linéaire
- Parallélisation des évaluations de $\widetilde{c}$

Dans le futur

- Algorithmes de résolution du système linéaire
- Parallélisation des évaluations de $\widetilde{c}$
- Autres éléments finis : $\mathbb{P}^1 \cup \{\text{bulle}\}$ pour la vitesse

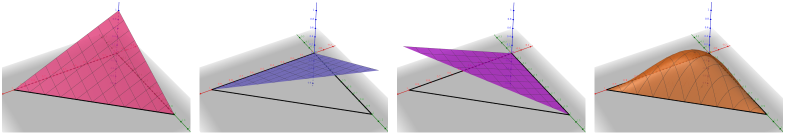


Figure – Fonctions de base de $\mathbb{P}^1 \cup \{\text{bulle}\}$

Empêcher les oiseaux de voler

On considère

$$J(u,f) := \frac{1}{2}\|u - U_Q\|_Q^2 + \frac{\beta}{2}\|f\|_Q^2 + \frac{\gamma}{2}\|u(T,\cdot) - U_Q(T,\cdot)\|_\Omega^2$$

Empêcher les oiseaux de voler

On considère

$$J(u,f) := \frac{1}{2}\|u - U_Q\|_Q^2 + \frac{\beta}{2}\|f\|_Q^2 + \frac{\gamma}{2}\|u(T,\cdot) - U_Q(T,\cdot)\|_\Omega^2$$

Descente de gradient en utilisant le problème adjoint ([GM00]).

Algorithme – Gradient

`Choisir` (u^0, α^0)
`Tant que critère d'arrêt non satisfait`
    `Déterminer` w^n `à partir de` (u^n, α^n) `(`$\leftarrow$`)`
    `Déterminer` $\alpha^{n+1} := \alpha^n - s(w^n + \partial_\alpha \Phi(u^n, \alpha^n))$
    `Déterminer` u^{n+1} `à partir de` α^{n+1} `(`$\rightarrow$`)`
    `Ajuster` s

Empêcher les oiseaux de voler

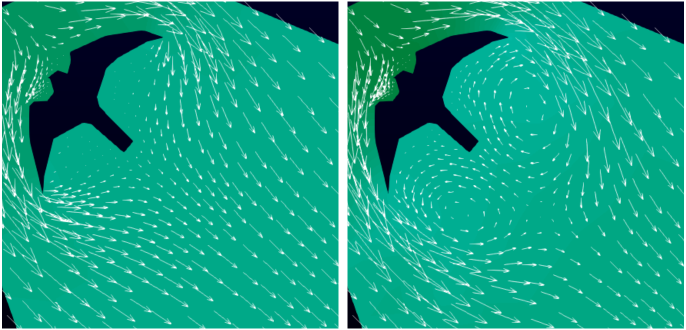


Figure – Objectif et résultat pour $\beta = 1.0$

Empêcher les oiseaux de voler

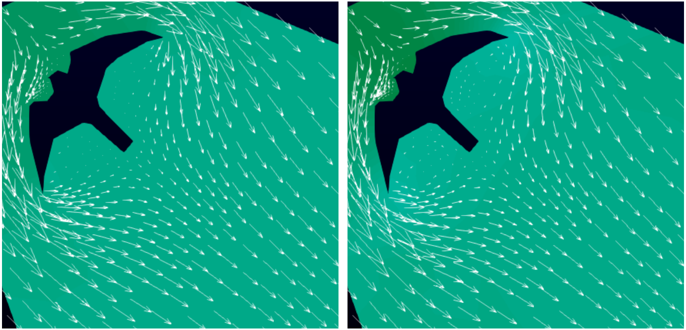


Figure – Objectif et résultat pour $\beta = 0.01$

Empêcher les oiseaux de voler

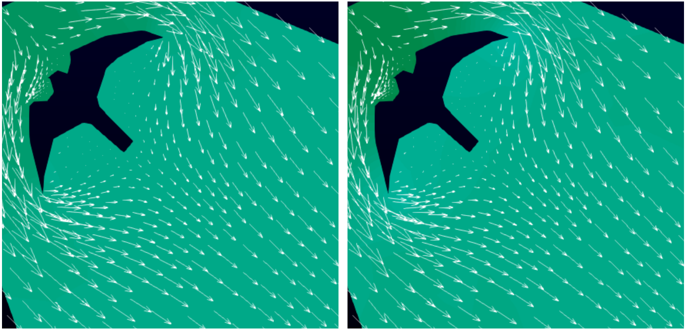


Figure – Objectif et résultat pour $\beta = 0.0001$

Contrôle au bord

Méthode de Newton le long de la courbe $J(u(\alpha), \alpha)$. Amène

$$\min_{\alpha \in A} (\partial_u J, (\partial_\alpha u, \alpha - \alpha^n)) + (\partial_\alpha J, \alpha - \alpha^n) \\ + \frac{1}{2} \left(\partial^2_{u,\alpha} \mathcal{L}(u, \alpha, w), ((\partial_\alpha u, \alpha - \alpha^n), \alpha - \alpha^n)^2 \right)$$

Contrôle au bord

Méthode de Newton le long de la courbe $J(u(\alpha), \alpha)$. Amène

$$\min_{\alpha \in A} (\partial_u J, (\partial_\alpha u, \alpha - \alpha^n)) + (\partial_\alpha J, \alpha - \alpha^n) + \frac{1}{2} \left(\partial^2_{u,\alpha} \mathcal{L}(u, \alpha, w), ((\partial_\alpha u, \alpha - \alpha^n), \alpha - \alpha^n)^2 \right)$$

- Minimisation en (z, α) sous contrainte $(\partial_\alpha u, \alpha - \alpha^n) = z$
- Discrétisation par différences finies d'un problème 1D en espace
- Implémentation en Matlab avec `quadprog`

Contrôle au bord

Considérons $\Omega =]0, l[\subset \mathbb{R}$ et la fonctionnelle

$$J(u,g) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left[u(t,\sigma) - (1.2 - t)\cos(t(15 + 5\delta_{\sigma=l})) \right]^2 \, d\sigma dt$$

soumise à la contrainte

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u & = 0 \qquad \text{sur }]0,T[\times\Omega \\ \partial_\nu u + \exp(tu) & = g \qquad \text{sur }]0,T[\times\Omega \\ u(0,x) & = 1.2 \qquad \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Contrôle au bord

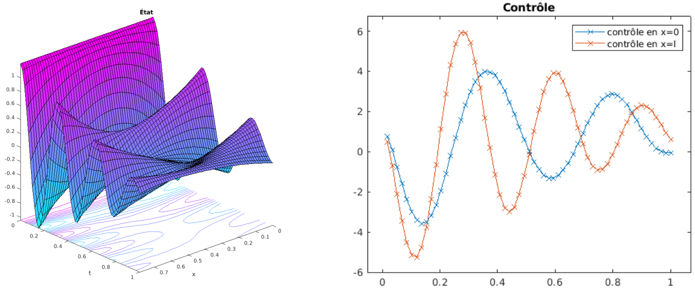


Figure – Résultats en 4 itérations, $M = N = 50$, $J = 4.55 \times 10^{-14}$

MERCI

M. D. Gunzburger and S. Manservisi.
Analysis and Approximation of the Velocity Tracking Problem for Navier-Stokes Flows with Distributed Control.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 37(5) :1481–1512, 2000.

Jacques-Louis Lions.
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
Les cours de référence. Dunod, Paris, 1969.

Eberhard Zeidler.
Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. 2B : Nonlinear Monotone Operators.
Springer, New York Berlin Heidelberg, nachdr. edition, 1989.