

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ESTABILIDAD



TESIS DE INGENIERÍA CIVIL

# MODELACIÓN NUMÉRICA NO-LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDAS A CARGAS CÍCLICAS

AUTOR: ALEJANDRO DANIEL VERRI

DIRECTOR: PROF. ING. RAÚL D. BERTERO



# Modelación Numérica No-Lineal de Estructuras de Hormigón Armado sometidas a Cargas Cíclicas

## Tesis de Ingeniería Civil

Autor:

Alejandro Daniel Verri

Padrón Nº 69.207

Director:

Prof. Ing. Raúl D. Bertero

Profesor Adjunto

Departamento de Estabilidad

Facultad de Ingeniería

Universidad de Buenos Aires

.....

.....

.....

.....

.....

.....



*A Gabriela.*



## RESUMEN

*La performance de los edificios de hormigón armado observada durante los últimos sismos, ha sido significativamente diferente del comportamiento esperado a partir del diseño sismo-resistente original. La diferencia puede atribuirse principalmente a las dificultades en predecir la respuesta cíclica en el régimen no-lineal de las estructuras de hormigón armado, debido a que este material está compuesto por dos materiales de comportamiento muy diferente: hormigón y acero. Esto sugiere que los modelos tradicionales construidos a partir de relaciones momento-curvatura deben ser reemplazados por otros que permitan introducir directamente el comportamiento no-lineal de las distintas fibras que componen la sección de cada elemento.*

*En el presente trabajo se desarrolló un modelo para el análisis en régimen no-lineal de pórticos planos de hormigón armado, sometidas a grandes ciclos de carga. El modelo incluye la formulación de un elemento finito de viga-columna para grandes deformaciones, un modelo para el comportamiento histerético de secciones de hormigón armado a partir de ecuaciones constitutivas independientes para fibras de hormigón y acero, y una estrategia numérica de control del tamaño de paso para el problema de no-linealidad material y geométrica combinadas.*

*El elemento propuesto se implementó sobre un programa que permitió modelar un problema de resultados experimentales conocidos. Se obtuvo una buena concordancia entre la respuesta experimental y las predicciones del modelo. El programa de elementos finitos desarrollado permite analizar con razonable precisión la respuesta en el régimen no-lineal de estructuras planas de hormigón armado y acero a un costo computacional aceptable.*





## AGRADECIMIENTOS

*Este trabajo de Tesis ha sido desarrollado para cumplir con los requerimientos del grado de Ingeniero Civil de Alejandro D. Verri bajo la dirección del Prof. Ing. Raúl D. Bertero.*

*Mi más sincero agradecimiento hacia Raúl, ya que confió en mí para esta empresa de final incierto y fue paciente hasta el final, leyendo innumerables versiones y revisiones del trabajo y aportando los conceptos fundamentales que finalmente resultaron en este trabajo.*

*Quiero expresar mi gratitud a mi amigo Alejo Sfriso, quien ha tenido el tiempo y las ganas de discutir, revisar y corregir muchos de los textos originales a lo largo de todo el desarrollo del trabajo. Además, su ayuda en la implementación y la depuración del código del programa ha sido fundamental. Mi maestro, Eduardo Núñez, a quien le tengo un muy especial aprecio, me ha enseñado valiosas lecciones en el desarrollo de los modelos del hormigón, particularmente en el análisis de los problemas del ablandamiento por deformaciones del material confinado. A él, mi humilde agradecimiento.*

*Mis amigos Marcelo Gavazzo, Fabrisio Heib, Martín Polimeni y Miguel Quiroz, me han ayudado en diferentes etapas y de diferentes maneras. Roberto Mazzuca me ha brindado un apoyo fundamental para la finalización de este proyecto y con él, estoy especialmente agradecido. Mis padres, Edda y Roly, a su manera y desde la distancia, me han acompañado todo este tiempo y por ello quiero que se sepan agradecidos con todo mi corazón.*

*Finalmente, Gabriela Sor, mi compañera y quizá mañana mi esposa, ha resignado incontables fines de semana, acompañándome hasta el amanecer en noches de correcciones y aburridas pruebas del código frente a la pantalla. Con ella, no creo que alcance mi gratitud. A esta mujer está dedicado mi trabajo.*



# ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| RESUMEN.....   | VII       |
| AGRADECIMIENTOS.....   | IX        |
| ÍNDICE .....   | XI        |
| NOTACIÓN .....   | XV        |
| <b>I. INTRODUCCIÓN.....</b>  | <b>21</b> |
| I.1. MOTIVACIÓN .....  | 21        |
| I.2. ANTECEDENTES .....  | 23        |
| I.2.1. Modelos discretos de no-linealidad condensada .....                         | 24        |
| I.2.2. Ventajas y desventajas de las formulaciones condensadas .....               | 26        |
| I.2.3. Modelos discretos de no-linealidad distribuida .....                        | 26        |
| I.2.4. Ventajas y desventajas de las formulaciones basadas en flexibilidades ..... | 28        |
| I.3. OBJETIVOS .....   | 29        |
| I.4. ORGANIZACIÓN.....   | 30        |
| <b>II. CINEMÁTICA. FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO DE VIGA-COLUMNA NO-LINEAL..</b>      | <b>35</b> |
| II.1. INTRODUCCIÓN A LA NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....                              | 37        |
| II.1.1. La formulación lineal del problema.....                                    | 37        |
| II.1.2. La formulación no-lineal del problema .....                                | 39        |
| II.1.3. Una solución numérica directa: el control de desplazamientos .....         | 42        |
| II.1.4. Una solución incremental: el control de fuerzas.....                       | 42        |
| II.1.5. Una solución iterativa. el método de Newton-Raphson.....                   | 43        |
| II.1.6. Formulación de la matriz tangente.....                                     | 45        |
| II.2. EL TEOREMA DE TAYLOR.....  | 46        |
| II.2.1. Introducción .....   | 46        |
| II.2.2. La teoría de pequeños desplazamientos .....                                | 46        |
| II.2.3. La teoría de las pequeñas deformaciones .....                              | 47        |
| II.2.4. La medida de deformación de Green-Lagrange .....                           | 48        |
| II.2.5. El equilibrio en la posición inicial.....                                  | 49        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>II.3. CINEMÁTICA DE UN ELEMENTO DE VIGA-COLUMNA .....</b>  | <b>51</b> |
| II.3.1. <i>La teoría clásica de vigas esbeltas. Hipótesis de Bernoulli - Euler .....</i>                    | <i>51</i> |
| II.3.2. <i>La consideración de las deformaciones longitudinales.....</i>                                    | <i>53</i> |
| II.3.3. <i>La consideración de las deformaciones por corte. Teoría de vigas de Timoshenko .....</i>         | <i>54</i> |
| II.3.4. <i>El estado de deformación de la sección.....</i>  | <i>56</i> |
| <b>II.4. LAS FUNCIONES DE FORMA .....</b>   | <b>57</b> |
| II.4.1. <i>Funciones de interpolación .....</i>   | <i>57</i> |
| II.4.2. <i>La interpolación hermitica. Formulaciones con continuidad de clase C1 .....</i>                  | <i>58</i> |
| II.4.3. <i>Interpolación hermitica del desplazamiento transversal.....</i>                                  | <i>59</i> |
| II.4.4. <i>Interpolación jerárquica del desplazamiento longitudinal.....</i>                                | <i>60</i> |
| II.4.5. <i>Interpolación de los giros y las deformaciones.....</i>  | <i>62</i> |
| <b>II.5. CONSIDERACIÓN DE LAS DEFORMACIONES POR CORTE .....</b>   | <b>64</b> |
| II.5.1. <i>Introducción .....</i>   | <i>64</i> |
| II.5.2. <i>La interpolación de las deformaciones por corte basada en el equilibrio .....</i>                | <i>64</i> |
| II.5.3. <i>La consideración rigurosa de la no-linealidad del material en la ecuación de equilibrio.....</i> | <i>67</i> |
| II.5.4. <i>Interpolación hermitica de las deformaciones por corte .....</i>                                 | <i>68</i> |
| <b>II.6. LAS FUNCIONES DE FORMA AMPLIADAS .....</b>   | <b>71</b> |
| II.6.1. <i>Interpolación modificada por corte de los desplazamientos .....</i>                              | <i>71</i> |
| II.6.2. <i>Interpolación de las deformaciones .....</i>   | <i>72</i> |
| II.6.3. <i>La matriz de interpolación de los desplazamientos y giros: .....</i>                             | <i>73</i> |
| II.6.4. <i>La interpolación del estado de deformación .....</i>   | <i>73</i> |
| II.6.5. <i>La linealización del estado de deformación de la sección .....</i>                               | <i>76</i> |
| <b>III. COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES. MODELACIÓN NUMÉRICA DEL HORMIGÓN ARMADO .....</b>                 | <b>79</b> |
| <b>III.1. INTRODUCCIÓN DE LA NO-LINEALIDAD DEL MATERIAL.....</b>  | <b>81</b> |
| III.1.1. <i>Las hipótesis básicas para las secciones del elemento .....</i>                                 | <i>81</i> |
| III.1.2. <i>Las hipótesis básicas para las fibras de la sección .....</i>                                   | <i>82</i> |
| III.1.3. <i>El módulo secante de la fibra.....</i>  | <i>83</i> |
| III.1.4. <i>Los algoritmos de retorno .....</i>   | <i>84</i> |
| III.1.5. <i>La formulación secante. Actualización incremental del estado .....</i>                          | <i>84</i> |
| III.1.6. <i>La Formulación tangente. Actualización iterativa de tensiones .....</i>                         | <i>85</i> |
| <b>III.2. LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL HORMIGÓN ARMADO .....</b>  | <b>86</b> |
| III.2.1. <i>Plasticidad. Teoría clásica de la plasticidad.....</i>  | <i>86</i> |
| III.2.2. <i>La relación tensión-deformación en el acero para carga monotónica.....</i>                      | <i>86</i> |
| III.2.3. <i>La relación tensión-deformación en el hormigón para carga monotónica .....</i>                  | <i>87</i> |
| III.2.4. <i>Historia de cargas. Deformación plástica.....</i>   | <i>90</i> |
| III.2.5. <i>La tensión de fluencia y el criterio de fluencia .....</i>                                      | <i>90</i> |
| III.2.6. <i>La tensión de fluencia del acero.....</i>   | <i>91</i> |
| III.2.7. <i>La tensión de fluencia en el hormigón confinado .....</i>                                       | <i>91</i> |
| III.2.8. <i>El criterio de fluencia en el acero. Efecto Bauschinger .....</i>                               | <i>92</i> |
| III.2.9. <i>El criterio de fluencia en el hormigón.....</i>   | <i>93</i> |
| III.2.10. <i>Las reglas de flujo.....</i>   | <i>94</i> |
| III.2.11. <i>Carga, descarga y recarga en fibras de acero .....</i>   | <i>95</i> |
| III.2.12. <i>Carga, descarga y recarga en las fibras de hormigón .....</i>                                  | <i>96</i> |
| III.2.13. <i>La formulación de un modelo simplificado de daño para el hormigón.....</i>                     | <i>97</i> |

|  |            |
|--|------------|
| III.2.14. El módulo plástico del hormigón .....  | 98         |
| III.3. UN ALGORITMO DE RETORNO PARA HORMIGÓN ARMADO .....                                | 100        |
| III.3.1. El algoritmo de retorno. Definición del problema .....                          | 100        |
| III.3.2. Incremento elástico de deformaciones.....                                       | 101        |
| III.3.3. Incremento elastoplástico de deformaciones .....                                | 102        |
| III.3.4. Condiciones de consistencia .....   | 102        |
| III.3.5. Determinación del corrector plástico del acero.....                             | 103        |
| III.3.6. Determinación del corrector plástico del hormigón.....                          | 104        |
| III.3.7. Los correctores plásticos en carga del hormigón.....                            | 106        |
| III.3.8. Los correctores plásticos en descarga del hormigón.....                         | 109        |
| III.3.9. La recarga elastoplástica en el hormigón .....                                  | 111        |
| <b>IV. FORMULACIÓN DEL EQUILIBRIO .....</b>  | <b>113</b> |
| IV.1. LA RESULTANTE DE ESFUERZOS INTERNOS DE LA SECCIÓN .....                            | 115        |
| IV.1.1. La resultante instantánea de esfuerzos internos.....                             | 115        |
| IV.1.2. La resultante incremental de esfuerzos internos .....                            | 117        |
| IV.1.3. La variación de los esfuerzos internos de la sección: .....                      | 118        |
| IV.1.4. El caso particular de material elástico y lineal .....                           | 119        |
| IV.2. EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.....  | 121        |
| IV.2.1. El trabajo virtual de deformación .....  | 121        |
| IV.2.2. La interpolación del trabajo interno .....                                       | 122        |
| IV.2.3. La resultante de fuerzas internas del elemento.....                              | 123        |
| IV.2.4. Interpolación del trabajo externo. El vector de cargas nodales consistentes..... | 124        |
| IV.2.5. La ecuación de equilibrio del problema generalizado .....                        | 124        |
| IV.3. LA LINEALIZACIÓN DEL EQUILIBRIO .....  | 126        |
| IV.3.1. La Formulación de la Matriz Tangente de Rigidez .....                            | 126        |
| IV.3.2. Fuerzas conservativas y fuerzas dependientes de la configuración .....           | 127        |
| IV.3.3. El equilibrio en la posición deformada.....                                      | 127        |
| IV.3.4. La derivada de las fuerzas internas. La matriz tangente .....                    | 128        |
| IV.3.5. Descomposición de la matriz tangente en bloques.....                             | 129        |
| IV.3.6. El caso particular del material elástico, lineal y homogéneo.....                | 130        |
| <b>V. ACTUALIZACIÓN DE ESTADO. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA.....</b>                          | <b>133</b> |
| V.1. FORMULACIÓN NUMÉRICA DE LA MATRIZ TANGENTE.....                                     | 135        |
| V.1.1. Introducción .....  | 135        |
| V.1.2. Las fórmulas de cuadratura numérica. ....   | 135        |
| V.1.3. La resultante total de esfuerzos internas de la sección.....                      | 137        |
| V.1.4. La matriz secante elastoplástica.....   | 138        |
| V.1.5. El vector de cargas nodales consistentes.....                                     | 139        |
| V.1.6. La resultante total de fuerzas internas .....                                     | 140        |
| V.1.7. La integración de los bloques de la matriz tangente del elemento.....             | 141        |
| V.2. LOS PROCEDIMIENTOS GENERALES DE SOLUCIÓN .....                                      | 143        |
| V.2.1. Las soluciones incrementales. Las técnicas iterativas.....                        | 143        |
| V.2.2. La iteración sobre el incremento finito total .....                               | 145        |
| V.2.3. Los métodos de Newton-Raphson modificados .....                                   | 146        |
| V.2.4. Eliminación de grados de libertad internos. Condensación estática .....           | 146        |

|   |            |
|---|------------|
| V.2.5. Recuperación de grados de libertad internos. Expansión estática .....      | 149        |
| V.3. EL CONTROL DEL TAMAÑO DE PASO .....  | 150        |
| V.3.1. El factor de eventos .....   | 150        |
| V.3.2. Determinación del factor de eventos en las fibras de acero .....           | 151        |
| V.3.3. La linealización en materiales con endurecimiento no-lineal .....          | 152        |
| V.3.4. Determinación del factor de eventos en el hormigón confinado.....          | 154        |
| V.3.5. Desarrollo del algoritmo principal del programa de elementos finitos ..... | 155        |
| <b>VI. VALIDACIÓN NUMÉRICA .....</b>  | <b>161</b> |
| VI.1. MODELOS CONSTITUTIVOS DEL MATERIAL.....                                     | 163        |
| VI.1.1. Introducción .....  | 163        |
| VI.1.2. Ensayo de compresión en una fibra de hormigón .....                       | 164        |
| VI.1.3. Ensayo de carga cíclica sobre una fibra de hormigón .....                 | 164        |
| VI.1.4. Ensayo de carga cíclica en una fibra (barra) de acero.....                | 164        |
| VI.2. MÉNSULA DE HORMIGÓN ARMADO.....   | 173        |
| VI.2.1. Introducción .....  | 173        |
| VI.2.2. Los ensayos de Ma , Bertero y Popov .....                                 | 173        |
| VI.2.3. Correlación de los ensayos con un modelo de elementos finitos .....       | 178        |
| VI.3. COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO.....   | 189        |
| VI.3.1. Introducción .....  | 189        |
| VI.3.2. Correlación de los ensayos con un modelo de elementos finitos .....       | 189        |
| VI.4. CONCLUSIONES .....  | 195        |
| REFERENCIAS.....  | 197        |

## NOTACIÓN

### Matrices y Vectores

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\mathbf{a}$               | Vector de coeficientes de interpolación de desplazamiento longitudinal.           |
| $\mathbf{A}$               | Sistema lineal de ecuaciones evaluado en las condiciones de borde longitudinales. |
| $\mathbf{b}$               | Vector de coeficientes de interpolación de desplazamiento transversal.            |
| $\mathbf{B}$               | Sistema lineal de ecuaciones evaluado en las condiciones de borde transversales.  |
| ${}^t\mathbf{B}$           | Matriz derivada de las funciones de forma del elemento                            |
| ${}^t\mathbf{B}^L$         | Parte lineal de matriz de las derivadas de funciones de forma                     |
| ${}^t\mathbf{B}^{NL}$      | Parte no-lineal de matriz de las derivadas de funciones de forma                  |
| ${}^t\hat{\mathbf{C}}_k^i$ | Matriz secante elastoplástica de una fibra $i$ perteneciente a una sección $x_k$  |
| ${}^t\mathbf{D}_k$         | Matriz derivada de las deformaciones de una sección $x_k$ del elemento.           |
| ${}^t\mathbf{e}_k^o$       | Vector de deformaciones de una sección $x_k$ del elemento                         |
| ${}^t\mathbf{F}$           | Vector resultante de fuerzas internos del elemento.                               |
| $\mathbf{h}_w$             | Funciones de interpolación de desplazamientos transversales.                      |
| $\mathbf{h}_\theta$        | Funciones de interpolación de giros.  |
| $\mathbf{h}_u$             | Funciones de interpolación de desplazamientos longitudinales.                     |
| $\mathbf{H}$               | Matriz de funciones de forma del elemento.  |
| ${}^t\mathbf{K}_T$         | Matriz tangente de rigidez del elemento   |
| ${}^t\mathbf{K}^L$         | Matriz de rigidez lineal  |
| ${}^t\mathbf{K}^\sigma$    | Matriz de rigidez de tensiones iniciales  |
| ${}^t\mathbf{K}^\phi$      | Matriz de rigidez de deformaciones iniciales o matriz geométrica.                 |
| ${}^t\mathbf{Q}_k$         | Vector resultante de esfuerzos internos de una sección $x_k$ del elemento         |
| ${}^t\mathbf{R}_e$         | Vector de cargas nodales consistentes.  |
| ${}^t\mathbf{R}_n$         | Vector de cargas nodales exteriores.  |
| ${}^t\mathbf{s}_k^i$       | Vector de estado de tensiones de una fibra $i$ perteneciente a una sección $x_k$  |

|                          |   |
|--------------------------|---|
| ${}^t\hat{\mathbf{S}}_k$ | Matriz secante elastoplástica de una sección $\mathbf{x}_k$ . |
| $\mathbf{x}^T$           | Vector de incógnitas de interpolación.                        |
| ${}^t\mathbf{X}$         | Vector de coordenadas nodales actualizado                     |
| ${}^t\mathbf{u}$         | Vector del campo de desplazamientos del elemento              |
| ${}^t\hat{\mathbf{U}}$   | Desplazamientos nodales del elemento.                         |
| $\mathbf{Z}$             | Matriz de transformación de coordenadas de la sección         |
| ${}^t\Psi$               | Vector de fuerzas desbalanceadas.                             |

### Escalares

|  |  |
|--|--|
| ${}^t\alpha$                           | Deformación plástica acumulada   |
| $\alpha_o$                             | Deformación plástica acumulada correspondiente a la deformación de fluencia  |
| $\alpha_\tau$                          | Factor de corrección de tensiones de corte de una sección rectangular  |
| $\hat{\alpha}_U$                       | Valor de la máxima deformación plástica en descarga.   |
| $\hat{\alpha}_D^*$                     | Valor de la deformación plástica umbral a partir de la cual se considera el comienzo del daño.                     |
| $\alpha_{cr}$                          | Deformación plástica acumulada de apertura de fisura.  |
| $\chi^o$                               | Curvatura respecto del eje de referencia de flexión  |
| $\Delta\gamma$                         | Corrector plástico de deformaciones.   |
| $\Delta\eta$                           | Corrector plástico de tensiones.   |
| $\Delta\varepsilon_{cr}$               | Deformación total de apertura de fisura.   |
| ${}^t\varepsilon$                      | Deformación longitudinales total de una fibra  |
| $\varepsilon^o$                        | Deformación longitudinal del eje de referencia de la sección   |
| $\varepsilon_o, \tilde{\varepsilon}_o$ | Deformación de "fluencia" en el hormigón no confinado y confinado  |
| ${}^t\varepsilon^p$                    | Deformación plástica de la fibra   |
| ${}^t\varepsilon^e$                    | Deformación elástica de la fibra   |
| ${}^t\varepsilon^e$                    | Deformación total de la fibra  |
| $\phi_h$                               | Diámetro del estribo de confinamiento  |
| $\phi^o$                               | Derivada del desplazamiento transversal de la sección  |
| $\gamma^o$                             | Curvatura media de corte de la sección   |
| ${}^t\varphi$                          | Signo de la tensión relativa de referencia.  |
| $\lambda^{ev}$                         | Factor de eventos mínimo del paso  |
| ${}^t\lambda_k^i$                      | Factor de eventos de una fibra $i$ perteneciente a una sección $\mathbf{x}_k$                                      |
| $\mu$                                  | Parámetro de convergencia del problema. Relación entre los módulos secantes de un estado y el anterior de la fibra |
| $\hat{\mu}_k^i$                        | Coefficiente de Poisson de una fibra $i$ perteneciente a una sección $\mathbf{x}_k$ para un material isotrópico.   |
| ${}^t\Pi$                              | Trabajo total de deformación del elemento  |
| $\theta^o$                             | Giro del eje de referencia de la sección   |



|                    |   |
|--------------------|---|
| $\Theta$           | <i>Parámetro de daño del material. Relación entre el máximo y el mínimo módulo de descarga.</i> |
| $\rho_s$           | <i>Parámetro de densidad de estribos de una sección de hormigón armado.</i>                     |
| $\sigma_Y$         | <i>Tensión de fluencia inicial en fibras de acero</i>   |
| $\psi_i$           | <i>Funciones de peso o coeficientes de cuadratura</i>   |
| $^t\psi$           | <i>Factor de daño para hormigón confinado</i>   |
| $\omega$           | <i>Relación entre el módulo tangente elastoplástico y el módulo elástico en acero</i>           |
| $\Omega_h$         | <i>Perímetro del núcleo de hormigón, medida hasta el borde exterior de los estribos</i>         |
| $^t\xi$            | <i>Tensión de referencia.</i>   |
| $\zeta_j$          | <i>Puntos de integración o puntos de cuadratura</i>   |
| $a_j$              | <i>Coeficientes de interpolación de los desplazamientos longitudinales <math>u^o(x)</math></i>  |
| $A$                | <i>Área de la sección</i>   |
| $A_k$              | <i>Área del núcleo de hormigón, medida hasta el borde exterior de los estribos</i>              |
| $A_h$              | <i>Sección del estribo de confinamiento;</i>  |
| $b$                | <i>Altura de la sección rectangular</i>   |
| $b_i$              | <i>Coeficientes de interpolación de los desplazamientos transversales <math>w^o(x)</math></i>   |
| $g_k$              | <i>Coeficiente de interpolación de las deformaciones por corte <math>\gamma^o(x)</math></i>     |
| $E$                | <i>Módulo de elasticidad del acero</i>  |
| $E_{ep}$           | <i>Módulo tangente elastoplástico del acero</i>   |
| $E_o$              | <i>Módulo tangente inicial del hormigón</i>   |
| $^t\hat{E}_k^i$    | <i>Módulo secante de una fibra <math>i</math> perteneciente a una sección <math>x_k</math></i>  |
| $\hat{E}_U$        | <i>Valor mínimo del módulo, medido en descarga para la máxima deformación</i>                   |
| $\hat{E}_o$        | <i>Valor máximo del módulo de descarga para la deformación umbral</i>                           |
| $^t\widehat{EX}_k$ | <i>Parámetro de estado asociado al momento de 1° orden</i>                                      |
| $^t\widehat{EJ}_k$ | <i>Parámetro de estado asociado al momento de 2° orden</i>                                      |
| $^t\widehat{EA}_k$ | <i>Parámetro de estado asociado al área</i>   |
| $^t\widehat{GA}_k$ | <i>Parámetros de estado asociado al área de la sección</i>                                      |
| $f_C'$             | <i>Tensión máxima de compresión en el hormigón no confinado</i>                                 |
| $\tilde{f}_C'$     | <i>Tensión máxima de compresión en el hormigón no confinado</i>                                 |
| $f_T'$             | <i>Tensión máxima de tracción en el hormigón</i>  |
| $f_Y$              | <i>Función de fluencia del material.</i>  |
| $f_{yh}$           | <i>Tensión de fluencia del acero de los estribos</i>  |
| $^tF$              | <i>Criterio de fluencia</i>   |
| $^tF^*$            | <i>Criterio de fluencia de un estado auxiliar</i>   |
| $G_o$              | <i>Módulo de deformación transversal tangente inicial del hormigón.</i>                         |

|                |   |
|----------------|---|
| $h$            | <i>Altura de la sección rectangular</i>   |
| $h_{\Delta}$   | <i>Funciones de interpolación jerárquicas.</i>  |
| $h_1$          | <i>Ancho del núcleo de hormigón medido hasta el borde exterior de los estribos</i>              |
| $H$            | <i>Módulo de endurecimiento cinemático elasticidad del acero</i>                                |
| $J$            | <i>Momento de Inercia principal de la sección</i>   |
| $K$            | <i>Módulo de endurecimiento isotrópico del acero</i>  |
| $m_{xz}$       | <i>Momentos distribuidos en la longitud del elemento.</i>                                       |
| $M^i$          | <i>Momentos concentrados aplicados en los nodos del elemento.</i>                               |
| ${}^tM_k$      | <i>Momento flexor de la sección.</i>  |
| ${}^tN_k$      | <i>Esfuerzo normal de la sección.</i>   |
| $p_x, p_z$     | <i>Fuerzas distribuidas en la longitud del elemento</i>   |
| $P_x^i, P_z^j$ | <i>Fuerzas concentradas aplicadas en los nodos del elemento</i>                                 |
| ${}^tq$        | <i>Parámetro de endurecimiento cinemático (back stress) para acero</i>                          |
| ${}^tQ_k$      | <i>Esfuerzo de corte de la sección.</i>   |
| $s_h$          | <i>Separación entre estribos</i>  |
| $u, v, w$      | <i>Campos de desplazamiento correspondientes a las coordenadas locales <math>x, y, z</math></i> |
| $V_{in}$       | <i>Trabajo virtual interno de deformación del elemento</i>                                      |
| $V_{ex}$       | <i>Trabajo virtual externo de deformación del elemento</i>                                      |
| $x, y, z$      | <i>Coordenadas cartesianas locales.</i>   |
| $Z_m$          | <i>Pendiente del tramo de ablandamiento del hormigón confinado</i>                              |

#### Subíndices.

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $*_x, *_z$                   | <i>Relativo a la dirección de las coordenadas locales <math>x</math> e <math>y</math></i>   |
| $*_{xz}$                     | <i>Relativo al plano <math>xy</math> (giros y deformaciones angulares)</i>                  |
| $*_u, *_w, *_\theta$         | <i>Funciones de forma y derivadas, que utilizan nodos externos</i>                          |
| $*_{u,\Delta}, *_{w,\Delta}$ | <i>Funciones de forma jerárquicas y sus derivadas.</i>                                      |
| $*_k$                        | <i>Relativo a la sección de ordenada <math>x_k</math> medida sobre el eje de referencia</i> |
| $*_{1,2}$                    | <i>Relativo a los nodos externos del elemento</i>   |
| $*_3$                        | <i>Relativo al nodo interno central del elemento</i>  |
| $(*)_c$                      | <i>Relativo a las fibras de hormigón de la sección</i>                                      |
| $(*)_s$                      | <i>Relativo a las barras de acero de la sección</i>   |

#### Superíndices a derecha

|            |  |
|------------|--|
| $*^O$      | <i>Relativo al eje de referencia del elemento.</i>               |
| $*^i, *^j$ | <i>Relativo a las fibras de la sección. Índices de sumatoria</i> |
| $[*]^T$    | <i>Transpuesta de un vector o una matriz</i>                     |

|             |   |
|-------------|---|
| $[*]^L$     | <i>Relativo a la parte lineal de un vector o una matriz</i>                 |
| $[*]^{NL}$  | <i>Relativo a la parte no-lineal de un vector o una matriz.</i>             |
| $(*)^*$     | <i>Relativo a un estado auxiliar o iteración de prueba, no convergido..</i> |
| $(*)^{(n)}$ | <i>Relativo a una iteración (n) .</i>                                       |

#### *Superíndices a izquierda*

|                      |   |
|----------------------|---|
| $t^{(*)}$            | <i>Estado del material actual. Configuración geométrica inicial.</i>            |
| $t + \Delta t^{(*)}$ | <i>Estado del material luego al incremento. Configuración geométrica final.</i> |

#### *Símbolos especiales.*

|                   |  |
|-------------------|--|
| $\partial$        | <i>Incremento infinitésimo. Derivada de una variable de estado</i>                             |
| $\Delta$          | <i>Incremento finito arbitrario de una variable de estado</i>                                  |
| $\delta$          | <i>Incremento finito pequeño de una variable de estado. Variacional de un vector o matriz.</i> |
| $\widehat{(*)}$   | <i>Relativo a un paso secante entre dos estados conocidos</i>                                  |
| $\widetilde{(*)}$ | <i>Relativo a los parámetros del hormigón corregidos por confinamiento</i>                     |



# I. INTRODUCCIÓN

## I.1. MOTIVACIÓN

Debido a consideraciones económicas los edificios y otras construcciones de Ingeniería Civil deben ser diseñados para resistir movimientos sísmicos de gran intensidad utilizando la capacidad de disipar energía por deformación plástica de los materiales y por lo tanto admitiendo cierto nivel de daño en las estructuras.

Sin embargo, durante los sismos ocurridos en los últimos años, la *performance* de los edificios de hormigón armado ha sido significativamente diferente respecto del comportamiento esperado a partir del diseño sismo-resistente original. Esta diferencia puede atribuirse a muchos factores, pero principalmente se deben a la combinación entre la incertidumbre en la naturaleza de la excitación sísmica, la complejidad de la respuesta dinámica y las dificultades en predecir la respuesta cíclica inelástica de las estructuras de hormigón armado.

El diseño sismorresistente de las estructuras es, por lo tanto, una de las disciplinas donde resulta fundamental predecir adecuadamente el comportamiento real en el rango no lineal. Este comportamiento resulta particularmente difícil de predecir en el caso de las estructuras de hormigón armado, especialmente en los elementos estructurales sometidos a flexión compuesta, debido a que el hormigón armado es básicamente un material compuesto por fibras de materiales de comportamiento muy distinto: hormigón y acero.

Debido a esta circunstancia, los intentos de conseguir una adecuada modelación del comportamiento del hormigón armado utilizando elementos finitos basados en el comportamiento de la sección sin considerar el comportamiento individual del hormigón y el acero (a partir de relaciones momento-curvatura), han fracasado en forma sistemática, especialmente en el caso de acciones cíclicas como es el caso de la sollicitación sísmica.

Cuando se modela el comportamiento no lineal de estructuras de hormigón armado sometidas a acciones sísmicas con elementos de viga-columna estándares (elementos con articulaciones plásticas en sus extremos), implícitamente se asume que los elementos tienen un comportamiento elástico ante sollicitaciones axiales, y que no hay elongaciones o acortamientos axiales asociados con la fluencia en las articulaciones plásticas.

Claramente esta hipótesis no es correcta y, en el caso del análisis de la respuesta no lineal a la acción sísmica de edificios altos, se obtiene una respuesta teórica que puede estar muy alejada de la realidad. Por lo tanto, los modelos tradicionales contruidos a partir de la relación momento-curvatura deben ser reemplazados por otros que permitan introducir directamente en la modelación por elementos finitos el comportamiento no lineal de las distintas fibras que componen la sección. Dicha familia de elementos se conoce como “elementos finitos de fibra”.

## I.2. ANTECEDENTES

La cobertura de la literatura en modelación no-lineal de hormigón armado es vasta. La discusión está mayormente referida a elementos de viga-columna en lugar de elementos de viga, debido a que originalmente no se contaba con modelos satisfactorios para miembros de hormigón armado cargados axialmente.

Por conveniencia, los métodos usados para evaluar la respuesta dinámica no-lineal de estructuras de hormigón armado pueden ser agrupadas en tres categorías, correspondientes al grado de refinamiento del modelo:

### *Modelos globales (macro)*

La estructura completa de hormigón armado es modelada a partir de unos pocos grados de libertad. En muchos casos la estructura entera es representada por un sólo grado de libertad lateral, con características histeréticas representativas de la respuesta cíclica no-lineal de estructuras de hormigón armado. Tales modelos son particularmente útiles en el diseño preliminar para correlacionar variables de diseño con índices de respuesta global tales como la máxima demanda de ductilidad [34], [05]

### *Modelos de elementos finitos microscópicos (micro)*

En este planteo, miembros estructurales o nudos son discretizados en un número de elementos finitos bidimensionales o tridimensionales. Las soluciones han sido obtenidas para una variedad de miembros específicos, subensamblajes y estructuras. La no-linealidad constitutiva y geométrica es modelada al nivel de tensiones y deformaciones o distribuida sobre una región de elementos finitos. Tales modelos pueden proveer información útil concerniente al análisis por estado límite bajo excitaciones proporcionales y monotónicamente crecientes (*push over analysis*). Este planteo sin embargo, es aún prohibitivo respecto al costo computacional para modelar la respuesta cíclica o dinámica no-lineal de estructuras enteras.

### *Modelos de elementos discretos*

En este planteo la estructura entera es modelada como un ensamblaje de elementos finitos interconectados con capacidad de detectar ciertas características del comportamiento de miembros de hormigón armado. Dependiendo de la formulación, la no-linealidad constitutiva puede ser considerada al nivel global (“condensada” en el elemento estructural), o bien idealizada al nivel de secciones e interpolada al resto del elemento. Las formulaciones podrán ser clasificadas como físicas o bien fenomenológicas, dependiendo del

grado de idealización introducida en el modelo para representar el comportamiento. Los elementos formulados también ser clasificados como de Elementos no-linealidad condensada o bien como “Elementos De No-Linealidad Distribuida” dependiendo ahora del tipo de aproximaciones matemáticas que utilicen.

Muchos esfuerzos han sido invertidos en los últimos 30 años para el desarrollo de modelos de respuesta inelástica de elementos de hormigón armado sujetos a grandes deformaciones durante inversiones de carga cíclicas. Numerosos modelos han sido propuestos incorporando información a partir de investigaciones experimentales y observaciones in-situ del comportamiento histerético de elementos de hormigón armado. Un breve resumen de las técnicas comunes utilizadas para modelar miembros estructurales de hormigón armado pertenecientes a la última categoría (c) se presenta a continuación.

### **I.2.1. Modelos discretos de no-linealidad condensada**

Bajo excitaciones sísmicas, el comportamiento inelástico se concentra en los extremos de los miembros estructurales. Debido a esto, los primeros intentos de modelar el comportamiento fueron pensados como elementos de rótula plástica de longitud nula (*plastic hinges*) ubicados en los extremos del elemento. Dependiendo de la implementación, estos modelos se formulaban como un conjunto de resortes en serie o paralelo.

Los primeros trabajos al respecto se basaban en un sencillo modelo paralelo, formulado originalmente para problemas bilineales. El primer modelo de este tipo fue propuesto por Clough *et al* [07] en 1965. En este modelo (conocido como el “modelo de dos componentes”) se asumía a lo largo de elemento una relación bilineal de momento curvatura con endurecimiento por deformaciones. El modelo de viga era un modelo de dos componentes actuando en paralelo, en el cual uno de sus componentes tenía un comportamiento elástico-lineal y el otro una respuesta elasto-plástico ideal, con las deformaciones plásticas concentradas en las rótulas plásticas dispuestas en los extremos del elemento. Una de las desventajas de este modelo era la imposibilidad de tener en cuenta el deterioro de rigidez de los miembros de hormigón armado debido a las inversiones cíclicas de carga.

Para considerar el problema del deterioro de rigidez, Giberson [13] propuso otro modelo, llamado “modelo de un componente”, que consistía en dos resortes rotacionales ensamblados a los nodos extremos de un elemento perfectamente plástico, representando al elemento. Todas las deformaciones no-lineales del miembro estructural estaban concentradas (*lumped*) en los dos resortes rotacionales extremos. Esta era una simplificación hecha a partir de evidencia experimental la cual mostraba que las deformaciones inelásticas distribuidas sobre una región de longitud finita en los extremos del miembro estructural.

El modelo serie era más versátil respecto a la implementación de características mecánicas más complejas, las cuales podían ser especificadas por la adición de resortes adecuados, siendo este modelo más adecuado para las formulaciones fenomenológicas. En particular, el modelo de un componente poseía la ventaja de poder asignar a los resortes no-lineales cualquier tipo de ley que representara el comportamiento histerético. Este hecho, además de la simplicidad del modelo, hizo que fuera muy utilizado en modelos analíticos hasta finales de los años 90 [34][12].



Para describir el comportamiento histerético de los resortes no-lineales extremos del modelo de un componente, fueron desarrolladas diferentes leyes histeréticas. La primer ley de ese tipo fue propuesta por Clough [07]. La degradación de la rigidez del elemento en flexión y corte fue considerada por primera vez en un modelo más refinado de histéresis propuesto por Takeda *et al* [32]. En este modelo, el comportamiento monotónico se describía mediante una curva trilineal para el comportamiento virgen (*skeleton curve*), la cual tenía en cuenta la fisuración del hormigón y la fluencia del acero de las armaduras. El comportamiento histerético se describía a través de una serie de reglas para la descarga y la recarga, basadas en datos obtenidos de especímenes ensayados en un simulador de sismos.

Anderson *et al* [02] investigaron el efecto de diferentes modelos de histéresis en la respuesta dinámica de pórticos de hormigón armado, utilizando cuatro diferentes modelos para describir el comportamiento histerético de regiones críticas. El estudio mostró que la reducción en la rigidez de los miembros de hormigón armado debido a las deformaciones inelásticas, resultaba en un incremento de los desplazamientos relativos entre los diferentes pisos de la estructura, y por consiguiente, el efecto significativo de este incremento sobre la capacidad de carga de la estructura originado por las elevadas fuerzas axiales

Uno de los primeros modelos en considerar el fenómeno de deslizamiento de la armadura por falla en la adherencia sobre los nudos de pórticos (*bond slip*) puede verse en los trabajos de Otani [24]. En este modelo, cada viga o columna era dividida en dos elementos lineales, uno linealmente elástico y el otro inelástico, los cuales actuaban en paralelo. Un resorte inelástico rotacional se adjuntaba a los extremos de cada miembro y representaban las rotaciones fijas de la interfase entre la viga y la columna, debido al deslizamiento de las armaduras en los nudos de la estructura. El estudio de Otani reconoció por primera vez la importancia de las rotaciones fijas de los nudos (*fixed-end rotations*) en la predicción de la respuesta sísmica de los pórticos de hormigón armado [12].

En el contexto del diseño sísmico por resistencia, una de las cuestiones más importantes era la precisa determinación de la demanda de ductilidad rotacional en los elementos estructurales. En 1976, Bertero *et al* [04] revisaron las múltiples definiciones de los factores de ductilidad en el diseño sísmico por resistencia. El estudio apuntaba a determinar cuantos factores de ductilidad representados por un modelo de dos componentes debían ser modificados para coincidir con aquellos para una viga en la cual las deformaciones plásticas eran distribuidas a lo largo del miembro. Ya que el modelo de dos componentes subestimaba significativamente el comportamiento post-fluencia de un miembro, la predicción de la respuesta sísmica de la estructura no podría obtenerse correctamente [34].

La dependencia de la resistencia a flexión y la carga axial en flexión uniaxial o biaxial, ha sido explícitamente incluida en la modelación de vigas-columna y tabiques a partir de los trabajos de Powell *et al* [27]. En la mayoría de los casos la interacción M-N era modelada por la vía de una superficie de fluencia caracterizada por una regla de flujo, de acuerdo con la teoría clásica de la plasticidad. Típicamente, el comportamiento se asumía lineal dentro de la superficie de fluencia. Dentro de esta superficie, la rigidez axial y flexional se suponían independientes de las cargas en los extremos.

### **I.2.2. Ventajas y desventajas de las formulaciones condensadas**

El uso de una formulaciones discretas condensadas es esencialmente una simplificación en la idea de localizar el fenómeno global de no-linealidad, el cual se encuentra concentrado alrededor de las regiones cercanas a los nudos. El defecto de esta modelación ha sido reconocido en estudios de correlación en particular en modelos de muchos elementos en estructuras de pórticos-tabiques, la ventaja básica de las formulaciones condensadas radica en un modelo matemático compacto el cual reduce el costo computacional y mejora la estabilidad numérica. Sin embargo, la mayoría de los modelos condensados sobreestiman o simplifican ciertos aspectos del comportamiento histerético y por ello su aplicabilidad es limitada.

Debido a la falta de una representación mas refinada son necesarias a priori hipótesis restrictivas para definir las características del resorte. Estudios teóricos y paramétricos en vigas bajo cargas monotónicas han demostrado que hay una fuerte dependencia entre las características globales del modelo y la el patrón de carga y ductilidades impuestas. Ninguno de estos dos factores se espera que permanezcan constantes durante la historia de cargas y, para columnas, la fluctuación de carga axial acentúa este problema. A causa de esta dependencia, los daños previstos a nivel global, tanto como generalizaciones para los comportamientos locales pueden ser poco precisos, tal información sólo puede ser cuantificada a través de formulaciones refinadas.

Los modelos de plasticidad condensada fallan en representar el comportamiento de ablandamiento por deformaciones de elementos de hormigón armado. El ablandamiento por deformaciones es considerado de una manera simplificada como una reducción de la resistencia lateral global de una columna cargada axialmente, bajo un incremento monotónico en el desplazamiento lateral [34].

### **I.2.3. Modelos discretos de no-linealidad distribuida**

Algunas limitaciones de los modelos discretos de resortes extremos sólo pueden ser tenidas en cuenta a través del uso de modelos de no-linealidad distribuida (*distributed nonlinearity model*)

Los primeros modelos de plasticidad distribuida apuntaban a modelar el comportamiento no lineal de vigas a partir de rótulas plásticas de longitud fija en los extremos del miembro estructural, y casi siempre con regiones de transición hacia la zona elástica no fisurada del elemento, o bien interpolaciones polinómicas a través de los valores de cada sección y en el punto de inflexión.

El primer modelo que tuvo en cuenta la distribución de las deformaciones plásticas dentro del miembro estructural, fue introducido por Soleimani [30]. En este modelo se definía una zona de deformaciones inelásticas que crecía gradualmente desde la interfase viga-columna hacia el elemento estructural, como una función de la historia de cargas, mientras el resto de la viga permanecía elástica. En el modelo de Soleimani, las rotaciones fijas del nudo viga-columna eran modeladas a través de resortes rotacionales extremos, que dependían de la curvatura en el extremo de la sección correspondiente, a través de un factor de “longitud efectiva”, el cual permanecía constante durante toda la historia de cargas.

En los modelos de no-linealidad distribuida el comportamiento histerético es monitoreado sobre puntos previamente determinados a lo largo del elemento estructural, referidos en este contexto como secciones de control, y siendo equivalentes a los puntos de Gauss en un contexto de elementos finitos clásico.

Para vigas-columna con carga axial variable, donde la ubicación de los puntos de inflexión y de las rótulas plásticas variaba según la historia de cargas, este planteo ha sido generalizado a interpolaciones sobre todas las secciones de control. En su estudio sobre la respuesta no-lineal de pórticos rectangulares planos y tabiques acoplados, Keshavarian *et al* [16] extendieron el modelo de plasticidad distribuida propuesto por Soleimani a elementos de columna. La rigidez del elemento era linearizada al comienzo de cada paso de carga. Cualquier no-linealidad que ocurriera durante el incremento de carga no era tomada en cuenta y las resultantes fuerzas desbalanceadas eran despreciadas

En contraste con los modelos condensados, la no-linealidad constitutiva es modelada al nivel de secciones, generalmente a partir de relaciones entre momento-curvatura. Las deformaciones internas y las tensiones son las incógnitas principales del modelo, obtenidas por adecuadas interpolaciones matemáticas a partir de las deformaciones (desplazamientos) globales del miembro estructural. La fisuración es considerada como sobre una determinada región, en lugar de ser tratada explícitamente.

Las ecuaciones constitutivas de las secciones se pueden formular a partir de los lineamientos de la plasticidad clásica, o bien definir explícitamente partir de la discretización de la sección en fibras (*spread non linearity fiber models*) Para esta última formulación es habitual considerar la hipótesis de las secciones planas y de este modo, las deformaciones entre secciones resultan lineales, sin considerar la no-linealidad geométrica.

Formulaciones más recientes proponen modelos en los cuales se subdivide al elemento de viga-columna en un número de elementos de longitud finita, logrando de este modo una interpolación de orden superior para deformaciones internas y flexibilidades. A partir del uso de técnicas de condensación estática, estos modelos de flexibilidad distribuida, equivalentes a modelos de múltiples resortes localizados en cada sección, se reducen a un elemento de viga-columna simple.

Matemáticamente, tales formulaciones suponen a los desplazamientos de los resortes (deformación y curvatura), como las variables principales y asumen propiedades uniformes entre secciones. En estos modelos, secciones y resortes tiene representación equivalente, de este modo un alto grado de refinamiento es necesario para aproximar la plastificación en las regiones críticas haciendo de tales modelos computacionalmente ineficientes. Las formulaciones tradicionales basadas en rigideces, en lugar de flexibilidades, han sido incapaces de seguir el comportamiento del elemento cerca de la falla ya sea al nivel de discretización de secciones o bien del elemento.

Una representación mejorada de las deformaciones internas (comparada con los modelos multi-resorte anteriores) se obtuvo en [21] a partir de la aproximación numérica combinada de deformaciones de la sección (las incógnitas del problema), juntamente con las flexibilidades de cada sección, interpoladas sobre algunas secciones previamente elegidas como secciones de control. La variación de flexibilidad a lo largo del elemento, generalmente se asume como lineal a trazos siendo esta interpolación matemáticamente equivalente a

considerar una variación hiperbólica de la rigidez. Esta mejora en precisión, comparada con el modelo de múltiples resortes mencionado, hizo de este planteo computacionalmente atractivo. Unas pocas secciones necesitan ser definidas, de este modo el número de estados incógnita de cada fibra para controlar y almacenar es menor que en los modelos de fibras con interpolación de rigideces. La precisión de los esquemas de flexibilidad variable depende mayormente de las funciones de forma que definen las deformaciones incógnita de las secciones, como una función de los desplazamientos extremos y rotaciones de la columna. Como se mencionó arriba, polinomios cúbicos tradicionales de viga han sido utilizados en la mayoría de las formulaciones.

Una mejora desde el punto de vista numérico fue introducida en [19] por la adopción de funciones de forma variable, las cuales eran continuamente actualizadas consistentemente con la distribución de la fluencia interna en cualquier instante. La formulación original fue pensada para modelar elementos de acero en lugar de columnas de hormigón armado, para los cuales la no-linealidad geométrica gobernaba el problema.

#### **1.2.4. Ventajas y desventajas de las formulaciones basadas en flexibilidades**

La principal dificultad con los modelos basados en flexibilidades es su implementación sobre un programa de elementos finitos. Los programas existentes están basados en el método de los desplazamientos del análisis estructural, también llamado método de las rigideces. Las subrutinas asociadas a los elementos reciben como datos de entrada desplazamientos nodales y devuelven como dato de salida fuerzas elementales. El control de la convergencia en estos programas se efectúa en general, a partir del control de fuerzas. Los métodos de control de fuerzas, como se verá luego, fallan en obtener la respuesta global más allá de los puntos críticos cuando el problema no-lineal tiene un comportamiento en ablandamiento.

En este contexto, la ventaja principal de los modelos basados en flexibilidades radica en que son esencialmente métodos de control de desplazamientos y permiten obtener directamente la respuesta global “más allá” de los puntos críticos. Los modelos basados en flexibilidades no tienen un procedimiento claro y confiable para ser implementado en un programa de elementos finitos de propósitos generales (ANSYS, DIANA, COSMOS/M, NONSAP). Algunas de las formulaciones existentes derivan en violaciones de las hipótesis de equilibrio iniciales, las cuales necesitan correcciones *ad hoc* que no necesariamente implican problemas numéricos serios [31].

### I.3. OBJETIVOS

El objetivo general del presente trabajo consiste en formular un modelo analítico y numérico que permita predecir razonablemente la respuesta en el régimen no-lineal de estructuras de pórticos planos de hormigón armado o acero, sometidos a grandes ciclos de carga y descarga. Para cumplir con estos requerimientos, se plantean cuatro etapas básicas.

- Formular un nuevo elemento finito de viga-columna diseñado específicamente para el análisis no-lineal de estructuras de pórticos planos sometidas a grandes inversiones de cargas, y basado en la interpolación de desplazamientos (rigideces), para poder ser implementado sobre cualquier plataforma o programa comercial de elementos finitos.
- Formular un modelo analítico para el comportamiento histerético de secciones de hormigón armado a partir de las ecuaciones constitutivas y los algoritmos de retorno de las fibras de hormigón y las fibras correspondientes a las barras de acero. La discretización en fibras de hormigón y acero de los puntos de Gauss (secciones de control en los antiguos modelos) define a esta formulación según un tipo particular de elementos finitos llamados *elementos finitos de fibra*.
- Implementar una estrategia de solución numérica basada en el control de deformaciones a nivel de fibras para la no-linealidad del material, y en el control de fuerzas a nivel elemental para la no-linealidad geométrica.
- Implementar el elemento de viga no-lineal, los algoritmos de retorno del hormigón armado y las estrategias de evento-a-evento sobre un programa de elementos finitos específicamente diseñado para el análisis no-lineal de estructuras de pórticos hormigón armado y acero. Luego, obtener resultados numéricos para un problema modelo y comparar estos resultados con aquellos obtenidos en ensayos físicos y numéricos de la bibliografía.

## I.4. ORGANIZACIÓN

El estudio está organizado en un capítulo introductorio, cuatro capítulos de formulaciones y un último capítulo de aplicaciones, conclusiones y recomendaciones. El trabajo está documentado con 1122 fórmulas y 63 figuras.

### *Capítulo I - Introducción*

Este capítulo trata principalmente sobre los modelos numéricos discretos para el análisis no-lineal de estructuras de hormigón armado en el régimen no-lineal. Se revisan algunas características de las diferentes formulaciones y se plantea finalmente, los objetivos y el alcance del presente estudio, juntamente con la notación empleada y la organización del trabajo aquí expuesta.

### *Capítulo II: Cinemática. Formulación de un elemento de Viga-Columna no-lineal*

Este capítulo tiene como objetivo desarrollar la formulación analítica de la cinemática de un elemento finito de viga-columna y la formulación numérica de las funciones de interpolación del campo de desplazamientos.

En primer lugar y con el fin de ilustrar la mayoría de los conceptos que se utilizarán en el presente trabajo, se formula un problema elemental de un grado de libertad geoméricamente no-lineal. A partir de una solución lineal en desplazamientos del problema basada en la teoría lineal de las estructuras, se generalizan las hipótesis hacia la consideración de los grandes desplazamientos y grandes deformaciones. Luego, se desarrollan los conceptos necesarios para obtener la solución numérica del problema no-lineal. Se formulan las dos estrategias fundamentales de solución: el control de desplazamientos y el control de fuerzas. Partiendo de la ecuación del equilibrio, se plantea el concepto de fuerza desbalanceada y a partir de una aproximación de Taylor se exponen los dos esquemas básicos de solución de una ecuación no-lineal: una solución incremental (método de Euler) y una solución iterativa (método de Newton-Raphson).

Se revisa la hipótesis de linealidad de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos utilizando el teorema de Taylor. Luego se extienden estas hipótesis para la obtención de una medida de deformación finita. Por último, se revisan los conceptos de equilibrio en la posición deformada y la linearización del equilibrio a partir de la matriz tangente del problema.

En la segunda parte se plantea la teoría clásica de flexión de vigas esbeltas para luego extenderla a vigas a flexión compuesta. Se extiende la formulación a los elementos en los

cuales el esfuerzo de corte tiene efectos significativos en las deformaciones y se postulan las hipótesis de la teoría de vigas de Timoshenko.

Se introducen funciones de interpolación hermíticas con continuidad de clase C1 para los desplazamientos transversales y sus derivadas en elementos de dos nodos. Luego se presenta una formulación jerárquica de las funciones de forma en la interpolación de los desplazamientos longitudinales.

El problema de la interpolación de las deformaciones por corte obliga a una formulación de funciones de forma basadas en el equilibrio consistentes con la formulación con continuidad de clase C1 de los desplazamientos transversales. Este planteo difiere de la formulación clásica de Timoshenko, basada en una interpolación de las deformaciones por corte independiente de los desplazamientos transversales (a través de funciones de forma con continuidad de clase C0) y de los procedimientos de integración reducida, de modo tal de evitar el problema de bloqueo por corte que producen este tipo de formulaciones.

En la formulación de corte propuesta produce un acoplamiento entre la interpolación de los esfuerzos transversales y longitudinales. Este hecho obliga a reformular las funciones de forma del planteo hermítico obteniéndose un conjunto de funciones de forma denominadas funciones de forma ampliadas.

Finalmente, se plantea la aproximación numérica del campo de desplazamientos y de deformaciones del elemento de viga-columna, a partir de las matrices derivadas de las funciones de forma.

### *Capítulo III: Comportamiento de los materiales. Modelación numérica del hormigón armado*

En el capítulo se formulan las ecuaciones constitutivas de una sección de hormigón armado confinada por estribos, sometida a incrementos finitos de carga y descarga.

En la primera parte se postulan las hipótesis básicas para la formulación de las ecuaciones constitutivas de una sección de hormigón armado. Se considera que las secciones de hormigón armado se pueden discretizar mediante un número finito de fibras con características geométricas y mecánicas equivalentes al material de la sección diferencial analizada. Las ecuaciones constitutivas del hormigón confinado y las barras de acero se desarrollan para fibras sometidas exclusivamente a estados uniaxiales de tracción y compresión.

En la segunda parte del capítulo se formulan las relaciones constitutivas de las fibras de hormigón confinado y de las barras de acero. En primer lugar, se establecen las relaciones entre tensiones y deformaciones totales como caso particular de fibras sometidas a programas de carga monotónicos. Para el hormigón confinado se utiliza el modelo fenomenológico de Scott *et al* [28] y para las barras de acero se emplea un modelo bilineal convencional.

Luego, se formulan algunos conceptos de la teoría de la plasticidad unidimensional, como las reglas de flujo, los criterios de fluencia, la deformación plástica y el endurecimiento por deformaciones. Se plantea el concepto de endurecimiento por deformación isotrópico para el acero, para luego extenderlo al fenómeno del efecto Bauschinger y un modelo constitutivo sencillo de endurecimiento cinemático.

Las ecuaciones constitutivas del hormigón confinado y las barras de acero se desarrollan para fibras sometidas exclusivamente a estados uniaxiales de tensión. El efecto triaxial del confinamiento en las secciones de hormigón armado armadas con estribos se considera únicamente a partir de un sencillo modelo fenomenológico. El fenómeno del daño del hormigón sometido a ciclos de carga y descarga también se considera de manera indirecta a partir de un modelo fenomenológico.

La tercera y ultima parte del capítulo es la formulación numérica de los modelos constitutivos del acero y hormigón. En esta sección se definen las ecuaciones incrementales de los algoritmos de retorno para ambos materiales.

El modelo numérico para las secciones de hormigón armado propuesto, considera adherencia perfecta entre las fibras. No se consideran los fenómenos de deslizamiento (*sliding*) entre fibras o arrancamiento de barras (*pullout*) Tampoco se considera la falla por inestabilidad al equilibrio (pandeo) local de las mismas.

La implementación y validación numérica de dichos algoritmos se verifica en el capítulo VI.1

#### *Capítulo IV: Formulación del equilibrio*

En est capítulo se trata sobre la formulación del equilibrio del problema generalizado de elementos de barra. Se plantea una formulación débil del equilibrio a partir de una aproximación del campo de desplazamientos del elemento. Este capítulo generaliza los conceptos vistos en la primera parte para el problema elemental a un sistema de  $n$ -grados de libertad.

En la primera parte se plantean los conceptos de esfuerzos internos y se obtiene una matriz secante elastoplástica de la sección, formulada a partir de los parámetros de estado, que resultan de integrar la no-linealidad del material en una única variable de estado asociada a la sección o punto de Gauss.

La segunda parte del capítulo plantea el principio de los trabajos virtuales. A partir de éste se plantean las expresiones del trabajo interno de deformación y el trabajo externo de deformación. De la misma manera, las ecuaciones del trabajo externo de deformación derivan en la interpolación de la resultante de cargas nodales consistentes. Finalmente, y a partir de las resultantes de fuerzas internas y externas, se plantea una formulación débil del equilibrio partiendo de la nulidad del trabajo total de deformación.

En la tercer parte del capítulo se aplican los procedimientos de linealización de la ecuación de equilibrio, a partir de los procedimientos desarrollados en el capítulo II.2 para el problema elemental. Planteando la nulidad de la fuerza desbalanceada a partir de una configuración inicial conocida se formula la expresión de la matriz tangente del problema del mismo modo que en le problema elemental del capítulo I: como la derivada de las fuerzas internas respecto de los desplazamientos.

#### *Capítulo V: Actualización de Estado. Implementación numérica*

El capítulo V plantea una serie de conceptos y procedimientos numéricos para la implementación del elemento de viga propuesto.



En primer lugar se repasan los conceptos de integración numérica a partir de fórmulas de cuadratura para esquemas cerrados y abiertos. Se estudian las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes, Gauss y Gauss-Lobatto. Luego se integran numéricamente las variables de estado del elemento como la resultante de esfuerzos internos, la resultante de fuerzas internas y externas, la matriz secante elastoplástica y finalmente, la matriz tangente del problema, a partir de fórmulas de cuadratura generales. Se establece un particular interés en el esquema de Gauss-Lobatto por incluir éste los valores en los extremos del intervalo y una precisión similar a la fórmula de Gauss.

En la segunda parte del capítulo se formulan los procedimientos iterativos necesarios para la resolución del problema geoméricamente no-lineal de múltiples grados de libertad. La solución de la ecuación de equilibrio no-lineal se obtiene a partir de linealizar la ecuación de equilibrio a partir de una iteración anterior, lo que equivale esencialmente a un *proceso iterativo a carga exterior constante*.

En la tercera parte del capítulo se establece una estrategia de solución para los problemas de no-linealidad del material, a partir del control del tamaño del paso denominada evento-a-evento (*event-to-event strategy*). El método consiste en determinar mediante una serie de algoritmos los máximos incrementos de deformaciones de cada fibra de manera tal de mantener una actualización secante del estado de tensiones mediante las matrices definidas para tal efecto. Si bien la estrategia evento-a-evento es un método de control de deformaciones (desplazamientos) a nivel de fibra, se extiende su formulación como una estrategia de control de fuerzas a partir de la matriz secante elastoplástica de la sección.

Finalmente, se establece el algoritmo principal del programa de elementos finitos que permite determinar completamente la trayectoria de carga-desplazamiento del problema generalizado a partir de las estrategias incrementales e iterativas planteadas anteriormente.

Con este punto se considera cumplido el objetivo principal del presente modelo: obtener la respuesta numérica de una estructura de hormigón armado sometida a ciclos de desplazamientos finitos de carga y descarga.

### *Capítulo VI: Validación numérica*

En éste capítulo se presentan algunos ejemplos del uso del modelo propuesto en la simulación del comportamiento histerético de elementos estructurales. Para la determinación de resultados, el elemento fue implementado en un programa de elementos finitos desarrollado específicamente para problemas no-lineales de estructuras de barras planas de hormigón armado, denominado FEARCS- 1D. La descripción de los diferentes módulos y subrutinas del programa, como así también la estructura de entrada y salida de datos se pueden ver en la referencia [33]. Finalmente, son presentadas las conclusiones sobre los resultados obtenidos.



## **II. CINEMÁTICA. FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO DE VIGA- COLUMNA NO-LINEAL**



## II.1. INTRODUCCIÓN A LA NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA

### II.1.1. La formulación lineal del problema

Para ilustrar la mayoría de los conceptos que se utilizarán en el presente trabajo, se formula analíticamente un problema elemental de un grado de libertad.

Sea una barra de sección transversal  $^oA$ , de longitud inicial  $^o l$  en su posición sin deformar y dispuesta de manera que indica la figura con un ángulo  $^o\theta$  respecto de la posición horizontal. El extremo inferior de la barra tiene restringido los desplazamientos en el plano y el extremo superior únicamente admite desplazamientos en dirección vertical.

La pieza tiene aplicada en su apoyo superior una fuerza vertical de módulo  $R$  constante durante la aplicación. Luego de aplicada la carga, su punto de aplicación se desplaza a una distancia  $r$  y la barra se acorta hasta alcanzar una nueva longitud deformada  $^t l$ .

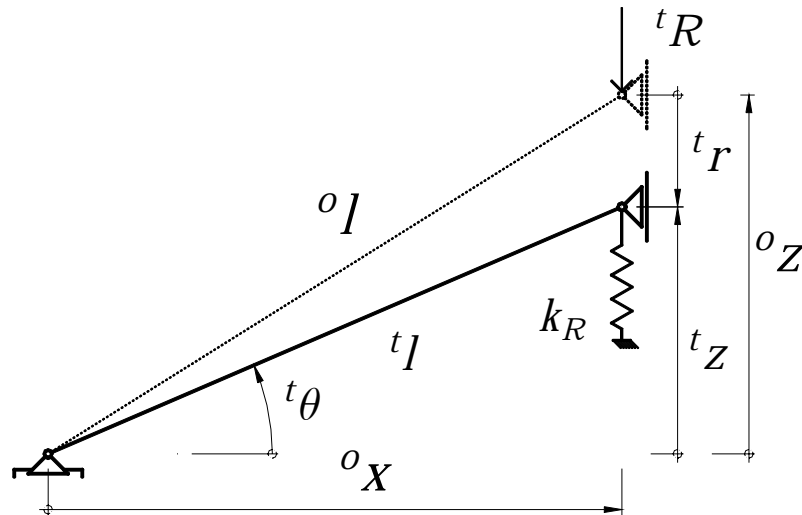


Fig.1. Datos del problema elemental de un grado de libertad. Configuración inicial deformada de la barra. La fuerza exterior está aplicada sobre la configuración inicial sin deformar.

La solución lineal del problema se obtiene planteando las hipótesis conocidas de la teoría lineal de elasticidad. En primer lugar, se establece el equilibrio entre las fuerzas externas e internas en la posición inicial de la barra (no deformada); en este caso se asume a la fuerza exterior actuando sobre el punto de aplicación de coordenada  $^o Z$  (ver Fig.1)

$${}^tR \approx {}^oN \cdot \sin({}^o\theta) + k_R \cdot {}^tR \quad (\text{II.1})$$

El superíndice  $t$  establece un instante de referencia en el “tiempo” de la historia de cargas para el cual se analizan el estado de tensiones y deformaciones.

Para determinar el esfuerzo normal de la barra es necesario conocer las tensiones que actúan sobre su sección. En la consideración de pequeños desplazamientos (ver Fig.4) el alargamiento de la barra se puede obtener aproximadamente a partir de la proyección de la barra deformada sobre su dirección en la posición inicial, obteniéndose la siguiente expresión lineal:

$$\Delta l \approx {}^tR \cdot \frac{{}^oZ}{{}^oI} \quad (\text{II.2})$$

La deformación de la barra en equilibrio, puede determinarse a partir de una medida de la deformación. Existen varias formas de “medir” la deformación de una barra y cada una dependerá principalmente, de la magnitud de las deformaciones esperables del problema. Por el momento podemos determinar la deformación de la barra a partir de la definición de deformación más sencilla, relacionando la longitud final con la longitud inicial:

$${}^t\varepsilon = \frac{\Delta l}{{}^oI} = \frac{{}^tR}{{}^oI} \cdot \left( \frac{{}^oZ}{{}^oI} \right) \quad (\text{II.3})$$

Si la longitud final no es muy diferente a la longitud inicial de la barra, esta será una medida de deformación adecuada al problema que se analiza. Para que la longitud final sea similar a la longitud inicial, los desplazamientos deberán ser pequeños con relación a estas longitudes y se dice que el problema se basa en la hipótesis de pequeños desplazamientos.

Resta determinar el esfuerzo normal en la barra a partir a partir de la integración del estado de tensiones sobre el área de la sección. Como asumimos que la barra no se deformó, esta integral se puede evaluar sobre el área inicial  ${}^oA$ . Esta hipótesis es consistente con la consideración del equilibrio en la posición inicial, respecto de la dirección del vector esfuerzo normal.

$${}^tN \approx \int_{{}^oA} {}^t\sigma \cdot dA \approx {}^t\sigma \cdot {}^oA \quad (\text{II.4})$$

Para determinar el estado de tensiones resultante de la deformación deben utilizarse las ecuaciones constitutivas del material, es decir, debe estar establecida la relación entre las tensiones y las deformaciones de la barra.

Supongamos entonces que la barra está compuesta por un material elástico con una relación no-lineal entre las deformaciones y las tensiones dada por:

$$\sigma(\varepsilon) = E_o \cdot \varepsilon - B \cdot \varepsilon^2 \quad (\text{II.5})$$

En una consideración de pequeñas deformaciones es razonable aceptar una relación lineal con algún módulo secante del material. Este módulo secante dependerá naturalmente del rango de deformaciones del problema. En ese caso, se puede escribir:

$${}^t\sigma \approx \hat{E} \cdot {}^t\varepsilon \quad (\text{II.6})$$

Reemplazando en la ecuación de equilibrio, se obtiene una relación lineal de carga-desplazamientos:

$${}^tR^L \approx \frac{\hat{E} \cdot {}^oA}{{}^oI} \cdot \left( \frac{{}^oZ}{{}^oI} \right)^2 \cdot {}^t r + k_R \cdot {}^t r \quad (\text{II.7})$$

Esta relación secante será válida para el material no-lineal sometido a deformaciones acordes al módulo secante elegido. Si en la expresión (II.6) en lugar de utilizar el módulo secante, se utiliza el módulo tangente a algún punto de la trayectoria del material, la relación carga-desplazamiento es una relación instantánea y válida para pequeñas deformaciones.

Si las deformaciones asociadas al problema no son pequeñas o no tienen relación al rango de deformaciones para el que fue definido el módulo secante, el error en la obtención de las tensiones instantáneas  ${}^t\sigma$  será significativo y la hipótesis de pequeñas deformaciones dejará de tener validez.

Mediante este procedimiento<sup>1</sup>, es posible emplear todas las expresiones obtenidas para el análisis lineal, pero actualizando el estado de tensiones a partir del estado de deformaciones, con algún método incremental (ver III.1.6). Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación de equilibrio, se obtiene relación carga-desplazamientos resultante de una formulación lineal. La relación es una relación cuadrática con los desplazamientos, simplemente por ser un polinomio cuadrático la ecuación constitutiva del material.

$${}^tR^{MNLO} \approx \frac{E_o \cdot {}^oA}{{}^oI} \cdot \left( \frac{{}^oZ}{{}^oI} \right)^2 \cdot {}^t r - B \cdot {}^oA \cdot \left( \frac{{}^oZ}{{}^oI} \right)^3 \cdot \left( \frac{{}^t r}{{}^oI} \right)^2 + k_R \cdot {}^t r \quad (\text{II.8})$$

Si además de considerar la no-linealidad del material, se eliminan las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, se obtiene una solución no-lineal del problema generalizado que a continuación se desarrolla

### II.1.2. La formulación no-lineal del problema

En primer lugar, se asume como posición inicial de la barra cualquier configuración conocida previamente, a la que en adelante denominaremos *correspondiente al instante  $t$* , y que podrá ser la posición sin deformar ( $t = 0$ ) o bien a alguna configuración inicial obtenida, por ejemplo, a partir de un análisis lineal como el anterior. Si se encuentra en un estado equilibrado, o *cuasi-equilibrado* antes de la aplicación de las cargas, es válido escribir:

$${}^tR \approx {}^tN \cdot \sin({}^t\theta) + k_R \cdot {}^t r \quad (\text{II.9})$$

La aplicación de una fuerza exterior llevará a la barra a una nueva configuración deformada correspondiente al instante  $t + \Delta t$  y sobre la cual deberá plantearse la nueva ecuación de equilibrio:

---

<sup>1</sup> La generalización de esta formulación para problemas de la mecánica del continuo en donde se considera la no-linealidad del material pero se mantiene la linealidad geométrica, se conoce en la bibliografía clásica con la sigla MNLO, del término inglés *Material Non Linear Only*. (Bathe. [03], Crisfield [09], Dvorkin [11])

$${}^{t+\Delta t}R = {}^{t+\Delta t}N \cdot \sin({}^{t+\Delta t}\theta) + k_R \cdot {}^{t+\Delta t}r \quad (\text{II.10})$$

La expresión (II.10) será válida para cualquier ángulo  ${}^{t+\Delta t}\theta$  (no tiene implícita ninguna hipótesis de pequeños desplazamientos) y éste quedará determinado a partir de la relación (II.11).

$$\sin({}^{t+\Delta t}\theta) = \frac{{}^{t+\Delta t}Z}{{}^{t+\Delta t}l} \quad (\text{II.11})$$

El alargamiento (o acortamiento) de la barra se determina directamente según su definición, planteando la diferencia entre la posición inicial y la posición deformada luego de aplicada la carga en el instante  $t + \Delta t$  (Fig.2)

$$\Delta {}^t l = {}^{t+\Delta t}l - {}^t l \quad (\text{II.12})$$

La figura siguiente muestra la diferencia entre la consideración de pequeños y grandes desplazamientos, a partir de la medida del alargamiento de la barra:

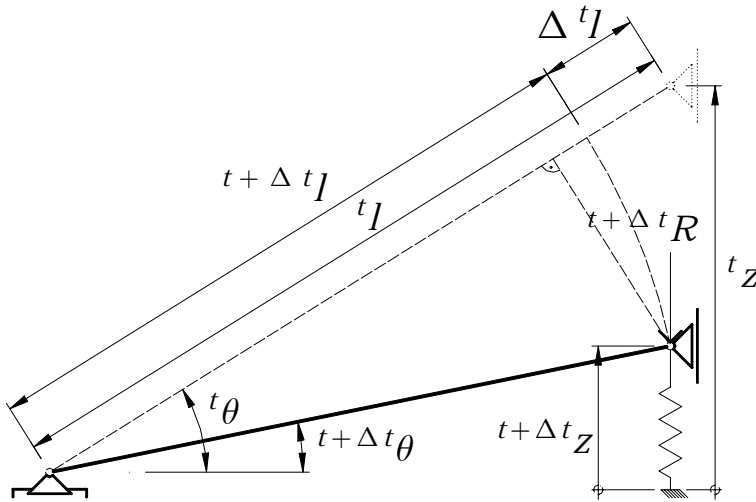


Fig.2. Equilibrio en la posición deformada de la barra.

La longitud “instantánea” de la barra se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras, a partir de las coordenadas que definen la geometría de la misma. Es importante destacar que si bien toda la geometría de la barra quedó determinada a partir de las coordenadas del punto de aplicación de la carga (ya que el apoyo inferior es un punto fijo), esta relación seguiría siendo válida con cualquier condición de borde del problema.

$${}^{t+\Delta t}l = \sqrt{{}^o x^2 + {}^{t+\Delta t}Z^2} \quad (\text{II.13})$$

La coordenada  ${}^{t+\Delta t}Z$  en cualquier instante de tiempo estará actualizada por la ecuación incremental (II.14), con lo cual se estaría utilizando un sistema de coordenadas “actualizado” a la posición deformada.

$${}^{t+\Delta t}Z = {}^o Z + {}^{t+\Delta t}r \quad (\text{II.14})$$



La generalización de este concepto a un sistema de  $n$  grados de libertad se define en IV.3.3. Planteando la diferencia y efectuando algunas simplificaciones se obtiene una medida de los alargamientos, la cual podríamos definir como “verdadera” o “exacta”, ya que la obtención de la misma no implicó aproximación alguna:

$$\Delta^t l = {}^o l \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{{}^{t+\Delta t} R}{{}^o l} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{{}^t R}{{}^o l} \right)^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

La deformación de la barra, medida respecto de su configuración inicial, se puede expresar con alguna medida de deformación. En particular, la medida de deformación más usual en ingeniería establece la relación entre la longitud final y la inicial:

$${}^{t+\Delta t} \varepsilon = \frac{\Delta^t l}{{}^t l} \quad (\text{II.16})$$

Esta medida de la deformación es una de muchas medidas de deformación que pueden utilizarse para los problemas de grandes desplazamientos. Conocido el estado de deformaciones de la barra, la determinación de las tensiones se puede realizar de manera directa ya que existe una formulación explícita que relaciona las tensiones con las deformaciones<sup>2</sup>.

$${}^{t+\Delta t} \sigma = \sigma({}^{t+\Delta t} \varepsilon) = E_o \cdot {}^{t+\Delta t} \varepsilon - B \cdot {}^{t+\Delta t} \varepsilon^2 \quad (\text{II.17})$$

La resultante de esfuerzos internos se obtiene finalmente, integrando el volumen de tensiones sobre la sección en la cual se planteó el equilibrio de la barra.

$${}^{t+\Delta t} N = \int_{{}^{t+\Delta t} A} {}^{t+\Delta t} \sigma \cdot dA \quad (\text{II.18})$$

Reemplazando las condiciones cinemáticas y mecánicas en la ecuación de equilibrio del problema, se obtiene la relación carga-desplazamiento buscada, para un estado en equilibrio con la nueva carga exterior del instante  $t + \Delta t$ . Planteando la ecuación de equilibrio en función de la coordenada actualizada  ${}^{t+\Delta t} Z$  se tiene:

$${}^{t+\Delta t} R = {}^t A \cdot {}^{t+\Delta t} Z \cdot \left( \sqrt{{}^o X^2 + {}^{t+\Delta t} Z^2} - {}^o l \right) \cdot \left( \frac{(B + E_o)}{{}^o l \cdot \sqrt{{}^o X^2 + {}^{t+\Delta t} Z^2}} - \frac{B}{{}^o l^2} \right) + k_R \cdot {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{II.19})$$

El procedimiento visto permitió plantear el problema en función de un sólo parámetro<sup>3</sup> o incógnita: el desplazamiento vertical. En la sección IV.3 se generalizan estos mismos procedimientos a un problema no-lineal de  $n$ -grados de libertad.

---

<sup>2</sup> En general, esto sólo se da en los problemas de los sólidos elásticos. En problemas de plasticidad, la determinación del estado de tensiones dependerá no solamente de las deformaciones (de manera implícita o explícita) sino también de la historia de cargas de la sección en la forma  ${}^{t+\Delta t} \sigma = \sigma({}^{t+\Delta t} \varepsilon, {}^t \varepsilon, {}^t \varepsilon^p)$  (ver sección III.2)

<sup>3</sup> La incógnita principal del problema también se conoce en la bibliografía como *parámetro de discretización*, debido a que generalmente queda definido a partir de un procedimiento de discretización (como los elementos finitos) y será el objetivo buscado en los procedimientos numéricos de solución del capítulo V.

### II.1.3. Una solución numérica directa: el control de desplazamientos

La estrategia más obvia de solución para obtener una respuesta en carga-desplazamiento sería adoptar diferentes desplazamientos y a partir de éstos calcular la fuerza exterior correspondiente utilizando la expresión (II.19)

Esta estrategia de solución se conoce en la bibliografía como el control de desplazamientos (*displacement control*) y es posible aplicarla en los casos en que se conoce explícitamente la relación carga-desplazamiento. En sistemas de varios grados de libertad, este procedimiento no es trivial debido a que ya no basta con imponer un desplazamiento en un punto dado, sino que es ahora necesario definir un campo no arbitrario de desplazamientos sobre todos aquellos grados de libertad no restringidos, para poder obtener así la respuesta (fuerzas) de la estructura.

La otra estrategia posible de solución consiste en obtener el desplazamiento para cada valor de fuerza exterior dadas en un instante  $t$ . Esta tarea no parece ser de gran dificultad de no ser por hecho de que debería resolverse una ecuación no-lineal, a partir de donde se hace necesario la aplicación de los métodos del cálculo numérico, lo cual es el objeto de los párrafos siguientes.

### II.1.4. Una solución incremental: el control de fuerzas

Se trata entonces de obtener los desplazamientos a partir de las cargas exteriores aplicadas. La relación carga-desplazamiento completa se podrá obtener únicamente como resultado de un procedimiento incremental que determine los incrementos de desplazamiento correspondientes a los incrementos de las fuerzas exteriores, hecho por el cual a éstos métodos se los conoce en la bibliografía clásica como *métodos de control de fuerzas*.

El problema incremental básico consistirá en obtener el incremento de desplazamiento  $\Delta^t r$  resultante de la aplicación de un incremento en la carga exterior  $\Delta^t R$

$${}^{t+\Delta t}R = R({}^{t+\Delta t}r) \quad (\text{II.20})$$

Planteando a la fuerza exterior como una función de los desplazamientos según (II.20) es posible efectuar una aproximación de Taylor de 1º orden respecto del estado anterior de la forma:

$${}^{t+\Delta t}R \approx {}^tR + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)^t \cdot \Delta^t r \quad (\text{II.21})$$

Despejando de (II.21) se obtiene una ecuación iterativa de Newton-Raphson para los desplazamientos en función de una fuerza variable. La aplicación reiterada de (II.21) da origen a una sucesión que permite obtener el camino completo de carga-desplazamiento.

$${}^{t+\Delta t}r \approx {}^tr + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)^{-1} \cdot \Delta^t R \quad (\text{II.22})$$

Este método es conocido como el método de Euler y se obtiene a partir una linealización de Taylor alrededor del estado inicial, es decir que el procedimiento incremental es a fuerza

variable. La solución incremental para un estado  $t + \Delta t$  entonces, estará dada por (II.22) donde la tangente tiene por expresión:

$${}^t\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = k_R + \frac{{}^tA \cdot (2 \cdot B + E_o)}{{}^tI} - \frac{{}^tA \cdot (B + E_o) \cdot x_o^2}{{}^tI^3} + \frac{{}^tA \cdot B \cdot \left( ({}^tI \cdot {}^tZ)^2 - ({}^tI^2 + {}^tZ^2)^2 \right)}{{}^tI^2 \cdot I_o^2} \quad (\text{II.23})$$

La solución incremental determinada por la expresión anterior se muestra en la figura Fig.3. Como puede observarse en la misma, la solución incremental obtenida se “aleja” de la verdadera curva de equilibrio. La diferencia entre ambas soluciones es un desbalance de fuerzas entre la resultante de fuerzas y la fuerza exterior aplicada. La violación a la ecuación de equilibrio se demuestra fácilmente sustituyendo el desplazamiento y el esfuerzo interno del paso  $n$ , dentro de la ecuación de equilibrio (II.9) en cada paso.

### II.1.5. Una solución iterativa. el método de Newton-Raphson

La ecuación fundamental del problema, plantea el equilibrio de las fuerzas externas e internas actuando sobre la posición deformada de la barra:

$${}^{t+\Delta t}\Psi = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = ! 0 \quad (\text{II.24})$$

Según lo visto en los párrafos anteriores, la expresión (II.24) es una ecuación no-lineal en  ${}^tr$  y es necesario recurrir a algún método numérico para resolverla. Mediante alguna solución iterativa se puede establecer el cumplimiento aproximado del balance de fuerzas para cierta iteración  $(i + 1)$ :

$$\Psi^{(i+1)} \approx 0 \quad (\text{II.25})$$

La solución buscada es aquella que hace nula a la expresión (II.25) A partir de esta definición, se busca en alguna iteración  $i$ -ésima el cumplimiento aproximado de la condición anterior. Nuevamente, es posible aplicar una linealización de Taylor alrededor de la última iteración conocida  $(i)$ .

$$\Psi^{(i+1)} \approx \Psi^{(i)} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^{(i)} \cdot \delta r^{(i)} \quad (\text{II.26})$$

La variable incremental  $\delta r^{(i)}$  tiene el mismo significado que el incremento finito  $\Delta {}^tr$  aunque tiene notación diferente debido a que ésta ahora está referida a incrementos finitos cada vez más “pequeños”, iterando sobre un mismo nivel de cargas, para evitar confusiones con los incrementos finitos totales.

$$r^{(i+1)} \approx r^{(i)} - \Psi^{(i)} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^{(i)} \right]^{-1} \quad (\text{II.27})$$

El proceso iterativo continúa hasta que la fuerza desbalanceada es menor a alguna tolerancia especificada previamente. La derivada de la fuerza desbalanceada tiene por expresión:

$${}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^{(i)} = \frac{\partial}{\partial r}({}^{t+\Delta t}R - F({}^{t+\Delta t}r))^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\left(-\frac{\partial F}{\partial r}\right)^{(i)} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^{(i)} &= k_R + \frac{{}^{t+\Delta t}A^{(i)} \cdot (2 \cdot B + E_o)}{{}^{t+\Delta t}I^{(i)}} - \frac{{}^{t+\Delta t}A^{(i)} \cdot (B + E_o) \cdot x_o^2}{({}^{t+\Delta t}I^{(i)})^3} + \dots \\ &\dots + \frac{{}^{t+\Delta t}A^{(i)} \cdot B \cdot \left( ({}^{t+\Delta t}I^{(i)} \cdot {}^{t+\Delta t}Z^{(i)})^2 - \left( ({}^{t+\Delta t}I^{(i)})^2 + ({}^{t+\Delta t}Z^{(i)})^2 \right)^2 \right)}{({}^{t+\Delta t}I^{(i)})^2 \cdot I_o^2} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Si se itera hasta alcanzar el equilibrio en la posición correspondiente al instante  $t + \Delta t$ , es posible asumir como valor de arranque al desplazamiento correspondiente al estado anterior, supuesto en equilibrio o *cuasi-equilibrio*:

$${}^{t+\Delta t}r^{(i=0)} \approx {}^t r \quad (\text{II.30})$$

La evaluación de (II.29) en el origen del proceso incremental, se efectúa según (II.30) en la última posición conocida y en este estado su valor coincide con la expresión obtenida en (II.23)

$${}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^{(0)} = k_R + \frac{{}^t A \cdot (2 \cdot B + E_o)}{{}^t I} - \frac{{}^t A \cdot (B + E_o) \cdot x_o^2}{({}^t I)^3} + \frac{{}^t A \cdot B \cdot \left( ({}^t I \cdot {}^t Z)^2 - \left( ({}^t I)^2 + ({}^t Z)^2 \right)^2 \right)}{({}^t I)^2 \cdot I_o^2} \quad (\text{II.31})$$

Este método iterativo se conoce como el método de Newton-Raphson y es por otra parte, el método numérico más popular en la resolución de ecuaciones no-lineales. La generalización de este procedimiento numérico para sistemas de múltiples grados de libertad se analiza en detalle en la sección V.

La diferencia fundamental entre el procedimiento incremental de II.1.4 y el procedimiento iterativo de Newton-Raphson radica en que los términos  $\delta r^{(i)}$  son *cambios iterativos al mismo nivel de cargas*, es decir que no existe un incremento de carga exterior en cada paso de la iteración, sino una disminución de la fuerza desbalanceada del paso

Mediante este método sólo es posible obtener un punto de la curva carga-desplazamiento asociado al estado desequilibrado para el cual se itera. Esta diferencia obliga a utilizar este método en combinación con un método incremental para poder determinar la curva completa de carga-desplazamiento, como se verá en el párrafo siguiente.

Debe observarse tanto en la expresión incremental (II.22) como en la expresión iterativa (II.27) la existencia de la función inversa de la derivada, lo cual es una característica de estos métodos y pone en evidencia la imposibilidad de superar los puntos de derivada nula (tangente horizontal en el caso unidimensional)

### II.1.6. Formulación de la matriz tangente

En el análisis lineal de estructuras, tanto la expresión (II.23) como la expresión (II.29) son equivalentes a una matriz de rigidez, debido a que relacionan fuerzas con desplazamientos. En un análisis no-lineal, estas derivadas cumplen el rol de la matriz de rigidez clásica de análisis lineal de estructuras, pero relacionando ahora pequeños cambios en la carga con pequeños cambios en los desplazamientos.

La derivada obtenida (II.29) tiene la misma formulación que la obtenida en (II.23) a excepción del signo, sin embargo, existe una diferencia conceptual entre ambas: En el planteo incremental, la matriz tangente relaciona cambios en las fuerzas exteriores con incrementos en los desplazamientos. A esta matriz se la denomina habitualmente matriz de rigidez del problema.

$${}^{t+\Delta t}K_R = {}^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right) \quad (\text{II.32})$$

En el planteo iterativo en cambio, la matriz tangente relaciona cambios en la fuerza desbalanceada con los cambios en el desplazamiento buscado, sobre el cual se itera. A esta matriz se la denomina matriz tangente del problema, definida en una forma más general:

$${}^{t+\Delta t}K_t = {}^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (\text{II.33})$$

Esta definición de matriz de rigidez tangente, permite entenderla como el primer término de una serie de Taylor aplicada sobre la ecuación del equilibrio alrededor del origen. Luego de efectuar la derivación y algunas substituciones, se obtiene:

$${}^tK_T = k_R + \frac{{}^tA \cdot (2 \cdot B + E_o)}{l_o} - \frac{{}^tA \cdot (B + E_o) \cdot x_o^2}{{}^tI^3} + \frac{{}^tA \cdot B \cdot \left( ({}^tI \cdot {}^tZ)^2 - ({}^tI^2 + {}^tZ^2)^2 \right)}{{}^tI^2 \cdot l_o^2} \quad (\text{II.34})$$

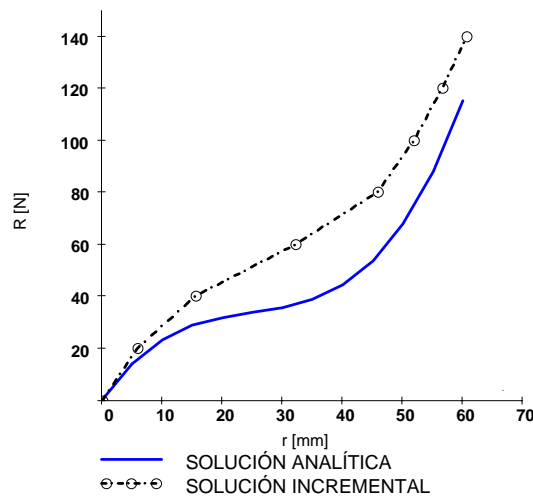


Fig.3. Relación carga-desplazamiento en la estructura del problema elemental, para una barra con las siguientes características:  $EA = 50 \cdot \text{MN}$ ,  $B = 0$ ,  $z_o = 25 \cdot \text{mm}$ ,  $l_o = 2500 \cdot \text{mm}$ ,

$$k_S = 1.35 \cdot \text{N/mm} \cdot (\text{Crisfield, M.A. [09]})$$

## II.2. EL TEOREMA DE TAYLOR

### II.2.1. Introducción

En el análisis de problemas lineales de la bibliografía clásica, es común ver una serie de simplificaciones en donde se aproxima por ejemplo, al seno de un ángulo con la tangente, al coseno con la unidad, a la tangente con el arco, etc. Estas simplificaciones se justifican mediante hipótesis denominadas de pequeños desplazamientos, las pequeñas deformaciones, la hipótesis de rigidez axil o la hipótesis de indeformabilidad de las barras, etc.

Todas estas simplificaciones pueden verse de un modo más general, como el resultado de una aplicación del teorema de Taylor, tanto a la formulación del equilibrio, como a las medidas de los desplazamientos y las deformaciones finitas. Este ejercicio permitirá luego extender los conceptos a sistemas de múltiples grados de libertad.

### II.2.2. La teoría de pequeños desplazamientos

En la teoría lineal de la elasticidad, es habitual asumir la hipótesis de los pequeños desplazamientos. Esta hipótesis considera a los desplazamientos en la estructura como infinitésimos de 1° orden y no debe confundirse con la hipótesis de pequeñas deformaciones, la cual se analiza en el párrafo siguiente.

La teoría de los pequeños desplazamientos es la aproximación en 1° orden de la formulación que relaciona los alargamientos finitos de la barra con los desplazamientos instantáneos, según su definición:

$$\Delta {}^t l = {}^{t+\Delta t} l - {}^t l \quad (\text{II.35})$$

En la consideración de pequeños desplazamientos el alargamiento de la barra se puede obtener aproximadamente a partir de la proyección de la barra deformada sobre su dirección en la posición “inicial”, obteniéndose la siguiente expresión conocida del análisis lineal de estructuras

$$\Delta l \approx {}^t r \cdot \frac{{}^o Z}{o l} \quad (\text{II.36})$$

La hipótesis de los pequeños desplazamientos se puede aplicar en otra posición de equilibrio que no sea necesariamente el origen, como por ejemplo, respecto de la última configuración conocida:

$$\Delta l \approx {}^t r \cdot \frac{{}^t Z}{{}^t l} \quad (\text{II.37})$$

La expresión (II.37) puede obtenerse también a partir de una aproximación de Taylor de 1° orden de la función alargamientos alrededor de alguna configuración conocida, digamos en el instante  $t$  :

$${}^{t+\Delta t}l \approx {}^tl + \left( \frac{\partial l}{\partial r} \right) \cdot ({}^{t+\Delta t}r - {}^tr) \quad (\text{II.38})$$

$${}^t \left( \frac{\partial l}{\partial r} \right) = \frac{({}^oZ + {}^tr)}{\sqrt{{}^oX^2 + ({}^oZ + {}^tr)^2}} = \frac{{}^tZ}{{}^tl} \quad (\text{II.39})$$

$$\Delta {}^tl \approx {}^{t+\Delta t}l - {}^tl \approx \frac{{}^tZ}{{}^tl} \cdot {}^tr \quad (\text{II.40})$$

En particular, si la posición “inicial” corresponde a la barra sin deformar, la expresión lineal (II.40) es la relación conocida del análisis lineal (II.36)

$$\Delta {}^ol \approx {}^tr \cdot \frac{{}^oZ}{{}^ol} \quad (\text{II.41})$$

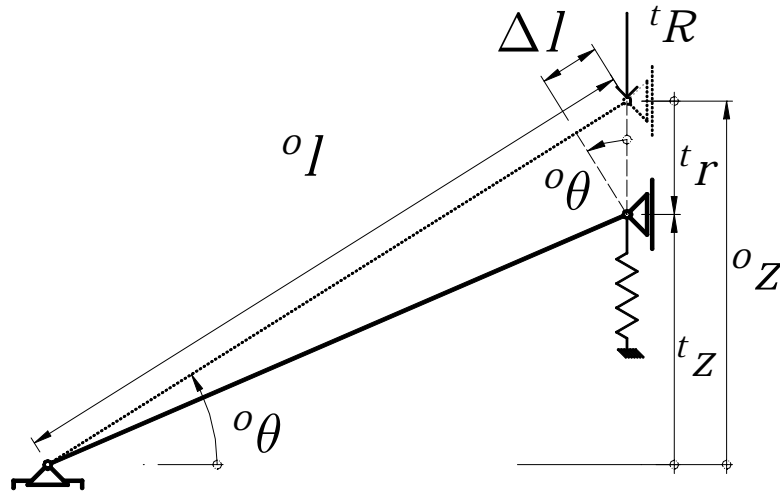


Fig.4. Equilibrio en la posición sin deformar de la barra. Aproximación de 1° orden del acortamiento de la barra en la posición deformada

### II.2.3. La teoría de las pequeñas deformaciones

La medida de deformación definida en (II.16) permite calcular la deformación de la barra a partir del alargamiento (acortamiento) finito de la misma respecto de su configuración “inicial”.

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon = \frac{\Delta {}^tl}{{}^tl} = \frac{{}^{t+\Delta t}l - {}^tl}{{}^tl} = \frac{{}^{t+\Delta t}l}{{}^tl} - 1 \quad (\text{II.42})$$

Esta medida de deformación no introduce ninguna aproximación por la que podemos definirla como deformación “verdadera” o “exacta”.

Si utilizamos la formulación lineal de pequeños desplazamientos (II.41) y calculamos la deformación de la barra según su definición en (II.16) , pero respecto de la configuración inicial sin deformar, se obtiene una medida de deformación lineal.

$${}^t\varepsilon^L \approx \frac{{}^t l - {}^o l}{{}^o l} \approx \frac{\Delta {}^o l}{{}^o l} \approx {}^t r \cdot \frac{{}^o z}{({}^o l)^2} \quad (\text{II.43})$$

Esta medida lineal de la deformación en particular se utiliza en problemas de pequeñas deformaciones y puede obtenerse como el primer término de una aproximación de Taylor sobre la definición de (II.16) únicamente alrededor del origen, es decir sobre la configuración inicial sin deformar. Aplicando la fórmula de Taylor sobre la definición de la medida de deformación se obtiene:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon \approx {}^t\varepsilon + \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \cdot ({}^{t+\Delta t}r - {}^t r) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \cdot ({}^{t+\Delta t}r - {}^t r)^2 \quad (\text{II.44})$$

Evaluando respecto de una configuración inicial sin deformar, se obtiene:

$${}^t\varepsilon \approx {}^o\varepsilon + \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \cdot ({}^t r - {}^o r) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \cdot ({}^t r - {}^o r)^2 \quad (\text{II.45})$$

Para la posición inicial se cumple que los alargamientos iniciales y los desplazamientos iniciales son nulos por definición

$${}^o\varepsilon = 0 \quad {}^o r = 0 \quad (\text{II.46})$$

Despreciando el término de orden superior, la derivada primera evaluada en el origen resulta en:

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) = \frac{1}{{}^o l} \cdot \frac{{}^o z}{{}^o l} \quad (\text{II.47})$$

La deformación de la barra linealizada respecto del origen resulta entonces en la utilizada en el análisis lineal:

$${}^t\varepsilon \approx \frac{1}{{}^o l} \cdot \frac{{}^o z}{{}^o l} \cdot {}^t r \quad (\text{II.48})$$

#### II.2.4. La medida de deformación de Green-Lagrange

El desarrollo de Taylor para la deformación instantánea de la barra, medida en su posición deformada, se puede expresar en una forma más general a partir de los desplazamientos longitudinales y transversales de la misma. Si se opera sobre los términos de la expresión (II.44) y se los evalúa en una configuración inicial  $t$ , se obtiene:

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) = \frac{\sin({}^t\theta)}{{}^t l} \quad (\text{II.49})$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) = \left( \frac{\cos({}^t\theta)}{{}^t l} \right)^2 \quad (\text{II.50})$$

La medida de deformación linealizada respecto del origen, queda determinada entonces como:



$${}^t\varepsilon \approx \frac{\sin({}^t\theta) \cdot {}^t r}{l} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\cos({}^t\theta) \cdot {}^t r}{l} \right)^2 \quad (\text{II.51})$$

Llevando al límite la longitud de la barra,  ${}^o l \rightarrow \partial x$  y llamando  $\partial u$  a los desplazamientos longitudinales y  $\partial w$  transversales se obtiene:

$${}^t\varepsilon \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{II.52})$$

Los desplazamientos longitudinales y transversales en el nuevo sistema local de coordenadas se pueden obtener a partir de la proyección del desplazamiento vertical  ${}^t r$  sobre un sistema de coordenadas local solidario<sup>4</sup> con la barra (Fig.5)

$$\partial u = \sin({}^t\theta) \cdot {}^t r \quad (\text{II.53})$$

$$\partial w = \cos({}^t\theta) \cdot {}^t r \quad (\text{II.54})$$

Esta expresión simplificada es una medida de deformación válida para grandes desplazamientos y se la conoce en la bibliografía como deformación de Green-Lagrange.

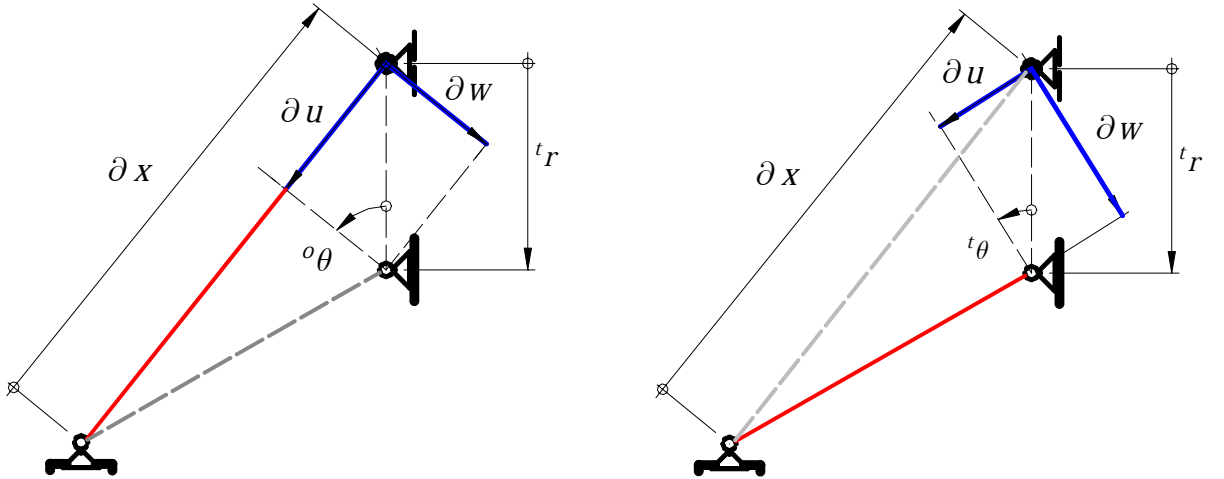


Fig.5. interpretación geométrica de la aproximación de 1º y 2º orden del acortamiento de la barra en la posición deformada. Deformación infinitesimal y deformación de Green Lagrange

### II.2.5. El equilibrio en la posición inicial

Si analizamos la ecuación de equilibrio del problema no-lineal y la comparamos con la ecuación (II.1) se puede observar que la expresión lineal del equilibrio corresponde al término al origen de una aproximación de Taylor de 1º orden de la ecuación de equilibrio no-lineal respecto del origen. En efecto, si se aplica la fórmula de Taylor respecto del origen, hasta el 1º orden de derivadas, se obtiene:

<sup>4</sup> La deformación longitudinal fue determinada sobre la barra que ha rotado, de manera que la dirección del vector de deformaciones está continuamente cambiando. Tales medidas de deformación pueden ser pensadas como relativas a un sistema de coordenadas que continuamente rota con la barra (Crisfield [09], Dvorkin [10]).

$${}^tR \approx {}^oR + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right) \cdot {}^tr \quad (\text{II.55})$$

Donde el término al origen  ${}^oR$  corresponde a (II.1)

$${}^oR = {}^oN \cdot \frac{{}^oZ}{oI} \quad (\text{II.56})$$

$${}^o \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right) = {}^o \left( \frac{\partial N}{\partial r} \right) \cdot \frac{{}^oZ}{oI} + \frac{{}^oN}{oI} \cdot \left( 1 - \left( \frac{{}^oZ}{oI} \right)^2 \right) + k_R \quad (\text{II.57})$$

La linealización del equilibrio no implica ninguna hipótesis de pequeños desplazamientos, sino la aproximación en 1° orden de la ecuación de equilibrio respecto de una configuración conocida. En todo caso, la linealización del equilibrio estará asociada a la consideración de pequeños incrementos finitos de desplazamiento entre un estado y el siguiente; debido a ello, el tamaño del paso<sup>5</sup> (incremento finito) de desplazamientos será fundamental para la estabilidad, consistencia y convergencia (Kincaid [17]) del procedimiento numérico utilizado.

La expresión (II.1) del análisis lineal sólo podrá cumplirse rigurosamente en el origen, ya que para cualquier desplazamiento vertical  ${}^tr$  no nulo, existirá un desbalance de fuerzas internas y externas que irá aumentando en la misma medida en que aumenta el ángulo  ${}^t\theta$ :

$$\sin({}^t\theta) \approx \sin({}^o\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{{}^tZ}{tI} \approx \frac{{}^oZ}{oI} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tr \approx 0 \quad (\text{II.58})$$

En el análisis lineal, el equilibrio se considera en una posición inicial particular: la posición sin deformar, lo que es equivalente según lo visto a una linealización respecto del origen. Sin embargo, es posible efectuar esta aproximación respecto de cualquier otra configuración conocida, (por ejemplo la última), utilizándola como configuración “inicial” a partir de un sistema de coordenadas que se actualice paso a paso. Este concepto se generaliza para sistemas de n-grados de libertad en la sección IV.3.3

$${}^tZ = {}^oZ + {}^tr \quad (\text{II.59})$$

$${}^{t+\Delta t}Z = {}^oZ + {}^{t+\Delta t}r \quad (\text{II.60})$$

La forma en que se efectúe dicha actualización y la corrección o no del equilibrio, definirá diferentes familias de métodos numéricos (incrementales o iterativos, explícitos o implícitos, etc.) los cuales se revisan conceptualmente en los capítulos subsiguientes.

---

<sup>5</sup> Un procedimiento de control del tamaño de paso se analiza en detalle en la sección V.3.

## II.3. CINEMÁTICA DE UN ELEMENTO DE VIGA-COLUMNA

### II.3.1. La teoría clásica de vigas esbeltas. Hipótesis de Bernoulli - Euler

La teoría clásica de vigas esbeltas permite determinar el campo completo de desplazamientos de una viga sometida exclusivamente a esfuerzos de flexión en su plano y se basa en las siguientes hipótesis fundamentales:

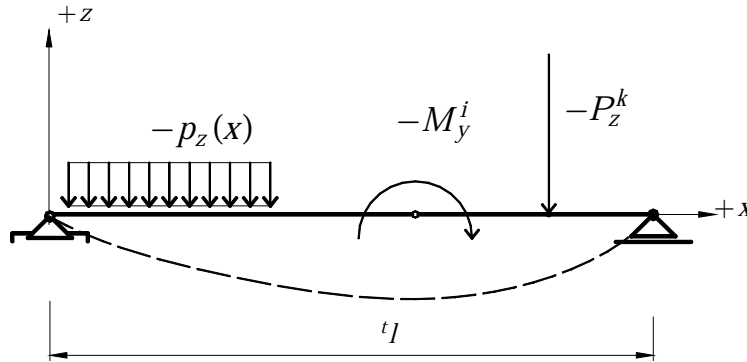


Fig.6. Viga elemental de Euler-Bernoulli

Sea un elemento de viga de longitud  $l$  (Fig.6) sobre la cual actúa un sistema de fuerzas exteriores compuesto por fuerzas verticales (paralelas al eje  $z$ ), y momentos flexores contenidos en el plano  $xz$ .

- Los desplazamientos laterales (según el eje  $y - y$ ) de todos los puntos de una sección son nulos.
- Los desplazamientos verticales (según el eje  $z - z$ ) de todos los puntos de una sección son iguales al desplazamiento vertical del eje de la viga  $w^o$ .
- Los desplazamientos verticales del eje de referencia de la viga son pequeños.
- Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje luego de la deformación.

Por ser un problema exclusivamente plano el campo generalizado de desplazamientos de un punto de la sección dependerá de las variables  $\{x, z\}$

$$u(x, y, z) = u(x, z) \quad (\text{II.61})$$

$$w(x, y, z) = w^o(x) \quad (\text{II.62})$$

El sistema de fuerzas actuantes en el modelo, se podrá descomponer según sus componentes principales. En virtud de la primer hipótesis sólo se admiten fuerzas verticales y momentos actuantes en el plano principal de flexión.

$$\{p_z(x), m_y(x), P_z^k, M_y^i\} \quad (\text{II.63})$$

La hipótesis de las secciones planas establece que el desplazamiento longitudinal de cualquier fibra de la sección quedará definido a partir del giro medio de la sección  $\theta(x)$  :

$$u(x, z) = -z \cdot \theta(x) \quad (\text{II.64})$$

La hipótesis de pequeños desplazamientos transversales permite obtener la deformación longitudinal de cualquier fibra perteneciente al plano XZ según la siguiente medida de deformación:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (\text{II.65})$$

La condición de ortogonalidad de las secciones planas luego de la deformación establece que la deformación angular de la sección transversal deberá ser nula:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \quad (\text{II.66})$$

Las otras condiciones cinemáticas de la teoría clásica de flexión de vigas esbeltas estarán determinadas por las restantes deformaciones angulares  $\gamma_{xy} = 0$  y  $\gamma_{yz} = 0$ .

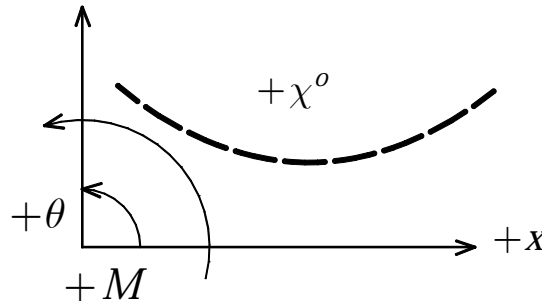


Fig.7. Signos utilizados para los giros, momentos y curvaturas.

Reemplazando la expresiones (II.64) en (II.65) y (II.66), se obtienen las hipótesis cinemáticas fundamentales de la teoría de flexión de vigas esbeltas:

$$\theta^o(x) = \phi^o(x) \approx \frac{dw^o}{dx} \quad (\text{II.67})$$

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{d\theta}{dx} \approx -z \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{II.68})$$

Denominando  $\chi^o(x)$  a la curvatura, el estado de deformación de la sección queda definido a partir de un único parámetro:

$$\varepsilon_x(x, z) = -z \cdot \chi^o(x) \quad (\text{II.69})$$

$$\chi^o(x) = \frac{d\theta^o}{dx} = \frac{d^2 w^o}{dx^2} \quad (\text{II.70})$$

### II.3.2. La consideración de las deformaciones longitudinales

Si se admite la existencia de esfuerzos normales dentro del elemento eliminando la condición (II.63), estamos bajo las consideraciones de lo que se conoce como teoría generalizada de vigas. La consideración de este esfuerzo implica considerar los desplazamientos longitudinales del eje de la sección, los cuales se suman al desplazamiento total de cada fibra debido a la flexión.

$$u(x, z) = u^o(x) - z \cdot \theta^o(x) \quad (\text{II.71})$$

Las componentes principales del sistema de fuerzas exteriores, se considerarán como antes, actuando sobre algún eje de referencia de la barra:

$$\{p_x(x), p_z(x), m_y(x), P_x^j, P_z^k, M_y^i\} \quad (\text{II.72})$$

Por otra parte, según se demostró en la sección II.2, cuando eliminamos la hipótesis de pequeños desplazamientos transversales es necesario utilizar una medida de deformación diferente. Adoptando la medida de deformación de Green-Lagrange (ver II.2.4):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{II.73})$$

Reemplazando la expresión (II.62) y (II.71) se obtiene la deformación longitudinal de cualquier fibra ubicada a una distancia  $z$  del eje de referencia como:

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{du^o}{dx} - z \cdot \frac{d\theta^o}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^o}{dx} \right)^2 \quad (\text{II.74})$$

Todo lo dicho permite establecer las dos condiciones cinemáticas fundamentales del elemento de viga-columna:

$$\phi^o(x) = \frac{dw^o}{dx} \quad (\text{II.75})$$

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{du^o}{dx} - z \cdot \frac{d^2 w^o}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^o}{dx} \right)^2 \quad (\text{II.76})$$

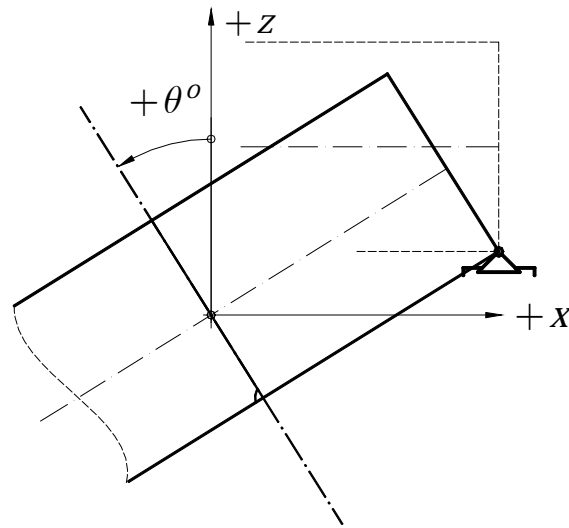


Fig.8. Teoría de flexión de vigas de Euler-Bernoulli. Giro de la sección normal a la fibra media. Para los sentidos indicados en la figura, el giro por flexión es positivo y el desplazamiento vertical es negativo.

Denominando  $\varepsilon^o(x)$  a la deformación sobre el eje de referencia y  $\chi^o(x)$  a la curvatura, podemos expresar a la deformación de cualquier fibra como la combinación de estos dos parámetros:

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon^o(x) - z \cdot \chi^o(x) \quad (\text{II.77})$$

$$\varepsilon^o(x) = \frac{du^o}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^o}{dx} \right)^2 \quad (\text{II.78})$$

$$\chi^o(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 w^o}{dx^2} \quad (\text{II.79})$$

Las expresiones (II.77) a (II.79) permiten definir completamente el estado de deformación de cada fibra de la sección para un campo de desplazamientos dado.

### II.3.3. La consideración de las deformaciones por corte.

#### Teoría de vigas de Timoshenko

A medida que la relación longitud / altura de una viga disminuye, es sabido que las secciones transversales dejan de conservarse planas después de la deformación. Este hecho implica la necesidad de poder formular una hipótesis para las deformaciones por corte y su influencia en los desplazamientos transversales del elemento.

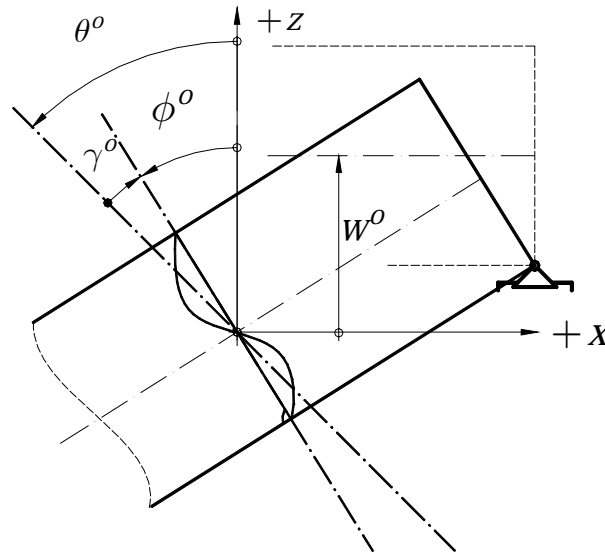


Fig.9. Teoría de flexión de vigas de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media. Para los sentidos indicados en la figura, el giro por flexión es positivo y el desplazamiento vertical es negativo.

La teoría de vigas de Timoshenko establece que *las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente normales al eje luego de la deformación*. Esta hipótesis representa una mayor aproximación a la deformación real en las vigas de gran altura.

Según puede verse en la Fig.9, la hipótesis de Timoshenko supone tomar un giro medio para la sección, de manera que a efectos prácticos pueda seguir considerándose plana. Mediante la inspección de la Fig.9 y la convención de signos adoptada, se deduce que el giro de la sección normal se puede expresar como la pendiente de la deformada del eje de la viga y un giro adicional:

$$\theta^o(x) \approx \phi^o(x) + \gamma^o(x) \quad (\text{II.80})$$

El mantenimiento de hipótesis de secciones planas permite la determinación del campo completo de desplazamientos de la sección:

$$u(x, z) = u^o(x) - z \cdot \theta^o(x) \quad (\text{II.81})$$

El campo de deformaciones no nulas de la sección ahora queda definido por las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{II.82})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{II.83})$$

Desarrollando la primera de las expresiones anteriores, se obtiene la expresión de las deformaciones longitudinales de cada fibra:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, z) = \frac{du^o}{dx} - z \cdot \frac{d\theta^o}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^o}{dx} \right)^2 \quad (\text{II.84})$$

$$\gamma_{xz} = \phi^o(x) - \theta^o(x) = -\gamma^o(x) \quad (\text{II.85})$$

### II.3.4. El estado de deformación de la sección

Las expresiones obtenidas anteriormente permiten definir completamente el estado de deformación de cualquier fibra de la sección mediante las expresiones (II.77) a (II.79):

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon^o(x) - z \cdot \chi^o(x) \quad (\text{II.86})$$

La deformación longitudinal tiene idéntica expresión a (II.78) pero la curvatura se ve modificada por el término debido al corte. Luego, denominando  $\gamma^o(x)$  al giro debido a las deformaciones por corte se obtiene:

$$\varepsilon^o(x) = \frac{du^o}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^o}{dx} \right)^2 \quad (\text{II.87})$$

$$\chi^o(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\phi^o}{dx} + \frac{d\gamma^o}{dx} = \frac{d^2 w^o}{dx^2} + \frac{d\gamma^o}{dx} \quad (\text{II.88})$$

$$\gamma^o(x) = \gamma_{xz}(x) = \theta^o(x) - \phi^o(x) \quad (\text{II.89})$$

El estado de deformación del elemento se podrá definir para una sección dada mediante el siguiente arreglo:

$$\mathbf{e}^o = \mathbf{e}^o(x) = \left\{ \varepsilon^o(x) \quad \chi^o(x) \quad \gamma^o(x) \right\}^T \quad (\text{II.90})$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(x, z) = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{e}^o \quad (\text{II.91})$$

donde  $\mathbf{e}(x, z)$  es el vector de estado de deformación de una fibra arbitraria y  $\mathbf{Z}$  es una matriz de transformación:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(x, z) = \left\{ \varepsilon_x(x, z) \quad \gamma_{xz}(x) \right\}^T \quad (\text{II.92})$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.93})$$

La consideración de la no-linealidad del material obliga a definir a este arreglo para un estado dado del tiempo a partir del superíndice  $t$  correspondiente a una la configuración inicial arbitraria.

$${}^t \mathbf{e} = \mathbf{Z} \cdot {}^t \mathbf{e}^o \quad (\text{II.94})$$



La hipótesis cinemática de las secciones planas permite determinar completamente el estado de deformación de todas las fibras de la sección, en función de la deformación longitudinal y el giro del eje de referencia de la misma según una forma lineal.

## II.4. LAS FUNCIONES DE FORMA

### II.4.1. Funciones de interpolación

El problema de obtener la configuración de equilibrio de una barra bajo la acción de fuerzas exteriores se reduce a encontrar el campo de desplazamientos (II.95) que satisfaga la ecuación diferencial de equilibrio del problema y las condiciones de contorno sobre los desplazamientos prescritos (condiciones cinemáticas).

$$\mathbf{u}(x) = \{ u^o(x), w^o(x), \theta^o(x) \} \quad (\text{II.95})$$

Una solución aproximada de este problema puede obtenerse si se conoce un campo de desplazamientos que aproxime (II.95) en algunos puntos del dominio y que al mismo tiempo, satisfaga la ecuación de equilibrio del problema y las condiciones cinemáticas en esos puntos.

$${}^t\mathbf{u}(x) \approx \mathbf{H}^T(x) \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{II.96})$$

donde  $\mathbf{H}^T(x)$  es una matriz que contiene al conjunto de funciones de interpolación que permiten aproximar a un campo continuo de desplazamiento a partir de un conjunto discreto de puntos del dominio.

Entre los múltiples métodos del cálculo numérico que existen para aproximar una función, elegimos el mas sencillo, utilizando funciones polinómicas definidas *localmente* para cada elemento.

$$u^o(x) \approx \sum_{i=1}^n a_i \cdot x^{(i)} \quad (\text{II.97})$$

$$w^o(x) \approx \sum_{j=1}^m b_j \cdot x^{(j)} \quad (\text{II.98})$$

$$\theta^o(x) \approx \sum_{j=1}^m c_j \cdot x^{(j)} \quad (\text{II.99})$$

## II.4.2. La interpolación hermítica. Formulaciones con continuidad de clase $C1$

La incógnita fundamental del problema de flexión de vigas es el desplazamiento transversal. Sin embargo, en una formulación débil del equilibrio (ver IV.2.5) aparecen en la expresión del trabajo interno las derivadas segundas de  $w^o(x)$ . Esto implica la necesidad de utilizar interpolaciones en las cuales la variable y su primera derivada han de ser continuas, para evitar singularidades en el cálculo de las integrales que reemplazan a la ecuación de equilibrio<sup>6</sup>. A este tipo de interpolaciones se las denomina *de continuidad clase  $C1$* .

En las interpolaciones anteriores,  $n$  y  $m$  son el número de puntos sobre el elemento donde se supone conocido el desplazamiento a interpolar. A estos puntos se los denomina nodos. Si los parámetros  $a_i$  y  $b_j$  son constantes que dependen únicamente de los valores del desplazamiento en los nodos, entonces el problema tiene solución única a partir de la resolución de un sistema lineal de ecuaciones.

Los nodos podrán disponerse en cualquier punto del dominio del elemento de barra. Si en particular estos se dispusieran dentro del elemento, la interpolación se denominará jerárquica. Los nodos intermedios deberán tener un tratamiento especial, ya que al no estar "conectados" con nodos extremos de otros elementos, deberían condensarse antes de formular la matriz tangente de rigidez. La condensación estática se ve en V.2.4.

Es posible definir elementos que interpolen el campo de desplazamientos empleando un número mínimo de nodos. Estos elementos aproximan de modo menos "preciso" el campo de desplazamientos transversales y los giros, por lo que se hace necesario un mayor número de elementos.

Si en particular, el número de nodos utilizado para interpolar el campo de desplazamientos coincide con el número de nodos necesario para interpolar la forma del elemento, entonces las funciones de transformación de coordenadas y las funciones de interpolación de desplazamientos son las mismas. A este tipo de interpolación se la denomina isoparamétrica y es ampliamente utilizada en todo tipo de formulaciones en desplazamientos.

Cuando los nodos se disponen en puntos en los cuales se conozca el desplazamiento y su derivada, entonces se tiene lo que se conoce como interpolación hermítica, debido a la interpolación mediante polinomios de Hermite.

Las interpolaciones de clase  $C1$  son muy utilizadas en los elementos de viga<sup>7</sup> debido a la relación que existe entre el desplazamiento transversal y el giro de la sección, ambos conocidos en los extremos del elemento.

---

<sup>6</sup> Esta condición se puede interpretar físicamente de manera sencilla teniendo en cuenta que  $\phi^o$  coincide con la pendiente de la deformada del eje de la viga y por lo tanto, esta derivada debe ser continua para garantizar que la deformada del eje describa una curva suave (Oñate, E. [23])

<sup>7</sup> En los problemas de flexión de placas la utilización de este tipo de elementos conduce, en general, a situaciones en que la primera derivada no es continua entre elementos. En esos casos, las interpolaciones utilizadas son de continuidad de clase  $C0$  y los elementos en general son isoparamétricos, de modo tal de reutilizar las mismas funciones de interpolación tanto para los desplazamientos como para la geometría del elemento. Sin embargo esto no ocurre en vigas, ya que al estar conectados entre sí los elementos únicamente por puntos nodales, dichas derivadas toman un valor único entre elementos, lo cual garantiza su continuidad

### II.4.3. Interpolación hermítica del desplazamiento transversal

El elemento de viga de clase C1 más sencillo es el elemento unidimensional de dos nodos (Fig.10). La continuidad de las primeras derivadas obliga a tomar el giro  $\phi^o(x)$  como variable. Por lo tanto, el número total de variables nodales del elemento serán cuatro: los desplazamientos transversales y sus derivadas en cada nodo.

Para la interpolación de los desplazamientos transversales, se utilizará entonces una interpolación cúbica<sup>8</sup> a partir de un esquema hermítico de cuatro nodos. Los nodos extremos del elemento tendrán como incógnitas el desplazamiento transversal y el giro respectivo

$$w^o(x) \approx h_{w1}(x) \cdot \hat{w}_1 + h_{\theta1}(x) \cdot \hat{\theta}_1 + h_{w2}(x) \cdot \hat{w}_2 + h_{\theta2}(x) \cdot \hat{\theta}_2 \quad (\text{II.100})$$

Agrupando las variables nodales externas en el vector  $\hat{\mathbf{w}}$ , el desplazamiento transversal del eje de la sección se interpola según:

$$w^o(x) \approx \mathbf{h}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{II.101})$$

El problema básico consiste en encontrar un conjunto de polinomios de interpolación agrupados en el vector  $\mathbf{h}_w(x)$  utilizando los valores de la función a interpolar  $w(x)$  y sus derivadas, valores conocidos únicamente en sus nodos a través del vector  $\hat{\mathbf{w}}$ .

Las expresiones (II.101) y (II.98) son diferentes maneras de expresar a la función incógnita de desplazamientos transversales. Igualando (II.100) y (II.101):

$$\mathbf{h}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{b} \quad (\text{II.102})$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.103})$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.104})$$

Evalutando la función de interpolación del desplazamiento transversal en las coordenadas de cada nodo se obtienen los desplazamientos nodales incógnita

$$h_{w1}(0) \cdot \hat{w}_1 + h_{\theta1}(0) \cdot \hat{\theta}_1 + h_{w2}(0) \cdot \hat{w}_2 + h_{\theta2}(0) \cdot \hat{\theta}_2 = \hat{w}_1 \quad (\text{II.105})$$

$$h_{w1}(L) \cdot \hat{w}_1 + h_{\theta1}(L) \cdot \hat{\theta}_1 + h_{w2}(L) \cdot \hat{w}_2 + h_{\theta2}(L) \cdot \hat{\theta}_2 = \hat{w}_2 \quad (\text{II.106})$$

---

<sup>8</sup> En el problema elemental de la barra recta a flexión simple, sometida a la acción de una carga distribuida de manera uniforme, la ecuación de la curva elástica quedaba completamente determinada mediante un polinomio cúbico. Esto significa que en un elemento de viga con interpolación cúbica de desplazamientos transversales, se podrán representar *exactamente* el campo de desplazamientos del problema analítico (elástico y lineal).

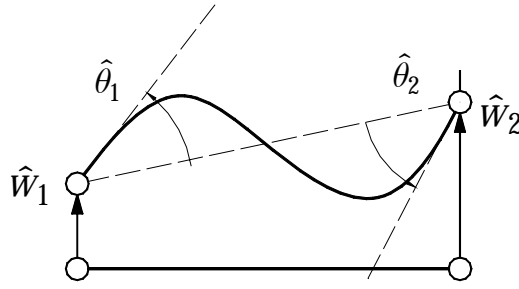


Fig.10. Elemento de viga de Euler-Bernoulli de dos nodos. Convenio de signos para los desplazamientos transversales y giros nodales. Grados de libertad locales

Del mismo modo, evaluando la derivada primera de dicha función en las coordenadas nodales, se obtienen los giros nodales del elemento

$$\frac{\partial h_{w1}}{\partial X}(0) \cdot \hat{w}_1 + \frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial X}(0) \cdot \hat{\theta}_1 + \frac{\partial h_{w2}}{\partial X}(0) \cdot \hat{w}_2 + \frac{\partial h_{\theta 2}}{\partial X}(0) \cdot \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 \quad (\text{II.107})$$

$$\frac{\partial h_{w1}}{\partial X}(L) \cdot \hat{w}_1 + \frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial X}(L) \cdot \hat{\theta}_1 + \frac{\partial h_{w2}}{\partial X}(L) \cdot \hat{w}_2 + \frac{\partial h_{\theta 2}}{\partial X}(L) \cdot \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 \quad (\text{II.108})$$

El sistema lineal de ecuaciones anterior puede describirse en función de los coeficientes de interpolación buscados y el vector de incógnitas nodales:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{b} = \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{II.109})$$

De este modo, la solución del sistema lineal de ecuaciones (el vector de coeficientes del polinomio interpolador) puede obtenerse como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{II.110})$$

$$\left\{ \mathbf{h}_w^T(x) \quad \mathbf{h}_\theta^T(x) \right\} \cdot \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{w}}) \quad (\text{II.111})$$

Con lo cual se obtiene directamente las funciones de forma como:

$$\mathbf{h}_w^T(x) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{II.112})$$

$$\mathbf{h}_w^T(x) = \left\{ \left( \frac{2 \cdot x^3}{L^3} - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + 1 \right) \quad \left( -\frac{2 \cdot x^3}{L^3} + \frac{3 \cdot x^2}{L^2} \right) \quad \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{2 \cdot x^2}{L} + x \right) \quad \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \right\} \quad (\text{II.113})$$

#### II.4.4. Interpolación jerárquica del desplazamiento longitudinal

El esquema de interpolación más sencillo de desplazamientos longitudinales es el elemento de barra de dos nodos. Para la interpolación de los desplazamientos longitudinales, se utilizará una interpolación lineal / cuadrática a partir de un esquema jerárquico de tres nodos, definido por dos nodos extremos y un nodo jerárquico central. Debido a que los nodos jerárquicos deberán ser condensados previamente al ensamblaje de la matriz de rigidez, deberán definirse por separado (ver V.2.4)

$$u^o(x) \approx h_{u1}(x) \cdot \hat{u}_1 + h_{u2}(x) \cdot \hat{u}_2 + h_{u,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.114})$$

Agrupando las variables nodales externas en el vector  $\hat{\mathbf{u}}$  y a la variable del nodo interno  $\Delta u_3$  por separado, el desplazamiento del eje de la sección se interpolan según.

$$u^o(x) \approx \mathbf{h}_u^T(x) \cdot \hat{\mathbf{u}} + h_{u,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.115})$$

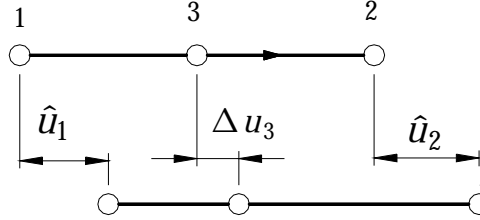


Fig.11. Elemento de barra de nodos externos y un nodo jerárquico

La función de interpolación jerárquica utiliza desplazamientos nodales correspondientes tanto al nodo intermedio como a los nodos externos, como cualquier función de interpolación. Las funciones de forma principales en cambio, sólo interpolan desplazamientos de los nodos externos. Por lo tanto, las funciones de forma asociadas a los nodos externos serán lineales<sup>9</sup>:

$$\mathbf{h}_u^T(x) = \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \quad (\text{II.116})$$

Ahora resta aplicar las condiciones de consistencia sobre la función de forma asociada al nodo jerárquico. A diferencia del procedimiento empleado en el párrafo II.4.4, la igualdad de las expresiones (II.97) y (II.115) se plantea con la función jerárquica como única función incógnita:

$$\mathbf{h}_u^T(x) \cdot \hat{\mathbf{u}} + h_{u,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{a} \quad (\text{II.117})$$

$$\mathbf{a}^T = \{a_0 \quad a_1 \quad a_2\} \quad (\text{II.118})$$

$$\mathbf{x}^T = \{1 \quad x \quad x^2\} \quad (\text{II.119})$$

Las variables nodales independientes deben ser iguales al vector con las condiciones de borde:

---

<sup>9</sup>Para poder cumplir con las condiciones de unicidad, las funciones interpolantes de los nodos externos no deben "saber" de la existencia de la función interpolante del nodo intermedio. Esta es una característica de los esquemas jerárquicos. Las funciones forma jerárquicas pueden estar o no incluidas dentro de la interpolación, sin cambiar las funciones de forma principales y puede verse a éstas como un refinamiento de la misma.

$$\begin{aligned}
u(0) &= \hat{u}_1 = 0 \\
u(L) &= \hat{u}_2 = 0 \\
u(L/2) &= \Delta u_3
\end{aligned} \tag{II.120}$$

La imposición de condiciones de borde sobre las funciones cuadráticas deriva en un sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Delta u_3 \end{Bmatrix} \tag{II.121}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Delta u_3 \end{Bmatrix} \tag{II.122}$$

$$h_{u,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Delta u_3 \end{Bmatrix} \tag{II.123}$$

Con lo cual, la función jerárquica de interpolación resultante queda :

$$h_{u,\Delta u_3}(x) = \left( \frac{4 \cdot x}{L} - \frac{4 \cdot x^2}{L^2} \right) \tag{II.124}$$

Para verificar los resultados obtenidos, se evalúa a la función jerárquica en los nodos del elemento, en donde se verifica por simple inspección que ésta se anula en los extremos. Por otra parte, en el nodo central se verifica que ésta toma el valor unitario cumpliendo con las condiciones de unicidad:

$$\begin{aligned}
h_{u,\Delta u_3}(L) &= h_{u,\Delta u_3}(-L) = 0 \\
h_{u,\Delta u_3}\left(\frac{L}{2}\right) &= 1
\end{aligned} \tag{II.125}$$

#### II.4.5. Interpolación de los giros y las deformaciones

En el párrafo anterior se obtuvieron los coeficientes de interpolación de las funciones de forma mediante las cuales se pudo interpolar dos magnitudes cinemáticas básicas: el desplazamiento longitudinal y el desplazamiento transversal del eje del elemento. A partir de éstos, es posible obtener por derivación las restantes magnitudes cinemáticas definidas en la sección anterior.

$$\theta^o(x) \approx \mathbf{h}_\theta^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} \tag{II.126}$$

Si no se consideran las deformaciones por corte, las funciones de forma que interpolan el giro de la sección se obtienen según (II.67):

$$\mathbf{h}_\theta(x) \approx \frac{\partial \mathbf{h}_w}{\partial x} \approx \mathbf{b}_w(x) \tag{II.127}$$

Del mismo modo, la curvatura de la sección la obtenemos mediante derivación de las funciones de forma que interpolan los giros:

$$\chi^o(x) \approx \mathbf{h}_\chi^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{II.128})$$

$$\mathbf{h}_\chi(x) \approx \frac{\partial \mathbf{h}_\theta}{\partial x} \approx \mathbf{b}_\theta(x) \quad (\text{II.129})$$

Finalmente, la deformación longitudinal del eje de referencia se obtiene a partir de la relación (II.78):

$$\varepsilon^o(x) \approx \mathbf{b}_u^T(x) \cdot \hat{\mathbf{u}} + b_{u,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}})^2 \quad (\text{II.130})$$

En las Fig.12 y Fig.13 se resumen las funciones de forma en coordenadas naturales y los valores que toman en los extremos del intervalo. Estos valores serán utilizados por los algoritmos de integración de Gauss-Lobatto para evitar interpolar el valor del integrando sobre puntos conocidos (ver V.1.6)

|   |  |  |
|---|--|--|
| $x(\xi) = \frac{L}{2} \cdot (1 + \xi) \quad J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad J^{-1} = \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$   | $\mathbf{h}_u^T(\xi) = \mathbf{h}_u^T(x(\xi)) = \left\{ \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \quad \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \right\}$  | $h_{u,\Delta u_3}(\xi) = h_{u,\Delta u_3}(x(\xi)) = (1 - \xi^2)$           |
| $\mathbf{b}_u^T(\xi) = \mathbf{b}_u^T(x(\xi)) = \left\{ \left( -\frac{1}{L} \right) \quad \left( \frac{1}{L} \right) \right\}$  | $b_{u,\Delta u_3}(\xi) = b_{u,\Delta u_3}(x(\xi)) = \left( -\frac{4 \cdot \xi}{L} \right)$   |  |
| $h_{w,\Delta u_3}(\xi_k) = 0 \quad b_{w,\Delta u_3}(\xi_k) = 0 \quad b_{\theta,\Delta u_3}(\xi_k) = 0$  |  |  |
| $\mathbf{h}_w(\xi) = \mathbf{h}_w(x(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (2 - 3 \cdot \xi + \xi^3) \\ \frac{1}{4} \cdot (2 + 3 \cdot \xi - \xi^3) \\ \frac{L}{8} \cdot (\xi + 1) \cdot (\xi - 1)^2 \\ \frac{L}{8} \cdot (\xi + 1)^2 \cdot (\xi - 1) \end{bmatrix}$ | $\mathbf{h}_\theta(\xi) = \mathbf{b}_w(x(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot (\xi^2 - 1)}{2 \cdot L} \\ \frac{3 \cdot (\xi^2 - 1)}{2 \cdot L} \\ \frac{1}{4} \cdot (\xi - 1) \cdot (3 \cdot \xi + 1) \\ \frac{1}{4} \cdot (\xi + 1) \cdot (3 \cdot \xi - 1) \end{bmatrix}$ |  |
| $\mathbf{h}_\chi^T(\xi) = \mathbf{b}_\theta^T(x(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{6 \cdot \xi}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot \xi}{L^2} \\ \frac{-1 + 3 \cdot \xi}{L} \\ \frac{1 + 3 \cdot \xi}{L} \end{bmatrix}$   | $h_{\gamma,\Delta u_3}(\xi_k) = 0$   | $\mathbf{h}_\gamma^T(\xi_k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |

Fig.12. Funciones de forma hermíticas definidas en el intervalo  $[-1 \quad +1]$

|  |   |  |  |
|--|---|--|--|
| $\mathbf{h}_u^T(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$   | $\mathbf{h}_u^T(+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$                      | $h_{u,\Delta u_3}(-1) = 0$   | $h_{u,\Delta u_3}(+1) = 0$   |
| $\mathbf{b}_u^T(-1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$                                      | $\mathbf{b}_u^T(+1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ | $b_{u,\Delta u_3}(-1) = \frac{4}{L}$   | $b_{u,\Delta u_3}(+1) = -\frac{4}{L}$                                    |
| $\mathbf{h}_w(-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  | $\mathbf{h}_w(+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$             | $\mathbf{h}_\theta(-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   | $\mathbf{h}_\theta(+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
| $\mathbf{h}_\chi^T(-1) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} & -\frac{2}{L} \end{bmatrix}$ |   | $\mathbf{h}_\chi^T(+1) = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$ |  |

Fig.13. Evaluación de las funciones de forma modificadas por corte en los extremos del intervalo.

## II.5. CONSIDERACIÓN DE LAS DEFORMACIONES POR CORTE

### II.5.1. Introducción

Cuando la relación longitud / altura de un elemento viga se hace cada vez más pequeña, las secciones transversales dejan de conservarse planas después de la deformación y es necesario formular hipótesis adicionales que tengan en consideración las deformaciones por corte y su influencia sobre los desplazamientos transversales del elemento.

El objetivo del presente capítulo es extender la formulación cinemática a los elementos en los cuales los esfuerzos de corte tienen efectos significativos sobre las deformaciones.

En el planteo de las funciones de forma se utiliza una formulación diferente a la tradicional en este tipo de elementos, basada en funciones de forma de clase  $C^0$ , desarrollando un nuevo tipo de funciones de forma basadas en el equilibrio. Este planteo permite evitar el problema clásico de bloqueo por corte manteniendo la continuidad de clase  $C^1$ .

La consideración de los términos de orden superior en las deformaciones longitudinales y la función de forma jerárquica del nodo intermedio produce además, un acoplamiento entre la interpolación de los esfuerzos transversales y longitudinales que se refleja en las funciones de forma modificadas.

### II.5.2. La interpolación de las deformaciones por corte basada en el equilibrio

La hipótesis fundamental del elemento de viga de Timoshenko (ver II.3.3) establece que el giro de una sección del elemento puede aproximarse como la suma de la derivada del desplazamiento transversal y una componente de deformación debida a los esfuerzos de corte:

$$\theta^o(x) \approx \phi^o(x) + \gamma^o(x) \quad (\text{II.131})$$

La interpolación del giro por flexión, es decir de la derivada del desplazamiento transversal, se obtuvo a partir de la derivación de las funciones de interpolación de este desplazamiento.

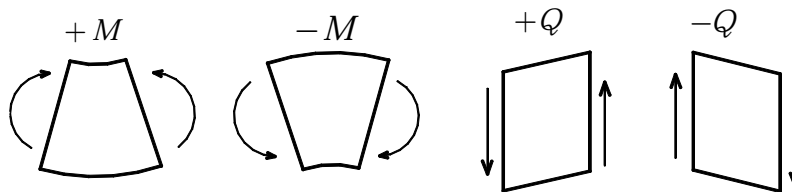


Fig.14. Signos convencionales para el momento flexor M y el esfuerzo cortante Q

En un planteo hermitico, la función de forma (el polinomio interpolador) asociada a las deformaciones por corte no podrá tener un grado arbitrario sino que deberá ser consistente con el grado de interpolación de las deformaciones transversales y giros del elemento.

Se definen las funciones de clase  $C^1$  a aquellas funciones que son continuas y derivables hasta su primer derivada. Un polinomio de 2° grado es una función de clase  $C^1$  ya que su primer derivada es otro polinomio (una recta) que es continua y derivable en todo punto de



su dominio. En esta formulación, el grado necesario del polinomio de interpolación las deformaciones por corte puede determinarse planteando la ecuación diferencial de equilibrio de la viga:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (\text{II.132})$$

Para poder definir las resultantes de momento y corte en todo punto del elemento, es necesario hacer una hipótesis sobre el material.

En el caso particular el material elástico y lineal, y tomando al eje de referencia en coincidencia con el eje baricéntrico, la derivada del momento flexor es la expresión conocida de la teoría clásica de la elasticidad:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = +E \cdot J_{zz} \cdot \frac{d\chi^o}{dx} \quad (\text{II.133})$$

$$Q(x) = G \cdot A \cdot \gamma^o(x) \quad (\text{II.134})$$

Para el caso general de no-linealidad del material estas expresiones no tendrán más validez, ya que dependerán del estado de tensiones y deformaciones correspondientes al instante de tiempo en el cual se plantea el equilibrio:

$$\frac{\partial {}^tM}{\partial x} + {}^tQ(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (\text{II.135})$$

Para el caso general de no-linealidad del material es posible conocer los esfuerzos internos de la sección en un instante de tiempo  $t$  a partir de las deformaciones instantáneas de la sección, utilizando una serie de parámetros denominados parámetros de estado (ver IV.1.2),

$$\Delta M(x) \approx - {}^t\widehat{EX}(x) \cdot \Delta \varepsilon^o(x) + {}^t\widehat{EJ}(x) \cdot \Delta \chi^o(x) \quad (\text{II.136})$$

$$\Delta Q(x) \approx {}^t\widehat{GA}(x) \cdot \Delta \gamma^o(x) \quad (\text{II.137})$$

Llevando al límite del cociente incremental a (II.136) y asumiendo aproximadamente constante a los parámetros de estado dentro del elemento se tiene:

$$\frac{\partial {}^tM}{\partial x} \approx - {}^t\widehat{EX} \cdot \frac{d\varepsilon^o}{dx} + {}^t\widehat{EJ} \cdot \frac{d\chi^o}{dx} \quad \forall x \in [0, L] \quad (\text{II.138})$$

$${}^tQ(x) \approx {}^t\widehat{GA} \cdot \gamma^o(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (\text{II.139})$$

Reemplazando en la nueva ecuación diferencial del equilibrio de la sección de (II.135), se obtiene:

$$- {}^t\widehat{EX} \cdot \frac{d\varepsilon^o}{dx} + {}^t\widehat{EJ} \cdot \frac{d\chi^o}{dx} + {}^t\widehat{GA} \cdot \gamma^o(x) \equiv 0 \quad (\text{II.140})$$

En este punto es conveniente efectuar la hipótesis de linealidad geométrica al término asociado a las deformaciones longitudinales; la deformación del eje de referencia puede aproximarse aproximadamente como:

$$\varepsilon_o(x) \approx \frac{du_o}{dx} \quad (\text{II.141})$$

Por otra parte, en una formulación de funciones de forma de clase C1, los desplazamientos transversales se interpolan mediante polinomios de grado 3, según se vio en II.4.3:

$$w(x) \approx b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 \quad (\text{II.142})$$

La utilización de nodos interiores jerárquicos para la formulación membranar de las deformaciones se logra en este modelo a partir de un polinomio interpolador de 2° grado de los desplazamientos longitudinales:

$$u_o(x) \approx a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \quad (\text{II.143})$$

Aplicando las condiciones dadas por (II.141) a (II.143) en la ecuación diferencial de equilibrio, se obtiene:

$$\frac{d\varepsilon_o}{dx} \approx \frac{d^2 u_o}{dx^2} \approx 2 \cdot a_2 \quad (\text{II.144})$$

$$\frac{d\chi^o}{dx} = \frac{d^3 w^o}{dx^3} + \frac{d^2 \gamma^o}{dx^2} = 6 \cdot b_3 + \frac{d^2 \gamma^o}{dx^2} \quad (\text{II.145})$$

$$-{}^t\widehat{EX} \cdot 2 \cdot a_2 + {}^t\widehat{EJ} \cdot \left( 6 \cdot b_3 + \frac{d^2 \gamma^o}{dx^2} \right) + {}^t\widehat{GA} \cdot \gamma^o(x) \equiv 0 \quad (\text{II.146})$$

Reagrupando los términos según el orden de derivación se obtiene:

$$-2 \cdot {}^t\widehat{EX} \cdot a_2 + {}^t\widehat{EJ} \cdot 6 \cdot b_3 + {}^t\widehat{EJ} \cdot \frac{d^2 \gamma^o}{dx^2} + {}^t\widehat{GA} \cdot \gamma^o(x) \equiv 0 \quad (\text{II.147})$$

Esta ecuación puede describirse de manera más general como:

$$C_0 + C_1 \cdot \gamma^o(x) + C_2 \cdot \frac{d^2 \gamma^o}{dx^2} \equiv 0 \quad (\text{II.148})$$

Siendo sus coeficientes constantes dependientes del estado del material en el instante de cargas dado:

$$C_0 = -2 \cdot {}^t\widehat{EX} \cdot a_2 + {}^t\widehat{EJ} \cdot 6 \cdot b_3 \quad (\text{II.149})$$

$$C_1 = {}^t\widehat{GA} \quad (\text{II.150})$$

$$C_2 = {}^t\widehat{EJ} \quad (\text{II.151})$$

Una solución particular de la ecuación diferencial de equilibrio (II.148) se verifica para una deformación por corte constante en todo el dominio, lo cual permite obtener la siguiente conclusión: Si se utiliza una interpolación lineal en la curvatura y en las deformaciones membranales, la interpolación de las deformaciones por corte deberá efectuarse con un polinomio de grado 0. Por lo tanto, las deformaciones por corte deberán ser constantes dentro del elemento para no violar la ecuación diferencial de equilibrio, e iguales a una constante no arbitraria que verifique:

$$\gamma(x) = g_0 \quad (\text{II.152})$$

$${}^t g_0 = -\frac{C_0}{C_1} = \frac{2 \cdot {}^t \widehat{EX} \cdot a_2 - 6 \cdot {}^t \widehat{EJ} \cdot b_3}{{}^t \widehat{GA}} \quad (\text{II.153})$$

En el caso de un material homogéneo, elástico y lineal con el eje de referencia coincidente con el eje baricéntrico de la sección, la expresión anterior se reduce a<sup>10</sup>:

$$g_0 = -\frac{E \cdot J \cdot (6 \cdot b_3)}{G \cdot A} \quad (\text{II.154})$$

### II.5.3. La consideración rigurosa de la no-linealidad del material en la ecuación de equilibrio

En la formulación de la ecuación diferencial (II.140) se utilizó entre otras la hipótesis de que los parámetros de estado se mantenían constantes dentro del elemento, es decir:

$${}^t \widehat{EJ}(x) \approx {}^t \widehat{EJ} \quad (\text{II.155})$$

$${}^t \widehat{EX}(x) \approx {}^t \widehat{EX} \quad (\text{II.156})$$

$${}^t \widehat{GA}(x) \approx {}^t \widehat{GA} \quad (\text{II.157})$$

La expresión anterior se cumplirá de manera estricta en todo el elemento si se verifica la hipótesis aproximada de que los parámetros de estado de la sección son constantes dentro del elemento. En general, esto sólo ocurre en el caso de linealidad del material.

Claramente, los parámetros de estado de la sección tendrán valores que diferirán sección a sección. La consideración rigurosa de la no-linealidad del material en la ecuación diferencial del equilibrio implica conocer la variación funcional de estos parámetros dentro del elemento. En un planteo por elementos finitos, las funciones de forma interpolan los desplazamientos y giros a partir de los valores nodales del elemento, por lo cual en principio, es necesario conocer los parámetros de estado solamente en los nodos. La ecuación

---

<sup>10</sup> Esta última expresión es idéntica (a excepción del signo) a la obtenida por Narayanaswami R. y Adelman, M [20] en donde se plantea por primera vez el problema de interpolación de las deformaciones por corte en formulaciones del tipo C1.

diferencial ahora no sería válida para cualquier sección sino únicamente para cada punto de interpolación, en donde se cumpliría

$$- {}^t\widehat{EX}_k \cdot \left( \frac{d\varepsilon^o}{dx} \right)_{x_k} + {}^t\widehat{EJ}_{x_k} \cdot \left( \frac{d\chi^o}{dx} \right)_{x_k} + {}^t\widehat{GA}_k \cdot \gamma_k^o \equiv 0 \quad (\text{II.158})$$

donde  $(x_k)$  son los puntos de integración (puntos de Gauss) sobre los cuales se determinaron los parámetros de estado de la sección, únicos puntos donde se verificará el cumplimiento de la ecuación diferencial de equilibrio<sup>11</sup>.

Resolviendo nuevamente la ecuación diferencial, se obtiene una constante que ahora sólo sería válida en cada punto de interpolación:

$$g_{0k} \approx \frac{2 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot a_2 - 6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot b_3}{{}^t\widehat{GA}_k} \quad (\text{II.159})$$

La interpolación lineal de la curvatura y las deformaciones membranales están acopladas entre sí a través de la constante  $g_0$  independientemente de las deformaciones por corte. En el caso de no considerar sus efectos, para que las funciones de interpolación verifiquen la ecuación diferencial las constantes de interpolación deberían cumplir la siguiente relación:

$$3 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot b_3 \approx {}^t\widehat{EX}_k \cdot a_2 \quad (\text{II.160})$$

La condición de cumplimiento de la ecuación diferencial sobre las funciones de forma implicó la dependencia con la no-linealidad del material. Si las deformaciones por corte no son de consideración, no tiene ningún interés práctico definir funciones de forma acopladas, siendo aproximación suficiente la utilizada por el planteo clásico.

Por lo tanto no es posible considerar la no-linealidad del material en este planteo de modo riguroso sino a través de las hipótesis simplificativas efectuadas.

#### II.5.4. Interpolación hermitica de las deformaciones por corte

Las constantes obtenidas en el párrafo anterior, imponen una relación entre las constantes<sup>12</sup> de interpolación de los desplazamientos transversales y longitudinales, que deberá cumplirse para satisfacer el equilibrio de cada sección del elemento. El polinomio interpolador de deformaciones por corte queda definido entonces como:

$$\gamma^o(x_k) \approx \frac{{}^t\widehat{EX}(x_k) \cdot (2 \cdot a_2) - {}^t\widehat{EJ}(x_k) \cdot (6 \cdot b_3)}{{}^t\widehat{GA}(x_k)} \quad (\text{II.161})$$

<sup>11</sup> En el capítulo anterior, las funciones de interpolación se obtuvieron independientemente de la ecuación diferencial de equilibrio, a partir de hipótesis cinemáticas sencillas. Esto sin embargo, *no* significa que cumplan con la ecuación diferencial de equilibrio. Las funciones de forma violan la ecuación de equilibrio dentro del elemento y esta es una característica del método de los elementos finitos.

<sup>12</sup> En la consideración de la no-linealidad del material, la palabra “constante” no es correcta en rigor de verdad ya que los valores de  $\gamma(x_k)$  son diferentes en cada punto de Gauss.

Se observa que intervienen en la constante  $g_0$ , el término cuadrático de los desplazamientos longitudinales  $a_2$ , y el término cúbico de los desplazamientos transversales  $b_3$ . Esto significa que las funciones de forma, antes independientes entre sí, están acopladas mediante esta condición y deberán ser determinadas en conjunto, es decir, como la solución de un único sistema lineal de ecuaciones. En este caso, la cinemática de las deformaciones por corte impone condiciones de borde diferentes a los giros del elemento:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= w'(0) + \gamma^o(0) = \hat{\theta}_1 \\ \theta(L) &= w'(L) + \gamma^o(L) = \hat{\theta}_2\end{aligned}\quad (\text{II.162})$$

En el caso de los desplazamientos longitudinales y transversales, la condición impuesta por las deformaciones por corte no tiene influencia sobre las condiciones de borde.

$$\begin{aligned}w(0) &= \hat{w}_1 & w(L) &= \hat{w}_2 \\ u(0) &= \hat{u}_1 = 0 & u(L) &= \hat{u}_2 = 0 \\ u(L/2) &= \Delta \hat{u}_3\end{aligned}\quad (\text{II.163})$$

Evaluando los polinomios interpoladores en las condiciones de borde, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones, donde las incógnitas son los coeficientes de los polinomios interpoladores. Resolviendo el sistema lineal, se obtienen los coeficientes de las funciones de interpolación (II.97) y (II.98):

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 & a_1 &= \frac{4 \cdot \Delta u_3}{L} & a_2 &= -\frac{4 \cdot \Delta u_3}{L^2} \\ b_0 &= \hat{w}_1\end{aligned}\quad (\text{II.164})$$

$$b_1^k = \frac{-8 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot {}^tL \cdot \Delta u_3 + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3 \cdot \theta_1 - 6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot (2 \cdot w_1 - 2 \cdot w_2 - {}^tL \cdot \theta_1 + {}^tL \cdot \theta_2)}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3} \quad (\text{II.165})$$

$$b_2^k = \frac{-{}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL \cdot (3 \cdot w_1 - 3 \cdot w_2 + 2 \cdot {}^tL \cdot \theta_1 + {}^tL \cdot \theta_2) + 6 \cdot (4 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot \Delta u_3 + {}^t\widehat{EJ}_k \cdot (-\theta_1 + \theta_2))}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3} \quad (\text{II.166})$$

$$b_3^k = \frac{-16 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot \Delta u_3 + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL \cdot (2 \cdot w_1 - 2 \cdot w_2 + {}^tL \cdot (\theta_1 + \theta_2))}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot {}^tL^2 + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL^4} \quad (\text{II.167})$$

Reemplazando las constantes determinadas en (II.161), obtenemos la expresión de la deformación debida al corte:

$$\gamma^o(x_k) \approx -\frac{8 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot {}^tL \cdot \Delta u_3 + 6 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot (2 \cdot (w_1 - w_2) + {}^tL \cdot (\theta_1 + \theta_2))}{12 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot {}^tL + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL^3} \quad (\text{II.168})$$

La deformación por corte, al igual que todas las demás magnitudes cinemáticas, puede expresarse a partir de un conjunto de funciones de forma asociadas a cada nodo de interpolación.

$$\gamma^o(x_k) \approx \mathbf{h}_\gamma^T(x_k) \cdot \hat{\mathbf{w}} + h_{\gamma, \Delta u_3}(x_k) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.169})$$

Reordenando y separando los términos de (II.168) se obtiene:

$$\mathbf{h}_\gamma(x_k) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3} \\ \frac{+12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3} \\ \frac{-6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{-6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \end{array} \right\} \quad (\text{II.170})$$

$$h_{\gamma, \Delta u_3}(x_k) = \frac{-8 \cdot {}^t\widehat{EX}_k}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \quad (\text{II.171})$$

En adelante, al igual que la interpolación del desplazamiento longitudinal, todas las funciones de forma que utilicen al nodo interno  $\Delta u_3$  deberán escribirse en la forma de (II.169), ya que además de la condensación estática que se debe efectuar sobre este nodo, presenta ciertas ventajas computacionales (ver V.2.4).

## II.6. LAS FUNCIONES DE FORMA AMPLIADAS

### II.6.1. Interpolación modificada por corte de los desplazamientos

Conocidas las constantes de interpolación *para cada punto de integración*, se pueden determinar las nuevas funciones de forma del elemento. Las funciones antes expresadas en la variable  $x$  ahora se expresarán en la variable  $x_k$ , siendo éstos los únicos puntos en donde son válidos los coeficientes de interpolación.

Respecto a la interpolación de los desplazamientos longitudinales, los coeficientes de interpolación  $a_k$  son exactamente iguales a aquellos obtenidos en II.4.4 sin considerar las deformaciones por corte. Debido a ello, las funciones de forma que interpolan los desplazamientos longitudinales no se ven afectadas, como era de suponer, en la consideración de las deformaciones por corte, ya que no intervino este desplazamiento en la consideración del equilibrio.

$$u^o(x) \approx \mathbf{h}_u^T(x) \cdot \hat{\mathbf{u}} + h_{u,\Delta u_3}^T(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.172})$$

En cambio, los coeficientes  $b_j$  que definen al polinomio cúbico interpolador de los desplazamientos transversales serán diferentes a los obtenidos en II.4.3 debido a la inclusión del esfuerzo de corte en la ecuación de equilibrio.

Por otra parte, y esta es la diferencia más importante, la interpolación de desplazamientos transversales está asociada al coeficiente  $a_2$ . Esto significa que el nodo jerárquico de desplazamientos longitudinales  $\Delta u_3$  formará parte de la interpolación de  $w^o(x)$  según:

$$w^o(x) \approx \mathbf{h}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + h_{w,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.173})$$

Es decir, que para considerar las deformaciones por corte de manera consistente con la interpolación hermítica, se debe utilizar *información* del nodo jerárquico del elemento, antes propiedad exclusiva de los desplazamientos longitudinales. Igualando las expresiones (II.101) y (II.98):

$$\mathbf{h}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + h_{w,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 = \sum_{j=1}^m b_j \cdot x^{(j)} \quad (\text{II.174})$$

Reemplazando los coeficientes en las funciones de forma, se obtiene:

$$\mathbf{h}_w(x_k) = \frac{1}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot {}^tL + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL^3} \cdot \begin{bmatrix} ({}^tL - x_k) \cdot (12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot ({}^tL^2 + {}^tL \cdot x_k - 2 \cdot x_k^2)) \\ x_k \cdot (12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot (3 \cdot {}^tL - 2 \cdot x_k) \cdot x_k) \\ ({}^tL - x_k) \cdot x_k \cdot (6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL \cdot ({}^tL - x_k)) \\ - ({}^tL - x_k) \cdot x_k \cdot (6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL \cdot x_k) \end{bmatrix} \quad (\text{II.175})$$

$$h_{w,\Delta u_3}(x_k) = \frac{-8 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot x_k \cdot ({}^tL^2 - 3 \cdot {}^tL \cdot x_k + 2 \cdot x_k^2)}{(12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot {}^tL^2 + {}^t\widehat{GA}_k \cdot {}^tL^4)} \quad (\text{II.176})$$

### II.6.2. Interpolación de las deformaciones

Utilizando el mismo razonamiento empleado en II.4.5, se obtienen por derivación las magnitudes cinemáticas del elemento de viga, ahora modificadas por la consideración del esfuerzo de corte en las deformaciones.

El parámetro  $\phi^o$  interpola la derivada de los desplazamientos transversales y es equivalente al giro de la sección sin considerar deformaciones por corte en una sección  $x$ . Este parámetro será de utilidad en la formulación de la matriz tangente del problema.

$$\phi^o(x) = \mathbf{h}_\phi^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + h_{\phi,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.177})$$

$$\mathbf{h}_\phi(x) \approx \frac{d(\mathbf{h}_w(x))}{dx} \approx \mathbf{b}_w(x) \quad (\text{II.178})$$

$$h_{\phi,\Delta u_3}(x) = b_{w,\Delta u_3}(x) \quad (\text{II.179})$$

$$\phi^o(x) \approx \mathbf{b}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + b_{w,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.180})$$

Las funciones de forma que interpolan el giro de la sección se obtienen ahora según (II.80):

$$\theta^o(x) \approx \mathbf{h}_\theta^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + h_{\theta,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.181})$$

$$\mathbf{h}_\theta(x) \approx \mathbf{h}_\phi(x) + \mathbf{h}_\gamma(x) \approx \mathbf{b}_w(x) + \mathbf{h}_\gamma(x) \quad (\text{II.182})$$

$$h_{\theta,\Delta u_3}(x) \approx h_{\phi,\Delta u_3}(x) + h_{\gamma,\Delta u_3}(x) \approx b_{w,\Delta u_3}(x) + h_{\gamma,\Delta u_3}(x) \quad (\text{II.183})$$

$$\theta^o(x) \approx (\mathbf{b}_w^T(x) + \mathbf{h}_\gamma^T(x)) \cdot \hat{\mathbf{w}} + (b_{w,\Delta u_3}(x) + h_{\gamma,\Delta u_3}(x)) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.184})$$

La curvatura de la sección la obtenemos nuevamente mediante derivación de las funciones de forma que interpolan los giros:

$$\chi^o(x) \approx \mathbf{h}_\chi^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + h_{\chi,\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.185})$$



$$\mathbf{h}_\chi(x) \approx \frac{d(\mathbf{h}_\theta(x))}{dx} \approx \frac{d(\mathbf{b}_w(x) + \mathbf{h}_\gamma(x))}{dx} \approx \mathbf{b}_\theta(x) \quad (\text{II.186})$$

$$h_{\chi.\Delta u_3}(x) \approx \frac{d(h_{\theta.\Delta u_3})}{dx} \approx \frac{d(b_{w.\Delta u_3} + h_{\gamma.\Delta u_3})}{dx} \approx b_{\theta.\Delta u_3}(x) \quad (\text{II.187})$$

$$\chi^o(x) \approx \mathbf{b}_\theta^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + b_{\theta.\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 \quad (\text{II.188})$$

La deformación longitudinal del eje de referencia se obtiene a partir de la relación (II.78):

$$\varepsilon^o(x) \approx \mathbf{h}_\varepsilon^T(x) \cdot \hat{\mathbf{u}} + h_{\varepsilon.\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + b_{w.\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3)^2 \quad (\text{II.189})$$

$$\mathbf{h}_\varepsilon(x) \approx \frac{d(\mathbf{h}_u(x))}{dx} \approx \mathbf{b}_u(x) \quad (\text{II.190})$$

$$h_{\varepsilon.\Delta u_3}(x) \approx \frac{d(h_{u.\Delta u_3}(x))}{dx} \approx b_{u.\Delta u_3}(x) \quad (\text{II.191})$$

$$\varepsilon^o(x) \approx \mathbf{b}_u^T(x) \cdot \hat{\mathbf{u}} + b_{u.\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_w^T(x) \cdot \hat{\mathbf{w}} + b_{w.\Delta u_3}(x) \cdot \Delta u_3)^2 \quad (\text{II.192})$$

### II.6.3. La matriz de interpolación de los desplazamientos y giros:

La característica fundamental del método de los elementos finitos radica poder expresar el campo de desplazamientos del elemento a partir de una interpolación según una forma lineal conocida:

$${}^t\mathbf{u} \approx {}^t\mathbf{u}(x) \approx \mathbf{H}^T(x) \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{II.193})$$

Donde  $\mathbf{H}(x)$  es la matriz de interpolación de desplazamientos, formada por las funciones de forma obtenidas en los párrafos anteriores, y es  $\hat{\mathbf{u}}(x)$  el campo de desplazamientos del elemento.

$$\mathbf{u}(x)^T = \{u^o(x) \quad w^o(x) \quad \theta^o(x)\} \quad (\text{II.194})$$

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}(x) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{h}_u^T(x) & \mathbf{0} & h_{u.\Delta u_3}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_w^T(x) & h_{w.\Delta u_3}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_\theta^T(x) & h_{\theta.\Delta u_3}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.195})$$

### II.6.4. La interpolación del estado de deformación

Las expresiones obtenidas anteriormente, permiten aproximar el estado de deformación de *cualquier* sección arbitraria  $x$ , a partir de los desplazamientos y giros en los nodos del elemento. Si se hubiese utilizado una mediada de deformación lineal, el vector de estado de deformación sería independiente de la geometría del elemento con la forma lineal conocida:

$${}^t\mathbf{e}^o \approx {}^t\mathbf{e}^o(x) \approx \mathbf{B}^L \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{II.196})$$

donde la matriz  $\mathbf{B}^L$  es la matriz derivada de las funciones de forma.

La consideración de los términos de orden superior en la medida de deformación de Green-Lagrange trajo como consecuencia la dependencia entre el estado de deformación con la geometría del elemento (interpolada a partir de las incógnitas nodales) en una forma no-lineal :

$${}^t\mathbf{e}^o \approx \mathbf{B}^L \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{B}^{NL} \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}})^2 \quad (\text{II.197})$$

La parte lineal de  ${}^t\mathbf{B}$  tiene todos los términos del elemento de viga conocidos de la literatura clásica del análisis lineal de estructuras, pero incluyendo los términos adicionales de las deformaciones por corte:

$$\mathbf{B}^L \approx \mathbf{B}^L(x) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{b}_u^T(x) & \mathbf{0} & b_{u,\Delta u_3}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_\chi^T(x) & h_{\chi,\Delta u_3}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_\gamma^T(x) & h_{\gamma,\Delta u_3}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.198})$$

La parte no-lineal de  ${}^t\mathbf{B}$  estará compuesta por los términos que interpolan al parámetro  $\phi^o(x)$ , el cual dependía de los desplazamientos nodales  $\hat{\mathbf{w}}$  y  $\Delta u_3$ .

$${}^t\mathbf{B}^{NL} \approx {}^t\mathbf{B}^{NL}(x) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_w^T(x) & b_{w,\Delta u_3}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.199})$$

La matriz  ${}^t\mathbf{B}^{NL}$  se puede formular a partir del parámetro  $\phi^o(x)$  según una forma lineal:

$$\phi_k^o \approx \mathbf{B}_k^{NL} \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{II.200})$$

Según esta forma lineal, el vector de estado de deformación de la sección queda interpolado según:

$${}^t\mathbf{e}^o \approx (\mathbf{B}^L(x) \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}}) + \frac{1}{2} \cdot \phi^o(x) \cdot (\mathbf{B}^{NL}(x) \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}}) \quad (\text{II.201})$$

Siguiendo los mismos procedimientos utilizados en el problema elemental de II.2, en la sección II.6.5 se verá una forma de linealizar esta expresión respecto del campo de desplazamientos incógnita.

Si no se consideran las deformaciones por corte, la matriz de interpolación de deformaciones estará definida en cualquier punto del elemento. En cambio si se tienen en cuenta las deformaciones por corte a partir de las funciones de forma modificadas, la matriz de interpolación no estará definida en todo el intervalo sino únicamente en aquellas secciones  $x_k$  donde éstas se evalúan numéricamente (ver nota al pie 12). La consideración de las deformaciones por corte en una interpolación hermitica incorpora la no-linealidad del

material en las funciones de forma a partir de los parámetros de estado; este hecho naturalmente deriva en un mayor costo computacional del método.

$$\begin{aligned}
 x(\xi) &= \frac{L}{2} \cdot (1 + \xi) & \xi(x) &= \frac{2 \cdot x}{L} - 1 & J &= \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} & J^{-1} &= \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \\
 \mathbf{h}_u^T(\xi) &= \mathbf{h}_u^T(x(\xi)) = \left\{ \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \right\} & \mathbf{b}_u^T(\xi) &= \mathbf{b}_u^T(x(\xi)) = \left\{ \left( -\frac{1}{L} \right) \left( \frac{1}{L} \right) \right\} & h_{u,\Delta u_3}(\xi) &= h_{u,\Delta u_3}(x(\xi)) = (1 - \xi^2) \\
 \mathbf{h}_w(\xi_k) &= \left[ \begin{array}{c} \frac{(1 - \xi_k) \cdot (24 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (\xi_k^2 + \xi_k - 2))}{48 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 4 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{(1 + \xi_k) \cdot (24 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (\xi_k - 2) \cdot (\xi_k + 1))}{48 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 4 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{L \cdot (\xi_k - 1) \cdot (\xi_k + 1) \cdot (12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (\xi_k - 1))}{-96 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + 8 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{L \cdot (\xi_k - 1) \cdot (\xi_k + 1) \cdot (-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (\xi_k + 1))}{-96 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + 8 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \end{array} \right] & h_{\gamma,\Delta u_3}(\xi_k) &= \frac{8 \cdot {}^t\widehat{EX}_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\
 \mathbf{b}_w(\xi_k) &= \mathbf{b}_w(x(\xi_k)) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-24 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 3 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (\xi_k^2 - 1)}{24 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 2 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{24 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + 3 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (\xi_k^2 - 1)}{24 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 2 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{-24 \cdot \xi_k \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + 3 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (1 + 2 \cdot \xi_k - 3 \cdot \xi_k^2)}{48 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 4 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{24 \cdot \xi_k \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2 \cdot (1 + \xi_k) \cdot (3 \cdot \xi_k - 1)}{48 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - 4 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \end{array} \right] & b_{w,\Delta u_3}(\xi_k) &= b_{w,\Delta u_3}(x(\xi_k)) = \frac{4 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot (1 - 3 \cdot \xi_k^2)}{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k - {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\
 \mathbf{h}_\gamma(\xi_k) &= \mathbf{h}_\gamma(x(\xi_k)) = \left[ \begin{array}{c} \frac{12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3} \\ \frac{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3} \\ \frac{6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{6 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \end{array} \right] & h_{\gamma,\Delta u_3}(\xi_k) &= h_{\gamma,\Delta u_3}(x(\xi_k)) = \frac{8 \cdot {}^t\widehat{EX}_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\
 \mathbf{b}_\theta(\xi_k) &= \mathbf{b}_\theta(x(\xi_k)) = \left[ \begin{array}{c} \frac{6 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot \xi_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{-6 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot \xi_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} \\ \frac{3 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L \cdot \xi_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} - \frac{1}{L} \\ \frac{3 \cdot {}^t\widehat{GA}_k \cdot L \cdot \xi_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^2} + \frac{1}{L} \end{array} \right] & b_{\theta,\Delta u_3}(\xi_k) &= b_{\theta,\Delta u_3}(x(\xi_k)) = \frac{48 \cdot {}^t\widehat{EX}_k \cdot \xi_k}{-12 \cdot {}^t\widehat{EJ}_k \cdot L + {}^t\widehat{GA}_k \cdot L^3}
 \end{aligned}$$

Fig.15. Funciones de Forma modificadas por corte en el intervalo  $[-1 \quad +1]$

### II.6.5. La linealización del estado de deformación de la sección

El vector  ${}^t\mathbf{e}_k^o({}^t\hat{\mathbf{U}})$  definido en (II.197) permite obtener el estado de deformación de una sección arbitraria del elemento en la forma no-lineal de 2º orden. Interesa conocer ahora la derivada del vector del estado de deformación respecto del campo de desplazamientos nodales. Una variación del estado de deformación puede formularse aplicando el operador variacional sobre la expresión (II.197):

$$\delta {}^t\mathbf{e}_k^o \approx {}^t\left(\frac{\partial \mathbf{e}^o}{\partial \hat{\mathbf{U}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \approx [{}^t\mathbf{D}_k]^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{II.202})$$

donde  ${}^t\mathbf{D}_k$  es la matriz derivada de las deformaciones de una sección  $x_k$  del elemento. Siendo la expresión (II.197) una forma lineal de 2º orden, la matriz  ${}^t\mathbf{D}_k$  deberá ser una función lineal de  ${}^t\hat{\mathbf{U}}$ . Es decir entonces que a partir de la fórmula de Taylor se linealizó el estado de deformación de una sección arbitraria del elemento alrededor el origen, del mismo modo que en el problema elemental (ver II.2.3). A partir de la linealización del estado de deformación, la matriz  ${}^t\mathbf{D}_k$  queda determinada en cualquier sección del elemento según:

$${}^t\mathbf{D}_k \approx \mathbf{B}_k^L + \mathbf{B}_k^{NL} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{U}}]^T \cdot \mathbf{B}_k^{NL} \quad (\text{II.203})$$

donde  $\mathbf{B}_k^L$  y  $\mathbf{B}_k^{NL}$  son la parte lineal y no-lineal respectivamente de las matrices de funciones de forma, evaluadas en una sección  $x_k$ . Cada fila de la matriz anterior, corresponderá a la variación del cada elemento del vector deformación respecto el campo de desplazamientos del elemento; luego, la derivada del estado de deformación de la sección queda determinada según:

$${}^t\mathbf{D} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} & \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} & \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \Delta u_3} \\ \frac{\partial \chi^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} & \frac{\partial \chi^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} & \frac{\partial \chi^o}{\partial \Delta u_3} \\ \frac{\partial \gamma^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} & \frac{\partial \gamma^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} & \frac{\partial \gamma^o}{\partial \Delta u_3} \end{bmatrix} \quad (\text{II.204})$$

Aplicando el operador variacional sobre los términos del vector de deformaciones se obtiene cada una de las filas de la matriz derivada de deformaciones:

$$\delta {}^t\varepsilon^o(x) \approx {}^t\left(\frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{u}} + {}^t\left(\frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{w}} + {}^t\left(\frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \Delta u_3}\right) \cdot \delta \Delta u_3 \quad (\text{II.205})$$

$$\delta {}^t\chi^o(x) \approx {}^t\left(\frac{\partial \chi^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{u}} + {}^t\left(\frac{\partial \chi^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{w}} + {}^t\left(\frac{\partial \chi^o}{\partial \Delta u_3}\right) \cdot \delta \Delta u_3 \quad (\text{II.206})$$

$$\delta {}^t\gamma^o(x) \approx {}^t\left(\frac{\partial \gamma^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{u}} + {}^t\left(\frac{\partial \gamma^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}}\right) \cdot \delta \hat{\mathbf{w}} + {}^t\left(\frac{\partial \gamma^o}{\partial \Delta u_3}\right) \cdot \delta \Delta u_3 \quad (\text{II.207})$$

Las derivadas de la deformación longitudinal respecto de los desplazamientos nodales quedan determinadas según

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \quad \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \quad \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \Delta u_3} \right\} \approx \left\{ \mathbf{b}_u^T \quad \phi^o \cdot \mathbf{b}_w^T \quad b_{u,\Delta u_3} + \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \right\} \quad (\text{II.208})$$

La derivada del parámetro  $\phi^o(x)$  es el equivalente a la curvatura de flexión sin considerar deformaciones por corte:

$$\left\{ \frac{\partial \phi^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \quad \frac{\partial \phi^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \quad \frac{\partial \phi^o}{\partial \Delta u_3} \right\} \approx \left\{ \mathbf{0} \quad \mathbf{b}_w \quad b_{w,\Delta u_3} \right\} \quad (\text{II.209})$$

Las derivadas de la curvatura de corte respecto de los desplazamientos nodales queda determinada según:

$$\left\{ \frac{\partial \gamma^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \quad \frac{\partial \gamma^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \quad \frac{\partial \gamma^o}{\partial \Delta u_3} \right\} \approx \left\{ \mathbf{0} \quad \mathbf{h}_\gamma \quad h_{\gamma,\Delta u_3} \right\} \quad (\text{II.210})$$

Las derivadas de la curvatura de flexión respecto de los desplazamientos nodales quedan determinadas según:

$$\left\{ \frac{\partial \chi^o}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \quad \frac{\partial \chi^o}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \quad \frac{\partial \chi^o}{\partial \Delta u_3} \right\} \approx \left\{ \mathbf{0} \quad \mathbf{h}_\chi^T \quad h_{\chi,\Delta u_3} \right\} \quad (\text{II.211})$$

Agrupando los términos correspondientes, la parte no-lineal la matriz derivada del estado de deformación podrá expresarse a partir del parámetro  $\phi^o(x)$  mediante:

$${}^t\mathbf{D} = {}^t\mathbf{D}({}^t\hat{\mathbf{U}}) \approx \mathbf{B}^L + {}^t\phi^o \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \quad (\text{II.212})$$

Esta forma de expresar la matriz  ${}^t\mathbf{D}({}^t\hat{\mathbf{U}})$  será particularmente útil desde el punto de vista computacional para el cálculo de las deformaciones del elemento.

---/---



# **III. COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES. MODELACIÓN NUMÉRICA DEL HORMIGÓN ARMADO**





### III.1. INTRODUCCIÓN DE LA NO-LINEALIDAD DEL MATERIAL

#### III.1.1. Las hipótesis básicas para las secciones del elemento

Para modelar numéricamente el comportamiento de secciones con materiales de comportamiento no-lineal, se considera como hipótesis que las mismas se podrán discretizar mediante un número finito de fibras con características geométricas y mecánicas equivalentes al material de la sección diferencial analizada. Cada fibra de la sección tendrá asociada una ecuación constitutiva o modelo de material diferente según corresponda.

El alcance de este modelo se limita a secciones de hormigón armado confinadas por estribos; por lo tanto los materiales para los cuales se propone un modelo numérico constitutivo estarán limitados para fibras hormigón confinado y barras de acero estructural.

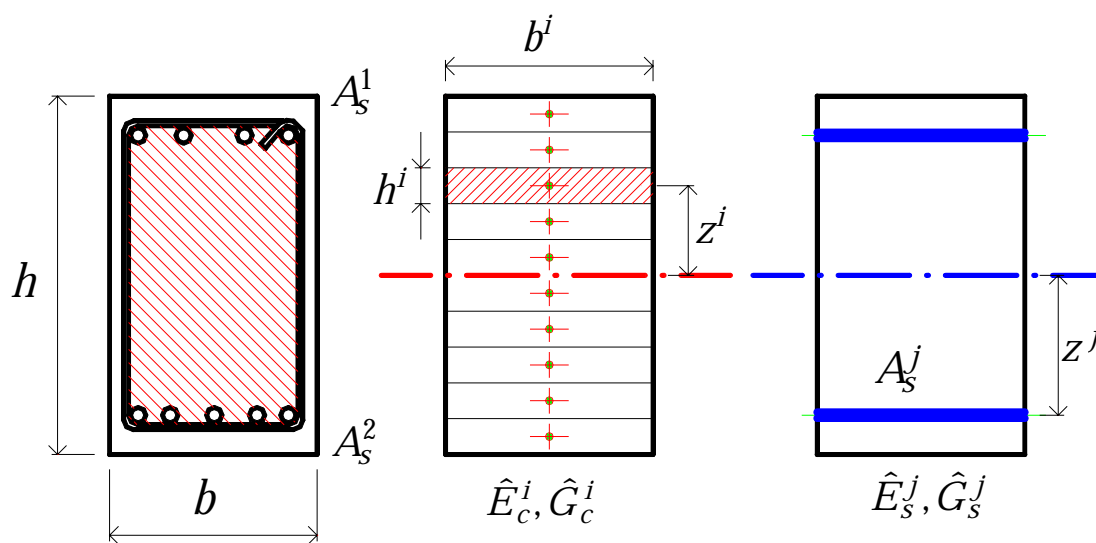


Fig.16. Discretización de una sección de hormigón armado mediante fibras. a) Núcleo de la sección confinada por estribos; b) Fibras correspondientes al hormigón confinado; c) fibras correspondientes al acero

Las propiedades geométricas de la discretización, es decir, el número de fibras, el área y la posición geométrica de cada fibra dentro de la sección se determinarán según algún esquema de cuadraturas numéricas que más adelante se definirá (ver V.1).

Las ecuaciones constitutivas del hormigón confinado y las barras de acero se desarrollan para fibras sometidas exclusivamente a estados uniaxiales de tensión. El efecto triaxial del confinamiento en las secciones de hormigón armado armadas con estribos se considera

únicamente a partir de un sencillo modelo fenomenológico. El fenómeno del daño del hormigón sometido a ciclos de carga y descarga también se considera de manera indirecta a partir de un modelo fenomenológico.

El modelo numérico para las secciones de hormigón armado propuesto, considera adherencia perfecta entre las fibras. No se consideran los fenómenos de deslizamiento (*sliding*) entre fibras o arrancamiento de barras (*pullout*) Tampoco se considera la falla por inestabilidad al equilibrio (pandeo) local de las mismas. El modelo constitutivo del hormigón tiene en cuenta el fenómeno de ablandamiento por deformaciones. El modelo constitutivo del acero es el modelo clásico bilineal con endurecimiento isotrópico y cinemático.

### III.1.2. Las hipótesis básicas para las fibras de la sección

La primer hipótesis fundamental del material, asume que cualquiera sea la ley constitutiva de los materiales que componen las fibras de la sección, existirá un intervalo finito de deformaciones tal, que el estado de tensiones resultante de la fibra podrá descomponerse en la suma del estado inicial más un incremento no arbitrario de tensiones:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_x = {}^t\sigma_x + \Delta\sigma_x \quad (\text{III.1})$$

$${}^{t+\Delta t}\tau_{yz} = {}^t\tau_{yz} + \Delta\tau_{yz} \quad (\text{III.2})$$

De manera vectorial, el vector del estado de tensiones queda determinado en una sección  $x$  y para una fibra ubicada a una distancia  $y$  del eje de referencia según:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = \left\{ {}^{t+\Delta t}\sigma_x \quad {}^{t+\Delta t}\tau_{yz} \right\}^T \quad (\text{III.3})$$

En esta expresión, las tensiones normales se suponen variables en la altura de la sección según  ${}^{t+\Delta t}\sigma_x = {}^{t+\Delta t}\sigma_x(z)$  y las tensiones tangenciales se asumen constantes en la misma (ver IV.1).

De modo que la primer hipótesis del material permite expresar al estado de tensiones resultante como una forma incremental lineal:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = {}^t\mathbf{s} + \Delta {}^t\mathbf{s} \quad (\text{III.4})$$

La segunda hipótesis del material, asume que los incrementos de tensiones serán lineales con el incremento de deformaciones, dentro de cierto intervalo finito de deformaciones. Esto es equivalente a decir que la *rigidez* de la fibra se mantendrá constante durante el incremento de deformaciones a partir de cierto módulo secante

$$\Delta\sigma_x = {}^t\hat{E}_k(z) \cdot \Delta\varepsilon_x \quad (\text{III.5})$$

$$\Delta\tau_{yz} = {}^t\hat{G}_k(z) \cdot \Delta\gamma^o \quad (\text{III.6})$$

La relación entre las tensiones y las deformaciones de la fibra puede establecerse según una matriz secante elastoplástica de la fibra:

$$\Delta^t \mathbf{s}_k = {}^t \mathbf{C}_k(z) \cdot \Delta^t \mathbf{e}_k \quad (\text{III.7})$$

$${}^t \mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} {}^t \hat{E}(z) & 0 \\ 0 & {}^t \hat{G}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

### III.1.3. El módulo secante de la fibra

La segunda hipótesis del material asume una relación lineal entre los incrementos de tensiones y deformaciones, a través de un módulo secante de rigidez y de corte. El único modo de poder efectuar un paso lineal entre dos estados supuestamente conocidos es a partir del módulo secante entre ambos. Es decir, que la segunda hipótesis del material supone la existencia de un módulo secante entre el estado final y el estado inicial, dado por:

$${}^t \hat{E}_k(z) = {}^t \hat{E}(x_k, z) = \frac{\Delta^t \sigma_x}{\Delta^t \varepsilon_x} = \frac{{}^{t+\Delta t} \sigma_x - {}^t \sigma_x}{\Delta^t \varepsilon_x} \quad (\text{III.9})$$

En un material elástico y lineal, esta relación es conocida y el valor del módulo secante coincide con el módulo de elasticidad del material. En cambio, en un material con plasticidad y con una relación no-lineal entre las tensiones y las deformaciones, es necesario determinar en cada paso el estado de tensiones resultante del incremento de deformaciones, y éste dependerá, como sabemos, de la historia de cargas de la fibra analizada.

En el presente trabajo se presenta un modelo uniaxial para fibras de hormigón armado en el cual nada se dice acerca del comportamiento del módulo de corte del hormigón. Este parámetro deberá formularse a partir de una formulación triaxial, ya que depende de las tensiones de confinamiento entre otros parámetros y un modelo material de estas características excede el alcance del presente trabajo.

Por lo tanto se aceptará como válida una estimación del módulo de corte obtenida a partir de la conocida relación de la teoría de la elasticidad, la cual si bien es válida para un material homogéneo, elástico y lineal, es lo suficientemente aproximada si se tiene en cuenta la no-linealidad del material a través del módulo secante:

$${}^t \hat{G}_k(z) \approx {}^t \hat{G}(x_k, z) \approx \frac{{}^t \hat{E}_k(z)}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (\text{III.10})$$

De este modo, la matriz  ${}^t \mathbf{C}_k(z)$  queda determinada como una función del módulo secante de la fibra:

$${}^t \mathbf{C}_k(z) \approx {}^t \hat{E}_k(z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \cdot (1 + \mu)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

El incremento de tensiones en la fibra de la sección puede determinarse también a partir del incremento en el vector del estado de deformación de la sección a partir de la hipótesis cinemática de las secciones planas:

$$\Delta^t \mathbf{s}_k(z) = {}^t \mathbf{C}_k(z) \cdot \mathbf{Z}(z) \cdot \Delta^t \mathbf{e}_k^o \quad (\text{III.12})$$

Donde el incremento de deformación de la sección estaba dado por :

$$\Delta \mathbf{e}_k^o = \left\{ \Delta \varepsilon_k^o \quad \Delta \chi_k^o \quad \Delta \gamma_k^o \right\}^T \quad (\text{III.13})$$

#### III.1.4. Los algoritmos de retorno

Para poder conocer el módulo secante en un material no-lineal, es necesario definir un algoritmo predictor-corrector del estado de tensiones resultante de un incremento de deformaciones conocido y para una historia de cargas conocida a partir por ejemplo, del conocimiento de la deformación plástica. A este algoritmo se lo denomina Algoritmo de Retorno y se puede entender como una función de estado tal que recibe un arreglo con de estado inicial de tensiones y deformaciones de la fibra y un incremento finito de deformaciones de signo arbitrario y devuelve un arreglo con el estado actualizado de la misma:

$${}^t \sigma_x, {}^t \varepsilon_x, {}^t \varepsilon_x^p, \Delta^t \varepsilon_x \xrightarrow{AR} {}^{t+\Delta t} \sigma_x, {}^{t+\Delta t} \varepsilon_x, {}^{t+\Delta t} \varepsilon_x^p$$

En la sección III.3 se presenta una formulación numérica completa de los algoritmos predictores-correctores (algoritmos de retorno) para el hormigón armado modelado según las hipótesis dadas en III.1.1 y III.1.2.

#### III.1.5. La formulación secante. Actualización incremental del estado

En virtud de los algoritmos de retorno que se desarrollan en III.3, las expresiones (III.5) y (III.6) se cumplirán *exactamente* dentro de un intervalo finito de deformaciones y constituyen una formulación incremental lineal (Fig.17).

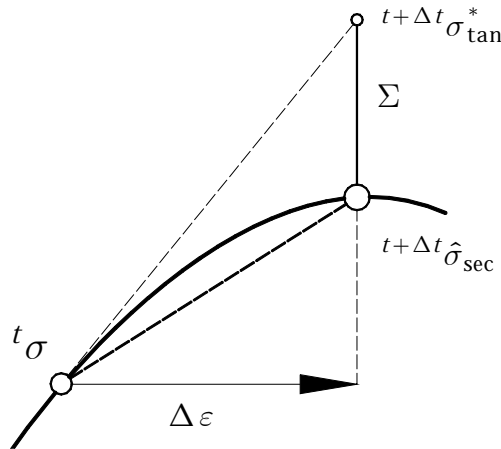


Fig.17. Formulación secante y formulación tangente. Los algoritmos de retorno permiten efectuar incrementos-tangente y luego corregir (retornar) al estado de equilibrio.

El hecho de poder efectuar un paso incremental lineal, no introduce ninguna aproximación numérica en la evaluación de la resultante de esfuerzos internos: El estado inicial y el estado final alcanzado son estados de equilibrio en donde se cumple *exactamente* el balance entre la resultante de fuerzas interiores y la integral del estado de tensiones de la sección (Fig.17).

Naturalmente sí existirá una aproximación numérica en la derivada de la resultante de esfuerzos internos ya que ésta, según su definición instantánea, corresponderá a la tangente al origen del paso. Las derivadas de las resultantes de esfuerzos internos se utilizan en la definición de la matriz tangente de rigidez del problema. La magnitud del error numérico en la utilización de un módulo secante, estará determinada por el tamaño del paso.

### III.1.6. La Formulación tangente. Actualización iterativa de tensiones

Existen otras formulaciones para materiales no-lineales, en las cuales sí existe una aproximación numérica en el estado de tensiones final. En estas formulaciones se linealiza la relación entre las tensiones y las deformaciones dentro de un paso de cargas a partir de un procedimiento de Taylor, para aproximar un estado final de tensiones desconocido. En ese caso, el módulo de cargas es un módulo tangente al origen del incremento, pero introducen una aproximación numérica en la determinación del estado de tensiones final.

La linealización puede efectuarse con una tangente al inicio del incremento o al final del mismo dando lugar a una familia de métodos numéricos conocidos del cálculo numérico (Euler implícito, Euler explícito, Cranck-Nicholson, etc.) ampliamente utilizados en la resolución de ecuaciones diferenciales o de diferencias finitas. Estos métodos ya fueron introducidos de algún modo en la sección II.1.4 y son simplemente una aproximación en diferencias (o incrementos) del cociente incremental entre las tensiones y las deformaciones.

Si se eligiera el camino de linealizar al material respecto del estado anterior, al igual que se hizo con el equilibrio, existiría en cada paso un desbalance de fuerzas adicional, debido a las tensiones “incorrectas”  $\Sigma$ . La integración de estas tensiones desbalanceadas resulta naturalmente en fuerzas desbalanceadas, también llamadas *fuerzas espurias*, y obliga a un procedimiento iterativo hasta hacer *aproximadamente* nula a la fuerza desbalanceada, o bien efectuar dicha corrección a nivel de tensiones cada cierto número de pasos.

Lo dicho anteriormente permite concluir que el tamaño del paso será determinante en la magnitud del error numérico en formulación del equilibrio, y por lo tanto deberán establecerse criterios que controlen los incrementos máximos de deformaciones. El control de tamaño de paso se analiza en detalle en la sección V.3.

## III.2. LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL HORMIGÓN ARMADO

### III.2.1. Plasticidad. Teoría clásica de la plasticidad

El comportamiento plástico de los sólidos se caracteriza por una relación no única entre tensiones y deformaciones. El carácter no-lineal de esta definición es diferente al caso de elasticidad no-lineal, en el cual la relación entre tensiones y deformaciones sí es única. Una característica de definición de plasticidad podría ser la existencia de deformaciones remanentes una vez que cesan de actuar sobre el sólido plástico las fuerzas exteriores.

Muchos materiales poseen un comportamiento plástico y tiene una tensión límite de fluencia para la cual las deformaciones están indeterminadas. Para toda tensión por debajo de la tensión límite se supone una relación elástica lineal (o no-lineal).

Cuando se trabaja con materiales sometidos a programas de carga monotónicos, los incrementos de deformación son siempre del mismo signo y ninguna fibra del material se ve sometida a un cambio de dirección (cambio de signo) en el incremento de deformaciones.

### III.2.2. La relación tensión-deformación en el acero para carga monotónica

Para describir las relaciones tensión-deformación de las fibras correspondientes a las barras de armadura, se adopta una formulación del acero que tiene en cuenta un endurecimiento lineal por deformaciones.

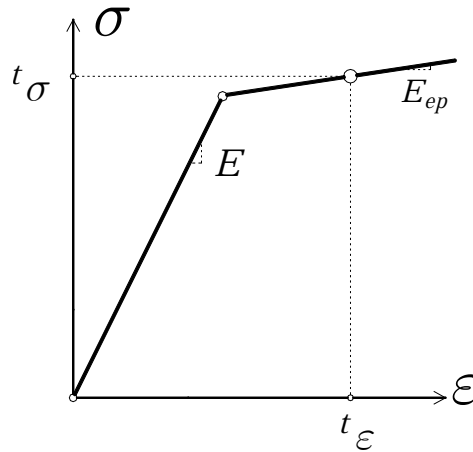


Fig.18. Relaciones tensión-deformación para carga monotónica en fibras de acero

La curva de comportamiento virgen del material, está dada por las siguientes expresiones:

$$\sigma_s(t\varepsilon) = E \cdot t\varepsilon \quad (|t\varepsilon| \leq \varepsilon_Y) \quad (\text{III.14})$$

$$\sigma_s(t\varepsilon) = \sigma_Y + E_{ep} \cdot (t\varepsilon - \varepsilon_Y) \quad (|t\varepsilon| > \varepsilon_Y) \quad (\text{III.15})$$

donde  $E$  es el módulo elástico y es  $E_{ep}$  el modulo tangente elastoplástico.

Si bien el módulo tangente elastoplástico podrá definirse luego a partir de otros parámetros del material, por ahora sólo interesa saber que un valor no nulo de  $E_{ep}$  implica un fenómeno de endurecimiento, debido al aumento de la tensión de fluencia con el aumento de la deformación. Si el módulo tangente elastoplástico en cambio es nulo, se dice que el material tiene un comportamiento elastoplástico ideal.

### III.2.3. La relación tensión-deformación en el hormigón para carga monotónica

Cuando una fibra de hormigón se somete a incrementos de carga monotónicos, la relación entre las tensiones y las deformaciones puede establecerse a partir de las deformaciones totales. Existen conocidas formulaciones que ajustan valores de tensiones y deformaciones totales basados en ensayos sobre probetas de hormigón sometidas a carga monotónica. Una de las fórmulas más utilizadas en la práctica es la ecuación cuadrática siguiente:

$$\sigma(t\varepsilon) = f'_C \cdot \left( 2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right)^2 \right) \quad (\text{III.16})$$

Esta relación está definida hasta una deformación máxima denominada deformación de fluencia o deformación pico, a partir de la cual el material sufre una pérdida súbita de resistencia.

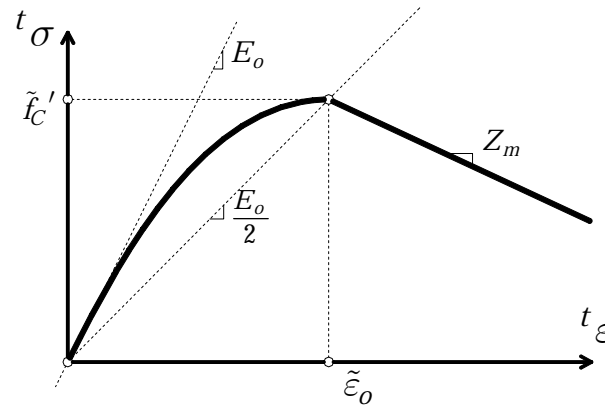


Fig.19. Relaciones entre tensiones y deformaciones instantáneas. Superficie de fluencia para compresión

En el caso de secciones de hormigón armado confinadas, el material puede alcanzar valores mayores a la deformación de fluencia con tensiones menores a la tensión máxima. Este fenómeno se conoce como ablandamiento por deformaciones. La energía de deformación involucrada en el ablandamiento por deformaciones será dependiente del tamaño de la probeta o elemento debido al fenómeno de localización.

El modelo más utilizado para describir las relaciones entre tensiones y deformaciones en el hormigón confinado es el modelo de Scott *et al*[28] en donde se propone un coeficiente de confinamiento función de la densidad de estribos.

Para las deformaciones menores a la deformación de fluencia  $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_o$ :

$$\sigma(t\varepsilon) = k \cdot f_C' \cdot \left( 2 \cdot \frac{t\varepsilon}{k \cdot \varepsilon_o} - \left( \frac{t\varepsilon}{k \cdot \varepsilon_o} \right)^2 \right) \quad (\text{III.17})$$

Para las deformaciones mayores a la deformación de fluencia,  $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}_o$

$$\sigma(t\varepsilon) = k \cdot f_C' \cdot (1 - Z_m \cdot (t\varepsilon - k \cdot \varepsilon_o)) \quad (\text{III.18})$$

aunque no menor a un plafón del 20% de la resistencia característica confinada.

$$\sigma(t\varepsilon) \geq 0.2 \cdot k \cdot f_C' \quad (\text{III.19})$$

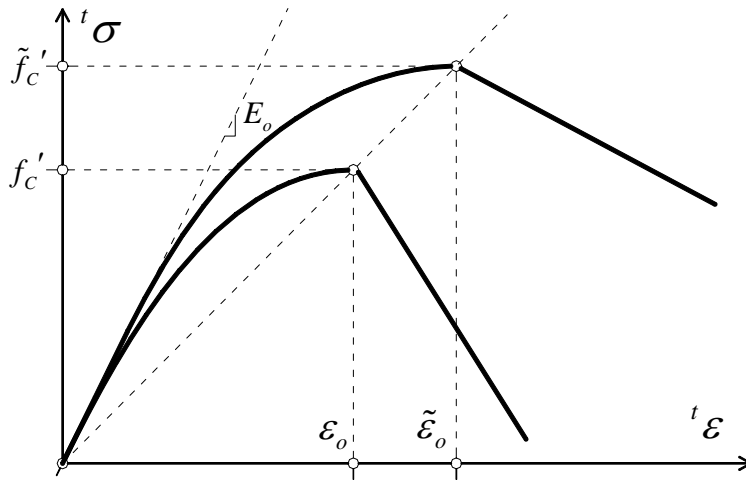


Fig.20. Influencia del efecto del confinamiento sobre los parámetros característicos de resistencia del hormigón. El módulo secante al punto de tensión máxima no varía

La pendiente del tramo de ablandamiento del material, está dada por el parámetro  $Z_m$ . Debido al fenómeno de localización, la pendiente del tramo de ablandamiento no es una propiedad intensiva del material sino que depende entre otras cosas, del tamaño de la probeta ensayada. Por lo tanto, el parámetro  $Z_m$  deberá corregirse en función del tamaño del elemento.

$$Z_m = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} - \varepsilon_{50h} - k \cdot \varepsilon_o} \quad (\text{III.20})$$

$$\varepsilon_{50u} = \frac{0.0207 + \varepsilon_o \cdot f_C'}{f_C' + 6.896} \quad (\text{III.21})$$

$$\varepsilon_{50h} = 0.75 \cdot \sqrt{\frac{h_1}{s_h}} \quad (\text{III.22})$$

$$\rho_s = \frac{A_h \cdot \Omega_h}{A_k \cdot s_h} \quad (\text{III.23})$$



$f_{yh}$ : tensión de fluencia del acero de los estribos;

$h_1$ : ancho del núcleo de hormigón medido hasta el borde exterior de los estribos;

$s_h$ : separación entre estribos;

$A_h = \frac{\pi \cdot \phi_h^2}{4}$ : sección del estribo;

$A_k = h_1 \cdot h_2$ : área del núcleo de hormigón, medida hasta el borde exterior de los estribos;

$\Omega_h = 2 \cdot (h_1 + h_2)$ : perímetro del núcleo de hormigón, medida hasta el borde exterior de los estribos.

Las expresiones anteriores representan el comportamiento virgen del material, el cual se utilizará como referencia en la formulación de la tensión de fluencia en las fibras el hormigón. Las expresiones anteriores pueden describirse a partir de parámetros equivalentes a los característicos:

$$\sigma(t\varepsilon) = \tilde{f}_C' \cdot \left( 2 \cdot \frac{t\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}_o} - \left( \frac{t\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}_o} \right)^2 \right) \quad (t\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_o) \quad (\text{III.24})$$

$$\sigma(t\varepsilon) = \tilde{f}_C' \cdot (1 - Z_m \cdot (t\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_o)) \quad (t\varepsilon > \tilde{\varepsilon}_o) \quad (\text{III.25})$$

El tilde sobre las variables indica la corrección por confinamiento:

$\tilde{\varepsilon}_o = k \cdot \varepsilon_o$ : Deformación máxima de fluencia confinada.

$\tilde{f}_C' = k \cdot f_C'$ : Tensión de máxima fluencia [MPa]. Resistencia a la compresión simple del hormigón confinado.

La tensión máxima de fluencia está relacionada con el módulo tangente inicial según:

$$\tilde{f}_C' = \frac{\tilde{\varepsilon}_o \cdot E_o}{2} \quad (\text{III.26})$$

Los parámetros del modelo que tienen en cuenta el efecto de confinamiento son los siguientes:

$$k = 1 - \frac{\rho_s \cdot f_{yh}}{f_C'} \quad (\text{III.27})$$

Las expresiones anteriores fueron obtenidas según ensayos en columnas de hormigón confinado con estribos rectangulares, con velocidades de deformación bajas del orden de  $\frac{\varepsilon_o}{600 \cdot s}$ , es decir velocidades de deformación para las cuales se alcanza la tensión pico en 10 minutos o más. Basados en ensayos de carga con altas velocidades de deformación, Scott *et al* [28] propusieron modificar las expresiones anteriores incrementando un 25 % la tensión y deformación de fluencia y la pendiente del tramo de caída:

$$k^{high} = 1.25 \cdot \left( 1 + \frac{\rho_s \cdot f_{yh}}{\varphi \cdot f_C'} \right) \quad (III.28)$$

$$Z_m^{high} = \frac{0.625}{\varepsilon_{50u} + \varepsilon_{50h} - k \cdot \varepsilon_o} \quad (III.29)$$

Las expresiones anteriores fueron obtenidas según ensayos en columnas con estribos rectangulares para velocidades de deformación del orden de:  $\frac{5 \cdot \varepsilon_o}{s} \leq \dot{\varepsilon} \leq \frac{15 \cdot \varepsilon_o}{s}$ , las cuales equivalen a alcanzar la tensión pico en un lapso de entre 70 a 200 ms.

### III.2.4. Historia de cargas. Deformación plástica

Para un estado de deformación admisible dado, la deformación se podrá componer de una parte elástica y una parte plástica. Estas variables forman parte del estado de deformación de la fibra.

$$t_\varepsilon = t_{\varepsilon^e} + t_{\varepsilon^p} \quad (III.30)$$

Para poder determinar la historia de cargas de una fibra que ha sido sometida a ciclos de carga y descarga, es necesario definir variables de estado adicionales. Para ello, se define una variable interna  $t_\alpha$  función de la cantidad de flujo plástico (*slip*), que registra la máxima deformación plástica a la que fue sometida dicha fibra en su historia de cargas.

### III.2.5. La tensión de fluencia y el criterio de fluencia

La hipótesis general, demostrada experimentalmente, indica que la fluencia del material se produce cuando las tensiones satisfacen un criterio general de fluencia.

$$F(t_\sigma, t_\alpha) = 0 \quad (III.31)$$

donde  $t_\alpha$  es un parámetro de endurecimiento. Este criterio de fluencia se puede entender en el espacio unidimensional, como una tensión de fluencia  $f_Y(t_\alpha)$ , con la posición de la curva dependiendo del valor instantáneo del parámetro de estado  $t_\alpha$ .

$$F(t_\sigma, t_\alpha) = |t_\sigma| - f_Y(t_\alpha) = 0 \quad (III.32)$$

Esta expresión admite diferentes casos:

- Si una fibra del material se encuentra en un estado de tensiones *sobre* la superficie de fluencia, se verifica  $t_F = 0$  y los incrementos de deformación en carga producirán un incremento de las deformaciones plásticas. Debido a que éste es un proceso irreversible, deben incrementarse en el mismo grado las variables internas de endurecimiento.
- Si la fibra se encuentra en un estado de tensiones *bajo* la superficie de fluencia, el criterio de fluencia para este caso cumple  $t_F < 0$ , lo cual significa que los

incrementos de deformación en carga no producirán incrementos de deformaciones plásticas por estar la fibra en un estado elástico.

Todos los estados de tensiones que cumplan alguna de las condiciones anteriores, se dice que son estados admisibles y satisfacen el criterio de fluencia mediante  ${}^tF \leq 0$ . Por el contrario, un estado de tensiones que se encuentra fuera de la superficie de fluencia es un estado inadmisibles y no satisface el criterio de fluencia.

### III.2.6. La tensión de fluencia del acero

En una fibra de acero sometida a un estado uniaxial de tensiones, la fluencia del material se manifiesta a partir de que las tensiones alcanzan un valor denominado tensión de fluencia inicial, la cual es una propiedad intensiva del material.

En una formulación de acero del tipo elastoplástico ideal, la tensión de fluencia inicial sería una constante durante todo el proceso de deformaciones:

$$f_Y = \sigma_Y \quad (\text{III.33})$$

En el modelo bilineal propuesto se utiliza una tensión de fluencia variable con el nivel de deformaciones, por lo cual es conocido en la bibliografía como un *modelo de endurecimiento isotrópico por deformaciones*. En ese caso, la tensión de fluencia del acero aumentará con las deformaciones plásticas acumuladas según la relación lineal:

$$f_Y({}^t\alpha) = (\sigma_Y + K^P \cdot {}^t\alpha) \quad (\text{III.34})$$

donde  $K^P$  es el módulo de endurecimiento plástico para el acero. El módulo de endurecimiento es una propiedad intensiva del material y para el modelo bilineal propuesto para las fibras de acero, este valor se puede aceptar constante a lo largo del proceso de deformación plástica.

### III.2.7. La tensión de fluencia en el hormigón confinado

En una fibra de hormigón sometida a un estado uniaxial de tensiones, *la fluencia del material se manifiesta al comienzo de la historia de cargas*, lo cual es equivalente a decir que la tensión de fluencia inicial es nula.

$$\sigma_Y = 0 \quad (\text{III.35})$$

La tensión de fluencia de las fibras del hormigón a compresión podrá entonces definirse de manera explícita mediante la curva del comportamiento virgen del material. La tensión de fluencia aumentará desde el origen hasta alcanzar el valor máximo dado por  $\tilde{f}_C'$ . Este fenómeno es conocido como endurecimiento por deformaciones el cual, a diferencia del acero, no se produce a razón constante sino con un módulo dependiente del nivel de deformación plástica acumulada.

$$f_Y({}^t\alpha) = K^P({}^t\alpha) \cdot {}^t\alpha \quad (\text{III.36})$$

donde  $K^P(\alpha)$  es el módulo plástico con dependencia (no lineal) de la deformación plástica acumulada para el hormigón confinado.

En una fibra de hormigón sometida a un estado uniaxial de compresión, luego de alcanzar la máxima tensión en la deformación pico se observa una fuerte disminución de la tensión de fluencia, para un incremento en carga de las deformaciones. A este comportamiento se le denomina ablandamiento por deformaciones. (*strain softening*) y este fenómeno sólo podrá manifestarse en una fibra de hormigón perteneciente una sección de hormigón fuertemente confinada, en la cual puedan existir estados de tensiones triaxiales, que no consideraremos aquí sino a través de los factores de confinamiento definidos en los modelos fenomenológicos del material. Para este caso, se propone como tensión de fluencia a la siguiente expresión:

$$f_Y(t_\alpha) = \left| \tilde{f}_C' \right| - K^P(t_\alpha) \cdot (t_\alpha - |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.37})$$

donde  $K^P$  es el módulo plástico y  $\tilde{f}_C'$  y  $\tilde{\varepsilon}_o^p$  son la tensión y deformación plástica de fluencia, respectivamente.

### III.2.8. El criterio de fluencia en el acero. Efecto Bauschinger

Para las fibras de acero, la consideración del endurecimiento isotrópico en una forma lineal lleva a la siguiente expresión del criterio de fluencia:

$$F(t_\sigma, t_\alpha) = |t_\sigma| - (\sigma_Y + K^P \cdot t_\alpha) = 0 \quad (\text{III.38})$$

El endurecimiento se denomina isotrópico en el sentido de que cualquier estado de cargas *el centro de la superficie de fluencia permanece en el origen*. La consideración del endurecimiento isotrópico, asume que *la superficie de fluencia resultante es una expansión uniforme de la superficie de fluencia inicial*.

En los materiales policristalinos como el acero, se observa experimentalmente que si se carga un espécimen en una dirección determinada hasta la tensión de fluencia y luego se lo recarga en la dirección contraria, la tensión de fluencia obtenida es sustancialmente menor que la tensión de fluencia en la dirección original. A este fenómeno se conoce como efecto Bauschinger. La presencia de este efecto, complica enormemente la modelación de la deformación plástica.

Para poder describir el efecto Bauschinger, se puede utilizar un modelo simplificado denominado modelo de endurecimiento cinemático. Este modelo sencillo, asume que la reducción de la tensión de fluencia *en la dirección opuesta a la carga*, es igual al incremento de tensiones por encima de la tensión de fluencia en la dirección original.

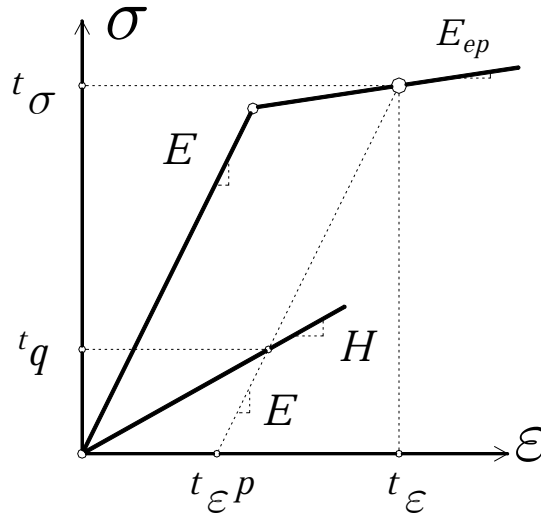


Fig.21. Módulo de endurecimiento cinemático en fibras de acero

Esto equivale a considerar que durante el proceso de carga plástica, *la superficie de fluencia se traslada en el espacio de tensiones y su forma y tamaño permanecen inalteradas*. Esta característica se puede construir introduciendo una variable interna adicional, que pueda definir la ubicación del centro de la superficie de fluencia. Luego, la condición de fluencia se modifica a:

$$F(t_\sigma, t_\alpha, t_q) = |t_\sigma - t_q| - \sigma_Y \leq 0 \quad (\text{III.39})$$

donde el parámetro de endurecimiento  $t_q$ , usualmente llamado tensión de retorno ( *back stress* ), representa el centro de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones.

Si se consideran el efecto de endurecimiento isotrópico y cinemático combinados, la superficie de fluencia tendrá la forma general:

$$F(t_\sigma, t_\alpha, t_q) = |t_\sigma - t_q| - (\sigma_Y + K^p \cdot t_\alpha) = 0 \quad (\text{III.40})$$

### III.2.9. El criterio de fluencia en el hormigón

En las fibras de hormigón pertenecientes a secciones fuertemente confinadas y sometidas a un incremento de deformaciones de compresión, la tensión de fluencia admite dos expresiones, según sea el caso del parámetro interno de endurecimiento pertenezca al intervalo de endurecimiento o ablandamiento respectivamente. Debido a ello, el criterio de fluencia deberá definirse de manera diferente para cada uno de estos intervalos de deformación.

$${}^tF = |{}^t\sigma| - K^p({}^t\alpha) \cdot {}^t\alpha \leq 0 \quad ({}^t\alpha \leq |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.41})$$

$${}^tF = |{}^t\sigma - \tilde{f}_C'| + K^p({}^t\alpha) \cdot ({}^t\alpha - |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \leq 0 \quad ({}^t\alpha > |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.42})$$

En la formulación propuesta, se desprecia la resistencia a la tracción en las fibras de hormigón. La tensión de fluencia correspondiente a esta hipótesis no podrá ser otra que la función nula.

Respecto al criterio de Fluencia, se busca una función tal que para un incremento de tensiones que supere la resistencia a la tracción del hormigón, devuelva un valor positivo y para incrementos de tensiones de tracción menores a la resistencia de tracción, informe un valor negativo. La forma más simple de definir esta condición está dada por:

$${}^tF({}^t\sigma) = {}^tF = {}^t\sigma \leq 0 \quad (\text{III.43})$$

### III.2.10. Las reglas de flujo

Sea una fibra del material que ha sido sometida a una determinada historia de cargas y para la cual se conoce el estado de tensiones y deformaciones en un instante  $t$ :

$${}^t\mathbf{s} = \{ {}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon^p, {}^t\alpha \} \quad (\text{III.44})$$

Supongamos ahora que se le aplica a la fibra un incremento de deformaciones. Según lo visto en III.2.4 el incremento de deformaciones podrá descomponerse en una parte elástica o reversible y en una parte plástica o irreversible.

$$\Delta {}^t\varepsilon = \Delta {}^t\varepsilon^e + \Delta {}^t\varepsilon^p \quad (\text{III.45})$$

El objetivo es poder definir las relaciones existentes entre los incrementos de deformaciones y los incrementos de tensiones en un espacio unidimensional, para todos los estados admisibles de tensiones. A estas relaciones se las denomina reglas de flujo (*flow rules*).

El criterio de fluencia permite analizar dos casos posibles. En primer lugar, los estados de tensiones menores existentes *bajo* la superficie de fluencia, es decir  ${}^tF < 0$ , tendrán un comportamiento elástico en carga y descarga. En este estado, los incrementos de tensiones se pueden definir en términos de deformaciones elásticas o lo que es lo mismo, en término de deformaciones totales mediante el módulo de elasticidad:

$$\Delta {}^t\sigma = E \cdot \Delta {}^t\varepsilon = E \cdot \Delta {}^t\varepsilon^e \quad ({}^tF < 0) \quad (\text{III.46})$$

A partir de superar el valor de la tensión de fluencia inicial, los únicos estados admisibles estarán dados por aquellas tensiones que verifiquen el criterio de fluencia según  ${}^tF = 0$  y la trayectoria de tensiones se manifestará *sobre* la curva de fluencia. En este estado elastoplástico, los incrementos de tensiones ahora se definen a partir de las deformaciones plásticas mediante el módulo plástico según:

$$\Delta {}^t\sigma = K^p \cdot \Delta {}^t\varepsilon^p \quad (\text{III.47})$$

Para los estados sobre la superficie de fluencia, la deformación plástica de la fibra es la máxima de su historia de cargas, y se verifica que:

$$|{}^t\varepsilon^p| = {}^t\alpha \quad (\text{III.48})$$

Si en este estado la fibra sufriera un incremento de deformación en carga, el estado resultante tendrá una deformación plástica mayor a cualquiera alcanzada anteriormente:

$$|{}^t\varepsilon^p + \Delta{}^t\varepsilon^p| > {}^t\alpha \quad (\text{III.49})$$

A esta carga de la fibra se la denomina *primera carga* y es esencialmente un proceso plástico. Si la actual deformación plástica de la fibra es menor que la máxima sufrida en algún estado previo, la fibra anteriormente tuvo una carga mayor; debido a este hecho, un incremento de deformación en carga desde este estado se denominará *recarga*.

$$|\varepsilon^p| < {}^t\alpha \quad (\text{III.50})$$

Este estado se verifica tanto para las fibras en estado elástico como para los estados sobre la superficie de fluencia que recibieron una inversión del signo de cargas. (*load reversal*)

En este caso, los incrementos de deformaciones estarán formados únicamente por la parte elástica y el consecuente incremento de tensiones será entonces un proceso elástico, tanto para carga, como en descarga.

### III.2.11. Carga, descarga y recarga en fibras de acero

En las fibras de acero, para los estados que se encuentren en estado elástico, no hay diferencias entre la carga, la descarga o la recarga en el modelo propuesto, verificándose para todas la relación (III.46) con el módulo de elasticidad del acero

$$\Delta{}^t\sigma_s = E_s \cdot \Delta{}^t\varepsilon = E_s \cdot \Delta{}^t\varepsilon^e \quad ({}^tF < 0) \quad (\text{III.51})$$

A partir de superar el valor de la tensión de fluencia inicial  $\sigma_Y$ , la trayectoria de tensiones se manifestará *sobre* la curva de fluencia y los incrementos de tensiones y deformaciones totales se relacionan linealmente mediante el módulo plástico  $K^p$  según:

$$\Delta{}^t\sigma_s = K^p \cdot \Delta{}^t\varepsilon^p \quad (\text{III.52})$$

También es posible establecer una relación incremental (lineal) entre tensiones y deformaciones en carga elastoplástica, a partir del módulo elastoplástico del acero  $E_{ep}$ :

$$\Delta{}^t\sigma_s = E_{ep} \cdot \Delta{}^t\varepsilon \quad (\text{III.53})$$

El módulo tangente elastoplástico está relacionado con el módulo elástico, el módulo de endurecimiento cinemático y el módulo de endurecimiento isotrópico según:

$$E_{ep} = \frac{E \cdot K^p}{E + K^p} \quad (\text{III.54})$$

Si se adopta la hipótesis de endurecimiento cinemático, la tensión de referencia  ${}^tq$  se actualiza según el módulo de endurecimiento cinemático  $H$ :

$$\Delta{}^tq = H \cdot \Delta{}^t\varepsilon^p \quad (\text{III.55})$$

En este caso, el módulo tangente elastoplástico también tendrá en cuenta el endurecimiento cinemático según:

$$E_{ep} = \frac{E \cdot (H + K^p)}{E + H + K^p} \quad (\text{III.56})$$

Cuando se produce la descarga, los incrementos de tensiones se relacionan con el módulo de elasticidad, es decir que *la descarga es elástica*.

En el caso de la recarga, también será elástica pero debido a que el material pudo haber sufrido deformaciones plásticas en su historia de cargas, la tensión de comparación ya no será la tensión de fluencia inicial, sino las tensiones dadas por la superficie de fluencia. Esta es la característica del fenómeno de endurecimiento por deformaciones:

Si se conoce el módulo tangente elastoplástico a partir de ensayos, el módulo de endurecimiento isotrópico y cinemático quedarán determinados según:

$$\frac{(H + K^p)}{E} = \frac{\omega}{1 - \omega} \quad (\text{III.57})$$

donde el parámetro  $\omega$  relaciona al módulo tangente elastoplástico con el módulo elástico<sup>13</sup>.

### III.2.12. Carga, descarga y recarga en las fibras de hormigón

Para las fibras de hormigón en estado elástico, se verifica también una relación lineal, aunque para el modelo del hormigón que aquí se propone, el módulo de carga y descarga es dependiente del nivel de deformación plástica acumulada. La consideración de un módulo en esta forma matemática proviene de un modelo simplificado de daño, el cual se desarrolla en el párrafo siguiente.

$$\Delta^t \sigma_c = {}^t E_r \cdot \Delta^t \varepsilon \quad ({}^t F_c < 0) \quad (\text{III.58})$$

En las fibras de hormigón, no existe un proceso de primera carga elástico, como en se verifica en las fibras de acero hasta la tensión fluencia, ya que el mismo es plástico desde el comienzo de la carga, según se vio en III.2.7 Para este proceso de carga plástica, la relación entre los incrementos de tensiones y deformaciones, estará dada por la expresión siguiente, donde  $K^p({}^t \alpha)$  es el módulo plástico del material.

$$\Delta^t \sigma = K^p({}^t \alpha) \cdot \Delta^t \varepsilon^p \quad (\text{III.59})$$

El módulo plástico del material será dependiente en una forma no-lineal del nivel de deformación plástica. La expresión del módulo plástico del hormigón se desarrolla en el párrafo III.2.14.

---

<sup>13</sup> En algunos aceros estructurales (A60) se pueden admitir valores del módulo elastoplástico en el orden del 3.5% del módulo elástico ( $\omega \approx 0.035$ )



### III.2.13. La formulación de un modelo simplificado de daño para el hormigón

Los ensayos de carga cíclica en probetas de hormigón ponen de manifiesto un fenómeno en donde se observa la caída del módulo de carga y recarga debida al deterioro de la fibra del material. Este proceso se manifiesta desde comienzo del proceso de deformación.

En el párrafo presente, se propone un sencillo modelo fenomenológico que pretende representar con razonable exactitud el deterioro del material mediante la disminución del valor del módulo de descarga y recarga, a partir de las deformaciones plásticas máximas sufridas por la fibra en su historia de cargas. El modelo está basado en un estado uniaxial de tensiones, donde el confinamiento sólo está considerado en los valores de tensiones y deformaciones pico, como se definieron en el modelo de Scott *et al* [28].

El modelo podrá considerarse únicamente en fibras de hormigón pertenecientes a secciones fuertemente confinadas, en las cuales es posible la existencia del fenómeno de ablandamiento por deformaciones (*softening*). Para considerar este fenómeno de manera sencilla, se propone un módulo de recarga y descarga dependiente explícitamente de la deformación plástica de la fibra de análisis.

$${}^tE_r = \psi({}^t\alpha) \cdot E_o \quad (\text{III.60})$$

Para el factor de daño  ${}^t\psi = \psi({}^t\alpha)$  se propone una función lineal con la máxima deformación plástica:

$${}^t\psi = \psi({}^t\alpha) = 1 - \Theta \cdot ({}^t\alpha - \hat{\alpha}_D^*) \quad (\text{III.61})$$

La fórmula así propuesta es independiente del número de ciclos, el número de veces de cambio de dirección del esfuerzo, la energía de fractura, etc. como debería ser considerada en una teoría ó formulación integral basada en la mecánica del continuo y la fractomecánica del hormigón.

El parámetro de daño  $\Theta < 1$ , se podrá determinar a partir de la información existente en la bibliografía referente a ensayos de cargas cíclicas en probetas de hormigón confinado. Si en estos ensayos de carga cíclica se miden los módulos de recarga al comienzo y al final del proceso, el parámetro auxiliar de ensayo se podrá estimar mediante:

$$\Theta := \frac{\hat{E}_o - \hat{E}_U}{\hat{E}_o \cdot (\hat{\alpha}_U - \hat{\alpha}_D^*)} \quad (\text{III.62})$$

$\hat{E}_U$  : Valor mínimo del módulo, medido en descarga para la máxima deformación

$\hat{E}_o$  : Valor máximo del módulo, medido en descarga para la deformación umbral (aproximadamente igual al módulo tangente inicial)

$\hat{\alpha}_U$ : Valor medido en ensayo de la máxima deformación plástica (máxima deformación residual en descarga) en valor absoluto.

$\hat{\alpha}_D^*$ : Valor medido en ensayo de la deformación umbral, en valor absoluto, a partir de la cual se considera el comienzo del proceso de daño.

El parámetro de daño puede expresarse asimismo a partir de la relación entre los módulos de descarga al comienzo del proceso plástico y al final del mismo

$$\Theta := \frac{1 - \psi_U}{(\hat{\alpha}_U - \hat{\alpha}_D^*)} \quad (\text{III.63})$$

$$\psi_U = \frac{\hat{E}_U}{\hat{E}_o} \quad (\text{III.64})$$

Los parámetros del modelo de daño propuesto se pueden ver gráficamente en la Fig.22:

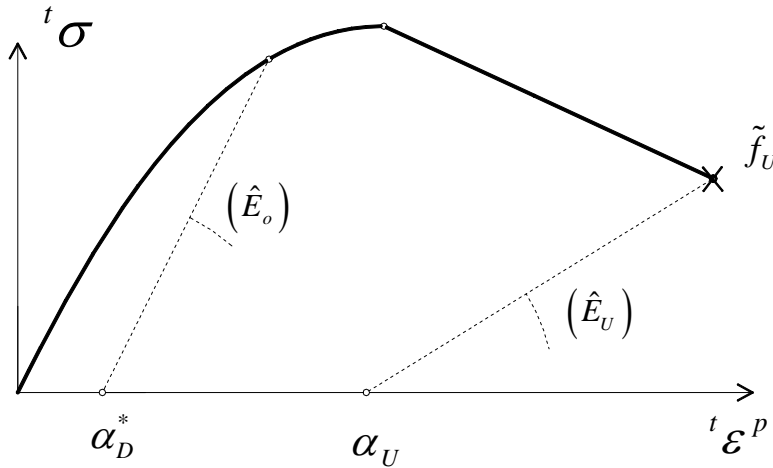


Fig.22. Módulos de recarga al comienzo y al final del proceso de daño, según el modelo simplificado propuesto. Las deformaciones plásticas  $\alpha$  indican la máxima deformación plástica sufrida por la fibra en la historia de cargas

### III.2.14. El módulo plástico del hormigón

La regla de flujo y los criterios de descarga y recarga permitieron establecer una relación entre deformaciones plásticas y tensiones. El parámetro que relaciona estas magnitudes de estado es el módulo plástico y a diferencia de su equivalente en las fibras de acero, es una función dependiente del estado de deformaciones.

A partir de las reglas de flujo del hormigón, se puede efectuar un sencillo cambio de variable que permite obtener una relación entre las deformaciones totales y las deformaciones plásticas:

$$\varepsilon(t\alpha) = -\sqrt{2 \cdot t\alpha \cdot |\tilde{\varepsilon}_o|} \quad (t\alpha \leq |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.65})$$

$$\varepsilon(t\alpha) = \frac{\tilde{\varepsilon}_o \cdot (1 + Z_m \cdot \tilde{\varepsilon}_o) - 2 \cdot t\alpha}{2 + \tilde{\varepsilon}_o \cdot Z_m} \quad (t\alpha > |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.66})$$

Reemplazando el cambio de variable sobre la tensión de fluencia el hormigón, se obtiene una expresión en función de las deformaciones plásticas acumulada:

$$f_Y(t\alpha) = E_o \cdot (t\alpha - \sqrt{2 \cdot t\alpha \cdot |\tilde{\varepsilon}_o|}) \quad (t\alpha \leq |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.67})$$

$$f_Y(t\alpha) = \frac{E_o \cdot \tilde{\varepsilon}_o \cdot (1 + Z_m \cdot (\tilde{\varepsilon}_o + t\alpha))}{2 + \tilde{\varepsilon}_o \cdot Z_m} \quad (t\alpha > |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.68})$$

Remplazando estas funciones de fluencia sobre el criterio de fluencia para cualquier estado perteneciente a la superficie de fluencia, se obtiene:

$$|f_Y(t\alpha)| - |\tilde{f}_C'| + K^p(t\alpha) \cdot (t\alpha - |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \equiv 0 \quad (t\alpha > |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.69})$$

$$|f_Y(t\alpha)| - K^p(t\alpha) \cdot t\alpha \equiv 0 \quad (t\alpha \leq |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.70})$$

Despejando se obtiene la expresión del módulo plástico para cada zona de deformaciones.

$$K^p(t\alpha) = E_o \cdot \left( \sqrt{\frac{2 \cdot |\tilde{\varepsilon}_o|}{t\alpha}} - 1 \right) \quad (t\alpha \leq |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.71})$$

$$K^p(t\alpha) = \frac{E_o \cdot \tilde{\varepsilon}_o \cdot Z_m}{(\tilde{\varepsilon}_o \cdot Z_m + 2)} \quad (t\alpha > |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.72})$$

Las expresiones obtenidas para el módulo plástico se obtuvieron suponiendo un módulo elástico de carga y recarga constante durante el proceso de deformación. En el caso de considerar el efecto del daño, se obtiene por el mismo procedimiento las siguientes expresiones del módulo plástico del hormigón:

$$K^p(t\alpha) = -\frac{tE_r}{t\alpha} \cdot \left( \tilde{\varepsilon}_o \cdot (1 - t\psi) + t\alpha - \sqrt{\tilde{\varepsilon}_o^2 \cdot (1 - t\psi)^2 - 2 \cdot t\alpha \cdot \tilde{\varepsilon}_o \cdot t\psi} \right) \quad (t\alpha \leq |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.73})$$

$$K^p(t\alpha) = \frac{tE_r \cdot Z_m \cdot \tilde{\varepsilon}_o \cdot (2 \cdot (\tilde{\varepsilon}_o + t\alpha) \cdot t\psi - \tilde{\varepsilon}_o)}{2 \cdot t\psi \cdot (\tilde{\varepsilon}_o^p + t\alpha) \cdot (Z_m \cdot \tilde{\varepsilon}_o + 2 \cdot t\psi)} \quad (t\alpha > |\tilde{\varepsilon}_o^p|) \quad (\text{III.74})$$

Es sencillo verificar que si evalúan las expresiones anteriores con un factor de daño unitario, se obtienen las fórmulas del módulo plástico definidas en (III.71) y (III.72)

La deformación plástica que correspondiente al fin del endurecimiento y el comienzo del ablandamiento por deformaciones  $\tilde{\varepsilon}_o^p$  se obtiene planteando la igualdad de las funciones de fluencia en término de deformaciones totales y deformaciones plásticas. Resolviendo la ecuación no-lineal se obtiene:

$$\tilde{\varepsilon}_o^p = \frac{\sqrt{(1 + (\alpha_D - \tilde{\varepsilon}_o) \cdot \Theta)^2 + 2 \cdot \Theta (\tilde{\varepsilon}_o + 2 \cdot \alpha_D \cdot \tilde{\varepsilon}_o)} - (\alpha_D - \tilde{\varepsilon}_o) \cdot \Theta - 1}{2 \cdot \Theta} \quad (\text{III.75})$$

En donde  $\alpha_D$  y  $\Theta$  son valores medidos de ensayos de carga cíclica. Para el caso particular en que se considere el fenómeno de daño desde el comienzo del proceso de deformación plástica ( $\alpha_D = 0$ ), se obtiene

$$\tilde{\varepsilon}_o^p = \frac{\sqrt{(1 - \tilde{\varepsilon}_o \cdot \Theta)^2 + 2 \cdot \Theta \cdot \tilde{\varepsilon}_o} + \tilde{\varepsilon}_o \cdot \Theta^2 - 1}{2 \cdot \Theta} \quad (\text{III.76})$$

### III.3. UN ALGORITMO DE RETORNO PARA HORMIGÓN ARMADO

#### III.3.1. El algoritmo de retorno<sup>14</sup>. Definición del problema

Sea una sección de hormigón armado discretizada en un número finito de fibras de hormigón y acero. La sección pertenece a un elemento que se encuentra en equilibrio para el instante  $t$  y para el cual se conocen todas las variables internas que definen la historia de cargas de cada fibra.

En el caso de las fibras de hormigón, la historia de caras queda completamente definida a partir de las siguientes variables de estado:

$$\{^t S\} = \{^t \varepsilon^p \quad ^t \alpha \quad ^t \psi\} \quad (\text{III.77})$$

Para el caso de las fibras de acero, el estado queda definido a partir de la deformación plástica, la deformación plástica acumulada y la tensión de retorno.

$$\{^t S\} = \{^t \varepsilon^p \quad ^t \alpha \quad ^t q\} \quad (\text{III.78})$$

La solución del problema consiste en determinar el nuevo estado de tensiones y deformaciones para un incremento finito de deformaciones arbitrario:

$$\{^{t+\Delta t} S\} \quad (\text{III.79})$$

La deformación del estado final es un dato conocido, debido a que el retorno o corrección, se efectuará en las tensiones y la deformación del estado nuevo es:

$$^{t+\Delta t} \varepsilon = ^t \varepsilon + ^t \Delta \varepsilon \quad (\text{III.80})$$

Para la resolución del algoritmo, se considerará un estado auxiliar, el cual no corresponderá al estado actual, determinado por una tensión elástica de prueba. Para las fibras de acero, el estado auxiliar se obtiene a partir del módulo de elasticidad del acero. La consideración del endurecimiento cinemático por deformaciones implica la necesidad adicional de utilizar una tensión de referencia de prueba para el estado auxiliar:

$$^{t+\Delta t} \sigma^* = E \cdot (^{t+\Delta t} \varepsilon - ^t \varepsilon^p) \quad (\text{III.81})$$

$$^{t+\Delta t} \xi^* = ^{t+\Delta t} \sigma^* - ^t q \quad (\text{III.82})$$

En las fibras de hormigón, el módulo elástico de la tensión elástica de prueba estará afectado por el coeficiente de daño, dependiente de la historia de cargas del material. En el origen, las

---

<sup>14</sup> El nombre *algoritmo de retorno* está asociado a una familia de métodos numéricos empleados en la resolución de ecuaciones diferenciales, llamados métodos predictores – correctores. En general, en estos métodos se efectúan pasos de prueba “hacia adelante”, que luego se corrigen o “retorna hacia atrás”, con lo que el término *retorno* está asociado de algún modo, a la resolución de una ecuación implícita. El método de resolución de ecuaciones en diferencias de Euler implícito, es equivalente a un sencillo algoritmo de retorno.

deformaciones plásticas aún no se manifestaron y por ello, el módulo elástico es coincidente con el módulo tangente inicial del hormigón sólo en el origen:

$${}^{t+\Delta t}\sigma^* = {}^t\psi \cdot E_o \cdot ({}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^t\varepsilon^p) \quad (\text{III.83})$$

El estado de prueba cumplirá o no el criterio de fluencia según el signo dado por la tensión de fluencia para la tensión elástica de prueba. En las fibras de acero, el criterio de fluencia para el estado auxiliar se obtiene según:

$${}^{t+\Delta t}F^* := |{}^{t+\Delta t}\xi^*| - (\sigma_Y + K \cdot {}^t\alpha) \quad (\text{III.84})$$

En las fibras de hormigón, el criterio de fluencia deberá evaluarse considerando la zona de endurecimiento en la cual se encuentra el material.

$${}^{t+\Delta t}F^* := |{}^{t+\Delta t}\sigma^*| - {}^tK^p({}^t\alpha) \cdot {}^t\alpha \quad ({}^t\alpha \leq \alpha_o) \quad (\text{III.85})$$

$${}^{t+\Delta t}F^* := |{}^{t+\Delta t}\sigma^*| - |\tilde{f}_c'| + {}^tK^p({}^t\alpha) \cdot ({}^t\alpha - \alpha_o) \quad ({}^t\alpha > \alpha_o) \quad (\text{III.86})$$

El módulo plástico constante durante el proceso de deformación es una característica en las fibras de acero que permite obtener una solución directa. No ocurre lo mismo con el módulo plástico para el hormigón, el cual es dependiente del estado de deformaciones.

### III.3.2. Incremento elástico de deformaciones

Un incremento será elástico si la tensión elástica de prueba se encuentra *dentro* de la superficie de fluencia. Si la fibra se encontrara sometida a un incremento de carga elástico, no se producían deformaciones plásticas en el material, y el estado auxiliar coincidiría con el estado final buscado:

$${}^{t+\Delta t}F^* \leq 0 \quad (\text{III.87})$$

Debido a que el incremento fue elástico, la tensión del estado final será igual a la tensión de prueba supuesta:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* \quad (\text{III.88})$$

Las deformaciones plásticas se mantienen en los valores del paso anterior, debido a que el mismo fue elástico sin incremento de deformación plástica:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p \quad (\text{III.89})$$

$${}^{t+\Delta t}\alpha = {}^t\alpha \quad (\text{III.90})$$

En las fibras de acero, según el modelo de endurecimiento cinemático, la tensión de retorno se mantiene constante en el paso elástico:

$${}^{t+\Delta t}q = {}^tq \quad (\text{III.91})$$

Para las fibras de hormigón, según el modelo simplificado de daño propuesto, el módulo de recarga y descarga se mantiene sin cambios según el factor de daño:

$${}^{t+\Delta t}\psi = {}^t\psi \quad (\text{III.92})$$

### III.3.3. Incremento elastoplástico de deformaciones

Un incremento de carga será elastoplástico, si la tensión elástica de prueba se encuentra *fuera* de la superficie de fluencia. Este estado de tensiones de pruebas supuesto es inadmisibile, puesto que no cumple con el criterio de fluencia:

$${}^{t+\Delta t}F^* > 0 \quad (\text{III.93})$$

Para este incremento de deformaciones, se busca determinar el estado resultante tal que para la tensión del estado buscado se cumpla el criterio de fluencia. Este criterio de fluencia se establece para un estado final, incógnita del problema.

$${}^{t+\Delta t}F = F({}^{t+\Delta t}\alpha) = 0 \quad (\text{III.94})$$

### III.3.4. Condiciones de consistencia

Puesto que el estado final buscado deberá existir *sobre* la superficie de fluencia, la incógnita del problema es el incremento de deformación plástica que llevo a la fibra desde el estado  $t$  al  $t + \Delta t$ .

La clave para resolver el problema matemático reside en plantear como única incógnita del problema el incremento de deformaciones plásticas acumuladas  ${}^{t+\Delta t}\alpha$  y a partir de éstas, obtener todas las demás variables de estado. La deformación plástica acumulada también se podrá expresar de manera incremental, con un incremento de deformación plástico positivo desconocido:

$${}^{t+\Delta t}\alpha = {}^t\alpha + \Delta\gamma \quad (\text{III.95})$$

El parámetro  $\Delta\gamma$  es conocido en la bibliografía como *corrector plástico* ó *parámetro de consistencia* ó *multiplicador de Lagrange* (Simo [29]). A partir del conocimiento de las deformaciones plásticas acumuladas del estado final, se obtienen todas las demás variables de estado en función del corrector plástico.

Puesto que la máxima deformación plástica acumulada, es un número mayor o igual a cero, el problema matemático consiste entonces en encontrar el valor de un corrector plástico de signo positivo tal que el estado final de tensiones sea un *estado admisible*. Estas condiciones se pueden representar matemáticamente según:

$${}^{t+\Delta t}F \leq 0 \quad (\text{III.96})$$

$$\Delta\gamma \geq 0 \quad (\text{III.97})$$

El corrector plástico será nulo cuando el estado de prueba es elástico y será distinto de cero para los estados pertenecientes a la superficie de fluencia. Esto implica una tercer condición que se denomina condición de consistencia del problema matemático:

$$\Delta\gamma \cdot {}^{t+\Delta t}F \equiv 0 \quad (\text{III.98})$$

Esto puede entenderse también como un problema de multiplicadores de Lagrange, en el cual el término corrector es el parámetro adicional que condiciona las variables del problema.

### III.3.5. Determinación del corrector plástico del acero

A partir del conocimiento de las deformaciones plásticas acumuladas del estado final de (III.95), se obtienen todas las demás variables de estado en función del corrector plástico:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \Delta\gamma \cdot E \cdot \text{sign}({}^{t+\Delta t}\xi) \quad (\text{III.99})$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p + \Delta\gamma \cdot \text{sign}({}^{t+\Delta t}\xi) \quad (\text{III.100})$$

$${}^{t+\Delta t}q = {}^tq_n + \Delta\gamma \cdot H \cdot \text{sign}({}^{t+\Delta t}\xi) \quad (\text{III.101})$$

$${}^{t+\Delta t}\xi = {}^{t+\Delta t}\sigma - {}^{t+\Delta t}q \quad (\text{III.102})$$

De manera tal que se anule el criterio de fluencia en el estado final:

$${}^{t+\Delta t}F = |{}^{t+\Delta t}\xi| - (\sigma_Y + K \cdot {}^{t+\Delta t}\alpha) = 0 \quad (\text{III.103})$$

Para simplificar la notación, es conveniente definir un nuevo parámetro que registre el signo de la tensión de referencia tanto del estado auxiliar como del estado final buscado.

$$\varphi = \text{sign}(\xi) \quad (\text{III.104})$$

El problema matemático consiste entonces en encontrar el valor de un corrector plástico de signo positivo tal que el estado final de tensiones sea un estado admisible. Estas condiciones se pueden representar matemáticamente según:

$${}^{t+\Delta t}F = |{}^{t+\Delta t}\xi| - (\sigma_Y + K \cdot {}^{t+\Delta t}\alpha) \leq 0 \quad (\text{III.105})$$

Una vez planteadas las ecuaciones de condición y el criterio de fluencia para un incremento de deformaciones elastoplástico, solamente resta determinar el término corrector para el cual se cumplan dichas condiciones. Para poder dejar en evidencia la incógnita del corrector, se opera sobre la expresión (III.105) donde reemplazando la expresión de la tensión del estado final corregida de (III.99) se obtiene:

$${}^{t+\Delta t}\xi = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \Delta\gamma \cdot E \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi - ({}^tq + \Delta\gamma \cdot H \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi) \quad (\text{III.106})$$

La expresión anterior tiene implícita la incógnita buscada  $\Delta\gamma$  en el signo de la tensión relativa de referencia en el estado final  ${}^{t+\Delta t}\varphi$ ; por lo tanto es necesario determinar primero

este parámetro para resolver el problema. Si ahora reemplazamos la expresión de  ${}^tq$  se obtiene:

$${}^{t+\Delta t}\xi = {}^{t+\Delta t}\xi^* - \Delta\gamma \cdot (H + E) \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi \quad (\text{III.107})$$

$$\left( \left| {}^{t+\Delta t}\xi \right| + \Delta\gamma \cdot (H + E) \right) \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi = \left| {}^{t+\Delta t}\xi^* \right| \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi^* \quad (\text{III.108})$$

Siendo que  $\left( \left| {}^{t+\Delta t}\xi \right| + \Delta\gamma \cdot (H + E) \right) > 0$ , se cumplirá entonces que:

$$\Rightarrow {}^{t+\Delta t}\varphi = {}^{t+\Delta t}\varphi^* \quad (\text{III.109})$$

$$\Rightarrow \left| {}^{t+\Delta t}\xi \right| = \left| {}^{t+\Delta t}\xi^* \right| - \Delta\gamma \cdot (H + E) \quad (\text{III.110})$$

Reemplazando en el criterio de fluencia, se obtiene:

$$\left| {}^{t+\Delta t}\xi^* \right| - \Delta\gamma \cdot (H + E) - (\sigma_Y + K \cdot ({}^t\alpha + \Delta\gamma)) = 0 \quad (\text{III.111})$$

$$\Delta\gamma = \frac{\left| {}^{t+\Delta t}\xi^* \right| - (\sigma_Y + K \cdot {}^t\alpha)}{H + E + K} = \frac{{}^{t+\Delta t}F^*}{H + E + K} \quad (\text{III.112})$$

De manera que el estado final queda completamente determinado a partir del estado auxiliar de prueba (\*):

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \Delta\gamma \cdot E \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi^* \quad (\text{III.113})$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p + \Delta\gamma \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi^* \quad (\text{III.114})$$

$${}^{t+\Delta t}\alpha = {}^t\alpha + \Delta\gamma \quad (\text{III.115})$$

$${}^{t+\Delta t}q = {}^tq + \Delta\gamma \cdot H \cdot {}^{t+\Delta t}\varphi^* \quad (\text{III.116})$$

$${}^{t+\Delta t}\xi = {}^{t+\Delta t}\sigma - {}^{t+\Delta t}q \quad (\text{III.117})$$

$${}^{t+\Delta t}\xi^* = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - {}^tq \quad (\text{III.118})$$

### III.3.6. Determinación del corrector plástico del hormigón

A diferencia del planteo efectuado sobre las fibras de acero, la consideración de un módulo de descarga y recarga dependiente de la deformación plástica, trae aparejado un problema adicional a resolver, lo cual se resume en una incógnita adicional del problema matemático.

En efecto, en las fibras de acero la medida del corrector plástico se determinaba mediante *la proyección de la superficie de fluencia sobre el incremento de deformaciones plásticas*. Esto era posible sencillamente porque el módulo elástico (módulo de carga y recarga) del estado inicial coincidía con el módulo del estado final. En cambio en las fibras de hormigón, el módulo elástico del estado inicial es diferente al final debido al modelo simplificado de daño



propuesto. Por ello, la proyección de la superficie de fluencia sobre las deformaciones plásticas NO puede medirse sino sobre el eje de deformaciones plásticas.

Para salvar este escollo de manera práctica, se introduce una nueva incógnita denominada corrector plástico de tensiones, que será dependiente naturalmente del parámetro principal. *El corrector plástico de tensiones es el valor del incremento de la deformación plástica proyectado sobre la superficie de fluencia, al igual que su equivalente para las fibras de acero.*

Es decir, el criterio de fluencia se cumplirá para un estado de tensiones y deformaciones corregido por los multiplicadores de Lagrange  $\Delta\eta$  y  $\Delta\gamma$  tales que:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \Delta\eta \cdot {}^tE_r \cdot \text{sign}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.119})$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p + \Delta\gamma \cdot \text{sign}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.120})$$

Las expresiones anteriores son válidas tanto en carga elastoplástica de compresión como en tracción, ya que en ambos casos se modifican las deformaciones plásticas. En cambio el acumulador de máxima deformación plástica  ${}^{t+\Delta t}\alpha$  sólo aumentará ante incrementos de deformaciones en carga de compresión.

$${}^{t+\Delta t}\alpha = {}^t\alpha + \Delta\gamma \quad ({}^t\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0) \quad (\text{III.121})$$

Finalmente, según el modelo propuesto de daño, el factor de daño del estado inicial depende de la máxima deformación plástica acumulada  ${}^t\alpha$  según:

$${}^t\psi = \psi({}^t\alpha) = 1 - \Theta \cdot ({}^t\alpha - \hat{\alpha}_D) \quad (\text{III.122})$$

Como consecuencia de esto, el factor de daño del estado final buscado también deberá ser corregido mediante el corrector de deformaciones plásticas:

$${}^{t+\Delta t}\psi = {}^t\psi - \Delta\gamma \cdot \Theta \quad (\text{III.123})$$

A partir del conocimiento de las deformaciones plásticas acumuladas del estado final, se obtienen todas las demás variables de estado en función del corrector plástico:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \Delta\eta \cdot {}^tE_r \cdot \text{sign}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.124})$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p + \Delta\gamma \cdot \text{sign}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.125})$$

$${}^{t+\Delta t}\psi = {}^t\psi - \Delta\gamma \cdot \Theta \quad (\text{III.126})$$

De manera que se cumpla el criterio de fluencia en el estado final:

$$|{}^{t+\Delta t}\sigma| - {}^{t+\Delta t}K \cdot {}^{t+\Delta t}\alpha = 0 \quad ({}^t\alpha \leq \alpha_o) \quad (\text{III.127})$$

$$|{}^{t+\Delta t}\sigma| - |\tilde{f}_C'| + {}^{t+\Delta t}K \cdot ({}^{t+\Delta t}\alpha - \alpha_o) = 0 \quad ({}^t\alpha > \alpha_o) \quad (\text{III.128})$$

El desarrollo matemático anterior permitió obtener las expresiones del estado final en función del estado inicial a partir de un sistema de ecuaciones condicionado por dos

multiplicadores de Lagrange que en este caso, son los términos correctores de deformaciones y tensiones  $\Delta\eta$  y  $\Delta\gamma$ . La obtención de éstos es el objeto del párrafo siguiente.

### III.3.7. Los correctores plásticos en carga del hormigón

Planteando las ecuaciones de condición es posible determinar como se hizo en el caso de las fibras de acero, los correctores de tensiones y deformaciones para el cual se cumplan las condiciones anteriores.

Si se cuenta con una formulación explícita, como lo es la formulación dada en III.2.3, es posible conocer la tensión del estado final en términos de deformaciones totales, ya que el mismo se define en este caso *sobre* la superficie de fluencia a partir de la función instantánea  $\sigma(t\varepsilon)$ .

$${}^{t+\Delta t}\sigma = \sigma({}^{t+\Delta t}\varepsilon) \quad (\text{III.129})$$

Para un incremento de deformaciones en carga monotónica definido dentro del tramo de endurecimiento y ablandamiento, las ecuaciones constitutivas para carga monotónica, definidas en III.2.3 permiten obtener respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = E_o \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\varepsilon - \frac{({}^{t+\Delta t}\varepsilon)^2}{2 \cdot \tilde{\varepsilon}_o} \right) \quad (|{}^t\varepsilon| \leq |\tilde{\varepsilon}_o|) \quad (\text{III.130})$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma = \tilde{f}_C' \cdot (1 - Z_m \cdot ({}^{t+\Delta t}\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_o)) \quad (|{}^t\varepsilon| > |\tilde{\varepsilon}_o|) \quad (\text{III.131})$$

El término  $\varepsilon_o$  es una deformación umbral, medida en términos de deformaciones totales, y permite dividir las formulaciones según la zona de deformación (ablandamiento o endurecimiento) en la que se encuentre la fibra.

Es importante notar que la deformación umbral  $\varepsilon_o$  está verificada contra la deformación del estado anterior  ${}^t\varepsilon$ , lo cual implica que NO es posible efectuar incrementos de carga que “salten” desde la zona de ablandamiento hasta un punto de la zona de endurecimiento, sin “detenerse” en el punto crítico dado por la deformación umbral  $\varepsilon_o$ .

Por lo tanto, para una formulación explícita dada, la tensión del estado final es independiente de historia de cargas de la fibra (léase deformaciones plásticas) y el término corrector de tensiones  $\Delta\eta$  queda directamente determinado según (III.132).

$$\Delta\eta = \frac{({}^{t+\Delta t}\sigma^* - f_C({}^{t+\Delta t}\varepsilon))}{{}^tE} \cdot \text{sgn}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.132})$$

Siguiendo el mismo planteo empleado en las fibras de acero, es posible determinar el corrector plástico de deformaciones  $\Delta\gamma$  a partir del cumplimiento del criterio de fluencia. Sin embargo, este camino trae aparejado una serie de dificultades debido a la dependencia del módulo plástico del hormigón con el estado de deformaciones, con lo cual el criterio de fluencia en realidad estaría dado por:

$$\left| {}^{t+\Delta t}\sigma \right| - {}^{t+\Delta t}K({}^{t+\Delta t}\varepsilon^p) \cdot {}^{t+\Delta t}\alpha = 0 \quad ({}^t\alpha \leq \alpha_o) \quad (\text{III.133})$$

$$\left| {}^{t+\Delta t}\sigma \right| - \left| \tilde{f}_C' \right| + {}^{t+\Delta t}K({}^{t+\Delta t}\varepsilon^p) \cdot ({}^{t+\Delta t}\alpha - \alpha_o) = 0 \quad ({}^t\alpha > \alpha_o) \quad (\text{III.134})$$

Siendo las expresiones del módulo plástico, relaciones no-lineales con la deformación plástica, la resolución del problema por este camino es muy complicada desde el punto de vista algebraico, por lo cual es necesario recurrir a otro camino.

Si se observa en la Fig.24, el corrector plástico de deformaciones puede obtenerse de manera geométrica a partir del corrector de tensiones, ya obtenido en el párrafo anterior.

El corrector de tensiones estará dado por la siguiente relación geométrica:

$$\Delta\gamma = \Delta\eta - \overline{BA} \quad (\text{III.135})$$

El segmento  $\overline{BA}$  estará dado por la diferencia entre los segmentos  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$ , y haciendo uso de la ley de carga y descarga elástica del material, estos segmentos estarán determinados por la deformación elástica con un módulo elástico final e inicial respectivamente:

$$\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma}{{}^{t+\Delta t}E} - \frac{{}^t\sigma}{^tE} \quad (\text{III.136})$$

Sabiendo que el módulo elástico final está dado por el parámetro de daño del estado final:

$${}^{t+\Delta t}E = {}^{t+\Delta t}\psi \cdot E_o = ({}^t\psi - \Delta\gamma \cdot \Theta) \cdot E_o \quad (\text{III.137})$$

Reemplazando el valor conocido del multiplicador de tensiones, se obtiene una sencilla ecuación algebraica con la única incógnita restante del problema:

$$\Delta\gamma = \Delta\eta - \frac{\left| f_C({}^{t+\Delta t}\varepsilon) \right|}{E_o} \cdot \left( \frac{1}{({}^t\psi - \Delta\gamma \cdot \Theta)} - \frac{1}{{}^t\psi} \right) \quad (\text{III.138})$$

También es posible plantear una ecuación equivalente a partir del incremento total de deformaciones.

$$\Delta\gamma = \Delta\varepsilon + \frac{1}{E_o} \cdot \left( \frac{{}^t\sigma}{{}^t\psi} - \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma}{({}^t\psi - \Delta\gamma \cdot \Theta)} \right) \quad (\text{III.139})$$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtienen dos expresiones para el corrector de deformaciones, descartando la raíz negativa

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta\eta + \frac{{}^t\psi}{\Theta} - \frac{\left| {}^{t+\Delta t}f_C \right|}{{}^t\hat{E}_r} - \sqrt{\left( \Delta\eta + \frac{{}^t\psi}{\Theta} - \frac{\left| {}^{t+\Delta t}f_C \right|}{{}^t\hat{E}_r} \right)^2 - 4 \cdot \Delta\eta \cdot \frac{{}^t\psi}{\Theta}}}{2} \quad (\text{III.140})$$

Para el caso particular en que no se tiene consideración del daño ( $\Theta = 0$ ), se puede demostrar que la solución anterior se reduce a la expresión:

$$\Delta\gamma = \Delta\eta \quad (\text{III.141})$$



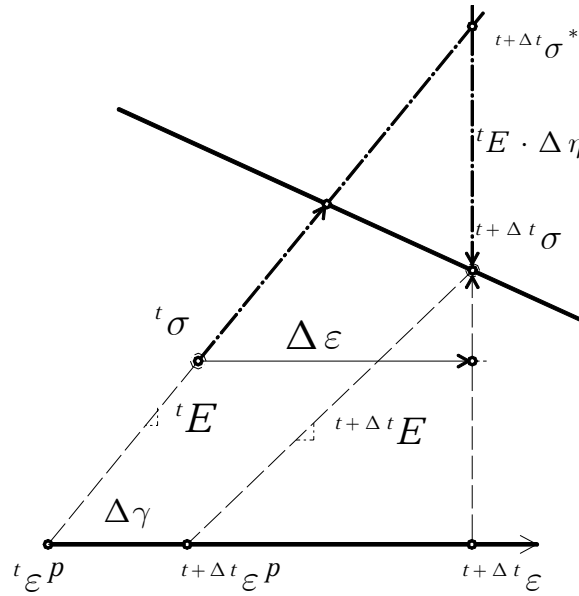


Fig.25. Determinación de estado en una fibra de hormigón sometida a un incremento de deformación en carga dentro de la zona de ablandamiento por deformaciones.

### III.3.8. Los correctores plásticos en descarga del hormigón

Las expresiones dadas en las secciones anteriores, permiten determinar la solución  $\{^{t+\Delta t}S\}$ , para un incremento finito de deformaciones  $\Delta\varepsilon$  en un ciclo de carga ó recarga, es decir  $\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0$ . Ahora corresponde analizar el caso de la descarga, la cual es diferente en el caso analizado para las fibras de acero, en donde el algoritmo analizado era indiferente a las descargas o recargas.

La descarga puede ser tanto elástica ó elastoplástica, según sea la magnitud del incremento finito de deformaciones. La diferencia radica únicamente en que el límite inferior de la superficie de fluencia estará dada por la curva de resistencia a tracción del hormigón, que para esta formulación en particular, se consideró nula:

$$^t f_T = ^{t+\Delta t} f_T = 0 \quad (\text{III.142})$$

Sea un estado de prueba resultante de una descarga. La tensión de prueba, al igual que en compresión, estará dada por el módulo de descarga del estado anterior:

$$^{t+\Delta t} \sigma^* = ^t \psi \cdot E_o \cdot (^{t+\Delta t} \varepsilon - ^t \varepsilon^P) \quad (\text{III.143})$$

Corresponde verificar ahora si este estado de prueba cumple o no con el criterio de fluencia para tensiones de tracción.

$$^{t+\Delta t} F^* = ^{t+\Delta t} \sigma^* \quad (\text{III.144})$$

La descarga será elástica, si la tensión de prueba está dentro (bajo) de la superficie de fluencia. En este caso, el criterio de fluencia según la definición anterior, será negativo:

$${}^{t+\Delta t}F^* \leq 0 \quad (\text{III.145})$$

Por lo tanto, la tensión del estado final será igual a la tensión de prueba supuesta:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* \quad (\text{III.146})$$

Las deformaciones plásticas se mantienen en los valores del paso anterior, como en compresión elástica:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p \quad (\text{III.147})$$

Al igual que en el caso de compresión, el incremento de deformaciones en descarga será elastoplástico, si la tensión elástica de prueba supera el límite inferior de la superficie de fluencia, es decir, tiene un valor neto de tracción:

$${}^{t+\Delta t}F^* > 0 \quad (\text{III.148})$$

Para este incremento nuevo de deformaciones se busca determinar el estado resultante tal que para la tensión del estado buscado se cumpla el criterio de fluencia:

$${}^{t+\Delta t}F = 0 \quad (\text{III.149})$$

El criterio de fluencia en tracción se cumplirá para un estado de tensiones y deformaciones corregido por los multiplicadores de Lagrange  $\Delta\eta$  y  $\Delta\gamma$  tales que:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \Delta\eta \cdot {}^tE_r \cdot \text{sign}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.150})$$

La actualización de deformaciones plásticas se determina del mismo modo que en el caso de compresión, considerando ahora el nuevo signo del incremento, debido a que la fibra disminuyó su deformación plástica neta.

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p = {}^t\varepsilon^p + \Delta\gamma \cdot \text{sign}(\Delta\varepsilon) \quad (\text{III.151})$$

No obstante, cualquiera sea el tipo de descarga, la máxima deformación plástica se mantendrá constante, según su definición, ya que el máximo fue determinado en algún estado de compresión máxima.

$${}^{t+\Delta t}\alpha = {}^t\alpha \quad ({}^t\sigma \cdot \Delta\varepsilon \leq 0) \quad (\text{III.152})$$

A esta deformación se la denomina deformación plástica umbral y se utiliza para indicar la existencia de una fisura que no produce trabajo de deformación. En el párrafo siguiente se efectúan algunas consideraciones al respecto.

De acuerdo con el modelo simplificado de daño propuesto, el módulo de descarga mantendrá el valor del paso anterior ya que la deformación plástica acumulada se mantiene constante:

$${}^{t+\Delta t}\psi = {}^t\psi \quad (\text{III.153})$$

Al igual que en carga elastoplástica, el término corrector también puede obtenerse directamente debido a que la tensión de fluencia en tracción es explícita; aplicando la definición de  $f_C(t+\Delta t, \varepsilon)$  se elimina una de las incógnitas del problema:

$$\Delta\eta = \frac{(t+\Delta t \sigma^* - f_T(t+\Delta t, \varepsilon))}{tE_r} \cdot \text{sgn}(\Delta\varepsilon) = \frac{t+\Delta t \sigma^*}{tE_r} \quad (\text{III.154})$$

Efectuando las mismas consideraciones geométricas del caso anterior, los correctores plásticos se obtienen según:

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta\eta + \frac{t\psi}{\Theta} - \frac{|t+\Delta t f_T|}{t\hat{E}_r} \mp \sqrt{\left(\Delta\eta + \frac{t\psi}{\Theta} - \frac{|t+\Delta t f_T|}{t\hat{E}_r}\right)^2 - 4 \cdot \Delta\eta \cdot \frac{t\psi}{\Theta}}}{2} \quad (\text{III.155})$$

Y en el caso de no considerar el efecto del daño, se obtiene:

$$\Delta\gamma = \Delta\eta \quad (\text{III.156})$$

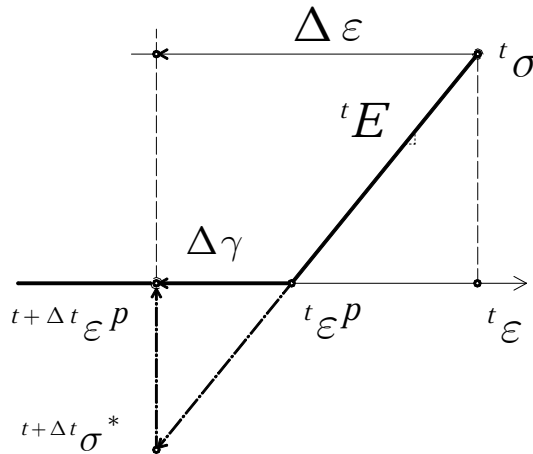


Fig.26. Determinación de estado en una fibra de hormigón sometida a un incremento de deformación en descarga elastoplástica

### III.3.9. La recarga elastoplástica en el hormigón

Una vez que el material haya alcanzado la superficie de fluencia inferior (es decir, que la fibra haya recibido una tracción neta), el incremento de deformaciones sólo se traducirá en un incremento de tensión si la deformación total en compresión supera la máxima deformación plástica. Esto es equivalente a imaginar a una fisura abierta, que únicamente ofrecerá resistencia para un incremento de deformación de compresión tal, que logre cerrar la fisura cuando la deformación total supere la máxima deformación plástica.

Cuando la fibra recibe una descarga tal, que supera la resistencia a la tracción de la misma (nula en este modelo) la deformación plástica de ese instante se denomina deformación plástica de fisuración:

$$\alpha_{cr} = {}^t\alpha = -{}^t\varepsilon^p = -{}^t\varepsilon \quad (\text{III.157})$$

Si se continúa incrementando la deformación de tracción en la fibra, la fisura continuará abriéndose sin ofrecer resistencia, es decir que el trabajo de deformación efectuado por las tensiones de la fibra será nulo. Del mismo modo, los incrementos de deformaciones de compresión menores a la abertura de la fisura, no producirán trabajo de deformación. La medida de la abertura de fisura en un instante  $t$ , se obtiene según:

$$\Delta\varepsilon_{cr} = {}^t\varepsilon^p + \alpha_{cr} \geq 0 \quad (\text{III.158})$$

Si la fibra recibe un incremento de deformaciones en compresión mayor a la apertura de fisura, esta se deformará sin producir trabajo alguno de deformación *hasta* alcanzar la deformación plástica umbral; para luego continuar deformándose como una recarga desde tracción. La condición necesaria a lograr por el incremento de deformaciones que cierre la fisura será entonces:

$$|\Delta\varepsilon| > \Delta\varepsilon_{cr} \quad \wedge \quad \Delta\varepsilon < 0 \quad (\text{III.159})$$

Esta hipótesis simplificada es realista en el hormigón armado debido a la existencia de las barras de armadura, las cuales transfieren el esfuerzo de tracción necesario para el equilibrio, mientras la fisura del hormigón se propaga sin producir trabajo de deformación.

Si no existieran barras de armadura, esta hipótesis carecería de validez debido a la propagación de una fisura a lo largo de la sección, sin incremento de cargas. Las hipótesis aquí efectuadas son hipótesis simplificadas que intentan considerar a nivel elemental, el comportamiento de una sección de hormigón armado fisurada.

El análisis necesario para determinar la propagación realista de una fisura traccionada es toda una disciplina tratada en detalle por la fractomecánica del hormigón y su abordaje excede el alcance del presente trabajo.

Debe remarcarse el hecho de que la definición del algoritmo de retorno para tracción es indiferente de la tensión de fluencia empleada para este tipo de esfuerzo. Si se adoptara una formulación material que considerara la respuesta de la fibra para tracción, el único término a redefinir sería el término corrector de tensiones  $\Delta\eta$  ya que tanto para carga elastoplástica como para descarga elastoplástica, el término corrector de deformaciones se definió en función de aquel.



## **IV. FORMULACIÓN DEL EQUILIBRIO**



## IV.1. LA RESULTANTE DE ESFUERZOS INTERNOS DE LA SECCIÓN

### IV.1.1. La resultante instantánea de esfuerzos internos

Sea una sección localizada en la coordenada  $x_k$  de un elemento, para la cual suponemos conocido el estado de tensiones en un instante  $t$ .

La resultante del volumen de tensiones de la sección se puede obtener mediante la integración de las tensiones normales y tangenciales de cada fibra a lo largo de la altura<sup>15</sup> de la sección según las expresiones conocidas de la resistencia de los materiales:

$${}^tN(x_k) = {}^tN_k = \int_A {}^t\sigma_x \cdot dA \quad (\text{IV.1})$$

El signo de la integral del momento flexor es consistente con el sistema de ejes locales de la sección (z positivo hacia abajo) y los ejes globales del elemento (x positivo hacia la derecha). De este modo, la curvatura convexa es positiva.

$${}^tM(x_k) = {}^tM_k = - \int_A {}^t\sigma_x \cdot z \cdot dA \quad (\text{IV.2})$$

Debido a que en las hipótesis cinemáticas relativas a las deformaciones por corte en II.3.3 se asumió una distribución constante de tensiones de corte (para un material elástico lineal) la resultante de esfuerzos de corte debe corregirse con un factor de corrección  $\alpha_\tau$ .

$${}^tQ(x_k) = {}^tQ_k = \alpha_\tau \cdot \int_A {}^t\tau_{xz} \cdot dA \quad (\text{IV.3})$$

Agrupando estas expresiones en un vector, estas integrales pueden definirse como:

$${}^t\mathbf{Q}_k = {}^t\mathbf{Q}(x_k) = \int_h b \cdot \mathbf{Z}^T \cdot {}^t\mathbf{s} \cdot dz \quad (\text{IV.4})$$

---

<sup>15</sup> En la mayoría de los problemas de ingeniería civil, a pesar de la no-linealidad geométrica se puede asumir sin mayor error que las dimensiones de la sección transversal permanecen invariantes en la historia de cargas siendo  ${}^tb \approx b$  y  ${}^th \approx h$

El vector  ${}^t\mathbf{Q}(x_k)$  es un vector de estado ya que permite definir completamente la resultante de esfuerzos internos de la sección a partir del estado de tensiones de la fibra  ${}^t\mathbf{s}(x_k, z)$ ; la matriz de transformación  $\mathbf{Z}(z)$  ya fue presentada en la sección II.3.4.

Supongamos ahora que en otro instante dado  $t + \Delta t$ , se produce un cambio en el estado de deformación de la sección. Cualquiera sea el material constitutivo de la fibra, un cambio en el estado de deformación se traduce en un cambio en el estado tensiones de la misma y en consecuencia, en una nueva resultante de esfuerzos internos:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k = \int_h b \cdot \mathbf{Z}^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{s} \cdot dz \quad (\text{IV.5})$$

El estado de tensiones resultante  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{s}$  podrá definirse ahora dentro de cierto intervalo finito de deformaciones como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = {}^t\mathbf{s} + \Delta {}^t\mathbf{s} \quad (\text{IV.6})$$

Por lo tanto, la resultante de esfuerzos internos podrá expresarse del mismo modo dentro de dicho intervalo como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k = {}^t\mathbf{Q}_k + \Delta {}^t\mathbf{Q}_k \quad (\text{IV.7})$$

En virtud de la 1° hipótesis del material, las expresiones anteriores se cumplirán *exactamente* dentro de cierto intervalo finito de deformaciones. En la sección V.3 se definen las condiciones que deberán cumplir los incrementos finitos de deformaciones para no violar la 1° hipótesis del material, es decir se define el intervalo finito de deformaciones para el cual son válidas las expresiones incrementales dadas.

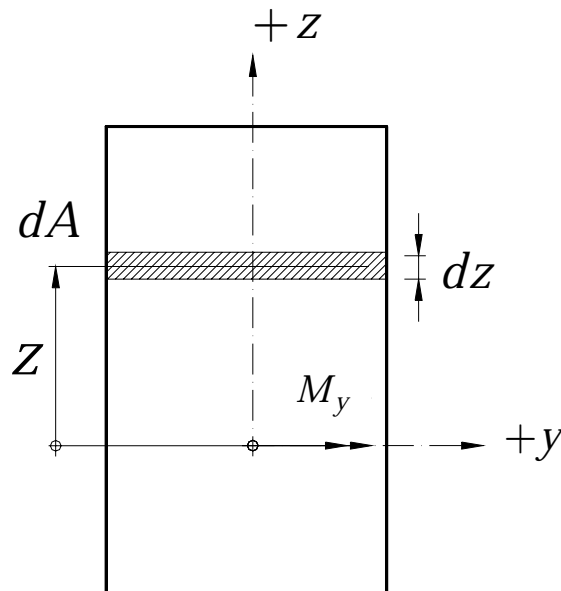


Fig.27. Convención de signos de la sección. El eje de referencia puede coincidir o no, con el eje baricéntrico de la sección.

#### IV.1.2. La resultante incremental de esfuerzos internos

Dada la naturaleza lineal de las expresiones incrementales anteriores, es posible definir *exactamente* una relación funcional entre el incremento del estado de tensiones de la fibra y la resultante de esfuerzos internos de la sección, siempre dentro de cierto intervalo finito de deformaciones. Reemplazando las expresiones (IV.6) y (IV.7) en la integral (IV.4) y expresando el incremento de tensiones de la fibra según (IV.6) se obtiene:

$$\Delta {}^t\mathbf{Q}_k = \int_h b \cdot \mathbf{Z}^T \cdot {}^t\mathbf{C}_k \cdot \Delta {}^t\mathbf{e}_k \cdot dz \quad (\text{IV.8})$$

donde  ${}^t\mathbf{C}_k(z)$  es la matriz secante elastoplástica de la fibra.

Los incrementos de deformaciones longitudinales y angulares de cada fibra de la sección quedan definidos a partir de la hipótesis de las secciones planas:

$$\Delta {}^t\mathbf{e}_k(z) = \mathbf{Z}(z) \cdot \Delta {}^t\mathbf{e}_k^o \quad (\text{IV.9})$$

Por lo tanto el incremento de esfuerzos internos puede expresarse ahora a partir del incremento de deformaciones de la sección:

$$\Delta {}^t\mathbf{Q}_k = \int_h b \cdot \mathbf{Z}^T \cdot {}^t\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{Z} \cdot \Delta {}^t\mathbf{e}_k^o \cdot dz \quad (\text{IV.10})$$

Los elementos del vector incremental de esfuerzos internos son las expresiones conocidas de la resistencia de materiales para una sección con el eje de referencia no baricéntrico (Crisfield [09]):

$${}^t\Delta N_k = \int_h b \cdot {}^t\hat{E}_k \cdot (\Delta \varepsilon^o - z \cdot \Delta \chi^o) \cdot dz \quad (\text{IV.11})$$

$${}^t\Delta M_k = \int_h b \cdot {}^t\hat{E}_k \cdot (-z \cdot \Delta \varepsilon^o + z^2 \cdot \Delta \chi^o) \cdot dz \quad (\text{IV.12})$$

$${}^t\Delta Q_k = \int_h b \cdot {}^t\hat{G}_k \cdot \Delta \gamma^o \cdot dz \quad (\text{IV.13})$$

Integrando sobre la variable  $z$ , se obtiene una expresión de la resultante de esfuerzos internos en función de las deformaciones de la sección mediante la matriz secante elastoplástica de la sección  ${}^t\hat{\mathbf{S}}_k$ :

$${}^t\hat{\mathbf{S}}_k \approx \int_h b \cdot \mathbf{Z}^T \cdot {}^t\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{Z} \cdot dz \quad (\text{IV.14})$$

$${}^t\hat{\mathbf{S}}_k \approx \int_h b \cdot \begin{bmatrix} {}^t\hat{E}_k & -{}^t\hat{E}_k \cdot z & 0 \\ -{}^t\hat{E}_k \cdot z & {}^t\hat{E}_k \cdot z^2 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\hat{G}_k \end{bmatrix} \cdot dz \quad (\text{IV.15})$$

Donde las componentes de esta matriz simétrica se denominan parámetros de estado y tienen unidades de fuerza.

$${}^t\hat{\mathbf{S}}_k = \begin{bmatrix} {}^t\widehat{EA}_k & -{}^t\widehat{EX}_k & 0 \\ -{}^t\widehat{EX}_k & {}^t\widehat{EJ}_k & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\widehat{GA}_k \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

De manera matricial, el incremento de fuerzas internas  $\Delta {}^t\mathbf{Q}_k$  queda determinado a partir de un incremento de deformaciones de la sección  $\Delta {}^t\mathbf{e}_k^o$  para un estado en  $t$  y una sección dada  $x_k$  según:

$$\Delta {}^t\mathbf{Q}_k = {}^t\hat{\mathbf{S}}_k \cdot \Delta {}^t\mathbf{e}_k^o \quad (\text{IV.17})$$

Debido a que la hipótesis de linealidad del incremento finito de deformaciones está asociada a una forma secante, los parámetros de estado de la sección tendrán validez únicamente dentro del intervalo para el cual se definieron. Es decir que no es posible plantear una formulación instantánea que relacione a la resultante de esfuerzos internos con las deformaciones instantáneas sino a partir de la configuración del estado anterior.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k = {}^t\mathbf{Q}_k + {}^t\hat{\mathbf{S}}_k \cdot \Delta {}^t\mathbf{e}_k^o \quad (\text{IV.18})$$

Los elementos de la matriz  ${}^t\hat{\mathbf{S}}_k$  quedarán determinados a partir de las siguientes integrales:

$${}^t\widehat{EA}_k \approx \int_h b \cdot {}^t\hat{E}_k(z) \cdot dz \quad (\text{IV.19})$$

$${}^t\widehat{EX}_k \approx \int_h b \cdot {}^t\hat{E}_k(z) \cdot z \cdot dz \quad (\text{IV.20})$$

$${}^t\widehat{EJ}_k \approx \int_h b \cdot {}^t\hat{E}_k(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad (\text{IV.21})$$

$${}^t\widehat{GA}_k \approx \int_h b \cdot {}^t\hat{G}_k(z) \cdot dz \quad (\text{IV.22})$$

Las expresiones integrales sólo podrán evaluarse de manera numérica debido a que en general, no se dispone de una formulación explícita del módulo tangente del material de cada fibra. La determinación numérica de estas integrales se desarrolla en la sección V.3.

#### IV.1.3. La variación de los esfuerzos internos de la sección:

Para el desarrollo de la matriz tangente de rigidez, será necesario determinar la derivada de la resultante de esfuerzos internos de una sección dada respecto de una variación arbitraria de desplazamientos virtuales del elemento. Esta derivada se puede expresar en su forma variacional como:

$$\delta^t \mathbf{Q}_k \approx \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{x_k} \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.23})$$

La expresión incremental de  $\delta^t \mathbf{Q}_k$  a partir de la matriz secante elastoplástica  ${}^t \hat{\mathbf{S}}_k$  de la sección queda determinada según una variación del estado deformación de la sección:

$$\delta^t \mathbf{Q}_k = {}^t \hat{\mathbf{S}}_k \cdot \delta^t \mathbf{e}_k^o \quad (\text{IV.24})$$

Las componentes del vector variación de esfuerzos internos son las expresiones conocidas de la resistencia de materiales, con el agregado de los términos cruzados (ver IV.1.4 y Crisfield [09]):

$$\delta^t N(x_k) \approx {}^t \widehat{EA}_k \cdot \delta^t \varepsilon_k^o - {}^t \widehat{EX}_k \cdot \delta^t \chi_k^o \quad (\text{IV.25})$$

$$\delta^t M(x_k) \approx -{}^t \widehat{EX}_k \cdot \delta^t \varepsilon_k^o + {}^t \widehat{EJ}_k \cdot \delta^t \chi_k^o \quad (\text{IV.26})$$

$$\delta^t Q(x_k) \approx {}^t \widehat{GA}_k \cdot \delta^t \gamma_k^o \quad (\text{IV.27})$$

Estos esfuerzos internos virtuales pueden interpolarse a partir de los desplazamientos nodales del elemento, utilizando la matriz derivada de las deformaciones  ${}^t \mathbf{D}_k$  obtenida en II.6.5:

$$\delta^t \mathbf{Q}_k = {}^t \hat{\mathbf{S}}_k \cdot [{}^t \mathbf{D}_k]^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.28})$$

Los términos de la expresión anterior corresponden a la matriz derivada de los esfuerzos internos:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{x_k} \approx {}^t \hat{\mathbf{S}}_k \cdot [{}^t \mathbf{D}_k]^T \quad (\text{IV.29})$$

Reemplazando los bloques que forman la matriz derivada de las deformaciones, se obtiene:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right)_{x_k} \approx {}^t \hat{\mathbf{S}}_k \cdot [\mathbf{B}_k^L]^T + {}^t \hat{\mathbf{S}}_k \cdot [\mathbf{B}_k^{NL}]^T \cdot {}^t \hat{\mathbf{U}} \cdot [\mathbf{B}_k^{NL}]^T \quad (\text{IV.30})$$

En la expresión anterior se observa claramente un término lineal independiente de los desplazamientos nodales y un término dependiente de éstos. La consideración de una medida de deformación no-lineal, tiene como consecuencia la presencia de incógnitas nodales en las derivadas de esfuerzos internos, lo cual no ocurría en los elementos finitos lineales.

#### IV.1.4. El caso particular de material elástico y lineal

Las integrales de estado anteriores sólo podrán evaluarse analíticamente en algunos casos particulares, como por ejemplo el caso de un material homogéneo, elástico y lineal.

Si se efectúa la integración analítica de una sección rectangular con su plano de referencia coincidente con el eje baricéntrico de la sección, se obtienen las expresiones conocidas de la Resistencia de Materiales:

$${}^{t+\Delta t}\widehat{EA} = {}^t\widehat{EA} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot E \cdot dz = E \cdot A \quad (\text{IV.31})$$

$${}^{t+\Delta t}\widehat{EX} = {}^t\widehat{EX} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot E \cdot z \cdot dz = 0 \quad (\text{IV.32})$$

$${}^{t+\Delta t}\widehat{EJ} = {}^t\widehat{EJ} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot E \cdot z^2 \cdot dz = E \cdot J_{yy} \quad (\text{IV.33})$$

$${}^{t+\Delta t}\widehat{GA} = {}^t\widehat{GA} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot G \cdot dz = G \cdot A \quad (\text{IV.34})$$

Ahora, la matriz de estado de (IV.35) es una matriz diagonal, debido a la anulación del término cruzado  $\widehat{EX}$ , y constante dentro del elemento:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 & 0 \\ 0 & E \cdot J & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot A \end{bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

En vista de (IV.32) puede verse que si el eje de referencia no hubiera sido coincidente con el eje baricéntrico de la sección, la expresión asociada al momento estático (el término cruzado) sería distinto de cero  ${}^t\widehat{EX} \neq 0$ .

Debido a que el equilibrio de la sección es independiente del plano de referencia elegido, la no-linealidad del material puede entenderse como una excentricidad del éste plano respecto del eje geométrico de la sección (Crisfield, M. A. [09]).



## IV.2. EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

### IV.2.1. El trabajo virtual de deformación

La base para una solución en desplazamientos por elementos finitos es el principio de los desplazamientos virtuales. Este principio establece que, para *cualquier* desplazamiento virtual compatible impuesto al elemento en equilibrio, el trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo.

$${}^{t+\Delta t}\Pi = ({}^{t+\Delta t}V_{in} - {}^{t+\Delta t}V_{ex}) = 0 \quad (IV.36)$$

El trabajo virtual interno se define como el trabajo de la tensión en el instante  $t + \Delta t$  sobre la deformación virtual impuesta en cada fibra de las secciones del elemento. La consideración de los esfuerzos de corte implica además incluir el trabajo interno de las tensiones tangenciales con la deformación angular debida a los esfuerzos de corte, según se definió en el capítulo anterior:

$${}^{t+\Delta t}V_{in} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} ({}^{t+\Delta t}\sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x + {}^{t+\Delta t}\tau_{yz} \cdot \delta\gamma_{xz}) \cdot dV \quad (IV.37)$$

El trabajo virtual externo se define como el trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre el elemento sobre los desplazamientos virtuales impuestos (correspondientes a la dirección de cada fuerza) reducidos al eje de referencia. Las fuerzas exteriores en el instante  $t + \Delta t$  podrían traducirse en cambios en la dirección o el módulo de dichas fuerzas.

$${}^{t+\Delta t}V_{ext} = \int_{{}^{t+\Delta t}L} ({}^{t+\Delta t}p_x \cdot \delta u^o + {}^{t+\Delta t}p_z \cdot \delta w^o + {}^{t+\Delta t}m_{xz} \cdot \delta\theta) \cdot dx \quad (IV.38)$$

Según el principio de los trabajos virtuales, el equilibrio dentro del elemento estará garantizado con el cumplimiento de la siguiente igualdad:

$$({}^{t+\Delta t}V_{in} - {}^{t+\Delta t}V_{ex}) = 0 \quad (IV.39)$$

La compatibilidad<sup>16</sup> del campo de desplazamientos sólo podrá verificarse en los nodos del elemento, en donde se cumplen además las condiciones de borde del problema.

En vista de (IV.39), debe definirse previamente el variacional de las deformaciones angulares y longitudinales de la sección, el cual se obtuvo mediante la aplicación del operador sobre la expresión (II.77) y (II.89). La hipótesis de las secciones planas permite escribir:

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon^o - z \cdot \delta\chi^o \quad (IV.40)$$

$$\delta\gamma_{xz} = \delta\gamma^o \quad (IV.41)$$

---

<sup>16</sup> La ecuación (IV.39) establece la igualdad del trabajo virtual de los esfuerzos internos con las fuerzas exteriores en todo el elemento, pero nada dice acerca del cumplimiento de la compatibilidad de los desplazamientos dentro del mismo.

Reemplazando las variaciones de deformación y rescribiendo las integrales de volumen como integrales de área en la longitud del elemento se obtiene:

$${}^{t+\Delta t}V_{in} = \int_{t+\Delta t L} \int_A \left( {}^{t+\Delta t}\sigma_x \cdot (\delta\varepsilon^o - z \cdot \delta\chi^o) + {}^{t+\Delta t}\tau_{yz} \cdot \delta\gamma^o \right) \cdot dA \cdot dx \quad (\text{IV.42})$$

Debido a que las deformaciones de la sección son independientes de la ordenada  $z$ , las integrales anteriores pueden efectuarse dentro de la altura de la sección, obteniéndose en este caso la resultante de esfuerzos internos definida en IV.1:

$${}^{t+\Delta t}V_{in} = \int_{t+\Delta t L} \left( {}^{t+\Delta t}N_x \cdot \delta\varepsilon^o + {}^{t+\Delta t}M_y \cdot \delta\chi^o + {}^{t+\Delta t}Q_z \cdot \delta\gamma^o \right) \cdot dx \quad (\text{IV.43})$$

El principio del trabajo virtual establece que el trabajo total  ${}^{t+\Delta t}\Pi$  debe ser nulo para cualquier desplazamiento virtual arbitrario. El método de los elementos finitos se basa fundamentalmente en plantear una formulación débil del equilibrio y poder aproximarla numéricamente mediante una interpolación numérica de los desplazamientos y sus deformaciones.

En los párrafos siguientes, se obtendrán los términos de fuerzas internas y externas de la expresión anterior, a partir de la interpolación numérica del campo de desplazamientos utilizando las funciones de forma definidas en las secciones II.4 y II.5

#### IV.2.2. La interpolación del trabajo interno

El trabajo interno de deformación, se definió como el trabajo de las resultantes de esfuerzos internos con las variaciones de deformación del elemento en cada sección:

Esta expresión puede formularse matricialmente como el trabajo del vector de esfuerzos internos sobre una variación del vector de deformaciones de una sección<sup>17</sup>:

$${}^{t+\Delta t}V_{in} = \int_{t+\Delta t L} \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} \right]^T \cdot \delta\mathbf{e}^o \cdot dx \quad (\text{IV.44})$$

A partir de una linealización del estado de deformaciones de la sección se obtuvo en II.6.5 una forma lineal del mismo:

$$\delta\mathbf{e}^o(x) \approx {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}(x) \cdot \delta\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.45})$$

donde  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}$  era la matriz derivada de las deformaciones, dependiente del estado de deformaciones en  $t + \Delta t$ .

Por lo tanto, la interpolación del trabajo interno de deformación queda aproximada mediante las matrices de funciones de forma, siendo esta la ecuación fundamental del método de los elementos finitos como se verá luego en los párrafos subsiguientes:

---

<sup>17</sup> El trabajo de las fuerzas internas se efectúa sobre las deformaciones de la configuración en el instante  $t + \Delta t$ .

$${}^{t+\Delta t}V_{in} = \int_{{}^{t+\Delta t}L} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{D} \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \cdot dx \quad (\text{IV.46})$$

#### IV.2.3. La resultante de fuerzas internas del elemento

Efectuando la integración del trabajo de los esfuerzos internos sobre las deformaciones en el volumen del elemento, se obtiene una fuerza resultante que trabaja sobre la configuración deformada del elemento. El trabajo interno de deformación puede formularse entonces como el trabajo de la resultante de fuerzas internas sobre una variación arbitraria del campo de desplazamientos<sup>18</sup>:

$${}^{t+\Delta t}V_{in} \approx {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.47})$$

La resultante de fuerzas internas puede obtenerse en el instante  $t + \Delta t$  como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \int_{{}^{t+\Delta t}L} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{D} \cdot dx \quad (\text{IV.48})$$

En un análisis lineal, basado en la teoría de las pequeñas deformaciones y los pequeños desplazamientos, el vector de fuerzas internas es independiente del campo de desplazamientos del elemento. En un análisis no-lineal en cambio, el vector de fuerzas internas dependerá además de la geometría del elemento.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D} \approx \mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL} \cdot [{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}]^T \cdot \mathbf{B}^{NL} \quad (\text{IV.49})$$

Si se desarrollan los términos de la matriz derivada de deformaciones, el vector de fuerzas internas se puede expresar como la suma de una componente lineal y otra componente no-lineal, dependiente de la geometría del elemento:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \approx {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^L + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{NL} \quad (\text{IV.50})$$

Los términos lineales del vector de fuerzas internas se obtienen al utilizar una medida de deformación lineal y sólo dependen del estado del material a través de los esfuerzos internos según:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^L = \int_{{}^{t+\Delta t}L} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}]^T \cdot \mathbf{B}^L \cdot dx \quad (\text{IV.51})$$

La consideración de las deformaciones por corte solamente afecta a los términos lineales. Los términos no-lineales dependen de la geometría del elemento a través del campo de desplazamientos según:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{NL} = \int_{{}^{t+\Delta t}L} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}]^T \cdot \mathbf{B}^{NL} \cdot [{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}]^T \cdot \mathbf{B}^{NL} \cdot dx \quad (\text{IV.52})$$

---

<sup>18</sup> El vector  $\delta \hat{\mathbf{U}}$  pertenece a la configuración deformada del estado  $t + \Delta t$ .

En la sección IV.3.5 se aplica este procedimiento de desacoplar la parte lineal y no-lineal en la obtención de los bloques de la matriz tangente de rigidez, de manera tal de poder implementar numéricamente en los algoritmos la no-linealidad geométrica de manera independiente.

#### IV.2.4. Interpolación del trabajo externo. El vector de cargas nodales consistentes

El trabajo externo de deformación, se definió como el trabajo virtual de las fuerzas exteriores sobre una variación del campo de desplazamientos (continuo) del elemento:

$$V_{ex} = \int_{t+\Delta t L} \left( {}^{t+\Delta t}p_x \cdot \delta u^o + {}^{t+\Delta t}p_y \cdot \delta w^o + {}^{t+\Delta t}m_{xy} \cdot \delta \theta \right) \cdot dx + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_n^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.53})$$

Esta expresión puede formularse también como el trabajo de una resultante de fuerzas externas sobre una variación arbitraria del vector de desplazamientos nodales (discreto) del elemento:

$$V_{ex} \approx {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.54})$$

Se define al vector  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_e$  como el vector de cargas nodales consistentes a partir de la integración de las cargas elementales utilizando las funciones de interpolación del elemento. El término consistente está asociado a la utilización de funciones de interpolación.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_e^T = \left\{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_u^T \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_w^T \quad {}^{t+\Delta t}r_\Delta \right\} \quad (\text{IV.55})$$

Además de las fuerzas distribuidas sobre el elemento, deben incluirse las fuerzas existentes sobre los nodos del mismo, las cuales forman parte del vector de fuerzas nodales exteriores<sup>19</sup>  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_n$ .

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_n^T = \left\{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_u^T \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_w^T \quad {}^{t+\Delta t}p_\Delta \right\} \quad (\text{IV.56})$$

Luego, la interpolación numérica del trabajo virtual externo se puede expresar ahora como:

$$V_{ex} \approx \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_e + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_n \right)^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.57})$$

Debido a la existencia de funciones de interpolación, la integración numérica del vector de cargas nodales consistentes  $\mathbf{R}_e$  se desarrolla en el parágrafo V.1.5.

#### IV.2.5. La ecuación de equilibrio del problema generalizado

Los párrafos IV.2.2 a IV.2.4 permitieron obtener las expresiones numéricas del trabajo de las fuerzas interiores y exteriores del elemento. La aproximación numérica se pudo efectuar

---

<sup>19</sup> Las componentes del vector de cargas nodales exteriores  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_n$  deben estar organizadas de la misma manera que el vector de desplazamientos nodales incógnita, de modo tal que “trabajen” sobre los grados de libertad correspondientes.

en virtud de la utilización de funciones de interpolación, que permitieron aproximar los campos de desplazamientos y deformaciones en el elemento.

El teorema de los trabajos virtuales de deformación finalmente, plantea el cumplimiento de la igualdad del trabajo de las fuerzas exteriores e interiores sobre un desplazamiento virtual, una ecuación de equilibrio.

$${}^{t+\Delta t}\Pi = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^T) \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} \approx 0 \quad (\text{IV.58})$$

Debe notarse que el carácter aproximado de la expresión anterior es exclusivamente debido a la interpolación de los desplazamientos y las deformaciones ya que, haciendo una revisión de las hipótesis utilizadas se tiene que:

- El equilibrio mediante (IV.59) no introduce ninguna hipótesis de linealidad en pequeñas deformaciones, ya que la cinemática del problema consideró una medida para deformaciones finitas (ver II.3)
- La no-linealidad del material se encuentra integrada en la matriz elastoplástica que se obtiene a partir de los parámetros de estado, los cuales son invariantes desde el estado inicial al final. Esta linealización incremental no introduce ningún tipo de aproximación, en virtud de un control del tamaño del paso (ver V.3)
- La hipótesis de pequeños desplazamientos se efectúa sobre el campo de desplazamientos virtuales ya que las variaciones de deformaciones y tensiones son equivalentes a una linealización de 1° orden. Nuevamente el teorema de Taylor está presente aplicación en la formulación del T.T.V.

El cumplimiento del (IV.58) implica que el T.T.V. deberá verificarse *para todo* desplazamiento virtual, y como los desplazamientos virtuales son arbitrarios entonces se cumple que:

$${}^{t+\Delta t}\Pi \approx 0 \Leftrightarrow ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^T) \approx \mathbf{0} \quad (\text{IV.59})$$

Si se compara el 2° término de (IV.59) con la expresión del equilibrio del problema elemental no-lineal en (II.24), podemos verificar que el T.T.V. es una formulación aproximada del equilibrio del problema generalizado no-lineal.

A diferencia del problema elemental visto en la sección II.1 , la expresión (IV.59) representa ahora un sistema de ecuaciones no-lineales con tantas incógnitas como grados de libertad tiene el problema a resolver, para lo cual se hace necesario la aplicación de los métodos del análisis numérico para poder resolverlo, lo cual es el objeto de la sección siguiente.

### IV.3. LA LINEALIZACIÓN DEL EQUILIBRIO

#### IV.3.1. La Formulación de la Matriz Tangente de Rigidez

Según lo visto en la sección anterior, el equilibrio del elemento queda determinado a partir de la igualdad del trabajo virtual de las fuerzas exteriores e interiores:

$${}^{t+\Delta t}\Pi \approx 0 \Leftrightarrow ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^T) \approx \mathbf{0} \quad (\text{IV.60})$$

La ecuación (IV.60) representa un sistema no-lineal de ecuaciones con tantas incógnitas como grados de libertad existen en la estructura.

En un planteo por elementos finitos, la ecuación de equilibrio a linealizar es la ecuación del trabajo virtual de la fuerza desbalanceada<sup>20</sup>.

$${}^{t+\Delta t}\Pi = {}^{t+\Delta t}\Psi^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (\text{IV.61})$$

En la misma línea, se busca un campo de desplazamientos  ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}$  tal que verifique aproximadamente la ecuación de equilibrio anterior. Aplicando una linealización de Taylor de 1° orden respecto del último estado conocido:

$${}^{t+\Delta t}\Pi \approx {}^t\Pi + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) \cdot \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}} \approx 0 \quad (\text{IV.62})$$

La derivada del trabajo de la fuerza desbalanceada, evaluada en la configuración inicial, será la matriz tangente buscada:

$${}^t\left( \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) = {}^t\left( \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{U}}} (\Psi^T \cdot \delta \hat{\mathbf{U}}) \right) = \delta \hat{\mathbf{U}}^T \cdot {}^t\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) = \delta \hat{\mathbf{U}}^T \cdot {}^t\mathbf{K} \quad (\text{IV.63})$$

$${}^t\mathbf{K} = {}^t\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) = {}^t\left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) - {}^t\left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) \quad (\text{IV.64})$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio linealizada respecto de la última configuración conocida, puede expresarse ahora a partir de la matriz tangente de rigidez del problema:

$${}^{t+\Delta t}\Pi \approx {}^t\Pi + \delta \hat{\mathbf{U}}^T \cdot {}^t\mathbf{K} \cdot \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}} \approx 0 \quad (\text{IV.65})$$

El carácter finito del incremento finito de desplazamientos, no tiene por qué cumplir las hipótesis de pequeños desplazamientos y sólo estará acotado por el tamaño máximo del paso de acuerdo con la formulación secante del material (ver V.3)

---

<sup>20</sup> Según de la ecuación de trabajo, el campo de desplazamientos virtuales  $\delta {}^t\hat{\mathbf{U}}$  debe existir sobre la misma configuración en la que existen las fuerzas desbalanceadas, es decir en la configuración deformada en  $t + \Delta t$

El trabajo de la fuerza desbalanceada en la posición de referencia es un escalar, por lo tanto es indistinto transponer la siguiente expresión.

$${}^t\Pi = [{}^t\Pi]^T = \delta\hat{\mathbf{U}}^T \cdot {}^t\Psi = \delta\hat{\mathbf{U}}^T \cdot ({}^t\mathbf{F} - {}^t\mathbf{R}) \quad (\text{IV.66})$$

En virtud de que el estado inicial se supone en un equilibrado o *cuasi-equilibrado*, deberá cumplirse la nulidad del trabajo de deformación en esa configuración:

$$\delta\hat{\mathbf{U}}^T \cdot ({}^t\mathbf{F} - {}^t\mathbf{R} + {}^t\mathbf{K} \cdot \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}}) \approx 0 \quad (\text{IV.67})$$

Debido a que esta ecuación matricial debe cumplirse para *cualquier* variación arbitraria de desplazamientos  $\delta\hat{\mathbf{U}}^T$  sobre la configuración inicial conocida, la nueva ecuación de equilibrio queda aproximada linealmente mediante:

$${}^t\mathbf{K} \cdot \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}} \approx -({}^t\mathbf{F} - {}^t\mathbf{R}) \approx -{}^t\Psi \quad (\text{IV.68})$$

La ecuación anterior es la ecuación de equilibrio del problema discreto para la configuración de referencia del instante  $t$

### IV.3.2. Fuerzas conservativas y fuerzas dependientes de la configuración

En la gran mayoría de problemas del análisis de estructuras, las fuerzas externas mantienen su módulo y su dirección y por ello, pueden considerarse independientes de la respuesta de la estructura.

En este caso, el trabajo de las fuerzas exteriores es independiente de la trayectoria y por esta razón a este tipo de fuerzas se las denomina fuerzas conservativas. Las fuerzas de origen gravitatorio son siempre conservativas. Según esta hipótesis, la matriz tangente de rigidez, quedaría determinada por la derivada de las fuerzas internas respecto de la trayectoria:

$${}^t\mathbf{K} = \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right) \quad (\text{IV.69})$$

Las fuerzas resultantes de presiones de fluidos por otro lado, no son fuerzas conservativas ya que su magnitud y su dirección dependen de la forma de la estructura que los contiene. A este tipo de fuerzas se las denomina *fuerzas seguidoras* y son dependientes de la respuesta de la estructura.

El análisis de problemas con fuerzas exteriores no-conservativas escapa a los alcances del presente trabajo, aunque la única salvedad que debería efectuarse radica en el cálculo de la matriz tangente del problema, la cual se efectúa a partir del vector de fuerzas desbalanceadas, como es su definición general dada en (IV.64).

### IV.3.3. El equilibrio en la posición deformada

La no-dependencia de las fuerzas exteriores con el campo de desplazamientos incógnita del problema  ${}^t\hat{\mathbf{U}}$  no debe confundirse con el *cálculo del equilibrio en la posición deformada*. La ecuación de equilibrio expresada a través de los trabajos virtuales se plantea en la posición deformada del paso anterior al incremento de cargas recibido. La actualización incremental

de cada elemento de la estructura se efectúa simplemente actualizando las coordenadas de los nodos en cada incremento de cargas.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{X} = {}^t\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} \quad (\text{IV.70})$$

El incremento del vector de coordenadas de la estructura estará dado por el incremento de desplazamientos de la estructura. Debido a que este vector está considerado únicamente para los grados de libertad de la estructura, tiene un ordenamiento diferente al vector de coordenadas y la actualización no puede efectuarse por una suma directa sino a partir de un algoritmo de expansión (ver V.2.5):

$$\Delta\mathbf{X} = A(\Delta{}^t\hat{\mathbf{U}}) \quad (\text{IV.71})$$

Un ejemplo estructural clásico es el caso de las columnas de los pisos inferiores de edificios elevados sometidas a desplazamientos laterales significativos durante una acción sísmica. La naturaleza gravitatoria de las cargas de compresión mantiene constante la dirección de los esfuerzos normales sobre la columna, aunque la consideración del equilibrio en las diferentes posiciones de la estructura deformada produce esfuerzos que se incrementan con la deformación, que generalmente llevan al colapso de la estructura. A este efecto se lo denomina efecto  $P - \Delta$  y algunos autores utilizan denominan de este modo al *efecto* de la no-linealidad geométrica en la consideración del equilibrio.

#### IV.3.4. La derivada de las fuerzas internas. La matriz tangente

Según lo visto en los párrafos anteriores, la matriz tangente que linealiza el problema respecto de la última configuración conocida puede calcularse como la derivada del vector de fuerzas internas respecto de los desplazamientos incógnita del problema:

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \quad (\text{IV.72})$$

Siendo el vector de fuerzas internas una función dependiente del campo de desplazamientos  ${}^t\hat{\mathbf{U}}$  a través de la matriz derivada de las deformaciones:

$${}^t\mathbf{F} = \int_{t_L} [{}^t\mathbf{Q}]^T \cdot {}^t\mathbf{D} \cdot dx \quad (\text{IV.73})$$

Derivando los términos del integrando se obtiene:

$${}^t\mathbf{K} = \int_{t_L} \left[ \frac{\partial {}^t\mathbf{Q}}{\partial {}^t\hat{\mathbf{U}}} \right]^T \cdot {}^t\mathbf{D} \cdot dx + \int_{t_L} [{}^t\mathbf{Q}]^T \cdot \frac{\partial {}^t\mathbf{D}}{\partial {}^t\hat{\mathbf{U}}} \cdot dx \quad (\text{IV.74})$$

La derivada de los esfuerzos internos se obtuvo en IV.1.3 a partir de la matriz secante elastoplástica de la sección. La matriz derivada de las deformaciones:

$$\frac{\partial {}^t\mathbf{Q}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \approx {}^t\hat{\mathbf{S}} \cdot [{}^t\mathbf{D}]^T \quad (\text{IV.75})$$



$${}^t\mathbf{D} \approx {}^t\mathbf{B}^L + {}^t\mathbf{B}^{NL} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{U}}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \quad (\text{IV.76})$$

$$\frac{\partial {}^t\mathbf{D}}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \approx [{}^t\mathbf{B}^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \quad (\text{IV.77})$$

Reemplazando en (IV.74) la matriz tangente del elemento queda determinada según

$${}^t\mathbf{K} = \int_L {}^t\mathbf{D} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}]^T \cdot {}^t\mathbf{D} \cdot dx + \int_L [{}^t\mathbf{Q}]^T \cdot [{}^t\mathbf{B}^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \cdot dx \quad (\text{IV.78})$$

#### IV.3.5. Descomposición de la matriz tangente en bloques

Las expresiones obtenidas hasta aquí permiten formular completamente la matriz tangente del problema no-lineal generalizado, considerando tanto la no-linealidad geométrica como la no-linealidad del material. La parte lineal de la matriz tangente del problema se puede obtener a partir de la hipótesis cinemática de las pequeñas deformaciones formuladas para el elemento de viga clásico en II.3.1.

La consideración de una medida de deformación no-lineal, trae como consecuencia la existencia de términos no-lineales en la matriz tangente del elemento. El objeto del presente párrafo es poder descomponer la expresión de la matriz tangente obtenida anteriormente según una parte lineal y no-lineal. Desarrollando el primer término de la expresión anterior (IV.78) se puede expresar a la matriz tangente del problema como la suma de tres bloques conceptualmente diferentes:

$${}^t\mathbf{K} = {}^t\mathbf{K}^\sigma + {}^t\mathbf{K}^L + {}^t\mathbf{K}^\phi \quad (\text{IV.79})$$

El primer término de la expresión se denomina matriz de tensiones iniciales, debido a que es función de los esfuerzos internos, los cuales se interpolan mediante las funciones de forma no lineales. Si se desarrollan los elementos de esta matriz, se puede observar que los términos dependen solamente del esfuerzo normal de la sección  ${}^tN(x)$  y pueden entenderse como el resultado de la existencia previa de tensiones iniciales en el elemento.

$${}^t\mathbf{K}^\sigma = \int_L [{}^t\mathbf{Q}]^T \cdot [{}^t\mathbf{B}^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \cdot dx \quad (\text{IV.80})$$

Esta matriz podrá ser nula al inicio del proceso incremental y es particularmente útil en el análisis de problemas de bifurcación del equilibrio (*buckling analysis*) y en el problema clásico de la rigidización a flexión de una viga traccionada (*tension stiffening*).

El segundo término de la expresión es el que se obtiene a partir de la utilización de una medida de deformación lineal, sin tener en cuenta los términos de 2º orden de la deformación longitudinal. Si se omiten los términos acoplados de las funciones de forma modificadas por corte (términos  ${}^*\Delta$ ) los elementos de esta matriz son los conocidos del análisis lineal de estructuras.

$${}^t\mathbf{K}^L = \int_L {}^t\mathbf{B}^L \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^L \cdot dx \quad (\text{IV.81})$$

El tercer bloque de la matriz tangente es el término no-lineal. A esta matriz se la denomina en la bibliografía clásica matriz de deformaciones iniciales o matriz geométrica  ${}^t\mathbf{K}^\phi$  dada por:<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K}^\phi = & \int_{t_L} {}^t\phi^o \cdot \left( {}^t\mathbf{B}^{NL} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^L + {}^t\mathbf{B}^L \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \right) \cdot dx + \dots \\ & \dots + \int_{t_L} ({}^t\phi^o)^2 \cdot \left( {}^t\mathbf{B}^{NL} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \right) \cdot dx \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

El parámetro  ${}^t\phi^o({}^t\hat{\mathbf{U}})$  “concentra” la no-linealidad de la matriz y es una función que representa el giro por flexión de la sección analizada; ésta se puede interpolar a partir de los desplazamientos nodales según (II.200).

$$\phi^o(x) \approx \mathbf{B}^{NL} \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{IV.83})$$

Las matrices que forman a la matriz tangente del elemento son naturalmente simétricas.

$${}^t\mathbf{K}^\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t\mathbf{k}_{ww}^\sigma & {}^t\mathbf{k}_{w\Delta}^\sigma \\ \mathbf{0} & {}^t\mathbf{k}_{\Delta w}^\sigma & {}^t\mathbf{k}_{\Delta\Delta}^\sigma \end{pmatrix} \quad (\text{IV.84})$$

$${}^t\mathbf{K}^L = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{k}_{uu}^L & {}^t\mathbf{k}_{uw}^L & {}^t\mathbf{k}_{u\Delta}^L \\ {}^t\mathbf{k}_{uw}^L & {}^t\mathbf{k}_{ww}^L & {}^t\mathbf{k}_{w\Delta}^L \\ {}^t\mathbf{k}_{\Delta u}^L & {}^t\mathbf{k}_{\Delta w}^L & {}^t\mathbf{k}_{\Delta\Delta}^L \end{pmatrix} \quad (\text{IV.85})$$

$${}^t\mathbf{K}^\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & {}^t\mathbf{k}_{uw}^\phi & {}^t\mathbf{k}_{u\Delta}^\phi \\ {}^t\mathbf{k}_{wu}^\phi & {}^t\mathbf{k}_{ww}^\phi & {}^t\mathbf{k}_{w\Delta}^\phi \\ {}^t\mathbf{k}_{\Delta u}^\phi & {}^t\mathbf{k}_{\Delta w}^\phi & {}^t\mathbf{k}_{\Delta\Delta}^\phi \end{pmatrix} \quad (\text{IV.86})$$

En las figuras Fig.28 a Fig.30 se desarrollan las expresiones correspondientes a cada bloque de las matrices indicadas.

#### IV.3.6. El caso particular del material elástico, lineal y homogéneo

Si se define al plano de referencia (origen de coordenadas z) coincidente con el eje baricéntrico de la sección y no se consideran las deformaciones membranales del elemento ni las deformaciones por corte, se obtienen las expresiones de la matriz de rigidez del análisis lineal de estructuras.

---

<sup>21</sup> Debido a que las matrices derivada de las funciones de forma no son simétricas, el primer término de la expresión no puede simplificarse

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.87})$$

$$\mathbf{k}_{uu} \approx \int_{t_L} \mathbf{b}_u^T \cdot E \cdot A \cdot \mathbf{b}_u \cdot dx \quad (\text{IV.88})$$

$$\mathbf{k}_{ww} \approx \int_{t_L} \mathbf{b}_\theta^T \cdot E \cdot J \cdot \mathbf{b}_\theta \cdot dx + \int_{t_L} \mathbf{b}_w^T \cdot {}^t N_x \cdot \mathbf{b}_w \cdot dx \quad (\text{IV.89})$$

donde el bloque  $[\mathbf{k}_{uu}]$  es la matriz de rigidez del elemento barra y  $[\mathbf{k}_{ww}]$  es la matriz de rigidez del elemento de viga de Euler-Bernoulli clásico, incluyendo a la matriz de tensiones iniciales del elemento.

|   |   |
|---|---|
| ${}^t \mathbf{k}_{uu}^L \approx \int_{t_L} {}^t \widehat{EA}_k \cdot \mathbf{b}_u^T \cdot \mathbf{b}_u \cdot dx$  | ${}^t \mathbf{k}_{uw}^L \approx - \int_{t_L} {}^t \widehat{EX}_k \cdot \mathbf{b}_\theta^T \cdot \mathbf{b}_u \cdot dx$   |
| ${}^t \mathbf{k}_{\Delta u}^L \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EA} \cdot b_{u,\Delta u_3} - {}^t \widehat{EX} \cdot b_{\theta,\Delta u_3} \right) \cdot \mathbf{b}_u^T \cdot dx$   | $\mathbf{k}_{u\Delta}^L \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EA} \cdot b_{u,\Delta u_3} - {}^t \widehat{EX} \cdot h_{\chi,\Delta u_3} \right) \cdot \mathbf{b}_u \cdot dx$                             |
| ${}^t \mathbf{k}_{wu}^L \approx - \int_{t_L} {}^t \widehat{EX} \cdot \mathbf{b}_u^T \cdot \mathbf{h}_\chi \cdot dx$   | ${}^t \mathbf{k}_{ww}^L \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EJ} \cdot \mathbf{h}_\chi^T \cdot \mathbf{h}_\chi + {}^t \widehat{GA} \cdot \mathbf{h}_\gamma^T \cdot \mathbf{h}_\gamma \right) \cdot dx$ |
| ${}^t \mathbf{k}_{w\Delta}^L \approx \int_{t_L} \left( \left( {}^t \widehat{EJ} \cdot b_{\theta,\Delta u_3} - {}^t \widehat{EX} \cdot b_{u,\Delta u_3} \right) \cdot \mathbf{b}_\theta + {}^t \widehat{GA}_k \cdot h_{\gamma,\Delta u_3} \cdot \mathbf{h}_\gamma \right) \cdot dx$                                |   |
| ${}^t \mathbf{k}_{\Delta w}^L \approx \int_{t_L} \left( \left( {}^t \widehat{EJ} \cdot b_{\theta,\Delta u_3} - {}^t \widehat{EX} \cdot b_{u,\Delta u_3} \right) \cdot \mathbf{b}_\theta^T + {}^t \widehat{GA} \cdot \mathbf{h}_\gamma^T \cdot h_{\gamma,\Delta u_3} \right) \cdot dx$                             |   |
| ${}^t \mathbf{k}_{\Delta\Delta}^L \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EA} \cdot (b_{u,\Delta u_3})^2 - 2 \cdot {}^t \widehat{EX} \cdot b_{\theta,\Delta u_3} \cdot b_{u,\Delta u_3} + {}^t \widehat{EJ} \cdot (b_{\theta,\Delta u_3})^2 + {}^t \widehat{GA} \cdot (h_{\gamma,\Delta u_3})^2 \right) \cdot dx$ |   |

Fig.28. Bloques de la matriz tangente lineal

|  |   |  |  |  |
|--|---|--|--|--|
| ${}^t \mathbf{k}_{uu}^\sigma \approx \mathbf{0}$   | ${}^t \mathbf{k}_{uw}^\sigma \approx \mathbf{0}$  | $\mathbf{k}_{u\Delta}^\sigma \approx \mathbf{0}$ | ${}^t \mathbf{k}_{wu}^\sigma \approx \mathbf{0}$ | ${}^t \mathbf{k}_{\Delta u}^\sigma \approx \mathbf{0}$ |
| $\mathbf{k}_{ww}^\sigma \approx \int_{t_L} {}^t N_x \cdot \mathbf{b}_w^T \cdot \mathbf{b}_w \cdot dx$              | ${}^t \mathbf{k}_{w\Delta}^\sigma \approx \int_{t_L} {}^t N_x \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot \mathbf{b}_w \cdot dx$ |  |  |  |
| ${}^t \mathbf{k}_{\Delta w}^\sigma \approx \int_{t_L} {}^t N_x \cdot \mathbf{b}_w \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot dx$ | ${}^t k_{\Delta\Delta}^\sigma \approx \int_{t_L} {}^t N_x \cdot (b_{w,\Delta u_3})^2 \cdot dx$                    |  |  |  |

Fig.29. Bloques de la matriz tangente de tensiones iniciales

|   |   |   |
|---|---|---|
| ${}^t \mathbf{k}_{uu}^\phi \approx \mathbf{0}$  | ${}^t \mathbf{k}_{uw}^\phi \approx \int_{t_L} {}^t \widehat{EA} \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w^T \cdot \mathbf{b}_u \cdot dx$           | $\mathbf{k}_{u\Delta}^\phi \approx \int_{t_L} {}^t \widehat{EA} \cdot {}^t \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot \mathbf{b}_u \cdot dx$ |
| ${}^t \mathbf{k}_{wu}^\phi \approx \int_{t_L} {}^t \widehat{EA}_k \cdot \mathbf{b}_u^T \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w \cdot dx$   | ${}^t \mathbf{k}_{\Delta u}^\phi \approx \int_{t_L} {}^t \widehat{EA} \cdot \mathbf{b}_u^T \cdot {}^t \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot dx$ |   |
| ${}^t \mathbf{k}_{ww}^\phi \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EA} \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w^T - {}^t \widehat{EX} \cdot \mathbf{b}_\theta^T \right) \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w \cdot dx - \int_{t_L} {}^t \widehat{EX} \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w^T \cdot \mathbf{b}_\theta \cdot dx$                           |   |   |
| ${}^t \mathbf{k}_{w\Delta}^\phi \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EA} \cdot (b_{u,\Delta u_3} + \phi_k^o \cdot b_{w,\Delta u_3}) - {}^t \widehat{EX} \cdot b_{\theta,\Delta u_3} \right) \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w \cdot dx - \int_{t_L} {}^t \widehat{EX} \cdot \phi_k^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot \mathbf{b}_\theta \cdot dx$ |   |   |
| ${}^t \mathbf{k}_{\Delta w}^\phi \approx \int_{t_L} \left( {}^t \widehat{EA} \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w^T - {}^t \widehat{EX} \cdot \mathbf{b}_\theta^T \right) \cdot {}^t \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot dx - \int_{t_L} {}^t \widehat{EX} \cdot {}^t \phi^o \cdot \mathbf{b}_w^T \cdot b_{\theta,\Delta u_3} \cdot dx$             |   |   |
| ${}^t k_{\Delta\Delta}^\phi \approx \int_{t_L} {}^t \widehat{EA} \cdot (b_{u,\Delta u_3} + {}^t \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3}) \cdot {}^t \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot dx - 2 \cdot \int_{t_L} {}^t \widehat{EX} \cdot {}^t \phi^o \cdot b_{w,\Delta u_3} \cdot b_{\theta,\Delta u_3} \cdot dx$  |   |   |

Fig.30. Bloques de la matriz tangente geométrica



## **V. ACTUALIZACIÓN DE ESTADO. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA**



## V.1. FORMULACIÓN NUMÉRICA DE LA MATRIZ TANGENTE

### V.1.1. Introducción

En los capítulos anteriores, las expresiones de la resultante de fuerzas internas y externas del elemento, la matriz tangente de rigidez, los parámetros de estado y la resultante de esfuerzos internos de la sección, se formularon como integrales definidas en intervalos determinados como ser la longitud del elemento o la altura de la sección analizada.

En el análisis lineal de estructuras, todas estas expresiones pueden obtenerse de manera explícita. El procedimiento de integrar analíticamente la ecuación diferencial del equilibrio, permite conocer de manera explícita la relación fuerza-desplazamiento del elemento<sup>22</sup>.

En un análisis no-lineal ya no es posible obtener estas expresiones de modo explícito debido a que o bien el integrando no tiene una forma explícita y sólo se conoce a partir de una tabla de valores en determinados puntos del intervalo (nodos) o bien porque su integración analítica resultaría extremadamente compleja.

El objetivo del presente capítulo consiste en establecer los procedimientos numéricos necesarios que permitan formular numéricamente la matriz tangente del problema y todas las demás variables de estado que estén definidas a partir de una integración analítica.

### V.1.2. Las fórmulas de cuadratura numérica.

Según lo dicho, el objetivo general buscado será establecer un algoritmo que permita aproximar numéricamente el valor de una integral definida en un intervalo cerrado y finito  $[a \ b]$  es decir, aproximar numéricamente el valor de la función  $I(f)$ .

$$I(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad (V.1)$$

Los tipos de aproximación que se considerarán aquí estarán dados esencialmente en la forma de (V.2). Estas fórmulas de integración numérica se denominan fórmulas de cuadratura numérica (Isaacson [15], Kimcaid [17]).

---

<sup>22</sup> Los elementos integrados analíticamente se desarrollan en los textos del análisis matricial de estructuras (Przemieniecki [26], Melosh [20])

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f(x_i) \quad (\text{V.2})$$

Los  $n$  puntos diferentes de integración  $x_i$  se denominan puntos de cuadratura o nodos, y las cantidades  $\alpha_i$  se denominan coeficientes de cuadratura. Es natural preguntarse aquí cual de los esquemas de cuadratura es el más adecuado para el problema que nos ocupa, siendo este el objeto de los párrafos siguientes

Si se fijan los nodos en una distribución particular, por ejemplo equidistantes entre sí, se obtienen los esquemas conocidos como las fórmulas de Newton-Cotes. Las fórmulas de Newton-Cotes utilizan polinomios que interpolan  $n$  nodos, razón por lo cual integran exactamente a cualquier polinomio de grado  $(n - 1)$  o menor, y se dice en este caso que el esquema de integración tiene un grado de precisión igual a  $(n - 1)$ :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^n n_j \cdot f(x_j) \quad x_j = a + j \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \quad (\text{V.3})$$

Si se fijan los coeficientes de cuadratura, por ejemplo todos ellos iguales entre sí, se obtienen los esquemas conocidos como las fórmulas de cuadratura de Chebyshev. Estas fórmulas tienen un grado de precisión igual a  $(n + 1)$  y no son muy utilizadas en la práctica

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx c(n) \cdot \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \quad (\text{V.4})$$

Salvo casos particulares, la utilización de un número finito de puntos de integración tendrá inevitablemente asociado un error de discretización; de ahí, el carácter aproximado de la expresión (V.2). El cumplimiento de la igualdad estricta se lograría a partir del conocimiento del error de discretización  $E_n(f)$ , obtenido al interpolar a la función  $f(x)$  mediante un polinomio que pase por  $n$  puntos:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \equiv \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot f(\zeta_i) + E_n(f) \quad (\text{V.5})$$

Si se plantea la nulidad en todo el intervalo del polinomio interpolador del error de discretización  $E_n(f)$  se obtienen los esquemas conocidos como fórmulas de Gauss. Debido a que una fórmula de cuadratura por definición interpola  $n$  puntos de cuadratura, la función  $E_n(f)$  tendrá  $n$  raíces en cada uno de esos puntos; así, la obtención de los puntos y coeficientes de cuadratura implica la resolución de un problema de  $2n$  incógnitas y por esta razón las fórmulas de Gauss tienen el máximo grado de precisión numérica:  $2n - 2$ . Los puntos de cuadratura se definen en general para un intervalo unitario  $[-1 + 1]$ .

$$\int_{-1}^{+1} f(\zeta) \cdot d\zeta \equiv \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot f(\zeta_i) \quad (\text{V.6})$$

Los esquemas de cuadratura que fijan los nodos en general incluyen los valores extremos del intervalo como puntos de cuadratura. A estos esquemas se los denomina cerrados. Las



fórmulas de Gauss en cambio, no incluyen los valores extremos del intervalo por lo cual se las denomina esquemas abiertos.

En los problemas de elementos finitos es normal conocer los valores en los extremos del intervalo, ya que en general ahí se tienen los nodos principales del elemento. Si se plantea una fórmula de cuadratura del tipo de Gauss, pero incluyendo los valores extremos del intervalo, se obtiene el esquema conocido como fórmula de Gauss-Lobatto.

$$\int_{-1}^{+1} f(\zeta) \cdot d\zeta \equiv \psi_1 \cdot f(-1) + \sum_{i=2}^{n-1} \psi_i \cdot f(\zeta_i) + \psi_n \cdot f(+1) \quad (\text{V.7})$$

Los puntos de cuadratura de estos esquemas se pueden obtener en la mayoría de los textos del cálculo numérico, tabulados generalmente en un intervalo unitario. Para efectuar la integración dentro de un intervalo arbitrario es preciso efectuar un cambio de variable:

$$\int_a^b f(z) \cdot dz = \left( \frac{b-a}{2} \right) \cdot \int_{z(a)=-1}^{z(b)=+1} f(z(\zeta)) \cdot d\zeta \quad (\text{V.8})$$

En donde la función general a utilizar en el cambio de variable está dada por:

$$z(\zeta) = \frac{(b-a) \cdot \zeta + b + a}{2} \quad (\text{V.9})$$

En la integración a lo largo de la longitud del elemento, la función de cambio de variable será:

$$z(\zeta) = \frac{tL}{2} \cdot (\zeta + 1) \quad (\text{V.10})$$

En la integración del estado de tensiones a lo largo de la altura de la sección, la función de cambio de variable será:

$$z(\zeta) = \frac{h}{2} \cdot \zeta \quad (\text{V.11})$$

### V.1.3. La resultante total de esfuerzos internas de la sección

Las resultantes de esfuerzos internos de la sección, fueron obtenidas analíticamente en el capítulo IV.1 a partir de las hipótesis efectuadas sobre el material en una formulación instantánea y una formulación incremental. Si se conoce el estado de tensiones de la sección actualizado en el instante  $t + \Delta t$ , la resultante total de esfuerzos puede determinarse según las expresiones (IV.1) a (IV.3):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k = \int_h b \cdot [\mathbf{Z}(z)]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{s}_k(z) \cdot dz \quad (\text{V.12})$$

Efectuando el cambio de variable para el intervalo unitario y aplicando las fórmulas de cuadratura:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k = \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot [\mathbf{Z}^i]^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{s}_k^i \quad (\text{V.13})$$

donde el vector  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{s}_k^i$  es el estado de tensión de la sección  $x_k$  y de la fibra correspondiente al punto de integración de ordenada  $z_i$ .

$$\mathbf{Z}^i = \mathbf{Z}(z^i) = \begin{bmatrix} 1 & -z^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.14})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s}_k^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{s}(x_k, z^i) \quad (\text{V.15})$$

$$z^i = \frac{h}{2} \cdot \zeta^i \quad (\text{V.16})$$

El vector resultante de esfuerzos internos también puede determinarse por sus componentes según:

$${}^{t+\Delta t}N_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot ({}^{t+\Delta t}\sigma_x)_k^i \quad (\text{V.17})$$

$${}^{t+\Delta t}M_k \approx -\frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot ({}^{t+\Delta t}\sigma_x)_k^i \cdot z^i \quad (\text{V.18})$$

$${}^{t+\Delta t}Q_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot ({}^{t+\Delta t}\tau_{yz})_k^i \quad (\text{V.19})$$

Según se vio, esta formulación de los esfuerzos internos necesita del estado de tensiones actualizado en  $t + \Delta t$  a través de los algoritmos de retorno. Es posible sin embargo, obtener la resultante de esfuerzos internos antes de utilizar los algoritmos de retorno. Esto se logra mediante la formulación incremental de  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k$ , lo cual es el objeto del párrafo siguiente.

#### V.1.4. La matriz secante elastoplástica

La resultante de esfuerzos internos también podía obtenerse de manera incremental a partir del estado anterior utilizando la matriz secante elastoplástica. Las componentes de estas matriz son los parámetros de estado de la sección y quedan definidos a partir de los módulos secante de cada fibra de la sección:

$${}^t\hat{\mathbf{S}}_k \approx \int_h b \cdot [\mathbf{Z}(z)]^T \cdot {}^t\mathbf{C}_k(z) \cdot \mathbf{Z}(z) \cdot dz \quad (\text{V.20})$$

La expresión de la matriz elastoplástica es válida únicamente como definición analítica, ya que no es posible conocer la variación funcional en la variable  $z$  del módulo secante elastoplástico del material. Sin embargo, a partir de esta definición se puede plantear un esquema discretización por fibras. Efectuando el cambio de variable para la coordenada  $z$  y

aplicando los esquemas de cuadratura anteriores, la matriz secante elastoplástica queda definida numéricamente como:

$${}^t\hat{\mathbf{S}}_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot [\mathbf{Z}^i]^T \cdot {}^t\mathbf{C}_k^i \cdot \mathbf{Z}^i \quad (\text{V.21})$$

Para el caso que nos ocupa, las secciones rectangulares de hormigón armado, la inclusión discreta de las diferentes capas de armadura se podrá considerar mediante un esquema de Newton-Cotes:

$${}^t\hat{\mathbf{S}}_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot [\mathbf{Z}^i]^T \cdot {}^t(\mathbf{C}_k^i)_c \cdot \mathbf{Z}^i + \sum_{j=1}^m A^j \cdot [\mathbf{Z}^j]^T \cdot {}^t(\mathbf{C}_k^j)_s \cdot \mathbf{Z}^j \quad (\text{V.22})$$

donde  $n$  es el número de fibras de hormigón,  $m$  es el número de fibras de acero,  ${}^t(\mathbf{C}_k^i)_c$  y  ${}^t(\mathbf{C}_k^j)_s$  son las matrices secantes elasto-plásticas de la fibra  $i$ -ésima de hormigón y la fibra  $j$ -ésima acero respectivamente pertenecientes a la sección  $x_k$  del elemento.

Las componentes de la matriz secante elastoplástica de las sección se pueden determinar con las siguientes expresiones:

$${}^t\widehat{EA}_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot {}^t(\hat{E}_k^i)_c + \sum_{j=1}^m A^j \cdot {}^t(\hat{E}_k^j)_s \quad (\text{V.23})$$

$${}^t\widehat{EX}_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot {}^t(\hat{E}_k^i)_c \cdot z_c^i + \sum_{j=1}^m A^j \cdot {}^t(\hat{E}_k^j)_s \cdot z_s^j \quad (\text{V.24})$$

$${}^t\widehat{EJ}_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot {}^t(\hat{E}_k^i)_c \cdot (z_c^i)^2 + \sum_{j=1}^m A^j \cdot {}^t(\hat{E}_k^j)_s \cdot (z_s^j)^2 \quad (\text{V.25})$$

$${}^t\widehat{GA}_k \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot {}^t(\hat{G}_k^i)_c + \sum_{j=1}^m A^j \cdot {}^t(\hat{G}_k^j)_s \quad (\text{V.26})$$

Los problemas de flexión en secciones de hormigón armado tienen asociados un número importante de fibras que no colaboran en tensiones por encontrarse fisuradas. Esta característica indica adecuado un esquema de integración adaptativa sobre las fibras con tensiones no nulas en cada paso de cargas. Los fundamentos sobre integración adaptativa se pueden encontrar en las referencias [15] y [17]

La obtención de la resultante de esfuerzos internos por cualquiera de los dos caminos, llega a idénticos resultados en virtud de las hipótesis efectuadas para el material.

### V.1.5. El vector de cargas nodales consistentes

La integración numérica del trabajo de las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos virtuales dentro del elemento resultó en el vector de cargas nodales consistentes  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_e$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_e^T = \left\{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_u^T \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_w^T \quad {}^{t+\Delta t}r_\Delta \right\} \quad (\text{V.27})$$

En la sección IV.2.4 se definieron las componentes del vector de cargas nodales consistentes a partir de la integración analítica de las cargas exteriores del elemento interpoladas con las funciones de forma.

La distribución más simple a considerar para las fuerzas exteriores elementales, válida para los casos más comunes de elementos de estructuras de pórticos planos son las fuerzas uniformemente distribuidas:

$$p_x(x) = p \quad p_y(x) = q \quad m_{xy}(x) \equiv 0 \quad (\text{V.28})$$

Efectuando el cambio de variable para el intervalo  $[0 \quad {}^tL]$ , y utilizando la definición de las funciones de forma para este intervalo, es posible aproximar el valor del integrando mediante cualquiera de los esquemas de cuadratura vistos según:

$$\mathbf{r}_u^T \approx \frac{p \cdot L}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot \mathbf{h}_u^T(\zeta_i) \quad (\text{V.29})$$

$$r_\Delta \approx \frac{p \cdot L}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot h_{u,\Delta u_3}(\zeta_i) \quad (\text{V.30})$$

$$\mathbf{r}_w^T \approx \frac{q \cdot L}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot \mathbf{h}_w^T(\zeta_i) \quad (\text{V.31})$$

Si se utiliza cualquier esquema de integración cerrado, existirán términos de estas sumatorias que se anulan en los extremos del intervalo (Fig.13); esta característica hace posible optimizar el número de evaluaciones de las mismas.

### V.1.6. La resultante total de fuerzas internas

En la sección IV.2.3 se obtuvo en una forma lineal, la resultante de fuerzas internas  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$  del elemento, a partir de la interpolación del trabajo interno de deformación. Luego de la linealización del equilibrio, es necesario poder determinar dicho vector en la configuración del estado inicial del elemento:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k \right]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_k \quad (\text{V.32})$$

Según se vio en la misma sección, el vector de fuerzas internas puede descomponerse en una parte lineal y una parte no-lineal, dependiente del estado de deformación del elemento. Efectuando el cambio de variable para el intervalo  $[0 \quad {}^tL]$  y utilizando la definición de las derivadas de las funciones de forma para este intervalo, la expresión anterior puede integrarse numéricamente según una parte lineal y otra parte no-lineal:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^L \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot [{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^L \quad (\text{V.33})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{NL} \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k \cdot [\mathbf{B}_k^{NL}]^T \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \cdot [\mathbf{B}_k^{NL}]^T \quad (\text{V.34})$$

donde la resultante de esfuerzos internos en la sección  $\xi_k$  en el estado  $t$  está representada por el vector  ${}^t\mathbf{Q}_k$  y las matrices  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_k^L$  y  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_k^{NL}$  son la parte lineal y no-lineal respectivamente de la matriz de interpolación de deformaciones. (ver II.6.3)

El vector de fuerzas internas puede integrarse también a partir de sus componentes según las siguientes expresiones:

$${}^t\mathbf{F}^L \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot \left\{ \begin{array}{c} {}^tN_k \cdot \mathbf{b}_u^T(\xi_k) \\ {}^tM_k \cdot \mathbf{h}_\chi^T(\xi_k) + {}^tQ_k \cdot \mathbf{h}_\gamma^T(\xi_k) \\ {}^tN_k \cdot b_{u,\Delta u_3}(\xi_k) + {}^tM_j \cdot h_{\chi,\Delta u_3}(\xi_k) + {}^tQ_k \cdot h_{\gamma,\Delta u_3}(\xi_k) \end{array} \right\} \quad (\text{V.35})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{NL} \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot {}^tN_k \cdot {}^t\phi_k^o \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{b}_w^T(\xi_k) \\ b_{w,\Delta u_3}(\xi_k) \end{array} \right\} \quad (\text{V.36})$$

donde el parámetro  $\phi_j^o$  (que afecta únicamente a los términos no-lineales) es el giro por flexión de la sección analizada:

$$\phi_j^o \approx \mathbf{B}_j^{NL} \cdot {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{V.37})$$

Los términos  $b_{w,\Delta u_3}$ ,  $h_{\gamma,\Delta u_3}$  y  $\mathbf{h}_\gamma$  serán distintos de cero únicamente bajo la consideración de las deformaciones por corte en la interpolación. Esto permitirá analizar un mismo problema considerando o no a las deformaciones por corte a partir de una variable lógica (*flag*) sin la necesidad de redefinir el vector de fuerzas internas y consecuentemente, la matriz tangente del problema.

### V.1.7. La integración de los bloques de la matriz tangente del elemento

La matriz tangente del elemento se formulaba a partir de la derivada de la resultante de fuerzas internas respecto del campo de desplazamientos del elemento. Esta derivada se podía escribir a partir de los esfuerzos internos como una integral en la longitud del elemento de las resultantes de esfuerzos internos trabajando sobre las deformaciones según:

$${}^t\mathbf{K} = \int_{{}^tL} [{}^t\mathbf{Q}]^T \cdot [{}^t\mathbf{B}^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}^{NL} \cdot dx + \int_{{}^tL} {}^t\mathbf{D} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}]^T \cdot {}^t\mathbf{D} \cdot dx \quad (\text{V.38})$$

La formulación numérica de la matriz tangente consistirá entonces en la integración numérica de cada una de estas matrices. El primer término de esta expresión se definió como la matriz de tensiones iniciales y se puede determinar numéricamente según:

$${}^t\mathbf{K}^\sigma \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot {}^t\mathbf{Q}_k \cdot [{}^t\mathbf{B}_k^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^{NL} \quad (\text{V.39})$$

Por otra parte, en la sección IV.3.5 se vio que el segundo término de esta expresión podía descomponerse en la suma de dos partes: una matriz tangente lineal y una matriz geométrica o no-lineal. La parte lineal de la matriz tangente se puede determinar numéricamente según:

$${}^t\mathbf{K}^L \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot {}^t\mathbf{B}_k^L \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}_k^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^L \quad (\text{V.40})$$

La componente no-lineal de la matriz tangente, denominada matriz geométrica o matriz de deformaciones iniciales, se determina según:

$${}^t\mathbf{K}^\phi \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot {}^t\phi_k^o \cdot \left( {}^t\mathbf{B}_k^{NL} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}_k]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^L + {}^t\mathbf{B}_k^L \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}_k]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^{NL} + {}^t\phi_k^o \cdot {}^t\mathbf{B}_k^{NL} \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}_k]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^{NL} \right) \quad (\text{V.41})$$

Las expresiones anteriores pueden reformularse de manera mucho más eficiente desde el punto de vista computacional, para ser implementadas en un algoritmo con capacidades de procesamiento paralelo.

Si no se discrimina la parte lineal y no-lineal del problema, es mucho más eficiente desde el punto de vista computacional, determinar la matriz tangente de rigidez a partir de la siguiente expresión:

$${}^t\mathbf{K} \approx \frac{{}^tL}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot \left( {}^t\mathbf{Q}_k \cdot [{}^t\mathbf{B}_k^{NL}]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^{NL} + {}^t\mathbf{D}_k \cdot [{}^t\hat{\mathbf{S}}_k]^T \cdot {}^t\mathbf{D}_k \right) \quad (\text{V.42})$$

## V.2. LOS PROCEDIMIENTOS GENERALES DE SOLUCIÓN

### V.2.1. Las soluciones incrementales. Las técnicas iterativas

Para establecer los procedimientos generales de solución es necesario definir previamente la forma matemática del problema general, el cual se formula como la solución de la siguiente expresión incremental:

$${}^{t+\Delta t}\Psi \approx {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \approx \mathbf{0} \quad (\text{V.43})$$

La expresión anterior es una ecuación de equilibrio que expresa el residuo (o fuerza desbalanceada) entre la resultante de fuerzas internas y la resultante de fuerzas exteriores en el instante posterior al incremento de cargas. La resultante de fuerzas interiores y en consecuencia el residuo del problema, estará en función del campo de desplazamientos incógnita<sup>23</sup>  $\hat{\mathbf{U}}$ :

$${}^{t+\Delta t}\Psi = \Psi({}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}) \quad (\text{V.44})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{F}({}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}) \quad (\text{V.45})$$

Para obtener la solución del problema incremental, se parte de una solución conocida equilibrada (o de *cuasi*-equilibrio):

$${}^t\Psi \approx \mathbf{0} \quad (\text{V.46})$$

El estado actual no equilibrado se produce debido a cambios en las fuerzas exteriores dados como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} + {}^t\Delta\mathbf{R} \quad (\text{V.47})$$

La determinación del incremento del campo de desplazamientos  ${}^t\Delta\hat{\mathbf{U}}$  que verifique (V.43) será el objetivo buscado:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}} = {}^t\hat{\mathbf{U}} + \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}} \quad (\text{V.48})$$

Debido a que la relación entre la resultante de fuerzas internas y el campo de desplazamientos incógnita está dada por una forma no-lineal, la solución al problema incremental planteado por la ecuaciones (V.43) no puede ser abordada directamente y se

---

<sup>23</sup> El campo de desplazamientos incógnita es el parámetro de discretización del problema. (Zienkiewicz [35])

requiere alguna estrategia iterativa como procedimiento de solución. En este proceso iterativo se busca lograr, luego de un número  $n$  de iteraciones, la nulidad del residuo dado en la forma:

$$\Psi\left({}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}^{(n)}\right) \approx {}^{t+\Delta t}\Psi^{(n)} \approx \mathbf{0} \quad (\text{V.49})$$

Según lo visto en la sección II.2, la expresión anterior puede ser aproximada hasta el 1° orden a partir de la última *iteración* conocida, mediante de la fórmula de Taylor. No debe confundirse este procedimiento con el utilizado en la sección II.1.5 en donde la aproximación se efectuaba a partir de la última *configuración* conocida.

$${}^{t+\Delta t}\Psi^{(i)} \approx {}^{t+\Delta t}\Psi^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{U}}\right)^{(i-1)} \cdot \delta {}^t\widehat{\mathbf{U}}^{(i)} \simeq \mathbf{0} \quad (\text{V.50})$$

En esta expresión, la incógnita a determinar es el incremento de desplazamientos  $\delta {}^t\widehat{\mathbf{U}}^{(i)}$  del paso  $(t + \Delta t)$ . En el comienzo del proceso iterativo se supone conocido el campo de desplazamientos de la iteración inicial a partir de la última configuración conocida, la cual se asume en una configuración de equilibrio o *cuasi-equilibrio*:

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}^{(0)} \approx {}^t\widehat{\mathbf{U}} \quad (\text{V.51})$$

La derivación del vector residuo respecto del vector campo de desplazamientos da origen a matriz jacobiana del problema, la cual en términos estructurales se denomina matriz de rigidez tangente (*tangent stiffness matrix*) del problema:

$${}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{U}}\right)^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}\right)^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(i-1)} \quad (\text{V.52})$$

La solución buscada se dará aquella iteración en la cual se anule el residuo dado por (V.50):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(i-1)} \cdot \delta {}^t\widehat{\mathbf{U}}^{(i)} = -\left({}^{t+\Delta t}\Psi^{(i-1)}\right) \quad (\text{V.53})$$

Despejando se obtiene una ecuación de corrección iterativa conocida en la literatura clásica como la fórmula de Newton-Raphson.

$$\delta {}^t\widehat{\mathbf{U}}^{(i)} = -\left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(i-1)}\right]^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\Psi^{(i-1)} \quad (\text{V.54})$$

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \delta {}^t\widehat{\mathbf{U}}^{(i)} \quad (\text{V.55})$$

Finalmente, luego de una serie de aproximaciones sucesivas se obtiene el desplazamiento del estado final buscado:

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}^{(n)} \approx {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{U}}^{(n-1)} + \delta {}^t\widehat{\mathbf{U}}^{(n)} \quad (\text{V.56})$$



### V.2.2. La iteración sobre el incremento finito total

El esquema iterativo visto anteriormente está planteado a partir de la obtención de pequeños incrementos de desplazamientos para un mismo nivel de cargas. Cuando la no-linealidad constitutiva es dependiente del camino (historia de cargas) es de utilidad almacenar el incremento finito total  ${}^t\Delta\hat{\mathbf{U}}$  de desplazamientos del paso.

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(i)} \approx {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \delta\hat{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(0)} + \sum_{k=1}^i \delta\hat{\mathbf{U}}^{(k)} \quad (\text{V.57})$$

El problema puede plantearse también a partir de un incremento finito total de desplazamientos  ${}^t\Delta\hat{\mathbf{U}}$  desconocido, sobre el cual se itera.

$$\Delta\hat{\mathbf{U}}^{(i)} = \sum_{k=1}^i \delta\hat{\mathbf{U}}^{(k)} = \Delta\hat{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \delta\hat{\mathbf{U}}^{(i)} \quad (\text{V.58})$$

A partir de la expresión anterior, es posible expresar a todo el problema iterativo en función del incremento finito total:

$$\Delta\hat{\mathbf{U}}^{(i)} = \Delta\hat{\mathbf{U}}^{(i-1)} - [{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(i-1)}]^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\Psi^{(i-1)} \quad (\text{V.59})$$

Reemplazando en (V.56) las condiciones iniciales de (V.51) se obtiene:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(i)} \approx {}^t\hat{\mathbf{U}} + \Delta\hat{\mathbf{U}}^{(i)} \quad (\text{V.60})$$

El método de Newton-Raphson es probablemente el procedimiento iterativo más conocido para la solución de problemas no-lineales. Esto claro está, mientras la configuración inicial del problema y el incremento de desplazamientos cumplan las condiciones necesarias para la convergencia hacia la solución, las cuales se verán en el párrafo siguiente.

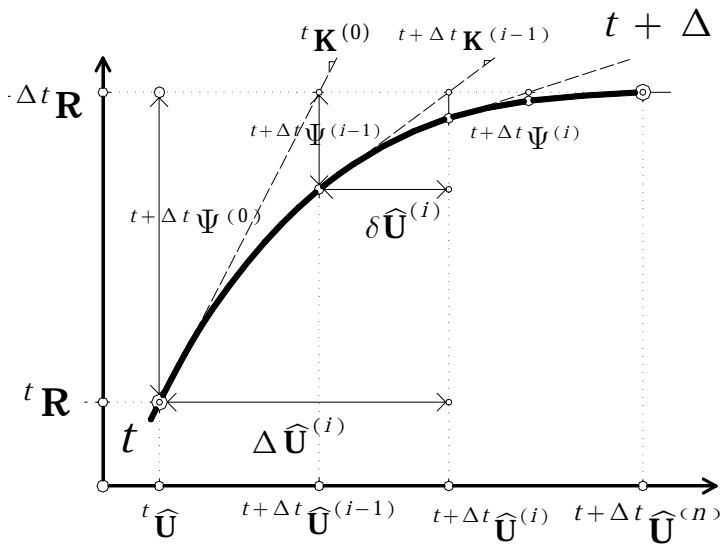


Fig.31. Esquema iterativo de Newton-Raphson. Incrementos parciales y totales

### V.2.3. Los métodos de Newton-Raphson modificados

El procedimiento de Newton-Raphson, a pesar de su rápida convergencia, puede ser costoso desde el punto de vista computacional debido principalmente a que en cada iteración se debe formar, condensar y ensamblar una nueva matriz tangente para luego obtener su inversa.

Si en lugar de actualizar la matriz tangente en cada paso, se mantiene a ésta constante en todo el proceso, la ecuación de corrección iterativa se transforma en:

$$\delta^t \hat{\mathbf{U}}^i = -[\tilde{\mathbf{K}}_T]^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \Psi^{(i)} \quad (\text{V.61})$$

Esta aproximación da lugar a toda una familia de métodos llamados de Newton-Raphson modificados. Las posibilidades son múltiples debido a que se puede elegir a la matriz *jacobiana* igual a la obtenida en la primera iteración o puede incluso ser una correspondiente a algún paso de carga previo inicial.

Estas dos alternativas, dan lugar a los métodos de la bibliografía clásica conocidos como con tangente al inicio del incremento y con tangente al inicio del problema (Bathe [03], Crisfield [09], Zienkiewicz [35]).

Estas modificaciones implicarán naturalmente una menor velocidad de convergencia, pero al mismo emplean un tiempo mucho menor en cada iteración y lo más importante es que pueden converger a una solución en determinados problemas en los que ésta no se logra con el método de Newton-Raphson. El algoritmo principal del programa debe tener la capacidad de poder emplear una u otra estrategia de solución para problemas iterativos.

### V.2.4. Eliminación de grados de libertad internos. Condensación estática

En el capítulo de cinemática del elemento de viga, los desplazamientos del elemento se interpolaron a partir de desplazamientos nodales “externos” e “internos”. Los primeros serán las incógnitas del problema general y los nodos “internos” deberán eliminarse por condensación previamente al proceso de ensamblaje de la matriz tangente de rigidez.

La condensación estática se emplea para reducir el número de grados de libertad de un sistema y de este modo, en efecto, resolver una parte del sistema principal de ecuaciones elementales de equilibrio del problema. El nombre de condensación estática proviene del análisis dinámico de estructuras.

El problema básico consistirá entonces en reordenar la matriz de rigidez, de modo tal que los grados de libertad externos puedan agruparse en una sub-matriz.

La ecuación de equilibrio del elemento quedaba definida en un instante  $t$  a partir del equilibrio entre las fuerzas internas y las fuerzas externas del elemento:

$${}^t \mathbf{K} \cdot \Delta^t \hat{\mathbf{U}} \approx -({}^t \mathbf{F} - {}^t \mathbf{R}) \approx -{}^t \Psi \quad (\text{V.62})$$

donde los elementos del vector de desplazamientos incógnita tiene los desplazamientos longitudinales externos  $\Delta \hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2\}$ , los desplazamientos transversales y giros  $\Delta \hat{\mathbf{w}} = \{\hat{w}_1 \quad \hat{w}_2 \quad \hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2\}$  y el desplazamiento longitudinal interno  $\Delta u_3$ :

$$\Delta {}^t\hat{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \Delta \hat{\mathbf{w}} \\ \Delta u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.63})$$

Donde, debido a la existencia de nodos internos, la matriz tangente de rigidez se definió a partir de nueve bloques:

$${}^t\mathbf{K}_T = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{k}_{uu} & {}^t\mathbf{k}_{uw} & {}^t\mathbf{k}_{u\Delta} \\ {}^t\mathbf{k}_{wu} & {}^t\mathbf{k}_{ww} & {}^t\mathbf{k}_{w\Delta} \\ {}^t\mathbf{k}_{\Delta u} & {}^t\mathbf{k}_{\Delta w} & {}^t k_{\Delta\Delta} \end{pmatrix} \quad (\text{V.64})$$

Los bloques de la matriz tangente se pueden reagrupar en una sub-matriz que contenga los bloques asociados a los nodos externos (a retener) y un bloque escalar asociado al nodo interno (a condensar).

$${}^t\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{rr} & {}^t\mathbf{K}_{r\Delta} \\ {}^t\mathbf{K}_{\Delta r} & {}^t k_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \quad (\text{V.65})$$

De la misma manera, el vector de fuerzas desbalanceadas puede descomponerse en un vector de fuerzas asociado a los grados de libertad externos a retener y otro vector de fuerzas (un escalar en nuestro caso) asociado a los nodos internos.

$${}^t\Psi \approx \begin{Bmatrix} {}^t\Psi_r \\ {}^t\psi_\Delta \end{Bmatrix} \quad (\text{V.66})$$

Por último, el incremento de desplazamientos puede descomponerse en desplazamientos externos y desplazamientos a condensar, que en nuestro caso un único desplazamiento longitudinal asociado al nodo jerárquico del elemento.

$$\Delta {}^t\hat{\mathbf{U}} \approx \begin{Bmatrix} \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}}_r \\ \Delta {}^t u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.67})$$

El sistema de ecuaciones de equilibrio se puede describir entonces como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{r\Delta} \\ \mathbf{K}_{\Delta r} & k_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{U}}_r \\ \Delta u_3 \end{Bmatrix} \approx - \begin{Bmatrix} {}^t\Psi_r \\ {}^t\psi_\Delta \end{Bmatrix} \quad (\text{V.68})$$

El sistema de (V.68) puede ahora desarrollarse por filas obteniéndose un sistema de ecuaciones y una ecuación escalar:

$$\mathbf{K}_{rr} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}_{r\Delta} \cdot \Delta u_3 \approx -{}^t\Psi_r \quad (\text{V.69})$$

$$\mathbf{K}_{\Delta r} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}_r + k_{\Delta\Delta} \cdot \Delta u_3 \approx -{}^t\psi_\Delta \quad (\text{V.70})$$

El objetivo del problema consiste en eliminar por sustitución la incógnita a condensar, que en nuestro caso es un escalar. Para ello, resolvemos el 2º sistema de ecuaciones y obtenemos una ecuación de sustitución del nodo a condensar:

$${}^t\Delta u_3 \approx -({}^tk_{\Delta\Delta})^{-1} \cdot ({}^t\psi_\Delta + {}^t\mathbf{K}_{\Delta r} \cdot \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}}_r) \quad (\text{V.71})$$

Reemplazando en el 1º sistema de ecuaciones, se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones para el estado t sin la incógnita nodal interna:

$$(\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{r\Delta} \cdot (k_{\Delta\Delta})^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\Delta r}) \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}_r \approx -{}^t\Psi_r + \mathbf{K}_{r\Delta} \cdot (k_{\Delta\Delta})^{-1} \cdot {}^t\psi_\Delta \quad (\text{V.72})$$

El sistema anterior, puede describirse en la forma de a partir de una matriz tangente condensada y el vector de fuerzas condensado:

$${}^t\mathbf{K}_T^* \cdot \Delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^* \approx -{}^t\Psi^* \quad (\text{V.73})$$

donde:

$${}^t\mathbf{K}_T^* = {}^t\mathbf{K}_{rr} - {}^t\mathbf{K}_{r\Delta} \cdot {}^t\mathbf{K}_{\Delta r} \cdot ({}^tk_{\Delta\Delta})^{-1} \quad (\text{V.74})$$

$${}^t\Psi^* = {}^t\Psi_r - {}^t\mathbf{K}_{r\Delta} \cdot ({}^tk_{\Delta\Delta})^{-1} \cdot {}^t\psi_\Delta \quad (\text{V.75})$$

$$\Delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^* = \begin{Bmatrix} \Delta {}^t\hat{\mathbf{u}} \\ \Delta {}^t\hat{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.76})$$

En virtud de la simetría de la matriz tangente<sup>24</sup> de rigidez, el número de bloques a construir en cada elemento se reduce a la mitad:

$${}^t\mathbf{K}_{rr} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{k}_{uu} & {}^t\mathbf{k}_{uw} \\ ({}^t\mathbf{k}_{uw})^T & {}^t\mathbf{k}_{ww} \end{bmatrix} \quad (\text{V.77})$$

$${}^t\mathbf{K}_{r\Delta} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{k}_{u\Delta} \\ {}^t\mathbf{k}_{w\Delta} \end{bmatrix} \quad (\text{V.78})$$

---

<sup>24</sup> La simetría de la matriz tangente se puede verificar a partir de la simetría de los bloques que la componen, los cuales se indican en las figuras Fig.28 a Fig.30

$${}^t\mathbf{K}_{\Delta r} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{k}_{\Delta u} & {}^t\mathbf{k}_{\Delta w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{r\Delta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{V.79})$$

El procedimiento numérico así planteado, permite obtener una matriz de rigidez con las filas correspondientes a los grados de libertad externos incógnita del problema. El proceso de condensación estática debe aplicarse previamente al de ensamblaje de la matriz global del sistema.

### V.2.5. Recuperación de grados de libertad internos. Expansión estática

En determinadas etapas de la resolución del problema global, como la evaluación de las funciones de forma o la determinación del vector de fuerzas internas, se hace necesario obtener los desplazamientos asociados a los nodos internos a partir de los desplazamientos en los nodos externos. A este procedimiento numérico se lo denomina expansión estática y es el proceso inverso al de condensación visto en el parágrafo anterior.

El problema consiste ahora en obtener el desplazamiento  $\Delta u_3$ . La fuerza desbalanceada nodal consistente  ${}^t\psi_{\Delta}$  es una fuerza exterior que no cambia, a menos que se efectuara un análisis para fuerzas no conservativas.

Utilizando la ecuación de sustitución de (V.71) el desplazamiento nodal interno puede calcularse en la nueva configuración deformada, a partir de los bloques de la matriz tangente actualizados a la nueva configuración.

$${}^{t+\Delta t}\Delta u_3 \approx -({}^t k_{\Delta\Delta})^{-1} \cdot ({}^t\psi_{\Delta} + {}^t\mathbf{K}_{\Delta r} \cdot \Delta {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}_r) \quad (\text{V.80})$$

La existencia de nodos a condensar obliga a tener almacenados los bloques de la matriz tangente, luego del ensamblaje, para poder recuperar los desplazamientos nodales internos.

## V.3. EL CONTROL DEL TAMAÑO DE PASO

### V.3.1. El factor de eventos

Cuando las relaciones entre las tensiones y las deformaciones de una fibra pueden describirse mediante relaciones lineales a trazos, se dice que la formulación del material es multi-lineal. En estos modelos numéricos de material, la relación entre los incrementos de tensiones y deformaciones, es decir el módulo tangente, se mantiene constante entre estados previamente definidos.

Se define como evento al estado de tensiones y deformaciones de una fibra a partir del cual se producirá un cambio en el valor del módulo tangente ante un incremento de deformaciones.

Conocidos los eventos que limitan los tramos lineales entre tensiones y deformaciones, es posible determinar cuales serán los máximos incrementos posibles de deformación para un estado conocido y un incremento dado de carga o descarga, es decir, es posible determinar hasta dónde se mantiene válida la relación lineal entre tensiones y deformaciones. Una vez superado el estado o evento de cargas, será necesario actualizar el valor del módulo tangente de la fibra es decir, actualizar la matriz de rigidez tangente del problema.

Se define como factor de eventos al factor que permite escalar un incremento de deformaciones arbitrario de manera tal, que la matriz secante elastoplástica de la fibra se mantenga constante en dicho intervalo. El factor de eventos es entonces la relación que existe entre el máximo incremento de deformaciones necesario para alcanzar el estado que define un evento y un incremento de deformaciones arbitrario.

El incremento máximo de cargas será diferente según sea un incremento en carga o en descarga. Dicho de otro modo, el incremento máximo de deformación que podrá sufrir una fibra, manteniendo su rigidez constante, estará determinado por el factor de eventos:

$$\Delta \varepsilon^{\max} = \lambda^{ev} \cdot \Delta \varepsilon \quad (V.81)$$

Naturalmente, el factor de eventos será dependiente de la historia de cargas del material y tendrá valores diferentes según el signo del incremento de deformación que reciba la fibra en un instante dado.

La determinación del factor de eventos estará reducida entonces, a la determinación del máximo incremento de deformación admisible de cada fibra.

La ventaja de utilizar este tipo de formulación para el control del tamaño del paso reside principalmente en que los incrementos de cargas entre eventos son “lineales” desde el punto de vista del comportamiento del material. El control de paso por eventos es de hecho una

linealización del material para mantener una formulación de matriz de rigidez elastoplástica secante.

### V.3.2. Determinación del factor de eventos en las fibras de acero

El modelo de material utilizado para las fibras de acero es un modelo bilineal que considera el endurecimiento del material ya sea isotrópico o cinemático. Este sencillo modelo de material determina una superficie de fluencia bilineal para la cual se puede obtener fácilmente el factor de eventos del material para un estado conocido y un incremento arbitrario de deformaciones, según se detalla a continuación.

Para un estado conocido de la fibra y un incremento arbitrario de deformaciones, los algoritmos de retorno definidos en la sección III.3 permiten determinar si la deformación de la fibra será elástica, o bien elastoplástica. es decir que permiten determinar el incremento de deformaciones plásticas  $\Delta \varepsilon^p$  ante un incremento de deformaciones totales  $\Delta \varepsilon$ .

Ahora bien: según la definición de eventos, el incremento de deformación máximo que puede alcanzar la fibra está determinado por el intervalo de deformaciones para el cual no se producen cambios en el módulo tangente de la misma. En el modelo bilineal del acero existen dos módulos tangente posibles: el módulo elástico y el módulo tangente elastoplástico.

Una fibra que se encuentra *en un estado inicial elástico* se deformará con el módulo tangente elástico hasta alcanzar la superficie de fluencia, independientemente del signo del incremento; para dicho estado inicial existirán dos intervalos de deformaciones posibles (carga y descarga) dentro de los cuales se mantiene constante el módulo de carga.

Dentro de estos intervalos, los incrementos de deformaciones no tendrán componente plástica ( $\Delta \gamma = 0$ ). Planteando esta condición y resolviendo la ecuación no-lineal se obtiene:

$$\Delta \varepsilon^{\max} = \frac{(\sigma_Y + K^p \cdot \varepsilon_\alpha) \cdot \varepsilon^{*} + \varepsilon_q - E \cdot (\varepsilon - \varepsilon^p)}{E} \quad (V.82)$$

Donde el signo de prueba y el factor de eventos quedan determinados por la dirección y la magnitud del incremento arbitrario de deformaciones, respectivamente. Suponiendo endurecimiento mixto por deformaciones, el signo de prueba quedaba determinado según (III.104):

$$\varepsilon^{*} = \text{sign}(E \cdot (\varepsilon + \Delta \varepsilon - \varepsilon^p) - \varepsilon_q) \quad (V.83)$$

El factor de eventos del paso y de la fibra determina:

$$\lambda^{ev} = \frac{\Delta \varepsilon^{\max}}{\Delta \varepsilon} \quad (\varepsilon^{*} < 0) \quad (V.84)$$

Si el estado inicial de la fibra se encuentra en un *estado inicial elastoplástico*, el módulo tangente dependerá del signo del incremento de deformaciones:

Para un incremento de deformaciones en descarga ( $\varepsilon \cdot \Delta \varepsilon < 0$ ), las deformaciones plásticas permanecerán sin cambios hasta alcanzar la superficie de fluencia opuesta y el

módulo tangente de descarga será el módulo elástico. Este caso es igual al caso anterior, en donde el factor de eventos es máximo para la fibra, ya que el intervalo de deformaciones elásticas parte de la superficie de fluencia.

Para un incremento de deformaciones en carga ( ${}^t\xi \cdot \Delta {}^t\varepsilon > 0$ ), se producirán incrementos en las deformaciones plásticas y el módulo tangente será el módulo elastoplástico. En este caso, para el modelo de material implementado, no existirá ningún evento en carga elastoplástica siendo el factor de eventos igual a la unidad. Esto significa que el paso de cargas y desplazamientos de la estructura en la fibra analizada no produce cambios en el módulo tangente.

$$\lambda^{ev} = 1 \quad \left( {}^t\xi \cdot \Delta {}^t\varepsilon > 0 \wedge {}^tF^* = 0 \right) \quad (V.85)$$

Las expresiones obtenidas permiten formular a partir del modelo constitutivo del acero, un procedimiento sencillo de control de tamaño del paso de cargas y desplazamientos a nivel estructural de modo tal de lograr una matriz tangente elastoplástica consistente, y evitar estados de tensiones espurios y fuerzas desbalanceadas (ver III.1.6).

### V.3.3. La linealización en materiales con endurecimiento no-lineal

En general, el control del tamaño de paso por eventos también puede aplicarse a materiales no definidos lineales a trazos, como el acero, a partir de una linealización a trazos de la respuesta en tensiones y deformaciones.

En un modelo no-lineal, como el utilizado para las fibras de hormigón, estos eventos deben poder definirse previamente. Este procedimiento, que en definitiva es una interpolación multilínea, se puede efectuar de varias maneras, por ejemplo manteniendo constante los intervalos de deformación o también, manteniendo acotada la pendiente de cada tramo.

Sin embargo, en el modelo de material utilizado para las fibras de hormigón confinado la determinación del factor de eventos no es trivial debido principalmente a que la formulación no-lineal del material determina un módulo tangente instantáneo variable para los intervalos de carga. Por otra parte, la consideración de un modelo de daño para el material, implica un módulo de descarga diferente según el nivel de deformaciones plásticas instantáneas. Todo lo expuesto pone en evidencia la dificultad natural de efectuar procedimientos de multilínea sobre el diagrama de tensiones y deformaciones del hormigón.

El objeto del presente párrafo es definir un procedimiento numérico que permita determinar el máximo incremento de deformaciones en una fibra de hormigón confinado para un estado dado, sin necesidad de multilíneaizar previamente la respuesta del material.

El módulo secante entre dos estados admisibles estará dado por la relación (V.86), en la que los estados inicial y final (incógnita) pueden estar o no sobre la superficie de fluencia:

$${}^{t+\Delta t}\hat{E} = \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma - {}^t\sigma}{\Delta {}^t\varepsilon} \quad (V.86)$$



Este cociente incremental es la definición del módulo tangente cuando el intervalo de cargas tiende a cero. A partir de esta definición se puede plantear un procedimiento sencillo para determinar en cada estado el máximo incremento de deformaciones del paso.

Si se conoce el módulo secante del último incremento de cargas que recibió la fibra en su historia de cargas  ${}^t\hat{E}$ , es posible establecer un criterio a cumplir por el módulo secante del paso de cargas siguiente para el cual se busca el factor de eventos.

En un material como el hormigón confinado en endurecimiento, un criterio posible es acotar el módulo secante de manera tal que el módulo secante del paso siguiente no sea muy diferente al del paso anterior. A este criterio se lo denomina criterio de convergencia:

$${}^{t+\Delta t}\hat{E} \geq \mu \cdot {}^t\hat{E} \quad (\text{V.87})$$

Estableciendo una cota del mínimo módulo aceptado para el paso siguiente, estamos acotando la derivada de la función. El parámetro  $0.5 < \mu < 1$  se denomina parámetro de convergencia y define la variación máxima admisible entre módulos secante de diferentes pasos.

En el límite inferior, el mínimo número de puntos necesarios para linealizar la respuesta del hormigón *desde el origen* son 2. En este caso se tiene un módulo secante único para todo el tramo de endurecimiento y el parámetro de convergencia tiene su valor mínimo:

$$\mu = \frac{E^{50\%}}{E_o} = 0.5 \quad (\text{V.88})$$

Este caso significa que el incremento máximo de deformaciones que puede sufrir una fibra es la deformación de fluencia  $\varepsilon_o$  a partir de la cual el material entra en la zona de ablandamiento por deformaciones.

El límite superior  $\mu = 1$  es el límite del cociente incremental en donde el incremento de deformación ya no es más un incremento finito sino infinitésimo, y en este caso deja de tener sentido como criterio para un módulo secante. Este procedimiento es el utilizado en algunos algoritmos para los cuales existe un desbalance de tensiones (y fuerzas) sistemático en cada paso de cargas (ver III.1.6)

La aplicación del criterio de convergencia es equivalente a un proceso de linealización por tramos de la formulación del material. Como ejemplo de ello se puede observar el caso particular de un incremento monotónico de cargas (*push-over*) sobre una fibra de hormigón armado<sup>25</sup>: la sucesión de posibles módulos tangente del material, para un incremento de carga monotónico y para una fibra inicialmente descargada y sin deformaciones plásticas residuales, sería la siguiente:

$${}^0\hat{E} = E_o, {}^1\hat{E} = \mu \cdot E_o, {}^2\hat{E} = (\mu)^2 \cdot E_o, \dots {}^k\hat{E} = (\mu)^k \cdot E_o \quad (\text{V.89})$$

---

<sup>25</sup> En la sección VI.1.3 se pueden ver los resultados de un ensayo de carga monotónico sobre una fibra perteneciente a una sección de hormigón armado confinado por estribos

Conocido el módulo secante mínimo admisible, es posible determinar ahora el incremento máximo de deformaciones a partir de los algoritmos de retorno definidos en la sección III.3, lo cual es el objeto del párrafo siguiente.

#### V.3.4. Determinación del factor de eventos en el hormigón confinado

Según el criterio de convergencia definido en (V.87) el máximo incremento de deformación estará determinado por el mínimo módulo secante admisible para el paso de cargas de la fibra:

$$\Delta^t \varepsilon^{\max} = \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma - {}^t\sigma}{\mu \cdot {}^t\hat{E}_r} \quad (\text{V.90})$$

El factor de eventos dependerá entonces del estado final de tensiones  ${}^{t+\Delta t}\sigma$  hasta el cual se cumpla el criterio de convergencia.

Empleando el mismo razonamiento utilizado en las fibras de acero, una fibra que se encuentra en un estado inicial elástico ( ${}^tF < 0$ ) se deformará con el módulo tangente elástico hasta alcanzar la superficie de fluencia de compresión, en el caso de un incremento de carga o bien, hasta alcanzar la superficie de fluencia de tracción en el caso de una descarga; para dicho estado inicial existirán dos intervalos de deformaciones posibles dentro de los cuales se mantiene constante el módulo de carga.

Estas dos situaciones se pueden formular de la siguiente manera:

$$\Delta^t \varepsilon^{\max} = \begin{cases} \frac{{}^tF}{{}^tE_r} & ({}^t\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0) \\ ({}^t\varepsilon^p - {}^t\varepsilon) & ({}^t\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0) \end{cases} \quad (\text{V.91})$$

Si el estado inicial de la fibra se encuentra en un estado inicial elastoplástico ( ${}^tF = 0$ ), debe distinguirse previamente si la superficie de fluencia a la que pertenece el estado inicial es de compresión o de tracción. Si la fibra analizada se encuentra en un estado inicial perteneciente a la superficie de fluencia de compresión, un incremento de deformaciones en carga deberá estar acotado según el criterio de convergencia definido en (V.87).

Reemplazando y resolviendo la ecuación se obtienen los máximos desplazamientos para eventos de carga y descarga:

$$\Delta^t \varepsilon^{\max} = \begin{cases} ({}^t\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_o) \cdot (1 - \mu) & ({}^t\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0) \\ ({}^t\varepsilon^p - {}^t\varepsilon) & ({}^t\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0) \end{cases} \quad (\text{V.92})$$

Si la fibra se encuentra en un estado inicial perteneciente a la superficie de fluencia de tracción, significa que la misma se encuentra fisurada. El criterio que definía si una fisura se encontraba abierta estaba determinado por la deformación plástica umbral  $\alpha_{cr}$  (ver III.3.9)

$$\Delta\varepsilon + {}^t\varepsilon^p + {}^t\alpha_{cr} \geq 0 \quad (\text{V.93})$$

Un incremento de deformaciones en descarga tenderá a abrir más esta fisura indefinidamente, con lo cual esta fibra no controlará al paso por factor de eventos. En cambio los incrementos de deformaciones en carga tenderá a cerrar la fisura y ésta deformación umbral será la que determine el incremento máximo de deformaciones:

$$\Delta^t \varepsilon^{\max} = \begin{cases} -({}^t \varepsilon^P + {}^t \alpha_{cr}) & ({}^t \sigma \cdot \Delta \varepsilon > 0) \\ \infty & ({}^t \sigma \cdot \Delta \varepsilon < 0) \end{cases} \quad (\text{V.94})$$

Finalmente, el factor de eventos queda determinado según su definición a partir del máximo incremento de deformaciones de la fibra.

$$\lambda^{ev} = \frac{\Delta^t \varepsilon^{\max}}{\Delta^t \varepsilon} \quad (\text{V.95})$$

### V.3.5. Desarrollo del algoritmo principal del programa de elementos finitos

El método por eventos hasta ahora visto, se utilizó para controlar el tamaño de paso a partir del máximo incremento de deformación sobre una fibra, de modo tal que el módulo secante entre un estado inicial  $t$  y un estado final  $t + \Delta t$ , verifique con el criterio de convergencia. El objeto de la presente sección poder aplicar este procedimiento como una estrategia de control de fuerzas.

Supongamos que en un instante dado  $t + \Delta t$ , se impone un incremento arbitrario de cargas exteriores sobre el elemento.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = {}^t \mathbf{R} + \Delta^t \mathbf{R} \quad (\text{V.96})$$

El carácter arbitrario del incremento está asociado a que no ha sido aún verificado por el algoritmo de control de tamaño de paso, por lo cual se indica en la notación con un subíndice (\*). Por otra parte y para generalizar el procedimiento por inducción, se reemplaza el valor nulo del superíndice de la primer iteración (0) por  $(n)$ .

Asumiendo que el elemento se encuentra en un estado de equilibrio para la configuración del estado anterior, se calcula una resultante de fuerzas internas de la iteración inicial a partir de aquella.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(n)} \approx {}^t \mathbf{F} \quad (\text{V.97})$$

Conocido el estado de deformación del elemento en el instante  $t$  a partir de la resultante de fuerzas internas, se formula una aproximación de la matriz tangente del elemento en la iteración inicial a partir del estado anterior.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(n)} \approx \mathbf{K}({}^t \hat{\mathbf{U}}) \quad (\text{V.98})$$

El incremento de fuerzas exteriores se traduce en un desbalance de fuerzas para el instante  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t} \Psi^{(n)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(n)} \quad (\text{V.99})$$

Según el procedimiento de linealización del equilibrio visto en la sección IV.3, se obtiene el incremento iterativo de desplazamientos de la iteración inicial.

$$\delta^t \hat{\mathbf{U}}^* = -[{}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(n)}]^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \Psi^{(n)} \quad (\text{V.100})$$

Se calcula el incremento en las deformaciones de prueba en todas las secciones del elemento, a partir de la matriz derivada de deformaciones, utilizando la forma lineal de II.6.5

$$(\delta^t \mathbf{e}_k^o)^* \approx [{}^t \mathbf{D}_k]^T \cdot \delta^t \hat{\mathbf{U}}^* \quad (\text{V.101})$$

A partir de la hipótesis de las secciones planas de (II.94) se calcula el incremento de deformación de cada fibra utilizando la matriz de transformación evaluada en los puntos de integración local que determinan la posición de las fibras de la sección.

$$(\delta^t \mathbf{e}_k^i)^* = \mathbf{Z}^i \cdot (\delta^t \mathbf{e}_k^o)^* \quad (\text{V.102})$$

Se determina el máximo incremento de deformaciones admisible de la fibra  $i$ , ya sea una barra de acero o una fibra de hormigón, según los procedimientos numéricos de los párrafos V.3. Luego, se determina el factor de eventos de la fibra.

$${}^{t+\Delta t} (\lambda_k^i)^{(n+1)} = \frac{(\Delta \varepsilon_k^i)^{\max}}{(\delta^t \mathbf{e}_k^i)^*} \quad (\text{V.103})$$

En alguna sección del elemento existirá una fibra que tendrá un factor de eventos menor a todos los restantes de la estructura. Este factor de eventos mínimo será el que determine el máximo incremento de deformaciones de la fibra más crítica del elemento.

$$\lambda_{\min}^{(n+1)} = \min \left\{ {}^{t+\Delta t} (\lambda_k^i)^{(n+1)} \right\} \quad (\text{V.104})$$

El factor de eventos mínimo establece un intervalo de deformaciones admisible para todas las fibras del elemento a partir de la fibra más crítica. Para la iteración (1) se corrige el incremento de deformaciones de todas las fibras.

$$(\delta^t \mathbf{e}_k^i)^{(n+1)} = \lambda_{\min}^{(n+1)} \cdot (\delta^t \mathbf{e}_k^i)^* \quad (\text{V.105})$$

Debido a la existencia de la no-linealidad geométrica, no es posible extender esta propiedad a la relación que existe entre las fuerzas y los desplazamientos del elemento de manera rigurosa. Sin embargo puede aceptarse la validez de esta hipótesis de manera aproximada ya que el intervalo de deformaciones lineal de la fibra, cualquiera sea el criterio de convergencia empleado, siempre estará asociado a un pequeño incremento de desplazamientos en el elemento. Por lo tanto, se corrige con el factor de eventos el incremento de desplazamientos del elemento.

$$\delta^t \hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} = \lambda_{\min}^{(n+1)} \cdot \delta^t \hat{\mathbf{U}}^* \quad (\text{V.106})$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}}^{(n)} + \delta^t \hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} \quad (\text{V.107})$$

En este punto interesa conocer el estado actualizado de tensiones el cual se determina a partir de los algoritmos de retorno vistos en III.3.

$$\left(\delta^t \mathbf{e}_k^i\right)^{(n+1)} \xrightarrow{AR} \left(\delta^t \mathbf{s}_k^i\right)^{(n+1)} \quad (\text{V.108})$$

Dentro del intervalo de deformaciones admisibles, los incrementos de tensiones son lineales con las deformaciones y a partir de éstos, se determina una mejor aproximación de la matriz secante elastoplástica de la fibra  $i$ .

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{C}_k^i)^{(n+1)} \approx {}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{E}}_k^i)^{(n+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \cdot (1 + \hat{\mu}_k^i)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.109})$$

La matriz secante elastoplástica de la sección se determina según los esquemas de cuadraturas vistos en V.1.4

$${}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{S}}_k)^{(n+1)} \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot [\mathbf{Z}^i]^T \cdot {}^{t+\Delta t}(\mathbf{C}_k^i)^{(n+1)} \cdot \mathbf{Z}^i \quad (\text{V.110})$$

La resultante de esfuerzos internos puede determinarse directamente a partir del estado de tensiones actualizado del elemento según el esquema de cuadraturas de V.1.3

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_k^{(n+1)} = \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot [\mathbf{Z}^i]^T \cdot {}^{t+\Delta t}(\mathbf{s}_k^i)^{(n+1)} \quad (\text{V.111})$$

Sin embargo y debido a que el intervalo de deformaciones mantiene la linealidad del paso, es más eficiente desde el punto de vista computacional determinar la resultante de esfuerzos internos a partir de la matriz secante elastoplástica, ya que se evita una integración numérica adicional sobre las fibras. Para ello debe corregirse previamente el estado de deformación de las fibras con el factor de eventos.

$$\delta^t \mathbf{Q}_k^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{S}}_k)^{(n+1)} \cdot \lambda_{\min}^{(n+1)} \cdot (\delta^t \mathbf{e}_k^o)^* \quad (\text{V.112})$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_k^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_k^{(n)} + \delta^t \mathbf{Q}_k^{(n+1)} \quad (\text{V.113})$$

Si no se consideran deformaciones por corte, la matriz derivada de deformaciones se determina en  $t + \Delta t$  utilizando las funciones (derivadas) de forma del estado anterior:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k^{(n+1)} \approx {}^t \mathbf{B}_k^L + {}^t \mathbf{B}_k^{NL} \cdot \left[ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} \right]^T {}^t \mathbf{B}_k^{NL} \quad (\text{V.114})$$

La formulación de las deformaciones por corte basada en el equilibrio derivó en funciones de forma afectadas por los parámetros de estado, es decir dependientes del estado del material. En problemas de grandes deformaciones se producen cambios importantes sobre los parámetros de estado  $\widehat{EA}, \widehat{EX}, \widehat{EJ}, \widehat{GA}$  y la matriz derivada de las funciones de forma deberá actualizarse previamente a la determinación de la matriz  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k^{(n+1)}$

$${}^t \left\{ \mathbf{B}_k^L \quad \mathbf{B}_k^{NL} \right\} \xrightarrow{{}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{S}}_k)^{(n+1)}} {}^{t+\Delta t} \left\{ \mathbf{B}_k^L \quad \mathbf{B}_k^{NL} \right\}^{(n+1)} \quad (\text{V.115})$$

En este caso, la matriz derivada de deformaciones se determina en  $t + \Delta t$  según

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k^{(n+1)} \approx {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_k^{L(n+1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_k^{NL(n+1)} \cdot \left[ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} \right]^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_k^{NL(n+1)} \quad (\text{V.116})$$

A partir del conocimiento de la resultante de esfuerzos internos se actualiza la matriz tangente de rigidez. En este caso y al igual que en (V.114), puede omitirse durante cierto número de pasos la actualización de las matrices de interpolación.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(n+1)} \approx \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_k \cdot \left[ {}^t \mathbf{B}_k^{NL} \right]^T \cdot {}^t \mathbf{B}_k^{NL} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k \cdot \left[ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{S}}_k \right]^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k \right) \quad (\text{V.117})$$

En un planteo de Newton-Raphson modificado, esta etapa puede evitarse durante el proceso iterativo y sólo deberá actualizarse la matriz al final de cada paso de cargas.

La resultante total de fuerzas internas se determina en  $t + \Delta t$  a partir de los esfuerzos internos y la derivada de las deformaciones actualizados

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(n+1)} \approx \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot \left[ {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_k^{(n+1)} \right]^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k^{(n+1)} \quad (\text{V.118})$$

Debido a que el factor de eventos permitió efectuar un paso lineal respecto del material, la resultante total de fuerzas internas también puede determinarse también a partir del incremento de fuerzas internas del elemento.

$$\delta {}^t \mathbf{F}^{(n+1)} \approx \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^q \psi_k \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_k^{(n+1)} \cdot \delta {}^t \mathbf{Q}_k^{(n+1)} \quad (\text{V.119})$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(n)} + \delta {}^t \mathbf{F}^{(n+1)} \quad (\text{V.120})$$

El paso final de la iteración consiste en actualizar el vector de fuerzas desbalanceadas para dar lugar a un siguiente paso iterativo o bien, según los criterios de convergencia utilizados, finalizar el procedimiento iterativo.

$${}^{t+\Delta t} \Psi^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(n+1)} \quad (\text{V.121})$$

El factor de eventos así definido es un multiplicador del control de fuerzas, determinado por un criterio de convergencia previamente definido sobre el material, tal que permite efectuar incrementos finitos lineales (en relación al material) de desplazamientos sobre el elemento. El procedimiento así definido se puede clasificar como un método de control automático de tamaño de paso.

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} &= {}^t\mathbf{R} + \Delta {}^t\mathbf{R} \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(n)} &\approx \mathbf{K}({}^t\hat{\mathbf{U}}) \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(n)} &\approx {}^t\mathbf{F} \\
{}^{t+\Delta t}\Psi^{(n)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(n)} \\
\delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^* &= -[{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(n)}]^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\Psi^{(n)} \\
(\delta {}^t\mathbf{e}_k^o)^* &\approx [{}^t\mathbf{D}_k]^T \cdot \delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^* \\
(\delta {}^t\mathbf{e}_k^i)^* &= \mathbf{Z}^i \cdot (\delta {}^t\mathbf{e}_k^o)^* \\
{}^{t+\Delta t}(\lambda_k^i)^{(n+1)} &= \frac{(\Delta \varepsilon_k^i)^{\max}}{(\delta {}^t\mathbf{e}_k^i)^*} \\
\lambda_{\min}^{(n+1)} &= \min \left\{ {}^{t+\Delta t}(\lambda_k^i)^{(n+1)} \right\} \\
(\delta {}^t\mathbf{e}_k^i)^{(n+1)} &= \lambda_{\min}^{(n+1)} \cdot (\delta {}^t\mathbf{e}_k^i)^* \\
\delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} &= \lambda_{\min}^{(n+1)} \cdot \delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^* \\
{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} &= {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(n)} + \delta {}^t\hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} \\
(\delta {}^t\mathbf{e}_k^i)^{(n+1)} &\xrightarrow{AR} (\delta {}^t\mathbf{s}_k^i)^{(n+1)} \\
{}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{S}}_k)^{(n+1)} &\approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi^i \cdot b \cdot [\mathbf{Z}^i]^T \cdot {}^{t+\Delta t}(\mathbf{C}_k^i)^{(n+1)} \cdot \mathbf{Z}^i \\
\delta {}^t\mathbf{Q}_k^{(n+1)} &= {}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{S}}_k)^{(n+1)} \cdot \lambda_{\min}^{(n+1)} \cdot (\delta {}^t\mathbf{e}_k^o)^* \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k^{(n+1)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k^{(n)} + \delta {}^t\mathbf{Q}_k^{(n+1)} \\
{}^t\left\{ \mathbf{B}_k^L \quad \mathbf{B}_k^{NL} \right\} &\xrightarrow{{}^{t+\Delta t}(\hat{\mathbf{S}}_k)^{(n+1)}} {}^{t+\Delta t}\left\{ \mathbf{B}_k^L \quad \mathbf{B}_k^{NL} \right\}^{(n+1)} \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_k^{(n+1)} &\approx {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_k^{L(n+1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_k^{NL(n+1)} \cdot \left[ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} \right]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_k^{NL(n+1)} \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(n+1)} &\approx \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \psi_k \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_k \cdot \left[ {}^t\mathbf{B}_k^{NL} \right]^T \cdot {}^t\mathbf{B}_k^{NL} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_k \cdot \left[ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{S}}_k \right]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_k \right) \\
\delta {}^t\mathbf{F}^{(n+1)} &\approx \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^q \psi_k \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_k^{(n+1)} \cdot \delta {}^t\mathbf{Q}_k^{(n+1)} \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(n+1)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(n)} + \delta {}^t\mathbf{F}^{(n+1)} \\
{}^{t+\Delta t}\Psi^{(n+1)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(n+1)} \\
n &+ +
\end{aligned}$$

Fig.32. Diagrama de flujo del algoritmo principal de actualización de estado del programa.





## **VI. VALIDACIÓN NUMÉRICA**



## **VI.1. MODELOS CONSTITUTIVOS DEL MATERIAL**

### **VI.1.1. Introducción**

El objetivo de la presente sección consistirá en evaluar la respuesta numérica de los modelos constitutivos uniaxiales de las fibras de hormigón armado. A partir de los algoritmos de retorno definidos en III.3 se implementaron una serie de subrutinas de programa (módulos) y se obtuvo la respuesta de la fibra sometida a diferentes ciclos de carga y descarga, mediante rutinas de control de desplazamientos (deformaciones).

Los algoritmos (módulos) utilizados para las simulaciones en fibras de hormigón fueron `RMACC[]`, `FI BSTI FFCC[]` y `SETCCPROP[]`. Los algoritmos utilizados para las simulaciones en fibras de acero fueron `RMAST[]`, `FI BSTI FFST[]` y `STCYCLIC[]`. Todos estos módulos forman parte del programa prototipo principal `FEARCS[]`. La descripción de los diferentes módulos y subrutinas del programa, como así también la estructura de entrada y salida de datos se pueden ver en la referencia [33]

Los algoritmos específicos implementados para el control de desplazamientos sobre las fibras de hormigón y acero fueron `RCCYCLIC[]` y `STCYCLIC[]`.

En las fibras de hormigón se analiza la respuesta del modelo constitutivo del material sobre fibras pertenecientes a secciones de hormigón armado con diferentes niveles de confinamiento provisto por los estribos. Asimismo, se evalúa la influencia del factor de daño y el grado de confinamiento sobre la historia de cargas de la fibra.

En las fibras de acero se analiza la respuesta del modelo constitutivo del material para diferentes tipos de comportamiento del material en plasticidad. La correlación de la respuesta numérica con ensayos físicos escapa al alcance del presente trabajo.

No se evalúa la influencia de la velocidad de carga ni se efectúan estudios de sensibilidad para los parámetros de convergencia en las fibras de hormigón confinado. Tampoco se efectúa una correlación de la respuesta numérica de los modelos constitutivos con ensayos físicos, ya que dicho análisis escapa al alcance y al objetivo del trabajo.

### VI.1.2. Ensayo de compresión en una fibra de hormigón

En la figura siguiente se muestra la respuesta del modelo constitutivo de las fibras de hormigón confinado para una fibra sometida a un incremento monotonico de cargas desde  ${}^0\varepsilon = 0 \cdot \%$  a  ${}^t\varepsilon = 1.5 \cdot \%$ . Las propiedades del hormigón utilizado en la simulación numérica fueron las siguientes:  $f'_C \approx 30.199 \cdot \text{MPa}$  ;  $\varepsilon_o = 0.00245$ . El parámetro de convergencia se adoptó en  $\mu = 0.75$

### VI.1.3. Ensayo de carga cíclica sobre una fibra de hormigón

En la Fig.34 se muestran los resultados de la simulación numérica de un ensayo de carga cíclica sobre una probeta de hormigón confinado, para diferentes niveles de confinamiento y considerando el efecto de daño en el módulo de descarga y recarga (ver III.2.13). Las propiedades del hormigón utilizado en la simulación numérica fueron las siguientes:  $f'_C \approx 30.199 \cdot \text{MPa}$  ;  $\varepsilon_o = 0.00245$ . El parámetro de convergencia se adoptó en  $\mu = 0.75$

La influencia del parámetro daño en el módulo de recarga del hormigón se evalúa también en fibras pertenecientes a secciones de hormigón armado con diferentes grados de confinamiento como se observa en la Fig.35 y Fig.36

### VI.1.4. Ensayo de carga cíclica en una fibra (barra) de acero

Se analiza la respuesta de la implementación numérica de los algoritmos de retorno para las barras de acero. En la figura siguiente se observa la respuesta de un ensayo de carga cíclica para una fibra de acero, para diferentes hipótesis de endurecimiento por deformaciones.

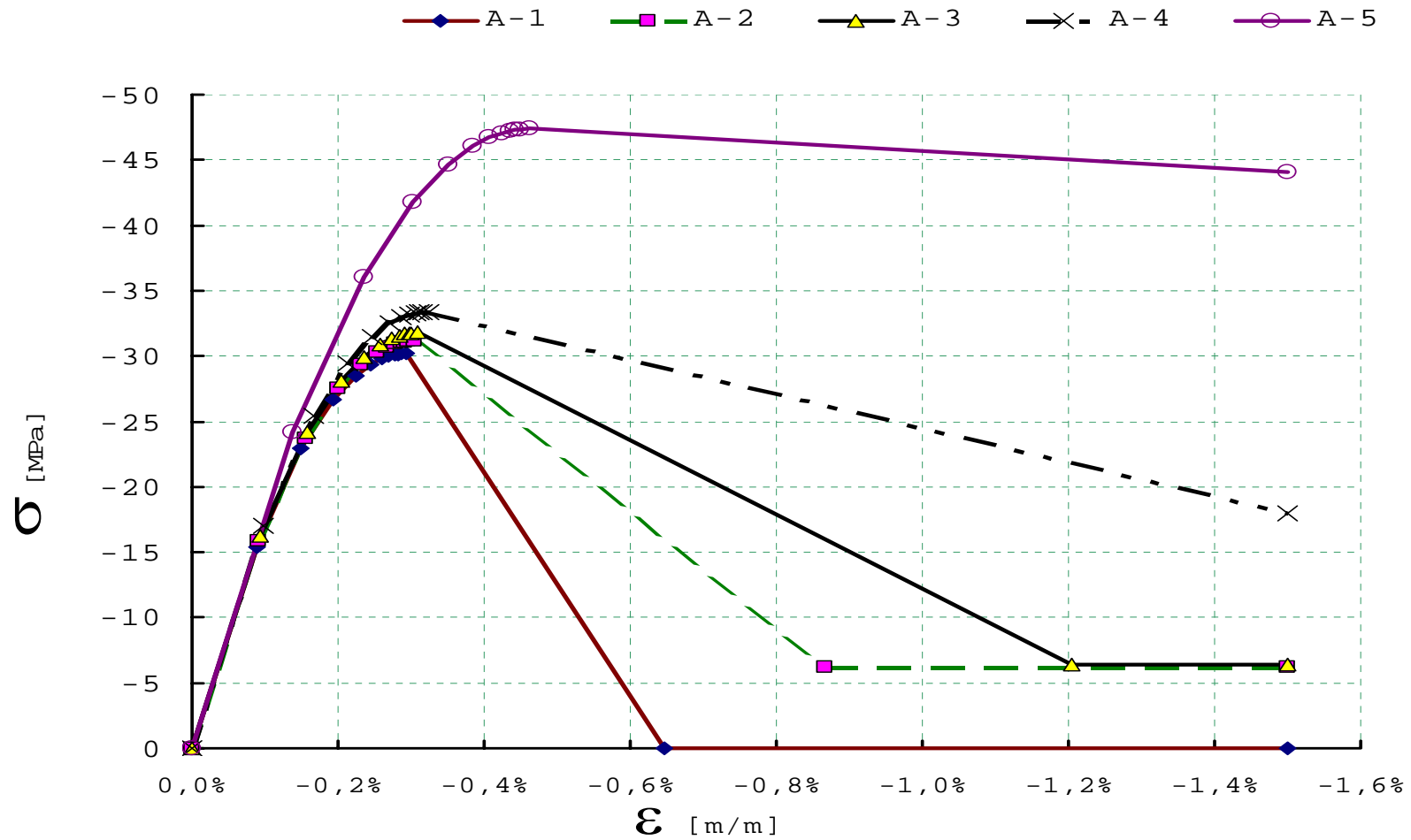


Fig.33. Simulación numérica de un ensayo de carga monotónico sobre una fibra de hormigón perteneciente a una sección con diferentes grados de confinamiento A-1: Fibra no confinada. A-2: Estribos  $\phi 6 \cdot c / 25 \cdot cm$ ;  $\rho = 0.19\%$ ;  $k = 1.04$ ; A-3: Estribos  $\phi 6 \cdot c / 15 \cdot cm$ ;  $\rho = 0.32\%$ ;  $k = 1.06$ ; A-4: Estribos  $\phi 6 \cdot c / 7,5 \cdot cm$ ;  $\rho = 0.63\%$ ;  $k = 1.13$ ; A-5: Estribos  $\phi 12 \cdot c / 5 \cdot cm$ ;  $\rho = 3.78\%$ ;  $k = 1.76$ )

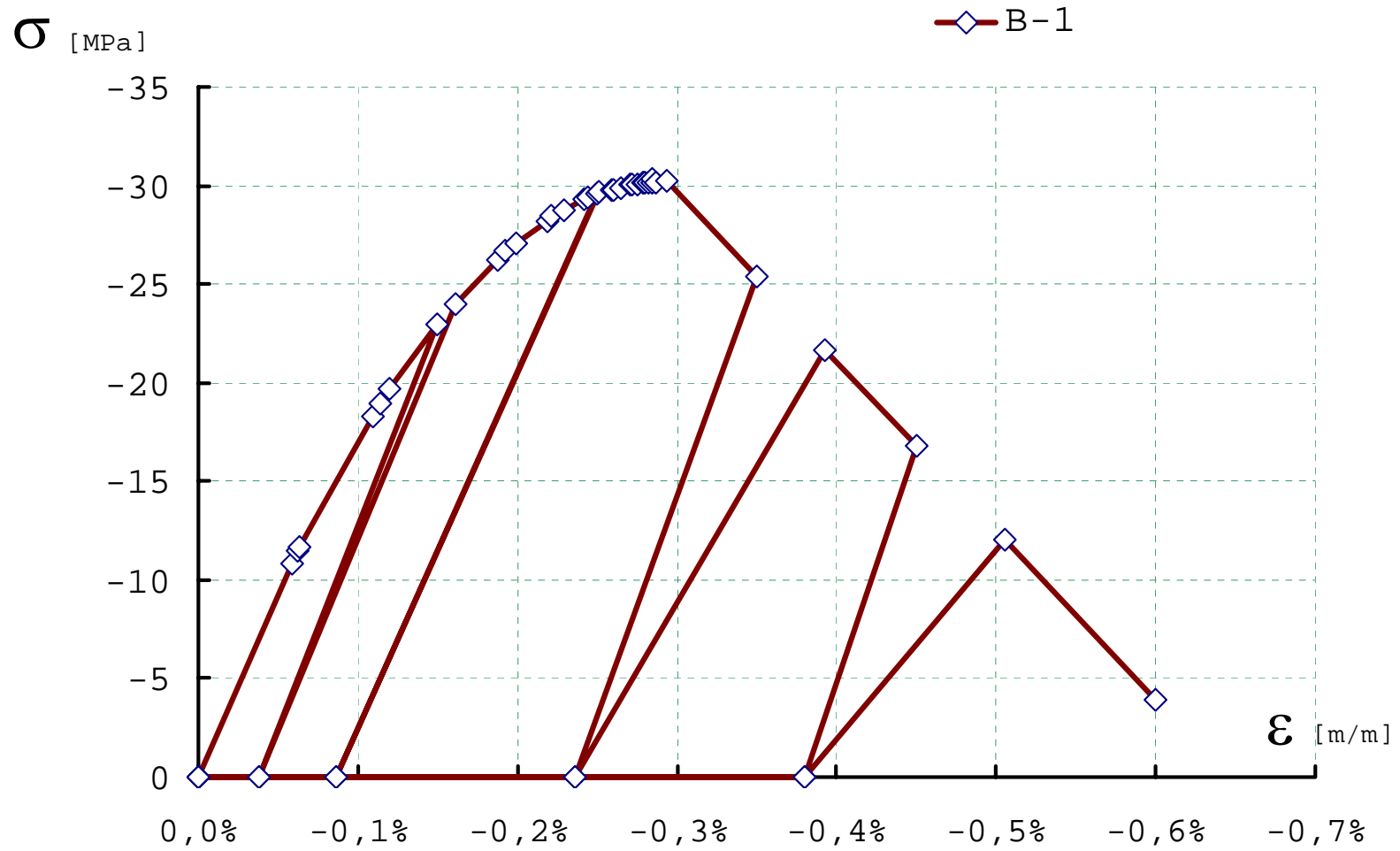


Fig.34. Ensayo de carga cíclica en una fibra de una sección no confinada considerando el modelo simplificado de daño con  $\psi_U = \hat{E}_U / \hat{E}_o = 0.1$ . Se observan algunas pequeñas oscilaciones numéricas cercanas a la tensión pico, debido principalmente a un valor del factor de convergencia bajo.

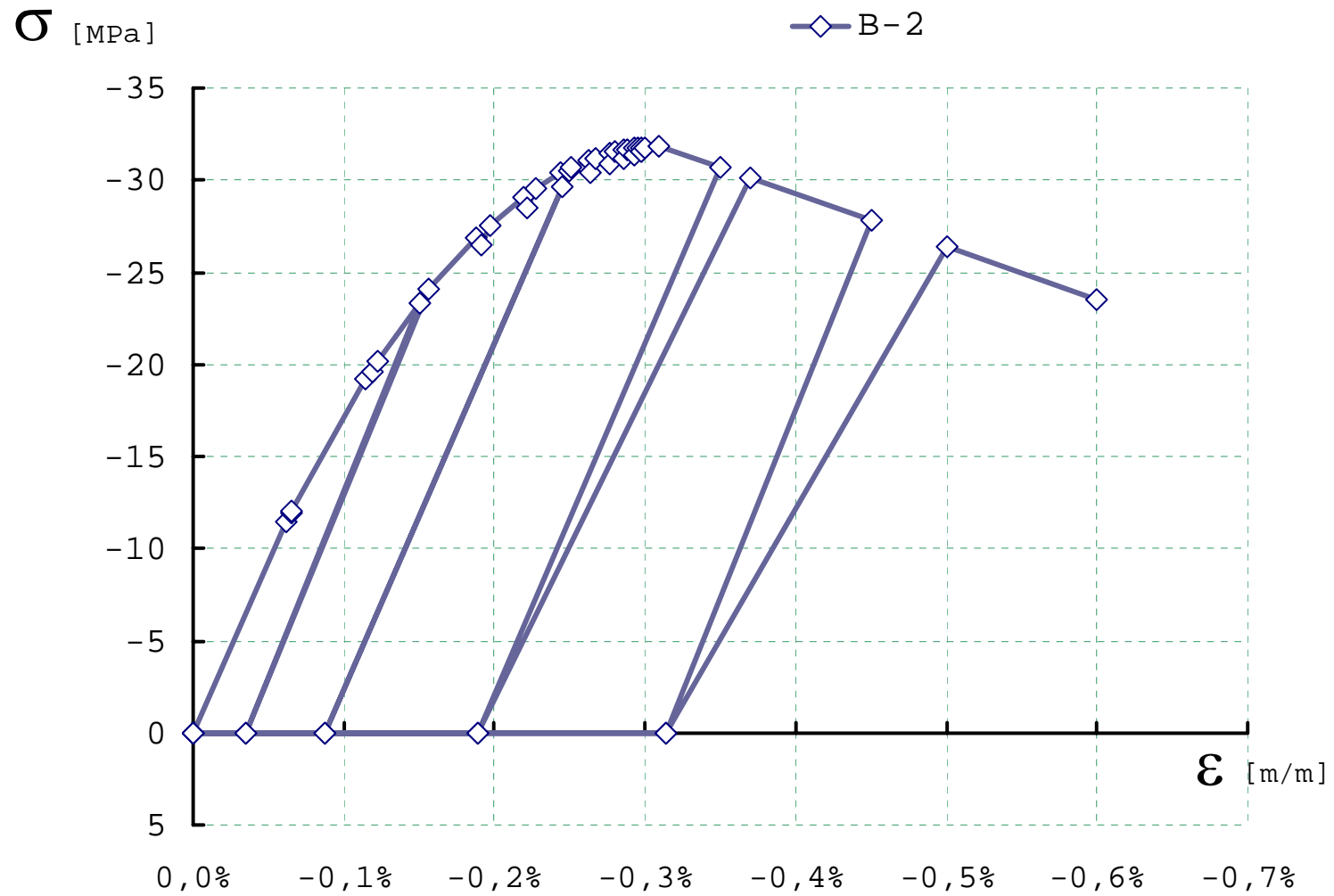


Fig.35. Ensayo de carga cíclica en una fibra de una sección confinada con estribos  $\phi 6c/25 \cdot cm$ . El factor de daño utilizado fue de  $\psi_U = \hat{E}_U / \hat{E}_o = 0.1$

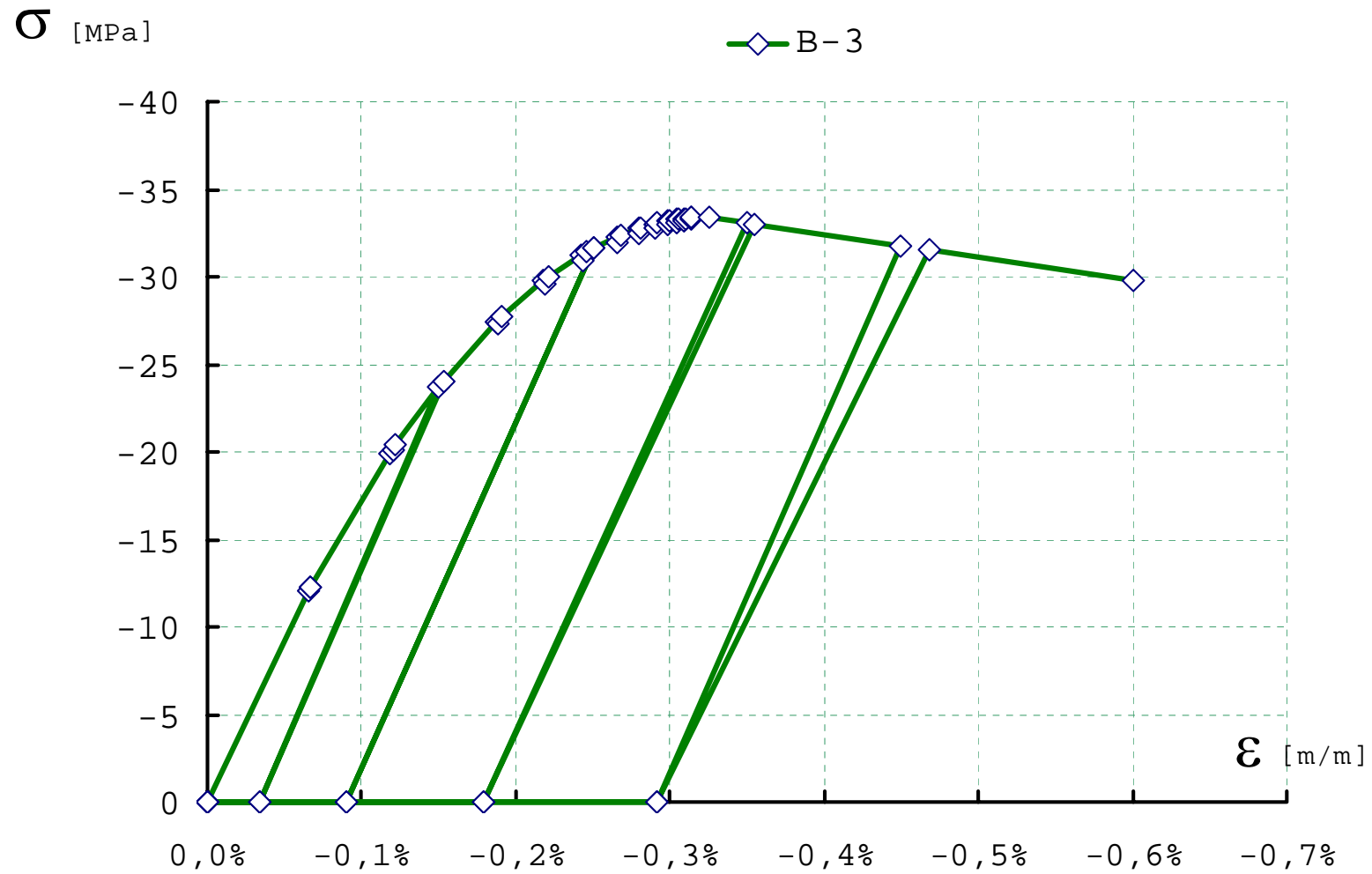


Fig.36. Ensayo de carga cíclica en una fibra de una sección confinada con estribos  $\phi 6c/7,5 \cdot cm$ ;  $\rho = 0.63\%$ ;  $k = 1.13$ . El factor de daño utilizado fue de  $\psi_U = \hat{E}_U / \hat{E}_o = 0.1$ .

Para idéntico factor de convergencia a los problemas anteriores, no se observan oscilaciones numéricas a partir de un mínimo grado de confinamiento.



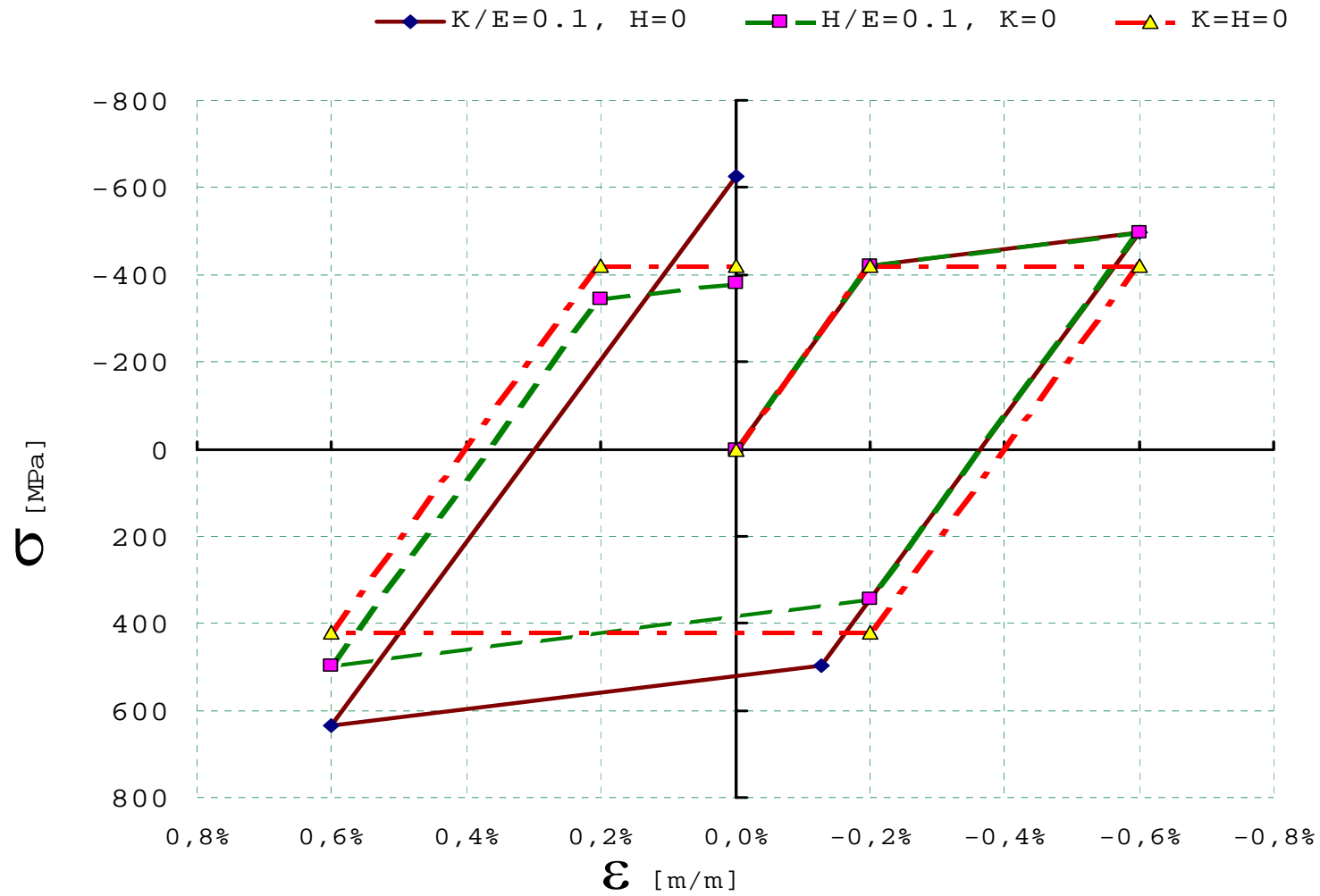


Fig.37. Respuesta del modelo para una barra de acero sometida un ciclo de cargas con endurecimiento a) isotrópico, b) cinemático y c) comportamiento elastoplástico ideal.

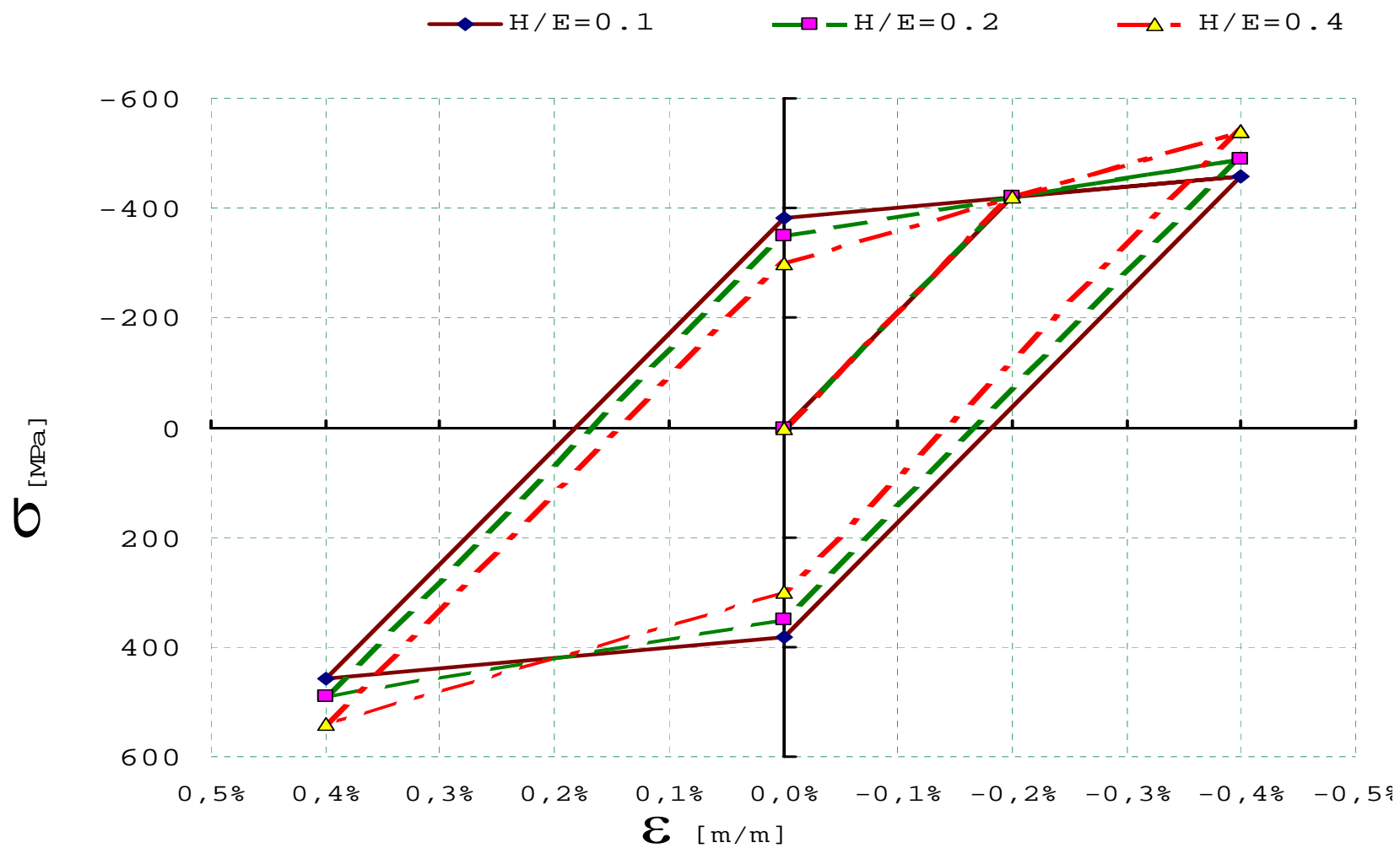


Fig.38. Respuesta de un ensayo de carga cíclica para una fibra de acero considerando el efecto Bauschinger según el modelo de endurecimiento cinemático bilineal implementado.

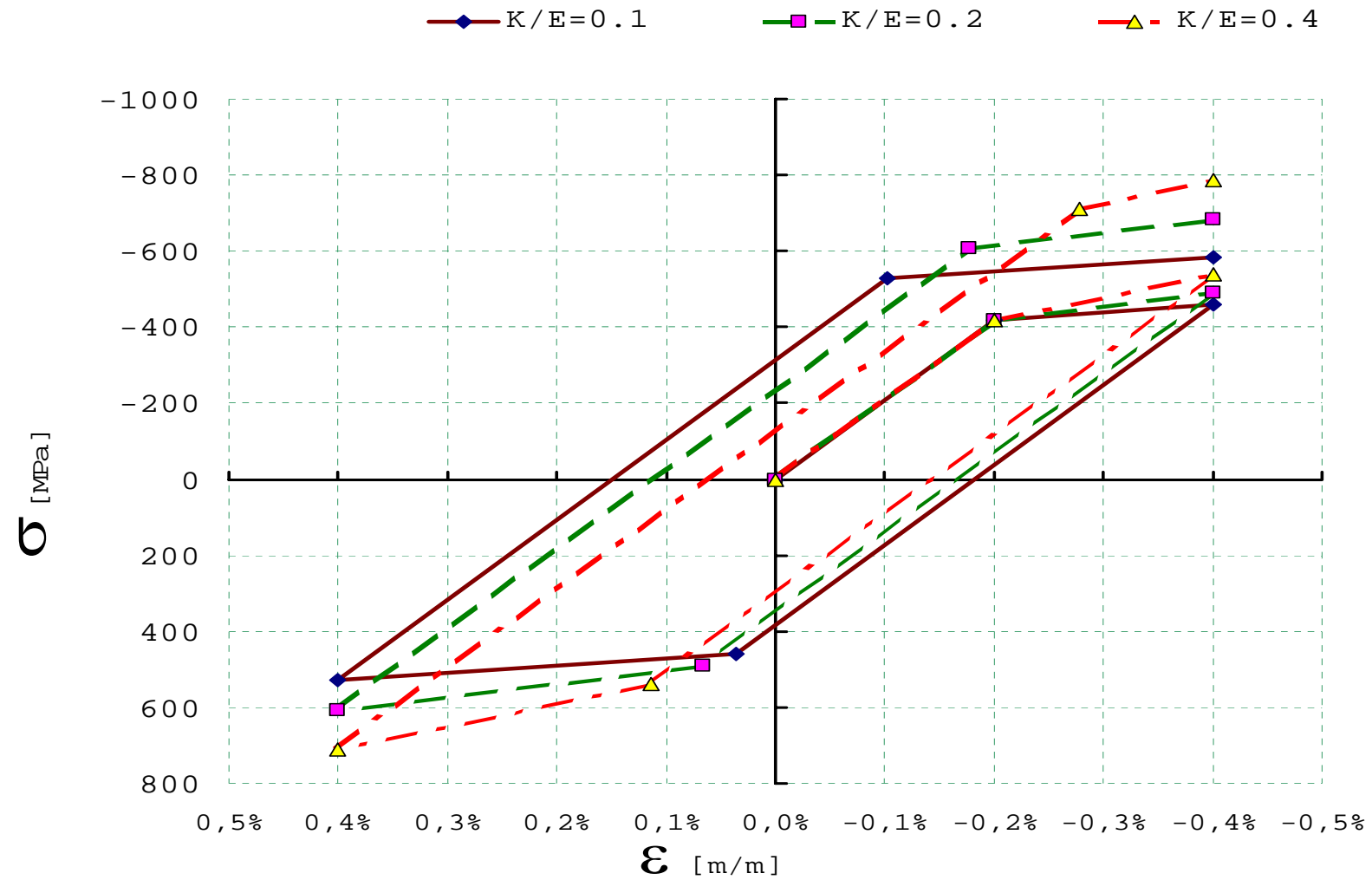


Fig.39. Respuesta del modelo constitutivo para una barra de acero sometida un ciclo de cargas con endurecimiento por deformaciones isotrópico. Se observa el aumento de la tensión de fluencia para la misma amplitud de deformaciones, según la historia de cargas.



## VI.2. MÉNSULA DE HORMIGÓN ARMADO

### VI.2.1. Introducción

En los últimos años, se han realizado una cantidad importante de estudios relacionados con el comportamiento en ablandamiento de elementos estructurales de hormigón armado. Una revisión exhaustiva de estos estudios puede verse en Zeris, C.A [34]

En esta sección se analiza la respuesta experimental de una ménsula de hormigón armado sometida a cargas cíclicas comparada con los resultados numéricos obtenidos por elementos finitos para la misma estructura. Ambas vigas son modelos a escala de una viga típica en la región más crítica de un pórtico dúctil de hormigón armado de un edificio de 20 pisos ()

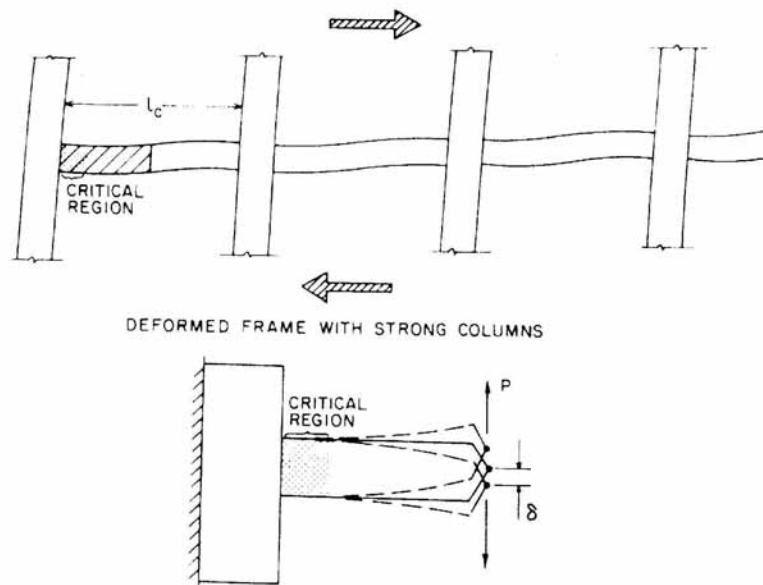


Fig.40. a) Región crítica de un pórtico dúctil de hormigón armado en un edificio de 20 pisos. b) Esquema de cargas sobre el modelo a escala ( Ma *et al* [18])

### VI.2.2. Los ensayos de Ma , Bertero y Popov

Uno de los primeros y más exhaustivos trabajos relativos al comportamiento histerético de estructuras de hormigón armado en cargas cíclicas fueron realizados por Ma, Bertero, y Popov [18] En este estudio se realizaron ensayos sobre ménsulas de hormigón armado de diferentes secciones, sometidas a ciclos de carga.

Para correlacionar numéricamente los valores de ensayo con la respuesta numérica del modelo de elementos finitos, se utilizaron los valores de respuesta del espécimen R-4 de la

referencia citada. En la Fig.41 se indican las dimensiones, recubrimientos y distribución de las armaduras de la viga R-4

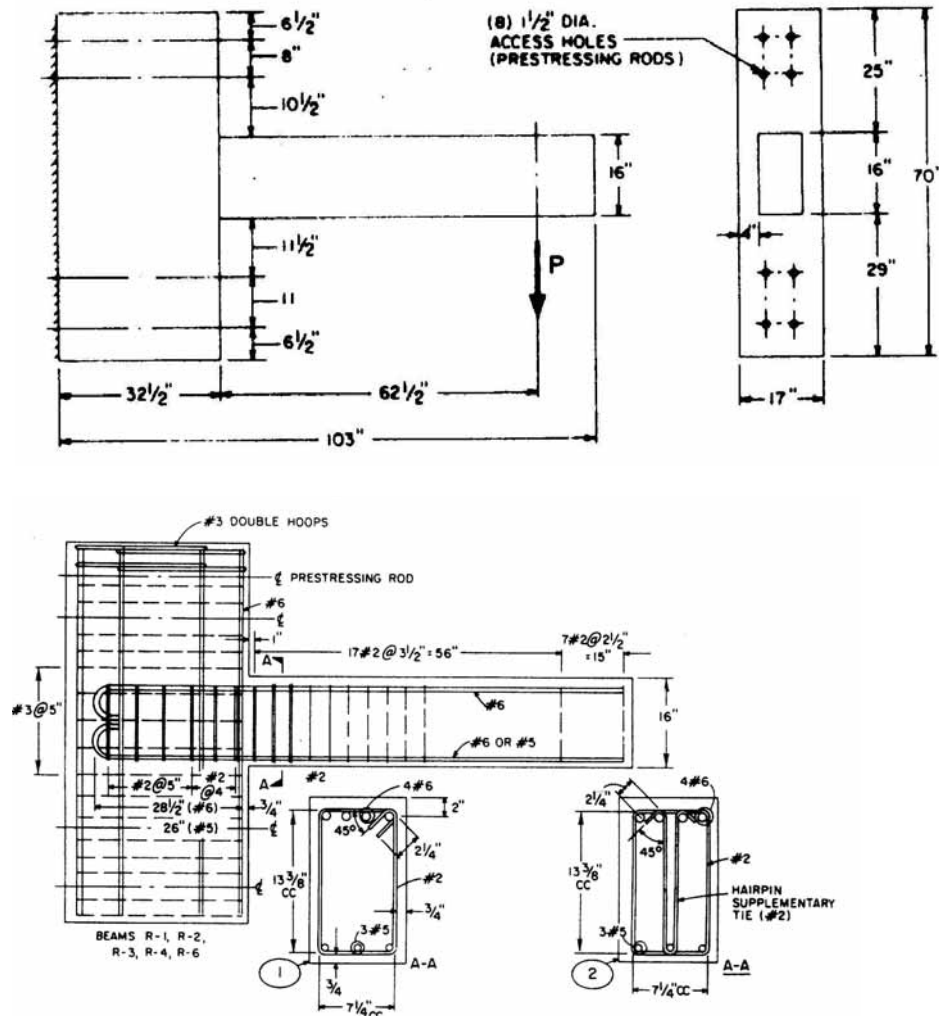


Fig.41. Propiedades geométricas del espécimen R-4 : a) Sección transversal. Armaduras longitudinales y estribos b) Dimensiones en planta y disposición de estribos (*Ibidem*)

La relación longitud / altura del elemento estructural supone que los efectos de las deformaciones por corte serán pequeños con un comportamiento gobernado por flexión, y en concordancia con el tipo de elemento estructural que representa el modelo a escala.

El espécimen R-4 se sometió a un programa de desplazamientos impuestos en el extremo del elemento. La diferencia entre valores extremos del programa de desplazamientos se debe a la armadura longitudinal no-simétrica, como se indica en la Fig.42.

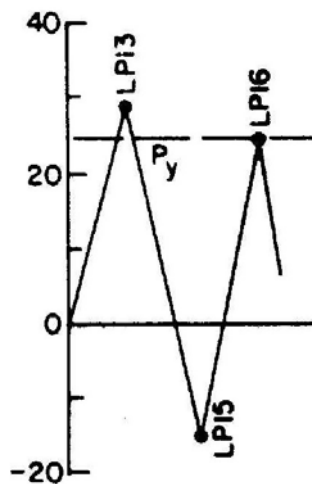


Fig.42. Programa de cargas y desplazamientos en el extremo sobre el espécimen R-4. Las fuerzas están en unidades del sistema imperial [kip]. (Ibídem)

Las características del hormigón utilizadas en el ensayo del espécimen R-4 se indican en Fig.43): máxima tensión de compresión (probeta cilíndrica):  $f'_c = 4380 \cdot \text{psi}$  ( $30.199 \cdot \text{MPa}$ ); deformación a la tensión máxima  $\varepsilon_o = 0.245 \cdot \%$ . El módulo tangente inicial utilizado en el modelo parabólico del hormigón confinado se calcula a partir de los valores máximos de tensión y deformación y resulta en  $E_o = 24650 \cdot \text{MPa}$ . Este valor es menor al módulo secante equivalente dado por la norma ACI [01] calculado a partir de la tensión máxima y la densidad (peso específico) del material con  $E_c = 3810 \cdot \text{ksi}$  ( $26269 \cdot \text{MPa}$ )

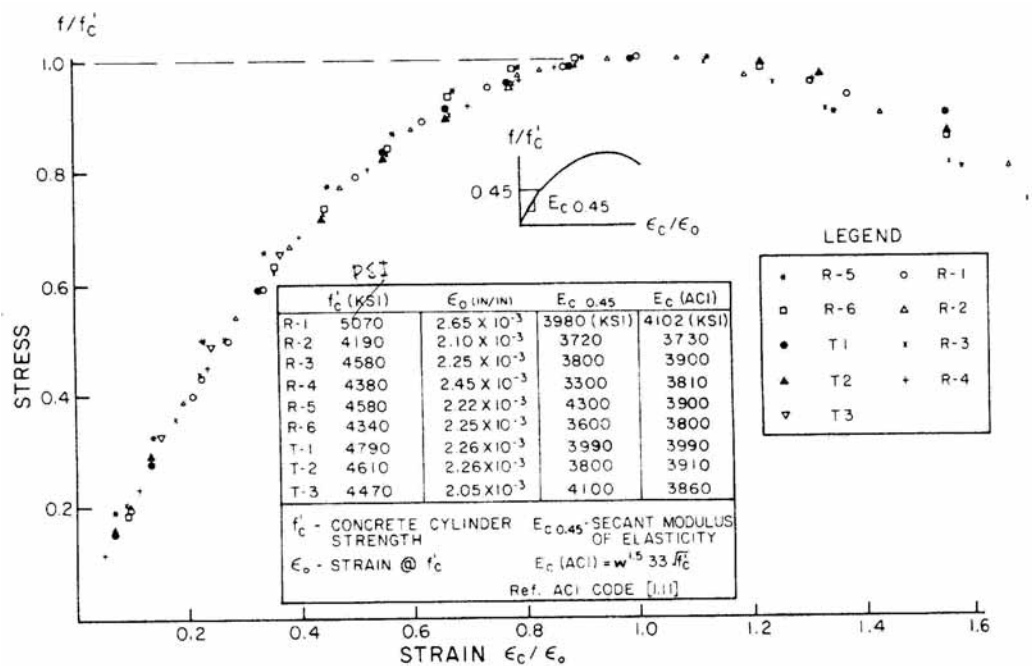


Fig.43. Características mecánicas de los hormigones utilizados en los ensayos de la referencia (Ibídem)

La respuesta numérica del modelo constitutivo para las fibras de hormigón se analizó en los párrafos VI.1.2 y VI.1.3, aunque no se efectuaron estudios de correlación con los valores del ensayo citados arriba. El tramo de ablandamiento del hormigón se ajustó numéricamente teniendo en cuenta el tamaño de la probeta respecto al tamaño del elemento utilizado, para tener en cuenta el fenómeno de localización.

Las características del acero utilizado en las armaduras del espécimen se indican en la figura siguiente. El modelo numérico para las fibras de acero, evaluado numéricamente en el párrafo VI.1.4, no considera el plafón de fluencia para el primer ciclo de cargas del acero. El aumento de la tensión de fluencia del acero se considera a partir de los módulos de endurecimiento cinemático e isotrópico.

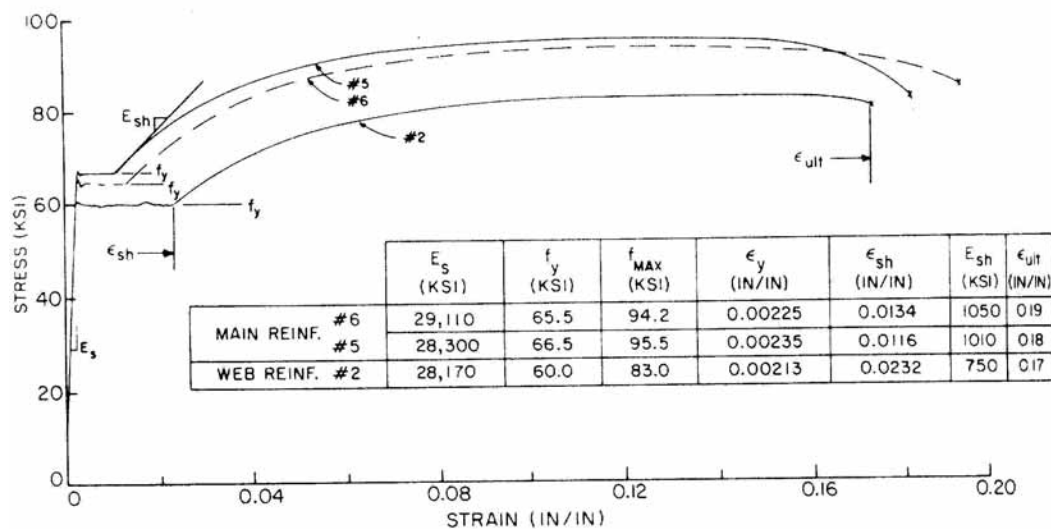


Fig.44. Características mecánicas de las barras de armadura utilizados en los ensayos de la referencia (*Ibidem*)

Los diagramas de carga-desplazamiento y momento-curvatura media del espécimen R-4 se indican en las Fig.45 y Fig.46. La curvatura media del espécimen se determinó a partir de la medición del giro de secciones claramente identificadas en el ensayo. Sobre estas secciones se dispusieron tres marcos de acero rígidos separados 7" (18 cm) desde el apoyo y entre sí.

Los diagramas claramente reflejan la presencia de armadura longitudinal no-simétrica. Sometida a grandes ciclos de desplazamiento en su extremo, la falla se produjo por el pandeo inelástico de las barras de la armadura inferior, 50% menor de la armadura superior.

La respuesta desde el punto 15 al punto 16 responde a un fenómeno denominado *pinching* el cual se describe a continuación:

#### El fenómeno de pinching

Cuando la ménsula es sometida a una carga reversa de abajo hacia arriba (es decir, comprimiendo la armadura superior) las fisuras existentes en la cara superior no se cierran debido a que la armadura superior puede tomar toda la fuerza de compresión necesaria para



equilibrar la resultante de tracción inferior. En la siguiente incremento de cargas hacia abajo (armadura superior traccionada) la situación se invierte, con la diferencia que el acero de la armadura inferior comprimido no puede equilibrar solo la resultante de tracción superior. Consecuentemente, las barras de acero de la armadura inferior se deforman (slip) hasta que las fisuras se cierran y el hormigón comienza a colaborar nuevamente en compresión.

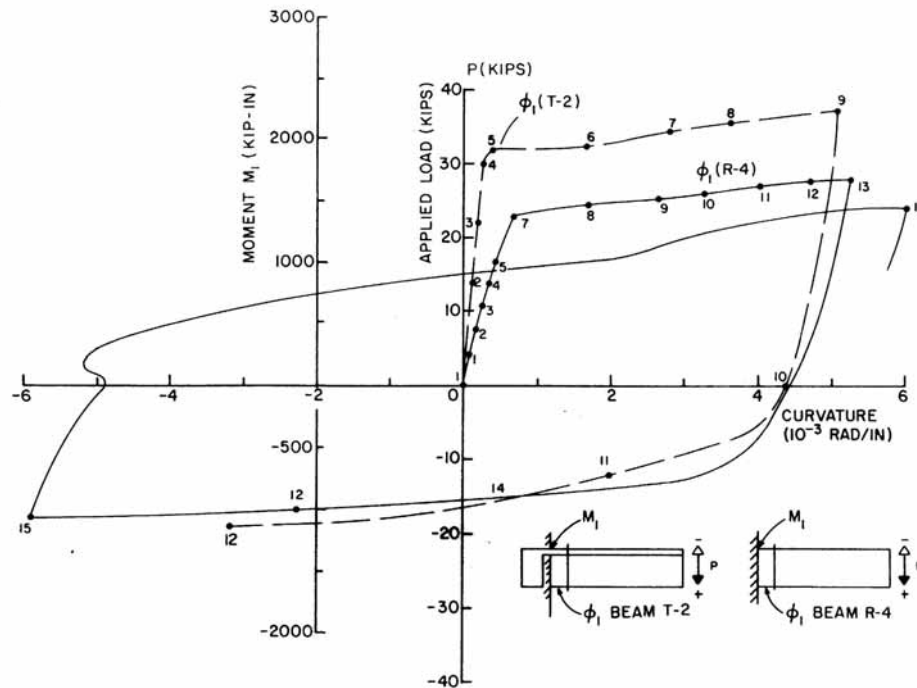


Fig.45. Diagrama momento-curvatura del ensayo sobre el espécimen R-4 (*Ibidem*)

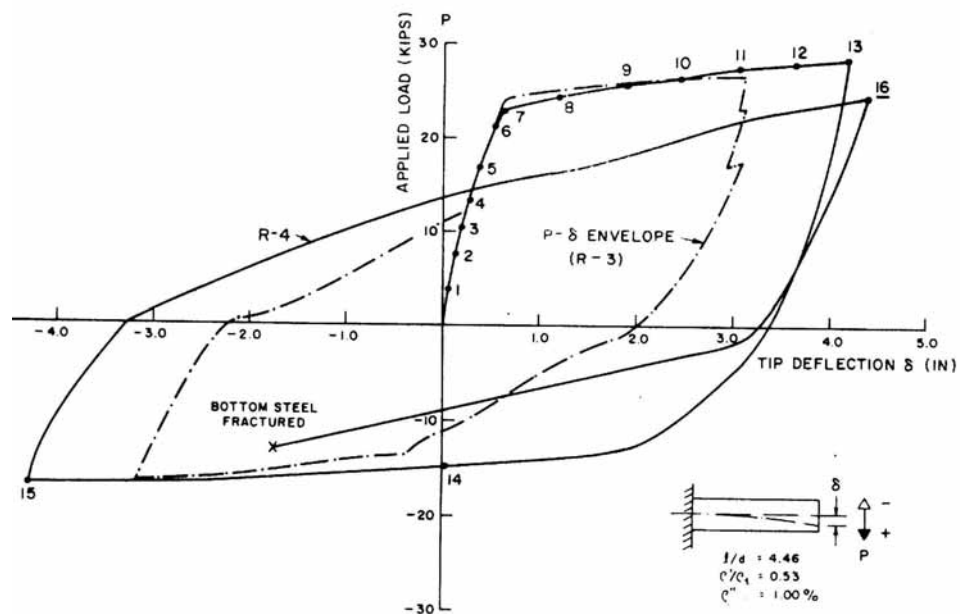


Fig.46. Diagrama carga-desplazamiento del ensayo sobre el espécimen R-4 (*Ibidem*)

### VI.2.3. Correlación de los ensayos con un modelo de elementos finitos

Los resultados del ensayo sobre espécimen R-4 fueron correlacionados con los resultados numéricos de una serie de modelos de elementos finitos. Para evaluar el comportamiento del elemento propuesto, se formularon tres modelos de elementos finitos denominados como: R4-A, R4-B y R4-C. El modelo R4-A fue discretizado con una malla de 6 elementos de dos nodos principales y un nodo interno. Los elementos se dispusieron con dos tamaños diferentes, siendo los elementos de menor longitud los más cercanos a la zona de mayores deformaciones plásticas.

El modelo R4-B fue discretizado con una malla de 2 elementos de dos nodos principales y un nodo interno. Los elementos se dispusieron con dos tamaños diferentes, siendo el elemento de menor longitud el más cercanos a la zona de mayores deformaciones plásticas.

El modelo R4-C fue discretizado con la misma malla del modelo R4-A con la salvedad de que se dispuso un elemento adicional “detrás” del empotramiento para poder simular de manera aproximada el alargamiento real de las barras empotradas (*sliding*) dentro del nudo. La longitud del elemento adicional se adoptó similar a la utilizada como longitud de anclaje en el ensayo físico.-

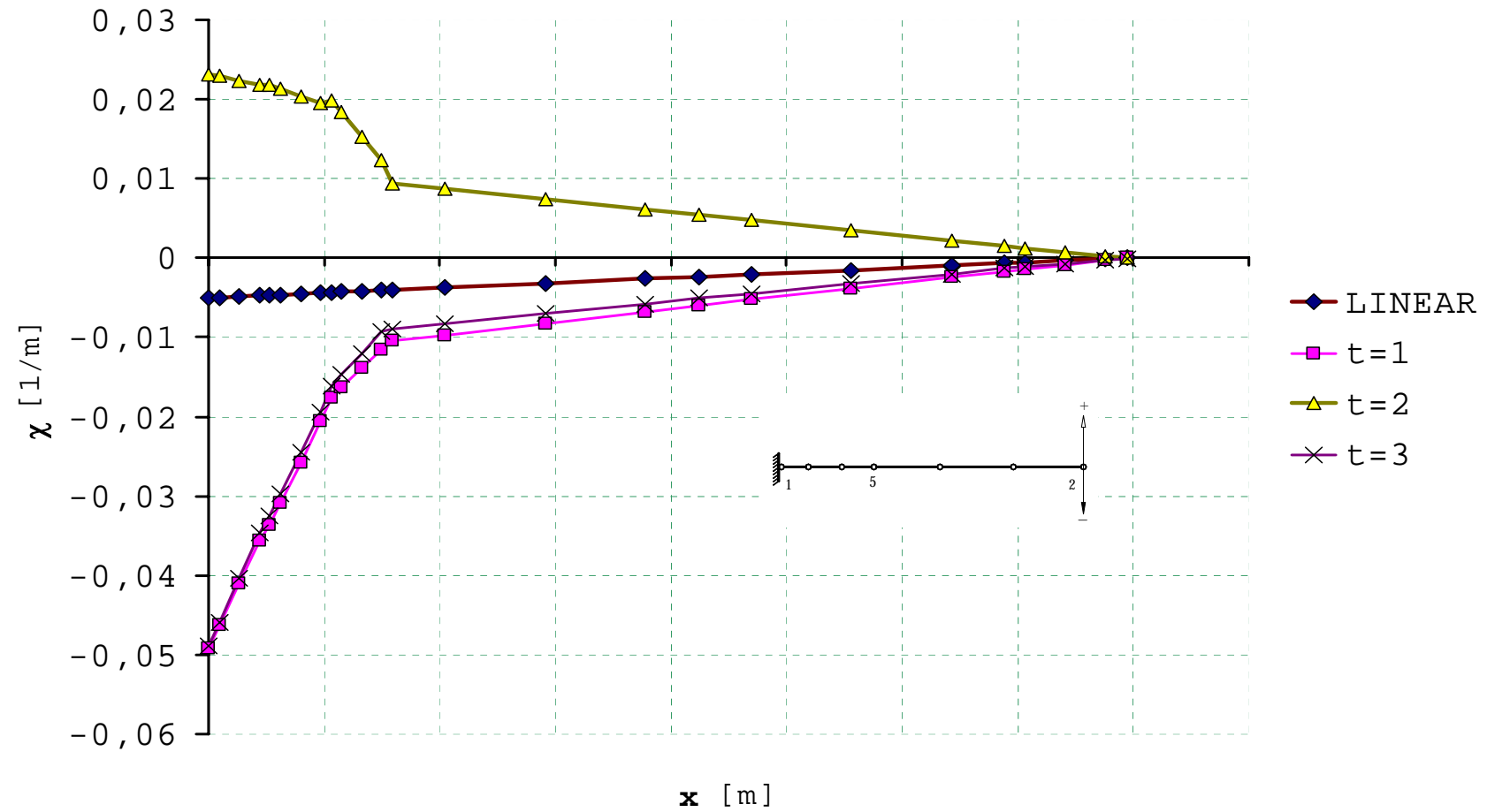


Fig.47. Diagrama de curvatura del modelo numérico R-4.A.

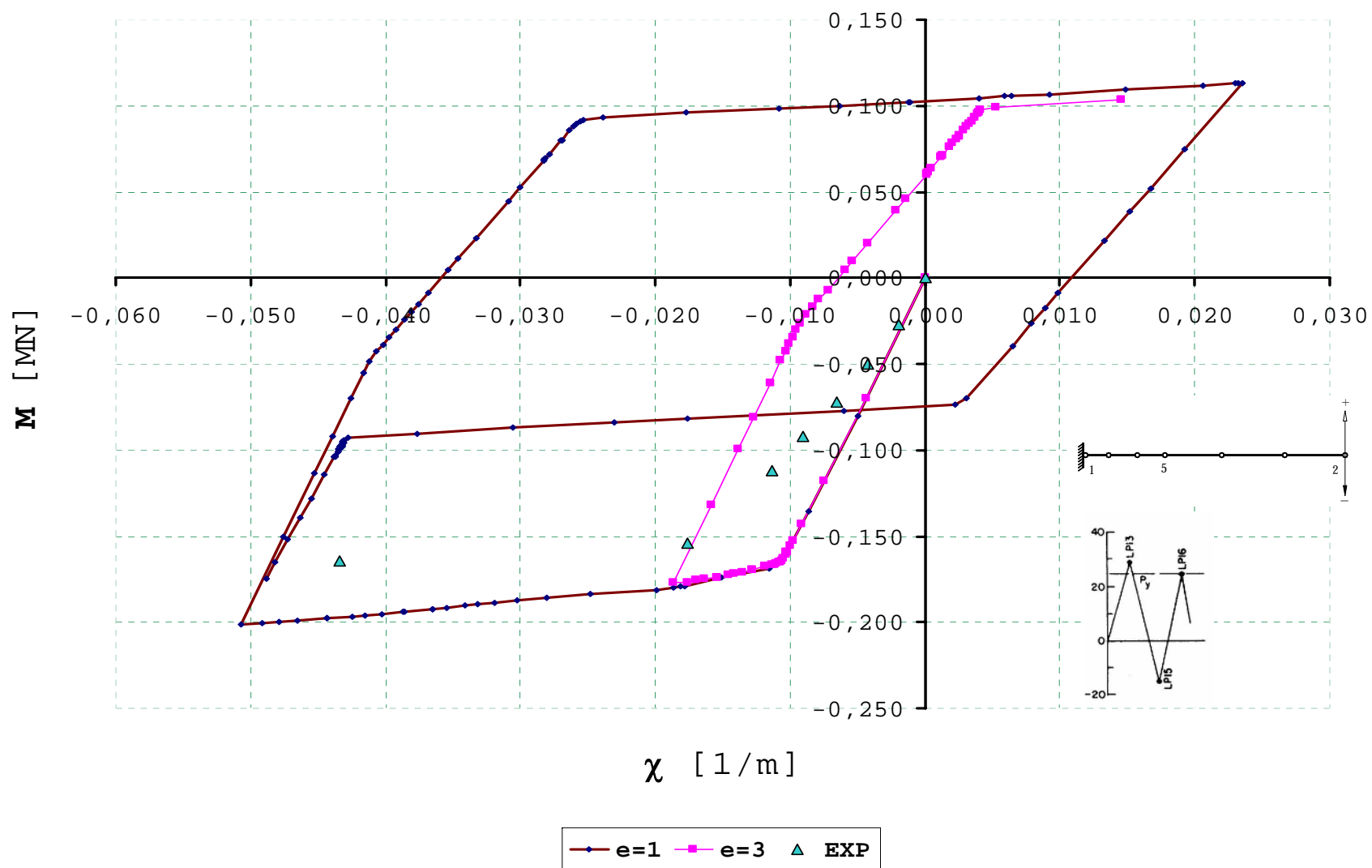


Fig.48. Diagrama momento-curvatura del modelo numérico R4-A. (Signos Invertidos)

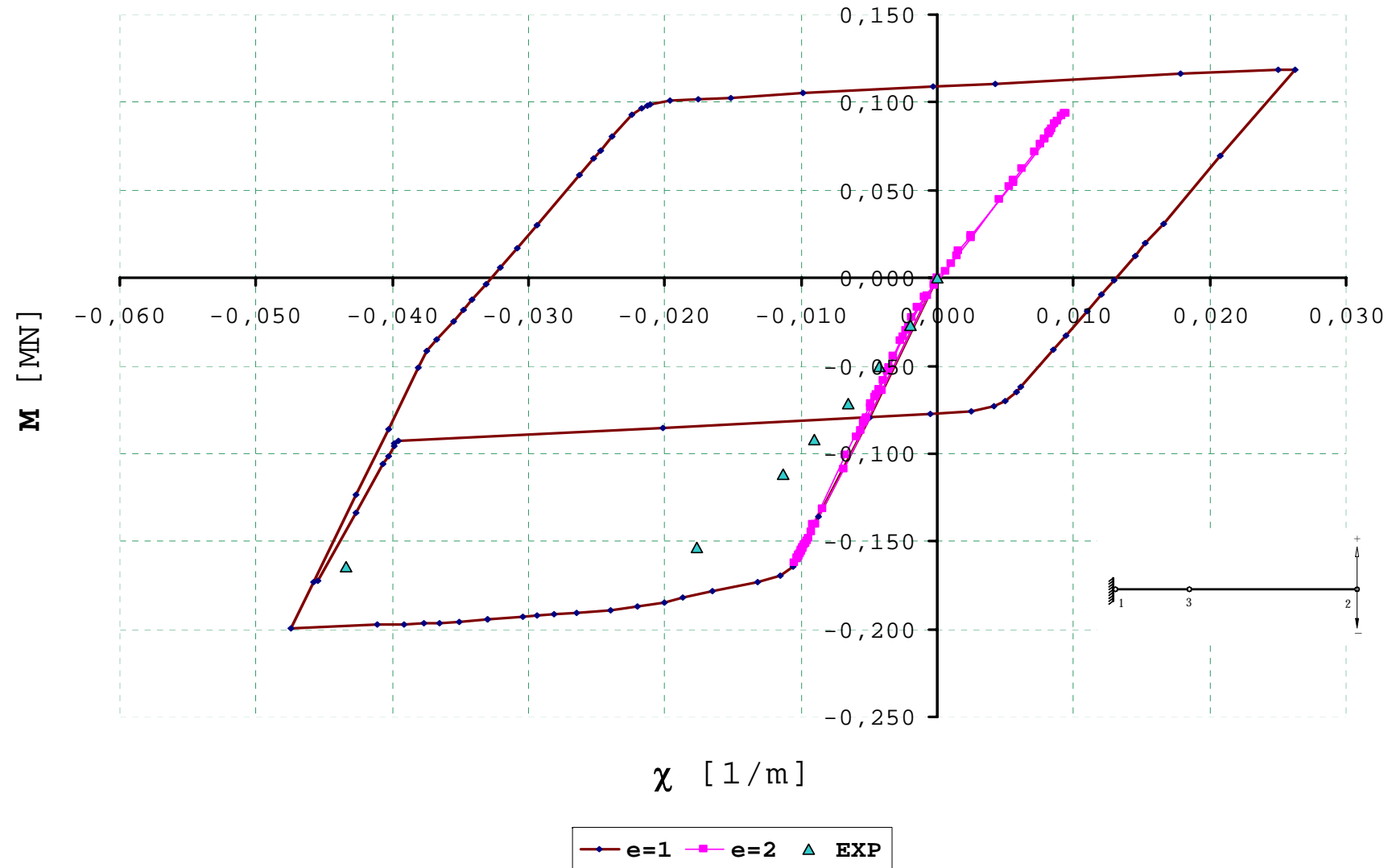


Fig.49. Diagrama momento-curvatura del modelo numérico R4-B. (Signos Invertidos)

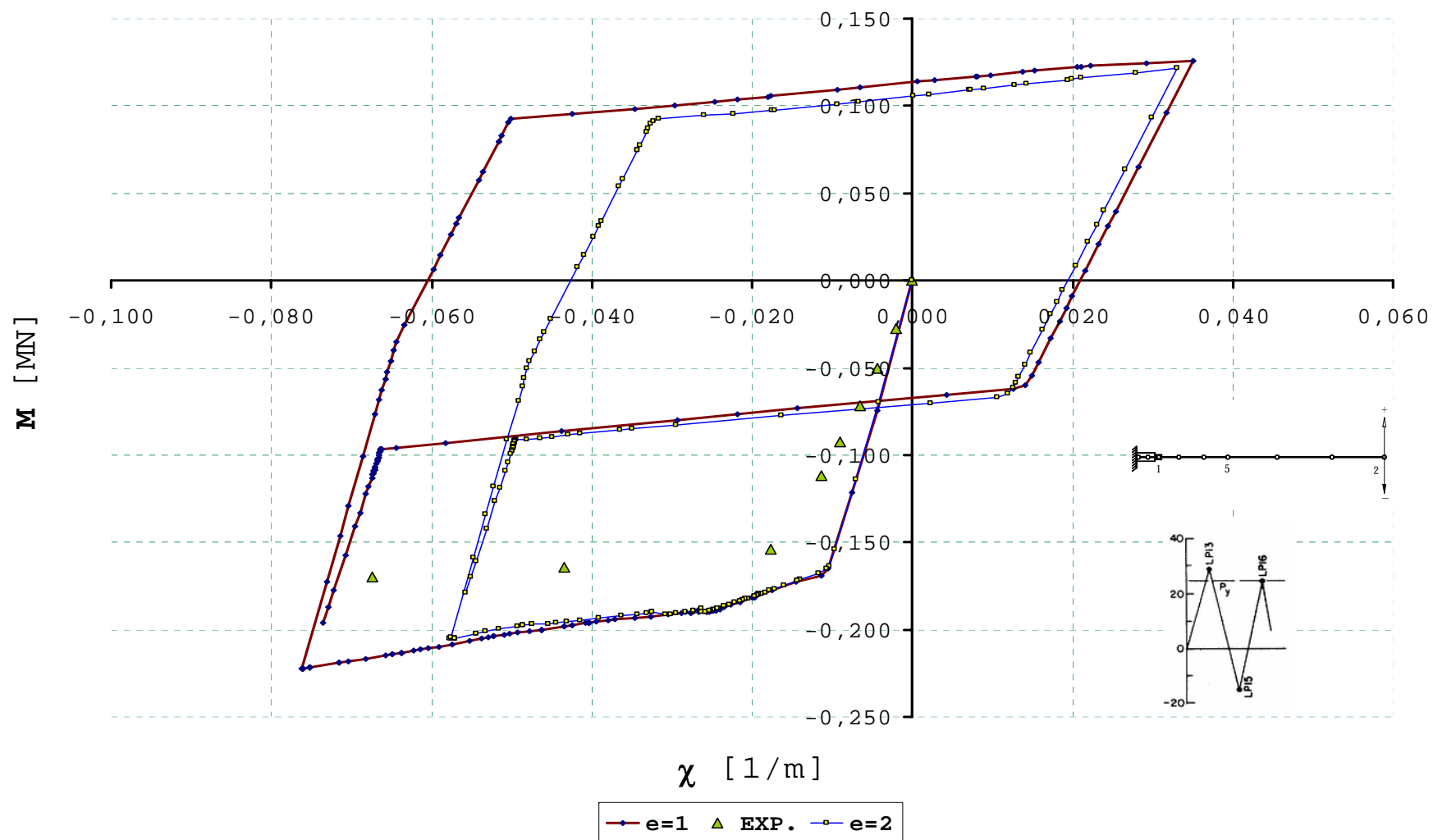


Fig.50. Diagrama momento-curvatura del modelo numérico R4-C. (Signos Invertidos)

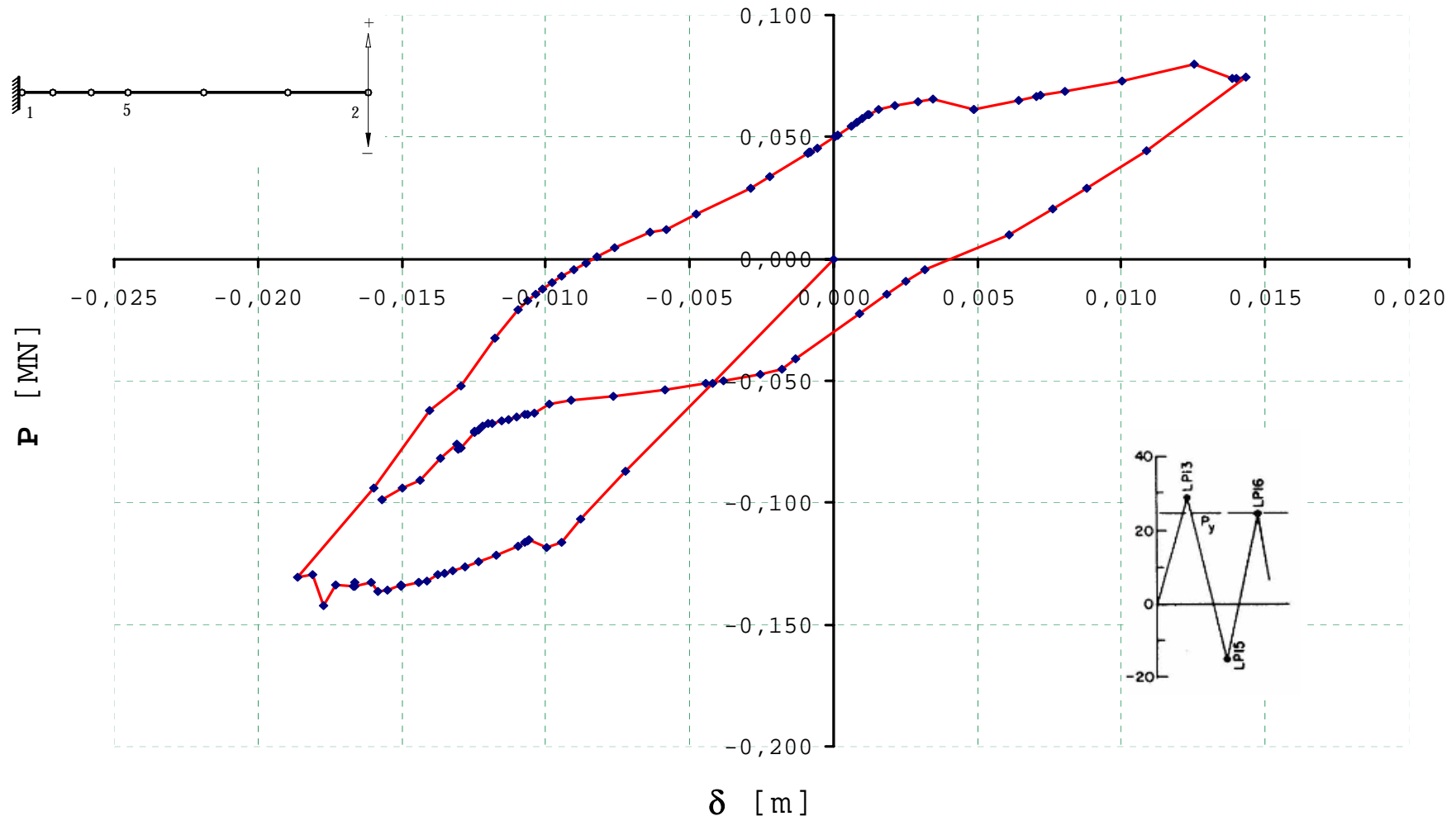


Fig.51. Diagrama carga-desplazamiento del modelo numérico R4-A. (Signos Invertidos)

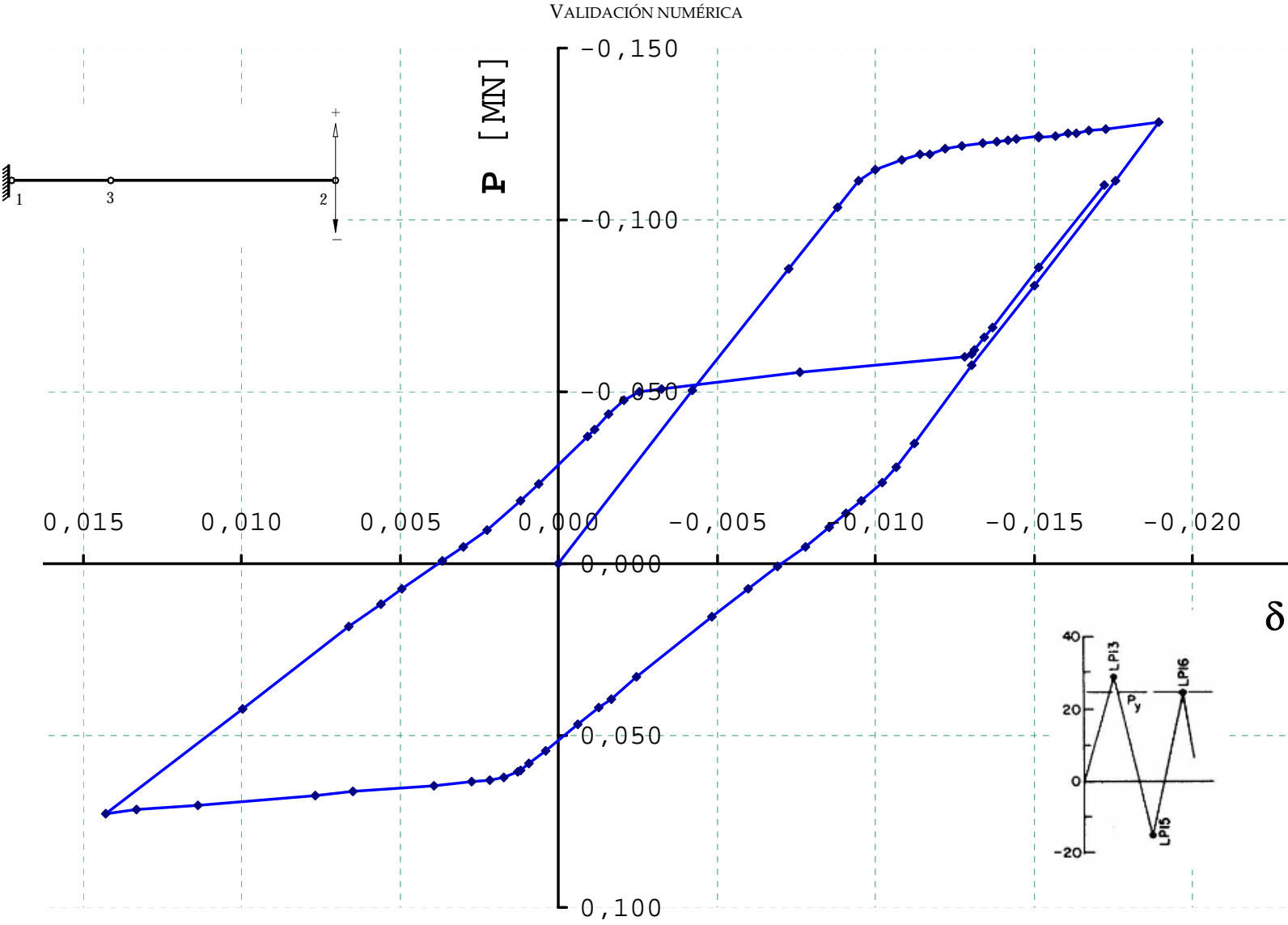


Fig.52. Diagrama carga-desplazamiento del modelo numérico R4-B.



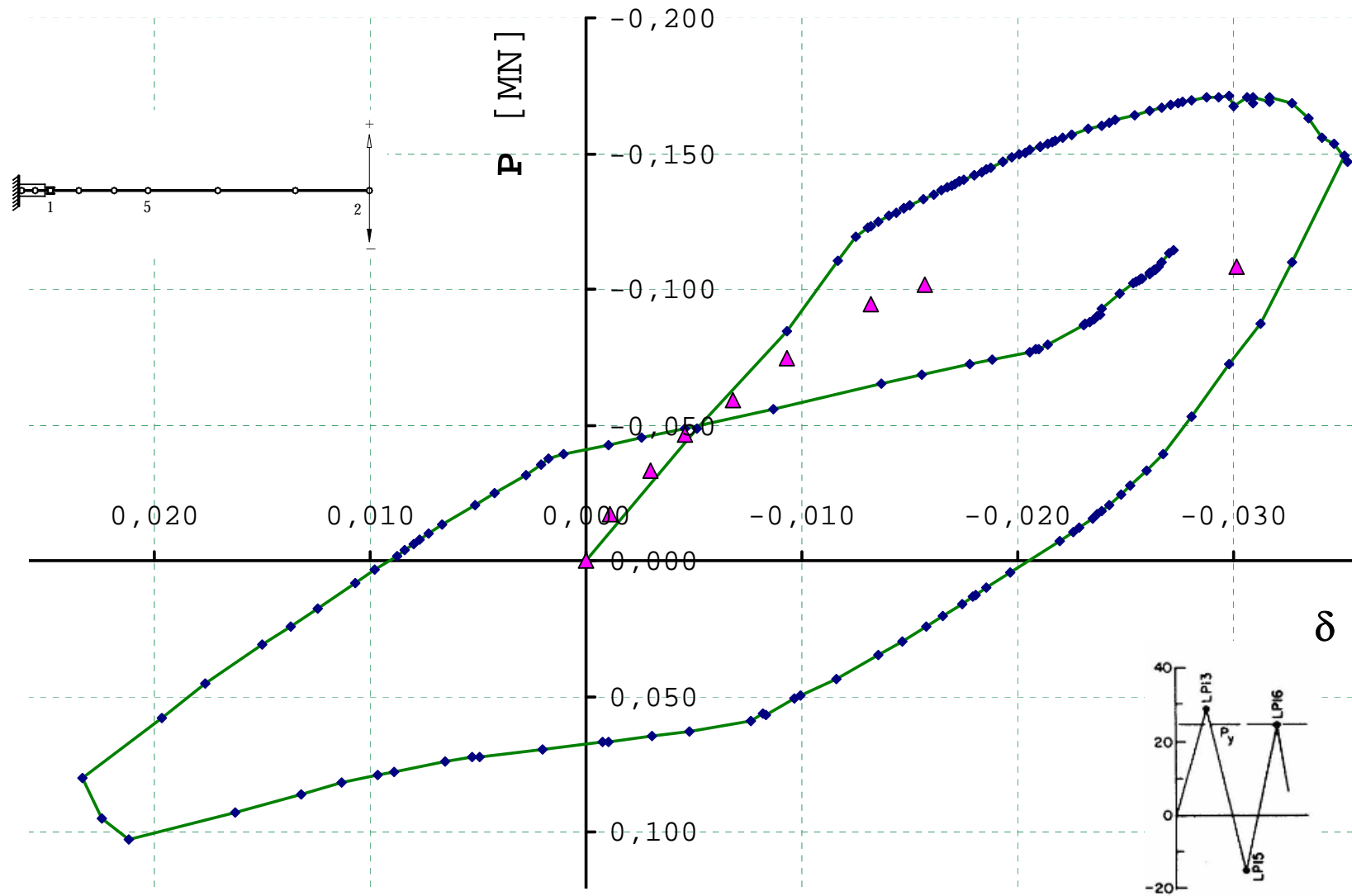


Fig.53. Diagrama carga-desplazamiento del modelo numérico R4-C.

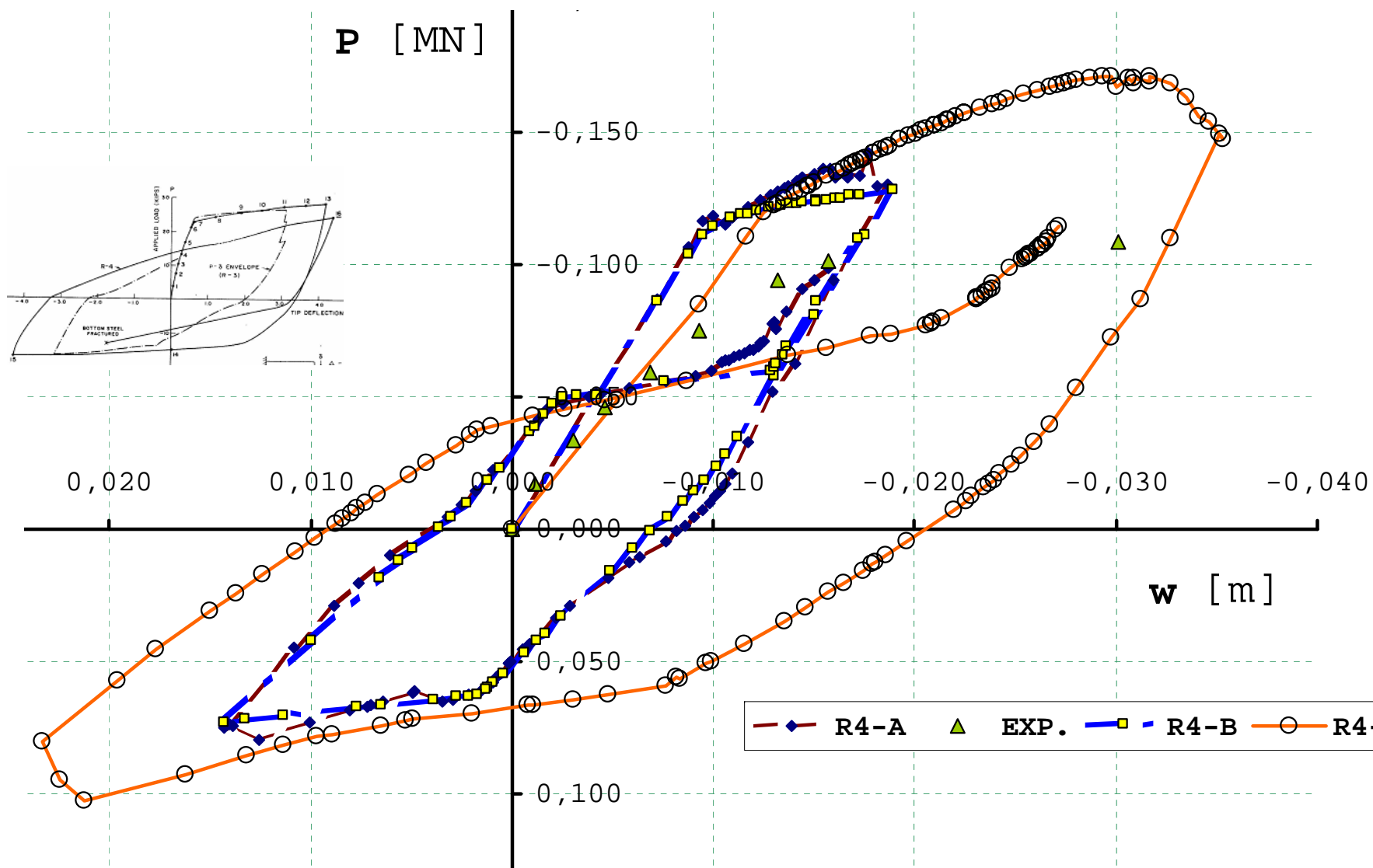


Fig.54. Comparación de los diagramas de carga-desplazamiento de los modelos R4-A, R4-B y R4-C.

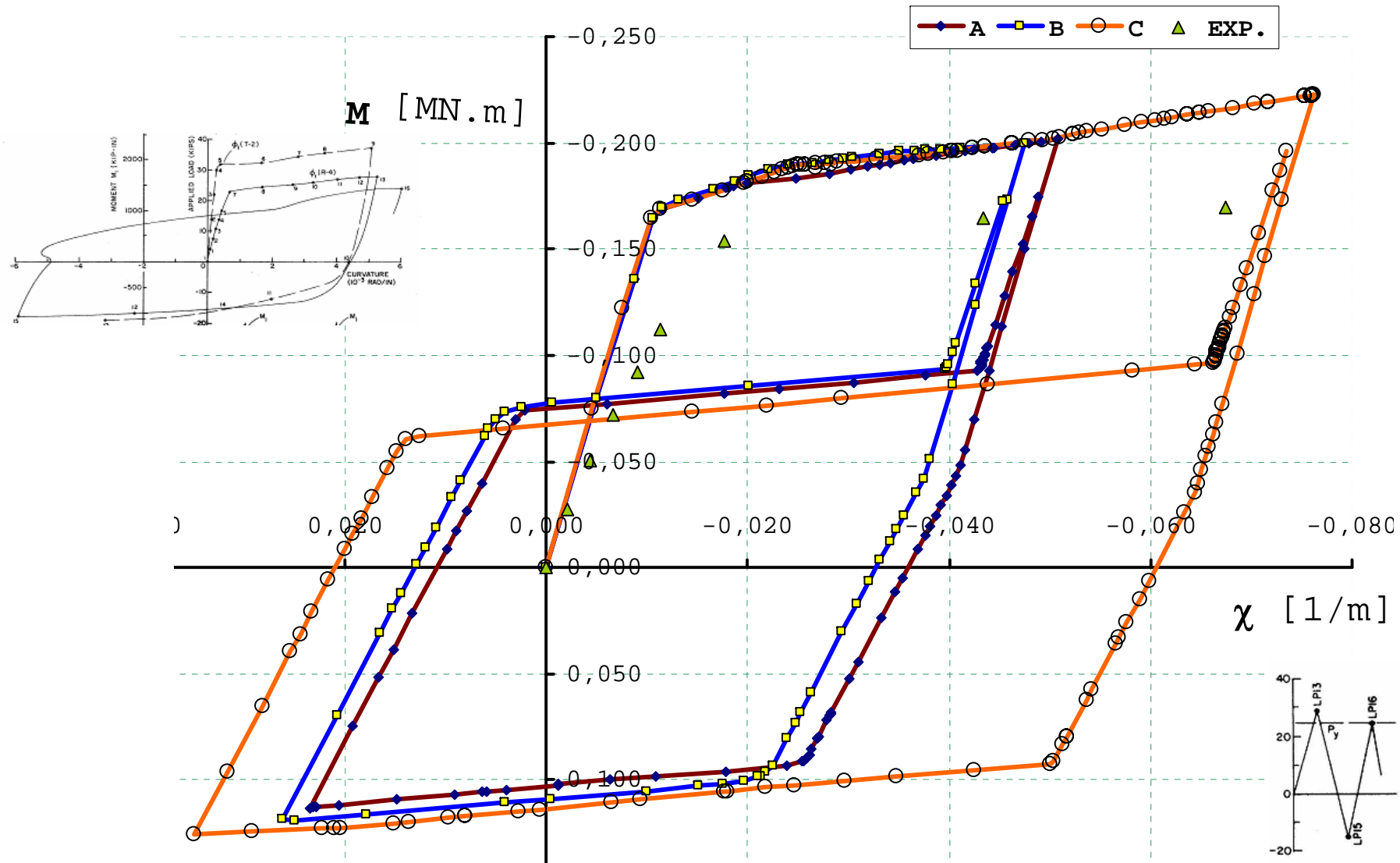


Fig.55. Comparación de los diagramas de momento-curvatura de los modelos R4-A, R4-B y R4-C..



## VI.3. COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO

### VI.3.1. Introducción

Con el objeto de simular numéricamente el comportamiento de una columna de hormigón armado de un piso inferior sometida a cargas cíclicas, se efectuó un modelo de elementos finitos con un programa de cargas acorde al de una excitación sísmica.

### VI.3.2. Correlación de los ensayos con un modelo de elementos finitos

El modelo de elementos finitos se cargó con un programa de cargas que combina compresión / tracción y flexión cíclica. La malla de elementos finitos está formada por 2 elementos de 2 nodos con un nodo intermedio para deformaciones membranales, con dos tamaños de elemento diferentes. Las características mecánicas de los materiales se adoptaron con los valores del modelo R-4. Las propiedades geométricas del elemento se tomaron iguales a las del espécimen R-5 del ensayo (sección rectangular de hormigón armado con armadura simétrica), con idéntico grado de confinamiento que el espécimen R-4

La respuesta del modelo, con un mínimo numero de elementos, mostró resultados satisfactorios.

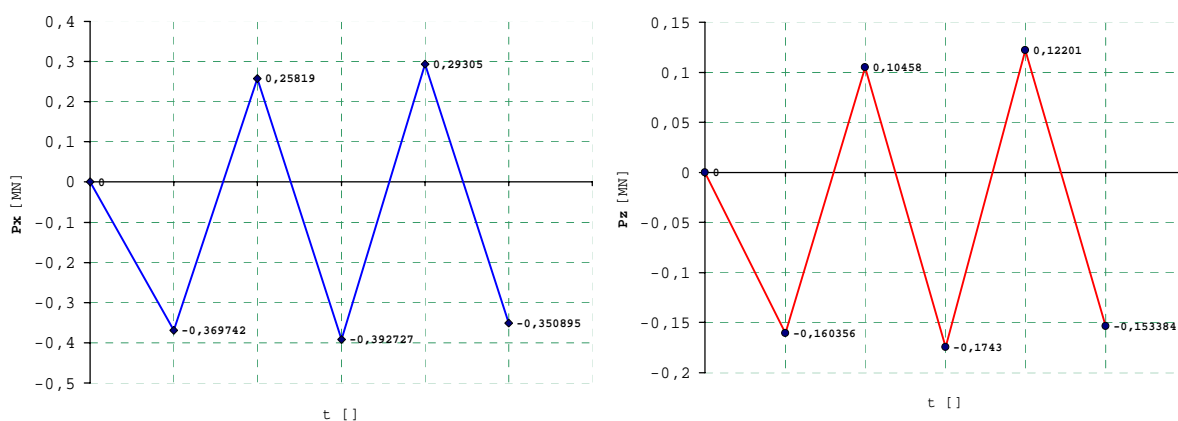


Fig.56. Programa de cargas cíclicas



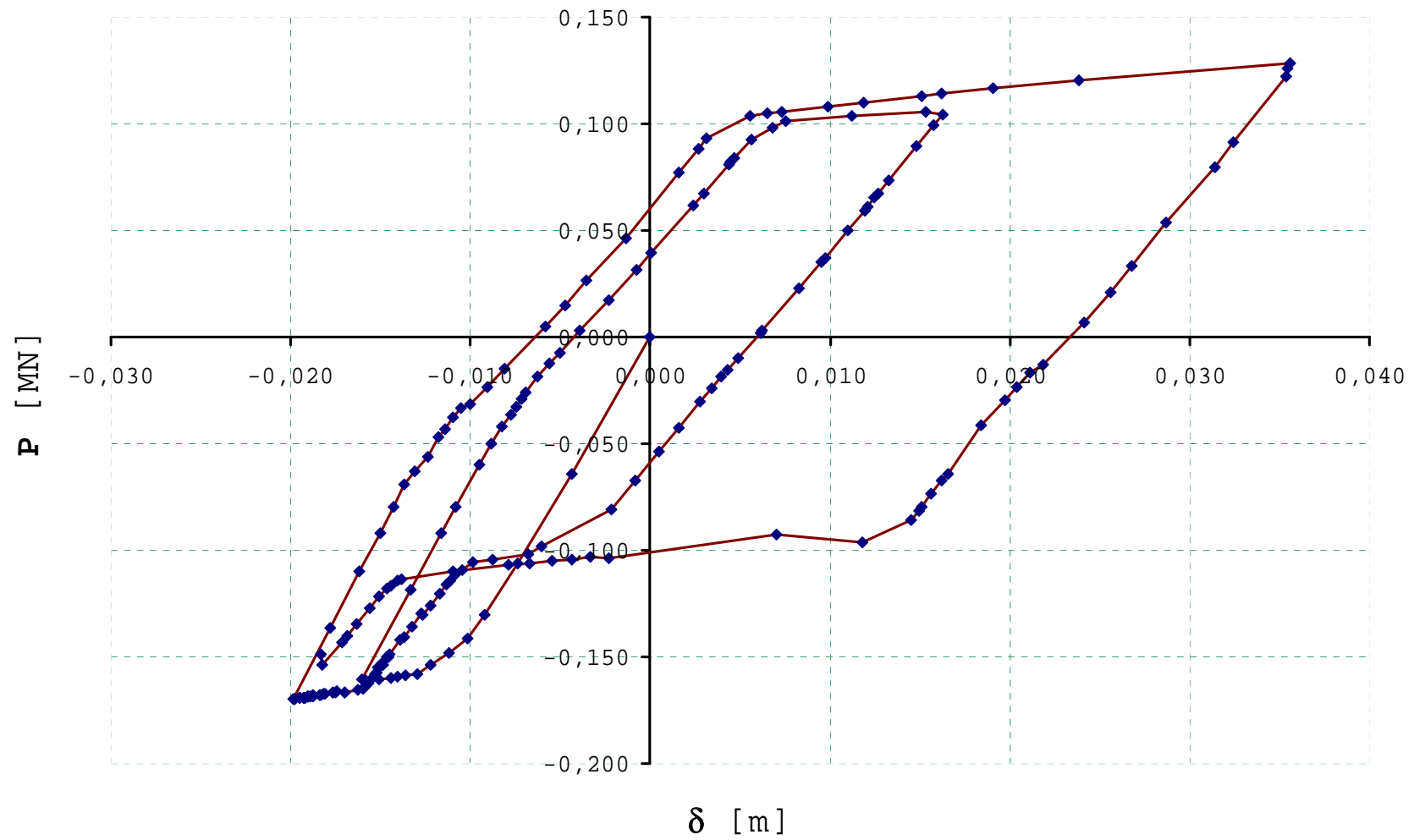


Fig.57. Diagrama carga-desplazamiento del modelo R5-A. Desplazamientos verticales sobre el nodo extremo (2)

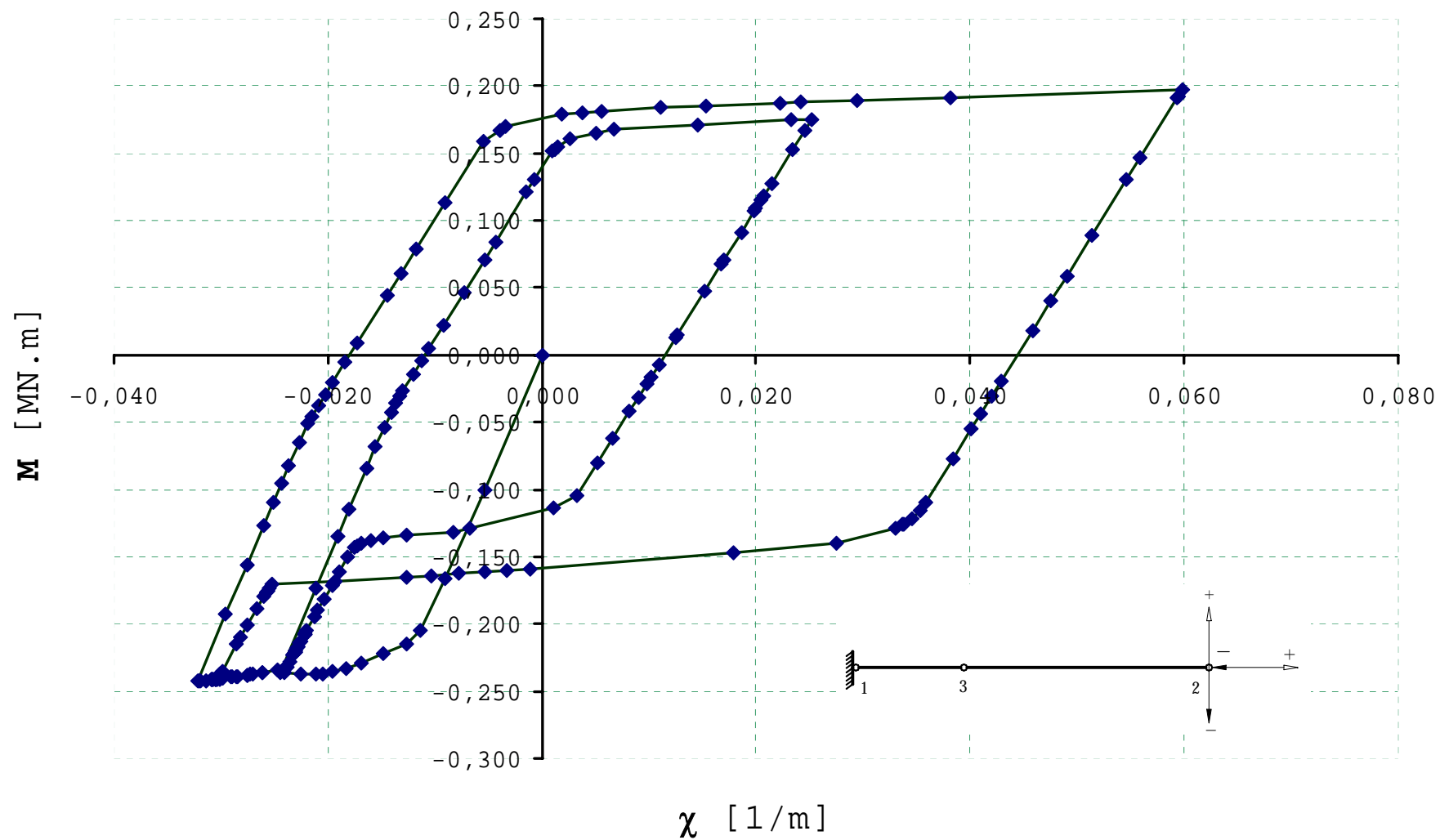


Fig.58. Diagrama momento-curvatura del modelo R5-A. Curvatura sobre el nodo del empotramiento (1)



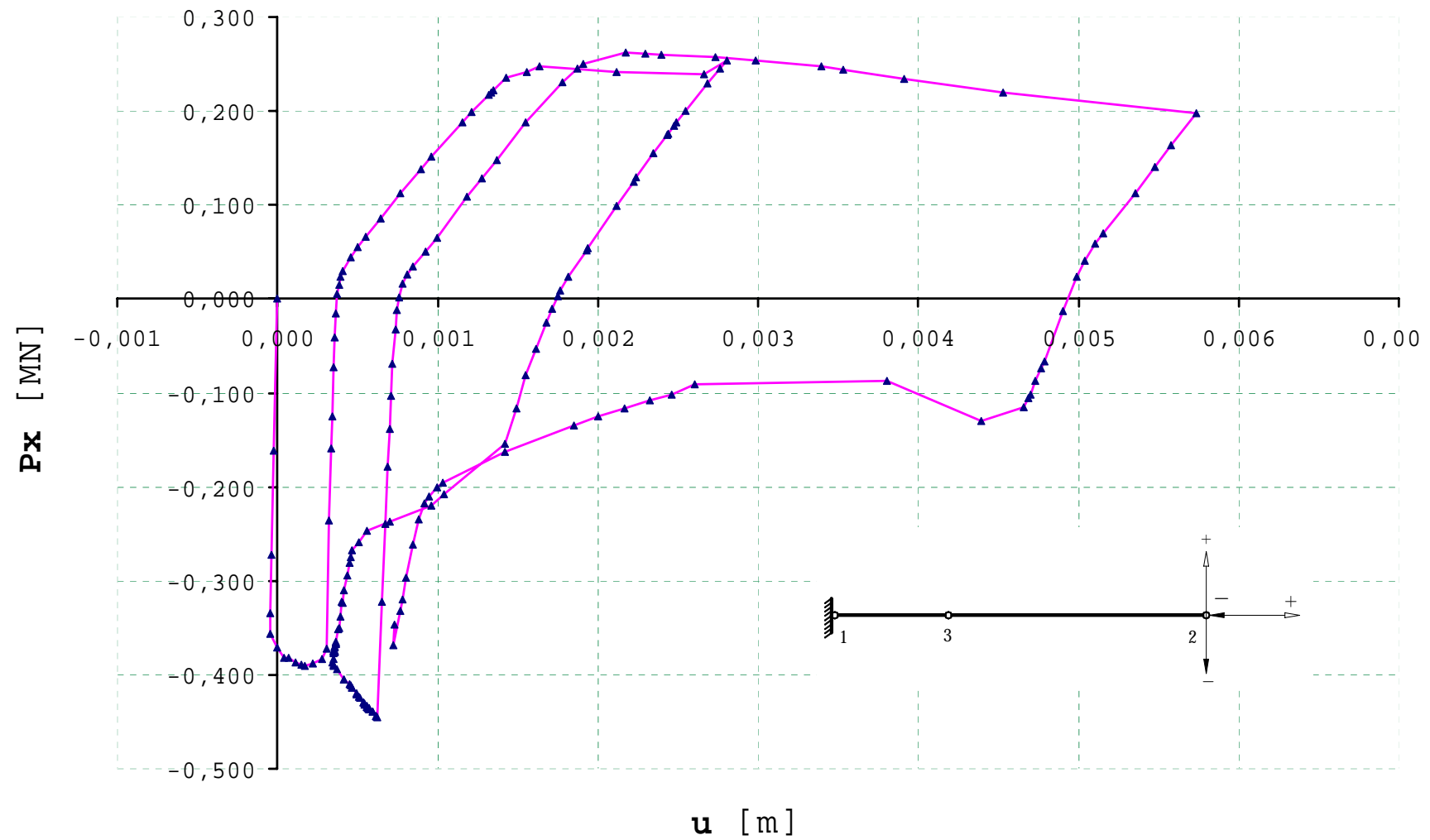


Fig.59. Diagrama carga-desplazamiento longitudinal medidas sobre el nodo extremo (2).

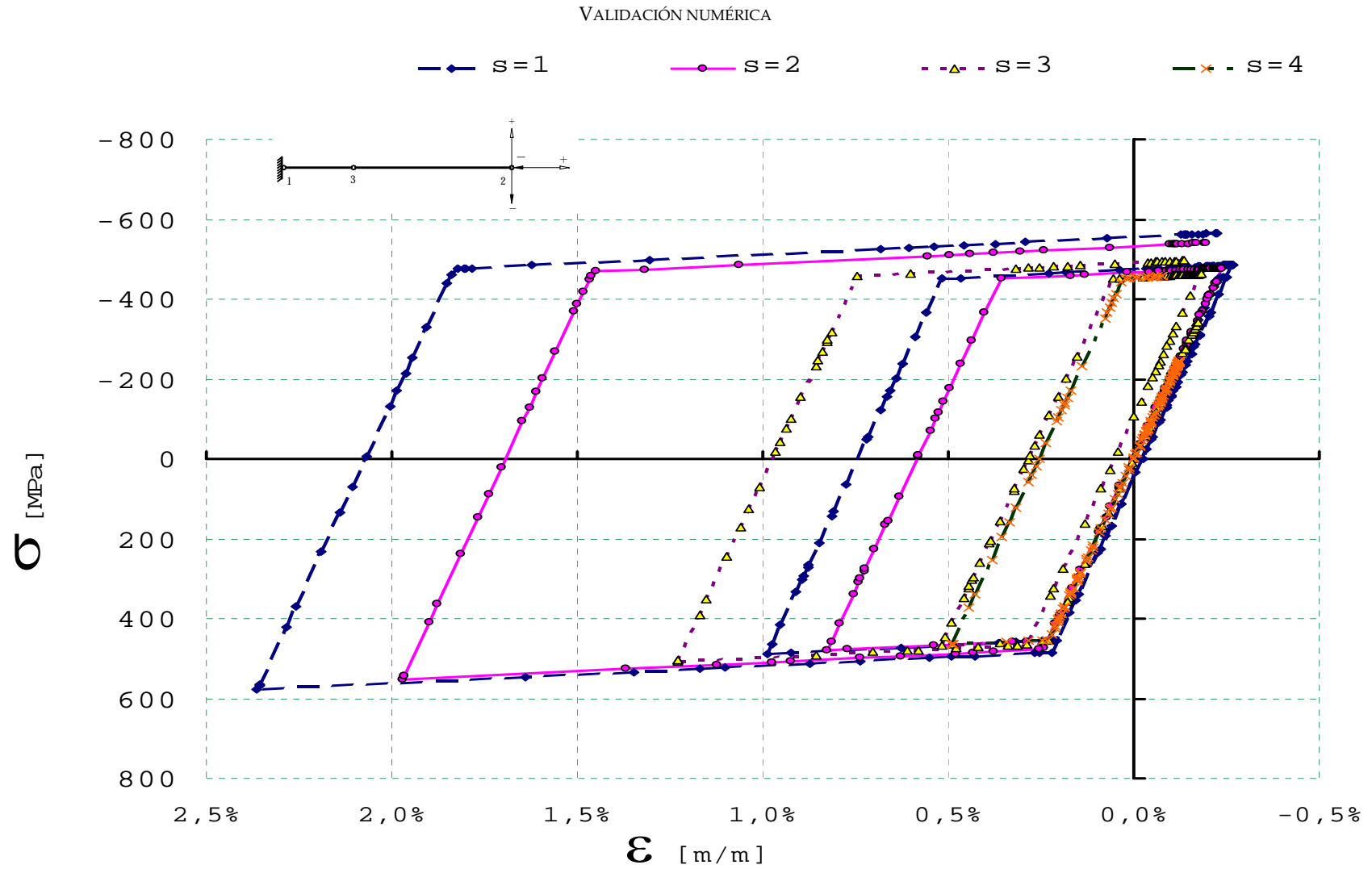


Fig.60. Tensiones en las barras de armadura, pertenecientes a diferentes secciones (puntos de Gauss) del elemento 1

## VI.4. CONCLUSIONES

Se formuló un elemento finito de viga-columna de dos nodos, basado en interpolación hermítica de desplazamientos. El elemento incluye cinemática no lineal, deformaciones por corte y funciones de forma dependientes de la rigidez del material, con un número de puntos de integración que puede ser elegido por el usuario.

En cada punto de integración se discretizó la sección a través de un número de fibras que también puede ser elegido por el usuario. Cada fibra admite una ecuación constitutiva que puede ser la de hormigón confinado o barras de acero. La integración sobre las diferentes fibras de la sección “condensa” la no-linealidad del material en un conjunto de parámetros de estado, los cuales representan la rigidez de la sección y luego se interpolan sobre todo el elemento a través de un esquema de funciones de forma ampliadas.

Se extendió la ecuación constitutiva de hormigón confinado en carga monotónica para carga cíclica y daño elástico. Esta ecuación fue implementada numéricamente mediante un algoritmo de retorno implícito resuelto analíticamente. Para el acero se adoptó un modelo de elasticidad lineal y plasticidad con endurecimiento isotrópico y cinemático, implementado con un algoritmo de retorno radial clásico (Simo). Esto permitió la consideración del efecto Bauschinger con razonable precisión y una formulación matemática consistente.

Se implementó una estrategia numérica para la actualización de variables de estado a partir del control de deformaciones a nivel de fibra y del control de fuerzas a nivel de elemento. La utilización del control de fuerzas como estrategia de actualización, trajo como resultado inestabilidades numéricas cercanas a la carga máxima de colapso. Estas inestabilidades son inherentes al método y sugieren la implementación de una estrategia de control de desplazamientos para este tipo de problemas.

Pocos elementos fueron suficientes para obtener una razonable capacidad predictiva aún en situaciones complejas de carga y geometría. Este comportamiento se obtuvo gracias a una interpolación hermítica de desplazamientos y una interpolación de deformaciones por corte consistente, con funciones de forma variables con el cambio de la rigidez de cada punto de Gauss. A nivel de secciones, pocas fibras permiten obtener buenas aproximaciones, también gracias a una elevada precisión de los algoritmos de integración correspondientes (Gauss-Lobatto). En contrapartida, discretizaciones con un número de fibras mayor a 9, presentan inestabilidades numéricas que pueden evitarse usando esquemas de integración del tipo cerrado (Newton-Cotes).

Finalmente un programa de computación utilizando los lineamientos descriptos fue desarrollado y aplicado a algunos problemas de referencia, obteniéndose resultados que ajustan con razonable aproximación los valores experimentales.



## REFERENCIAS

- [01] ACI., *Building Code Requirements for Reinforced Concrete: ACI Committee 318*. American Concrete Institute. Farmington Hills (1999)
- [02] Anderson, J.C. and Townsend, W.H., "Models for RC Frames with Degrading Stiffness", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 103, ST12 (1977)"
- [03] Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall (1982).
- [04] Bertero, V. V. and Mahin, S.A., "An Evaluation of Some Methods for Predicting the Seismic Behavior of Reinforced Concrete Buildings", *Earthquake Engineering Research Center, Report No EERC75-5*, University of California at Berkeley (1975)
- [05] Bertero, R. D., *Diseño Sismo-Resistente basado en la Performance*, (en prensa)
- [06] Bertero, R. D. y Carnicer R., "Modelización de estructuras de hormigón armado mediante elementos finitos de fibra". *XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural.*, Punta del Este,(2001)
- [07] Clough, R. W., Benuska, K. L. and Wilson, E. L., "Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings", *Proceedings, Third World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand*, Vol. 11, New Zealand National Committee on Earthquake Engineering, (1965)
- [08] Crandall, S. H., *Engineering Analysis: A survey of numerical Procedures*, McGraw Hill, New York (1956).
- [09] Crisfield, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. I, John Wiley & Sons, New York (1991).
- [10] Dvorkin E., Oñate E., and Oliver, J. "On a Non-Linear Formulation For Curved Timoshenko Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments". *Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1597-1613 (1988)
- [11] Dvorkin, E. "Mecánica Computacional II". Apuntes de Clase. Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires
- [12] Filippou, F.C. "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames under Cyclic Load Reversals", *Earthquake Engineering Research Center, Report No UCB/EERC-88/12*, University of California at Berkeley (1988)
- [13] Giberson, M., "The Response of Nonlinear Multi-Sotrey Structures Subjected to Earthquake Excitation", *Earthquake Engineering Reponse Lab*, Pasadena (1967)

- [14] Hildebrand, F. H., *Methods Of Applied Mathematics*, Dover Publications. Inc., New York (1966).
- [15] Isaacson, E. and H. Keller, H., *Analysis of Numerical Methods*, Dover Publications. Inc., New York (1965).
- [16] Keshavarzian, M. and Schobrich, W.C., "Computed Nonlinear Seismic Response of R/C Frames-Wall Structures", *Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 515*, University of Illinois At Urbana-Champaign (1984)
- [17] Kincaid, D. and Cheney, W., *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole (1996).
- [18] Ma, S. Y. and Bertero, V. V. and Popov, E. P., "Experimental and analytical studies of the hysteretic behavior of reinforced concrete rectangular and T-beams", *EERC Report 76/02, Earthquake Engineering Research Center*, University of California, Berkeley (1976)
- [19] Mahasurevachai M., "Inelastic Analysis of Piping and Tubular Structures", *Ph.D Dissertation, Departament of Civil Engineering*, University of California at Berkeley (1982)
- [20] Melosh, R. J., *Structural Engineering Analysis By Finite Elements*, Prentice Hall Intl. Series in Civil Engineering (1990).
- [21] Menegotto M. and Pinto, P., "Method of Analysis of Cyclically Loaded R.C. Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending", Preliminary Report, *International Association for Bridge and Structures Engineering Symposium 13*, Lisboa, Portugal (1973)
- [22] Narayanaswami R. y Adelman, M., "Inclusion of Transverse Shear Deformation in Finite Element Displacement Formulations". *AIAA Journal*, Vol.12, n° 11, 1974, pp.1613-1614 (1974).
- [23] Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal*, Centro Internacional de Métodos Numéricos, Barcelona, España (1995).
- [24] Otani, S., "Inelastic Analysis of R/C Frame Structures", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 100, St7 (1974)
- [25] Powell, G.H. "Notes on Computer Methods for Nonlinear Structural Analysis", Apuntes de clase del Curso CE 223B, University of California at Berkeley (1985)
- [26] Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications. Inc., New York (1968).
- [27] Riahi, A., Powell, G.H. and Mendkar, D. "3D Beam Column Element for the ANSR II Program (Parallel Element Theory)", *Earthquake Engineering Research Center, Report No EERC 79-31*, University of California at Berkeley (1979)
- [28] Scott, B. D., Park, R. y Priestley, M. J. N., "Stress-Strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates", *ACI Journal*, Vol 79, pp.13-27 (1982)
- [29] Simo, J. C.† y Hughes, T. R. *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York (1998).
- [30] Soleimani, d., "Reinforced Concrete Ductile Frames UNDER Earthquake Loading with Stiffness Degradation", *Ph.D. Dissertation*, University of California at Berkeley (1979)

- [31] Spacone, E., Filippou, F.C. and Taucer F.F., "Fibre Beam-Column Model For Non-Linear Analysis of R/C Frames", *Earthquake Engineering And Structural Dynamics Journal*, ASCE, Vol.25,727-742 (1996)
- [32] Takeda, T., Sozen, M.A. and Nielsen, N.N., "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.96, ST12 (1970)
- [33] Verri, A. D. y Bertero, R. D., "FEARCS/1D – Programa de elementos finitos para el análisis de estructuras de pórticos planos de hormigón armado. Manual de Referencia.", *Departamento de Estabilidad, UBA*, Buenos Aires, (En prensa)
- [34] Zeris, C. A., "Three-Dimensional Non-Linear response of Reinforced Concrete Buildings", PhD Disrtn., Univ. of California At Berkeley (1986).
- [35] Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R., *El Método de los Elementos Finitos*, Vol. II, McGraw Hill, U.K. (1967).





